IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

Des éléments de géométrie dans l'espace

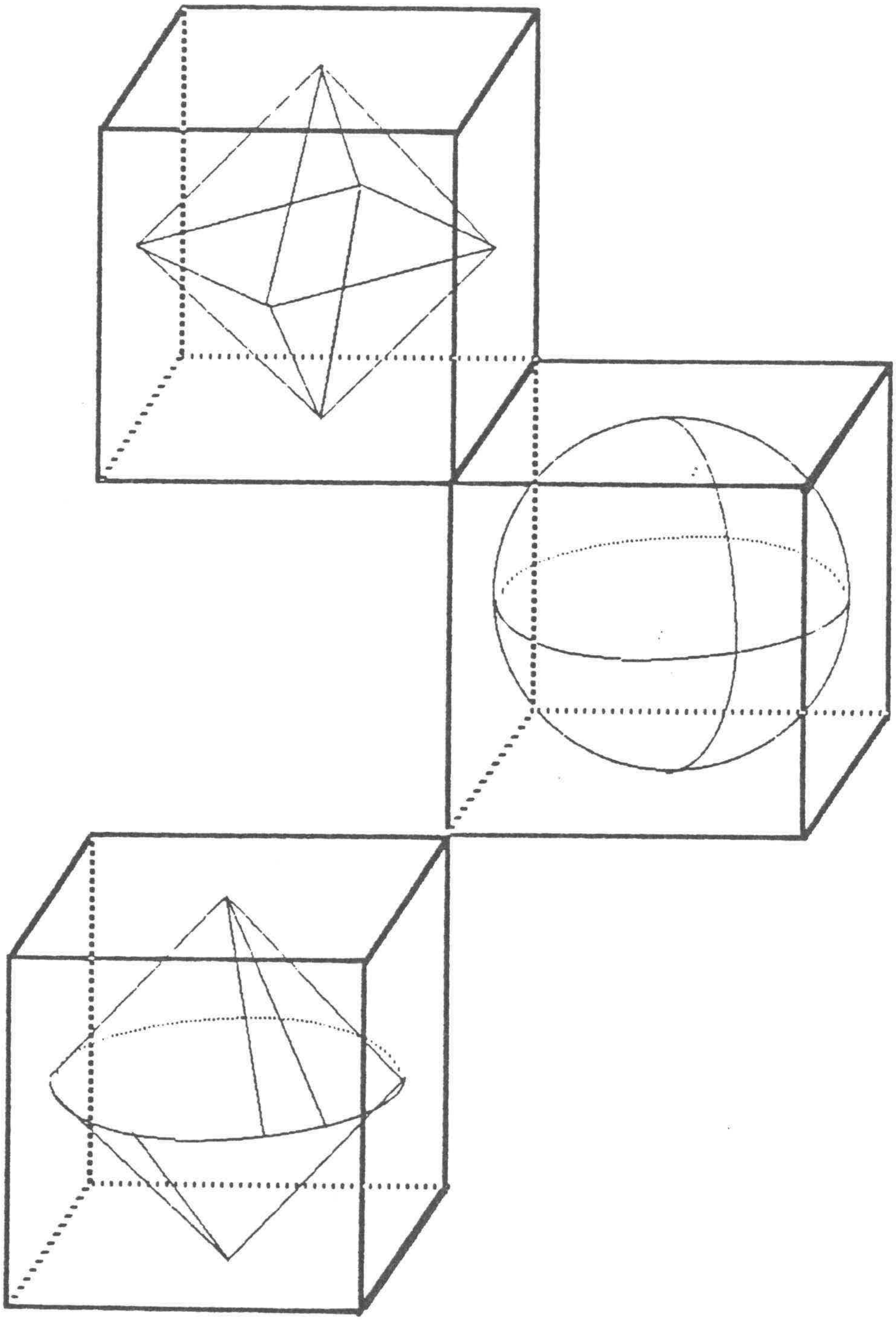
Pour la troisième et la seconde

Le Mans

Mai 1992

DES ELEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

POUR LA TROISIEME ET LA SECONDE



I.R.E.M. DES PAYS DE LA LOIRE

LE MANS

MAI 1992

Nous tenons à remercier :

- les stagiaires pour leurs remarques et leur collaboration,
- Gilles Itard pour sa relecture attentive et ses suggestions,
- Laurence Girard pour la frappe de cette brochure.

S O M M A I R E

- - - - - -

DES ELEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

POUR LA TROISIEME ET LA SECONDE

Michel DUPLESSIS
Daniel LEBON
I.R.E.M. PAYS DE LA LOIRE
Centre du Mans

Introduction

Cette brochure a pour origine un travail effectué au cours d'un stage I.R.E.M. des Pays de la Loire, Centre du Mans, intitulé : "Liaison 3ème - 2nde".

Le thème de la géométrie dans l'espace provient d'une demande des stagiaires.

Les nouveaux programmes des collèges et lycées consacrent une part importante à la géométrie dans l'espace. Mais cette part ne retrouve toujours pas son équivalent dans les progressions annuelles et ce pour diverses raisons que nous n'analyserons pas ici. Ce regret étant exprimé, on peut dégager des programmes les points essentiels suivants :

- apprendre à voir
- dessiner
- extraire une figure plane
- mettre en évidence les propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité (essentiellement en seconde).

Ce thème a été abordé pendant trois séances du stage qui en comportait huit. Le contenu en est forcément non exhaustif.

Une demande des stagiaires sur les règles de la perspective a été faite. Nous n'avons pas abordé le problème de la représentation des corps ronds.

CHAPITRE I : APPRENDRE A VOIR

Les aptitudes chez l'élève (et chez l'adulte) à percevoir des représentations de solides sont très variables et c'est pourquoi il nous paraît important de commencer le plus tôt possible à se familiariser avec celles-ci.

Contrairement à "l'a-priori" : "je vois/je ne vois pas", nous sommes persuadés qu'il peut y avoir progrès et ce, dès les classes de l'école primaire et probablement dès la maternelle.

Pour cela nous n'avons pas de recette "miracle" et nous pensons qu'une gamme d'exercices variés et multiples (à prédominance ludique) tout au long de la scolarité et intégrés à la plupart des différents chapitres des programmes doit permettre un apprentissage gradué et "sans douleur" et l'élaboration de nouveaux savoirs.

