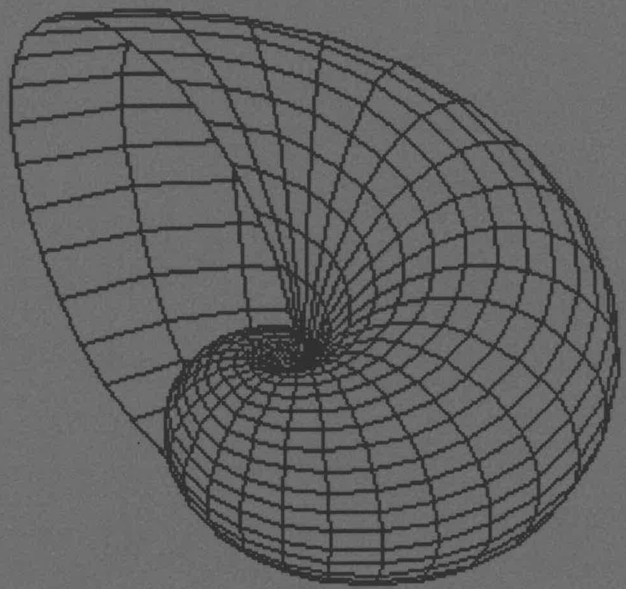
IREM DES PAYS DE LOIRE



Une Progression de Mathématiques en Baccalauréat Professionnel

Volume 1
Juin 1992

Bernard SOULE-NAN

INTRODUCTION

Le présent document (Volume 1) constitue une partie d'un cours polycopié utilisé depuis plusieurs années dans une classe de Baccalauréat Productique Mécanique. L'objectif ayant présidé à sa rédaction est, compte tenu de la lourdeur du programme de mathématiques (& de sciences physiques!), de sa difficulté pour des élèves issus de classes de BEP ORSU et du peu d'heures allouées pour sa réalisation, de réduire au minimum le temps consacré à la prise de notes. L'activité des élèves dans ce domaine se réduit donc le plus souvent à mettre en valeur les résultats essentiels et à reporter les schémas et compléments apportés par le professeur et notés au tableau dans les espaces laissés libres.

Il est ainsi rendu possible de consacrer le maximum de temps à la réalisation d'exercices, activité primordiale dans la démarche d'assimilation des élèves concernés.

Ce premier volume regroupe pour une grande part des notions déjà abordées en BEP. Il a pour ambition d'approfondir et d'élargir les concepts de l'élève, souvent très fragmentaires, sans toutefois abuser des abstractions superflues.

Les exercices qui sont proposés pour chaque chapitre servent, soit à introduire une notion ou justifier un résultat, soit à assimiler et appliquer les contenus du cours. La dernière partie des thèmes proposés met en évidence l'utilisation de l'outil mathématique présenté à la résolution de situations faisant partie du domaine des sciences physiques ou du domaine professionnel. A chaque chapitre se rapporte un exemple d'interrogation de contrôle.

Tout collègue enseignant dans une section de Baccalauréat professionnel industriel et acceptant de s'inscrire au moins partiellement dans la démarche proposée trouvera dans cet ouvrage un document directement utilisable dont il peut imposer l'achat aux élèves, vu la modicité du prix de revient par rapport à un livre classique. Les exemples de contrôles sont regroupés en fin d'ouvrage afin d'être facilement récupérables avant distribution du polycopié!

TABLE DES MATIERES

1- VECTEURS (Rappels et compléments)

1.1- BIPOINT

* DEFINITION:
Un couple de points A et B est appelé bipoint (ou vecteur lié) et noté (A,B) ou AB.A est l'origine du bipoint et B son extrémité. Le sens du bipoint est de A vers B.

* A

* B

* **Remarques:**
- Le bipoint (B,A) est l'opposé du bipoint (A,B).
- Tout bipoint de la forme (A,A) est un bipoint nul.
- La droite passant par les points A et B est appelée support du bipoint (A,B).
- Addition de deux bipoints consécutifs: (E,F)+(F,G)=(E,G)

* BIPOINTS EQUIPOLLENTS:
Deux bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents s'ils constituent les quatre sommets d'un parallèlogramme.
On peut exprimer cette propriété d'une manière différente en disant qu'ils vérifient les trois conditions suivantes:
- Leurs supports sont parallèles.
- Ils sont de même sens.
- La distance de A à B est égale à celle de C à D, ce que l'on peut noter d(A,B)=d(C,D).

1.2- VECTEUR

* PROPRIETES DE LA RELATION D'EQUIPOLLENCE:
L'équipollence est une **relation binaire** entre deux éléments d'un même ensemble de bipoints. Elle vérifie les propriétés suivantes:
- Réflexivité
- Symétrie
- Transitivité

Elle constitue de ce fait une **relation d'équivalence.** En associant à un bipoint tous les bipoints qui lui sont équipollents, on obtient un sous-ensemble (ou classe d'équivalence) appelé **vecteur.** Un vecteur $\vec{V}$ peut être représenté à l'aide d'une flèche:
La représentation précédente peut être également utilisée pour désigner une force; une tension ou un courant alternatif sinusoïdal; etc...

1.3- OPERATIONS SUR LES VECTEURS

1.3.1- ADDITION DE DEUX VECTEURS

* DEFINITION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS:
Soit (A,B) un bipoint représentant du

vecteur $\vec{U}$ et (B,C) un bipoint consécutif

représentant du vecteur $\vec{V}$. Le bipoint (A,C)

représente le vecteur somme $\vec{S}$ tel que:

$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$

Remarque: L'addition de deux vecteurs est une loi de composition interne.

* PROPRIETES DE L'ADDITION:

- L'addition des vecteurs est commutative: $\vec{V} + \vec{U} = \vec{U} + \vec{V}$
- Elle est associative: $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$
- Elle possède un élément neutre: $\vec{0}$
- Tout vecteur $\vec{V}$ a un symétrique par rapport à l'addition appelé son opposé et noté $-\vec{V}$, tel que $\vec{V} + -\vec{V} = \vec{0}$

* DIFFERENCE DE DEUX VECTEURS:

Soit le vecteur $\vec{S}$ qui est la somme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$: $\vec{U} + \vec{V} = \vec{S}$

On peut écrire: $\vec{U} = \vec{S} - \vec{V}$. Le vecteur $\vec{U}$ est la différence entre le vecteur S et le vecteur $\vec{V}$.

Remarques:

- Le vecteur $\vec{V}$ est la différence entre le vecteur $\vec{S}$ et le vecteur $\vec{U}$ et on peut écrire:

  $\vec{V} = \vec{S} - \vec{U}$
- Pour soustraire un vecteur, il suffit d'ajouter son opposé.

Exercices 1 & 2

1.3.2- MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL

Cette multiplication est une loi de composition externe car elle associe un élément de l'ensemble des vecteurs $\mathcal{V}$ à un élément de l'ensemble des nombres réels $\mathcal{R}$

* Exemple:

Soient les points A,B,C,D régulièrement espacés sur une droite (D)

Si le bipoint (A,B) est un représentant du vecteur $\vec{V}$, on peut écrire que:

- Le bipoint (A,C) est un représentant du vecteur $2.\vec{V}$
- Le bipoint (A,D) est un représentant du vecteur $3.\vec{V}$
- Le bipoint (C,A) est un représentant du vecteur $-2.\vec{V}$

***DEFINITION:**

Soit un vecteur $\vec{V}$ non nul de l'ensemble $\mathcal{V}$ et un nombre réel k.

Si le bipoint (A,B) est un représentant du vecteur $\vec{V}$, le bipoint (C,D) représentant le vecteur $k.\vec{V}$ est tel que:

- (A,B) et (C,D) ont même direction.
- $d(C,D) = |k| . d(A,B)$.
- (A,B) et (C,D) sont de même sens si k positif et de sens contraires si k négatif.

Si $\vec{V} = \vec{0}$, $k.\vec{V} = \vec{0}$ quel que soit k.

*** PROPRIETES DE LA MULTIPLICATION:**

Quels que soient les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de l'ensemble $\mathcal{V}$ et les nombres réels a et b:

- $(a+b).\vec{V} = a.\vec{V} + b.\vec{V}$
- $a(\vec{U} + \vec{V}) = a.\vec{U} + a.\vec{V}$
- $a(b.\vec{V}) = (a.b).\vec{V}$
- $1.\vec{V} = \vec{V}$

Exercices 3 à 6

1.4- DROITE VECTORIELLE

***DEFINITIONS:**

Soit un vecteur non nul $\vec{u}$. Tous les vecteurs de la forme $k.\vec{u}$ appartiennent à un ensemble appelé **droite vectorielle** et noté $\mathcal{D}$. Le vecteur $\vec{u}$ est appelé **base** ou **vecteur unitaire** de la droite vectorielle $\mathcal{D}$.

Soit un bipoint (O,I) représentant du vecteur $\vec{u}$ et la droite support (D) de ce bipoint. En orientant la droite (D) dans le sens du bipoint, on obtient un **axe** $\overrightarrow{x'x}$ de **bipoint unitaire** (O,I).

On peut tracer sur cet axe un bipoint (ou plusieurs) représentant n'importe lequel des vecteurs de la droite vectorielle $\mathcal{D}$.

Soit donc un bipoint (O,M) sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$ représentant le vecteur $\vec{V} = k.\vec{u}$:

* La **mesure algébrique du vecteur** $\vec{V}$ notée $\overline{V}$ est égale au réel k.

* Le nombre réel k représente également l'**abscisse** du point M sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$
* La **mesure algébrique d'un bipoint** est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de son origine. Elle est égale à la mesure algébrique du vecteur qu'il représente.
* L'abscisse du **milieu d'un bipoint** est égale à la demi-somme des abscisses de ses extrémités.

Exercices 7 à 10

1.5- PLAN VECTORIEL

* DEFINITION:

On appelle plan vectoriel $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les vecteurs ayant un représentant appartenant à un plan (P).
Remarque: Un vecteur ayant un représentant dans le plan (P) en a une infinité dans ce plan.

* BASE D'UN PLAN VECTORIEL:

On appelle base d'un plan vectoriel $\mathcal{P}$ tout couple $(\vec{i},\vec{j})$ de vecteurs de $\mathcal{P}$ tel que:

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne soient pas nuls.
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'appartiennent pas à la même droite vectorielle ($\vec{i}$ et $\vec{j}$ de directions différentes). On dit qu'ils sont **linéairement indépendants.**

Soit un bipoint (O,I) représentant le vecteur $\vec{i}$ et le bipoint (O,J) représentant le vecteur $\vec{j}$. L'ensemble des 3 points (O,I,J) est appelé **repère cartésien** dans le plan (P).

* Si d(O,I)=d(O,J), le repère (O,I,J) est dit **normé**.
* Si les droites support de (O,I) et (O,J) sont perpendiculaires,le repère (O,I,J) est **orthogonal**.
* Si les deux conditions précédentes sont simultanément remplies, le repère est dit **orthonormé**.

* COORDONNEES D'UN VECTEUR DANS UNE BASE:

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan vectoriel $\mathcal{P}$ et $\vec{V}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ ayant un représentant (O,A) dans le repère (O,I,J). Les droites Δ et Δ' passsant par A et respectivement parallèles au supports de (O,J) et (O,I) coupent les axes $\overrightarrow{xx'}$ et $\overrightarrow{yy'}$ en P et Q.
On a la relation: (O,A) = (O,P) + (P,A)

Si (O,P) est un représentant du vecteur $\vec{X}$ et (P,A) un représentant du vecteur $\vec{Y}$, on peut écrire:

$$\vec{V} = \vec{X} + \vec{Y} \quad \text{d'où: } \vec{V} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

x et y sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$: x est l'**abscisse** de $\vec{V}$ et y l'**ordonnée** de $\vec{V}$.

x et y sont également les **coordonnées du point A** dans le repère (O,I,J).

Tous les bipoints représentants du vecteur $\vec{V}$ ont pour coordonnées x et y. Le bipoint (A,B) a pour coordonnées:

$$x = x_B - x_A$$
$$y = y_B - y_A$$

Remarque: les coordonnées du milieu M du bipoint (A,B) sont:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$
$$y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

* COORDONNEES DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS:

Soient le vecteur $\vec{V}_1$ de coordonnées x_1 et y_1 dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et le vecteur $\vec{V}_2$ de coordonnées x_2 et y_2 dans cette même base. La somme de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées x et y telles que:

$$x = x_1 + x_2$$
$$y = y_1 + y_2$$

Exercice 11

* COORDONNEES DU PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

Soient le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées x et y dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et le vecteur $\vec{V}'$ tel que $\vec{V}' = k.\vec{V}$, où k est un nombre réel.

Les coordonnées du vecteur $\vec{V}'$ sont alors:

$$x' = k.x$$
$$y' = k.y$$

Exercice 12

* CONDITION ANALYTIQUE DE DEPENDANCE LINEAIRE:

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ précédents appartiennent à la même droite vectorielle et l'on dit qu'ils sont **linéairement dépendants.**

On peut alors écrire les relations:

$\dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y} = k$ d'où: $xy' = x'y$ donc: $\mathbf{xy' - x'y = 0}$

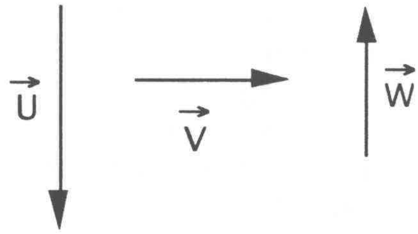
Le nombre réel $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** de (x, y, x', y') et noté: $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$

Inversement, si deux vecteurs sont tels que $xy' - x'y \neq 0$, on peut conclure qu'ils sont linéairement indépendants. Ils constituent alors une base du plan vectoriel $\mathcal{P}$.

VECTEURS: Exercices.

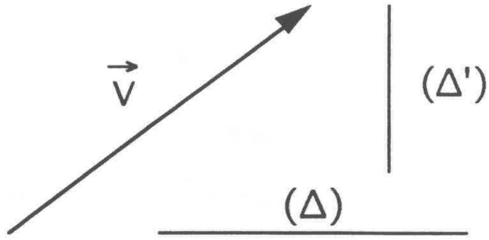
Exercice 1:

On donne trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Tracer 3 bipoints consécutifs représentantces vecteurs. Quel est le bipoint représentant le vecteur somme $\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}$?



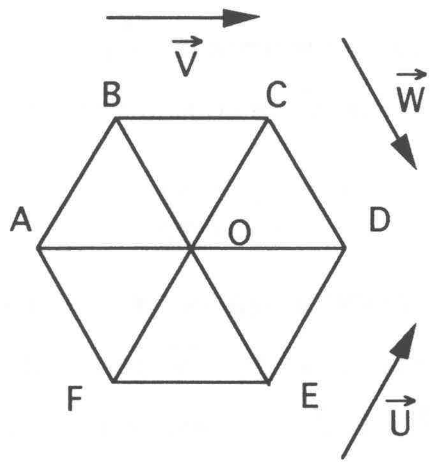
Exercice 2:

Soit le vecteur $\vec{V}$ du plan. Tracer un représentant (A,C) de $\vec{V}$. Dessiner le bipoint (A,B) de direction (Δ) et le bipoint (B,C) de direction (Δ') tels que (A,B)+(B,C)=(A,C)



Exercice 3:

On considère l'hexagone dessiné ci-contre:
a) Citez les bipoints équipollents à (A,B); de quel vecteur sont-ils les représentants?
b) Même question pour le bipoint (C,B)
c) Même question pour le bipoint (A,C)
d) Déterminer un bipoint équipollent à chacune des sommes de bipoints ci-dessous. Préciser à quel vecteur il appartient.
(A,B)+(B,D) ; (A,B)+(F,A) ; (O,B)+(O,F)+(O,D) ; (A,B)-(O,B) ; (F,E)-(F,A) ; (O,A)-(O,C)

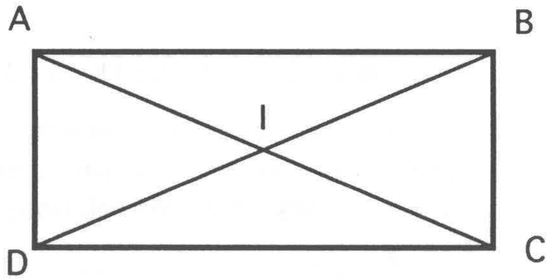


Exercice 4:

Soit un rectangle ABCD dont les diagonales AC et BD se coupent en un point I. Exprimer plus simplement les sommes algébriques de vecteurs liés suivantes:

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$



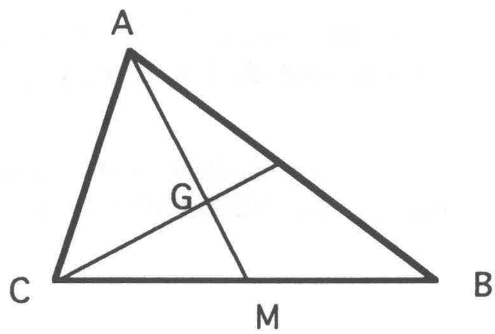
Exercice 5:

Soit un triangle ABC.
a) Montrer qu'il existe un seul point G tel que:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

b) Montrer que ce point est le centre de gravité du triangle (point de concours des médianes)
c) Montrer que, quel que soit le point N du plan,

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\,\overrightarrow{NG}$$



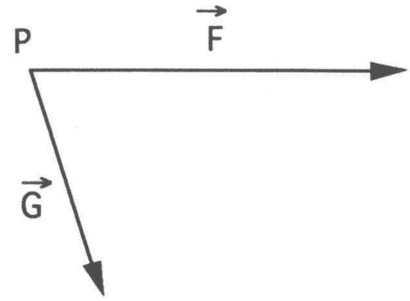
d) Construire le point P du plan tel que: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 6:

Construire la résultante $\vec{R}$ des deux forces

$\vec{F}$ et $\vec{G}$ appliquées au même point P.
Déterminer l'intensité de cette résultante sachant qu'un centimètre correspond à 1000 newtons.
Comparer cette intensité à la somme des intensités de

$\vec{F}$ et de $\vec{G}$.



Exercice 7:

Après avoir calculé leurs abscisses, placer sur un axe $\overrightarrow{xx'}$ de bipoint unité (O,I) les points A, B, C et D tels que:

$\overline{OA} = 2$ $\overline{AB} = 2$ $\overline{BC} = -7$ $\overline{CD} = 6$ $\overline{DE} = -1{,}5$

Déterminer ensuite les mesures algébriques suivantes: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{EC}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BE}$

Exercice 8:

On considére sur un axe $\overrightarrow{xx'}$ de bipoint unité (O,I) les points A, B, C et D tels que:

$\overline{OA} = -4$; $\overline{AB} = 1{,}5$; $\overline{AC} = 3\ \overline{AB}$; $\overline{AD} = 2\ \overline{AC}$

a) Calculer l'abscisse des points A, B, C et D.

b) Calculer $\overline{AD}$ en fonction de $\overline{AB}$

Exercice 9:

Sur un axe $\overrightarrow{xx'}$ de bipoint unité (O,I), placer le point A d'abscisse +3 et le point B d'abscisse - 4.

a) Calculer l'abscisse du point C sachant que $\overline{AC} = -9$.

b) Calculer l'abscisse du point D sachant que $2.\overline{AD} - 3.\overline{BD} = \overline{AB}$

c) Déterminer l'abscisse du point E telle que: $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \dfrac{-4}{3}$

Exercice 10:

On donne un bipoint unité (O,I) représentant le vecteur unitaire $\vec{u}$ et tel que d(O,I) = 4cm.
a) Tracer:

- le bipoint (O,A) représentant le vecteur $\vec{U}$ tel que $\vec{U} = 0{,}5\ \vec{u}$
- le bipoint (O,B) représentant le vecteur $\vec{V}$ tel que $\vec{V} = -1{,}5\ \vec{u}$

- le bipoint (O,C) représentant le vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = 1{,}25\,\vec{u}$
b) Quelles sont les abscisses des points A,B et C?. Les exprimer sous forme fractionnaire.
c) Calculer la mesure algébrique des bipoints (A,B) ; (B,C) et (C,A).
d) Quelle est l'abscisse du milieu de (B,C) ?

Exercice 11:

a) Placer dans un repère orthonormé les points A, B, C et D dont on donne les coordonnées: A(-1,-2) ; B(8,1) ; C(3,6) ; D(-6,3).

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

c) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$. Que remarquez-vous?
Que concluez-vous concernant la nature du quadrilatère ABCD?
d) Calculer les coordonnées du milieu M du bipoint (A,C) et les coordonnées du milieu N du bipoint (B,D). Quelle propriété met-on en évidence?

