DES OUTILS

pour les

BACS PROFESSIONNELS
(tome 2)

IREM DES PAYS DE LA LOIRE
GROUPE LP
Juin 1992

35 F

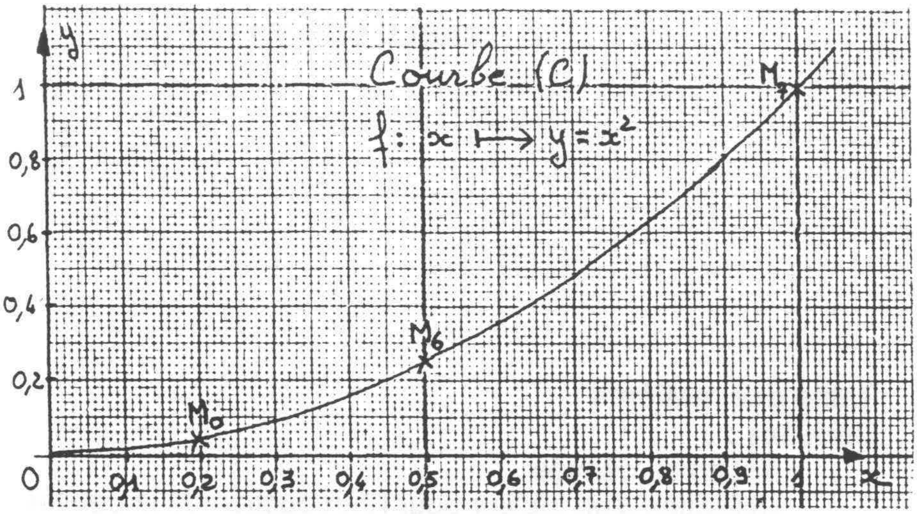
Cette brochure prolonge celle de Juin 1991 et son complément de mars 1992.

Le groupe Lycées Professionnels de l'IREM des Pays de Loire poursuit le travail engagé de publication des travaux élaborés lors des stages "production d'outils pédagogiques".

TABLE DES MATIERES

NOTION DE DÉRIVÉE

1) Tracer les droites (M_7M_0) et (M_6M_0)



2) Rechercher les coefficients directeurs de ces deux droites

(M_7M_0)

$M_7 : x_7 = 1 \quad \rightarrow \quad y_7 = \dots$

$M_0 : x_0 = 0{,}2 \quad \rightarrow \quad y_0 = \dots$

La droite (M_7M_0) admet pour coefficient directeur:

$$a = \frac{y_7 - y_0}{x_7 - x_0} = \frac{\qquad}{\qquad} = \dots$$

(M_6M_0)

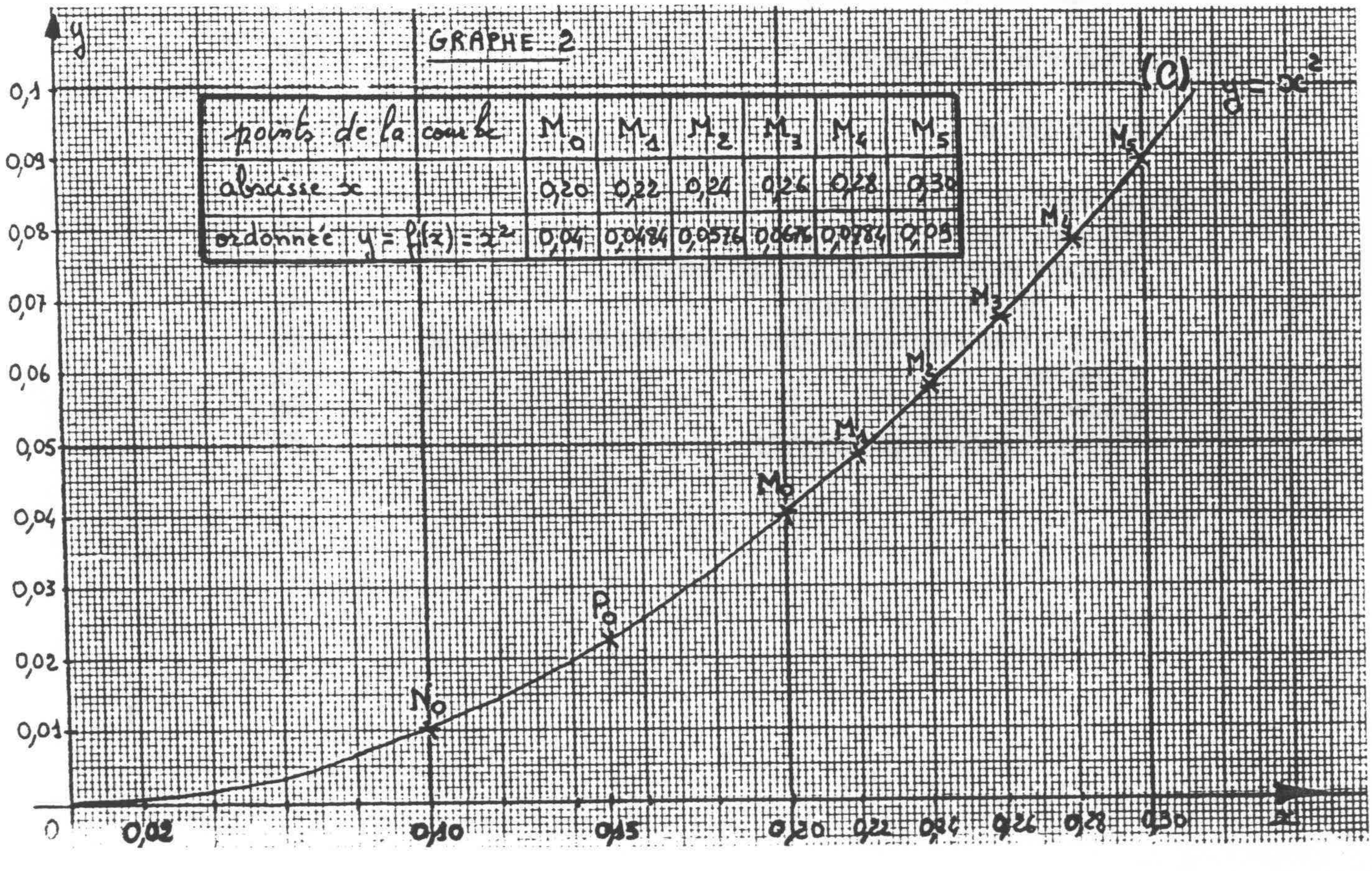
$M_6 : x_6 = \dots \quad \rightarrow \quad y_6 = \dots$

$M_0 : x_0 = \dots \quad \rightarrow \quad y_0 = \dots$

La droite (M_6M_0) admet pour coefficient directeur:

$$a = \frac{y_6 - y_0}{x_6 - x_0} = \frac{\qquad}{\qquad} = \dots$$

3) On se propose d'étudier ce que devient la direction de la droite lorsque le point M se déplace sur (C) en se rapprochant de M_0 (zoom autour de M_0 : voir graphe 2)



points de la courbe	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
abscisse x	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30
ordonnée $y = f(x) = x^2$	0,04	0,0484	0,0576	0,0676	0,0784	0,09

La droite tend vers une position limite appelée tangente à la courbe en M_0

4) Recherche du coefficient directeur de la tangente

droite	coefficient directeur
(M_3M_0)	a =
(M_2M_0)	a =
(M_1M_0)	a =
(MM_0)	$a = \dfrac{x^2 - 0{,}04}{x - 0{,}2} = \dfrac{(x + 0{,}2)(x - 0{,}2)}{x - 0{,}2} = x + 0{,}2$

Donc si M se rapproche très près de M_0 alors x se rapproche de ... et le coefficient directeur "a" se rapproche de ...

Notation: si $x \to$ ... ; alors $a \to$...

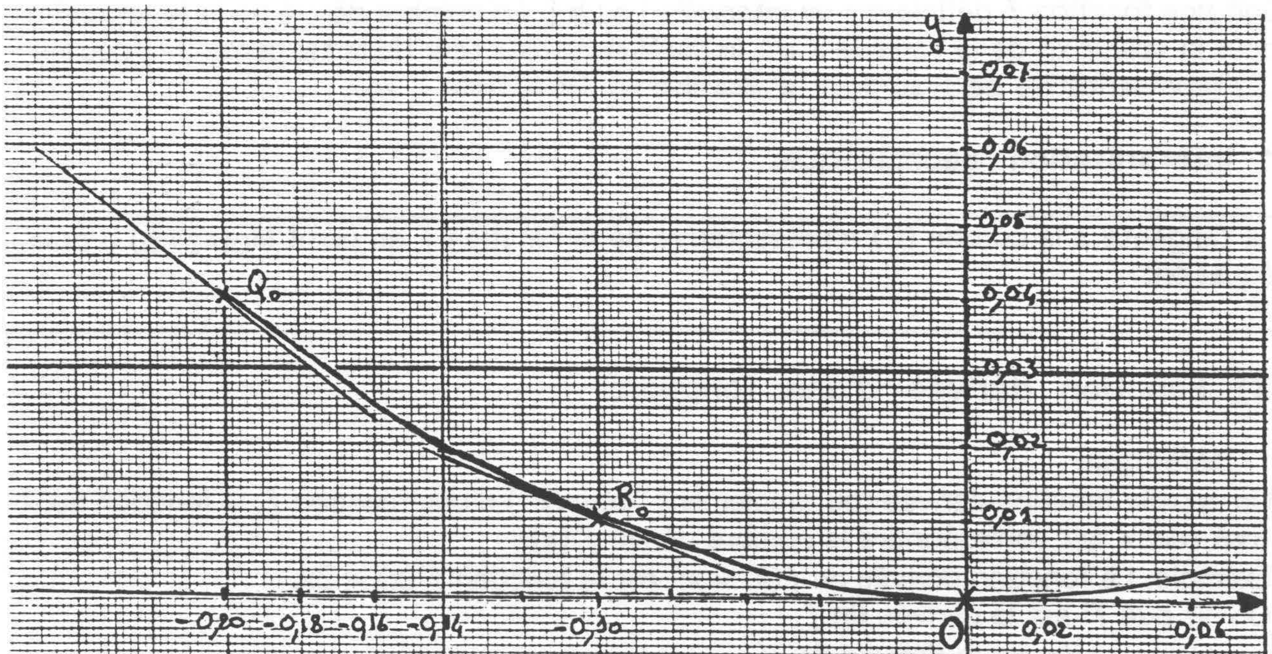
5) Travail à faire: rechercher le coefficient directeur de la tangente en différents points de la courbe (C)

* en N_0 $(0{,}10 ; 0{,}10^2)$ (MN_0) $a = \dfrac{x^2 - 0{,}10^2}{x - 0{,}10} =$

si $x \to$ ... alors $a \to$ ...

* en P_0 $(0{,}15 ; 0{,}15^2)$ (MP_0) $a = \dfrac{}{} =$

si $x \to$ ... alors $a \to$ ...



* en Q_0 (-0,20 : ...) (MQ_0) $a = \dfrac{}{} =$

si $x \to -0{,}20$ alors $a \to$ ...

* en R_0 (-0,10 ; ...) (MR_0) $a = \dfrac{}{} =$

si $x \to$ ... alors $a \to$ ...

* en O (0 ; 0) quelle est la tangente à la courbe (C) ?

quel est son coefficient directeur ?

6) Compléter le tableau :

	Q_0	R_0	O	N_0	P_0	M_0
abscisse du point de (C)	x_0 =	x_0 =	x_0 =	x_0 =	x_0 =	x_0 =
coefficient directeur de la tangente à la courbe (C)	a =	a =	a =	a =	a =	a =

*existe-t-il une relation entre x_0 et a ?

* Sauriez-vous calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C)
- au point d'abscisse x = 5 ?

- au point d'abscisse x = -2 ?

7) Nombre dérivé d'une fonction en un point

*** Définition:**
Soit une fonction f définie sur un intervalle] a ; b [Le nombre dérivé de la fonction f pour la valeur x_0 de la variable x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse x_0. On le note $f'(x_0)$.

*** Interprétation géométrique:**

La tangente à la courbe (C) représentative de la fonction f au point $M_0(x_0;y_0)$ a pour équation:

8) Fonction dérivée d'une fonction:

*** Définition:**
On appelle fonction dérivée (ou simplement "dérivée") d'une fonction f, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre dérivé $f'(x)$.
Exemple: La fonction dérivée de $f(x) = x^2$ est la fonction $f'(x) = 2x$.
On dit que f' est la dérivée de f.
2x est la dérivée de x^2
A toute fonction (notée f; g; ...) on peut associer une nouvelle fonction (notée f'; g'; ...) appelée fonction dérivée et obéissant aux règles suivantes:

Règle 1: A une fonction constante est associée

Exemples: Si $f(x) = 3$, alors $f'(x) =$

Si $g(x) = -\frac{1}{4}$, alors $g'(x) =$

Règle 2: A la fonction $f: x \rightarrow x$ est associée

Règle 3: Si une fonction est définie par $f(x) = k.\ u(x)$ avec k réel, alors:

Exemples: Si $f(x) = 3x$, alors $f'(x) =$
Si $g(x) = -x$, alors $g'(x) =$
Si $h(x) = \frac{x}{2}$, alors $h'(x) =$

Règle 4: Si une fonction est définie par $f(x) = u(x) + v(x)$, alors:

Exemples: Si $f(x) = x + 1$, alors $f'(x) =$
Si $g(x) = -3x + 5$, alors $g'(x) =$
Si $h(x) = \frac{x - 4}{2}$, alors $h'(x) =$

Règle 5: Si une fonction est définie par $f(x) = u(x).v(x)$, alors:

Exemples:

$f(x) = x(2x + 3)$ posons: $u(x) =$ $v(x) =$
d'où: $u'(x) =$ $v'(x) =$

$g(x) = (2x + 3)(5 - 4x)$ $u(x) =$ $v(x) =$
$u'(x) =$ $v'(x) =$

$h(x) = (3x - 1)^2 = (3x - 1)(3x - 1)$ $u(x) =$ $v(x) =$
$u'(x) =$ $v'(x) =$

Cas importants: Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) =$ Si $f(x) = x^4$, alors $f'(x) =$
Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) =$ Si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) =$

Règle 6: Si une fonction est définie par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, alors:

Exemples:

$f(x) = \frac{1}{x}$ posons: $u(x) =$ $v(x) =$
d'où: $u'(x) =$ $v'(x) =$

$g(x) = \frac{2}{x - 1}$ $u(x) =$ $v(x) =$
$u'(x) =$ $v'(x) =$

Règle 7: Si une fonction est définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$, alors:

Exemple: $f(x) = \sqrt{x}$

UTILISATION D'UN TABLEUR POUR L'INTRODUCTION DE LA DERIVEE

Une feuille de calcul générée par un tableur (Multiplan, Works 2, *Excel*...) permet d'introduire la notion de nombre dérivé puis de vérifier l'expression de fonctions dérivées usuelles.

1) Nombre dérivé:

Pour déterminer le nombre dérivé, on applique la définition ci-dessous:

Soit une fonction f définie sur un intervalle] a ; b [de $\mathbb{R}$. On considère deux nombres x_0 et $x_0 + h$ de cet intervalle. Le rapport: $m = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ représente le taux d'accroissement de la fonction entre les valeurs x_0 et $x_0 + h$ de la variable x.
Le *nombre dérivé de la fonction f* pour la valeur x_0 de la variable x est la *limite*, si elle existe, du rapport précédent *quand h tend vers 0.*

Il suffit donc de faire calculer les différentes valeurs prises par le rapport précédent pour quelques fonctions classiques (ou non!) quand h prend des valeurs de plus en plus petites.
Dans le tableau de la page suivante, on a pris pour trois fonctions différentes une valeur initiale de h égale à 1 et on divise par deux les valeurs successives de h. On constate qu'à chaque fois la valeur du rapport m tend vers une limite qui est le nombre dérivé de la fonction étudiée pour la valeur considérée de x_0.
La structure de la feuille de calcul est telle que l'on peut modifier à loisir la valeur initiale de h et celle de x_0, ce qui permet d'approcher la notion de limite et de trouver instantanément le nombre dérivé.

2) Fonction dérivée:

Dans cette deuxième feuille de calcul, on compare les valeurs prises par le rapport m avec les valeurs prises par la fonction dérivée supposée connue. On constate alors que les écarts deviennent de plus en plus petits au fur et à mesure que h diminue. On vérifie ainsi l'expression de la fonction dérivée pour toute valeur désirée de x_0.

Notion de nombre dérivé				
Fonction carré		xo=	-5	
		f(xo)=	25	
h	f(xo+h)	m		
1	16	-9		
0,5	20,25	-9,5		
0,25	22,5625	-9,75		
0,125	23,765625	-9,875		
0,0625	24,37890625	-9,9375		
0,03125	24,68847656	-9,96875		
0,015625	24,84399414	-9,984375		
0,0078125	24,92193604	-9,9921875		
0,00390625	24,96095276	-9,99609375		
0,001953125	24,98047256	-9,998046875		
0,000976563	24,99023533	-9,999023438		
0,000488281	24,99511743	-9,999511719		
0,000244141	24,99755865	-9,999755859		
Fonction logarithme		xo=	2	
		f(xo)=	0,69314718	
h	f(xo+h)	m		
1	1,098612289	0,405465108		
0,5	0,916290732	0,446287103		
0,25	0,810930216	0,471132143		
0,125	0,753771802	0,484996975		
0,0625	0,723918839	0,492346539		
0,03125	0,708651367	0,496133969		
0,015625	0,700929321	0,498056988		
0,0078125	0,697045821	0,499025973		
0,00390625	0,695098401	0,499512354		
0,001953125	0,694123267	0,499756018		
0,000976563	0,693635343	0,499877969		
0,000488281	0,693391291	0,499938975		
0,000244141	0,693269243	0,499969485		
Fonction sinus		xo=	1,04719755	rad
		f(xo)=	0,8660254	
h	f(xo+h)	m		
1	0,888651015	0,022625611		
0,5	0,999721562	0,267392316		
0,25	0,962804751	0,387117388		
0,125	0,921605752	0,444642786		
0,0625	0,895564157	0,472620057		
0,03125	0,881225031	0,486388078		
0,015625	0,873731872	0,493213969		
0,0078125	0,869905185	0,496612019		
0,00390625	0,867971917	0,498307275		
0,001953125	0,867000314	0,499153954		
0,000976563	0,866513272	0,499577057		
0,000488281	0,866269441	0,499788548		
0,000244141	0,866147448	0,499894279		

Nombre dérivé: formules (page 1)

	A	B	C	D	E
1	**Fonction carré**		xo=	-5	
2			f(xo)=	=D1^2	
3	h	f(xo+h)	m		
4	1	=($D$1+A4)^2	=(B4-$D$2)/A4		
5	=A4/2	=($D$1+A5)^2	=(B5-$D$2)/A5		
6	=A5/2	=($D$1+A6)^2	=(B6-$D$2)/A6		
7	=A6/2	=($D$1+A7)^2	=(B7-$D$2)/A7		
8	=A7/2	=($D$1+A8)^2	=(B8-$D$2)/A8		
9	=A8/2	=($D$1+A9)^2	=(B9-$D$2)/A9		
10	=A9/2	=($D$1+A10)^2	=(B10-$D$2)/A10		
11	=A10/2	=($D$1+A11)^2	=(B11-$D$2)/A11		
12	=A11/2	=($D$1+A12)^2	=(B12-$D$2)/A12		
13	=A12/2	=($D$1+A13)^2	=(B13-$D$2)/A13		
14	=A13/2	=($D$1+A14)^2	=(B14-$D$2)/A14		
15	=A14/2	=($D$1+A15)^2	=(B15-$D$2)/A15		
16	=A15/2	=($D$1+A16)^2	=(B16-$D$2)/A16		
17					
18					
19	**Fonction logarithme**		xo=	2	
20			f(xo)=	=LN(D19)	
21	h	f(xo+h)	m		
22	1	=LN($D$19+A22)	=(B22-$D$20)/A22		
23	=A22/2	=LN($D$19+A23)	=(B23-$D$20)/A23		
24	=A23/2	=LN($D$19+A24)	=(B24-$D$20)/A24		
25	=A24/2	=LN($D$19+A25)	=(B25-$D$20)/A25		
26	=A25/2	=LN($D$19+A26)	=(B26-$D$20)/A26		
27	=A26/2	=LN($D$19+A27)	=(B27-$D$20)/A27		
28	=A27/2	=LN($D$19+A28)	=(B28-$D$20)/A28		
29	=A28/2	=LN($D$19+A29)	=(B29-$D$20)/A29		
30	=A29/2	=LN($D$19+A30)	=(B30-$D$20)/A30		
31	=A30/2	=LN($D$19+A31)	=(B31-$D$20)/A31		
32	=A31/2	=LN($D$19+A32)	=(B32-$D$20)/A32		
33	=A32/2	=LN($D$19+A33)	=(B33-$D$20)/A33		
34	=A33/2	=LN($D$19+A34)	=(B34-$D$20)/A34		

Nombre dérivé: formules (page 2)