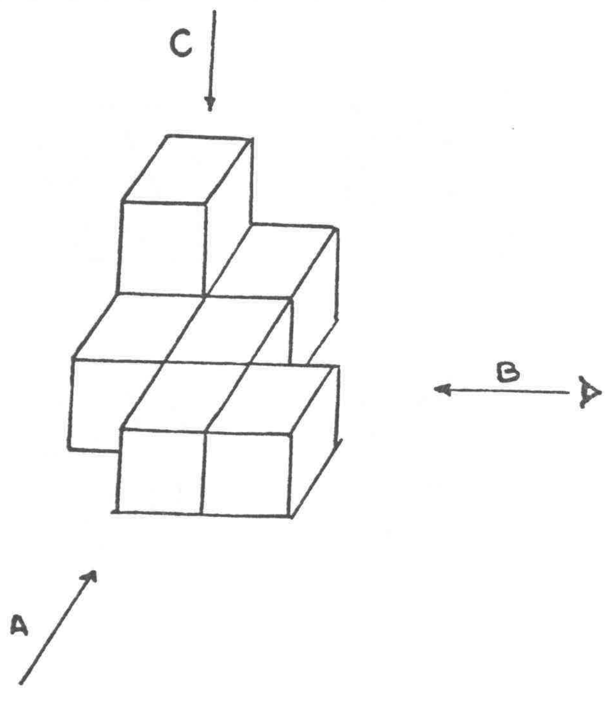
En voici quelques-uns proposés sans consignes préalables et avec le minimum de vocabulaire technique. Par exemple : vu de dessus, vu de dessous, etc... seront des termes utilisés dans ce premier chapitre.

Exemple I :

Dessinez ce que vous voyez si vous êtes placés successivement en A, en B et en C selon la direction indiquée par la flèche.

Commentaire : Les stagiaires adultes, en raison de leur passé et de leur pratique, n'ont en général pas répondu comme la plupart des élèves.

- Les élèves ont dessiné naturellement des carrés dans les plans perpendiculaires aux directions proposées alors que des collègues ont dessiné en perspective cavalière.
- Des remarques ont été faites sur la direction C "ambiguë" qui sous-entend déjà un codage au niveau des représentations.

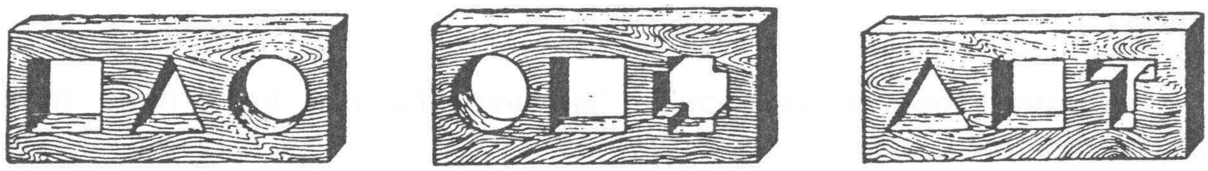


(Mais en quoi la direction C est-elle plus ambiguë que les directions A ou de B ?)

- - - - -

Exemple II : "Casse-têtes"

Dans chacun des trois cas, imaginez un solide dont les "contours" épousent exactement les trois trous suivants



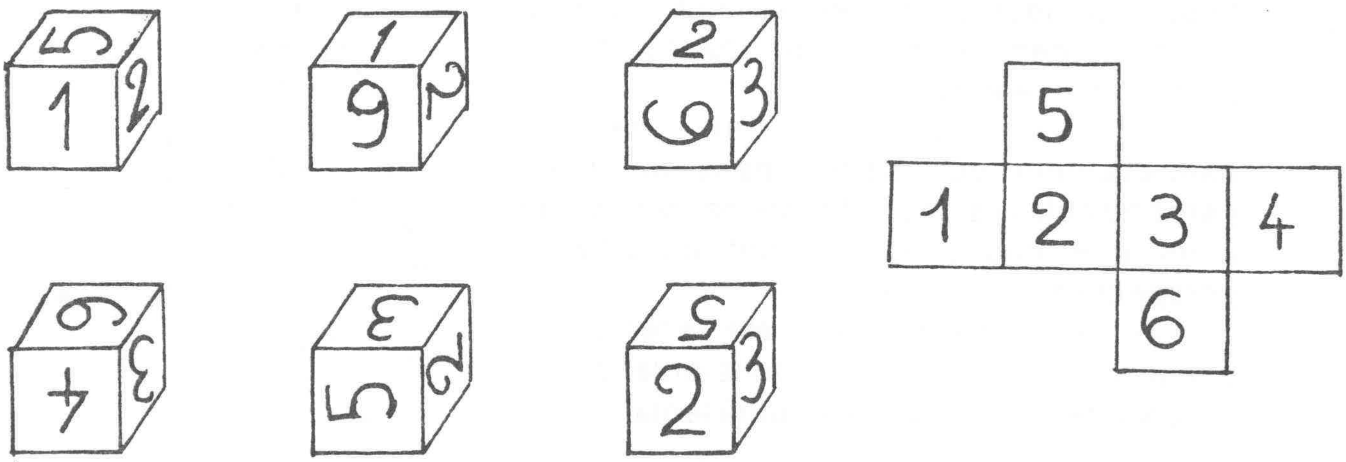
Commentaire : Les élèves éprouvent le besoin de fabriquer un tel solide (bouchon de liège ou pâte à modeler).

Solutions... dans le désordre

- - - - -

Exemple III : Un classique

De quels cubes avons-nous le patron ?



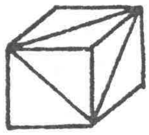
<u>Commentaires</u> : On s'était refusé la réalisation d'un tel patron. On a pu observer deux démarches :

- Pliages plus ou moins partiels exécutés mentalement ou dessinés en perspective
- Recherche de contradiction(s).

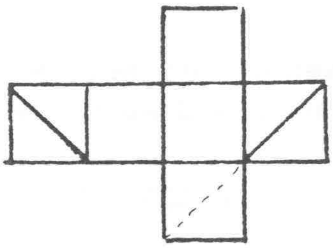
- - - - -

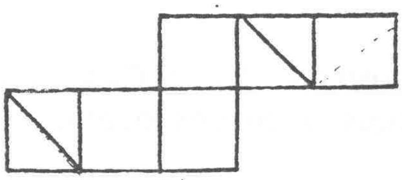
<u>Exemple IV</u> : Dans le même ordre d'idées, voici un exercice qui a paru plus difficile aux élèves que l'exercice précédent.

On a tracé une diagonale sur trois faces d'un cube en carton :



En développant ce cube, on peut obtenir ces deux patrons sur lesquels il manque une diagonale. Tracez cette diagonale.