Exercice 12:

Dans un repère (O,I,J) on considère les points A, B et C dont les coordonnées sont les suivantes: A(2,1) ; B(5,2) ; C(2,3).

a) Ecrire l'expression des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.
c) Construire les vecteurs suivants:

$$\overrightarrow{AD} = 2.\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{AE} = 2.\overrightarrow{AC} \; ; \; \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \; ; \; \overrightarrow{AG} = 2.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

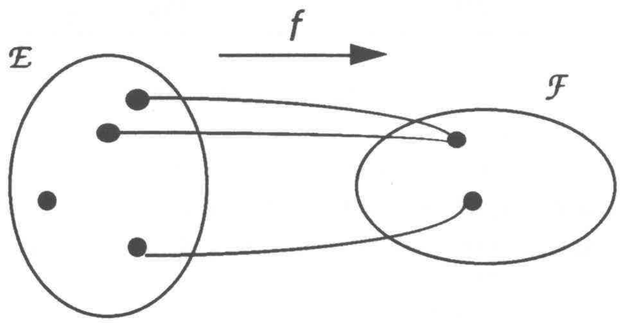
d) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AG}$

2 - TRIGONOMETRIE (Rappels et compléments)

2.1- RAPPELS

*** FONCTION:**

On appelle fonction f une relation d'un ensemble de départ $\mathcal{E}$ vers un ensemble d'arrivée $\mathcal{F}$ pour laquelle tout élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ a **au plus** une image dans l'ensemble $\mathcal{F}$. L'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ ayant une image dans $\mathcal{F}$ est appelé le domaine de définition de f.

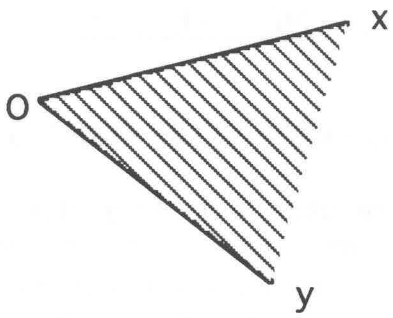


*** APPLICATION:**

Si tout élément de $\mathcal{E}$ a une image dans $\mathcal{F}$, la fonction f est une application. Son domaine de définition est alors confondu avec l'ensemble de départ.

*** ANGLE GEOMETRIQUE:**

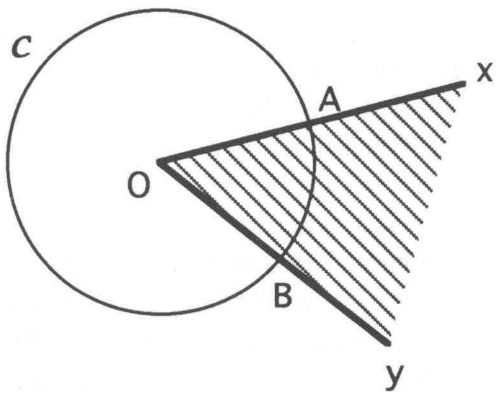
Deux demi-droites [Ox) et [Oy) déterminent deux régions du plan: le **secteur angulaire** saillant $[\widehat{xOy}]$ et le secteur angulaire rentrant $[\overset{\smile}{xOy}]$.
L'ensemble de tous les secteurs angulaires superposables à un secteur $[\widehat{xOy}]$ (ou $[\overset{\smile}{xOy}]$) constitue une classe d'équivalence appelée **angle géométrique** et noté $\widehat{xOy}$ (ou $\overset{\smile}{xOy}$).



Après avoir choisi une unité, on peut réaliser une mesure du secteur angulaire $[\widehat{xOy}]$ à l'aide d'un rapporteur. La mesure d'un angle est aussi la mesure de tous les secteurs angulaires qui le représentent.

*** ARC DE CERCLE GEOMETRIQUE:**

L'intersection du cercle C de centre O avec le secteur $[\widehat{xOy}]$ constitue un arc de cercle noté $\overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{BA}$.
L'arc correspondant à $[\overset{\smile}{xOy}]$ peut être noté $\overset{\smile}{AB}$ ou $\overset{\smile}{BA}$.
La mesure de l'arc géométrique $\overset{\frown}{AB}$ est égale à la mesure du secteur angulaire $[\widehat{xOy}]$.

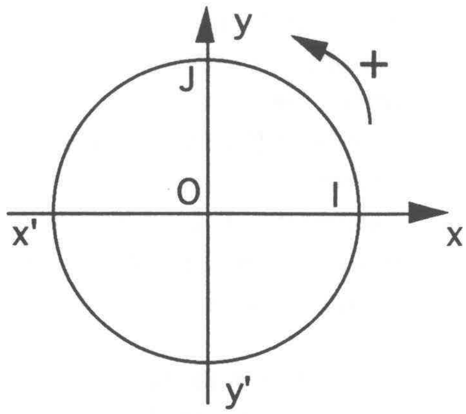


Definition du radian:

Le radian est la mesure d'un secteur angulaire qui délimite sur le cercle C un arc géométrique dont la longueur est égale à celle du rayon de ce cercle.
Un angle plat découpe sur le cercle un arc de longueur ℓ égale à la demi-circonférence, soit $\ell = \pi R$. D'après la définition, la mesure en radian d'un angle plat est donc égale à π.
A retenir: 180 degrés correspondent à π radians.

D'autre part, un secteur angulaire de mesure α radians délimite sur le cercle un arc de longueur R α. Si R =1, la mesure de l'angle et celle de l'arc s'expriment par le même nombre réel positif.

2.2- CERCLE TRIGONOMETRIQUE

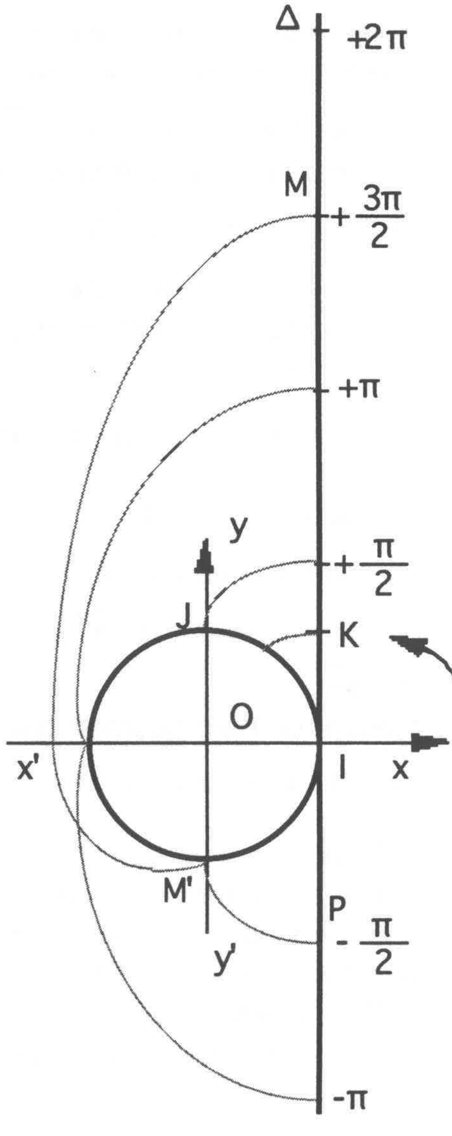


Un cercle est dit orienté quand on a choisi un sens de parcours.
Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon unité, orienté dans le sens inverse du sens de rotation des aiguilles d'une montre et dont le centre est l'origine d'un repère orthonormé (O,I,J).

* **Arc orienté:**
Un couple de points A et B du cercle trigonométrique pris dans cet ordre est appelé **arc orienté** et noté $\overset{\frown}{AB}$.
De même, un couple de demi-droites [Ox) et [Oy) prises dans cet ordre constitue un **angle orienté** que l'on note $(\widehat{Ox,Oy})$.

2.3- MESURE DES ARCS ET ANGLES ORIENTES

* REPERAGE D'UN POINT SUR LE CERCLE:

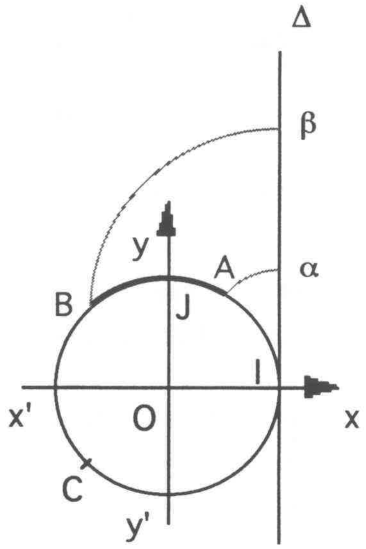


En enroulant la droite graduée Δ sur le cercle trigonométrique *C*, on fait correspondre à l'abscisse a de tout point M de la droite un point M' du cercle. Cette correspondance de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels vers l'ensemble des points du cercle *C* est une application.
Le réel a est appelé l'**abscisse curviligne** du point M'. C'est aussi la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM'}$. Si le bipoint unité (I,K) de Δ est équipollent à (O,J), l'unité de mesure des arcs orientés est le radian.

Remarque:
Considérons les points M et P dont les abscisses sur Δ diffèrent de 2π. Ces abscisses ont la même image M sur le cercle.
Un point quelconque du cercle a donc une infinité d'antécédents dont les valeurs diffèrent d'un nombre entier de fois 2π. Ce point a une infinité d'abscisses curvilignes **égales modulo 2π**.
Cependant, pour tout point du cercle, il existe une abscisse curviligne et une seule qui appartienne à l'intervalle]-π,+π]. Cette valeur est appelée **la mesure principale** de l'arc orienté $\overset{\frown}{IM'}$.

Exercices 1 & 2

* MESURE D'UN ARC ORIENTE QUELCONQUE:



Soient deux points A et B du cercle $\mathcal{C}$. Si α et β sont deux de leurs mesures respectives, le nombre réel $\beta - \alpha$ est une mesure modulo 2π de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

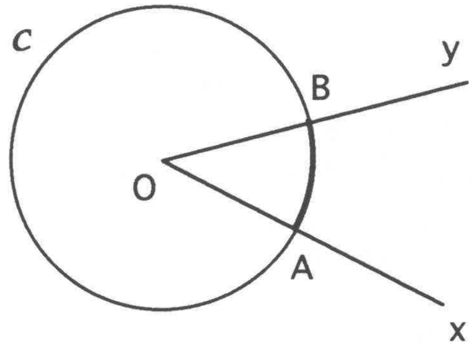
Remarque: Si l'on considère deux arcs orientés consécutifs $\overset{\curvearrowright}{AB}$ et $\overset{\curvearrowright}{BC}$, on peut écrire entre leurs mesures la relation suivante:

mes $\overset{\curvearrowright}{AB}$ + mes $\overset{\curvearrowright}{BC}$ = mes $\overset{\curvearrowright}{AC}$

Cette relation est appelée Relation de Chasles.

Exercices 3 & 4

* MESURE D'UN ANGLE ORIENTE:



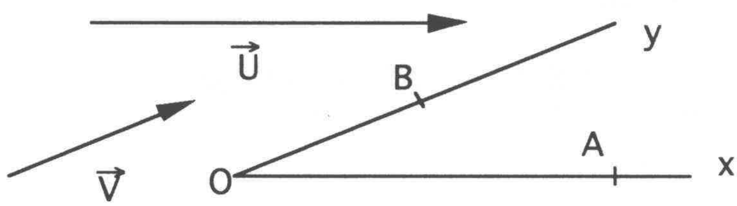
Considérons l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$ constitué du couple de demi-droites ([Ox),[Oy)) qui coupent le cercle trigonométrique respectivement en A et B.

La mesure modulo 2π de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$ est égale à celle de l'arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

Remarque: on peut écrire la relation de Chasles pour deux angles orientés consécutifs.

* MESURE DE L'ANGLE ORIENTE D'UN COUPLE DE VECTEURS:

Considérons les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ayant pour représentants respectifs les bipoints (O,A) et (O,B).



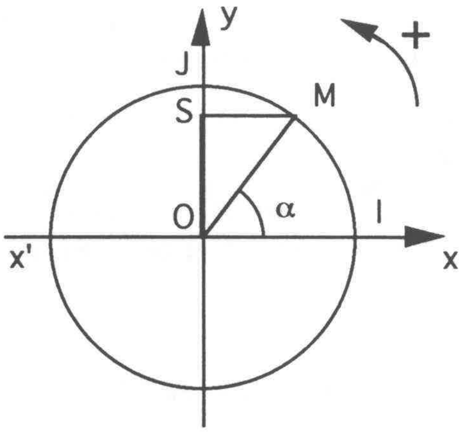
Si [Ox) et [Oy) sont les demi-droites d'origine O passant respectivement par les points A et B, l'angle du couple de vecteurs $(\vec{U},\vec{V})$, noté $(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$, est l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$. Ces deux angles ont même mesure modulo 2π.

Exercice 5

2.4- FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

2.4.1- FONCTION SINUS

* DEFINITION



Soit α la mesure modulo 2π de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ et S la projection du point M sur l'axe vertical. On appelle sinus de α la mesure algébrique du segment OS. A tout élément α de l'ensemble des nombres réels, la fonction sinus fait correspondre le réel $\overline{OS}$ noté $\sin\ \alpha$

* VARIATION

La fonction sinus est périodique et sa période a pour valeur 2π.

On peut écrire la relation $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ où k est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$. L'étude intuitive, à partir du cercle trigonométrique, de la variation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0,2\pi]$ permet de remplir le tableau de variation ci-dessous:

α (degrés)	0	90	180	270	360
$\sin \alpha$					

Remarque: $-1 \leq \sin \alpha \leq +1$

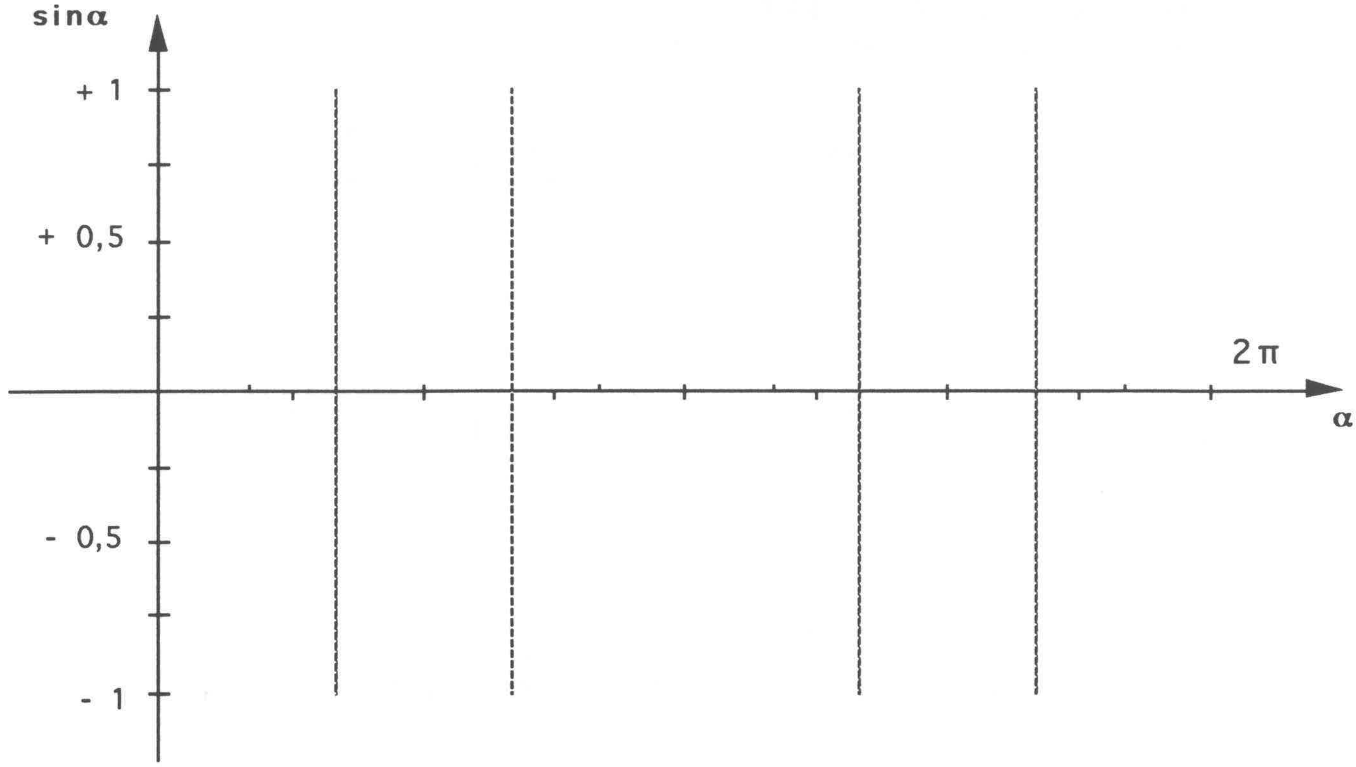
* REPRESENTATION GRAPHIQUE

En utilisant la calculatrice, remplir le tableau de valeurs suivant pour les valeurs demandées de α:

α (degrés)	0	15	30	45	60	90	120	135	150	165	180
α (radians)	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$								
$\sin \alpha$											

α (degrés)	195	210	225	240	270	300	315	330	345	360	375
α (radians)											
$\sin \alpha$											

En utilisant les valeurs du tableau précédent, représenter la fonction sinus sur l'intervalle $[0,2\pi\ ]$ dans le repère ci-après:

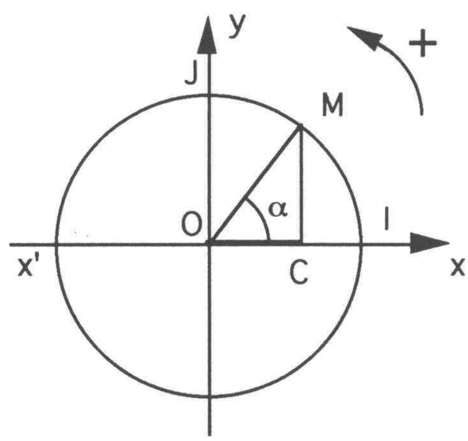


La courbe représentative de la fonction sinus est une **sinusoïde.**

2.4.2- FONCTION COSINUS

* DEFINITION

Soit α la mesure modulo 2π de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ et C la projection du point M sur l'axe horizontal. On appelle cosinus de α la mesure algébrique du segment OC. A tout élément α de l'ensemble des nombres réels, la fonction cosinus fait correspondre le réel $\overline{OC}$ noté cos α



* VARIATION

La fonction cosinus est périodique et sa période a pour valeur 2π.

On peut écrire la relation cos (α + 2kπ) = cos α où k est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

L'étude de la variation de la fonction cosinus sur l'intervalle [0 ; 2π] permet de remplir le tableau de variation ci-dessous:

α (degrés)	0	90	180	270	360
cos α					

Remarque: -1 ≤ cos α ≤ +1

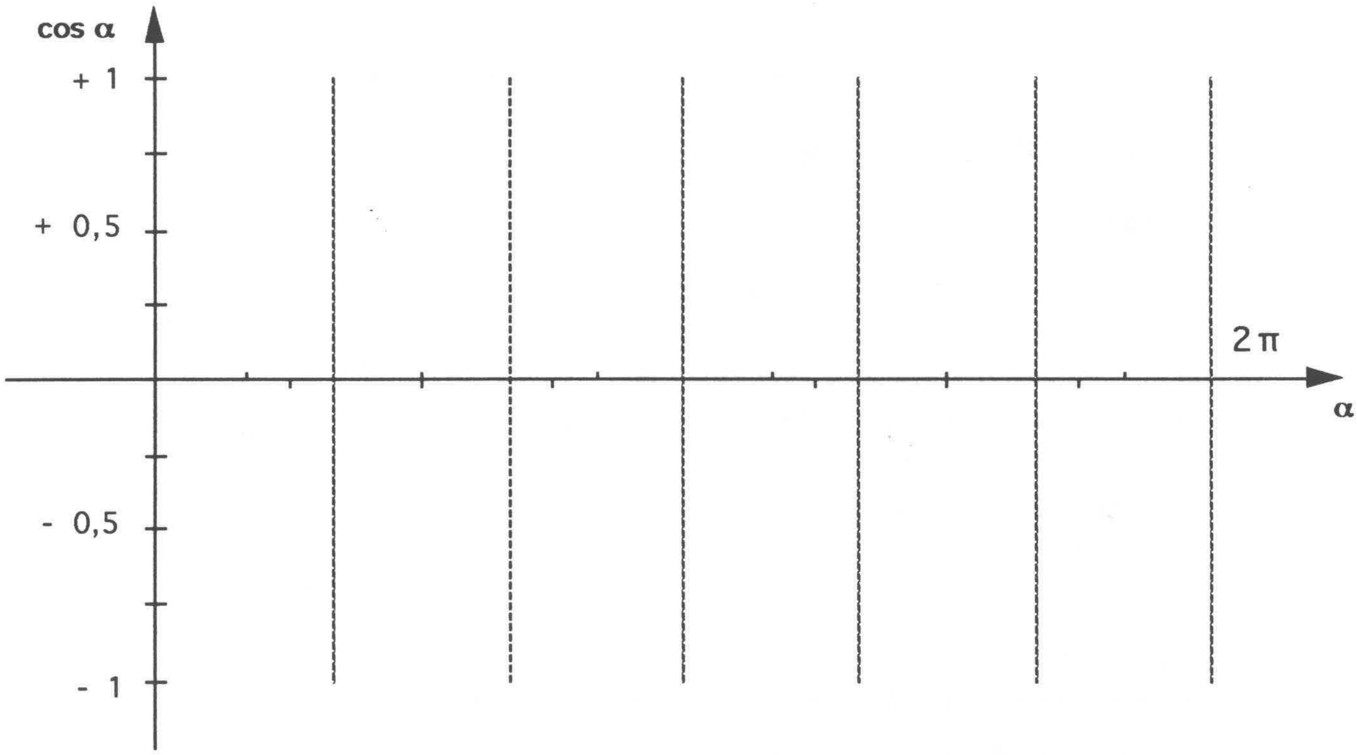
* REPRESENTATION GRAPHIQUE

En utilisant la calculatrice, remplir le tableau de valeurs suivant pour les valeurs demandées de α:

α (degrés)	0	30	45	60	75	90	105	120	135	150	180
α (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$								
cos α											

α (degrés)	210	225	240	255	270	285	300	315	330	360	390
α (radians)											
cos α											

En utilisant les valeurs du tableau précédent, représenter la fonction cosinus sur l'intervalle [0 ; 2π] dans le repère ci-dessous:



La courbe représentative de la fonction cosinus est également une sinusoïde. On remarque que les deux courbes sont décalées de $\frac{\pi}{2}$ selon l'axe horizontal, d'où la relation:

$\cos \alpha = \sin (\alpha + \frac{\pi}{2})$

2.4.3- FONCTION TANGENTE

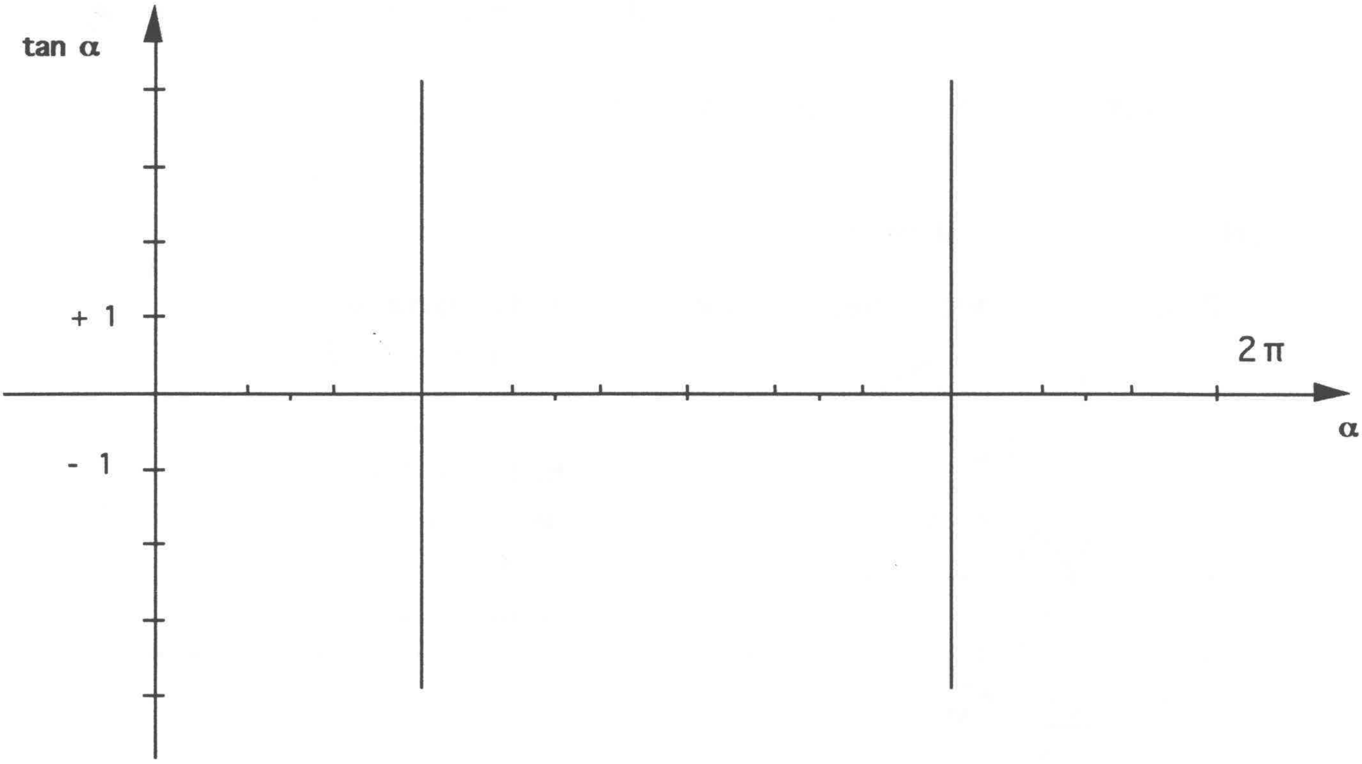
* DEFINITION

L'étude de la fonction qui au réel α fait correspondre le réel cos α nous permet d'écrire que si $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\cos \alpha = 0$. Pour tout α différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on définit la tangente de α comme le rapport de sin α à cos α : $\quad$ $\mathbf{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$

* VARIATION

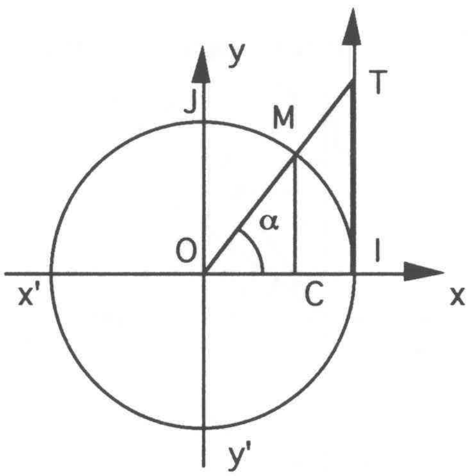
α (degrés)	0	90	180	270	360
tan α					

* REPRESENTATION GRAPHIQUE



* INTERPRETATION GEOMETRIQUE

La tangente de l'angle α est égale à la mesure algébrique du segment IT



2.4.4- FONCTION COTANGENTE

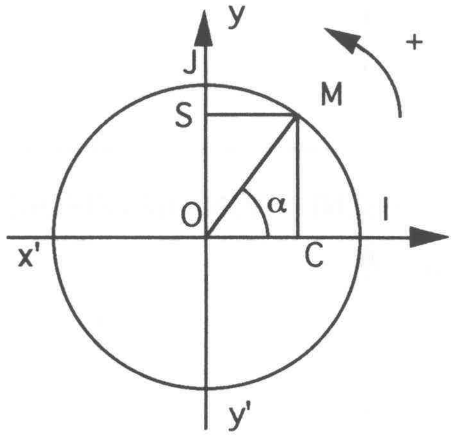
L'étude de la fonction qui au réel α fait correspondre le réel $\sin \alpha$ nous permet d'écrire que si $\alpha = k\pi$ où k est un entier relatif, alors $\sin \alpha = 0$.

Pour tout α différent de $k\pi$, on définit la cotangente de α comme le rapport de $\cos \alpha$ à $\sin \alpha$:

Comme la fonction tangente, la fonction cotangente est périodique de période 2π.

2.5- RELATIONS ENTRE FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

2.5.1. Pour la même valeur de la variable α



Dans le triangle OMC, on peut écrire
le théorème de Pythagore:

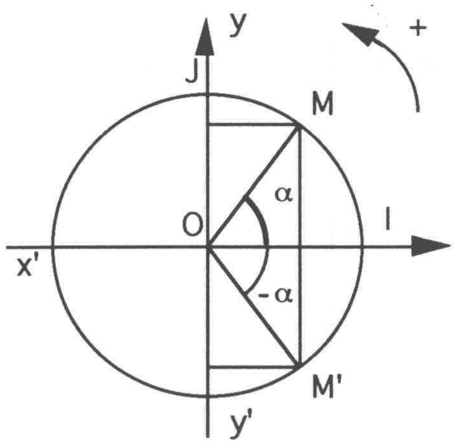
d'où:

On en déduit, quel que soit α différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$:

quel que soit α différent de $k\pi$:

Exercice 6

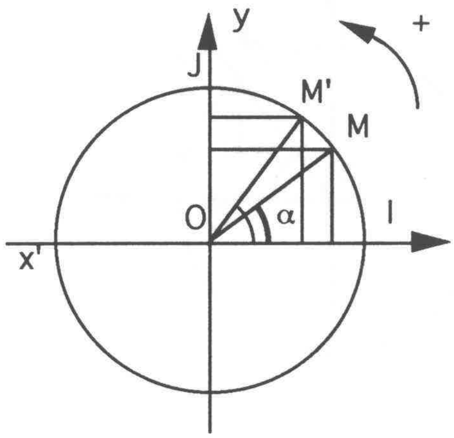
2.5.2. Pour des valeurs opposées de la variable α



(α et $-\alpha$ modulo 2π)

$\sin(-\alpha) =$
$\cos(-\alpha) =$
$\tan(-\alpha) =$
$\text{cotan}(-\alpha) =$

2.5.3. Pour des valeurs complémentaires de la variable α



(α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ modulo 2π)

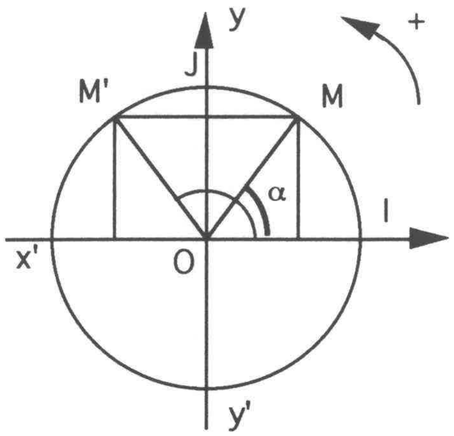
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

2.5.4. Pour des valeurs supplémentaires de la variable α

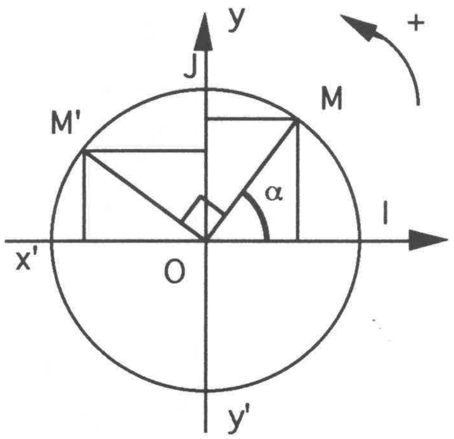


(α et $\pi - \alpha$ modulo 2π)

sin $(\pi - \alpha) =$ **cos** $(\pi - \alpha) =$ **tan** $(\pi - \alpha) =$ **cotan** $(\pi - \alpha) =$

Application: présentation des tables trigonométriques

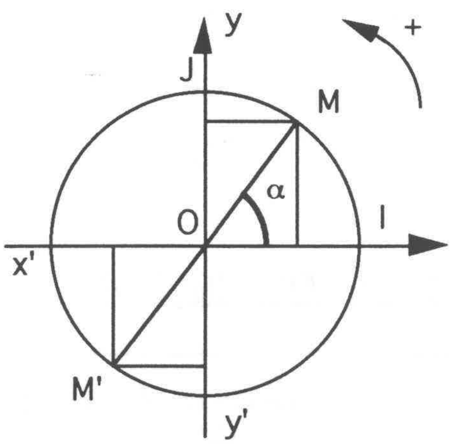
2.5.5. Pour des valeurs différant de $\frac{\pi}{2}$ de la variable α



(α et $\frac{\pi}{2} + \alpha$ modulo 2π)

sin $(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ **cos** $(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ **tan** $(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ **cotan** $(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$

2.5.6. Pour des valeurs différant de π de la variable α

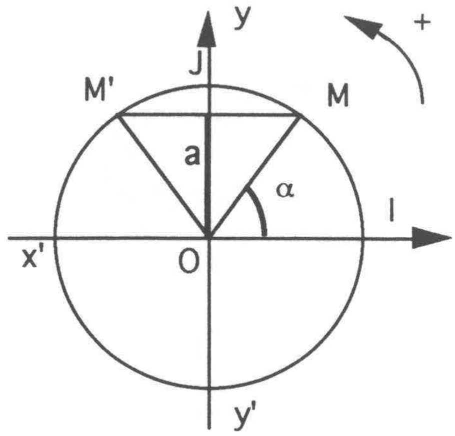


(α et $\pi + \alpha$ modulo 2π)

sin $(\pi + \alpha) =$ **cos** $(\pi + \alpha) =$ **tan** $(\pi + \alpha) =$ **cotan** $(\pi + \alpha) =$

2.6- RESOLUTION D'EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

2.6.1- Equation de la forme sin x = a

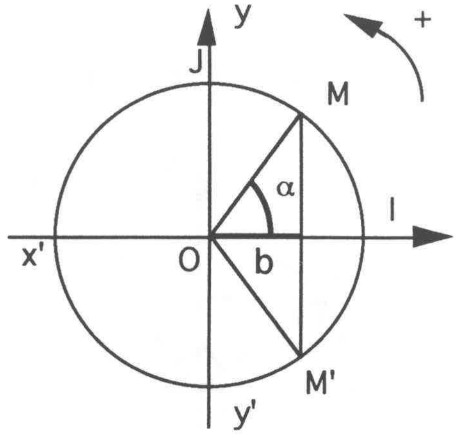


L'équation n'a de solution que si $-1 \leq a \leq +1$
Si le réel α est tel que $\sin \alpha = a$, l'ensemble des solutions de l'équation donnée est :

$$x = \alpha + 2.k.\pi \quad \text{et} \quad x = \pi - \alpha + 2.k.\pi$$

Exercice 7

2.6.2- Equation de la forme cos x = b

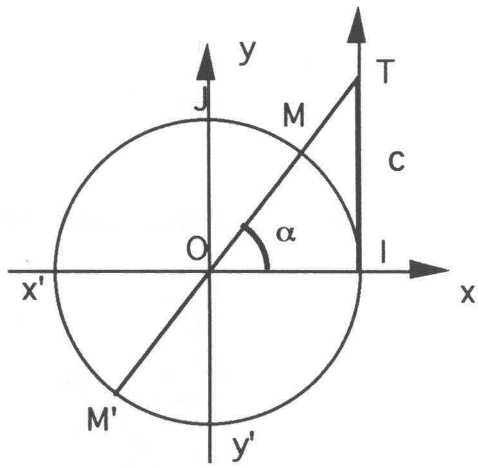


L'équation n'a de solution que si $-1 \leq b \leq +1$
Si le réel α est tel que $\cos \alpha = b$, l'ensemble des solutions de l'équation donnée est :

$$x = \alpha + 2.k.\pi \quad \text{et} \quad x = -\alpha + 2.k.\pi$$

Exercice 8

2.6.3- Equation de la forme tan x = c



Si le réel α est tel que $\tan \alpha = c$, l'ensemble des solutions de l'équation donnée est :

$$x = \alpha + k.\pi$$

Exercice 9

2.7- RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Rappels:

$$\sin \alpha = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'Hypothénuse}} \qquad \cos \alpha = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'Hypothénuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\text{cotan } \alpha} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}}$$

Exercices 10 à 12

Trigonométrie: Exercices

Exercice 1:

Tracer un cercle trigonométrique et placer sur ce cercle les points A, B, C, D, E et F dont les abscisses curvilignes sont les suivantes (k entier relatif):

A: $\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi$ B: $\frac{5\pi}{4} + 2.k.\pi$ C: $\frac{3\pi}{2} + 2.k.\pi$

D: $-\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi$ E: $\frac{13\pi}{6} + 2.k.\pi$ F: $-\frac{19\pi}{3} + 2.k.\pi$

Exercice 2:

Calculer la mesure principale (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) associée aux mesures suivantes:

$\alpha = 9\pi + 2.k\pi$ $\beta = \frac{13\pi}{6} + 2.k.\pi$ (k entier relatif)

$\gamma = \frac{-7\pi}{4} + 2.k.\pi$ $\delta = \frac{5\pi}{4} + 2.k.\pi$

Exercice 3:

On donne sur un cercle trigonométrique deux points A et B dont les abscisses curvilignes sont respectivement α et β .Calculer une mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ dans les cas suivants (k entier relatif):

$\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2.k.\pi$ et $\beta = \frac{\pi}{4} + 2.k.\pi$

$\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2.k.\pi$ et $\beta = \frac{-\pi}{6} + 2.k.\pi$

$\alpha = \frac{-7\pi}{5} + 2.k.\pi$ et $\beta = \frac{-3\pi}{5} + 2.k.\pi$

Donner dans chaque cas une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$

Exercice 4:

On donne sur un cercle trigonométrique 3 points A, B et C tels que les mesures des arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$ notées respectivement α et β sont les suivantes (k entier relatif):

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2.k.\pi$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$

$\alpha = \frac{-\pi}{2} + 2.k.\pi$ et $\beta = \frac{\pi}{6} + 2.k.\pi$

En déduire dans chaque cas la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AC}$.

Exercice 5:

On considère sur un cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F dont les abscisses curvilignes sont les suivantes (k entier relatif):

A: $\frac{\pi}{4} + 2.k.\pi$ B: $-\frac{3\pi}{4} + 2.k.\pi$ C: $\frac{3\pi}{2} + 2.k.\pi$

D: $\frac{-\pi}{4} + 2.k.\pi$ E: $\frac{7\pi}{6} + 2.k.\pi$ F: $-\frac{-7\pi}{3} + 2.k.\pi$

Calculer la mesure des angles de vecteurs suivants: $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}})$

Exercice 6:

Le cosinus de la mesure d'un angle (comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) est égal à 0,6. En appliquant les relations données dans le cours et sans utiliser la calculatrice, déterminer sin x, tan x, cotan x.

Exercice 7:

Sur un cercle trigonométrique, placer les points M_i tels que le sinus de la mesure x de l'angle des vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_i}})$ soit égal à 0,5. En déduire les solutions de l'équation sin x = 0,5.

Exercice 8:

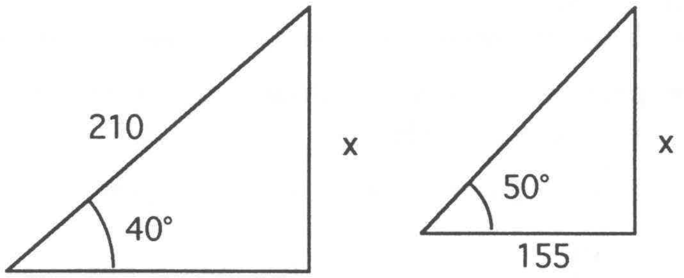
Sur un cercle trigonométrique, placer les points M_i tels que le cosinus de la mesure x de l'angle des vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_i}})$ soit égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire les solutions de l'équation cos x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 9:

Sur un cercle trigonométrique, placer les points M_i tels que le sinus de la mesure x de l'angle des vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM_i}})$ soit égal à 1,5. En déduire les solutions de l'équation sin x = 1,5.

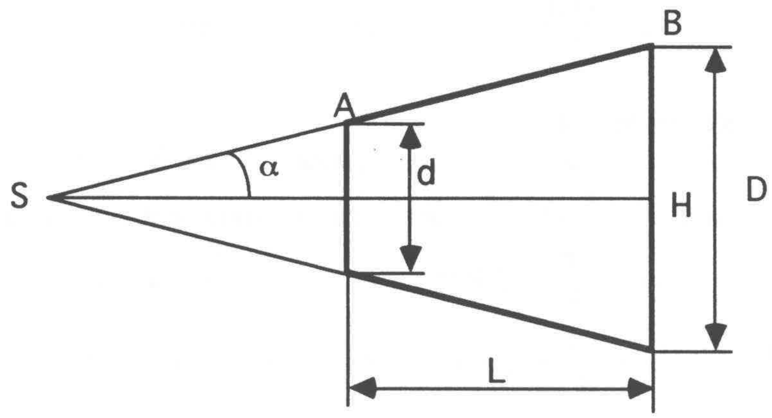
Exercice 10:

Calculer la cote x inconnue dans chacun des triangles ci-contre:



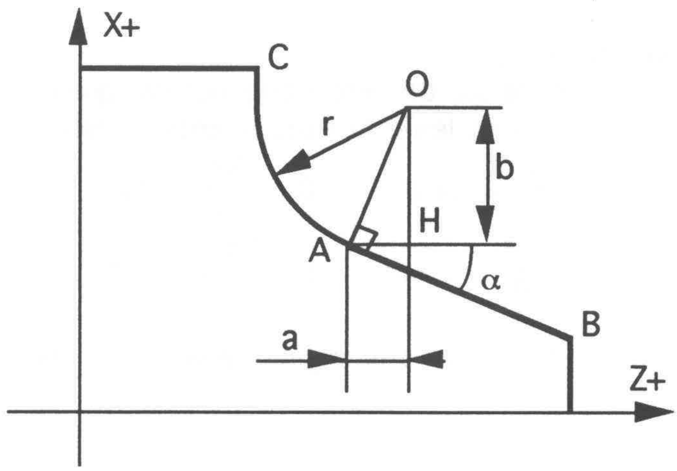
Exercice 11:

Calculer l'angle de pente α du cône ci-contre dans le cas où d = 50000 µm, D = 70000 µm, L = 99000 µm.
En déduire les distances SH et AB.



Exercice 12:

Calculer les cotes a et b en vue de la réalisation de la pièce ci-contre.
En déduire les coordonnées Z_A et X_A du point A.
Calculer l'abscisse Z_B du point B.
On donne les cotes suivantes:
r = 55000 µm; Z_C = 70000 µm;
X_O = 99000 µm; X_B = 20000 µm;
α = 30°



3 - PRODUIT SCALAIRE.