	A	B	C	D	E
35					
36	**Fonction sinus**		xo=	=PI()/3	rad
37			f(xo)=	=SIN(D36)	
38	h	f(xo+h)	m		
39	1	=SIN($D$36+A39)	=(B39-$D$37)/A39		
40	=A39/2	=SIN($D$36+A40)	=(B40-$D$37)/A40		
41	=A40/2	=SIN($D$36+A41)	=(B41-$D$37)/A41		
42	=A41/2	=SIN($D$36+A42)	=(B42-$D$37)/A42		
43	=A42/2	=SIN($D$36+A43)	=(B43-$D$37)/A43		
44	=A43/2	=SIN($D$36+A44)	=(B44-$D$37)/A44		
45	=A44/2	=SIN($D$36+A45)	=(B45-$D$37)/A45		
46	=A45/2	=SIN($D$36+A46)	=(B46-$D$37)/A46		
47	=A46/2	=SIN($D$36+A47)	=(B47-$D$37)/A47		
48	=A47/2	=SIN($D$36+A48)	=(B48-$D$37)/A48		
49	=A48/2	=SIN($D$36+A49)	=(B49-$D$37)/A49		
50	=A49/2	=SIN($D$36+A50)	=(B50-$D$37)/A50		
51	=A50/2	=SIN($D$36+A51)	=(B51-$D$37)/A51		

	A	B	C	D	E	F
1		**Fonction sinus**				
2						
3	x = xo + h (rad)	f(xo + h)	h	f(xo + h)-f(xo)	f(xo + h)-f(xo)/h	cos x
4	0,523598776	0,5	0			0,866025404
5						
6	0,785398163	0,707106781	0,261799388	0,207106781	0,791089631	0,707106781
7	0,654498469	0,608761429	0,130899694	0,108761429	0,830876114	0,79335334
8	0,589048623	0,555570233	0,065449847	0,055570233	0,849050618	0,831469612
9	0,556323699	0,528067851	0,032724923	0,028067851	0,857690337	0,849202182
10	0,539961237	0,514102744	0,016362462	0,014102744	0,861896237	0,85772861
11	0,531780006	0,507068342	0,008181231	0,007068342	0,863970447	0,861905852
12	0,527689391	0,503538384	0,004090615	0,003538384	0,865000336	0,863972856
13	0,525644083	0,501770241	0,002045308	0,001770241	0,865513473	0,865000939
14	0,524621429	0,500885383	0,001022654	0,000885383	0,865769589	0,865513624
15	0,524110103	0,500442757	0,000511327	0,000442757	0,865897534	0,865769627
16	0,523854439	0,500221395	0,000255663	0,000221395	0,865961478	0,865897544
17	0,523726607	0,500110701	0,000127832	0,000110701	0,865993443	0,865961481
18	0,523662691	0,500055352	6,39159E-05	5,53517E-05	0,866009424	0,865993444
19	0,523630734	0,500027676	3,19579E-05	2,76761E-05	0,866017414	0,866009424
20	0,523614755	0,500013838	1,5979E-05	1,38381E-05	0,866021409	0,866017414
21	0,523606765	0,500006919	7,98948E-06	6,91908E-06	0,866023406	0,866021409
22	0,52360277	0,50000346	3,99474E-06	3,45954E-06	0,866024405	0,866023406
23	0,523600773	0,50000173	1,99737E-06	1,72977E-06	0,866024904	0,866024405
24	0,523599774	0,500000865	9,98685E-07	8,64887E-07	0,866025154	0,866024904
25	0,523599275	0,500000432	4,99343E-07	4,32443E-07	0,866025279	0,866025154
26	0,523599025	0,500000216	2,49671E-07	2,16222E-07	0,866025341	0,866025279
27	0,5235989	0,500000108	1,24836E-07	1,08111E-07	0,866025373	0,866025341
28	0,523598838	0,500000054	6,24178E-08	5,40554E-08	0,866025388	0,866025373
29	0,523598807	0,500000027	3,12089E-08	2,70277E-08	0,866025396	0,866025388
30	0,523598791	0,500000014	1,56045E-08	1,35139E-08	0,866025401	0,866025396
31	0,523598783	0,500000007	7,80223E-09	6,75693E-09	0,866025405	0,8660254
32	0,523598779	0,500000003	3,90111E-09	3,37846E-09	0,866025398	0,866025402
33	0,523598778	0,500000002	1,95056E-09	1,68923E-09	0,86602544	0,866025403

Fonction dérivée: formules

	A	B	C	D	E	F
1		**Fonction sinus**				
2						
3	x = xo + h (rad)	f(xo + h)	h	f(xo + h)-f(xo)	f(xo + h)-f(xo)/h	cos x
4	=PI()/6	=SIN(A4)	0			=COS(A4)
5						
6	=$A$4+C6	=SIN(A6)	=PI()/12	=B6-$B$4	=D6/C6	=COS(A6)
7	=$A$4+C7	=SIN(A7)	=C6/2	=B7-$B$4	=D7/C7	=COS(A7)
8	=$A$4+C8	=SIN(A8)	=C7/2	=B8-$B$4	=D8/C8	=COS(A8)
9	=$A$4+C9	=SIN(A9)	=C8/2	=B9-$B$4	=D9/C9	=COS(A9)
10	=$A$4+C10	=SIN(A10)	=C9/2	=B10-$B$4	=D10/C10	=COS(A10)
11	=$A$4+C11	=SIN(A11)	=C10/2	=B11-$B$4	=D11/C11	=COS(A11)
12	=$A$4+C12	=SIN(A12)	=C11/2	=B12-$B$4	=D12/C12	=COS(A12)
13	=$A$4+C13	=SIN(A13)	=C12/2	=B13-$B$4	=D13/C13	=COS(A13)
14	=$A$4+C14	=SIN(A14)	=C13/2	=B14-$B$4	=D14/C14	=COS(A14)
15	=$A$4+C15	=SIN(A15)	=C14/2	=B15-$B$4	=D15/C15	=COS(A15)
16	=$A$4+C16	=SIN(A16)	=C15/2	=B16-$B$4	=D16/C16	=COS(A16)
17	=$A$4+C17	=SIN(A17)	=C16/2	=B17-$B$4	=D17/C17	=COS(A17)
18	=$A$4+C18	=SIN(A18)	=C17/2	=B18-$B$4	=D18/C18	=COS(A18)
19	=$A$4+C19	=SIN(A19)	=C18/2	=B19-$B$4	=D19/C19	=COS(A19)
20	=$A$4+C20	=SIN(A20)	=C19/2	=B20-$B$4	=D20/C20	=COS(A20)
21	=$A$4+C21	=SIN(A21)	=C20/2	=B21-$B$4	=D21/C21	=COS(A21)
22	=$A$4+C22	=SIN(A22)	=C21/2	=B22-$B$4	=D22/C22	=COS(A22)
23	=$A$4+C23	=SIN(A23)	=C22/2	=B23-$B$4	=D23/C23	=COS(A23)
24	=$A$4+C24	=SIN(A24)	=C23/2	=B24-$B$4	=D24/C24	=COS(A24)
25	=$A$4+C25	=SIN(A25)	=C24/2	=B25-$B$4	=D25/C25	=COS(A25)
26	=$A$4+C26	=SIN(A26)	=C25/2	=B26-$B$4	=D26/C26	=COS(A26)
27	=$A$4+C27	=SIN(A27)	=C26/2	=B27-$B$4	=D27/C27	=COS(A27)
28	=$A$4+C28	=SIN(A28)	=C27/2	=B28-$B$4	=D28/C28	=COS(A28)
29	=$A$4+C29	=SIN(A29)	=C28/2	=B29-$B$4	=D29/C29	=COS(A29)
30	=$A$4+C30	=SIN(A30)	=C29/2	=B30-$B$4	=D30/C30	=COS(A30)
31	=$A$4+C31	=SIN(A31)	=C30/2	=B31-$B$4	=D31/C31	=COS(A31)
32	=$A$4+C32	=SIN(A32)	=C31/2	=B32-$B$4	=D32/C32	=COS(A32)
33	=$A$4+C33	=SIN(A33)	=C32/2	=B33-$B$4	=D33/C33	=COS(A33)

Comment trouver la dérivée dans un réservoir...

L'étude du volume de liquide contenu dans un réservoire de forme donnée en fonction de la hauteur de liquide est un exemple souvent cité de fonction. Il fait appel à l'expérience et à l'intuition des élèves.

Citons en particulier l'exercice qui consiste à demander aux élèves de retrouver la représentation graphique d'une telle fonction à partir de la forme du réservoir et qu'on trouvera dans plusieurs brochures IREM

Nous montrons son utilisation pour l'étude de la dérivée.

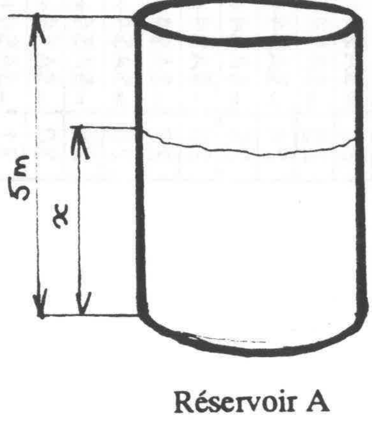
Nous allons utiliser l'intuition des élèves et il est bon, avant de commencer les problèmes ci dessous d'avoir habitué les élèves à exercer leur intuition pour l'étude des fonctions, par exemple par les exercices cités plus haut. Mais nous ne voulons pas en rester à l'intuition, il va s'agir aussi de confronter l'intuition à l'épreuve du calcul. Le but est bien sûr que les élèves établissent pour eux mêmes des liens entre des notions "intuitives" et des expressions algébriques.

Le but de ces exercices n'est pas de faire calculer les élèves mais de leur faire se construire un lien entre des propriétés intuitives et des propriétés algébriques. La forme des quatre réservoirs a été choisie pour que les calculs ne soient pas un obstacle majeur . Il faut aussi plusieurs exemples pour éviter que les élèves ne généralisent des propriétés particulières. On peut bien sûr imaginer d'autres réservoirs (nous en donnons deux autres à la fin de ces pages).

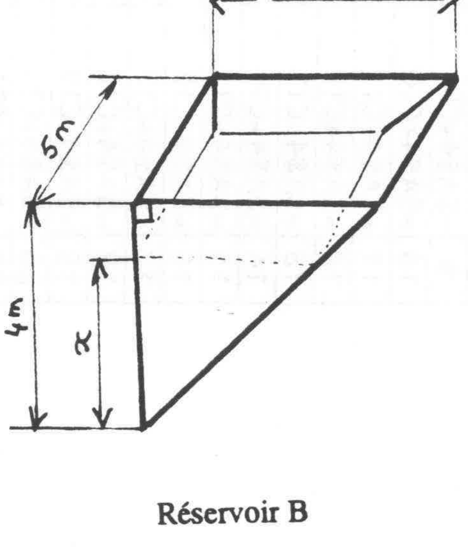
vous comprendrez facilement qu'il ne s'agit pas d'un devoir mais d'activités en classe, proposées aux élèves. Dans l'exposé qui suit, les consignes proprement dites ont été encadrées, les réponses attendues sont en italiques.

1o étape:

Le cotes sont en m, les volumes en m^3
On appelle x la hauteur d'eau, y le volume
On demande dans chaque cas d'établir la formule qui permet de calculer y à partir de x.
Faire dans chaque cas une représentation graphique de la fonction .



Réservoir A



Réservoir B

Réservoir C

Dans cette première étape, il est important que les élèves assimilent le lien entre forme de la cuve, expression algébrique et représentation graphique de la fonction:

$$A : \quad y = \pi x$$
$$B : \quad y = 2{,}5 x^2$$
$$C : \quad y = \frac{\pi}{3} x^3$$

Faites un commentaire sur le résultat obtenu (quel est le réservoir dont le volume d'eau augmente le plus vite avec la hauteur, comment ça se voit sur le graphique, pourquoi ?)

les élèves ont noté:

> *– La représentation graphique du cas C "monte plus vite" que celle du cas B qui monte plus vite que le cas A.*
> *– Pour B, les x sont au carré et pour C, ils sont au cube.*
> *– Au départ, il y a moins d'eau dans B ou C mais après, ils rattrappent A.*

On remarque que ces expressions utilisent souvent l'idée de mouvement : le réservoir se remplit, se vide...

Expliquez pourquoi l'expression obtenue est du premier degré dans un cas, du deuxième degré dans l'autre et du troisième degré dans le troisième cas.

> *Dans le récipient C la section augmente dans les deux sens alors que dans le récipient B elle augmente dans un seul sens et dans le cas A elle est constante.*

<u>2o étape</u>

On propose ensuite un nouveau type de problème:

dans un des exemples ci dessus, la hauteur d'eau varie peu autour de 2m par exemple.
On convient de la noter $2 + \delta x$

L'image de 2 est $f(2)$
y varie donc autour de $f(2)$

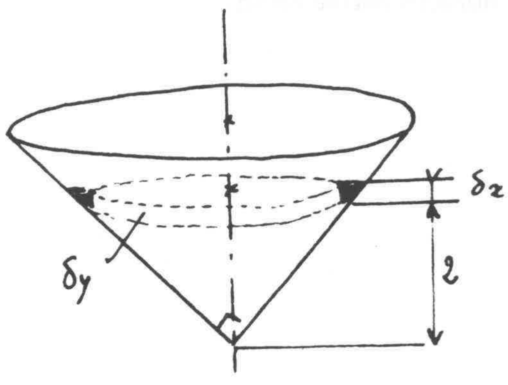
$$2 + \delta x \longrightarrow f(2 + \delta x) = f(2) + \delta y$$

On cherche à calculer δy en fonction de δx pour des valeurs de δx "petites" dans le cas C.

1° méthode: on assimile le volume ajouté à celui d'un cylindre.

dans le cas du cône on trouve facilement que

$$\delta y = 4\pi\, \delta x$$



2° méthode par le calcul (là, les élèves seront peut-être plus aidés)

$2 \longrightarrow f(2)$
$2 + \delta x \longrightarrow f(2 + \delta x)$

$$y = f(2 + \delta x) - f(2)$$

En comparant le calcul par les deux méthodes, on montre facilement que δy est un polynôme en δx et que les termes du deuxième et troisième degré en δx^2 et δx^3 correspondent au volume qui a été négligé dans la première méthode (et qui est hachuré sur la figure). L'approximation est d'autant meilleure que δx est voisin de zéro.
En d'autres termes si

$$\delta y = a\ \delta x + b\ \delta x^2 + c\ \delta x^3$$

alors

$$\delta y \xrightarrow[\delta x \to 0]{} a\ \delta x$$

3o étape

A condition de chosir δx suffisament petit on a donc établi que δy est proportionnel à δx.
Comment représenter celà sur le graphique ?
La proportionalité va se traduire par une droite, ça, les élèves le savent.
c'est une droite qui part du point définit par $x = 2$ et dont le coefficient directeur est le nombre calculé précédemment. On fait tracer cette droite. On constate qu'elle est tangente ? Pouvez-vous le justifier ?

> *Les schéma ci dessus nous montrent que le volume obtenu est toujours inférieur au volume réel de la cuve (sauf pour $\delta x = 0$ car dans ce cas courbe et droite sont confondus) : si δx est positif, on a ajouté un volume plus petit que le volume réel et si δx est négatif alors on retranche à y un volume trop grand, le volume obtenu est donc trop petit. Une droite qui a un point commun avec une courbe et qui est toujours du même côté de la courbe est bien une tangente à la courbe.*

On peut maintenant décider d'appeler nombre dérivé en $x = 2$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point ou le rapport de proportion entre des variations de y et de x pourvu que les variations de x soient petites.

4o étape

Et si on déplaçait le niveau d'eau de départ : au lieu de choisir $x = 2$, on fixe une nouvelle valeur $x = x_0$?

à chaque valeur de x_0 on associe le coefficient directeur de la tangente en x_0 qui est aussi le nombre dérivé en x_0.

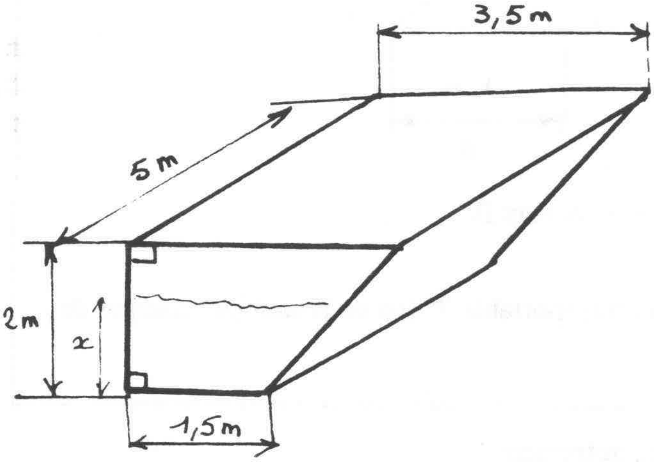
En Conclusion

Nous avons cherché ue autre problématique que la recherche du coefficient directeur de la tangente à la courbe pour introduire le nombre dérivé. La notion de tangente à une courbe n'est pas une notion évidente pour tous les élèves. Notre problématique nous semble plus concrète. La construction de la tangente est vue comme une traduction graphique de notre problème.

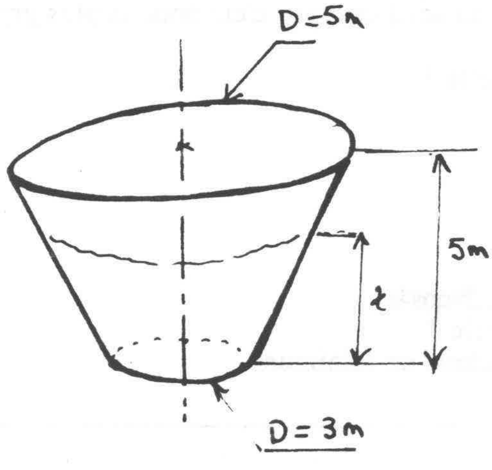
Nous n'avons pas introduit à priori de définition de la limite. La limite est venue en fin de parcours pour donner un peu de rigueur à des expressions du genre;
δy est voisin de $4\delta x$ et est d'autant plus voisin que δx est petit.
N'est-il pas plus simple d'écrire (et ca veut dire la même chose)

$$\frac{\delta y}{\delta x} \xrightarrow[\delta x \to 0]{} 4$$

Autres réservoirs:



$$y = 5x^2 + 15x$$

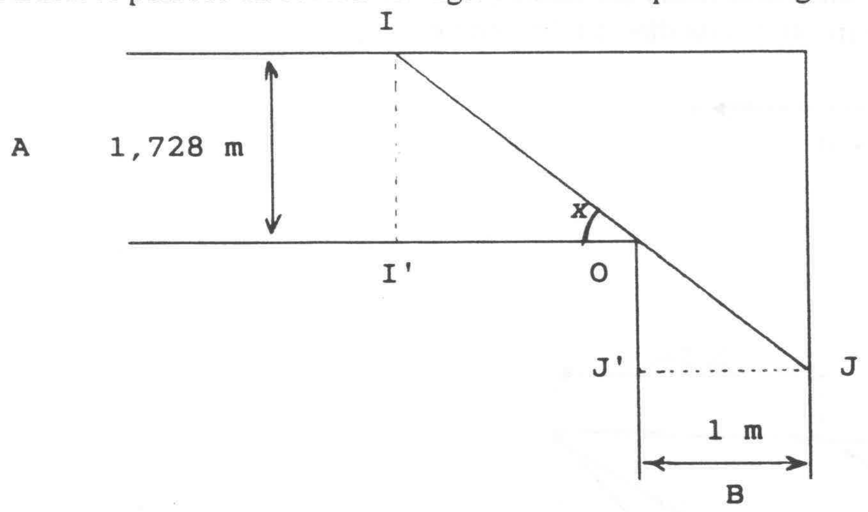


$$y = \frac{\pi}{3}\left(0{,}04x^3 + 0{,}9x^2 + 6{,}75x\right)$$

Le tableau dans le couloir du musée

C'est un problème connu qu'on rencontre dans plusieurs ouvrages sous différentes formes:

Un musée possède un couloir en angle comme indiqué sur la figure :[1]



On veut transporter un tableau verticalement de A vers B.