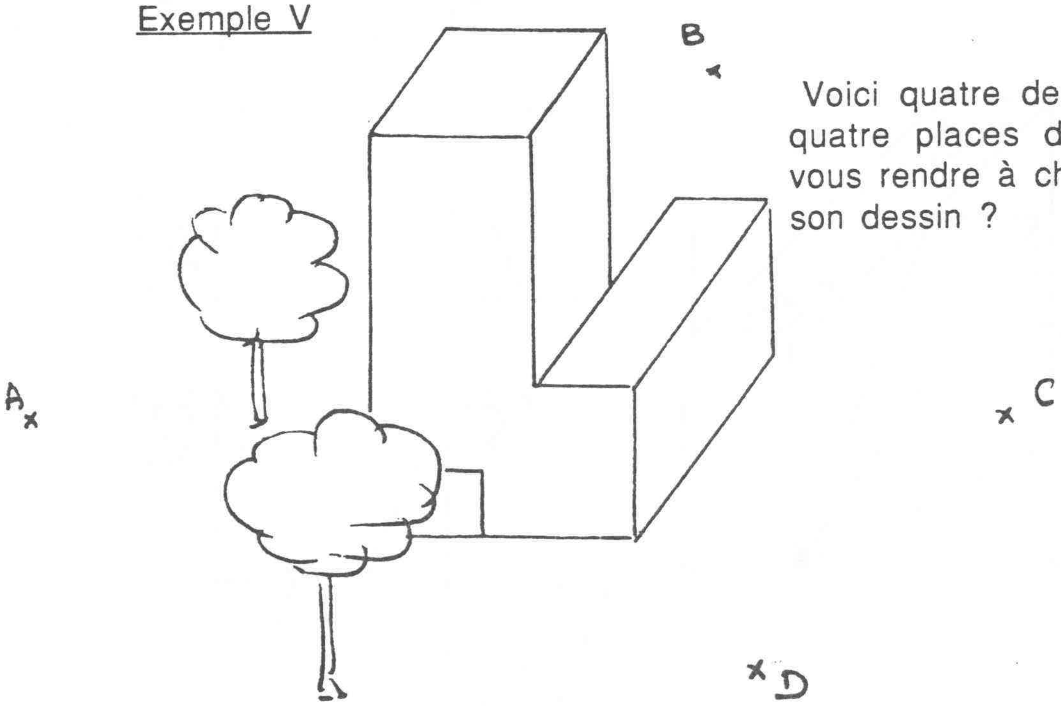


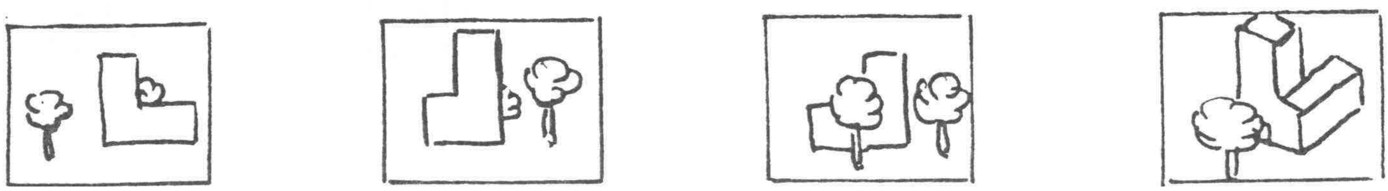


- - - - -

<u>Exemple V</u>

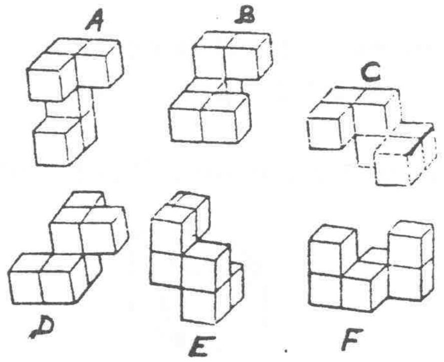
Voici quatre dessins réalisés de quatre places différentes. Sauriez-vous rendre à chaque dessinateur son dessin ?





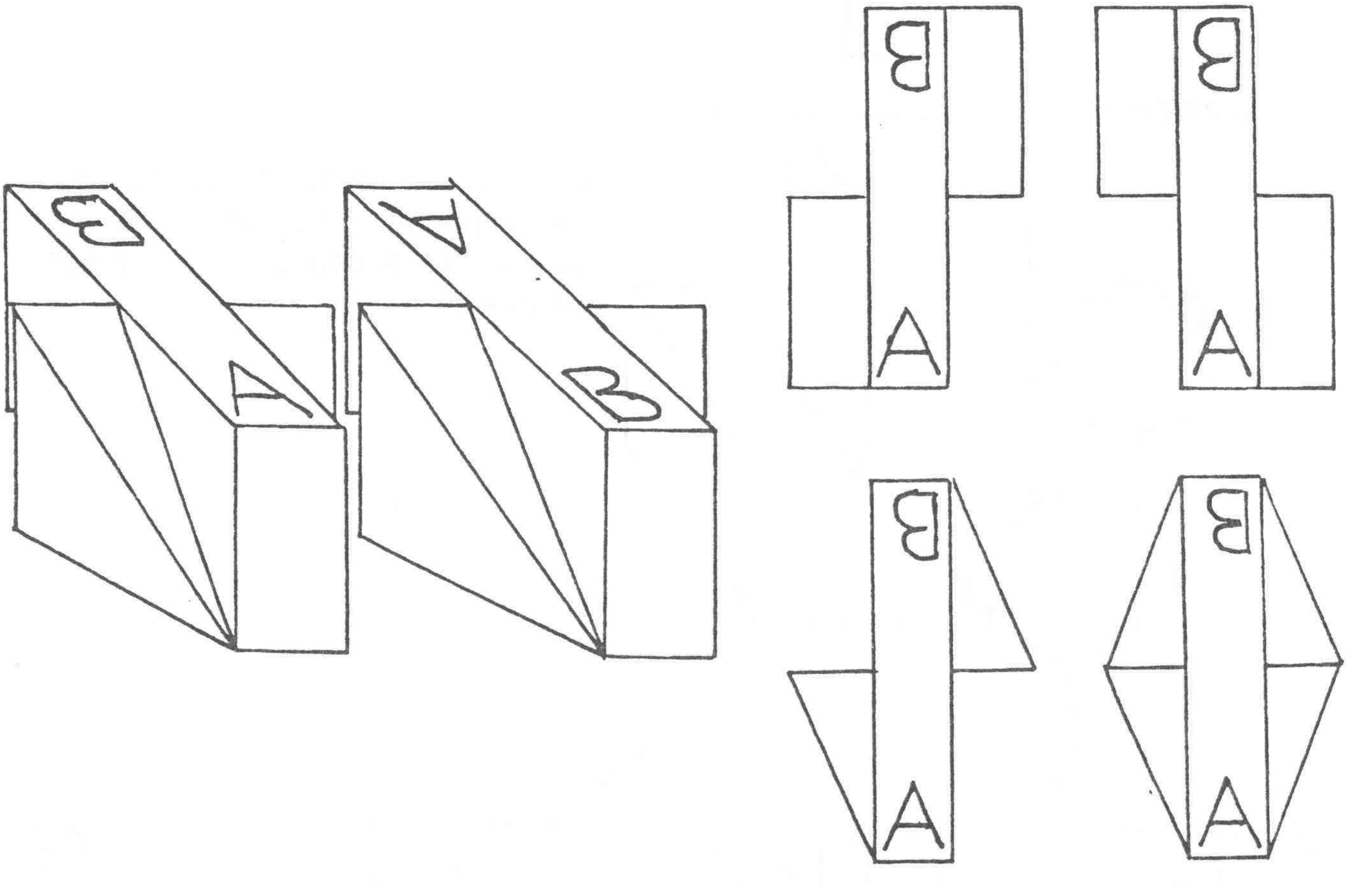
Commentaire : Exercice plaisant bien réussi. On peut utiliser quatre photographies d'un paysage réel.