3.1 PRODUIT SCALAIRE

3.1.1 NORME D'UN VECTEUR:

Soit le bipoint (A,B) représentant un vecteur $\vec{V}$. La norme du vecteur $\vec{V}$ correspond à la mesure de d(A,B) et se note $\| \vec{V} \|$.

Si le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées x et y dans un repère orthonormé, sa norme a pour valeur:

$$\| \vec{V} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3.1.2 DEFINITION DU PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ noté $\vec{U}.\vec{V}$ est un nombre réel défini par la relation suivante:

$$\vec{U} . \vec{V} = \| \vec{U} \| . \| \vec{V} \| . \cos \widehat{(\vec{U},\vec{V})}$$

Exemple: Si $\| \vec{U} \| = 3$, $\| \vec{V} \| = 4$ et $\widehat{(\vec{U},\vec{V})} = \frac{2\pi}{3}$ rad,

alors: $\vec{U} . \vec{V} =$

Exercice 1

Remarques:

* Si les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont représentés par des bipoints (ou vecteurs liés) notés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, on définit de la même façon le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \| \overrightarrow{OA} \| . \| \overrightarrow{OB} \| . \cos \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$$

* Carré scalaire d'un vecteur:

$\vec{V} . \vec{V} = \vec{V}^{\,2} = \| \vec{V} \| . \| \vec{V} \| . \cos \widehat{(\vec{V},\vec{V})} = \| \vec{V} \|^2$

* Si $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ alors $\vec{U} . \vec{V} = 0$

* Si les directions des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul.

$\vec{U} . \vec{V} = \| \vec{U} \| . \| \vec{V} \| . \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Réciproquement, si deux vecteurs non nuls ont leur produit scalaire nul, leurs directions sont perpendiculaires.

Exercices 2 à 4

3.1.3 EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE:

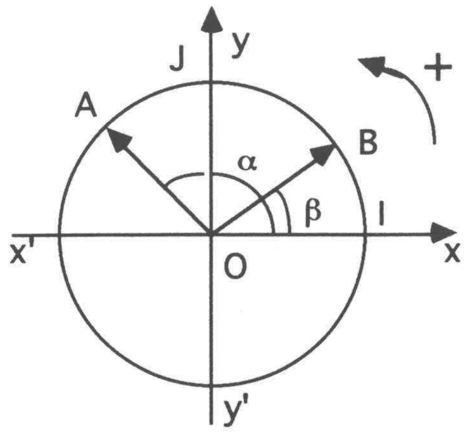
Considérons deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de coodonnées x; y et x'; y' dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, on montre que leur produit scalaire a pour expression:

$$\vec{V} . \vec{V}' = x.x' + y.y'$$

Exercices 5 à 9

3.2 APPLICATION A LA TRIGONOMETRIE:

3.2.1 FORMULES D'ADDITION



L'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$ a pour mesure $\alpha-\beta$.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ a pour expression:

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \| \overrightarrow{OB} \| . \| \overrightarrow{OA} \| . \cos (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = \cos(\alpha-\beta)$
ou encore:

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = x.x' + y.y' = \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha$
d'où <u>$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$</u>

* Si l'on fait $\alpha = a$ et $\beta = b$, on obtient: **$\cos (a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$** (1)
* Si l'on fait $\alpha = a$ et $\beta = -b$, on obtient: **$\cos (a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$** (2)
* Si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{2} - a$ et $\beta = b$, on obtient: **$\sin (a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$** (3)
* Si l'on fait $\alpha = \frac{\pi}{2} - a$ et $\beta = -b$, on obtient: **$\sin (a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$** (4)

(1) et (4) $\Rightarrow$ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a . \tan b}$

(2) et (3) $\Rightarrow$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

Exercices 9 à 12

3.2.2 FORMULES DE DUPLICATION:

* Si l'on fait b = a dans la relation (1), on obtient:

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$

* Si l'on fait b = a dans la relation (2), on obtient: **$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$**

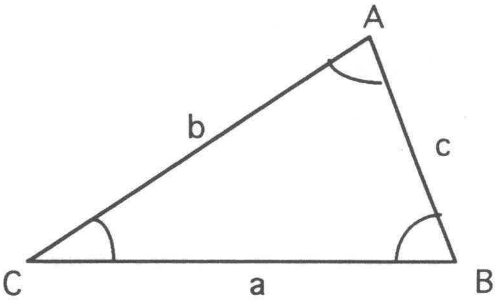
Des deux relations précédentes, on déduit:

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Exercices 13 à 15

3.2.3 RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS LE TRIANGLE QUELCONQUE

On considère un triangle quelconque ABC. Les mesures des côtés [BC], [AC] et [AB] sont respectivement notées a, b et c. La valeur absolue de la mesure de l'angle des vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$ est notée $\hat{A}$.



On peut écrire la relation vectorielle: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

d'où $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

En calculant le carré scalaire de BC, on obtient: $(\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC})^2 + (\overrightarrow{AB})^2 - 2\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

En appliquant la définition du produit scalaire, il vient:

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc.cos\hat{A}}$

Par permutation circulaire, on obtient les relations suivantes:

$b^2 = c^2 + a^2 -2\ ca.cosB$, ou encore:

$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac.cos\hat{B}}$

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab.cos\hat{C}}$

On admettra la relation suivante: $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin\ \hat{A}}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{sin\ \hat{B}}} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{sin\ \hat{C}}}$

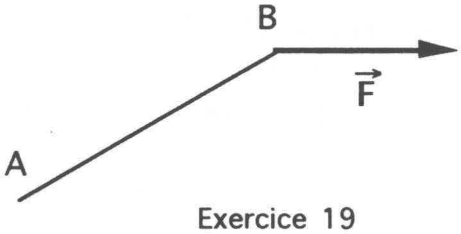
Exercices 16 à 18

3.3 APPLICATION AUX SCIENCES PHYSIQUES:

- **Travail d'une force:**

Le travail de la force au cours de son déplacement de A vers B s'exprime par le produit scalaire:

$$W = \vec{F}\ .\ \overrightarrow{AB}.$$



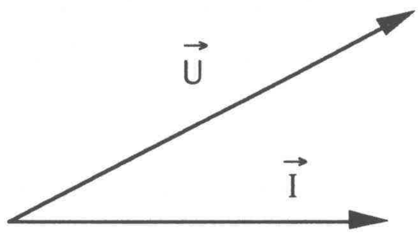
Exercice 19

- **Puissance en alternatif:**

On considère un récepteur alimenté sous la tension instantanée u parcouru par un courant instantané i, représentés respectivement par les vecteurs de Fresnel $\vec{U}$ et $\vec{I}$.

La puissance électrique absorbée par ce récepteur s'exprime par le produit scalaire:

$$P = \vec{U}.\vec{I}$$



Exercice 20

Produit scalaire: Exercices

Exercice 1:
On considère un repère normé (O,I,J) tel que les bipoints unité (O,I) et (O,J) fassent entre eux un angle de 60°.

1) Tracer le bipoint (O,A) représentant le vecteur $\vec{U} = 3\vec{i}$ et le bipoint (O,B) représentant le vecteur $\vec{V} = 2\vec{j}$.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

3) Soit B' la projection orthogonale du point B sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$. Calculer le produit $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$. Le comparer à $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

4) Soit A' la projection orthogonale du point A sur l'axe $\overrightarrow{y'y}$. Calculer le produit $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB}$. Le comparer à $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

Exercice 2:

1) Montrer que le produit scalaire de deux vecteurs est "symétrique": $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

2) Dans une base $(\vec{i};\vec{j})$ telle que $(\widehat{\vec{i},\vec{j}}) = \frac{2\pi}{3}$, on définit les vecteurs: $\vec{U} = 4\vec{i}$; $\vec{V}_1 = 2\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = -3\vec{j}$. Montrer que: $\vec{U}.(\vec{V}_1+\vec{V}_2) = \vec{U}.\vec{V}_1+\vec{U}.\vec{V}_2$

3) soit $\vec{V} = \vec{V}_1+\vec{V}_2$ et $\alpha = 5$. Montrer que: $(\alpha\vec{U}).\vec{V} = \alpha(\vec{U}.\vec{V})$

Exercice 3:
On admet que les relations suivantes sont valables quels que soient les vecteurs concernés:

$$\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W} \qquad (\vec{U}+\vec{V}).\vec{W} = \vec{U}.\vec{W}+\vec{V}.\vec{W}$$

$$(\alpha\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(\alpha\vec{V}) = \alpha(\vec{U}.\vec{V})$$

Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ tels que: $\|\vec{V}_1\| = 4$, $\|\vec{V}_2\| = 6$ et $(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}}) = \frac{\pi}{3}$
Calculer la valeur numérique des expressions suivantes:
$A = \vec{V}_1.(4\vec{V}_1-3\vec{V}_2)$; $B = (-2\vec{V}_1+3\vec{V}_2).(\vec{V}_1+\vec{V}_2)$; $C = (\vec{V}_1-\vec{V}_2)^2 + 3\vec{V}_1.\vec{V}_2$

Exercice 4:

Soient $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{V} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Donner l'expression analytique de $\vec{U}.\vec{V}$

Exercice 5:

Soit un triangle ABC rectangle en A. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, démontrer que $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Exercice 6:

Les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ étant orthogonaux, démontrer que $(\vec{U} - \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2$

Exercice 7:
Dans un repère orthonormé, on donne les points A(0,4) ; B(5,4) ; C(9,1) et D(4,1).

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

2) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{DC}\|$, $\|\overrightarrow{AD}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$. Préciser la nature du quadrilatère ABCD?

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$. Conclusion?

Exercice 8:
Dans un repère orthonormé, on donne les points A(3,4) et B(8,-6)

1) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$. En déduire la nature du triangle AOB

2) Calculer à l'aide du produit scalaire la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}})$.

Exercice 9:
Soit un triangle ABC rectangle en A.

1) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$?

2) Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A. En utilisant les relations $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$, écrire l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire la relation: $AH^2 = HB.HC$

Exercice 10:
Compléter les égalités suivantes: sin (a-b) = cos (a+b) =

En déduire: a) le développement de $\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ et de $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$

b) une factorisation des expressions: $\sin 2x.\cos 3y + \cos 2x.\sin 3y$
$\cos 4x.\cos 2y - \sin 4x.\sin 2y$

Exercice 11:
On considère 3 tensions alternatives sinusoïdales dont les expressions instantanées sont:
$u_1 = U\sqrt{2}\sin\omega t$, $u_2 = U\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$ et $u_3 = U\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$
montrer que la somme de ces 3 tensions est nulle.

Exercice 12:
On donne $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{3}$ et de $\cos\frac{\pi}{3}$.

Exercice 13:
Exprimer sin3x en fonction de sinx en utilisant l'égalité: sin3x = sin(2x+x)

Exercice 14:

Simplifier les expressions: $a = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ et $b = \dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

Exercice 15:

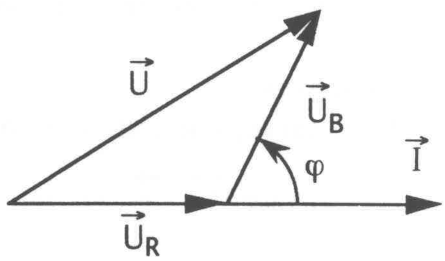
On donne $\tan a = 2 + \sqrt{3}$. En utilisant la relation donnée dans le cours, calculer tan 2a

Exercice 16:

Déterminer les éléments inconnus d'un triangle ABC dont on donne les caractéristiques suivantes: $b = 9$; $c = 5$ et $\widehat{A} = 27°$

Exercice 17:

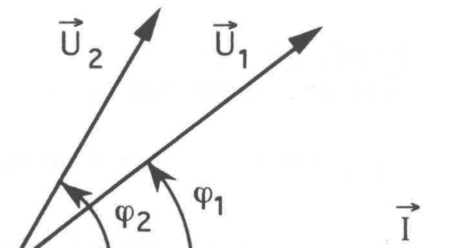
Soit le diagramme de Fresnel ci-contre représentant les tensions aux bornes d'une bobine et d'un résistor montés en série.
Sachant que $U_R = 120$ V, $U_B = 110$ V et $\cos\varphi = 0{,}65$; calculer U.



Exercice 18:

On considère un diagramme de Fresnel pour lequel:

$U_1 = 240$ V, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ et $U_2 = 180$ V, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$



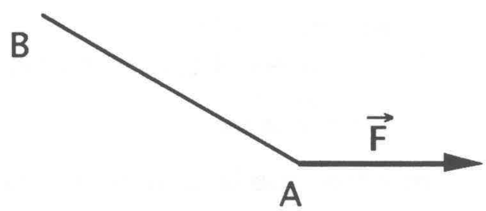
1) Tracer le diagramme à l'échelle en prenant 1 cm pour 30 V.

2) Construire le vecteur $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ et déterminer graphiquement la valeur de sa norme.
En utilisant les relations trigonométriques dans le triangle quelconque, vérifier la valeur trouvée et calculer l'angle de déphasage entre $\vec{U}$ et $\vec{I}$.

3) Construire le vecteur $\vec{V} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2$ et déterminer graphiquement la valeur de sa norme.
En utilisant les relations trigonométriques dans le triangle quelconque, vérifier la valeur trouvée et calculer l'angle de déphasage entre $\vec{V}$ et $\vec{I}$.

Exercice 19:

On considère une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de A vers B:



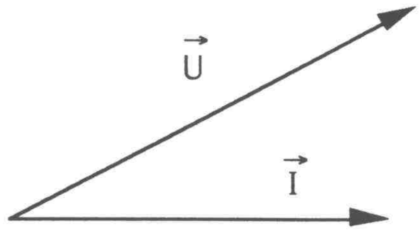
a) En utilisant le produit scalaire, donner l'expression du travail accompli par la force $\vec{F}$ lors du déplacement de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer ce travail sachant que $\|\vec{F}\| = 60$, $\|\overrightarrow{AB}\| = 15$, et $(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}}) = \dfrac{5\pi}{6}$. Quelle remarque faites vous concernant le signe du travail accompli par $\vec{F}$?

Exercice 20:

On considère une bobine alimentée en alternatif sinusoïdal. Le courant la traversant et la tension à ses bornes sont respectivement représentés par des vecteurs de Fresnel tels que:

$\|\vec{I}\| = 10$, $\|\vec{U}\| = 24$ et $\widehat{(\vec{I},\vec{U})} = \frac{\pi}{6}$



Sachant que la puissance absorbée par la bobine s'exprime par la relation $P = \vec{U}.\vec{I}$, calculer cette puissance.

4- PRODUIT VECTORIEL

4.1 PRODUIT VECTORIEL

4.1.1 TRIEDRE DIRECT:

Un **trièdre** est défini par un ensemble de trois axes concourants.
Le trièdre (Ox,Oy,Oz) est de **sens direct** si un observateur, placé debout le long de l'axe $\overrightarrow{Oz}$, les pieds au point O et regardant dans la direction et le sens de l'axe $\overrightarrow{Ox}$, voit $\overrightarrow{Oy}$ orienté vers sa gauche. Dans le cas contraire, le trièdre est dit de **sens rétrograde.**
Si les axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$ sont perpendiculaires,le trièdre est dit **trirectangle.**
Si de plus les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ des axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$ ont même norme, ils constituent une base orthonormée.

4.1.2 DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL:

Soit un bipoint (O,A) représentant d'un vecteur $\vec{U}$ et un bipoint (O,B) représentant d'un vecteur $\vec{V}$. Les points O, A et B définissent un plan (P).
Le produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{W}$ dont le bipoint représentant (O,C) est défini de la façon suivante:
- Le support de (O,C) est une droite perpendiculaire à (P);
- Le sens de (O,C) est tel que le trièdre (OA,OB,OC) soit direct;
- d(O,C) est telle que: $d(O,C) = d(O,A) \,.\, d(O,B) \,.\, |\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})|$ où $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ est l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

On peut écrire également: $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.|\sin(\widehat{\vec{U},\vec{V}})|$

ou: $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\|.|\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})|$

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est noté: $\vec{U} \wedge \vec{V}$.
Remarque:

$\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = 0$, alors $\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$

Exercices 1 à 6

4.1.3 EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL:

On montre que le produit vectoriel des vecteurs:

$\vec{U} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et $\vec{V} = x'.\vec{i} + y'.\vec{j} + z'.\vec{k}$ est le vecteur $\vec{W}$ défini par:

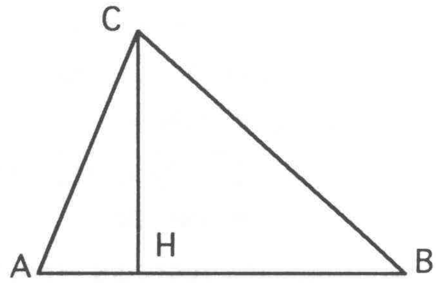
$$\vec{W} = (yz'-zy').\vec{i} + (zx'-xz').\vec{j} + (xy'-yx').\vec{k}$$

4.2 EXEMPLES D'APPLICATION:

1) Aire d'un triangle

Dans le triangle ABC ci-contre, la norme du produit vectoriel de $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est égale à $\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|. |\sin(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})|$, donc à $AB.AH = \frac{1}{2}\mathcal{A}$,aire du triangle.

l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC vaut donc $\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.



Exercice 7

2) **Moment d'une force par rapport à un point:**

Soit une force $\vec{F}$ appliquée au point A. Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O est le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ tel que $\vec{\mathcal{M}} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

d'où $\|\vec{\mathcal{M}}\| = \|\vec{OA}\|.\|\vec{F}\|. |\sin(\vec{OA}, \vec{F})|$ que l'on peut écrire plus simplement en sciences physiques: $\mathcal{M} = OA.F.\sin\alpha$

Remarque: Si H est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la droite support de la force $\vec{F}$, on peut écrire: $OH = d = OA. \sin\alpha$, d'où $\mathcal{M} = F.d$

d est alors la distance de O à la droite support de $\vec{F}$

Exercices 8 & 9

PRODUIT VECTORIEL: Exercices

Exercice 1:

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que $\|\vec{U}\| = 5$, $\|\vec{V}\| = 9$ et $(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = \frac{2\pi}{3}$ rad.

En appliquant la définition donnée dans le cours, calculer $\| \vec{U} \wedge \vec{V} \|$.

Exercice 2:

Comparer $\vec{U} \wedge \vec{V}$ et $\vec{V} \wedge \vec{U}$

Exercice 3:

Soients les vecteurs $\vec{U}(2,2,0)$ et $\vec{V}(0,-3,0)$

- Calculer la norme des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et la mesure de $(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$
- Déterminer le produit vectoriel de $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Exercice 4:

Soit une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Calculer les produits vectoriels suivants:

$\vec{i} \wedge \vec{i}$	$\vec{j} \wedge \vec{j}$	$\vec{k} \wedge \vec{k}$
$\vec{i} \wedge \vec{j}$	$\vec{j} \wedge \vec{k}$	$\vec{k} \wedge \vec{i}$
$\vec{i} \wedge \vec{k}$	$\vec{j} \wedge \vec{i}$	$\vec{k} \wedge \vec{j}$

Exercice 5:

On donne dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les vecteurs $\vec{U}(2,3,0)$ et $\vec{V}(1,-4,0)$.

- Calculer $\vec{U} \wedge \vec{V}$ en utilisant la distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition des vecteurs.
- Généralisation: Donner l'expression analytique du produit vectoriel de deux vecteurs contenus dans le plan des axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.
- Application numérique: Utiliser l'expression trouvée pour retrouver le résultat de l'exercice 3.

Exercice 6:

On donne un vecteur $\vec{U}(x,y,z)$ et un vecteur $\vec{V}(x',y',z')$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

- Calculer l'expression analytique du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$.
- Application numérique: Déterminer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}(1,-2,1)$ et $\vec{V}(2,1,-2)$. Calculer $\| \vec{U} \|$, $\| \vec{V} \|$ et $\| \vec{U} \wedge \vec{V} \|$. en déduire la valeur de $| \sin(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) |$.

Exercice 7:

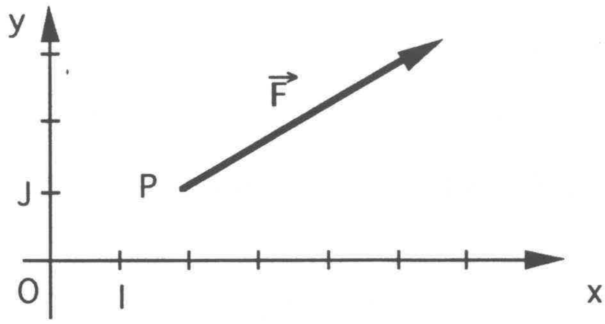
On considère 3 points A(1,-2,0), B(3,4,0) et C(-1,5,0) dans un repère orthonormé (O,I,J,K).

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Calculer l'aire du triangle ABC sachant qu'elle vaut $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$.

- Justifier la propriété précédente.

Exercice 8:

Dans un trièdre orthonormé (O,I,J,K) direct, on considère une force représentée par un vecteur lié $\vec{F}$, d'origine P(2,1,0), de norme égale à 4, situé dans le plan contenant les points O,I,J et faisant un angle de 30° par rapport à la direction de l'axe $\overrightarrow{Ox}$.



1) Préciser les coordonnées du vecteur $\vec{F}$.

2) Déterminer les coordonnées du moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O sachant qu'il s'exprime par la relation:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

3) On considère un axe Δ passant par le point O de vecteur directeur $\vec{u}(-1,-1,5)$.