Le conservateur du musée vous demande :
"Quel est la plus grande longueur du tableau transportable ?" (en ne tenant pas compte de l'épaisseur du tableau)

toute l'astuce va consister à poser le problème autrement:[2]

On imagine qu'on tend une ficelle IJ entre les deux murs du couloir de telle façon que la ficelle effleure le sommet de l'angle IJ.
La longueur de la ficelle dépend de l'angle x (voir figure).
La plus petite longueur de la ficelle correspond au seuil critique, c'est donc la plus grande longueur possible du tableau.
Quelle est donc la plus petite longueur de la ficelle ?

nous répondrons donc aux questions suivantes:

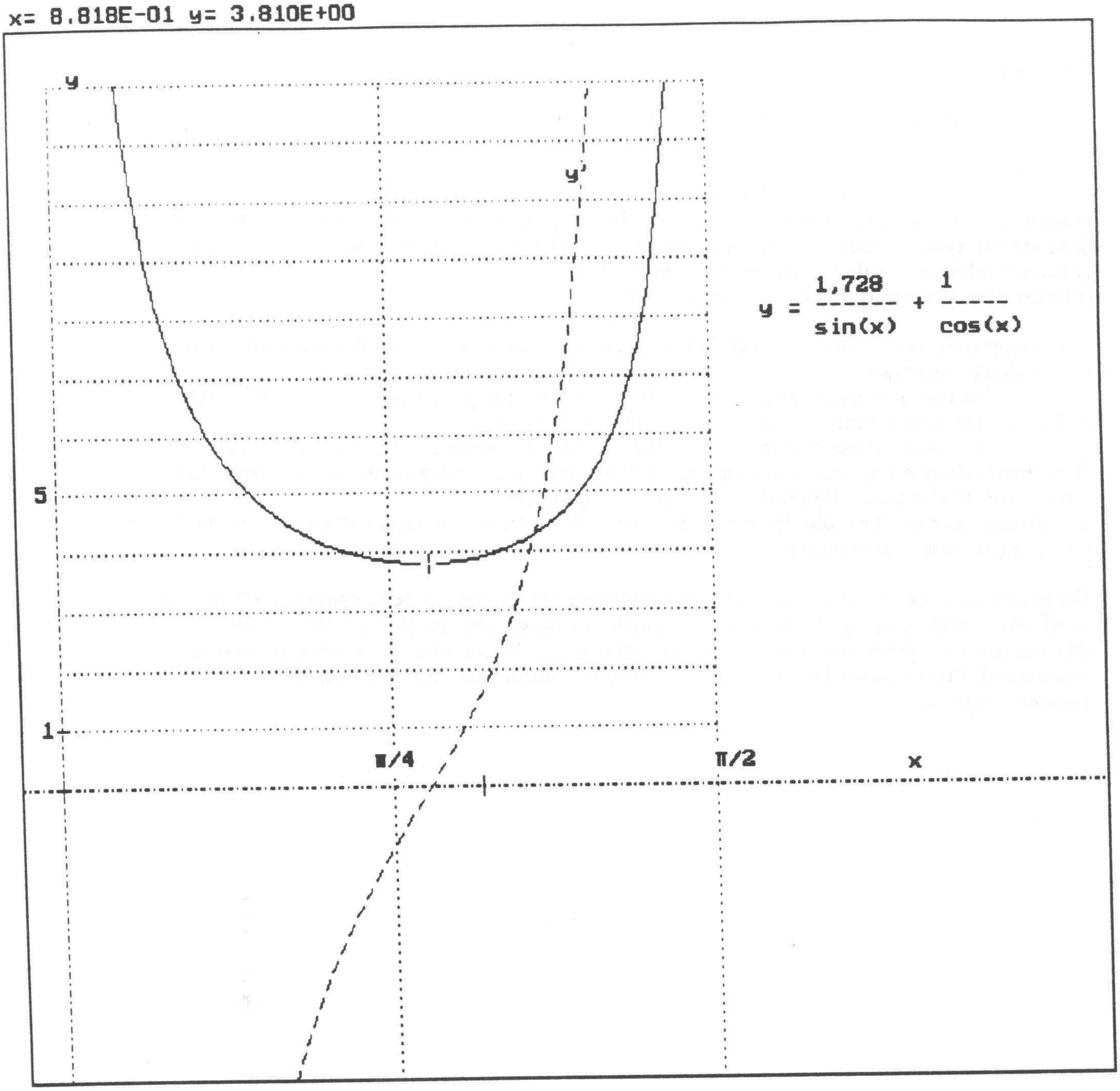
- dans quel intervalle varie x
- exprimer IJ = y en fonction de x
- calculer y'
- montrez que y' est du signe de $\sin^3 x - 1{,}2^3\cos^3 x$
- pour quelle valeur de x, y's'annulle-t-elle ?
  montrez que pour cette valeur, y admet un minimum
  calculez le minimum de y

---

1 il est souhaitable de donner pour largeurs des nombres dont on peut calculer facilement la racine cubique. Evitons toutefois $3\sqrt{3}$ comme certains auteurs...

2 il faut donner aux élèves assez vite le problème dans ses deux formulations si on ne veut pas les laisser sécher....

coordonnées du minimum:
x= 8.818E-01 y= 3.810E+00



Pour avoir les coordonnées du minimum, on place à l'aide de la souris ou des flèches du clavier le curseur graphique au point où y' = 0 , puis à l'aide de la seule touche flèche haut, on monte le curseur jusqu'à ce qu'il rencontre la courbe. Les coordonnées du curseur sont affichées dans le coin supérieur gauche de l'écran.

Commentaire:

- Voilà une fonction trigo pas trop difficile à dériver.

- l'équation

$$\sin^3 x - 1{,}2^3\cos^3 x = 0$$

pourrait poser quelques problèmes. Mais n'oublions pas que x est dans l'intervalle $[0;\pi/2]$ et dans cet intervalle, sinus, cosinus et tangente sont positifs . On peut donc prendre allègrement la racine cubique des deux membres de l'équation.
(et c'est plus simples que de factoriser $a^3 - b^3$)

- pour prouver que l'extremum est bien un minimum, nous proposons éventuellement aux élèves deux méthodes :

- des considérations géométriques (on voit bien que pour x petit ou pour x voisin de $\pi/2$, y est très grand, entre les deux, il y a donc un minimum
- on calcule y' pour deux valeurs de x encadrant franchement celle qui annule y'.

(Une méthode plus rigoureuse consisterait à démontrer que y' est monotone croissante dans l'intervalle étudié mais elle nous semble hors programme)
Ce qui est essentiel c'est que les élèves se posent la question: "de quel extremum s'agit-il ?" et qu'ils argumente leur réponse.

On peut s'aider de graph'x pour tracer la représentation graphique de la fonction. Ce qui est alors intéressant, c'est qu'on obtient une courbe "en baignoire" et qu'il est difficile de déterminer avec précision la valeur de x qui donne le minimum (mais on connaît bien le y minimum). Pour trouver la valeur de x qui donne le minimum, on trace la dérivée de y. (graphique joint).

Chute libre en vidéo

Avec un caméscope on filme la chute d'une bille à coté d'une règle graduée qui nous donne l'échelle.

On passe ensuite la séquence image par image grâce à un magnétoscope qui le permet (*c'est devenu une performance courante sur un magnétoscope récent*).

On place un calque sur l'écran de télévision et on décalque la bille image après image: on obtient l'image ci–contre.

Il faut faire attention aux erreurs introduites par le parallaxe très important sur un moniteur vidéo.

Il faut veiller à avoir un temps de pose suffisamment petit (1/1000 s est une valeur correcte) soit en règlant la vitesse de pose, soit en augmentant l'éclairement en mode automatique. Sinon, lorsque la bille atteint une vitesse assez importante on n'aurait plus l'image d'une bille mais d'une traînée

Il est difficile (impossible) de déterminer avec une précision supérieur à 0,04 s l'instant de départ de la bille. Nous y reviendrons tout à l'heure.

Il y a 25 images par seconde.

- établir l'échelle du dessin
- t représente le temps en secondes à partir de l'instant où on l'a lâchée.
- x la distance parcourue par la bille (en m)
- représenter graphiquement la fonction

$$t \in [0; 0{,}5] \quad t \text{------>} x$$

- soit v la vitesse à l'instant t.

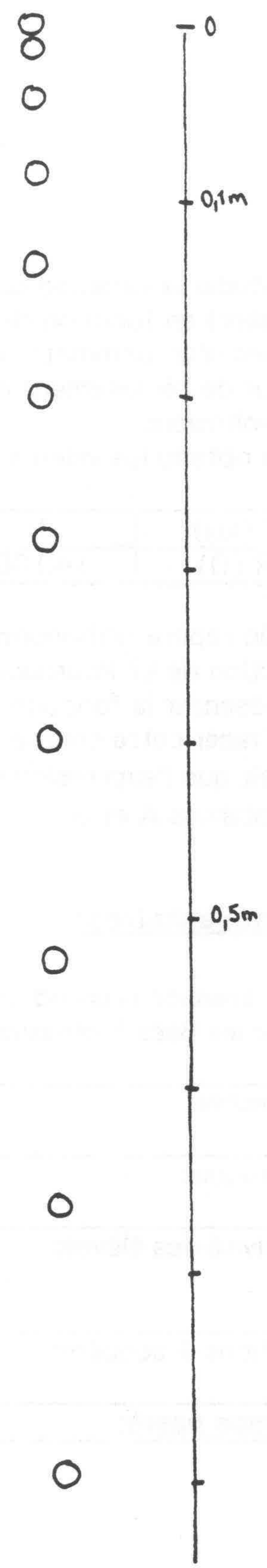
calculer v pour les différentes valeur de t (on mesure la distance parcourue pendant 0,08 *s* soit 0,04 s avant t et 0,04 s après t .) *Remarquons que nous mesurons effectivement la vitesse instantanée car pour une fonction du second degré la corde qui joint les points d'abscisse $x + \delta x$ et $x - \delta x$ est parallèle à la tangente en x.*

représenter graphiquement la fonction

$$t \in [0; 0{,}5] \quad t \text{------>} v$$

établir la formule qui permet de calculer v en fonction de t.

Remarque: *nous ne connaissons pas avec certitude l'instant $t = 0$. Si nous admettons que la vitesse est proportionnelle au temps (ce que le graphique semble nous montrer) en prolongeant la droite obtenue par nos mesures, nous pouvons affirmer qu'elle passe par le point ($t = 0$; $x = 0$), c'est à dire qu'elle coupe l'axe des t au point $t = 0$. Nous avons ainsi déterminé avec précision l'instant de départ.*



ETUDE D'UNE PHOTORESISTANCE

On étudie la variation de résistance R d'une photorésistance (LDR: Light Dependant Resistor) en fonction de son éclairement E. Pour cela, la photorésistance est reliée aux bornes d'un ohmmètre donnant directement la valeur de sa résistance. D'autre part, la valeur de l'éclairement est mesurée à l'aide d'une photopile raccordée à un millivoltmètre.
On a obtenu les valeurs suivantes:

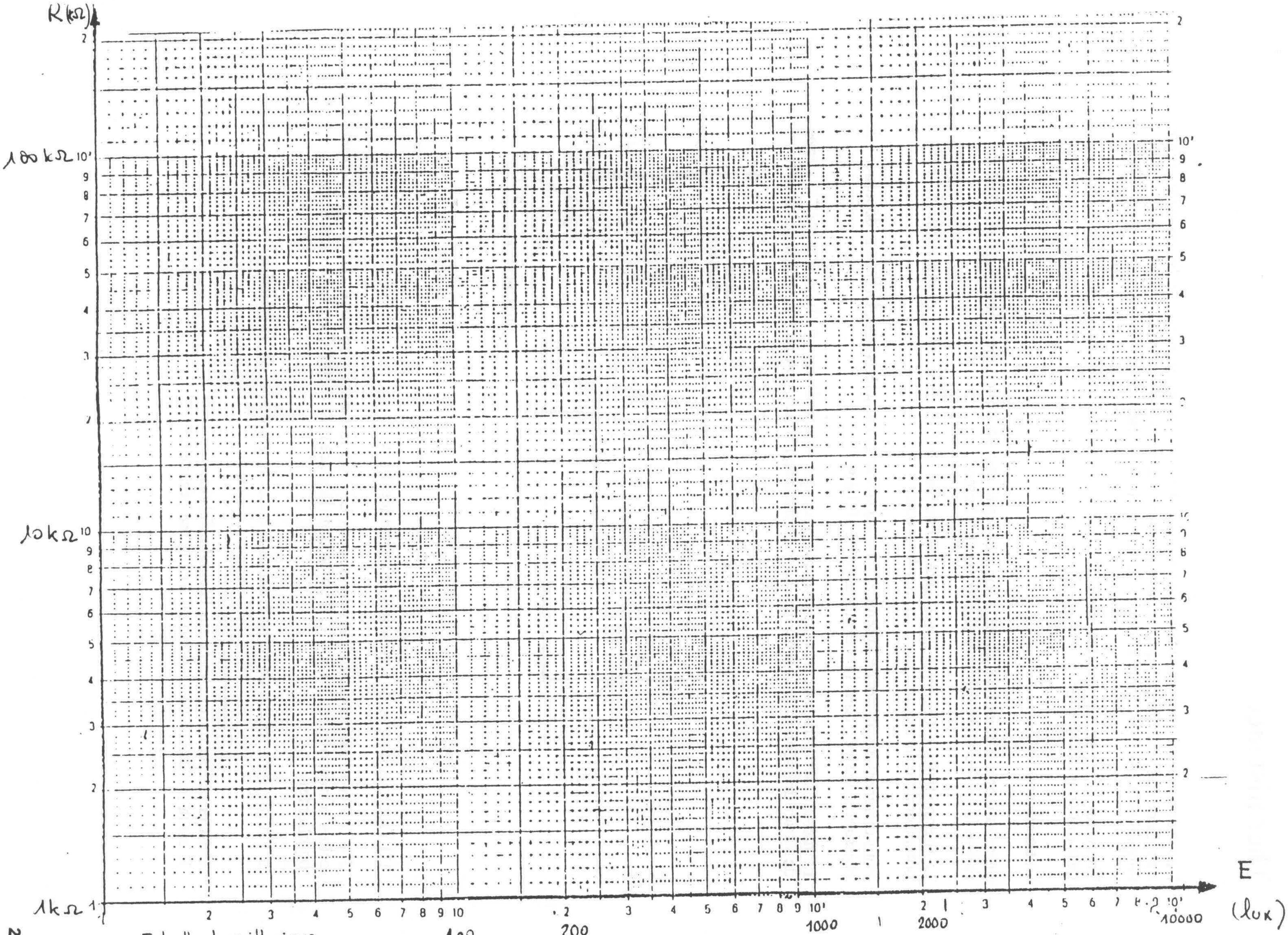
E (lux)	10	50	300	1000	4000
R (Ω)	140 000	40 000	9000	3500	1000

1) Un repère orthonormé est-il adapté à la représentation des variations de R en fonction de E? Pourquoi? Proposer les échelles d'un repère orthogonal convenable et représenter la fonction f: E $\rightarrow$ R dans ce repère.
2) Tracer cette courbe sur le papier log-log fourni. Quelle remarque faites-vous? Justifier le fait que l'expression de la résistance soit de la forme $R = A.\ E^{-\alpha}$. Déterminer les constantes A et α.

Commentaires:

Cet exercice reprend un thème proposé dans la brochure issue du stage "Des outils pour les Bacs Professionnels" parue en juin 91, en adoptant des objectifs différents.

Objectifs:	Utilisation des propriétés des logarithmes pour l'étude d'une loi de variation rencontrée en sciences physiques.
Prérequis:	Connaissance des logarithmes décimaux et de leurs propriétés. Equation d'une droite.
Activité des élèves:	Activités graphiques (papier log-log), utilisation d'échelles fonctionnelles, calcul littéral: résolution d'un système non linéaire de deux équations à deux inconnues.
Notions à acquérir:	Entre autres: influence de la nature du repère dans la représentation graphique d'une fonction.
Temps passé:	1 h.



Echelle logarithmique

Thermistance

Une thermistance a une résistance qui varie en fonction de la température. Sa caractéristique n'est donc pas linéaire puisque le passage du courant provoque une élévation de sa température par effet Joule et donc une baisse de sa résistance.

Toutefois, si on se limite à des intensités faibles, on peut relever un réseau de caractéristiques U(I) qui sont des droites.

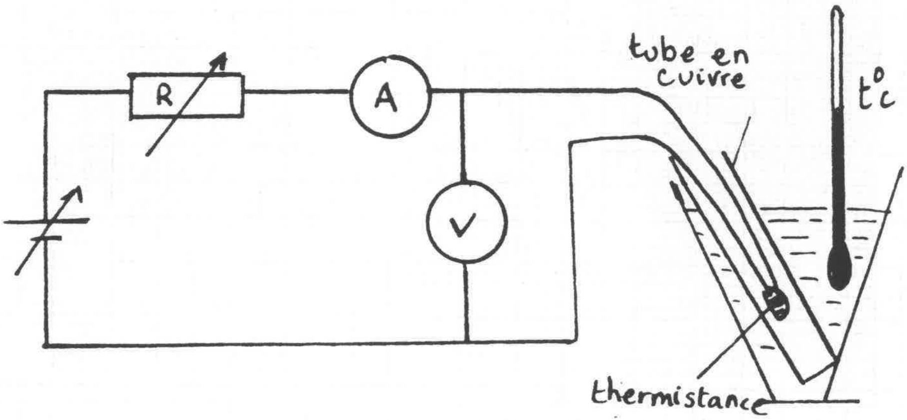
Concrètement:

prenons un tube en cuivre fermé à son extrémité que nous plongeons dans un bain dont on relève la température (entre 0 et 100°C) cf schéma.

La thermistance est reliée à une source de courant continu de tension variable. Le potentiomètre R a pour but de limiter le courant

Pour différentes valeurs de la température on relève la caractéristique U(I) sans dépasser une puissance dissipée dans la thermistance de 100 mw.

La mesure doit être faite très rapidement, pour que la température du bain n'aie pas le temps de varier de façon trop importante. La thermistance n'a pas, non plus le temps de chauffer.



1°) Tracer la courbe de limitation de puissance 0,1 w

2°) Tracer au moins quatre caractéristiques U(I) sur le même graphique, dont en particulier celles correspondant à t = 0°C (le tube dans la glace) et t = 100°C (le tube dans l'eau bouillante)

3°) A partir du réseau de caractéristiques, tracer le graphique de la fonction

$$T \longrightarrow R$$

T est la température relevée sur l'échelle Kelvin.
R est la résistance correspondant à cette température.

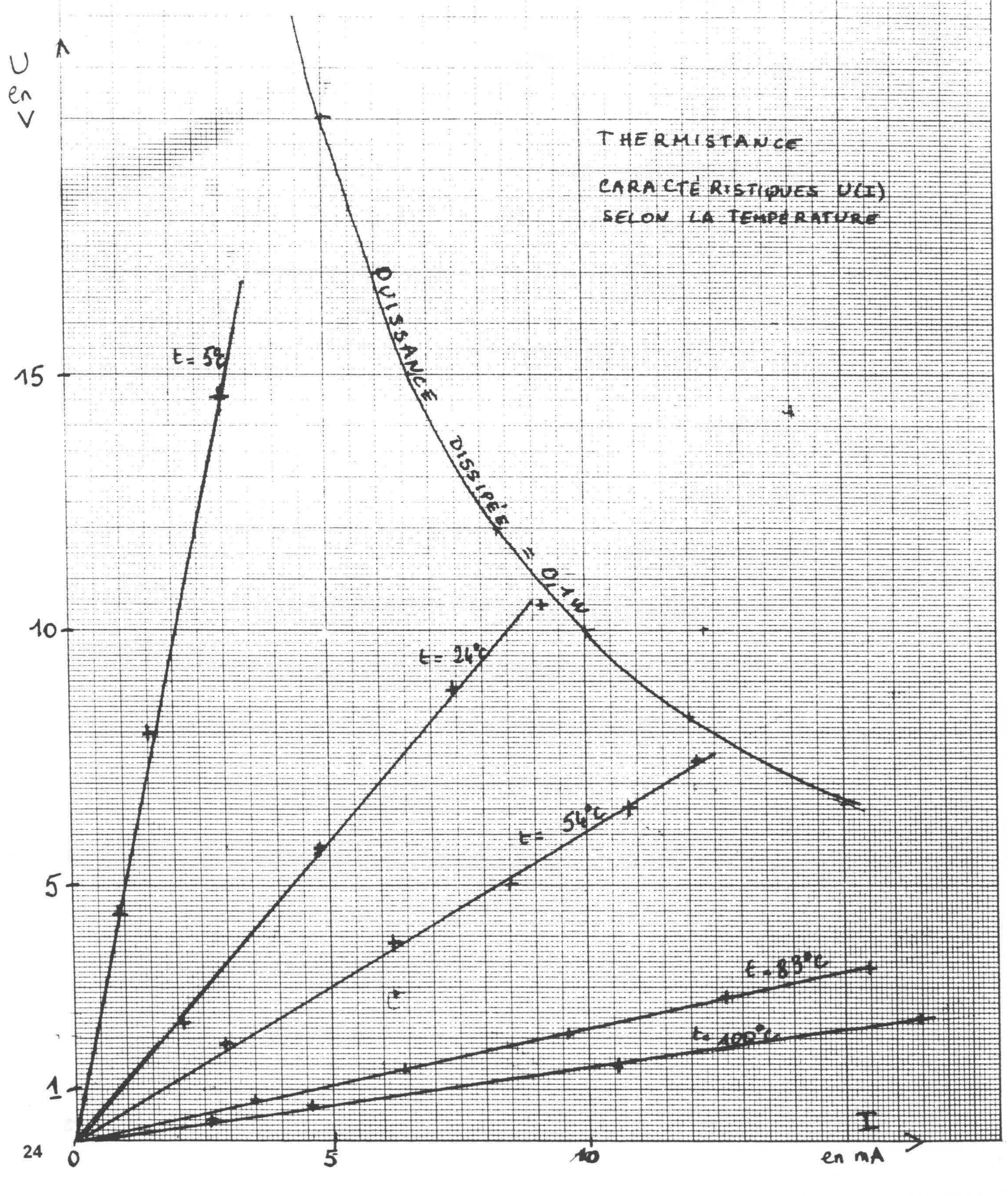
4°) On sait d'autre part que que la résistance suit une loi du type:

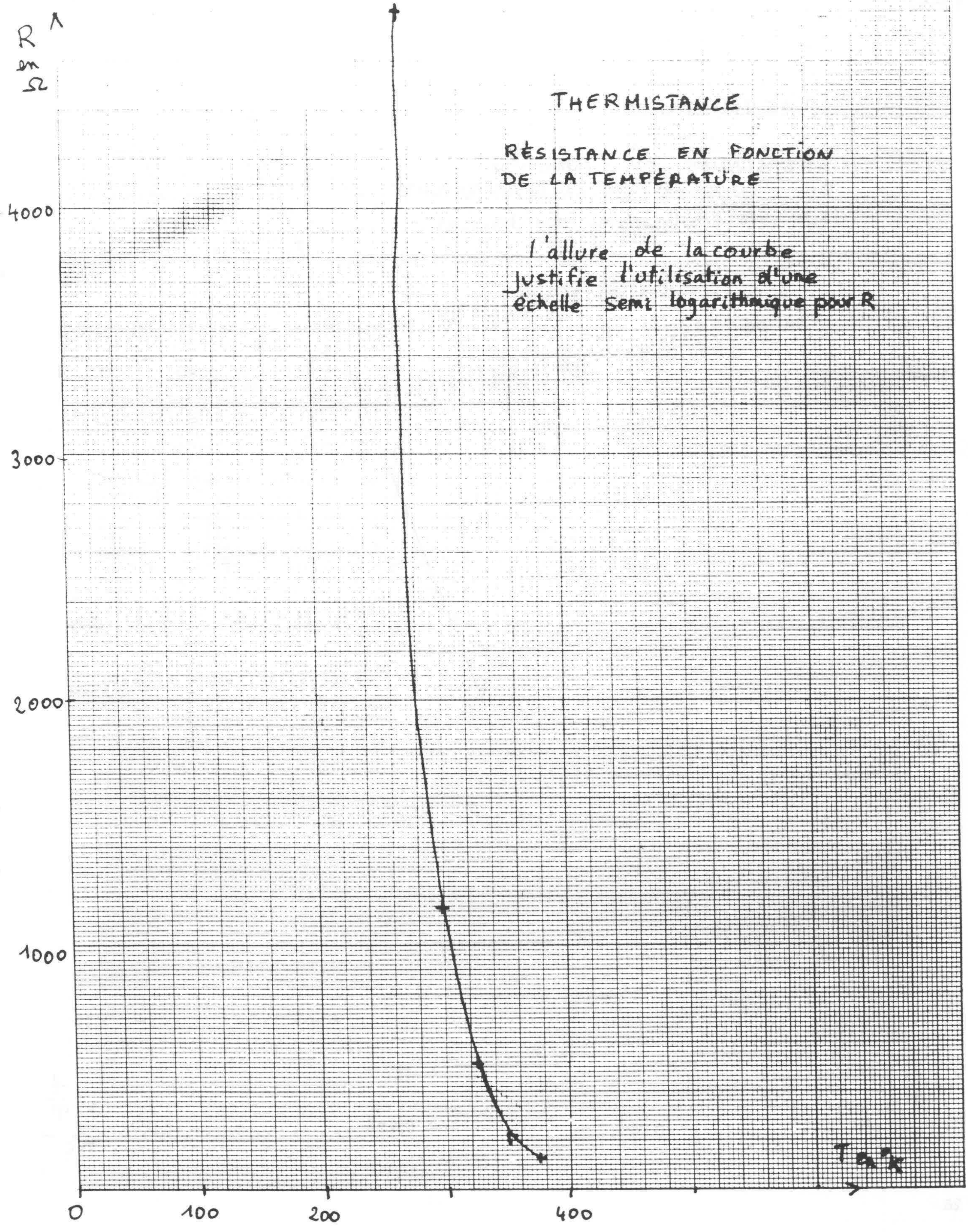
$$R = A \exp(B/T)$$

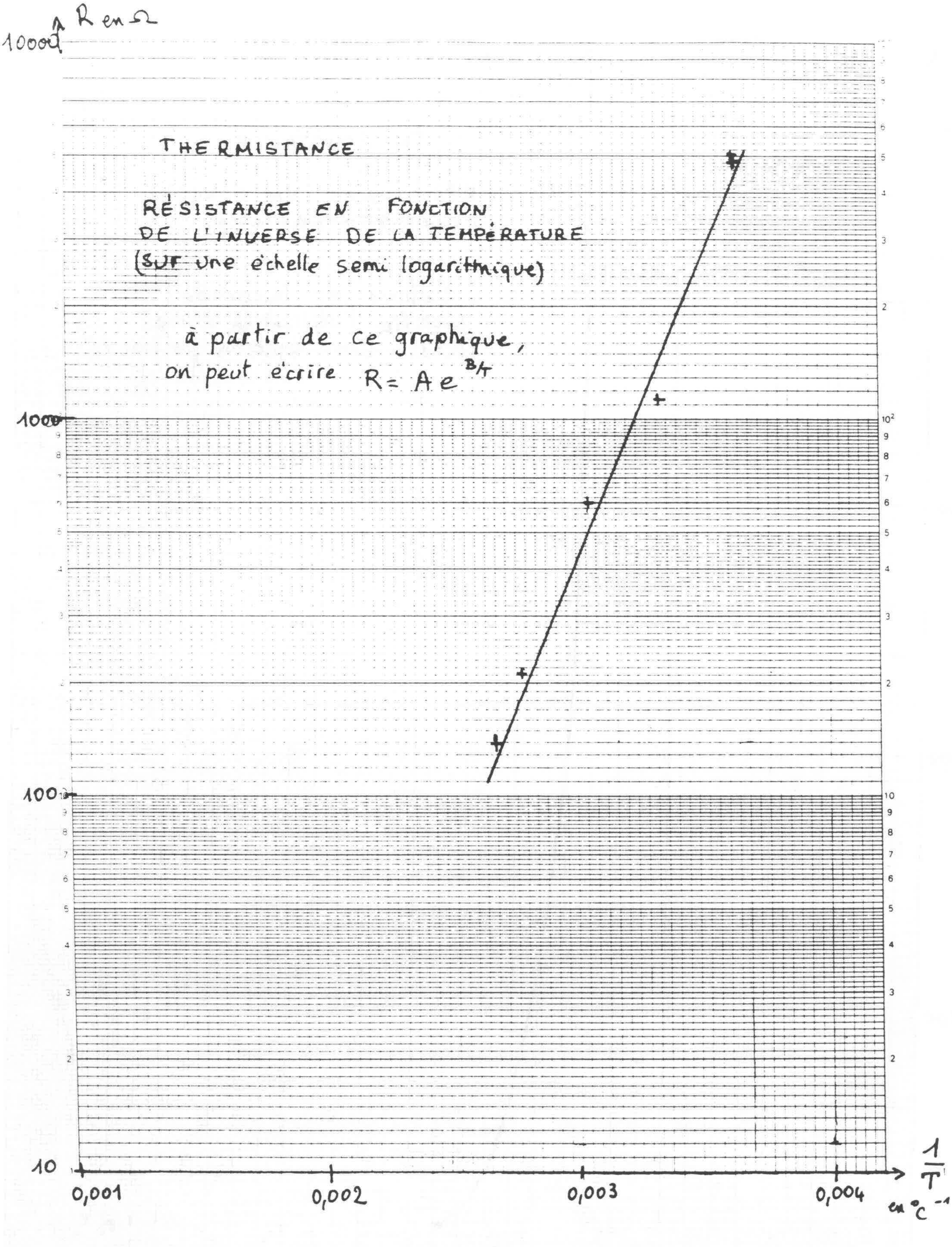
On pose $Q = 1/T$
Montrer que si cette loi est vérifiée, le graphique de la fonction $Q \longrightarrow R$, sur du papier logarithmique est une droite.

vérifier qu'en traçant le graphique à partir des valeurs expérimentales, on obtient bien une droite.

Calculer A et B à partir du graphique. (*plus difficile*)

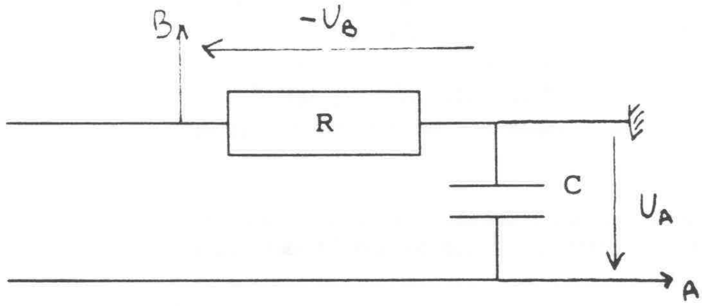

THERMISTANCE
CARACTÉRISTIQUES U(I)
SELON LA TEMPÉRATURE
U en V
I en mA
PUISSANCE DISSIPÉE = 0,1 W
t = 5°C
t = 24°C
t = 54°C
t = 88°C
t = 100°C
15
10
5
1
0
5
10


R en Ω
THERMISTANCE
RÉSISTANCE EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE
l'allure de la courbe justifie l'utilisation d'une échelle semi logarithmique pour R
4000
3000
2000
1000
0
100
200
400
T en °K


R en Ω
10000
THERMISTANCE
RÉSISTANCE EN FONCTION
DE L'INVERSE DE LA TEMPÉRATURE
(sur une échelle semi logarithmique)
à partir de ce graphique,
on peut écrire R = A e^B/T
1000
100
10
0,001
0,002
0,003
0,004
1/T
en °C⁻¹

simulation d'un circuit RC avec graphix

on réalise le montage R C



On mesure la tension aux bornes de R et C.

On peut facilement observer les tensions aux bornes de R et C sur un oscillo à double trace (en faisant attention de bien mettre la masse au milieu, on lit donc U_A et $-U_B$).

On peut aussi calculer les tensions et les simuler sur graphix.
L'intérêt est bien évidemment de comparer le résultat calculé au résultat observé.

$i(t) = q'(t)$
$q(t) = C\, u_A(t)$
on en tire
$i(t) = C\, u'_A(t)$

et

$$\boxed{u_B(t) = RC\, u'_A(t)}$$

en prenant $R = 1000\ \Omega$ et $C = 1\ \mu F$, on obtient:
$u_B(t) = 0{,}001\, u'_A(t)$

On a simulé d'abord un courant sinusoïdal de tension efficace 6V . Les courbes 2 et 3 ont pour but de tracer des quadrillages, la courbe N°4 est $u_B(t)$

On a remplacé ensuite la tension sinusoïdale par une tension carrée

puis par une tension en dents de scie.

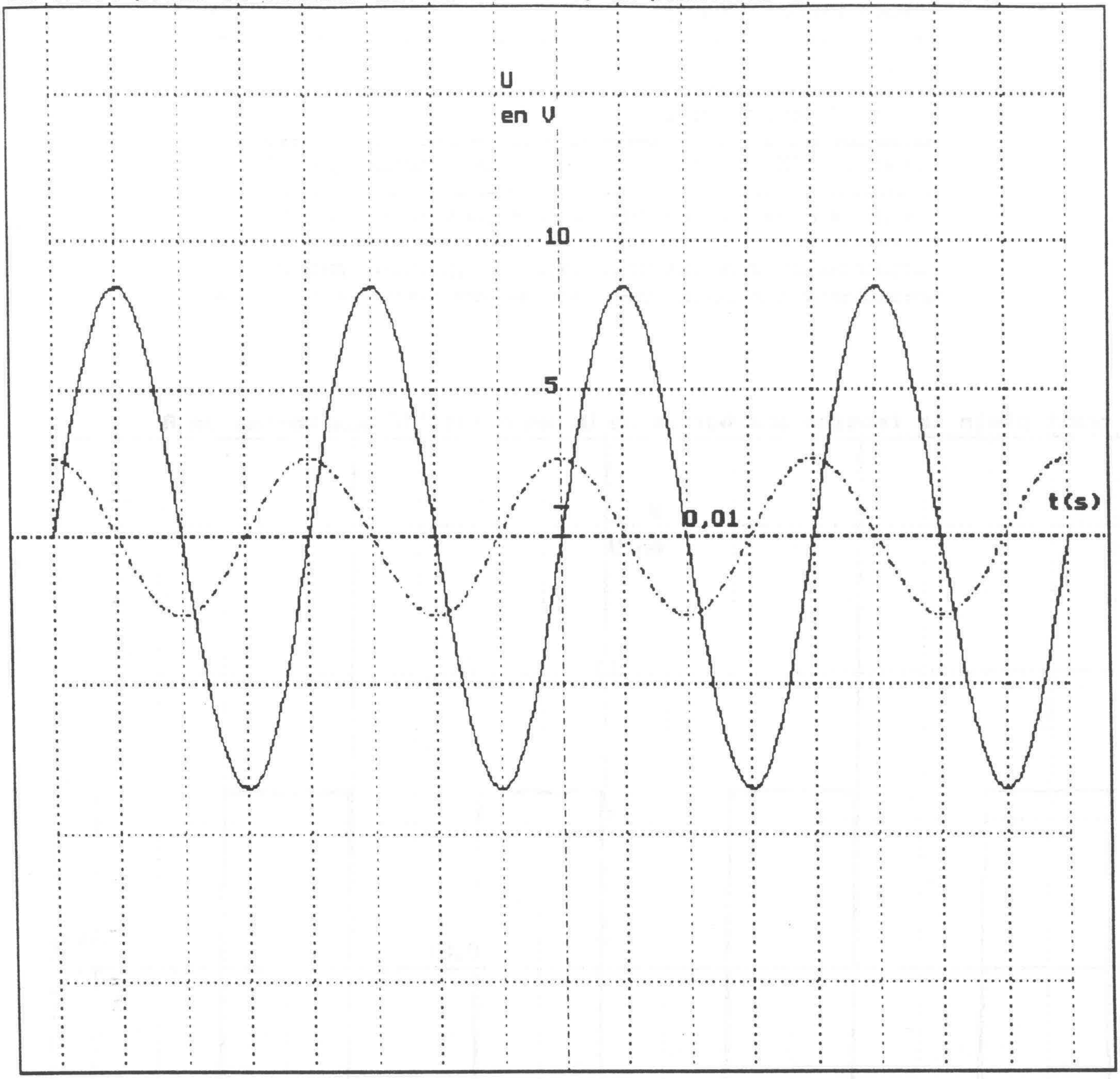
Courbe numéro: 1	C/B	18/26	Insertion	Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-0.04;0.04]				
y = 6*1.414*sin(2*π*50*x)				
unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:1 couleur:0 hachure:0 pas:3.33E-04				
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9				
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9				

Courbe numéro: 2	C/B	18/26	Insertion	Coordonnées Paramétriques
Ensemble d'étude:[-18;18]				
x(t)=k				
y(t)=t				
unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:2 couleur:0 hachure:0 pas:2				
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9				
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9				

Courbe numéro: 3	C/B	18/26	Insertion	Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-0.04;0.04]				
y = k				
unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:2 couleur:0 hachure:0 pas:2				
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9				
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9				

Courbe numéro: 4	N/B	18/26	Insertion	Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-0.04;0.04]				
y = k*der(y1)				
unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:4 couleur:0 hachure:0 pas:2				
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9				
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9				

en trait plein la tension aux bornes de U, en pointillé aux bornes de R



Courbe numéro: 1	C/B	18/26	Insertion	Coordonnées Cartésiennes

Ensemble d'étude:[-0.04;0.04]

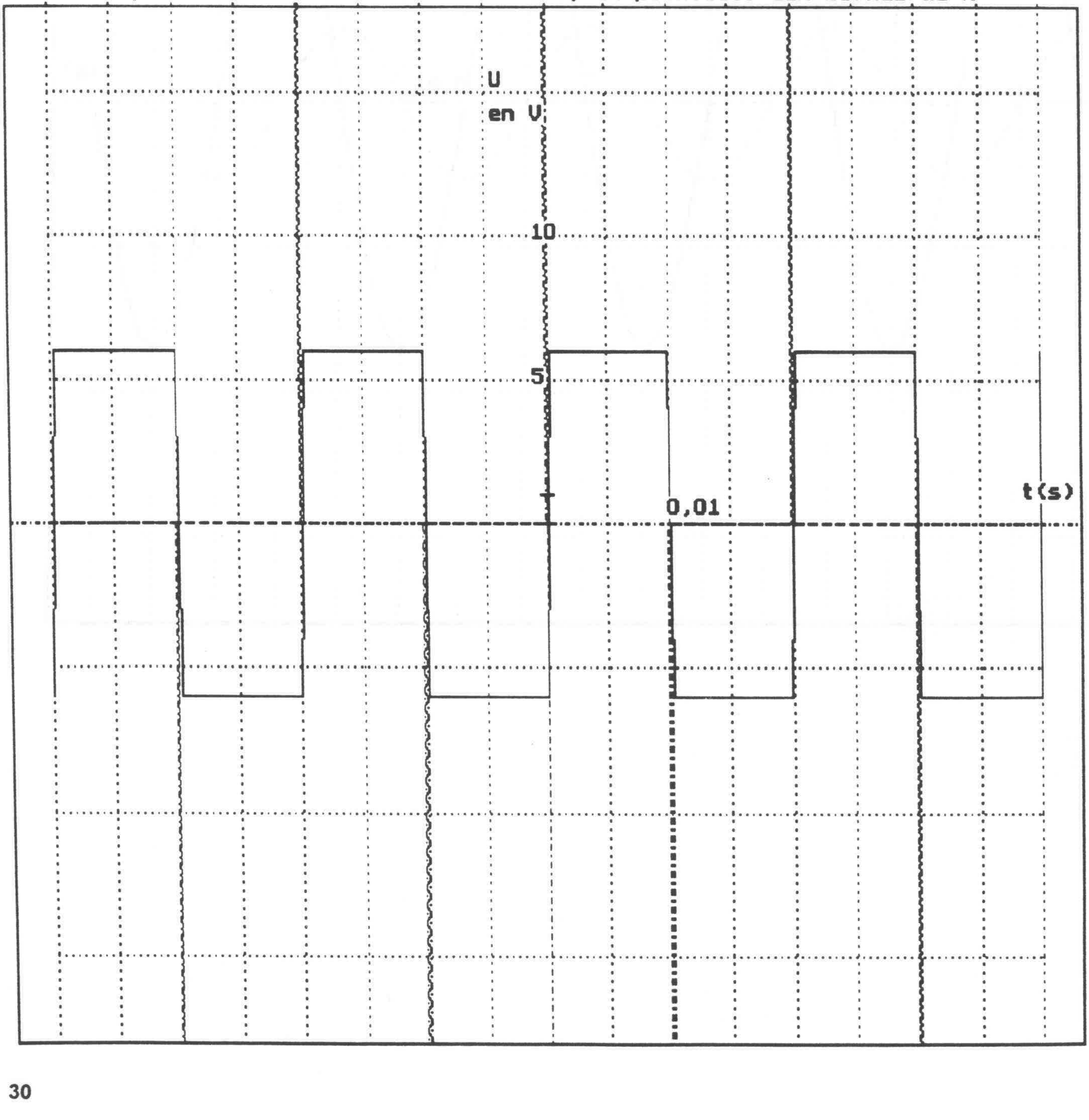
y = 6*1.414*sgn(sin(2*π*50*x))

unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:1 couleur:0 hachure:0 pas:3.33E-04

Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9

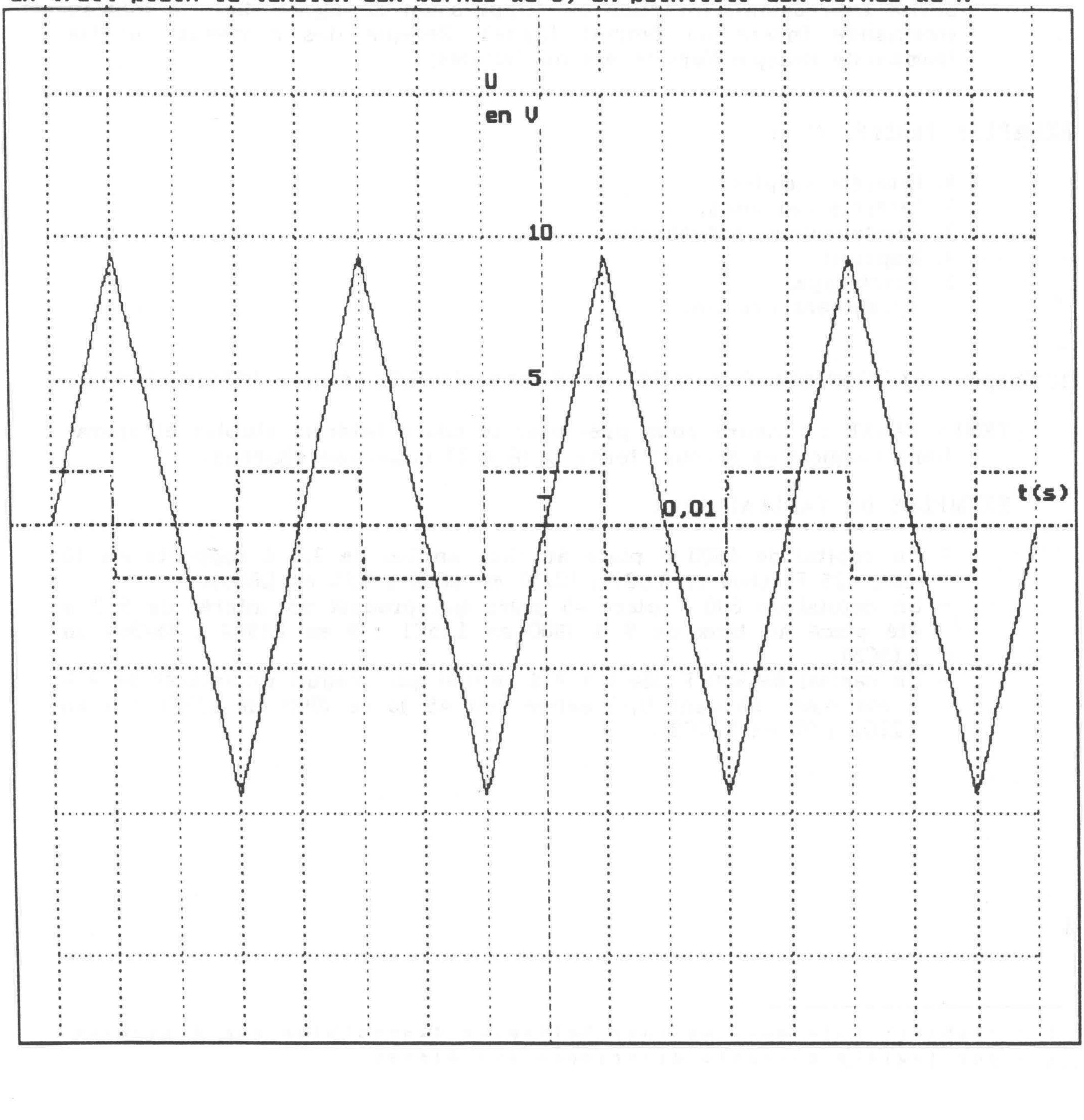
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9

en trait plein la tension aux bornes de U, en pointillé aux bornes de R



Courbe numéro: 1	C/B	18/26	Insertion	Coordonnées Cartésiennes
Ensemble d'étude:[-0.04;0.04]				
y = 6*arcsin(sin(2*π*50*x))				
unités(cm) Ox:300 Oy:0.5 trait:1 couleur:0 hachure:0 pas:3.33E-04				
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13 yo=9				
Longueur des axes en cm: xpositif=13 xnégatif=13 ypositif=9 ynégatif=9				

en trait plein la tension aux bornes de U, en pointillé aux bornes de R



UTILISATION DU TABLEUR EN BAC. BUREAUTIQUE

MATERIELS UTILISES : Ordinateur avec table de rétro-projection, imprimante si possible, lancement du Logiciel "MULTIPLAN" (commande DOS : MP).

OBJECTIFS COMMUNS : Utilisation des tableaux distribués aux élèves (ici, les numéros de ligne et colonne ont été ajoutés pour permettre le repérage dans le tableau), modification dans les zônes italiques, calculs à l'aide de la calculatrice et comparaison avec ceux du tableur.

PRE-REQUIS : Connaissances de base du tableur, chargement d'un fichier (commande Lit-Ecrit Charge *Nom de fichier*), déplacement dans le tableau avec les flèches du clavier, impression du tableau (commande Sortie Impression), insertion ou suppression de lignes dans le tableau (commande Insère ou Détruit Ligne), Recopie des contenus cellules (commande Recopie Vers le bas ou Cellules).

EXEMPLES TRAITES (1) :

1. Intérêts simples,
2. Intérêts composés,
3. Capitalisation, Actualisation,
4. Emprunt,
5. Ecart-type,
6. Ajustement linéaire.

1. Chapitre GESTION DES CAPITAUX : INTERETS SIMPLES (fichier INTSIMP.MP3)

TEMPS PASSE : 1 heure pour présenter le cours Intérêts simples et opérations financières à court terme p 18 à 22 Collection Charnay.

EXEMPLES DU TABLEAU (2) :

- Un capital de 6800 F placé au taux annuel de 7,5 % rapporte en 10 mois 425 F (6800 en L8C1 ; 10/12 en L8C2 ; 7,5% en L8C3).
- Un capital de 800 F placé 45 jours qui produit un intérêt de 9 F a été placé au taux de 9 % (800 en L15C1 ; 9 en L15C2 ; 45/360 en L15C3).
- Un capital de 800 F placé à 9 % annuel qui produit un intérêt de 9 F a été placé pendant 0,13 année soit 45 jours (800 en L22C1 ; 9 en L22C2 ; 9% en L22C3).

---

1 - fichiers informatique sous Multiplan disponibles sur disquette
2 - sur feuille suivante distribuée aux élèves

fichier INTSIMP.MP3

	1	2	3	4	5	6	7
1		INTERETS SIMPLES					
2							
3	Calcul de l'Intérêt et de la valeur acquise I=Cnt ; VA=I+C						
4							
5	Capital	Durée	Taux	=>	Intérêt	Valeur acquise	
6	C	n	t		I	VA	
7							
8	*6800,00*	*0,83*	*7,50%*	=>	425,00	7225,00	
9							
10	Calcul du taux t=I/(Cn) ; VA=I+C						
11							
12	Capital	Intérêt	Durée	=>	Taux	Valeur acquise	
13	C	I	n		t	VA	
14							
15	*800,00*	*9,00*	*0,13*	=>	9,00%	809,00	
16							
17	Calcul de la durée n=I/(Ct) ; VA=I+C						
18							
19	Capital	Intérêt	Taux	=>	Durée	Valeur acquise	
20	C	I	t		n	VA	
21							
22	*800,00*	*9,00*	*9,00%*	=>	0,13	809,00	
23							

fichier INTCOMP.MP3

	1	2	3	4	5	6	7
1		INTERETS COMPOSES					
2							
3	Calcul valeur acquise et intérêt total Cn=C(1+t)^n ; I = Cn-C						
4							
5	Capital	Durée	Taux	=>	Intérêt	Valeur acquise	
6	C	n	t		I	Cn	
7							
8	*2000,00*	*4,00*	*7,50%*	=>	670,94	2670,94	
9							
10	Calcul du capital initial C=Cn(1+t)^-n ; I = Cn-C						
11							
12	Val. Acqu.	Durée	Taux	=>	Intérêt	Capital initial	
13	Cn	n	t		I	C	
14							
15	*1000,00*	*5,00*	*7,50%*	=>	303,44	696,56	
16							
17	Calcul du taux t=(Cn/C)^(1/n)-1 ; I=Cn-C						
18							
19	Val. Acqu.	Capital	Durée	=>	Taux	Intérêt	
20	Cn	C	n		t	I	
21							
22	*2670,94*	*2000,00*	*4,00*	=>	7,50%	670,94	
23							
24	Calcul de la durée n=ln(Cn/C)/ln(1+t) ; I=Cn-C						
25							
26	Val. Acqu.	Capital	Taux	=>	Durée	Intérêt	
27	Cn	C	t		n	I	
28							
29	*2670,94*	*2000,00*	*7,50%*	=>	4,00	670,94	
30							

2. Chapitre GESTION DES CAPITAUX : INTERETS COMPOSES (fichier INTCOMP.MP3)

TEMPS PASSE : 1 heure pour présenter le cours Intérêts composés et opérations financières p 22 à 26 Collection Charnay.

EXEMPLES DU TABLEAU (3) :

- Un capital de 2000 F placé au taux annuel de 7,5 % rapporte en 4 ans 670,94 F et a une valeur acquise de 2670,94 F (2000 en L8C1 ; 4 en L8C2 ; 7,5% en L8C3).
- Un capital qui a acquis une valeur de 1000 F en 5 ans placé à 7,5 % a produit un intérêt de 303,44 F et une valeur de 696,94 F (1000 en L15C1 ; 5 en L15C2 ; 7,5% en L15C3).
- Un capital de 2000 F qui a acquis une valeur de 2670,94 F en 4 ans a été placé à 7,5 % annuel et a produit un intérêt de 303,44 F (2670,94 en L22C1 ; 2000 en L22C2 ; 4 en L22C3).
- Un capital de 2000 F placé à 7,5 % annuel qui a acquis une valeur de 2670,94 F produit un intérêt de 670,94 F en 4 ans (2670,94 en L29C1 ; 2000 en L29C2 ; 7,5% en L29C3).

3. Chapitre GESTION DES CAPITAUX : ANNUITES (fichier CAPIACTU.MP3)

TEMPS PASSE : 1 heure pour présenter le cours Annuités p 27 à 30 Collection Charnay.

EXEMPLES DU TABLEAU (4) :

CAPITALISATION :

- Au bout du 10ième versement annuel de 1000 F placé à 5 % annuel on capitalise une valeur de 12577,89 F (1000 en L6C1 ; 5% en L6C2 ; 10 en L6C3).
- Pour obtenir un capital de 10000 F au bout du 10ième versement annuel placé à 10 % annuel il faut placer 627,45 F (10000 en L12C1 ; 10% en L12C2 ; 10 en L12C3).
- Pour obtenir un capital de 10000 F au bout du dernier versement annuel de 627,45 F placé à 10 % annuel il faut 10 placements (10000 en L18C1 ; 10% en L18C2 ; 627,45 en L18C3).

ACTUALISATION :

- Au bout du 10ième versement annuel de 1000 F placé à 5 % annuel la valeur actuelle est de 7721,73 F (1000 en L26C1 ; 5% en L26C2 ; 10 en L26C3).
- Pour obtenir une valeur actuelle de 10000 F au bout du 10ième versement annuel placé à 10 % annuel il faut placer 1627,45 F (10000 en L32C1 ; 10% en L32C2 ; 10 en L32C3).
- Pour obtenir une valeur actuelle de 10000 F au bout du dernier versement annuel de 1627,45 F placé à 10 % annuel il faut 10 placements (10000 en L38C1 ; 10% en L38C2 ; 627,45 en L38C3).

---

3 - sur feuille précédente distribuée aux élèves

4 - sur feuille suivante distribuée aux élèves

fichier CAPIACTU.MP3

```
         1          2          3          4          5          6          7
 1            CAPITALISATION DE PLUSIEURS VERSEMENTS EGAUX
 2 Calcul de la valeur Vn de n versements a, au taux i
 3
 4    a          i          n          Vn      = a*[(1+i)^n-1]/i
 5 ----------------------------------------------------------------
 6   1000,00       5,00%        10 12577,89
 7
 8 Calcul du versement a, produisant Vn au bout de n périodes, taux i
 9
10     Vn         i          n          a      = Vn*i/[(1+i)^n-1]
11 ----------------------------------------------------------------
12  10000,00      10,00%        10  627,45
13
14 Calcul des périodes n, produisant Vn avec n versements a au taux i
15
16     Vn         i          a          n      = [log(Vn*i/a+1)/log(1+i)]
17 ----------------------------------------------------------------
18  10000,00      10,00%   627,45    10,00
19
20
21            ACTUALISATION DE PLUSIEURS VERSEMENTS EGAUX
22 Calcul de la valeur Vo de n versements a, au taux i
23
24    a          i          n          Vo      = a*[1-(1+i)^-n]/i
25 ----------------------------------------------------------------
26   1000,00       5,00%        10  7721,73
27
28 Calcul du versement a, produisant Vo au bout de n périodes, taux i
29
30     Vo         i          n          a      = Vo*i/[1-(1+i)^-n]
31 ----------------------------------------------------------------
32  10000,00      10,00%        10  1627,45
33
34 Calcul des périodes n, produisant Vo avec n versements a au taux i
35
36     Vo         i          a          n      = [-log(1-Vo*i/a)/log(1+i)]
37 ----------------------------------------------------------------
38  10000,00      10,00%  1627,45    10,00
```

fichier ITER_VO.MP3

```
          1          2          3          4          5          6
 1       Vo          a          n          t       t maxi     t mini
 2                                                 100,00%      0,00%
 3     10000       1250         10       4,28%       4,28%      4,28%
 4                 1250                              4,28%      4,28%
 5
 6 Recherche du taux t pour obtenir Vo avec n versements a
 7 (modifiables : L3C1, L4C2, L3C3)
 8
 9 vntmax'RTrv1'TB:'VD'RT          Code : Alt-D
10 rcdepart'TB13c5'RTvnath'rt
```

TABLEAU (5) (fichier ITER_VO.MP3) permet la recherche du taux de placement pour obtenir une valeur actuelle donnée avec n versements a : Exemple 10000 en L3C1 ; 1250 en L4C2 ; 10 en L3C3 ; Alt-D active la macro qui relance la recherche.

4. Chapitre GESTION DES CAPITAUX : EMPRUNTS INDIVIS (fichier EMPRUNT.MP3)

TEMPS PASSE : 1 heure pour présenter le cours Emprunts indivis p 32 à 36 Collection Charnay.

EXEMPLE DU TABLEAU (6) :

On emprunte 100000 F à 15 % annuel, remboursable en 10 ans : 100000 en L1C4 ; 10 en L2C4 ; 15% en L3C4 ; Alt-A active la macro qui recalcule le tableau que vous pouvez imprimer.

fichier EMPRUNT.MP3

```
      1              2           3           4           5           6           7
 1 Montant de l'emprunt :             100000,00 F            Code : Alt-A
 2 Nombre de périodes :                       10
 3 Taux de la période :                   15,00%
 4
 5 Montant du remboursement périodique : i*Vo/(1-(1+i)^-n)
 6                                      19925,21 F
 7
 8 Période     Rembour.  Capital dûIntérêts    Amort.     Capital dû fin pér.
 9                       début pér.                       100000,00
10          1  19925,21 100000,00   15000,00   4925,21    95074,79
11          2  19925,21  95074,79   14261,22   5663,99    89410,81
12          3  19925,21  89410,81   13411,62   6513,59    82897,22
13          4  19925,21  82897,22   12434,58   7490,62    75406,60
14          5  19925,21  75406,60   11310,99   8614,22    66792,38
15          6  19925,21  66792,38   10018,86   9906,35    56886,03
16          7  19925,21  56886,03    8532,90  11392,30    45493,73
17          8  19925,21  45493,73    6824,06  13101,15    32392,58
18          9  19925,21  32392,58    4858,89  15066,32    17326,27
19         10  19925,21  17326,27    2598,94  17326,27        0,00
```

Voici le code de la macro qui démarre en L1C8 :

```
     8          9          10
1  vl11'tbl'rt
2  b:'fn'rt
3  vl10'tbl'rt
4  rv
5  n-1
6  'tb:'vd'vd'vd'vd'vd'rt
```

5 - sur feuille précédente distribuée aux élèves

6 - feuille distribuée aux élèves

5. Chapitre CARACTERISTIQUES D'UNE SERIE STATISTIQUE : (fichier STATISTI.MP3)

EXEMPLE DU TABLEAU : corrigé (7) de l'exercice 13 p 37 collection Charnay

. Les colonnes x1 et x2 sont les valeurs des bornes inférieures et supérieures des classes,
. La colonne ni est l'effectif d'une classe,
. Les colonnes ni+ et ni- celles des effectifs cumulés croissants et décroissants,
. La colonne fi celle des fréquences,
. Les colonnes fi+ et fi- celles des fréquences cumulées croissantes et décroissantes,
. La colonne xi celle des centres de classe,
. La colonne ni*xi celle des produits effectif par centre de classe,
. La colonne ni*xi+ celle des produits ni*xi cumulés croissants,
. La colonne ni*xi² celle des produits effectif par le carré des centre de classe.

. Ici les données sont les suivantes : [300, 900[: 10 ; [900, 1500[: 15 ; [1500, 2100[: 30 ; [2100, 2700[: 30 ; [2700, 3300[: 45

fichier STATISTI.MP3

	1	2	3	4	5	6	7
1	x1	x2	ni	ni+	ni-	fi	fi+
2							
3	*300*	900	*10*	10	130	0,077	0,077
4	*900*	1500	*15*	25	120	0,115	0,192
5	*1500*	2100	*30*	55	105	0,231	0,423
6	*2100*	2700	*30*	85	75	0,231	0,654
7	*2700*	3300	*45*	130	45	0,346	1,000
8	*3300*						
9	Totaux :	Σni =	130		Σfi =	1,000	
10							
11	Moyenne Mx = Σni*xi/Σni				2192,31		
12	Variance V = Σni*xi²/Σni - Mx²				579940,83		
13	Ecart-type σ = √V				761,54		
14	Coefficient de dispersion c = σ/Mx				0,35		

	8	9	10	11	12
1	fi-	xi	ni*xi	ni*xi+	ni*xi²
2					
3	1,000	600	6000	6000	3600000
4	0,923	1200	18000	24000	21600000
5	0,808	1800	54000	78000	97200000
6	0,577	2400	72000	150000	172800000
7	0,346	3000	135000	285000	405000000
8					
9		Σni*xi =	285000	Σni*xi² =	700200000

7 - corrigé distribué aux élèves

Modifications possibles du tableau précédent :

. Valeurs en colonnes 1 et 3 entre lignes 2 et 8
. Pour supprimer des lignes, se placer entre Ligne 2 et Ligne 8 puis lancer la commande **Détruit Ligne**.
. Pour insérer des lignes, se placer entre Ligne 2 et Ligne 8 puis lancer la commande **Insère Ligne**, remonter d'une ligne et recopier la ligne vers le bas autant que nécessaire avec la commande **Recopie Vers le bas**.

6. Chapitre AJUSTEMENT LINEAIRE

EXEMPLE DU TABLEAU (8) : Méthode de MAYER (fichier MAYER.MP3)

. Les données sont les suivantes :

Année	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Nombre	836	926	1000	1074	1175	1290	1378	1436

. On cherche un ajustement linéaire et une prévision pour 1990

Modifications possibles :

. Valeurs entre colonnes 1 à 6 entre lignes 4 à 9,
. Prévision en ligne 21,
. Suppression et insertion de lignes entre lignes 4 et 9

fichier MAYER.MP3

	1	2	3	4	5	6
1	Années	N°	Nombre	Années	N°	Nombre
2			commandes			commandes
3		xi	yi		xi	yi
4						
5	*1982*	*1*	*836*	*1986*	*5*	*1175*
6	*1983*	*2*	*926*	*1987*	*6*	*1290*
7	*1984*	*3*	*1000*	*1988*	*7*	*1378*
8	*1985*	*4*	*1074*	*1989*	*8*	*1436*
9						
10	Somme :	10	3836		26	5279
11	Moyenne :	2,50	959,00		6,50	1319,75
12	Nombre :	4			4	
13						
14		METHODE de MAYER				
15	Droite de regression y en x : y = ax + b					
16	a = (My2 - My1)/(Mx2 - Mx1) =			90,1875		
17	b = My1 - a*Mx1 =			733,53125		
18						
19		PREVISION				
20	Année	xi	yi			
21	*1990*	*9*	1545			

8 - feuille distribuée aux élèves

EXEMPLE DU TABLEAU (9) : Méthode de Moindres carrés (fichier MOINCARR.MP3)

. Les données sont les suivantes :

Année	1985	1986	1987	1988	1989
C.A. total	3300	5500	7100	8500	10500

. On cherche un ajustement linéaire et une prévision pour 1990

<u>Modifications possibles</u> :

. Valeurs entre colonnes 1 à 3 entre lignes 4 à 10,
. Prévision en ligne 29,
. Suppression et insertion de lignes entre lignes 4 et 10

fichier MOINCARR.MP3

	1	2	3	4	5	6
1	Années	N°	CA Total			
2			en kF			
3		xi	yi	xi*yi	xi²	yi²
4	====	====	====	====	====	====
5	*1985*	*1*	*3300*	3300	1	10890000
6	*1986*	*2*	*5500*	11000	4	30250000
7	*1987*	*3*	*7100*	21300	9	50410000
8	*1988*	*4*	*8500*	34000	16	72250000
9	*1989*	*5*	*10500*	52500	25	110250000
10	----	----	----	----	----	----
11	Somme :	15	34900	122100	55	274050000
12	Moyenne :	3	6980,0			
13	Nombre :	5				
14						
15		METHODE DES MOINDRES CARRES				
16	Droite de regression y en x : y = ax + b					
17	a = (Σxi*yi - n*Mx*My)/(Σxi² - n*Mx²) =				1740	
18	b = My - a*Mx =				1760	
19						
20	Droite de regression x en y : x = a'y + b'					
21	a'= (Σxi*yi - n*Mx*My)/(Σyi² - n*My²) =				0,0005715	
22	b'= Mx - a'*My =				-0,988833	
23						
24	Coefficient de corrélation					
25	r = √(a*a') =				0,9971715	
26						
27		PREVISION				
28	Année	xi	yi			
29	*1990*	*6*	12200			

9 - feuille distribuée aux élèves

Le Monde du 10 décembre 1991

Le brouillage des pourcentages

par Monique Fouet

Les arbres ne montent pas jusqu'au ciel, mais ils ne peuvent pas non plus se recroqueviller pour se transformer en bonsaïs. Il en va de même des bulles spéculatives, contrairement à ce que laissent entendre certains commentaires fondés sur un maniement sans précaution des pourcentages. La Bourse et le marché de l'immobilier auraient bien du mal à se remettre du traitement de choc suggéré par ces mêmes calculs qui, appliqués il y a quelques années aux taux de change, vouaient à la disparition les plus grandes monnaies de la planète.