Exemple VI : Ces solides sont tous constitués par six cubes. Regroupez ceux qui représentent le même assemblage.



Commentaire : Exercice difficile qui met en évidence les problèmes "d'orientation".

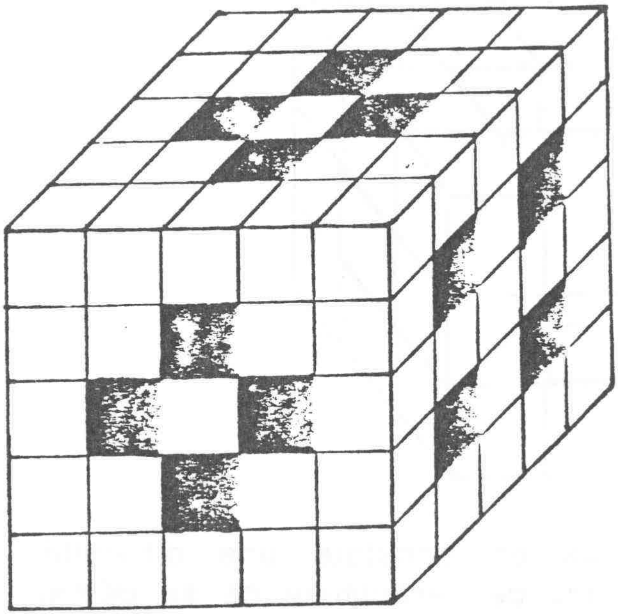
Exemple VII : Ces deux dessins représentent un seul et même solide, laquelle de ces quatre vues "de-dessus" correspond au solide.



A partir de l'exercice suivant, nous introduisons une difficulté calculatoire.

- - - - -

Exemple VIII : Voici un exercice qui a été proposé lors de la finale du rallye mathématique de la Sarthe en 1991 à des élèves de 6ème.



Ce gros cube dont vous ne pouvez voir que 3 faces, est constitué de petits cubes blancs et de petits cubes noirs.

Quand on voit un petit cube noir sur une face du gros cube, cela signfie que toute la rangée ou toute la colonne du gros cube est constituée de petits cubes noirs.

- Combien y-a-t-il de petits cubes noirs dans le gros cube ?
- On enlève "une couche" de petits cubes sur chacune des six faces du gros cube : on obtient ainsi un nouveau cube plus petit. Combien y-a-t-il de petits cubes dans ce nouveau cube ?
- Dessinez ce nouveau cube avec les couleurs qui apparaissent sur les trois faces visibles.

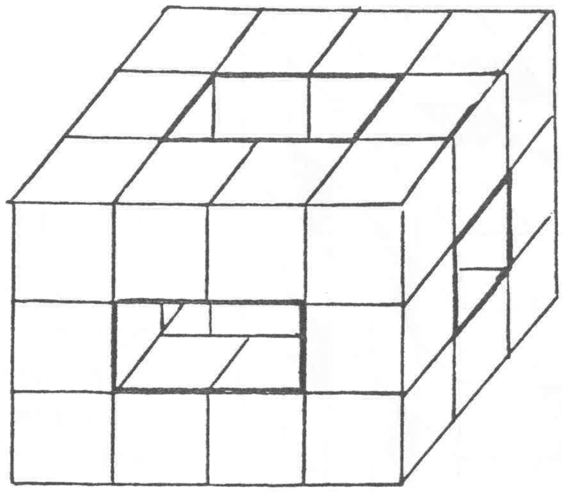
Commentaire : Les difficultés liées à cet exercice sont de plusieurs ordres.

On a pu distinguer :
- le problème de dénombrement au niveau des intersections des rangées ;
- des problèmes de compréhension de l'énoncé : les termes ou expressions "rangée, colonne, enlever une couche..." sont parfois mal assimilés par les collégiens ;
- ces mêmes termes ou expressions ont mis en évidence des problèmes de communication entre élèves :
  * le vocabulaire étant imprécis,
  * l'argumentation étant trop faible pour être convaincante.

- - - - -

<u>Exemple IX</u> : Voici un pavé droit percé de part en part sur ses six faces. On veut peindre <u>toutes</u> les faces de ce solide. Combien de carrés unités y-a-t-il à peindre ?

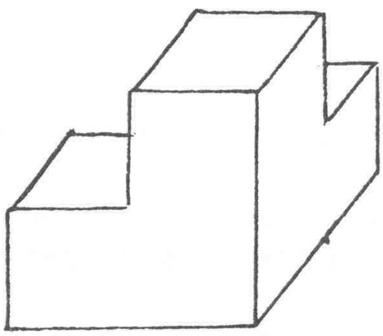
54 - 87 - 88 ....



<u>Commentaire</u> : Encore une fois on constate une difficulté de communication, chacun étant convaincu de l'exactitude de sa démarche. Comme le dit notre collègue Gilles Itard : "L'élève tient à son opinion et n'éprouve pas encore le besoin de SE porter la contradiction, donc de démontrer pour LUI".

- - - - -

<u>Exemple X</u> : En guise de transition avec le chapitre II, voici un exercice qui a permis de faire un point sur les connaissances des élèves relatives au dessin en perspective.



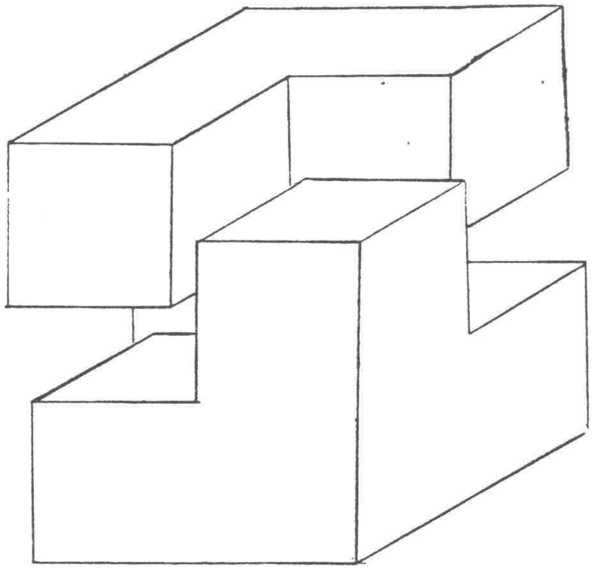
Ce solide peut-être décomposé en quatre cubes identiques.