Calculer la valeur du moment de la force $\vec{F}$ par rapport a l'axe Δ sachant qu'il s'exprime par la relation:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{u} \, . \mathcal{M}_O(\vec{F})$$

Exercice 9:

On donne les 3 vecteurs suivants: $\vec{U}(1,-2,1)$, $\vec{V}(2,1,-2)$ et $\vec{W}(1,-3,2)$

a) Montrer que $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$. Quel nom peut-on donner à cette propriété?

b) Montrer que $(3.\vec{U}) \wedge \vec{V} = 3(\vec{U} \wedge \vec{V})$

c) Comparer $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$ à $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$. Conclusion?

d) Montrer que $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} . \vec{W}).\vec{V} - (\vec{U} . \vec{V}).\vec{W}$

Remarque: l'expression $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$ est appelée double produit vectoriel.

e) Montrer que $(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W} = \vec{U}. (\vec{V} \wedge \vec{W})$

Remarque: l'expression $(\vec{U} \wedge \vec{V}).\vec{W}$ est appelée produit mixte.

5 - EQUATIONS ET INEQUATIONS

5.1 EQUATION DE LA DROITE: Rappels et compléments

* La **fonction linéaire** f: x → ax est représentée graphiquement par une droite passant par l'origine des axes. **y = ax** est l'équation de cette droite.
De même, la **fonction affine** f: x → ax + b est représentée graphiquement par une droite passant par le point de coordonnées (0,b).
L'équation de cette droite s'écrit: **y = ax + b.**
a est appelé le **coefficient directeur** de cette droite et **b l'ordonnée à l'origine**

Exercices 1 à 3

Remarques:

» Si $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont deux points de la droite, on peut écrire: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$

» Dans le cas d'un repère orthonormé, le coefficient directeur a est égal à la tangente de l'angle θ formé par la droite et l'horizontale.

* L' équation d'une droite peut également se présenter sous la forme:
ux + vy + w = 0 où u, v et w sont des nombres réels.

Si v est différent de zéro, on retrouve après transformation la forme précédente:

Exercice 4

* **Condition de parallélisme de deux droites:**

» Les droites d'équation **y = ax + b** et **y = a'x + b'** sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs **a** et **a'** sont **égaux.**

» De même, les droites d'équation **ux + vy + w = 0** et **u'x + v'y + w' = 0** sont parallèles si et seulement si **uv' - vu' = 0.**

* **Détermination de l'équation d'une droite:**
- Passant par deux points
- Passant par un point et de vecteur directeur donné.

Exercices 5 à 11

5.2 EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

5.2-1 Définition:

Soit une fonction affine f: x → f(x) = ax + b. L' expression f(x) = 0 est appelée équation du premier degré à une inconnue.

5.2-2 Résolution:

Résoudre l'équation précédente, c'est trouver l'ensemble S des valeurs de l'inconnue x qui vérifient l'équation, c'est à dire pour lesquelles l'énoncé f(x) = 0 est vrai.
Pour résoudre une équation, on la remplace généralement par une équation plus simple à résoudre **équivalente** à la première, c'est à dire ayant le même ensemble solution.

On obtient une équation équivalente à une équation donnée:
- en ajoutant à ses deux membres un même nombre réel.
- en multipliant ses deux membres par un même nombre réel non nul.

d'où la résolution de l'équation ax + b = 0

Remarque: Toute équation du premier degré de la forme $f(x) = g(x)$ peut se mettre sous la forme ax + b = 0.

Exercices 12 à 16

5.3 EQUATION DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

5.3-1 Définition:

On appelle équation du premier degré à deux inconnues toute équation de la forme:
ax + by + c = 0 , où a et b sont deux réels non nuls.

5.3-2 Résolution:

L'ensemble solution d'une équation du premier degré à deux inconnues est l'ensemble S de tous les couples (x,y) obtenus en considérant l'une des inconnues comme une variable et en exprimant l'autre inconnue en fonction de cette variable.

Remarque: La représentation graphique de l'**ensemble solution** de l'équation ax + by + c = 0 est la **droite** d'équation ax + by + c = 0.

5.4 SYSTEME D'EQUATIONS DU 1° DEGRE A DEUX INCONNUES

5.4-1 Définition:

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y l'expression:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c et a', b', c' sont six réels donnés.

Résoudre le système consiste à trouver l'ensemble des couples (x,y) de nombres réels qui vérifient simultanément les deux équations du système.

5.4-2 Méthodes de résolution:

*** Méthode graphique**

Les équations ax + by - c = 0 et a'x + b'y - c' = 0 équivalentes aux équations données sont celles de deux droites que l'on peut représenter.
L'ensemble des couples solution du système est l'ensemble des coordonnées des points appartenant à ces deux droites.

Exercice 17

* **Méthode de combinaison ou d'addition** (Rappel) Exercice 18
* **Méthode de substitution** (Rappel) Exercice 19
* **Méthode d'identification** Exercice 20
* **Méthode des déterminants**

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

En appliquant la méthode d'addition, on obtient:

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' & \text{(multiplication par b')} \\ -a'bx - bb'y = -c'b & \text{(multiplication par -b)} \end{cases}$$

d'où: $(ab'-a'b).x = cb'-c'b$, relation que l'on note: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$

où l'expression $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelée déterminant principal du système, notée D

et l'expression $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ appelée déterminant secondaire associé à x, notée D_x

d'où, si D est différent de zéro: $x = \frac{D_x}{D}$

En appliquant une nouvelle fois la méthode d'addition, on obtient:

$$\begin{cases} -aa'x - a'by = -a'c & \text{(multiplication par -a')} \\ aa'x + ab'y = ac' & \text{(multiplication par -a)} \end{cases}$$

d'où: $(ab'-a'b).y = ac'-a'c$, relation que l'on note: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . x = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

où l'expression $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ est appelée déterminant secondaire associé à y, notée D_y

d'où, si D est différent de zéro: $y = \frac{D_y}{D}$

donc si $D \neq 0$, l'ensemble solution est: $S = \left\{ \left(\frac{D_x}{D} ; \frac{D_y}{D} \right) \right\}$

Exercices 21 à 23

5.5 INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

5.5-1 Définition

Soit une fonction affine $f: x \rightarrow f(x) = ax + b$
et une fonction affine $g: x \rightarrow g(x) = cx + d$
L' expression $f(x) \geq g(x)$ est appelée inéquation du premier degré à une inconnue.

5.5-2 Résolution:

Résoudre l'inéquation précédente, c'est trouver l'ensemble S des valeurs de l'inconnue x qui vérifient l'inéquation, c'est à dire pour lesquelles l'énoncé $f(x) \geq g(x)$ est vrai.

Pour résoudre une inéquation, on la remplace généralement par une inéquation plus simple à résoudre **équivalente** à la première, c'est à dire ayant le même ensemble solution.
On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée:
- en ajoutant à ses deux membres un même nombre réel. Cela revient à supprimer un terme de l'un des membres en écrivant son opposé dans l'autre membre.
- en multipliant ses deux membres par un même nombre réel non nul, à condition:
* de conserver le sens de l'inéquation si ce nombre est positif
* d' inverser le sens de l'inéquation si ce nombre est négatif

Exercices 24 à 26

5.6 EQUATION DU SECOND DEGRE A UNE INCONNUE

5.6-1 Définition:

Soit la fonction polynôme f: $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$ où a, b et c sont des coefficients réels.
Résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver l'ensemble des réels dont l'image par f est 0. Tout élément de cet ensemble est appelé **solution ou racine** de l'équation.

5.6-2 Résolution de l'équation:

* **Cas particuliers:** Exercices 27 à 29
* **Cas général:**

L'équation peut se mettre sous la forme suivante (forme canonique) à condition que a soit différent de zéro:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0, \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac \ \textbf{(discriminant)}$$

Le nombre des solutions dépend du signe de Δ:

- si **$\Delta > 0$**, il y a **un couple** solution { (x',x'') } tel que: $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si **$\Delta = 0$**, il y a **une** solution: $x = \dfrac{-b}{2a}$
- si **$\Delta < 0$**, il n'y a **pas** de solution. Exercices 30 à 36

Remarques:

» Si les coefficients a et c sont de signes contraires, le discriminant Δ est nécessairement positif.

» Somme et produit des racines:

On montre que lorsqu'il existe deux racines x et x', leur somme est $S = -\dfrac{b}{a}$

et leur produit $P = \dfrac{c}{a}$. Exercice 37

L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit si $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Donc x et x' sont les racines de l'équation: $\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}$

Exercice 38

» Signe des racines:

Dans le cas où l'équation admet un couple solution:
* Si a et c sont de signes contraires, le produit P des racines est négatif et ces deux racines sont de signes contraires. Le signe de la plus grande en valeur absolue est celui de $-\frac{b}{a}$.
* Si a et c sont de même signe, le produit P des racines est positif et les racines sont de même signe:

» Si $-\frac{b}{a}$ est positif, elles sont toutes les deux positives

» Si $-\frac{b}{a}$ est négatif, elles sont toutes les deux négatives

Exercice 39

» Factorisation du trinôme du second degré:

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Il s'écrit sous la forme canonique:

$$P(x) = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

d'où: $$P(x) = a.\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$$

donc $\mathbf{P(x) = a.(x - x').(x - x'')}$,
où x' et x'' sont les racines de l'équation: $ax^2 + bx + c = 0$

Exercices 40 à 44

EQUATIONS: Exercices

Exercice 1:
L'intensité T de la force de rappel exercée par un ressort que l'on étire est proportionnelle à son allongement x. Le rapport de proportionnalité est noté k (constante de raideur du ressort).
a) Dans le cas d'un ressort de raideur k = 50 N/cm, calculer T pour des allongements de 4, 6 et 8 cm.
b) Exprimer la fonction qui à l'allongement du ressort, fait correspondre sa tension T. De quel type est cette fonction?
c) Représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle [0, 10] en choisissant des échelles convenables.

Exercice 2:
Le thermomètre Fahrenheit indique respectivement 32° et 212° quand le thermométre Celsius indique 0° et 100°.
a) Calculer la température Fahrenheit correspondant à 50° C.
b) Calculer la température Celsius correspondant à 77° F.
c) Exprimer la fonction qui à une température Celsius **x**, fait correspondre la température Fahrenheit **y** correspondante. De quel type est cette fonction?
d) Représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle [0, 100] en choisissant des échelles convenables.

Exercice 3:
Soit la fonction affine $f : x \rightarrow 0,5x - 2$
a) Pour deux valeurs quelconques x_1 et x_2 de la variable x, calculer la valeur du rapport $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (appelé taux d'accroissement). Quelle remarque peut-on faire?
En déduire que si $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ sont deux points de la droite d'équation y = ax + b, on peut écrire:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

b) Dans le cas d'un repère orthonormé, calculer la tangente de l'angle θ formé par l'horizontale et la droite passant par M_1 et M_2. Comparer sa valeur à celle de a.

Exercice 4:
Montrer que les équations suivantes sont celles de deux droites parallèles:

$$6x + 15y - 12 = 0 \quad \text{et} \quad 8x + 20y - 40 = 0$$

(On pourra déterminer leur coefficient directeur)
En déduire que si les droites d'équation ux + vy + w = 0 et u'x + v'y + w' = 0 sont parallèles, on a la relation: uv' - vu' = 0.

Exercice 5:
En utilisant les résultats de l'exercice 3, déterminer le coefficient directeur puis l'équation de la droite passant par les points $M_1(1,3)$ et $M_2(4, 2)$.

Exercice 6:
Déterminer l'équation de la droite passant par les points A(1,3) et B(4,2) en considérant qu'un point M(x,y) de la droite est tel que les vecteurs liés $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice 7:
En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer l'équation de la droite passant par le point A(-1,2) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (2,-1)

Exercice 8:
Déterminer l'équation de la droite passant par les points A(0,3) et B(1,1) et celle de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{V}$(1,-2). Quelle remarque faites-vous? Comparer les coordonnées du bipoint (A,B) à celles du vecteur $\vec{V}$. Conclure.

Exercice 9:
Déterminer l'équation de la droite passant par les points A(0,1) et B(3,2) et celle de la droite passant par le point C(2,4) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (6,2). Quelle remarque faites-vous? Comparer les coordonnées du bipoint (A,B) à celles du vecteur $\vec{V}$. Conclure.

Exercice 10:
On donne les droites suivantes:
- (D) passant par les points A(4,3) et B(8,2).
- (D') passant par le point C(-5,7) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (-4,1)

Ces deux droites sont-elles parallèles?
Calculer l'ordonnée de leur point d'intersection avec l'axe vertical.

Exercice 11:
On donne les droites suivantes:
- (D) passant par les points A(0,6) et B(3,2).
- (D') passant par le point C(1,0) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (4,3)

Ces deux droites sont-elles parallèles? Dans le cas contraire:
- afin de préciser leur position relative, calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}$. Conclure.
- calculer le produit de leurs coefficients directeurs.

Exercice 12:
Résoudre les équations suivantes:

a) $x - \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

b) $3x + 4 = -7 - 2x$

c) $\frac{1}{3}x + 1 = 2x - \frac{3}{4}$

d) $\frac{1}{4}(5x - 7) - \frac{1}{5}(9x - 4) = 2 - \frac{1}{8}(3x + 11)$

Exercice 13:
Soit x le prix hors taxes d'un objet. Quel est son prix TTC noté y si le taux de T.V.A. sur cet objet est égal à 18,6 % ?
Combien paie-t-on cet objet si son prix hors taxes est 135 F? Quel est le prix hors taxes d'un objet de même catégorie vendu 150 F?

Exercice 14:
Un artisan répartit une prime de 2880 F entre 3 salariés en fonction de leur ancienneté. Le premier touche 440 F de plus que le deuxième et ce dernier 80 F de plus que le troisième. En désignant par x la part du troisième, déterminer la part de chacun.

Exercice 15:
Une personne possède un certain capital. Elle place 15000 F à 8 % et le reste à 6 % et obtient ainsi un intérêt supérieur de 100 F à celui qu'elle aurait obtenu en plaçant toute la somme à 7 %. Quelle est la valeur du capital?

Exercice 16:
Trois personnes se partagent un héritage. La part de la seconde est les $\frac{3}{4}$ de celle de la première moins 1200 F. La part de la troisième représente la moitié de celle de la première plus 2700 F. Sachant que la deuxième reçoit 600 F de plus que la troisième, calculer la part de chaque héritier et.le montant de l'héritage.

Exercice 17:
Résoudre graphiquement chacun des 3 systèmes suivants:

$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{cases}$

Pour chacun de ces systèmes, calculer l'expression ab' - a'b appelée déterminant principal du système.

Exercice 18:
Déterminer par la méthode de combinaison linéaire l'ensemble solution du système:

$$\begin{cases} 9x + 2y = 17 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases}$$

Exercice 19:
Déterminer par la méthode de substitution l'ensemble solution du système:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 5y = 21 \end{cases}$$

Exercice 20:
Déterminer par la méthode d'identification l'ensemble solution du système:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Exercice 21:
Déterminer par la méthode des déterminants l'ensemble solution du système:

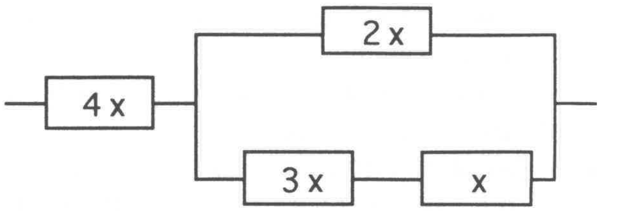
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

Exercice 22:
Un garçon de café sert deux cafés et 3 cocas pour 37 F, puis 4 cafés et 2 cocas pour 38 F. Quel est le prix du café et celui du coca?

Exercice 23:
Un particulier effectue deux placements, l'un à 12 % et l'autre à 15 %. Il obtient ainsi un intérêt annuel total de 3075 F. D'autre part, si le premier capital était placé à15 % et le second à 12 %, les intérêts produits seraient égaux entre eux. Calculer le montant des deux placements.

Exercice 24:
Résoudre dans l'ensemble des réels les inéquations suivantes:
$2x - 3 \leq 0$
$2(x - 4) \leq 3 - 5(x - 1)$
$\frac{2}{5}x + 3 > x - \frac{1}{2}(4 - 3x)$
et le système d'inéquations simultanées ci-dessous:
$$\begin{cases} 2x - 4 \leq x - 1 \\ 2x - 8 \leq 3x - 7 \end{cases}$$

Exercice 25:
On réalise le montage ci-contre contitué de 4 résistors de résistance multiples de x. Déterminer l'expression de la résistance équivalente au montage. Déterminer la valeur maximale que l'on peut donner à x pour que la résistance équivalente soit inférieure ou égale à 50 Ω.



Exercice 26:
Déterminer l'ensemble des couples solution de l'inéquation du premier degré à deux inconnues suivante: $x - 2y + 2 < 0$
Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble de ces couples solution.

Exercice 27:
Résoudre les équations du second degré particulières suivantes:
$x^2 - 16 = 0$; $x^2 + 36 = 0$; $3x^2 - 15 = 0$; $4x^2 - 3x = 0$

Exercice 28:
En remarquant que l'expression $x^2 - 4x + 4$ est le développement d'un carré, résoudre l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Exercice 29:
En utilisant la remarque de l'exercice précédent, mettre l'expression $x^2 - 4x - 12$ sous la forme d'une différence de deux carrés.
En déduire l'ensemble solution de l'équation: $x^2 - 4x - 12 = 0$.

Exercice 30:
Reprendre l'exercice précédent en partant de l'expression générale:
$ax^2 + bx + c = 0$.

Exercice 31:
Résoudre les équations suivantes:
$3x^2 + 5x - 1 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $x^2 - 3x + 5 = 0$.

Exercice 32:
Un panneau rectangulaire a une longueur supérieure de 30 cm à sa largeur notée x.
Calculer x si l'aire de la surface du panneau vaut 5400 cm^2.

Exercice 33:
La distance de freinage d exprimée en mètres d'une voiture lancée à la vitesse v km/h est donnée par la relation:
$d = 75.10^{-4}\, v^2 + 0{,}25\, v$
Calculer la vitesse correspondant à une distance d'arrêt de 50 mètres.

Exercice 34:
Un générateur de courant continu a une f.e.m E de valeur 4,8 V et une résistance interne r égale à 0,6 Ω.
- Exprimer la puissance P qu'il fournit au circuit qu'il alimente en fonction de l'intensité I du courant qu'il débite.
- Calculer l'intensité pour laquelle il fournit une puissance de 9,6 W.
- Pour quelles valeurs de l'intensité fournit-il une puissance nulle?

Exercice 35:
Un premier générateur de courant continu a une f.e.m E de valeur 10 V et une résistance interne r égale à 1 Ω.
Un second générateur de courant continu a une f.e.m E de valeur 8 V et une résistance interne r égale à 0,5 Ω.
Pour quelle valeur de l'intensité fournissent-ils la même puissance au circuit extérieur?

Exercice 36:
Un générateur de courant continu de f.e.m 10 V et de résistance interne r égale à 1 Ω alimente un rhéostat de résistance variable R.
- Exprimer la puissance P qu'il fournit au rhéostat en fonction de sa résistance.
- Pour quelles valeurs de R la puissance fournie est-elle égale à 10 watts?

Exercice 37:
A partir de l'expression générale des solutions d'une équation du second degré à une inconnue, calculer l'expression de leur somme S et de leur produit P.

Exercice 38:
Calculer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre vaut 32 cm et dont l'aire est égale à 63 cm^2.

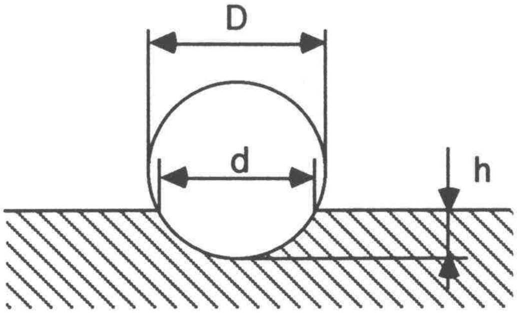
Exercice 39:
Confirmer l'existence des solutions des équations suivantes et préciser leur signe sans les calculer:
$3x^2 - 11x - 4 = 0$; $3x^2 + 5x - 1 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$

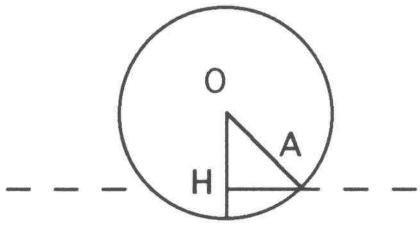
Exercice 40:
Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative (parabole) de la fonction $f : x \rightarrow x^2 - 3x - 10$ avec l'axe horizontal.

Exercice 41:
Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative (parabole) de la fonction $f : x \rightarrow x^2$ avec la droite représentant la fonction $g : x \rightarrow 2x + 15$.

Exercice 42:
Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative (hyperbole) de la fonction $f : x \rightarrow \frac{15}{x}$ avec la droite représentant la fonction $g : x \rightarrow x - 2$.