A Paris, le prix de vente des logements avait augmenté en moyenne (au mètre carré) de 80 % entre le début de 1988 et celui de 1991. La baisse amorcée depuis quelques mois atteindrait dès à présent 20 %. Est-ce à dire qu'il faut encore attendre une baisse de 60 % pour revenir au niveau initial ? Certainement pas.

On ne prétend porter ici aucun jugement sur l'ampleur relative de ce qui était « excessif » et de ce qui était « normal » dans les hausses récentes : il ne s'agit pas de savoir s'il est souhaitable ou vraisemblable que le point de départ soit retrouvé. Il s'agit d'attirer l'attention sur une question arithmétique très simple mais cruciale.

Une variation en pourcentage se calcule toujours de la manière suivante : différence entre le niveau final et le niveau initial divisée par le niveau initial et multipliée par 100. Lorsque le prix de vente du mètre carré passe de 12 000 à 22 000 francs, la variation est de + 10 000/12 000 × 100 = + 83 %. Mais lorsque le même prix de vente repasse de 22 000 à 12 000 francs, la variation est de – 10 000/22 000 × 100 = – 45 %.

Pour annuler une hausse de 83 %, il suffit d'une baisse de 45 %. Il est donc clair que, si une baisse de 83 % devait succéder à une hausse de 83 %, on se retrouverait très en dessous du niveau initial : dans l'exemple présent, le prix du mètre carré ne serait plus que de 3 700 francs. Les détenteurs de patrimoine n'enregistreraient assurément plus aucune plus-value ; ils subiraient au contraire une moins-value considérable.

Un calcul absurde

Les acquéreurs potentiels de logements seraient mal avisés d'attendre aujourd'hui une baisse additionnelle de 60 % qui est peu probable. Si d'aventure elle survenait, cela signifierait que l'ensemble de l'économie serait plongé dans la déflation et sans doute dans la dépression, et donc que ces acquéreurs potentiels seraient eux aussi dépourvus de l'essentiel de leurs revenus.

Les indices boursiers, qui sont eux aussi affectés par des fluctuations amples, font trop souvent l'objet de descriptions erronées. Ainsi le Dow Jones n'avait-il enregistré « qu'une baisse de 31 % » lors du krach d'octobre 1987, ce qui, à en croire certains, ne dégonflait qu'en partie la bulle des mois antérieurs constituée par une hausse de 40 %. Or la bulle avait bel et bien disparu. Quant au redressement de 19 % enregistré à la fin de la guerre du Golfe, il n'allait pas « au-delà » de la baisse de 16 % qui l'avait précédé...

Les pourcentages ne peuvent donc pas être comparés à la hausse et à la baisse. Mais il est illusoire de prétendre contourner cet obstacle apparent en calculant les variations comme s'il s'agissait de hausses et en précisant qu'elles sont négatives. Un exemple simple illustre l'absurdité d'un tel calcul.

Lorsque le dollar s'était apprécié entre le début de 1981 et celui de 1985, il était passé de 5 à 10 francs : sa valeur vis-à-vis de la monnaie française avait augmenté de 100 %. Mais on n'avait pas le droit, sous prétexte de fournir des ordres de grandeur simples, d'affirmer que dans le même temps le franc s'était symétriquement déprécié de 100 %. 100 % signifiant la totalité, cela voulait dire que le franc ne valait plus rien. Le mark était logé à la même enseigne.

Le dollar s'est ensuite déprécié, rejoignant le niveau de 5 francs en novembre 1990 ; lui aussi a fait l'objet de commentaires fantaisistes décrivant une dépréciation de 100 %, c'est-à-dire une disparition pure et simple. En fait, pour revenir à son point de départ après une hausse de 100 %, il lui a suffi d'une baisse de 50 %. Il eût été plus sage de dire que la valeur du dollar avait tout d'abord été multipliée par deux, tandis que celle du franc et du mark était divisée par deux, puis que, à son tour, elle avait été diminuée de moitié. Les calculs de pourcentage, parce qu'ils font intervenir un dénominateur, relativisent les évolutions.

C'est du reste pour cela qu'on les effectue : les comparaisons en termes absolus, dans le temps ou dans l'espace, sont souvent dénuées de signification. Mais il faut se souvenir que les comparaisons en termes relatifs sont asymétriques à la hausse et à la baisse.

Il faut en outre savoir se borner aux variations en niveau lorsque celles-ci ont une signification propre. Ainsi, lorsque le nombre de chômeurs passe de 0,8 à 0,9 million, il augmente de 12,5 %. Lorsqu'il passe de 2,8 à 2,9 millions, il n'augmente « plus » que de 3,6 %. Est-ce à dire que les 100 000 chômeurs supplémentaires sont plus importants dans le premier cas que dans le second ? Le bon sens incite à penser que c'est plutôt le contraire.

► Economiste à l'Observatoire français des conjonctures économiques (OFCE).

► Lire sur des sujets voisins « Le trompe-l'œil des chiffres » (« Champs économiques », du 12 novembre) et « Le trou noir des statistiques » (« Champs économiques » du 8 octobre).

... et l'anti brouillard...

Dans cet article, Monique Fouet cite plusieurs exemples de hausses suivies de baisses (ou de baisses suivies de hausses).

1°) Combien Monique Fouet cite-t-elle d'exemples ?

2°) paragraphe 2 :

Après la baisse de 20%, quelle devrait être le pourcentage de baisse des prix de vente des loyers pour revenir au niveau de 1988

3°) paragraphe 7 :

Le Dow Jones a enregistré une baisse de 31% lors du krach de 1987 après une hausse de 40% . Au total, celà fait-il une hausse ou une baisse ? de quel pourcentage ?

4°) présentez tous les exemples cités dans cet article (sauf celui du paragraphe 12) dans un tableau récapitulatif. Précisez en particulier:

- le pourcentage de variation initiale (positive pour une hausse, négative pour une baisse)
- la deuxième variation
- éventuellement la troisième
- la variation totale .

5°) aprés une variation de x%, on appelle y% la variation qui fait revenir au niveau initial.

Entre quelles limites peut varier x ?

Que veut dire Monique Fouet quand elle dit que les comparaissons en termes relatifs sont asymétriques à la hausse et à la baisse ? (paragraphe 11)

Etablir la formule qui donne y en fonction de x.

Représenter graphiquement la fonction

$$x \in [-50,100] \quad x \text{----}> y$$

Quelle symétrie apparait dans cette courbe ?

Quelle conclusion pratique pouvez-vous en tirer ?

6°) paragraphe 12 :

Quelle erreur risque-t-on de commettre si on compare des augmentations de nombre de chômeurs en pourcentage ?

CALCUL VECTORIEL SUR UNE CALE

La cale représentée ci-dessous est rapportée à un repère orthonormé d'origine A dont les vecteurs unitaires ont pour norme 1 mm.

1) On se propose de déterminer la mesure de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}})$. Dans ce but, effectuer les opérations suivantes:

a) Déterminer les coordonnées des points G, H et I.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GI}$ et en déduire leur norme.

c) Au moyen de l'expression analytique du produit scalaire, déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}})$.

2) On cherche à déterminer les coordonnées x, y et z du point K de GI tel que le segment HK soit perpendiculaire au segment GI. Pour cela:

a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction de x, y et z.

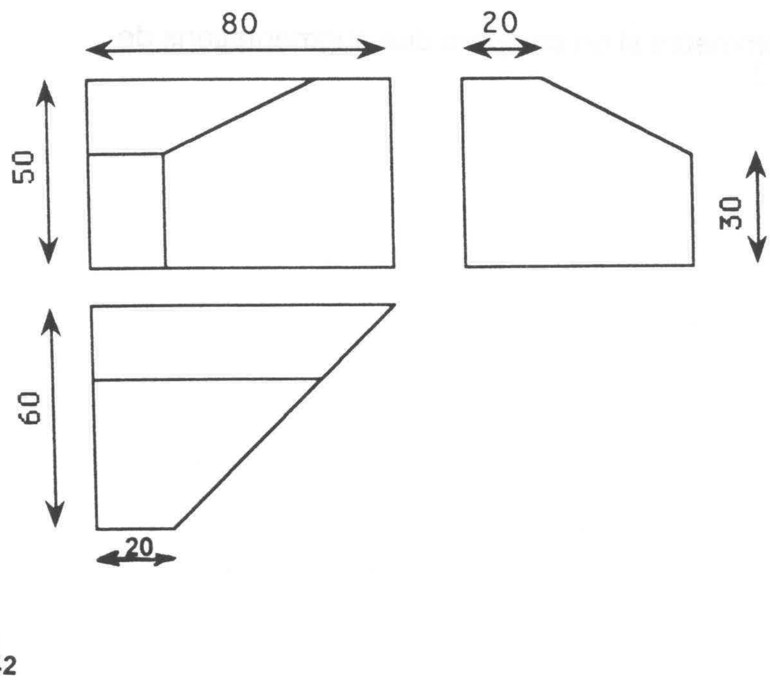
b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{GI}$. On obtient ainsi une équation comportant les 3 inconnues x, y et z.

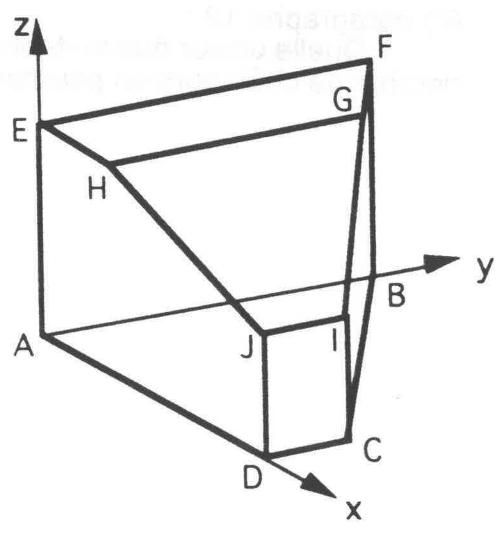
c) Le point K appartenant au segment IG, traduire la relation vectorielle $\overrightarrow{IK} = k.\overrightarrow{IG}$.
En déduire les expressions de x, y et z en fonction du paramètre k puis les coordonnées de K.

3) De la même façon, déterminer les coordonnées du pied L de la perpendiculaire abaissée de B sur le segment GI.

4) En utilisant le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{BL}$, déterminer la mesure de l'angle des plans (GHIJ) et (BCIG).

5) Soit le vecteur $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JH}$ et le vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$. Déterminer les coordonnées de ces vecteurs et en déduire une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}})$. La comparer au résultat de la question précédente.





Commentaires:

Objectifs:	Maîtrise du calcul vectoriel et application à la résolution d'un problème issu du domaine professionnel.
Prérequis:	Coordonnées d'un vecteur, Produit scalaire, Produit vectoriel, Résolution d'équations du premier degré
Activité des élèves:	Calcul littéral
Difficultés des élèves:	Eviter les erreurs de calcul
Temps passé:	2 h
Evaluation	Eventuellement, on peut donner les questions 3, 4 et 5 comme sujet de contrôle en fin de séance.

Réponses aux questions:

1) a) G(20; 60; 50) H(20; 0; 50) I(60; 20; 30)

b) $\| \overrightarrow{GH} \| = 60$ et $\| \overrightarrow{GI} \| = 60$

c) $mes(\widehat{\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}}) \approx 48{,}2°$

2) a) $\overrightarrow{HK}(x - 20 ; y ; z - 50)$

b) $2x - 2y - z + 10 = 0$

c) $K(\frac{140}{3} ; \frac{100}{3} ; \frac{110}{3})$

3) $L(\frac{40}{3} ; \frac{200}{3} ; \frac{160}{3})$

4) $\cos(\widehat{\overrightarrow{HK},\overrightarrow{BL}}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $mes(\widehat{\overrightarrow{HK},\overrightarrow{BL}}) \approx 108° \text{ mod } 2\pi$

5) $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JH} = 400\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} - 800\,\overrightarrow{k}$ $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC} = 3000\,\overrightarrow{i} + 3000\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}$

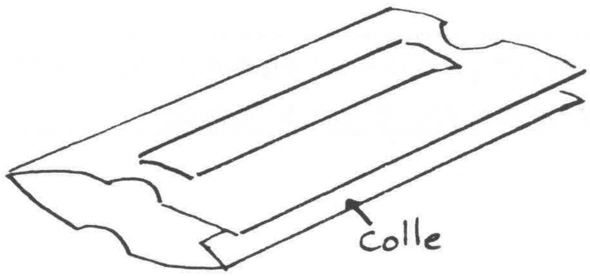
$\cos(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Une règle à calcul dont on va chercher à expliquer le fonctionnement

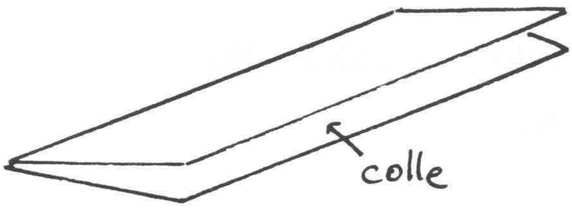
Découper les parties A et B.

Evider la partie hachurée de A

Plier A et coller.

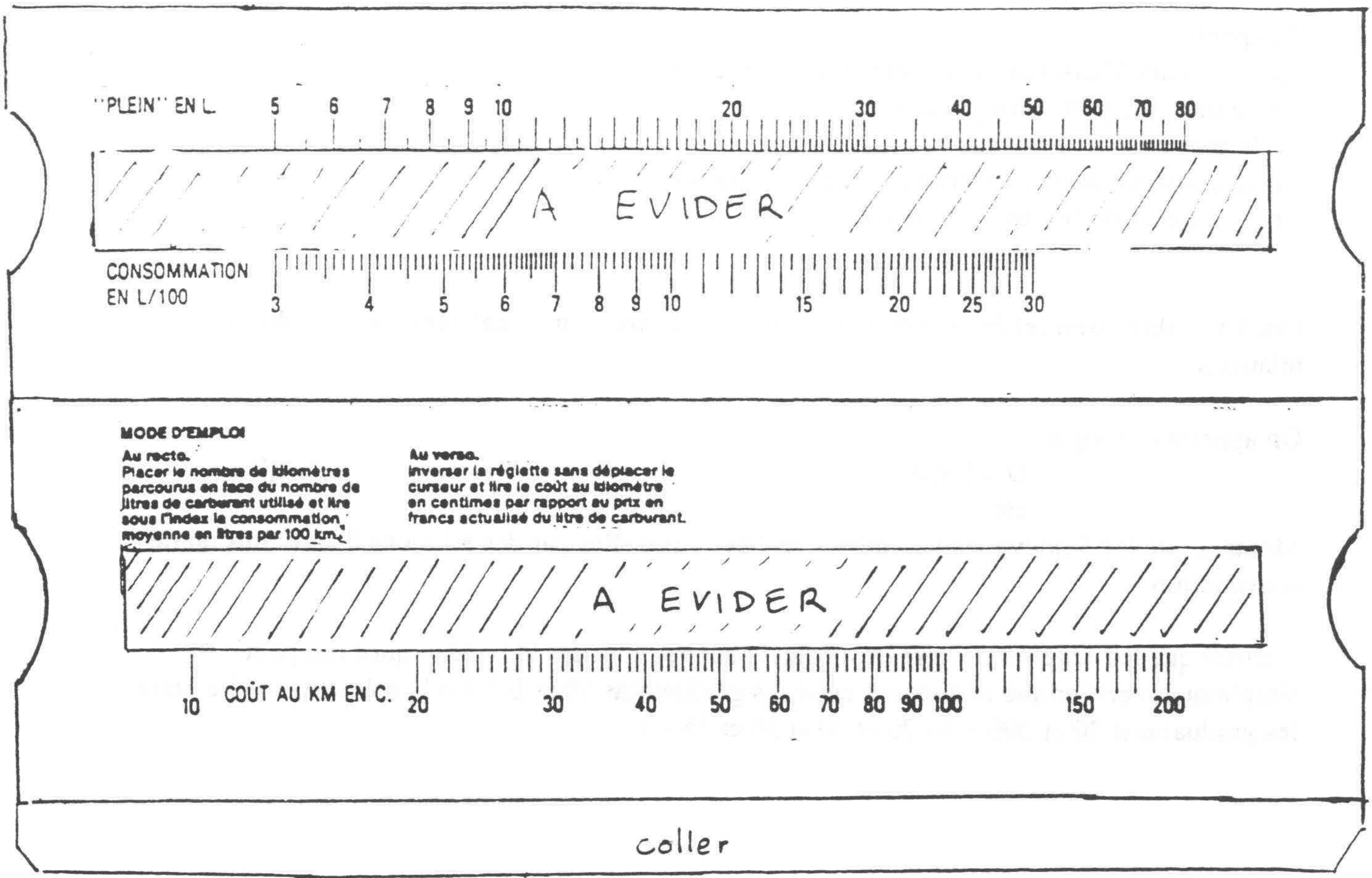


Plier B et coller.



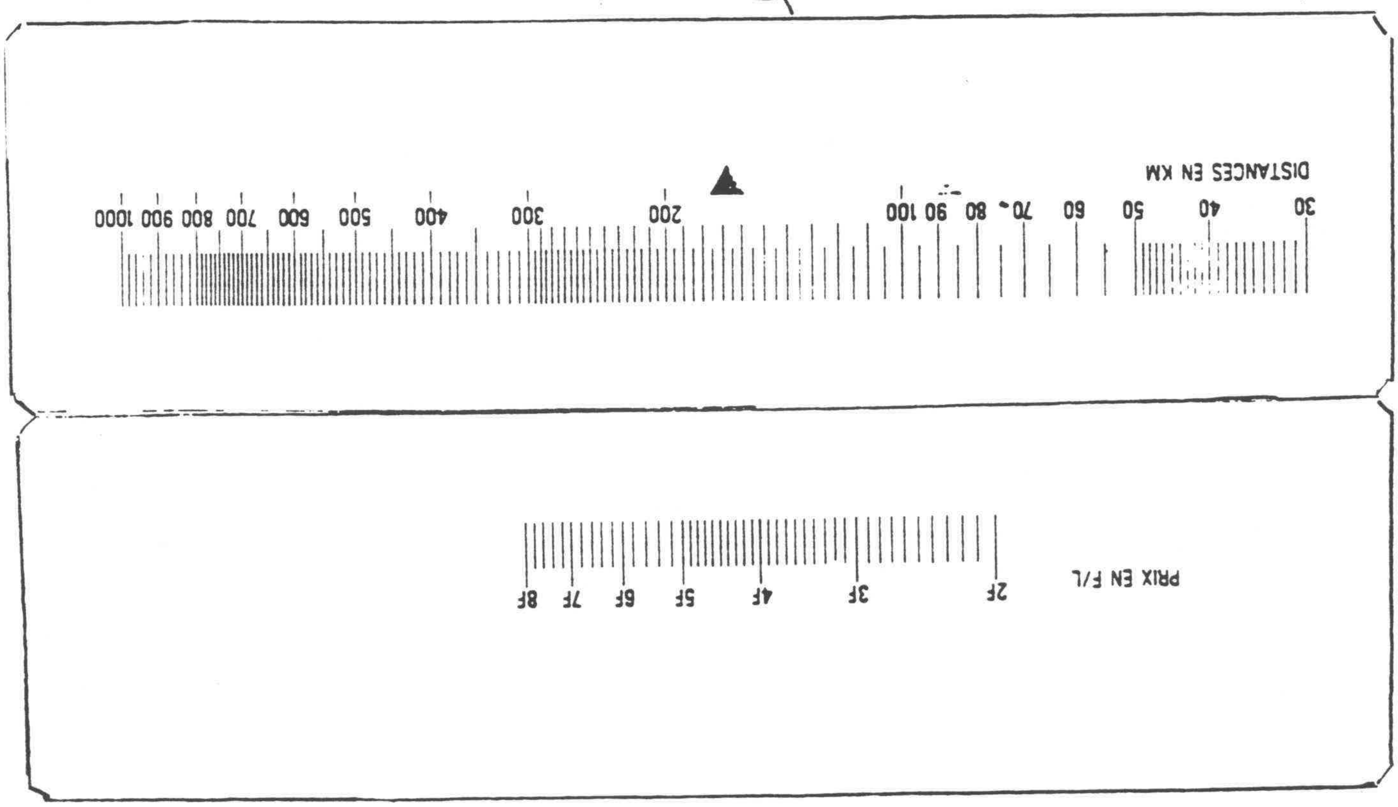
Faire glisser B dans A de telle façon que l'échelle DISTANCE apparaisse du même coté que PLEIN et CONSOMMATION.