1) Tracez en pointillés les arêtes ou parties d'arêtes non visibles sur le dessin.
2) On veut compléter ce solide pour obtenir un cube, dessinez la partie manquante.

<u>Commentaire</u> : On a constaté :
- Des oublis de certaines arêtes
- Le non-respect des parallèles.

Pour la partie manquante :

- Certains élèves on reconstitué un cube et ont effacé le solide initial.
- D'autres ont essayé de dessiner la partie manquante indépendamment du dessin initial.
- Quelques élèves ont signalé que la partie manquante était identique à la première.
- Enfin certains (en seconde) se sont lancés dans un dessin de type "éclaté" (avec des erreurs).



Conclusion : Cette série d'exercices a été globalement réussie grâce à son aspect ludique et nouveau. Mais le jeu est dépassé car l'élève est ici en situation de VRAIE recherche sans a priori et sans "passé anesthésiant".

Elle a permis à certains élèves habituellement réputés "faibles" de se valoriser.

On a perçu un vif intérêt porté à la correction et un réel désir de comprendre les erreurs commises.

Ces résultats nous confortent dans l'idée de multiplier ce type d'exercices tout au long de l'année.

Une phase de manipulations et de constructions de maquettes a été nécessaire pour aider certains élèves à "voir" et aussi, pour d'autres, à se convaincre et se sécuriser (ex. II - III - IV - VI et VIII).

Les difficultés au niveau du dessin ont révélé le besoin de fixer des règles précises.

DES CLASSIQUES EN GUISE DE TRANSITION

Objectifs :

- Eveiller la curiosité des élèves
- Susciter une analyse

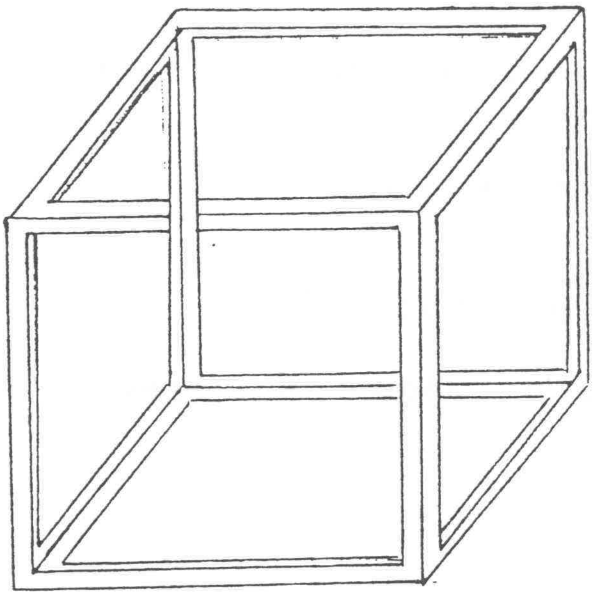


Fig. 1

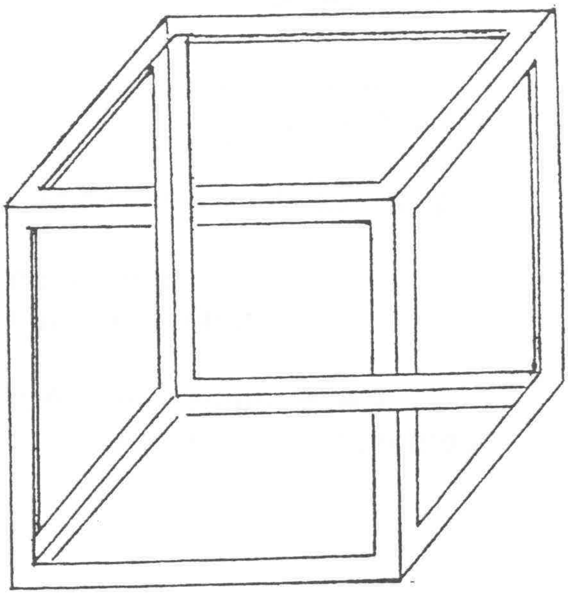


Fig. 2

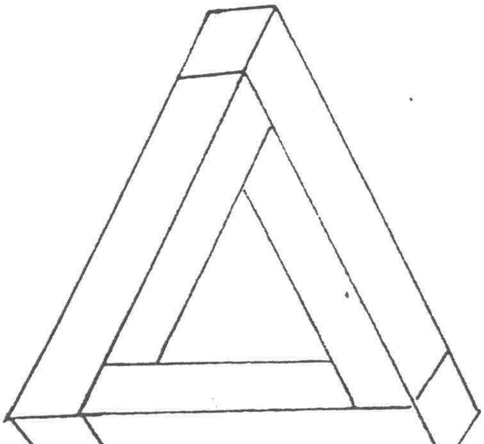


Fig. 4

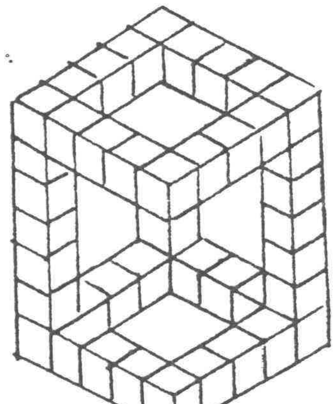


Fig. 5

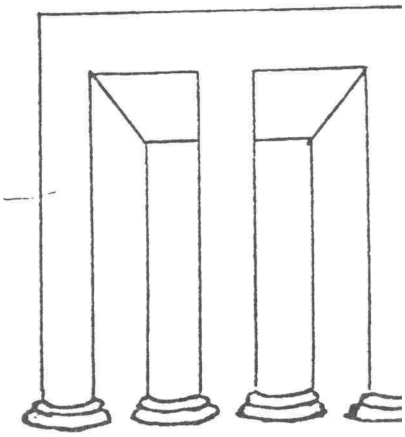


Fig. 3

Commentaires

Fig. 1 ; Fig. 2 ; Fig. 3 : Ces objets sont "impossibles"

Les élèves ont cherché d'eux-mêmes "les corrections" à apporter pour lever les impossibilités.

Fig. 4 : On peut montrer l'impossibilité d'un tel assemblage à l'aide de pièces de bois.

Cette configuration peut être reprise lors de l'étude de l'orthogonalité.

Fig. 5 : Le dessin est ambigu. Les élèves ont essayé de :

- localiser le problème
- redessiner la figure pour lever l'ambiguité.

Cette figure peut être refaite une fois précisées les règles de la perspective cavalière.