Exercice 43:
Pour déterminer la dureté d'un métal, on réalise l'essai Brinell qui consiste à lui appliquer une force pressante P exprimée en décanewtons par l'intermédiaire d'une bille laissant dans ce métal une empreinte (calotte sphérique) dont on détermine l'aire S en mm^2 à partir de son diamètre d.





1) Montrer que le diamètre de l'empreinte d, sa profondeur h et le diamètre de la bille D sont liés par la relation: $h^2 - Dh + \frac{d^2}{4} = 0$.
Calculer la profondeur de pénétration h d'une bille de diamètre 10 mm laissant une empreinte de diamètre 3 mm.
En déduire l'aire de l'empreinte sachant qu'elle s'exprime par la relation: $S = 2\pi Rh$.
2) Calculer la dureté Brinell du métal qui est égale au rapport $\frac{P}{S}$ si l'on a appliqué une force pressante d'intensité 2000 daN.

6- - Dérivée d'une fonction

6.1- Nombre dérivé en un point:

Introduction: exercices 1 et 2.

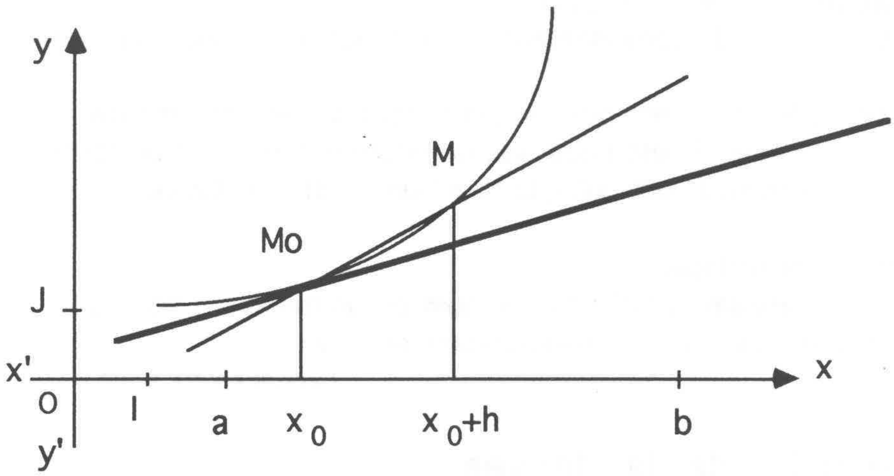
6.1.1- Définition:

Soit une fonction f définie sur un intervalle] a ; b [de IR. On considère deux nombres x_0 et $x_0 + h$ de cet intervalle. Le rapport: $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ représente le taux d'accroissement de la fonction entre les valeurs x_0 et $x_0 + h$ de la variable x.

Le **nombre dérivé de la fonction** f pour la valeur x_0 de la variable x est la **limite,** si elle existe, du rapport précédent **quand h tend vers 0.** Cette limite est notée $f'(x_0)$ et l'on dit que la fonction f est "dérivable au point x_0".

6.1.2- Interprétation géométrique:

Le rapport: $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante à la courbe représentative de la fonction f aux points M_0 et M d'abscisses respectives x_0 et $x_0 + h$. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est donc le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse x_0.



La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 a pour équation:
$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Exercice 3

6.2- Fonction dérivée d'une fonction:

Exercice 4

6.2.1- Définition:

On appelle fonction dérivée (ou simplement "dérivée") d'une fonction f, la fonction f' qui à tout réel x fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple: La fonction dérivée de $f: x \rightarrow f(x) = x^2$ est la fonction $f': x \rightarrow f'(x) = 2x$.

Exercice 5

6.2.2- Tableau des dérivées usuelles:

Le tableau ci-après donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles ainsi que les règles applicables à des fonctions dérivables u et v de la variable x.

f: x $\rightarrow$	f': x $\rightarrow$
a (constante)	0
x	1
x^2	2 x
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cos x
cos x	- sin x
a.x	a

f: x $\rightarrow$	f': x $\rightarrow$
C.u	C.u'
u + v	u' + v'
u.v	vu' + uv'
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
sin u	u'. cos u
cos u	u'. sin u

Exercices 6 à 11

6.3- Application des fonctions dérivées:

6.3.1- Sens de variation d'une fonction:

Le nombre dérivé étant la limite du taux d'accroissement d'une fonction f, nous admettrons que:
- Sur tout intervalle où la fonction dérivée f' est positive, la fonction f est croissante.
- Sur tout intervalle où la fonction dérivée f' est négative, la fonction f est décroissante.
- Sur tout intervalle où la fonction dérivée f' est nulle, la fonction f est constante.

6.3.2- Extremum d'une fonction:

Si une fonction f présente sur un intervalle [a ; b] un maximum ou un minimum pour une valeur x_0 de la variable, le nombre dérivé $f'(x_0)$ correspondant est nul.

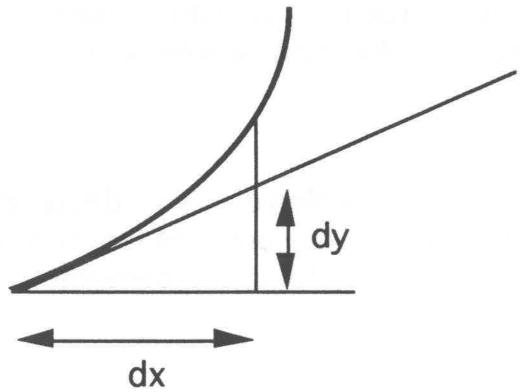
Exercices 12 à 17

6.4- Notation différentielle de la dérivée.

La dérivée $f'(x)$ de f: x $\rightarrow$ y = $f(x)$ peut être notée sous la forme $\frac{dy}{dx}$ appelée notation différentielle. $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ implique $dy = f'(x) \cdot dx$

Exemples: $d(x^3) = 3x^2 . dx$;
$d(\cos x) = -\sin x . dx$

Interprétation géométrique:
dy est l'accroissement de y le long de la tangente correspondant à un accroissement dx de la variable x.



Exercice 18

Dérivée: exercices

Exercice 1:
On considère un rectangle de périmètre égal à 24 cm. Quelle valeur doit-on donner à sa longueur x pour que son aire soit maximale?
Résoudre graphiquement ce problème en représentant la fonction qui à la longueur x fait correspondre l'aire du rectangle.

Exercice 2:
Soit la fonction $f: x \rightarrow x^2$
Calculer la valeur du taux d'accroissement de la fonction entre les valeurs x_0 et $x_0 + h$ de la variable x pour des valeurs successives de h égales à: 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001. On prendra pour cet exercice $x_0 = 1$.
Le taux d'accroissement tend-il vers une limite quand h tend vers 0?
Si oui, quelle est cette limite?
Si M_0 est le point de la courbe d'abscisse x_0 et M le point de la courbe d'abscisse $x_0 + h$, que représente le taux d'accroissement de la fonction f pour la droite M_0M?
Vers quelle position tend la droite M_0M quand h tend vers 0?

Exercice 3:
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f: x \rightarrow x^2$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

Exercice 4:
Déterminer l'expression générale du nombre dérivé de la fonction
$f: x \rightarrow x^2$ pour une valeur x_0 quelconque de la variable x.

Exercice 5:
En utilisant la définition donnée dans le cours, déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$f: x \rightarrow 4\,x$ $\quad$ $g: x \rightarrow -\sqrt{2}.\,x$ $\quad$ $h: x \rightarrow a\,x$ $\quad$ $i: x \rightarrow 3\,x^2$

Exercice 6:
En utilisant les résultats du tableau des fonctions dérivées, déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$f: x \rightarrow x^2 - 7x + 3$ $\quad$ $g: x \rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 5$ $\quad$ $h: x \rightarrow -5\,x^2 + 8x - 3$

Exercice 7:
Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes de deux façons différentes: a) en développant au préalable;
b) en utilisant la relation: $(u.v)' = vu' + uv'$

$f: x \rightarrow 2(x+3)$ $\quad$ $g: x \rightarrow (2x+3)(5x)$ $\quad$ $h: x \rightarrow (2x+3)(5x-4)$

Exercice 8:
Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$f: x \rightarrow \frac{1}{x}(5x^3 - 12)$ $\quad$ $g: x \rightarrow \sqrt{x}\,(3x^2 - 6)$ $\quad$ $h: x \rightarrow \sin x\,(2x^3 - 7x)$

Exercice 9:

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$f : x \to \frac{-4}{x}$ $\quad g : x \to \frac{1}{3x-5}$ $\quad h : x \to \frac{x+2}{4x-3}$

Exercice 10:

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

$f : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad g : x \to \frac{1}{x^n}$ $\quad h : x \to \sqrt{x^3}$

Exercice 11:

L'abscisse a (exprimée en centimètres) d'un mobile sur un axe $\overrightarrow{xx'}$ en fonction du temps t (exprimé en secondes) est donnée par la relation: $\mathbf{a(t) = t^2 + 2t}$

1) Calculer l'abscisse du mobile aux instants: -3; 0 et +4 secondes.
Représenter graphiquement les variations de a en fonction de t sur l'intervalle [-4 ; +4]

2) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants +2 et +3 secondes. Que représente cette vitesse pour la sécante à la courbe précédente passant par les points d'abscisses +2 et +3?

3) Vers quelle valeur tend la vitesse moyenne entre les instants +2 et +2+h quand h tend vers 0? Déterminer l'expression de la vitesse instantanée notée v(t) et calculer sa valeur à l'instant -3 secondes.

4) L'accélération instantanée notée $\gamma(t)$ du mouvement étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, déterminer son expression et dire quelle est sa particularité.

Exercice 12:

Etudier la variation des fonctions trinôme suivantes:

$f : x \to 2x^2 - 5x + 3$

$g : x \to -3x^2 + 3x + 4$

Déterminer les coordonnées de l'extremum qu'elles présentent.

Dresser le tableau général de variation de la fonction trinôme

$f : x \to ax^2 + bx + c$ en distinguant deux cas selon le signe du coefficient a

Exercice 13:

Etudier la variation de la fonction $f : x \to \frac{1}{x}$ (Domaine de définition, parité, sens de variation, représentation graphique). Même question pour $g : x \to \frac{-2}{x}$.

Exercice 14:

Etudier la variation de la fonction $f : x \to \sqrt{x}$

Exercice 15:

Dans les conditions d'emploi du transformateur de soudage, on a rencontré la relation:

$I = 120\sqrt{\frac{x}{100}}$ dans laquelle x est une variable qui décrit l'intervalle [0 ; 100] et I la valeur de l'intensité moyenne (en ampères) débitée par le transformateur.

a) Exprimer I sous sa forme la plus simple.

b) On considère la fonction $f : x \to I$.

- Etudier les variations de *f*.
- Tracer sa courbe représentative (prendre en abscisse 1 cm pour 10 unités et en ordonnée 1 cm pour 10 ampères).

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 49.
Construire cette tangente. (D'après BAC PRO E.I.E. 89)

Exercice 16:

Un générateur de courant continu a une f.e.m E de valeur 4,8 V et une résistance interne r égale à 0,6 Ω.
- Exprimer la puissance P qu'il fournit au circuit qu'il alimente en fonction de l'intensité I du courant qu'il débite.
- Pour quelle valeur de l'intensité fournit-il la puissance maximale?

Exercice 17:

Un générateur de courant continu de f.e.m 10 V et de résistance interne r égale à 1 Ω alimente un rhéostat de résistance variable x.
- Exprimer la puissance P qu'il fournit au rhéostat en fonction de sa résistance.
- Pour quelle valeur de x la puissance fournie est-elle maximale?

Exercice 18:

On considère un circuit électronique appelé amplificateur opérationnel pour lequel la tension de s v_s est liée à la tension appliquée à l'entrée v_e par la relation:

$$vs = \frac{dv_e}{dt} \qquad \text{(montage dérivateur)}$$

Déterminer l'expression de la tension de sortie v_s en fontion du temps t quand la tension appliqu l'entrée a pour valeur:

a) $v_e = 3t$ c) $v_e = \sin(\omega t + \varphi)$

b) $v_e = -t^2 + 4$ d) $v_e = \cos(100\pi.t + \frac{\pi}{4})$

7 - PRIMITIVES D'UNE FONCTION - INTEGRALE

7.1- FONCTIONS PRIMITIVES D'UNE FONCTION

*** Définition:**
On appelle fonction primitive d'une fonction f définie sur un intervalle [a,b], toute fonction F telle que, quel que soit x élément de [a,b], $F'(x) = f(x)$

*** Remarque:**
Si une fonction f admet une fonction primitive F, elle en admet une infinité de la forme: F + constante

Exercices 1 &2

*** Tableau des Primitives:**

fonction: f: **x →**	primitive: F: **x →**
0	Cte
a	a.x + Cte
2x	x^2 + Cte
x	$\frac{1}{2}x^2$ + Cte
$n.\ x^{n-1}$	x^n + Cte
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ + Cte
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$ + Cte
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$ + Cte
sin x	- cos x + Cte
cos x	sin x + Cte

fonction: f: **x →**	primitive: F: **x →**
C.u'	C.u + Cte
u' + v'	u + v + Cte
$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$ + Cte
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$ + Cte
u'.sin u	- cos u + Cte
u'.cos u	sin u + Cte

Exercices 3 à 6

7.2- INTEGRALE

*** Définition:**
Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [a ; b], le nombre F(b) - F(a) est appelé **intégrale de f de a à b**, et notée de la façon suivante:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

La valeur de l'intégrale est donc égale à la différence entre les valeurs prises par une primitive de f pour les valeurs a et b de la variable.

Exercices 7 & 8

*** Propriétés:**
On admettra la propriété suivante:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et si λ est un réel constant:

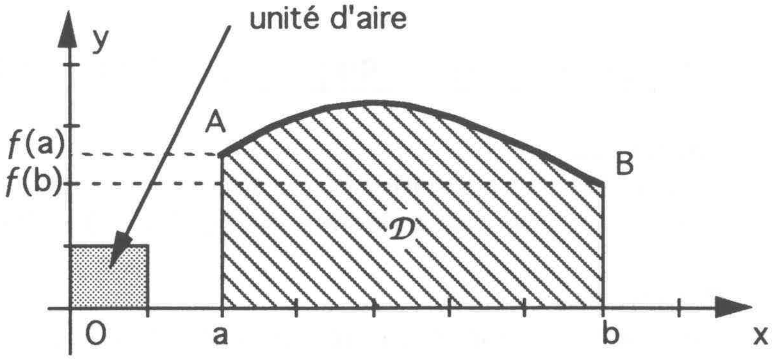
$$\int_a^b \lambda.f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

Exercices 9 &10

*** Interprétation géométrique de l'intégrale:**

Soit f une fonction continue et à valeurs positives sur un intervalle [a ; b].
L'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f, l'axe horizontal et les droites d'équation x = a et x = b est égale à l'intégrale de f de a à b.

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$$



Exercices 11 à 13
Exercices 14 à 19

*** Intégration par parties:**

Si u et v sont deux fonctions de x, on admettra la relation suivante appelée "formule d'intégration par parties":

$$\int_a^b u.dv = \left[\, u.v \,\right]_a^b - \int_a^b v.du$$

On l'utilise quand la deuxième intégrale est plus facile à calculer que la première.
Exemples:
1) Utiliser la relation pour calculer l'intégrale:

$$I_1 = \int_0^{\pi} x.\cos x\,dx \qquad \text{en posant } u(x) = x \text{ et } dv(x) = \cos x\,dx$$

2) Calculer par la même méthode:

$$I_2 = \int_0^{\frac{T}{4}} t.\sin \omega t\,dt$$

Primitives et intégrale: Exercices

Exercice 1:

En s'aidant du tableau (Chapitre 6) donnant l'expression des fonctions dérivées, déterminer l'expression des fonctions primitives des fonctions suivantes:

$f: x \to 0$ $\quad$ $g: x \to 1$ $\quad$ $h: x \to -\sqrt{2}$ $\quad$ $i: x \to a$

$j: x \to 2x$ $\quad$ $k: x \to x$ $\quad$ $l: x \to 3x^2$ $\quad$ $m: x \to x^2$

$n: x \to x^3$ $\quad$ $p: x \to nx^{n-1}$ $\quad$ $q: x \to x^n \quad (n \neq -1)$

Exercice 2:

En s'aidant du tableau (Chapitre 6) donnant l'expression des fonctions dérivées, déterminer l'expression des fonctions primitives des fonctions suivantes:

$f: \to -\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $g: x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $h: x \to \sin x$ $\quad$ $i: \to \cos x$

Exercice 3:

En utilisant le tableau des fonctions primitives, déterminer l'expression des fonctions primitives des fonctions suivantes:

$f: x \to 7x$ $\quad$ $g: x \to 5x - 3$ $\quad$ $h: x \to 9x^2 - 11x$

$i: x \to x^2 + x$ $\quad$ $j: x \to \frac{3}{2}x^3 - 5$ $\quad$ $k: x \to -4x^2 - 7x + 3$

Exercice 4:

En utilisant le tableau des fonctions primitives, déterminer l'expression des fonctions primitives des fonctions suivantes:

$f: x \to -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad$ $g: x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $h: x \to \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ $\quad$ $i: x \to \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$j: x \to \cos(x - 7)$ $\quad$ $k: x \to 2.\cos(2x + 3)$ $\quad$ $l: x \to \cos(3x + 5)$

$m: x \to -\sin(x - 7)$ $\quad$ $n: x \to -\sin(2x + 3)$ $\quad$ $p: x \to \sin(3x + 5)$

Exercice 5:

L' expression en fonction du temps t de la f.e.m instantanée e induite aux bornes d'un circuit dans lequel se produit une certaine variation de flux est: $e = E \sin \omega t$. Déterminer l'expression du flux instantané ψ en fonction du temps sachant que la f.e.m e est la dérivée de ce flux. Déterminer la valeur de la constante si, au bout du temps $t = \frac{T}{4}$, la valeur du flux est nulle (Rappel: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$).

Exercice 6:

On utilise un amplificateur opérationnel dans le montage intégrateur tel que la tension de sortie instantanée $u_s(t)$ soit une primitive de la tension d'entrée $u_e(t)$. Déterminer l'expression de la tension de sortie dans les cas suivants:

$u_e(t) = 0 \ ; \ u_e(t) = 5 \ ; \ u_e(t) = t \ ; \ u_e(t) = \dfrac{1}{\omega} \cos \omega t$

Exercice 7:

En utilisant la définition donnée dans le cours, montrer que: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Exercice 8:

Calculer les intégrales suivantes: $\int_0^2 x\,dx$; $\int_0^3 x^2\,dx$; $\int_2^3 x^3\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

Exercice 9:

Calculer l'intégrale suivante: $\int_1^3 7(x^2 - x - 1)\,dx$

Exercice 10:

Déterminer l'expression des primitives de la fonction $f: x \to kx$.
1) Soit a un réel positif. Calculer la différence F(a) - F(0). La comparer à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$.
2) Soit b un réel positif tel que $b > a$. Calculer la différence F(b) - F(a). La comparer à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Exercice 11:

Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $f: \to x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$ ($\lambda \geq 0$)

Exercice 12:

Calculer l'aire du domaine limité par la première moitié de la courbe représentative de la fonction $f: \to \sin x$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ et l'axe des abscisses.

Exercice 13:

Calculer l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la parabole d'équation:
$y = -2x^2 + 10x - 8$.

Exercice 14:

Calculer le travail accompli lors de la tension d'un ressort que l'on allonge de la longueur x sachant que l'intensité de la force de traction F est proportionnelle à l'allongement ($F = k.x$ où k est la constante de raideur du ressort).

Exercice 15:

Déterminer l'expression du moment d'inertie I par rapport au point A d'une tige AB homogène de longueur l et de section constante dont la masse par unité de longueur (masse linéique) est notée μ sachant que:

$$I = \int_0^l (\mu r^2)\,dr$$

Remarque: la massse totale de la tige vaut $M = \mu\, l$

Exercice 16:

Calculer la quantité d'électricité Q stockée par un condensateur chargé par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i = I \sin \omega t$ pendant un quart de période sachant qu'elle s'exprime par la relation:

$$Q = \int_0^{\frac{T}{4}} i\,dt$$

Rappel: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

En déduire le courant moyen ayant circulé pendant le quart de période et la tension finale aux bornes du condensateur.

Exercice 17:

On considère une tension alternative sinusoïdale d'expression $u = U\sqrt{2}\cos \omega t$. Sachant que la valeur moyenne $\overline{U}$ de cette tension sur un intervalle de temps [a, b] s'exprime par la relation:

$$\overline{U} = \frac{1}{b-a}\int_a^b u\,dt$$

Calculer cette valeur moyenne sur les intervalles: $[-\frac{T}{4} ; +\frac{T}{4}]$; $[-\frac{T}{4} ; 0]$ et $[0 ; +\frac{T}{8}]$

Exercice 18:

Calculer l'énergie W emmagasinée dans une inductance pure de valeur L quand l'intensité du courant la traversant passe de la valeur 0 à la valeur I sachant qu'elle s'exprime par la relation:

$$W = \int_0^I Li\,di$$

Cette énergie est appelée énergie d'auto-induction et est restituée par la bobine quand on coupe le courant la traversant.