Utilisation:
mettre la distance en face du plein. La consommation se lit alors sur l'échelle PLEIN en face du 100 de l'échelle DISTANCE ou en face de l'index de l'échelle CONSOMMATION.
On retourne la règle et on lit le COUT au km en centimes en face du PRIX en F du litre d'essence.


"PLEIN" EN L.
5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60 70 80
A EVIDER
CONSOMMATION EN L/100
3 4 5 6 7 8 9 10 15 20 25 30
MODE D'EMPLOI
Au recto.
Placer le nombre de kilomètres parcourus en face du nombre de litres de carburant utilisé et lire sous l'index la consommation moyenne en litres par 100 km.
Au verso.
Inverser la réglette sans déplacer le curseur et lire le coût au kilomètre en centimes par rapport au prix en francs actualisé du litre de carburant.
A EVIDER
10 COÛT AU KM EN C. 20 30 40 50 60 70 80 90 100 150 200
coller

A

B


DISTANCES EN KM
30 40 50 60 70 80 90 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
PRIX EN F/L
2F 3F 4F 5F 6F 7F 8F

On appelle

- p le volume d'essence nécessaire pour faire le plein.
- d la distance parcourue avec ce plein
- l le prix du litre d'essence
- c la consommation d'essence en litres aux 100 km
- r le prix de revient kilométrique

Ces 5 variables sont reliées par deux relations qui permettent de calculer c et r. Etablir ces relations.

On appelle P = log p

D = log d

etc...

Montrez que les 5 nouvelles variables sont liées entre elles par des relations d'additions ou de soustraction

Vérifier que les échelles de la règle à calcul sont des échelles logarithmiques (on peut simplement vérifier que la distance entre les graduations 10 et 100 est la même que celle entre les graduations 20 et 200 – ou 20 et 30 et 30 et 45 –)

LA DROITE DE HENRY
PRESENTATION

Aspects théoriques : (IREM Paris-Nord)

Etude d'un document d'entreprise :

Un élève rapporte ce document de son stage en entreprise. Quel est son contenu ? quelle utilisation pédagogique en mathématique ?,

Deux exercices conduisant à l'utilisation de cette droite de Henry.

Papier à échelle gaussienne et arithmétique (fournisseur inconnu)
Il existe une autre référence : Letracet N° TO54AS.

Bibliographie :

Statistiques :

Statistiques et probabilités (BTS comptabilité et Gestion, BTS Informatique de gestion) B. Bigot, B. Verlant, Editions Foucher.

Contenant un développement sur la droite de Henry :

Information et activités à propos de fiabilité (IREM Paris-Nord, publication N° 48)

Statistiques-probabilités (formations supérieures technologiques et tertiaires) P.Bénichou et al. Editions Dunod

Maîtrises statistique des procédés (MSP) Editions d'organisation

De nombreux documents de formation internes aux entreprises existent.

DROITE DE HENRI

AJUSTEMENT GRAPHIQUE . Droite de Henri

Il est possible d'ajuster graphiquement une loi normale à une distribution observée et de s'assurer graphiquement de la normalité approchée de la distribution observée.

En effet une variable aléatoire X est normale s'il existe deux nombres m et σ tels que la fonction cumulative F soit de la forme :

$F(x) = P(X \leq x) = P(T \leq t) = \Pi(t)$ avec $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ T suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$.

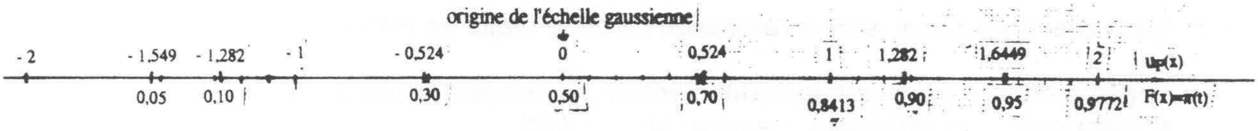
Π est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite (voir le formulaire).

L'existence des deux nombres m et σ est donc équivalente à la linéarité de la courbe d'équation

$$t = u_F(x) = \frac{x - m}{\sigma}$$

En conséquence, on peut s'assurer graphiquement de la normalité d'une distribution empirique : les points de coordonnées $(x_i\ ,\ t_i)$ doivent être sensiblement alignés pour que l'hypothèse de normalité soit acceptable.

Pour éviter d'avoir à calculer les valeurs $u_F(x_i)$ correspondant à chaque extrémité de classe x_i , on utilise un papier fonctionnel ***gausso-arithmétique*** où les graduations sur l'axe F(x) sont portées à une distance de l'origine proportionnelle à $u_F(x)$ (échelle gaussienne).



Sur le papier fonctionnel <u>gausso-arithmétique</u> on lit les paramètres m et σ de la manière suivante :

l'équation de la droite de <u>la droite de Henri</u> est $t = \dfrac{x - m}{\sigma}$

donc si $t = 0$, $x = m$; c'est à dire : $F(x) = 0{,}5000$ (50 %)

si $t = 1$, $x = m + \sigma$; c'est à dire : $F(x) = 0{,}8413$ (84,13 %)

EXEMPLE (brochure fiabilité page 36)

La durée de vie, exprimée en heures, des joints à lèvres PLAUSTRA - type IE - définit une variable aléatoire continue X.

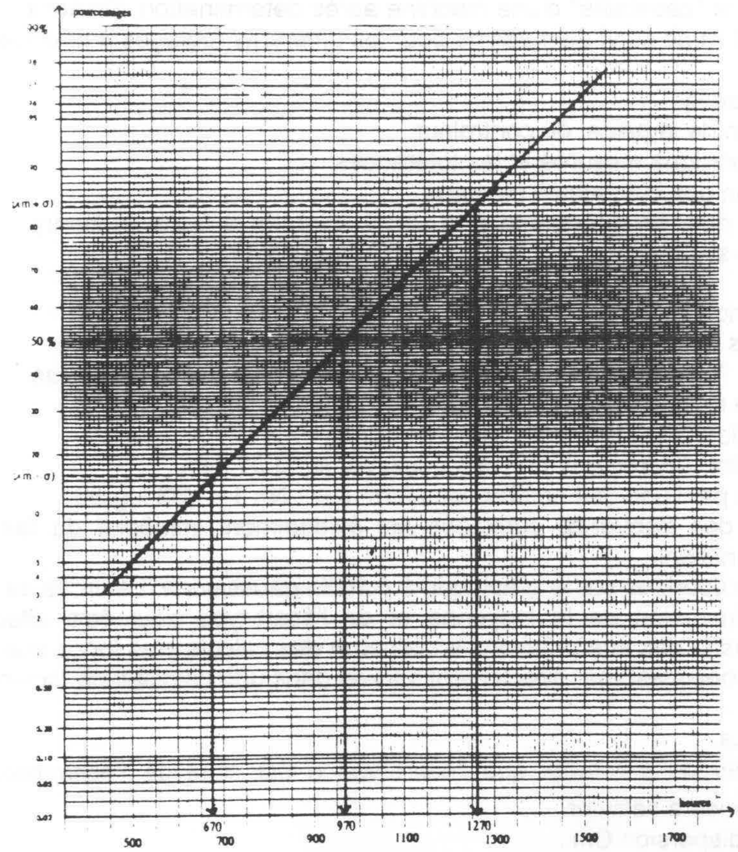
L'étude de la durée de vie de 500 de ces joints a permis d'obtenir l'historique suivant :

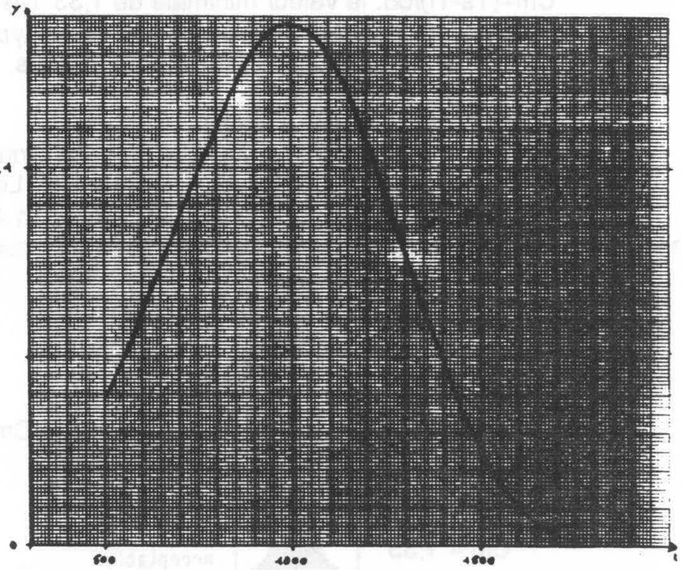
classes	[0 ; 500]	]500 ; 700]	]700 ; 900]	]900 ; 1100]	]1100 ; 1300]	]1300 ; 1500]	]1500 ; 1700]
effectifs	24	67	108	126	109	51	15

Plaçons sur le papier gausso-arithmétique les points M_i $(x_i\ ,\ y_i)$ où les x_i sont les bornes supérieures des classes et les y_i les pourcentages cumulés croissants correspondants :

x_i	500	700	900	1100	1300	1500	1700
y_i	4,8	18,2	39,8	65	86,8	97	100

Le dernier point ne peut pas être représenté. Le nuage obtenu est sensiblement rectiligne ce qui confirme la possibilité d'un ajustement à l'aide d'une loi normale.
On vérifie graphiquement que l'on peut choisir la loi normale $\mathcal{N}$ (970 ; 300) car la droite de Henry correspondante réalise un bon ajustement de ce nuage.





$$F(t) = P[\,X \le t\,] = P\left[\,T \le \frac{t-970}{300}\,\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{300\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-970}{300}\right)^2}$$

t	500	700	900	1100	1300	1500	1700
100 F(t)	9,82	18,41	40,90	56,64	86,43	96,16	99,22
100 f(t)	0,0389	0,0886	0,1294	0,1210	0,0726	0,0279	0,0068

COMMENTAIRE DU DOCUMENT

Ce document a subi de nombreuses photocopies et n'est malheureusement pas d'une excellente qualité.
Il permet d'étudier la "capabilité" d'une machine après détermination d'indices. Il est donc utilisé en étude de qualité et de suivi de machine pour les différents réglages à effectuer.

On observe cinq zones :

- désignation de la pièce, du controleur.
- La caractéristique mesurée et les tolérances,
- l'échantillon des cinquantes mesures,
- leur report dans l'histogramme et la construction de la droite de Henry,
- les calculs statistiques pour l'analyse de la fabrication.

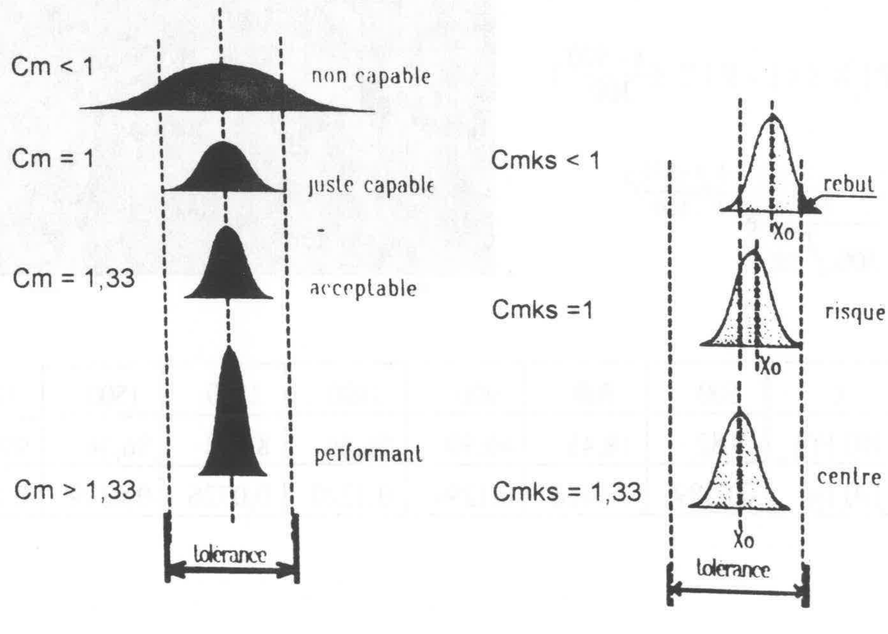
L'utilisation est donc très simple.

- Relever les mesures.
- Construire l'histogramme : une ligne pour un élément dans une classe.
- Le nombre de classes peut être déterminé empiriquement :
  - selon l'étendue observée,
  - selon l'incrémentation des mesures, ici 0,01 mm
  - ou par l'une des nombreuses formules : N= 1+ 10/3 log 50.
- Le calcul des fréquence cumulées est évidemment immédiat du fait de l'effectif de l'échantillon.
- Elles sont reportées sur le graphique à échelle gaussienne. La droite est ajustée "à vue".
- Une détermination de la moyenne et de l'écart-type peut être effectuée mais ceci nécessite des interpolations linéaires et des calculs plus longs que ceux conduits à partir des mesures directement saisies dans une calculatrice "scientifique".

Les indices obtenus :

- Il faut noter en préalable que l'écart-type σ est celui de l'échantillon : σ_{n-1} sur les machines à calculer
- Indice de dispersion Cm :
- Si Ts est la borne supérieure de la tolérance et Ti la borne inférieure, Cm est défini par $Cm=(Ts-Ti)/6\sigma$. la valeur minimale de 1,33 résulte du rapport $8\sigma/6\sigma$, qui signifie que la tolérance doit être supérieure à 8 écarts-type. en effet $[m-4\sigma;m+4\sigma]$ doit contenir 99,994 % de l'effectif. Si tel n'est pas le cas, on sait déjà que des pièces sont en dehors de la tolérance.
- Indices de centrage Cmks et Cmki :
- Il indiquent la position de la distribution dans l'intervalle de tolérance, et donc le sens des réglages à effectuer (voir les schémas). Leur calcul se fait sur l'intervalle [Ts-m] ou [m-Ti], la valeur de 1,33 venant du rapport $4\sigma/3\sigma$.

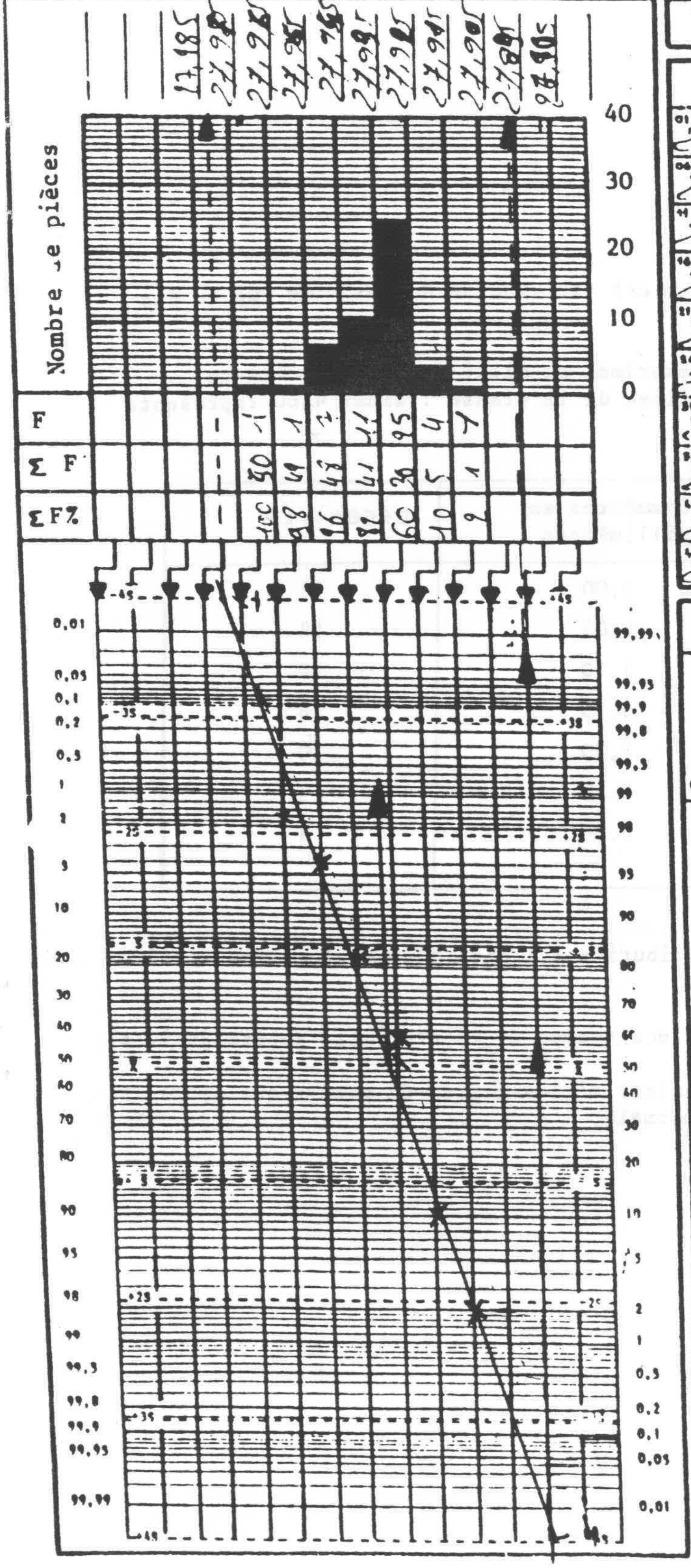
Une machine est donc capables si les deux indices sont convenables



CPIO	CAPABILITE MACHINE	Q 08 / A3

Date : 13.11.90	Etude faite par :
Désignation de la pièce : TUBE INTERIEUR	
N° CPIO : 500 72 9420 C	Fournisseur : N° FQ : 221
N° machine : 1 Acmé 1"	Outillage :
Matière	Demandée : Aluminium 2017 A T4 S^tt NFA 50411 et NFA 02000.
	Utilisée : 2017 A T4

HISTOGRAMME - DROITE DE HENRY



F	-	1	1	2	11	25	4	1
ΣF	-	50	49	48	41	30	5	1
ΣF%	-	100	98	96	82	60	10	2

Caractéristique mesurée ϕ 28	
Tolérance : $_{0}^{-0,2}$	Empreinte étudiée : 1

VALEURS OBSERVEES

01 27,945	02 27,935	03 27,945	04 27,915	05 27,935
06 27,930	07 27,945	08 27,945	09 27,955	10 27,935
11 27,945	12 27,935	13 27,935	14 27,935	15 27,935
16 27,935	17 27,975	18 27,935	19 27,955	20 27,935
21 27,935	22 27,925	23 27,955	24 27,945	25 27,935
26 27,935	27 27,935	28 27,945	29 27,935	30 27,93
31 27,935	32 27,945	33 27,925	34 27,935	35 27,955
36 27,945	37 27,935	38 27,945	39 27,935	40 27,935
41 27,915	42 27,935	43 27,965	44 27,915	45 27,945
46 27,935	47 27,955	48 27,935	49 27,915	50 27,955

ANALYSE STATISTIQUE

Paramètres de la distribution	Moyenne	Ecart-type
	$\bar{x} = \Sigma ni\ xi/n$ $\bar{x}$ = 27,940	$s = \sqrt{\Sigma(xi-\bar{x})^2/(n-1)}$ s = 0,0109
Tests de capabilité	**Indice de dispersion**	**Indice de centrage**
	Cm = (Ts-Ti)/6s	Cmki = $(\bar{x}$-Ti)/3s Cmki = 4,281
		Cmks = (Ts-$\bar{x}$)/3s Cmks = 1,834
	Cm = $\boxed{3,058}$ (≥ 1,33)	Cmk = $\boxed{1,834}$ (≥ 1,33)
Limites de dispersion	inférieure ($\bar{x}$ - 4s) : 27,896	
	supérieure ($\bar{x}$ + 4s) : 27,983	
% de hors tolérances	inférieur : 0%	
	supérieur : 0%	
Actions correctives	Recentrer $\bar{x}$ à : —	Réduire s à : —

MACHINE NON CAPABLE ☐ MACHINE CAPABLE ■

EXERCICE :

Un échantillon de 388 axes (cylindres d'acier) est examiné du point de vue du diamètre des cylindres.

La distribution suivante des diamètres, exprimés en millimètres, est obtenue. La valeur figurant le diamètre représente le milieu de la classe : ainsi 4,60 représente des mesures comprises entre 4,575 et 4,625

Diamètres en millimètres	effectifs	Diamètres en millimètres	Effectifs
4,60	1	5,00	58
4,65	3	5,05	58
4,70	4	5,10	40
4,75	12	5,15	26
4,80	20	5,20	10
4,85	36	5,25	1
4,90	54	5,30	1
4,95	64		

1°) Représenter graphiquement cette distribution à l'aide d'un histogramme et d'un graphique cumulatif.