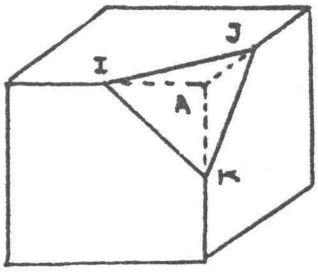
CHAPITRE II : CONSTRUIRE - DESSINER

Une phase de manipulation de modèles en trois dimensions répond à une demande des élèves et est, à notre avis, une étape obligatoire dans l'appréhension de l'espace.

1) Une première approche : les patrons

Ce domaine est en général bien connu et classique. Cet aspect important, à ne pas négliger, n'a pas été approfondi au cours de ce stage (voir la proposition d'activité en fin de chapitre III). Néanmoins nous avons proposé ces trois exercices.

Exemple 1 :



On enlève au cube de la figure ci-contre, le tétraèdre AIJK où I, J et K sont les milieux des arêtes issues du sommet A. Faire un patron du solide ainsi obtenu (on prendra pour longueur de l'arête du cube : 4 cm).

Exemple 2 :

Une boîte sans couvercle à la forme d'un pavé droit dont les dimensions sont les suivantes : base de longueur 8 cm et de largeur 6 cm ; hauteur 4 cm.

Dessiner un patron de cette boîte :

a - dans une feuille rectangulaire de 16 cm sur 14 cm ;
b - dans une feuille rectangulaire de 10 sur 26 cm.

Exemple 3 :

Découper dans une feuille de papier un parallélogramme ABCD tel que AB = 10 cm, AD = 5 cm et BAD = 120°.

Il s'agit de fabriquer avec ce parallélogramme le patron d'un tétraèdre (seuls des pliages sont autorisés). Comment procéder ?

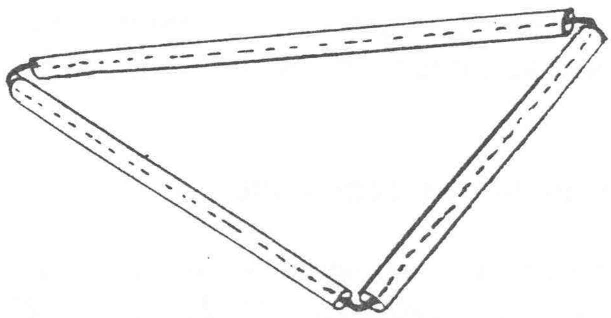
Il s'agit de fabriquer avec ce parallélogramme le patron d'un tétraèdre (seuls des pliages sont autorisés). Comment procéder ?

2) Une deuxième approche : les maquettes

a) On "referme" les patrons pour reconstituer le solide
b) Fabrication classique de solides en bois ou en polystyrène (penser aux ateliers de SES - CAT, LEP, etc... pour la réalisation).
- Utilisation de divers matériaux :
* arêtes :
  - baguettes de bois
  - cure-dents
  - pailles à boire
  - spaghetti
  - brochettes
  - baguettes rigides en papier roulé.

* jonctions des arêtes :
  - cubes de bois pré-troués
  - boules de bois pré-trouées
  - pâte à modeler
  - petits dés en liège (pratiques surtout avec les cure-dents)

* Une technique simple et efficace consiste à utiliser des corps de stylos à billes usagés (ou tout tube rigide) articulés grâce à un élastique étiré.



Remarque : On obtient une bonne stabilité pour des solides à faces triangulaires (idéal donc pour le tétraèdre).

Exploitation des maquettes

- On a une lecture directe pour aborder les notions de parallélisme, d'orthogonalité pour mettre en évidence des égalités de longueur, pour visualiser des intersections, etc...

- On peut aussi utiliser la notion d'échelle qui n'est souvent abordée que dans le plan pour la réalisation de solides (agrandissement, réductions, etc...).

Passage de la dimension 3 à la dimension 2

1) Ce que **nous** voyons

a) Une première manipulation :

Matériel : - Une maquette de cube (30 cm d'arête minimum) est posée sur une table.
- Une vitre est fixée verticalement.
- Un transparent de rétroprojecteur est fixé sur la vitre.

Dessin : - On intercale la vitre entre l'oeil et le cube.
- Ayant déterminé une bonne distance "oeil-vitre" on dessine sur le transparent les arêtes du cube.
- Le dessin visionné au rétroprojecteur permet une analyse des caractéristiques du tracé.

Il est intéressant de varier la position du dessinateur par rapport au cube et d'utiliser les différents résultats comme on a pu le faire à partir de l'exemple V du chapitre I.

b) Une seconde manipulation : on peut aussi visualiser l'ombre des arêtes de différents solides obtenue à l'aide d'une source lumineuse ponctuelle sur un tableau blanc (projecteur de diapositives par exemple).

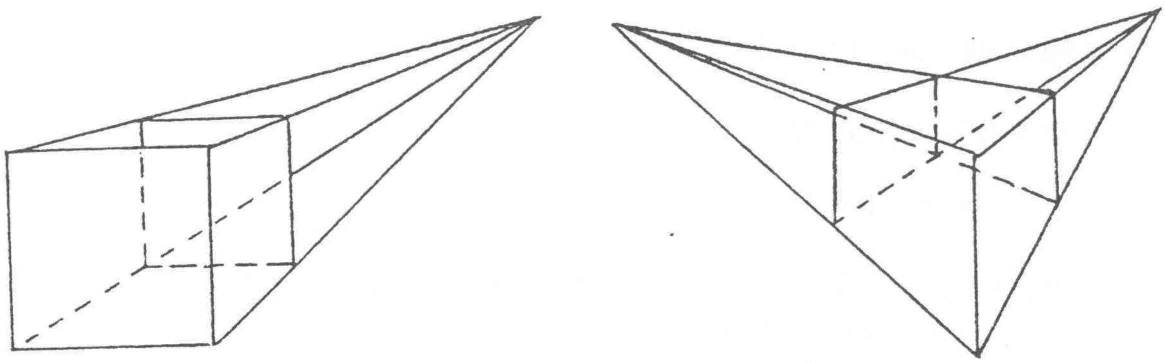
On dessine l'ombre des arêtes sur le tableau.

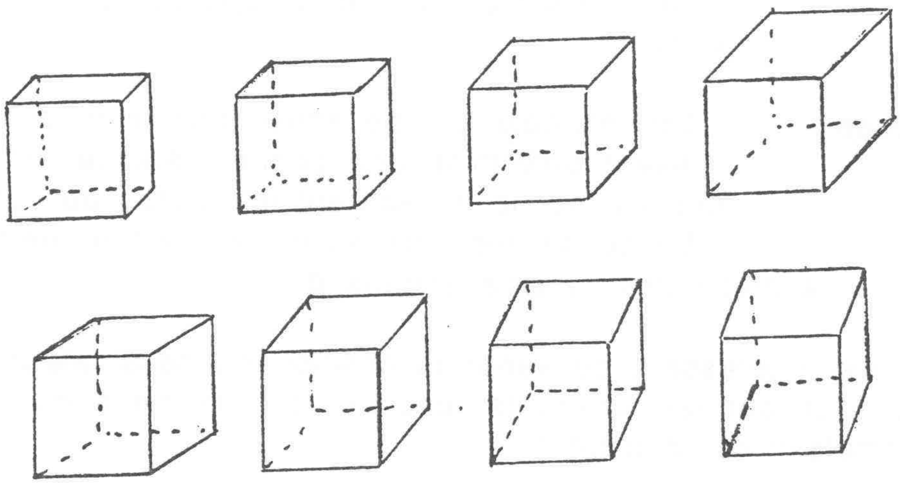
Commentaires

Ces deux approches ne donnent évidemment pas la représentation classique et "socialement reconnue" d'un cube telle qu'on la rencontre dans les manuels.