Exercice 19:

On considère un courant alternatif sinusoïdal d'expression $i = \hat{I}\sin \omega t$. Calculer la valeur efficace I de ce courant sur une période T sachant qu'elle s'exprime par la relation:

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

En déduire la valeur du rapport $\frac{\hat{I}}{I}$

8 - FONCTIONS LOGARITHME

8.1- Fonction Logarithme Népérien

*** Définition:**
La fonction logarithme népérien sera étudiée à l'aide de la calculatrice. Les valeurs prises par cette fonction sont obtenues en pressant la touche **lnx.** En utilisant ce moyen de calcul, remplir le tableau suivant:

x	-2	-1	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
ln x													

On constate que la fonction Logarithme Népérien n'est définie que pour les valeurs de x strictement positives. D'autre part, on vérifie que la fonction f:x —> ln x est croissante sur l'intervalle correspondant aux valeurs du tableau et on admet qu'elle l'est également sur $\mathcal{R}^{*+}$ tout entier.
A partir des valeurs obtenues, tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal tracé sur papier millimétré tel que $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2{,}5$ cm.

*** Propriétés:**
Vérifier pour des valeurs extraites du tableau les propriétés suivantes:

$\forall$ x $\in \mathcal{R}^{+*}$ et y $\in \mathcal{R}^{+*}$, $\ln (x.y) = \ln x + \ln y$

$\forall$ x $\in \mathcal{R}^{+*}$ et y $\in \mathcal{R}^{+*}$, $\ln (\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

$\forall$ x $\in \mathcal{R}^{+*}$, $\forall$ n $\in$ Z, $\ln (x^n) = n.\ln x$

Exercice 1

*** Remarques:**
1) Rechercher à l'aide de la calculatrice le nombre dont le logarithme népérien a pour valeur 1. Ce nombre est noté e. On trouve e =

Exercice 2

2) $\forall$ x $\in \mathcal{R}^{+*}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Si u est une fonction de x, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, où u' est la fonction dérivée de u par rapport à x.

Exercices 3, 4 & 5

8.2- Fonction Logarithme décimal

*** Définition:**
La fonction précédente est telle que ln e = 1. On l'appelle également fonction logarithme de **base e.** On utilise très couramment en physique une fonction logarithme pour laquelle c'est le nombre 10 dont le logarithme est égal à 1. Cette fonction est appelée **logarithme décimal** ou de **base 10**, et notée **log.** En utilisant la touche **log** de la calculatrice, compléter le tableau suivant:

x	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
log x													

(la partie entière du logarithme est appelée sa caractéristique et la partie décimale sa mantisse)

Tracer ensuite la courbe représentative de la fonction log dans le même repère que la précédente.

Exercice 6

On remarque que les deux courbes présentent une affinité orthogonale de direction parallèle à y'Oy et de rapport $\frac{1}{\ln\ 10}$

Remarque: On peut définir une fonction logarithme ayant pour base n'importe quel nombre a strictement positif, notée $\log_a x$. La relation qui la lie au logarithme népérien s'écrit:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Exercices 7 & 8

*** Echelles logarithmiques:**

Une échelle logarithmique est telle que la distance entre l'origine et une graduation représentant un nombre strictement positif est proportionnelle au logarithme de ce nombre. L'origine de l'échelle représente le nombre 1 car log 1 = 0.
Compléter l'échelle logarithmique ci-dessous pour laquelle d(O,I) = 10 cm, I étant le point représentant le nombre 10.

D'une façon générale, une échelle logarithmique est telle que, si un point M_i représente un nombre x_i, on a la relation: $d(O,M_i) = m.\log x_i$. Le coefficient m est appelé module de l'échelle.

Exercice 9

Le principe de fonctionnement de la régle à calculer repose sur l'utilisation des échelles logarithmiques. Ce type d'échelle est également très utilisé en électronique et en acoustique.

Exercices 10 & 11

Fonctions Logarithme: Exercices

Exercice 1:
En utilisant les propriétés des logarithmes, résoudre les équations suivantes et vérifier la validité des solutions obtenues:
$\ln(x - 3) + \ln(x - 5) = \ln 15$
$\ln(x - 3) - \ln(x - 5) = \ln 2$
$2.\ln(x + 2) = \ln 9$

Exercice 2:
Tracer les tangentes à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien tracée dans le cours aux points d'abscisse $x_0 = 0{,}5$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
Déterminer le coefficient directeur de ces tangentes. Etablir la relation existant entre ce coefficient et l'abscisse du point où est tracée la tangente.

Exercice 3:
Déterminer l'expression de la primitive de la fonction $f : x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$. En déduire une définition de la fonction logarithme népérien.

Exercice 4:
Calculer l'intégrale ci-contre, dans laquelle x_0 représente un nombre réel supérieur à 1:

$$I = \int_1^{x_0} \frac{1}{x}\,dx$$

En déduire l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $f : x \to \frac{1}{x}$; l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et sa parallèle passant par un point d'abscisse x supérieure à 1.

Exercice 5:
En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_1^2 \ln x\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^e x^2.\ln x\,dx$$

Exercice 6:
1) Compléter le tableau ci-dessous en reprenant les valeurs obtenues dans le cours puis en calculant le rapport $\frac{\ln x}{\log x}$

x	0	0,1	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ln x													
log x													
$\frac{\ln x}{\log x}$													

2) Trouver à l'aide de la calculatrice le nombre dont le logarithme népérien est égal à ce rapport. En déduire une relation entre log x, ln x et ln 10.

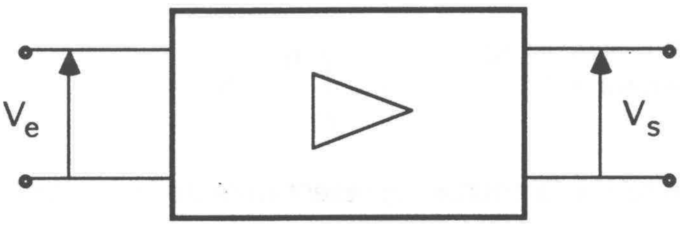
Exercice 7:
En utilisant une affinité orthogonale, tracer la courbe représentative de la fonction logarithme de base $a = \frac{1}{2}$ dans le repère précédent.

Exercice 8:
En utilisant les valeurs de la fonction log contenues dans le tableau de l'exercice 6, vérifier les relations suivantes:

$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$; $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$; $\log a^n = n.\log a$

Exercice 9:
Etudier le papier quadrillé fourni par le professeur. Vérifier que l'axe des abscisses porte une échelle logarithmique. Déterminer la valeur de son module. Préciser le nombre de modules qu'elle comporte et la valeur de son origine. De quelle nature est l'échelle portée par l'axe des ordonnées?
Un tel papier est dit "semi-logarithmique".

Exercice 10:
Le gain en tension A_v d'un amplificateur est défini comme le rapport de la tension de sortie V_s du signal amplifié à la tension V_e du signal appliqué à l'entrée.



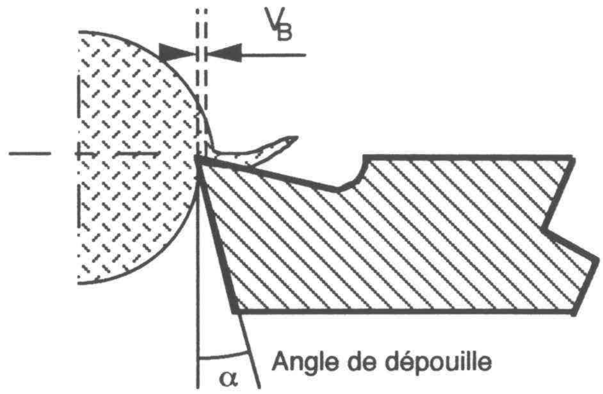
$$A_v = \frac{V_s}{V_e}$$

Le gain en tension d'un amplificateur atteignant parfois des valeurs très élevées, on utilise les logarithmes décimaux pour l'exprimer. Le gain exprimé en décibels et noté G_{dB} se calcule par la relation $G_{dB} = 20 \log A_v$. Il dépend en général de la fréquence f du signal appliqué à l'entrée de l'amplificateur.
Le tableau ci-dessous donne la valeur de la tension de sortie V_s d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte pour une tension d'entrée V_e de valeur constante égale à 40 μV mais de fréquence variable. Compléter ce tableau et tracer la courbe $G_{dB} = f(f)$ sur le papier semi-logarithmique étudié précédemment.

f	10	20	30	60	100	1000	10000	100000	hertz
V_s	12,65	12,65	12,65	7,98	4	0,4	0,04	0,004	volt
A_v									
$\log A_v$									
G_{dB}									

Exercice 11:

L'usure en dépouille d'un outil de coupe notée V_B (mm) dépend en particulier de la vitesse de coupe V (m/min) utilisée. On a mesuré le temps T au bout duquel un outil au carbure de tungstène usinant un acier XC 38 a atteint une usure V_B égale à 0,3 mm pour différentes valeurs de la vitesse de coupe. Les résultats sont portés dans le tableau ci-dessous:

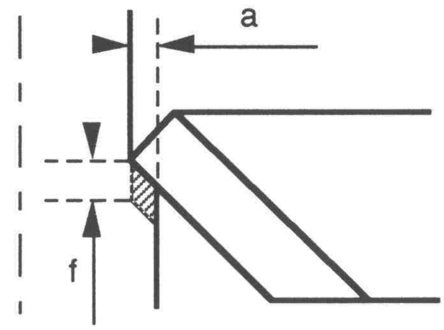


V	60	80	100	120	150	m/min
T	50	20	10	6	3	min

1) Tracer dans un repère orthogonal les variations de T en fonction de V. On prendra 1 cm pour 10 m/min et 1 cm pour 5 minutes. La forme de la courbe vous est-elle connue?
En réalité, la loi de variation est de la forme suivante:

$$T = C_V \, . \, V^n \quad \text{(Loi de TAYLOR)}$$

où n est un exposant dépendant principalement de la nature de l'outil et C_V un coefficient dépendant principalement de la nature du matériau usiné.
2) Tracer de nouveau la courbe des variations de T en fonction de V, à partir des valeurs contenues dans le tableau, mais cette fois dans un repère comportant des échelles logarithmiques (au moins deux modules suivant chaque axe). Cette courbe peut-elle être assimilée à un droite? Justifier votre réponse en déterminant l'expression du logarithme de T défini par la relation précédente. De quelle forme est cette expression?
3) Tracer la droite appelée droite de Taylor puis déterminer son coefficient directeur n et son ordonnée à l'origine C_V.
4) Déterminer graphiquement la durée de vie de l'outil correspondant à une vitesse de coupe de 50 m/min et la vitesse de coupe que l'on peut adopter si l'on accepte une durée de vie égale à 2 minutes.
5) Montrer que la loi de TAYLOR peut aussi s'écrire $V \, . \, T^k = C_T$. Déterminer la relation existant entre k et n et celle existant entre C_T et C_V.
Déterminer C_T à partir de la droite de TAYLOR et retrouver la valeur de C_V en utilisant la relation précédente.
6) Pour chacun des couples de valeurs du tableau précédent, calculer le volume Q (en dm^3) de copeau formé entre deux changements d'outil sachant que la profondeur de passe vaut : a = 2 mm et l'avance: f = 0,2 mm par tour. Tracer la courbe représentative des variations de Q en fonction de V (courbe de DENIS) dans un repère à échelles linéaires.

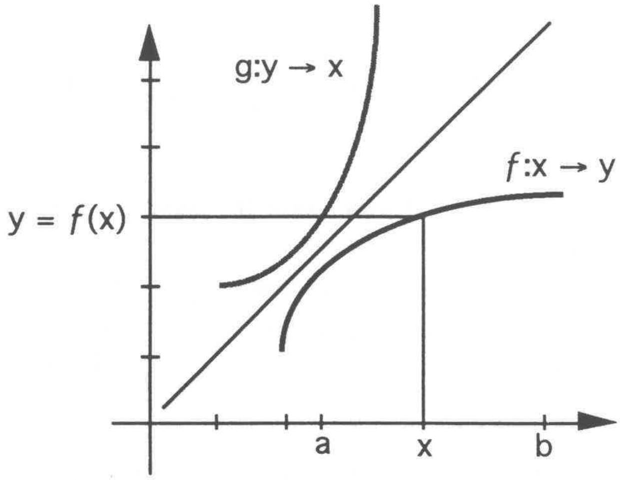


9 - FONCTION EXPONENTIELLE

91 - Fonction réciproque d'une fonction:

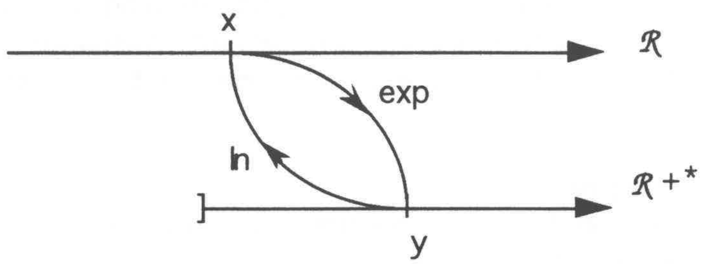
*** Définition:**
Soit f une fonction de la variable x définie et continue sur un intervalle [a,b]. L'image du réel x appartenant à [a,b] par la fonction f est notée $y = f(x)$. La fonction réciproque de la fonction f est la fonction g qui à y fait correspondre x.

*** Propriété:**
Les courbes représentatives de la fonction f et de sa réciproque tracées dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



92 - Fonction exponentielle de base e

*** Définition:**
On appelle fonction exponentielle de base e, notée exp x ou e^x, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
Elle est définie dans l'ensemble $\mathcal{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathcal{R}^{+*}$.



$x = \ln y \Leftrightarrow y = \exp x$
$y \in \mathcal{R}^{+*} \qquad x \in \mathcal{R}$

Les valeurs de la fonction exponentielle sont obtenues à l'aide de la calculatrice en utilisant les touches INV puis lnx

*** Variation:**
La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'ensemble $\mathcal{R}$ tout entier. Vérifier ce résultat en remplissant le tableau de valeurs ci-dessous et tracer la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé.

x	-10	-2	-1	0	0,1	0,5	1	2	e	3	4	5	6	8
exp x														

*** Propriétés:**
Vérifier pour des valeurs extraites du tableau les propriétés suivantes:
- quels que soient $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{R}$, $\exp(x+y) = \exp x . \exp y$
- quels que soient $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{R}$, $(\exp x)^y = \exp x.y$
- quel que soit $x \in \mathcal{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$, d'autre part: $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

L'ensemble de ces propriétés, analogues à celles connues pour les puissances entières d'un nombre réel x, invitent à noter la fonction exponentielle sous la forme e^x.

Exercices 1 & 2

*** Remarque:**

- quel que soit $x \in \mathcal{R}$, $(e^x)' = e^x$. La fonction dérivée de la fonction exponentielle est égale à elle-même.

Dans le cas où u est une fonction de x, on peut écrire: $(e^u)' = u'.e^u$

Exercices 3 à 8

93 - Fonction exponentielle de base a

*** Définition:**

La fonction exponentielle de base a (a > 0), notée a^x, est la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.

Elle est définie dans l'ensemble $\mathcal{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathcal{R}^{+*}$.

$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$

$y \in \mathcal{R}^{+*} \qquad x \in \mathcal{R}$

Les valeurs de la fonction exponentielle sont obtenues à l'aide de la calculatrice en utilisant la touche $\mathbf{y^x}$.

Remarque: $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, d'où $x.\ln a = \ln y$ et $y = e^{x.\ln a}$

*** Variation et représentation graphique de la fonction f:x → a^x**

Le sens de variation de la fonction dépend de la valeur de a:

- si a >1, la fonction est strictement croissante
- si a <1, la fonction est strictement décroissante

Exercice 9

*** Propriétés:**

Les propriétés de la fonction exponentielle de base a découlent de celles de la fonction exponentielle de base e:

$a^0 = e^{0.\ln a} = 1$ et $a^1 = e^{\ln a} = a$

- quels que soient $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{R}$, $a^{(x+y)} = a^x . a^y$

- quels que soient $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{R}$, $(a^x)^y = a^{x.y}$

- quel que soit $x \in \mathcal{R}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Exercice 10

Fonction exponentielle: Exercices

Exercice 1:
En utilisant la notation e^x, réécrire les propriétés de la fonction exponentielle présentées dans le cours.

Exercice 2:
Tracer les tangentes à la courbe représentative de la fonction exponentielle tracée dans le cours aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
Déterminer le coefficient directeur de ces tangentes. Comparer ce coefficient à l'ordonnée du point où est tracée la tangente.

Exercice 3:
Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $f: x \rightarrow e^x$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 4:
En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^2 x \,.\, e^x \, dx \quad ; \quad I_2 = \int_1^2 x^2 .\, e^x \, dx$$

Exercice 5:
A partir de la courbe représentative de la fonction $f: x \rightarrow e^x$, déterminer l'allure de la courbe représentative des fonctions qui à x font correspondre: e^{2x}, e^{ax}, e^{-x}, e^{-2x}, e^{-ax}, $k.\, e^{-ax}$, où a est un réel strictement positif

Exercice 6:
On appelle factorielle n le produit des n premiers entiers naturels et on le note n!
Calculer n! pour n allant de 1 à 10.
Déterminer la valeur des expressions:

$$S_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \quad \text{et} \quad S_8 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

En déduire la valeur vers laquelle tend la somme ci dessous quand n tend vers l'infini:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Exercice 7:
Caractéristique directe d'une diode.
La valeur de l'intensité I traversant une diode semiconductrice polarisée en sens direct sous une tension U s'exprime par la relation: $I = I_S .\, \exp \frac{eU}{kT}$
où I_S est un coefficient constant (intensité de saturation inverse), e représente la charge de l'électron ($1{,}6.10^{-19}$ coulomb), k la constante de Boltzmann ($1{,}38.10^{-23}$ J/degré) et T la température absolue en degrés Kelvin.
1) Exprimer I en remplaçant les termes connus par leur valeur. On prendra $I_S = 1{,}78.10^{-14}$ et T = 293 K
2) Tracer la courbe représentant les variations de I en fonction de U pour U compris dans l'intervalle [0 ; 0,85]. Prendre 10 cm pour 1 V et 1 cm pour 1 A.

3) Quelle remarque faites-vous concernant les points d'abscisse supérieure à 0,82?
Calculer le coefficient directeur a de la droite passant par les points d'abscisse 0,82 et 0,85 Déterminer la résistance dynamique directe de la diode sachant qu'elle est l'inverse de a. Calculer l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses. Cette valeur est appelée seuil de tension de la diode.

Exercice 8:

Décharge d'un condensateur dans un résistor.

La tension instantanée v au bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor s'exprime en fonction du temps t par la relation:

$$v = V_0 . \exp \frac{-t}{RC}$$

où R est la résistance du résistor, C la capacité du condensateur en farad et V_0 la tension initiale à ses bornes. Le produit RC est appelé constante de temps du circuit et s'exprime en secondes.

1) En appliquant la relation précédente, répondre aux questions suivantes:
- à l'instant t = 0, quelle est la valeur de v?
- à l'instant t = RC, quel pourcentage de V_0 représente v?

Application numérique: R = 10000 Ω, C = 100 µF et V_0 = 25 V.
Calculer le produit RC et la valeur de v au bout du temps t = RC (1 µF = 10^{-6} F).
2) On prend maintenant R = 1000 Ω, C = 4700 µF et V_0 = 10 V
a) Tracer la courbe représentative de v en fonction de t pour t appartenant à l'intervalle [0 , 10].
b) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 sachant que la dérivée de e^{ax} est $a.e^{ax}$. Déterminer l'équation de cette tangente. Calculer les coordonnées de son point d'intersection avec l'axe horizontal. Quelle remarque faites-vous?
c) Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la tension v a atteint le dixième de sa valeur initiale V_0. Vérifier ce résultat par le calcul.

Exercice 9:

a) Dresser un tableau de valeurs pour les fonctions ci-dessous et les représenter dans le même repère:

$$f:x \rightarrow 0,5^{x} \quad \text{et} \quad g:x \rightarrow 2^{x}$$

b) En utilisant le fait que $a^{x} = e^{x.\ln a}$, calculer leur fonction dérivée et justifier leur sens de variation.
c) Utiliser le tableau de valeurs dressé pour vérifier les propriétés des fonctions exponentielles de base a.

Exercice 10: D'après Bac. Pro Bâtiment 88

Pour tester l'isolation thermique de la salle de séjour d'un appartement, on a chauffé cette salle jusqu'à une température stabilisée de 18° puis, à l'instant t = 0 pris comme origine des temps, on a arrêté le chauffage. On a constaté ensuite que la température Θ(t) baissait durant chaque demi-heure d'un dixième de sa valeur.
a) Calculer Θ(t) pour t = 0,5; t = 1; t = 1,5; t = 2 (le temps est exprimé en heures).
b) La température de la pièce s'exprimant par une fonction de la forme: $\Theta(t) = \Theta(0).0,9^{kt}$, préciser la valeur de Θ(0) et de k.
c) Représenter la fonction f:t → Θ(t) sur l'intervalle [0 ; 6].
d) Au bout de combien de temps la température aura-t-elle atteint 7°?

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Vecteurs

1) On donne dans un plan (P) trois points distincts A, B et C.
- Placer le point M, milieu du bipoint (A,C).
- Placer le point D, symétrique de B par rapport à M.
- Que peut-on dire des bipoints (A,D) et (B,C)? Justifier votre réponse.

2) On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dessinés ci-dessous.