2°) Déterminer la moyenne, la médiane, l'écart-type de l'intervalle interquartiles.

3°) A l'aide de différents procédés, examiner s'il y a lieu de penser que cette distribution se rapproche d'une distribution normale.

Diamètre en mm x_i	Effectifs n_i	Effectifs cumulés	$n_i . x_i$	$n_i . x_i^2$
4,60				
4,65				
4,70				
4,75				
4,80				
4,85				
4,90				
4,95				
5,00				
5,05				
5,10				
5,15				
5,20				
5,25				
5,30				

moyenne =

variance =

écart-type =

médiane (diamètre du axe) =

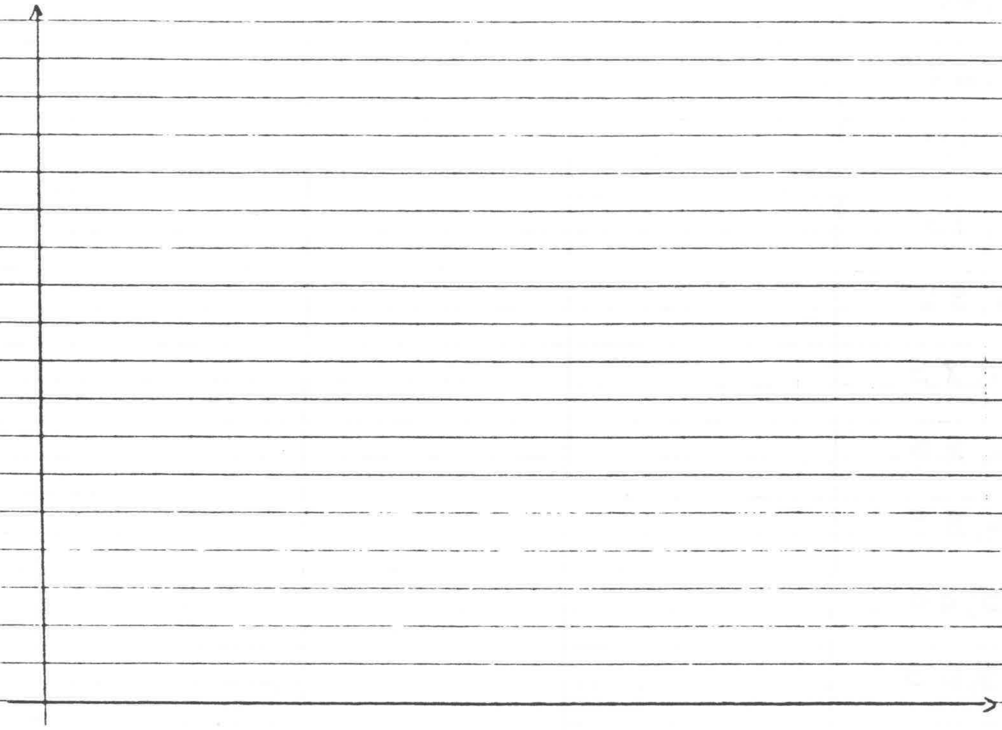
Q_1 (diamètre du axe) =

Q_3 (diamètre du axe) =

3/6

Intervalle interquartiles $= Q_3 - Q_1 =$

Histogramme



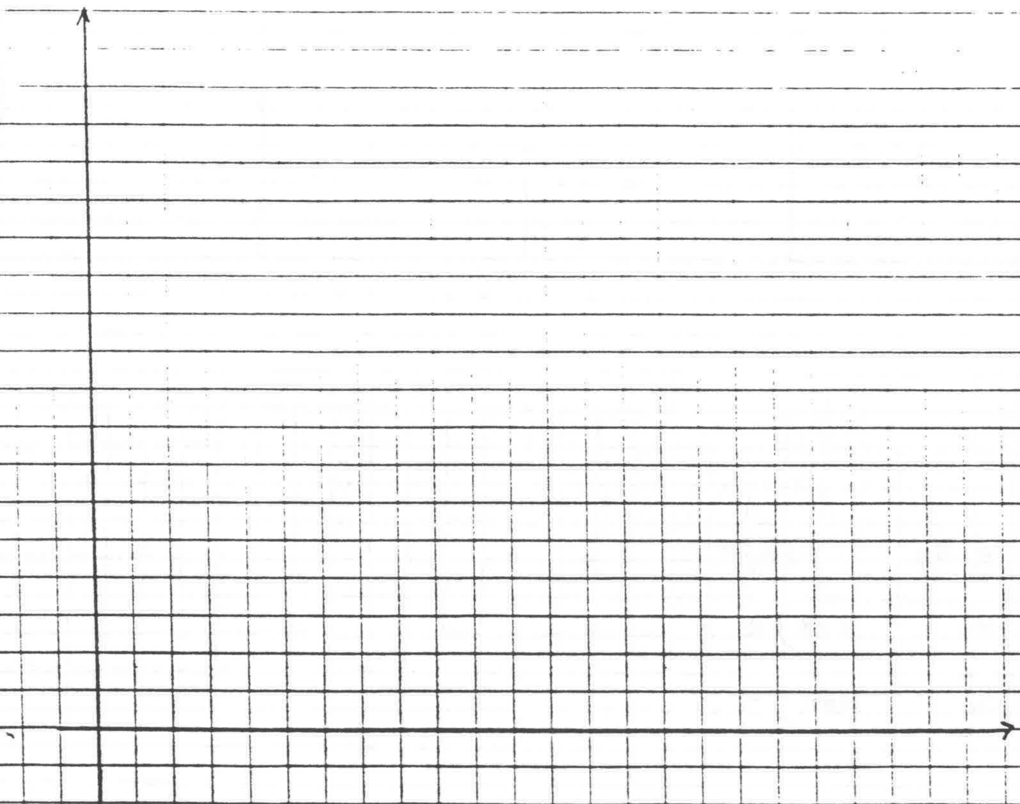
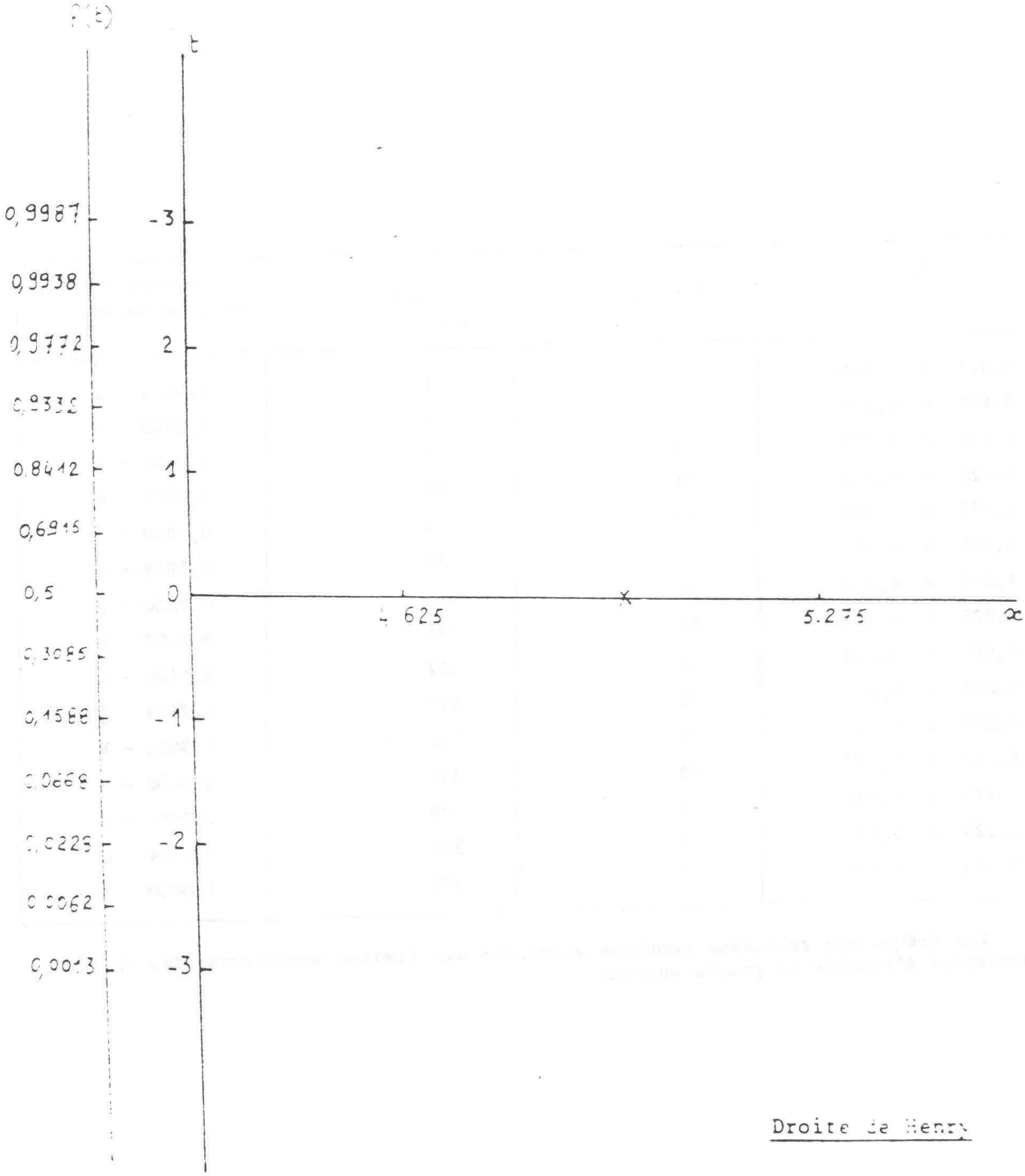


Diagramme cumulatif.

4/6

x_i	effectifs	effectifs cumulés	Fréquences cumulées en pourcentage
4,575 à 4,625	1	1	0,0025 - a
4,625 à 4,675	3	4	0,0103 - b
4,675 à 4,725	4	8	0,0206 - c
4,725 à 4,775	12	20	0,0515 - d
4,775 à 4,825	20	40	0,1030 - e
4,825 à 4,875	36	76	0,1958 - f
4,875 à 4,925	54	130	0,3350 - g
4,925 à 4,975	64	194	0,5000 - h
4,975 à 5,025	58	252	0,6494 - i
5,025 à 5,075	58	310	0,7989 - j
5,075 à 5,125	40	350	0,9020 - k
5,125 à 5,175	26	376	0,9690 - ℓ
5,175 à 5,225	10	386	0,9948 - m
5,225 à 5,275	1	387	0,9974 - n
5,275 à 5,325	1	388	1,0000

Les fréquences relatives cumulées associées aux limites supérieures des classes permettent d'établir le graphe suivant :



Droite de Henry

6/6

- On remarquera que :

1°) La moyenne arithmétique (4,973), la médiane (4,975 mm) et la classe modale (classe de 4,925 à 4,975) sont sensiblement égales.

Donc égalité des caractéristiques de tendance centrale.

2°) L'intervalle interquatiles $Q_3 - Q_1$ couvre 50 °/° des fréquences et est égal à $\frac{4}{3}$ de σ $\longrightarrow$ résultat caractéristique d'une distribution gaussienne.

3°) Déterminons les intervalles caractéristiques de la loi de Laplace-Gauss

$[x-\frac{2}{3}\sigma, x+\frac{2}{3}\sigma]$ soit 4,893 mm à 5,053 mm

fréquence relative correspondante : 0,49

(probabilité théorique gaussienne : 0,50)

$[x-\sigma, x+\sigma]$ soit 4,853 mm à 5,093 mm

fréquence relative correspondante : 0,68
(probabilité théorique gaussienne : 0,68)

$[x-2\sigma, x+2\sigma]$ soit 4,733 mm à 5,213 mm

fréquence relative correspondante : 0,96
(probabilité théorique gaussienne : 0,95)

$[x-3\sigma, x+3\sigma]$ soit 4,613 mm à 5,333 mm

fréquence relative correspondante : 0,998
(probabilité théorique gaussienne : 0,997)

Probabilités théoriques gaussiennes et fréquences relatives sont donc très voisines les unes des autres et parfois égales.

EXERCICE :

La cote d'une pièce fabriquée en série est exprimée en centièmes de mm.

On prélève 1000 pièces au hasard d'une fabrication.

On obtient les résultats suivants :

Classes en $\frac{1}{100}$ de mm	Nombre de pièces	Classes en $\frac{1}{100}$ de mm	Nombre de pièces
971 à 973	8	985 à 987	138
973 à 975	30	987 à 989	118
975 à 977	40	989 à 991	70
977 à 979	94	991 à 993	20
979 à 981	126	993 à 995	16
981 à 983	156	995 à 997	8
983 à 985	176		

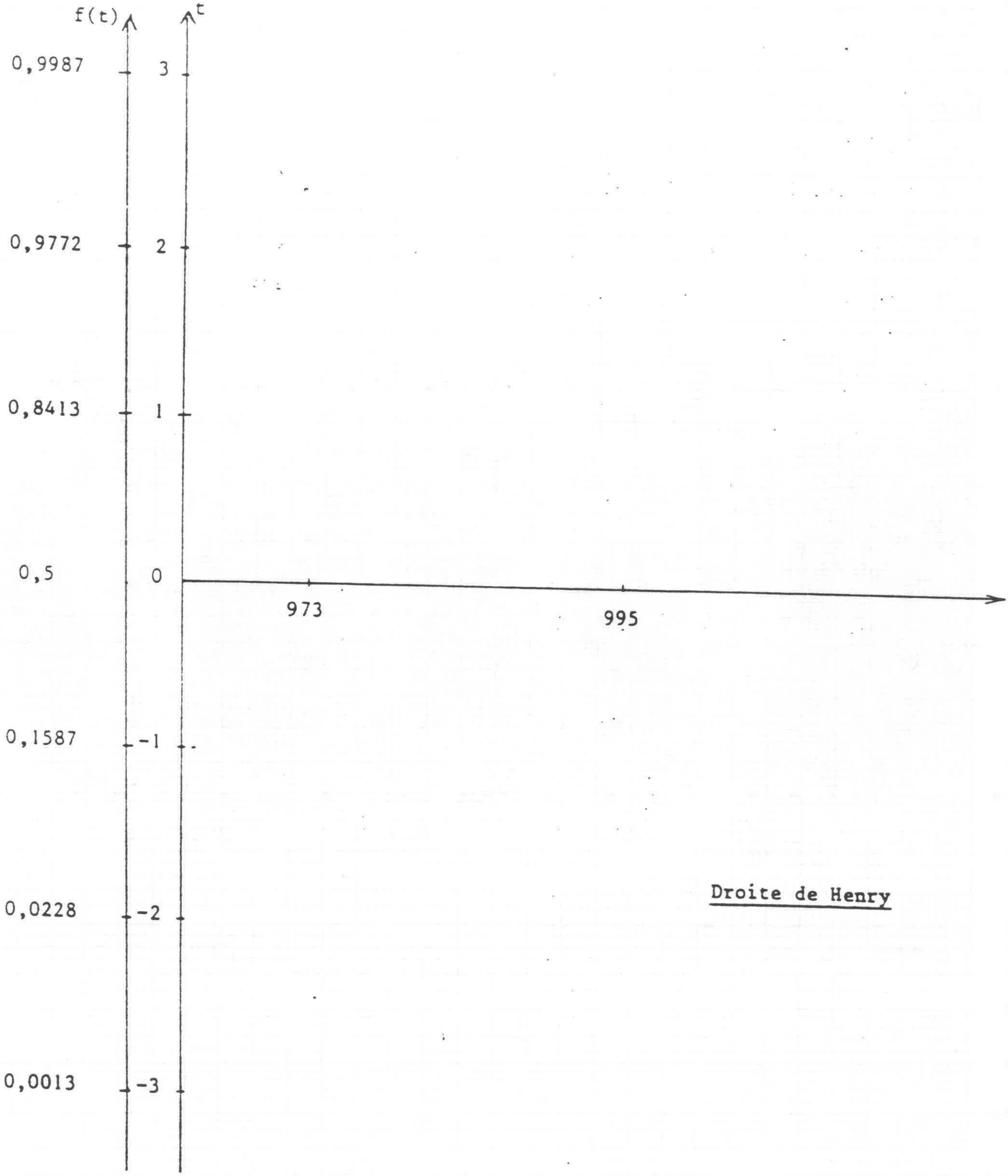
1°) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série

2°) Quels sont les pourcentages du nombre total d'observations situées dans les intervalles suivants :

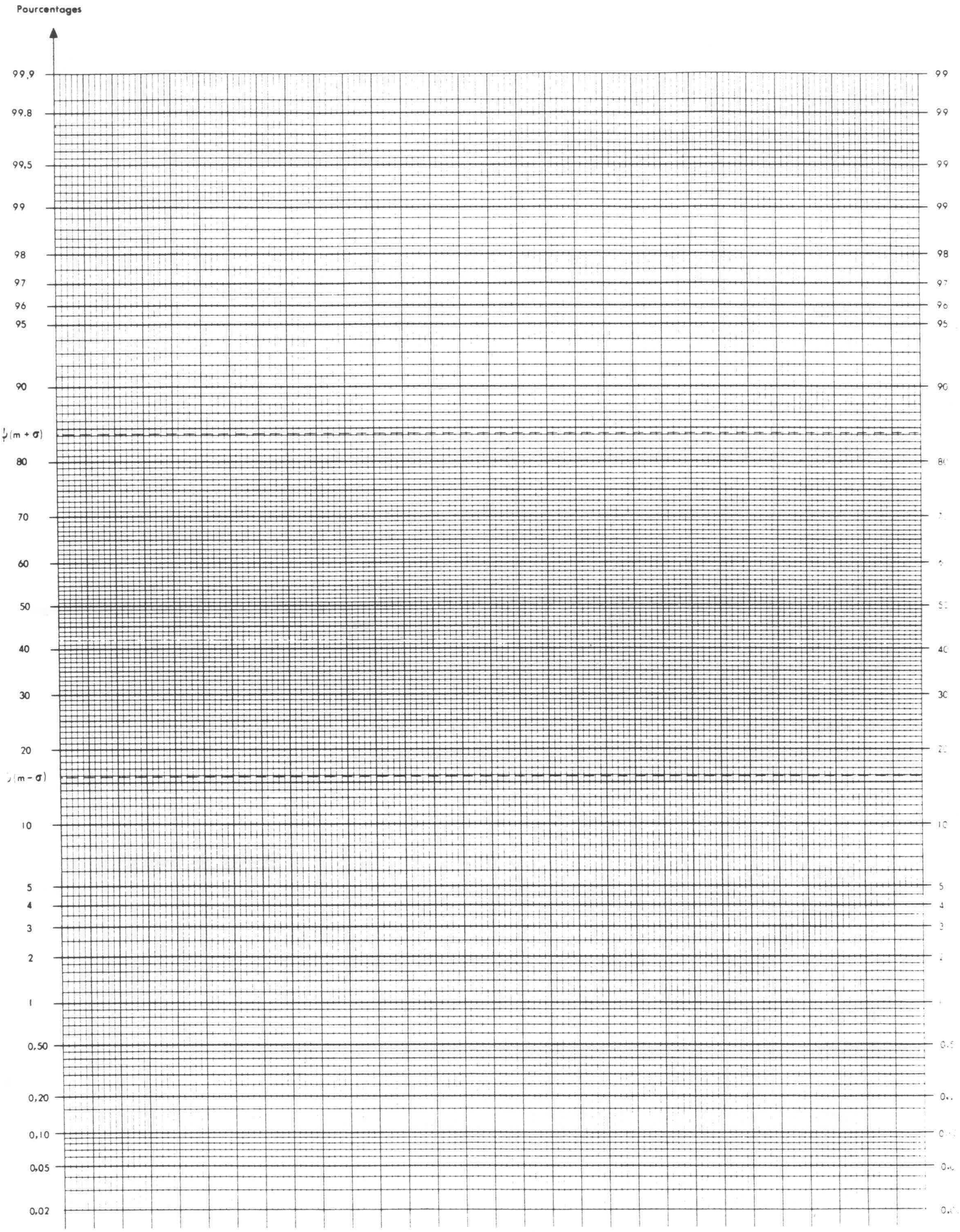
$(\bar{x} - \frac{2}{3}\sigma , \bar{x} + \frac{2}{3}\sigma)$, $(\bar{x} - \sigma , \bar{x} + \sigma)$ et $(\bar{x} - 2\sigma , \bar{x} + 2\sigma)$

On procèdera par interpolation linéaire dans les classes contenant les limites de ces intervalles.

3°) Tracer la droite de Henry. La série étudiée peut-elle être considérée comme se rapprochant d'une distribution gaussienne ?



Droite de Henry


Pourcentages
99,9
99.8
99,5
99
98
97
96
95
90
$\psi(m+\sigma)$
80
70
60
50
40
30
20
$\psi(m-\sigma)$
10
5
4
3
2
1
0,50
0,20
0,10
0,05
0,02