2) Perspectives

A la suite de ces activités, on a distribué la fiche suivante "un seul et même cube" qui fut prétexte à une discussion quant au choix judicieux de telle ou telle perspective.





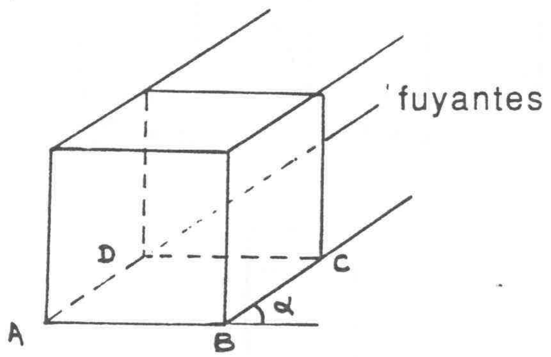
Les deux premiers dessins illustrent la perspective des peintres ou perspective centrale ou fuyante ou conique. Le terme de perspective "vraie", employé parfois, heurte l'historien des mathématiques. Les peintres du Quatrocento utilisaient l'expression perspective artificielle par opposition à la perspective naturelle des Anciens.

Nous ne sommes pas allés plus avant dans l'étude de cette perspective au cours du stage et nous n'avons pas abordé les problèmes de la géométrie projective.

Les dix derniers cubes ci-dessus nous ont permis d'aborder la perspective cavalière dont voici les principales règles :

- Lignes en traits pleins : "vues" par l'observateur
- Lignes en traits pointillés : "cachées" à la vue de l'observateur
- La perspective cavalière conserve l'alignement, le parallélisme, les rapports de distances entre points alignés
- Tout segment d'un plan frontal est représenté "en vraie grandeur" (éventuellement à une certaine échelle)
- Tout segment porté par une droite perpendiculaire à un plan frontal est représenté par un segment, en général, plus court, porté par une "oblique", appelée fuyante.

Exemple :



AB = a

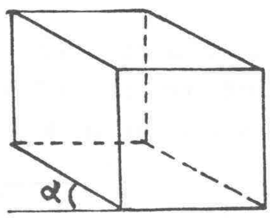
BC = k x a

- on fixe α

- on fixe k : $k = \frac{BC \text{ dessin}}{BC \text{ réel}}$

On note PC (α ; k)

<u>Remarque</u> : on laisse le choix de réaliser une perspective "à gauche"



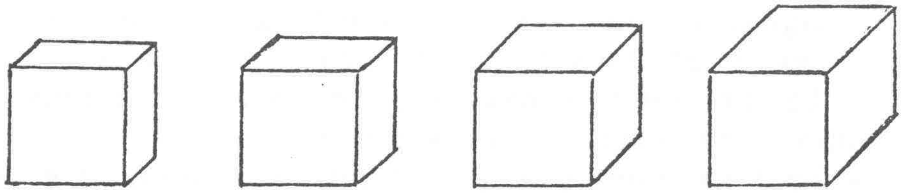
L'expression classique de "**vraie** grandeur" comporte des ambiguïtés

- problème d'échelles
- la "**vraie**" grandeur pour un élève pouvant être celle du dessin.

On lui préfère parfois l'expression : "sans déformation".

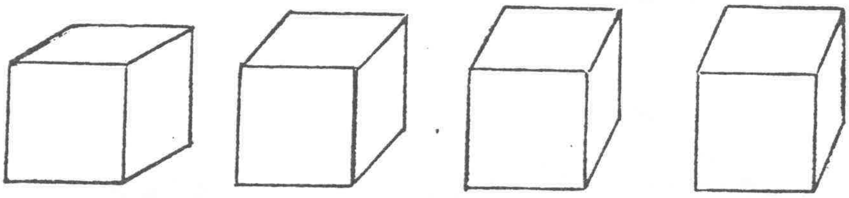
On trouve pour les exemples précédents

$\alpha = 45°$ {



k = 0,3 k = 0,5 k = 0,6 k = 0,85

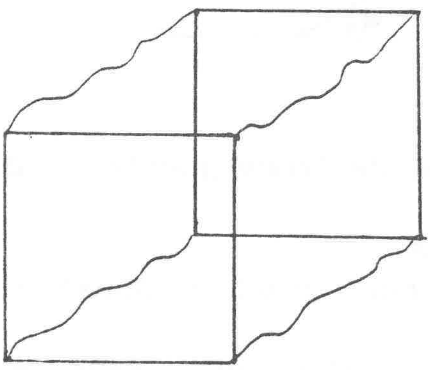
k = 0,65 {



$\alpha = 30°$ $\alpha = 50°$ $\alpha = 65°$ $\alpha = 70°$

($\alpha = 90°$; k = 0 $\alpha = 90°$ k = 0,35
($\alpha = 0°$; k = 0

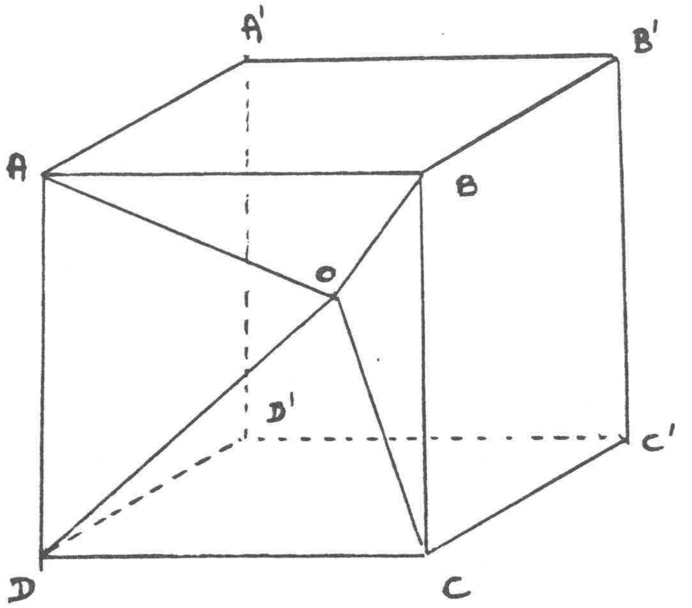
A cette occasion nous avons réalisé un montage articulé constitué de deux cadres carrés rigides reliés, comme sur le dessin, par des élastiques. On peut ainsi faire varier α et k à volonté en posant l'ensemble sur une table.