Tracer dans la zone quadrillée les vecteurs suivants:

$3.\vec{U}$

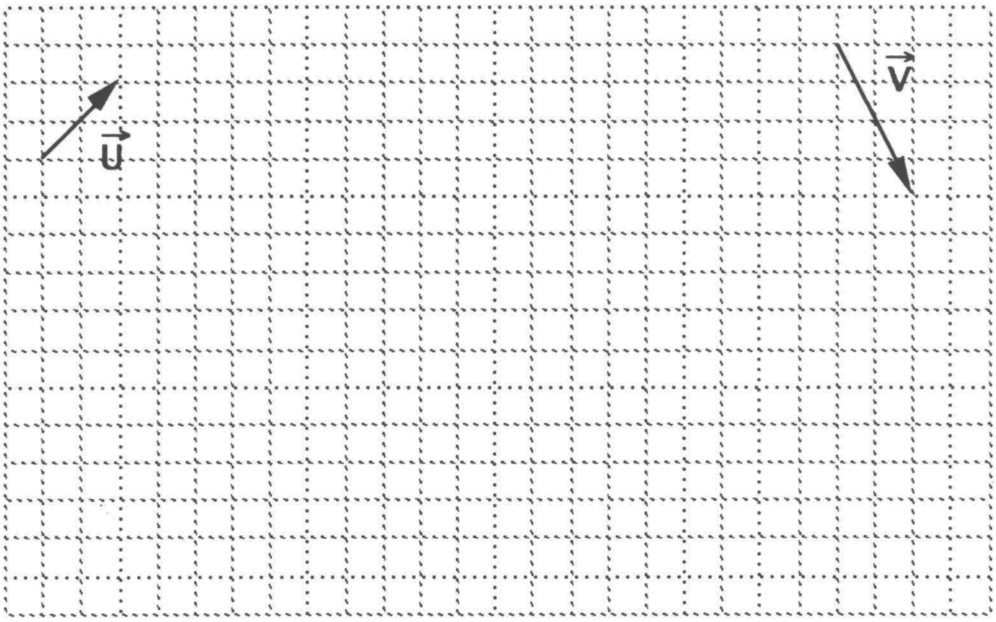
$-2.\vec{U}$

$\frac{5}{2}.\vec{V}$

$-1,5.\vec{V}$

$\vec{U}+\vec{V}$

$3.\vec{U}-2.\vec{V}$



3) a) Sur un axe $\overrightarrow{x'x}$ de bipoint unité (O,I) représentant le vecteur unitaire $\vec{u}$, faire figurer les bipoints (O,A), (A,B), (B,C) et (C,D) tels que $(O,A) \in 2.\vec{u}$, $(A,B) \in 2,5.\vec{u}$, $(B,C) \in -5.\vec{u}$ et $(C,D) \in 3,5.\vec{u}$.
b) Calculer l'abscisse des points A, B, C et D. En déduire celle du milieu M du bipoint (C,D).

c) Déterminer les mesures algébriques suivantes: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BD}$.

4) Soient les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'un plan vectoriel, tels que:

$\vec{U} = 2.\vec{i} + 3.\vec{j}$ et $\vec{V} = -\vec{i} + 2.\vec{j}$

a) Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$\vec{U}+\vec{V}$; $\vec{U}-\vec{V}$; $\vec{U}+3\vec{V}$; $2\vec{U}-5\vec{V}$

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $3.\vec{U}$ et $-4,5.\vec{V}$

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Trigonométrie

1) Placer sur un cercle trigonométrique de centre O les points A, B, C et D dont les abscisses curvilignes sont les suivantes (k entier relatif):

A: $\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi$ B: $\frac{3\pi}{4} + 2.k.\pi$ C: $-\frac{\pi}{6} + 2.k.\pi$ D: $-\frac{5\pi}{6} + 2.k.\pi$

Calculer ensuite la mesure des arcs orientés suivants: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{DA}$.

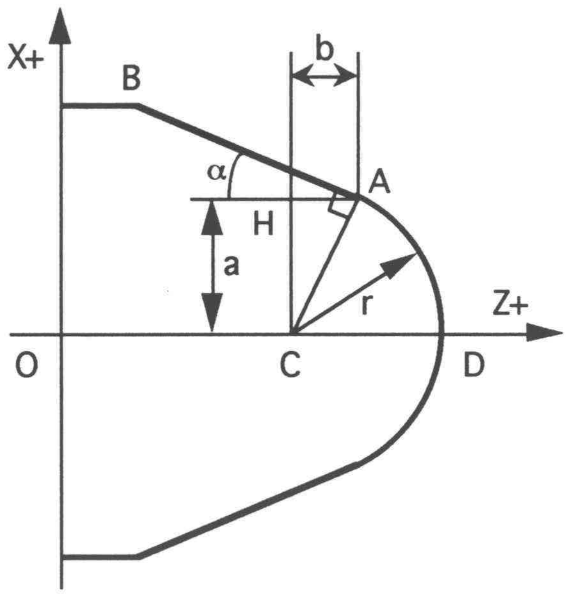
2) Calculer la mesure principale (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) associée aux mesures suivantes:

$$\alpha = \frac{8\pi}{3} + 2.k\pi \qquad \beta = \frac{3\pi}{2} + 2.k.\pi$$

3) Le sinus de la mesure d'un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ est égal à 0,6. En utilisant les relations données dans le cours, calculer cos x, tan x et cotan x.

4) Déterminer les solutions (exprimées en degrés) de l'équation tan x = $\frac{3}{2}$.

5) On désire réaliser la pièce représentée ci-contre sur un tour à commande numérique. Pour effectuer la programmation des déplacements de l'outil, il est nécessaire de connaître les coordonnées de certains points de sa trajectoire. On donne les cotes suivantes en micromètres:
$r = 40000$ µm ; $Z_C = 60000$ µm ; $X_B = 65000$ µm et $\alpha = 25°$
a) Calculer les cotes a et b. En déduire les coordonnées Z_A et X_A du point A
b) Calculer l'abscisse Z_B du point B.
c) Entre les points A et B, la vitesse de coupe est maintenue constante par la machine. Déterminer le rapport de la vitesse de rotation de la broche au point A à sa valeur au point B.



CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Produit scalaire

PREMIERE PARTIE:

Soient $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ tels que: $\|\vec{V}_1\| = 2\sqrt{2}$, $\|\vec{V}_2\| = 5$ et $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{4}$ rad

Calculer la valeur numérique des expressions suivantes:

$A = \vec{V}_1 . \vec{V}_2$

$B = \vec{V}_1 .(\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2)$

DEUXIEME PARTIE:

Soient les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ par:

$\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{V} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

1) Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

2) Calculer la norme de ces deux vecteurs. En déduire la mesure de l'angle $(\vec{U}, \vec{V})$.

TROISIEME PARTIE:

Soit un triangle ABC dont les sommets ont pour coordonnées: A(-1,1) ; B(1,2) et C(-2,3) dans un repère orthonormé.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

b) Déduire de la question précédente la longueur des côtés AB , AC et BC. Quelle remarque faites-vous?

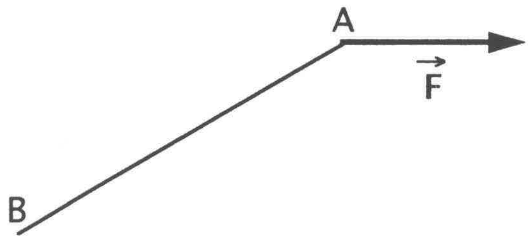
c) Calculer le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ Que peut-on en conclure concernant la nature du triangle ABC?

d) On considère un point M(x,y) appartenant à la hauteur AH du triangle ABC. Quelle est la valeur du produit scalaire $\vec{AM}.\vec{BC}$? Exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{BC}$ et en déduire la relation existant entre les coordonnées x et y d'un point M de la hauteur issue de A.

QUATRIEME PARTIE:

On considère une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de A vers B:

a) En utilisant le produit scalaire, donner l'expression du travail accompli par la force $\vec{F}$ lors du déplacement de vecteur $\vec{AB}$



b) Calculer ce travail sachant que $\|\vec{F}\| = 60$, $\|\vec{AB}\| = 15$, et $\widehat{(\vec{F},\vec{AB})} = 150°$. Quelle remarque faites vous concernant le signe du travail accompli par $\vec{F}$?

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Produit vectoriel

PREMIERE PARTIE:

On considère deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et le vecteur $\vec{W}$ qui est égal au produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$:

1) En utilisant la définition du produit vectoriel donnée dans le cours, préciser quelles sont les caractéristiques du vecteur $\vec{W}$ (Direction, sens et norme.).

2) On donne: $\| \vec{U} \| = 7.\sqrt{2}$, $\| \vec{V} \| = 3$ et $\widehat{(\vec{U},\vec{V})} = \frac{\pi}{4}$ rad. Calculer $\| \vec{U} \wedge \vec{V} \|$.

DEUXIEME PARTIE:

Soient les vecteurs $\vec{U}(-3,+2,-5)$ et $\vec{V}(4,0,-3)$.

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$. On rappelle l'expression analytique du produit vectoriel:

$\vec{U} \wedge \vec{V} = (yz'-zy').\vec{i} + (zx'-xz').\vec{j} + (xy'-yx').\vec{k}$

2) Calculer $\| \vec{U} \|$, $\| \vec{V} \|$ et $\| \vec{U} \wedge \vec{V} \|$. En déduire la valeur de $| \sin \widehat{(\vec{U},\vec{V})} |$ et une valeur de $\widehat{(\vec{U},\vec{V})}$.

3) Calculer le produit scalaire des deux vecteurs et déterminer la valeur de $\cos\widehat{(\vec{U},\vec{V})}$. En déduire une valeur de $\widehat{(\vec{U},\vec{V})}$ et la comparer à celle obtenue à la question 2.

TROISIEME PARTIE:

On considère 3 points A(3,-4), B(-1,2) et C(-1,-5) dans un repère orthonormé (O,I,J).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer l'aire du triangle ABC sachant qu'elle vaut $\frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \|$.

3) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et en déduire la mesure de la hauteur AH du triangle ABC.

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Equations(1)

Exercice 1:

Résoudre les équations du premier degré suivantes:

$1 - 3x = 2(x + 5)$

$4(2x - 1) + x = 3(x-4) + 5$

$\frac{x-1}{2} - \frac{2-x}{3} = \frac{x}{4} + \frac{3-x}{8}$

Exercice 2:

On considère les droites suivantes:
- (D) d'équation: $2x + 5y - 10 = 0$
- (D') passant par les points $A(7,-2)$ et $B(2,0)$.
- (D'') passant par le point $C(-1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{V}$ $(5,-2)$

Déterminer l'équation de ces 3 droites sous la forme $y = ax + b$

Ces trois droites sont-elles parallèles?

Exercice 3:

a) Déterminer par la méthode de substitution puis par la méthode d'addition l'ensemble solution du système:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

b) Déterminer par la méthode des déterminants l'ensemble solution du système:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Exercice 4:

La vitesse v à l'instant t d'un mobile animé d'un mouvement d'accélération constante γ et possédant à l'instant $t = 0$ une vitesse initiale v_0 est donnée par la relation: $v = \gamma t + v_0$. Sachant qu'à l'instant $t_1 = 4$ s, la vitesse du mobile est $v_1 = 13$ m/s et qu'à l'instant $t_2 = 10$ s, sa vitesse est $v_2 = 28$ m/s, déterminer l'accélération γ et la vitesse initiale.

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Equations(2)

1) Résoudre les équations du second degré suivantes:

$$2x^2 + x - 15 = 0 \quad ; \quad 4x^2 - 20x + 25 = 0 \quad ; \quad 2x^2 + x + 1 = 0$$

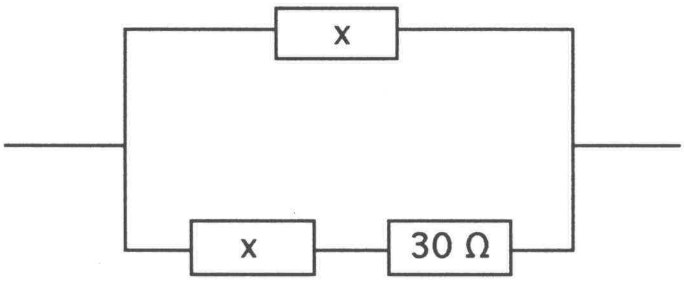
2) Parmi les équations précédentes, factoriser celles qui ont des racines.

3) Déterminer les deux réels dont la somme est égale à $5\sqrt{3}$ et le produit à 18.
En déduire les solutions du système d'équations: $\begin{cases} a + b = 10\sqrt{3} \\ a.b = 72 \end{cases}$

4) On peut, sans calculer le discriminant de l'équation: $x^2 - 4x - 7 = 0$, affirmer qu'elle posséde deux racines. Pourquoi?
- Quelle est la valeur de leur somme?
- Quelle est la valeur de leur produit?
- De quel signe sont les racines?
- Quel est le signe de la racine de plus grande valeur absolue?

5) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole représentant la fonction $f : x \to 3x^2$ avec la droite représentant la fonction $g : x \to 11x + 4$.

6) Un circuit électrique est composé de trois résistors suivant le schéma ci-contre:
a) Déterminer la relation donnant la valeur de la résistance équivalente R au circuit en fonction de x.
b) Calculer la valeur à donner à x pour que cette résistance soit égale à 20 Ω.



CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Dérivée

PREMIERE PARTIE:

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions suivantes:

a) $f: x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ b) $f: x \rightarrow -\sqrt{3}.\, x$ c) $f: x \rightarrow 2x - 5$

d) $f: x \rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 7x$ e) $f: x \rightarrow \frac{3}{x}$ f) $f: x \rightarrow \sin(3x + 2)$

g) $f: x \rightarrow (5x^2+3)(4x-5)$ h) $f: x \rightarrow \sqrt{9x-1}$ i) $f: x \rightarrow \frac{x-4}{3x+1}$

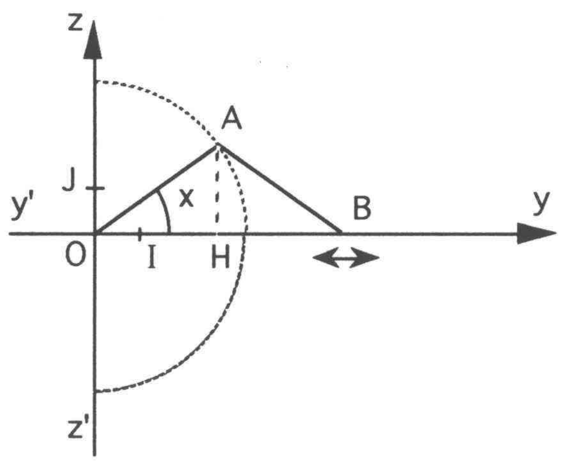
On rappelle dans le tableau ci-contre l'expression de fonctions dérivées dans lesquelles u et v sont des fonctions de la variable x

$f: x \rightarrow$	$f': x \rightarrow$
$C.u$	$C.u'$
u^n	$u'.\, nu^{n-1}$
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$vu' + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u'.\cos u$
$\cos u$	$-u'.\sin u$

DEUXIEME PARTIE: (D'après Bac productique 90)

Un mécanisme est formé d'une partie OA tournant autour de O dans le plan (yOz) et d'une partie AB dont l'extrémité B coulisse suivant l'axe $\overrightarrow{y'y}$. On donne:

$OA = AB = 3$ et $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2}$



1) Exprimer $\overline{OH}$ et $\overline{OB}$ en fonction de la mesure x de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$

2) On pose $f(x) = \overline{OB}$. Déterminer la dérivée de f. Calculer la valeur de x annulant cette dérivée.

3) Etablir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}]$

4) Tracer la courbe représentative de f sur cet intervalle

5) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = -\frac{\pi}{2}$ et l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = +\frac{\pi}{2}$.

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Primitive-Intégrale

PREMIERE PARTIE:
Déterminer l'expression des fonction primitives des fonctions suivantes:

a) $f: x \to \sqrt{3}$ b) $f: x \to 3\,x^2$ c) $f: x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d) $f: x \to x - \dfrac{1}{x^2}$

e) $f: x \to \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ f) $f: x \to \dfrac{3}{x^2}$ g) $f: x \to 3.\sin x$ h) $f: x \to \cos 2x$

Rappel de l'expression des primitives des fonctions usuelles

fonction: $f: x \to$	primitive: $F: x \to$
0	Cte
a	$a.x$ + Cte
x	$\frac{1}{2}x^2$ + Cte
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ + Cte
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$ + Cte
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$ + Cte
$\sin x$	$-\cos x$ + Cte
$\cos x$	$\sin x$ + Cte

DEUXIEME PARTIE:
Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^2 x\,dx \ ; \quad I_2 = \int_{-1}^{3} (3x^2 - 5)dx \ ; \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2.\sin 2x\,dx \ ; \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx$$

TROISIEME PARTIE
On considère la courbe représentative de la fonction $f: x \to 5.\sin x$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
a) Calculer l'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses.
b) La comparer à celle comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $f: x \to \cos x$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

QUATRIEME PARTIE:
On considère une bobine sans noyau de fer alimentée sous une tension alternative sinusoïdale. La valeur instantanée du champ magnétique qu'elle produit s'exprime par la relation: $b = \widehat{B} \cos \omega t$. La valeur moyenne $\overline{B}$ de ce champ sur un intervalle de temps $[\alpha, \beta]$ s'exprime par la relation:

$$\overline{B} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta b\,dt$$

Calculer cette valeur moyenne sur l'intervalle $[0, \frac{T}{4}]$. On rappelle que $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Application numérique: calculer la valeur de $\overline{B}$ correspondant à $\widehat{B} = 0{,}2$ T.

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Logarithmes

PREMIERE PARTIE:
a) Compléter dans $\mathcal{R}^{*+}$ les relations suivantes:

ln x.y = ln x - ln y = n.ln x = $\frac{1}{n}$.ln x =

En déduire la valeur des expressions suivantes:

$a = \ln e^3$; $b = \ln \frac{1}{e^2}$; $c = \ln \sqrt[3]{e}$

b) Résoudre dans $\mathcal{R}^{*+}$ l'équation suivante (vérifier la validité des solutions trouvées):
$\ln (x+2) + \ln (x+4) = \ln 8$

DEUXIEME PARTIE:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes:
$f:x \to -3.\ln x$, $g:x \to \ln (2x+5)$ et $h:x \to \ln (x-2)^2$

TROISIEME PARTIE:

Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $f:x \to \frac{5}{x}$, l'axe horizontal, la droite d'équation $x_1 = 1$ et sa parallèle passant par le point d'abscisse $x_2 = e$.

QUATRIEME PARTIE:
Pour faire le vide dans une enceinte de volume V, on utilise une machine pneumatique à piston dont le corps de pompe a un volume v Si P_0 est la pression initiale, la pression P_n obtenue après n coups de piston s'exprime par la relation:

$$P_n = P_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^n$$

1) On donne $P_0 = 1$ bar, V = 50 litres et v = 0,2 litres. Exprimer P_n en fonction de n.
2) Calculer la valeur de P_n quand n = 100.
3) Combien faut-il donner de coups de piston pour que la pression dans l'enceinte atteigne le centième de la valeur initiale?
4) Ecrire l'expression de $\ln P_n$ en fonction de n, $\ln P_0$, ln V et ln $(V+v)$.

CONTROLE DE MATHEMATIQUES: Exponentielles

Exercice 1:

Compléter les relations suivantes: $e^{x+y} =$; $e^{x-y} =$; $(e^x)^y =$
Exprimer en fonction de e^x les expressions suivantes: $a = e^{x-1}$; $b = e^{2x-2}$
En déduire les solutions de l'équation: $e^{2x-2} - e^{x-1} - 2 = 0$ en posant $X = e^{x-1}$.

Exercice 2:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$f:x \rightarrow e^{2x}$; $g:x \rightarrow e^{-\sqrt{3}x}$; $h:x \rightarrow e^{2x}$ et $k:x \rightarrow \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

Exercice 3:
Déterminer l'expression littérale de l'intégrale ci-contre, dans laquelle x_1 et x_2 représentent deux nombres réels tels que x_2 soit supérieur à x_1:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} e^x \, dx$$

En déduire l'aire du domaine limité par la courbe représentative de la fonction $f:x \rightarrow e^x$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x_1 = 0$ et sa parallèle passant par le point d'abscisse $x_2 = 4$.

Exercice 4:
On charge un condensateur préalablement déchargé en le plaçant en série avec un résistor aux bornes d'un générateur fournissant une tension continue de valeur E.
La tension instantanée v au bornes du condensateur au cours de sa charge s'exprime alors en fonction du temps t par la relation: $v = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$
où R est la résistance du résistor et C la capacité du condensateur en farad.
On donne: $R = 2200\ \Omega$, $C = 1500\ \mu F$ ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) et $E = 10$ V.

1) Calculer la valeur du produit RC, appelé constante de temps du circuit qui s'exprime en secondes.
2) En appliquant la relation précédente, répondre aux questions suivantes:
- à l'instant $t = 0$, quelle est la valeur de v?
- à l'instant $t = 3{,}3$ s, quelle est la valeur de v et quel pourcentage de E représente-t-elle?

3) Tracer la courbe représentative de v en fonction de t pour t appartenant à l'intervalle
[0 , 10]. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse nulle.
4) Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la tension v atteint les 90% de sa valeur finale E. Vérifier ce résultat par le calcul.