Remarque : La page suivante donne deux types de trames pouvant aider les élèves dans leurs premiers dessins en perspective cavalière.

3) Quelques exercices de dessin

Exemple 1



ABCDA'B'C'D' est un cube plein de centre O et dont l'arête mesure 5 cm. On lui enlève la pyramide ABCDO.

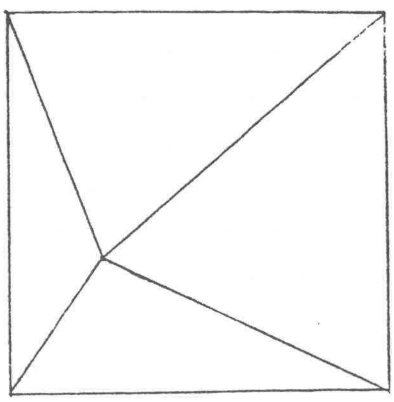
Dessinez cette pyramide en PC (30° ; 0,6)

1) - Sommet "vers l'avant"
2) - Sommet "vers l'arrière"
3) - Posée sur sa base carrée

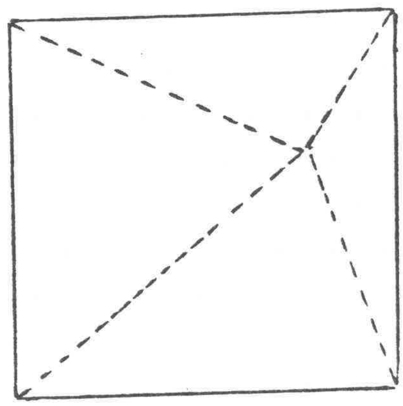
Remarque : On peut préciser le plan frontal (ABC).

Commentaire : Pour chaque question on peut traiter le problème en dessinant le cube complet puis en effaçant les parties superflues. Il serait souhaitable dans un deuxième temps de réaliser les dessins sans le cube initial.

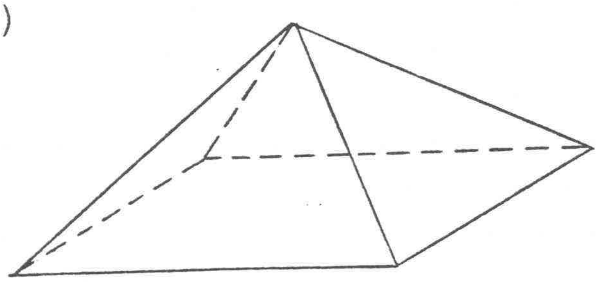
1)



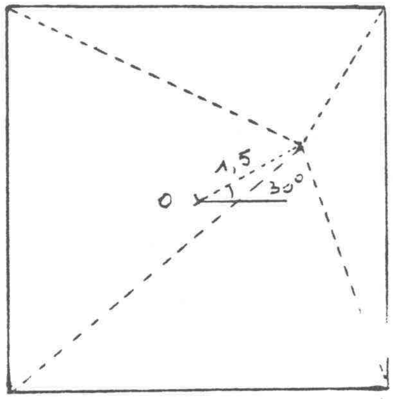
2)



3)

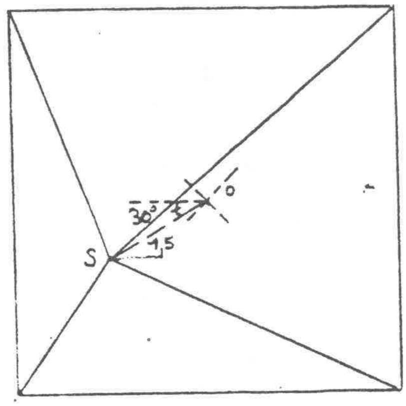


Calculs



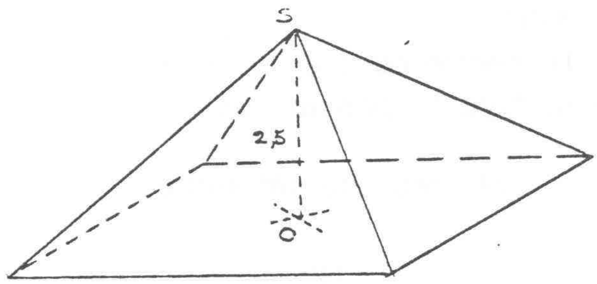
pointe derrière

h = 2,5.
Sur le dessin :
SO = 2,5 x 0,6
SO = 1,5



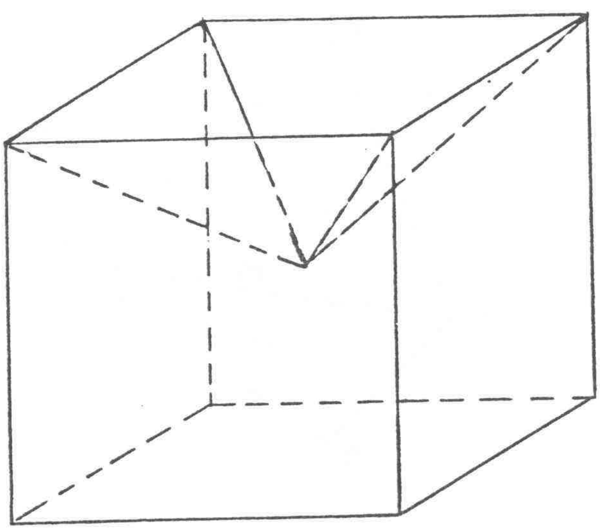
pointe devant

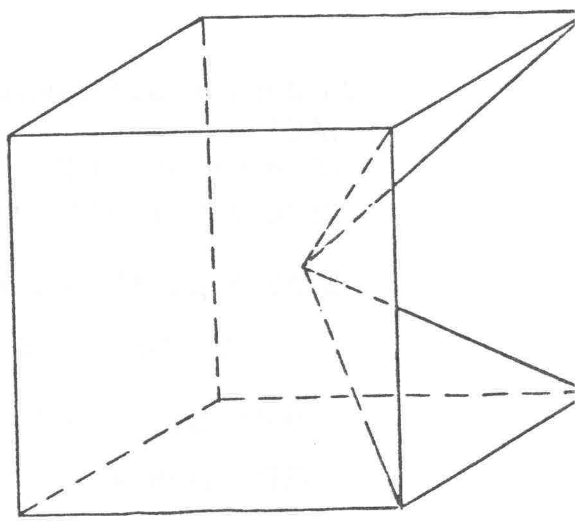
h = 2,5,
non déformé



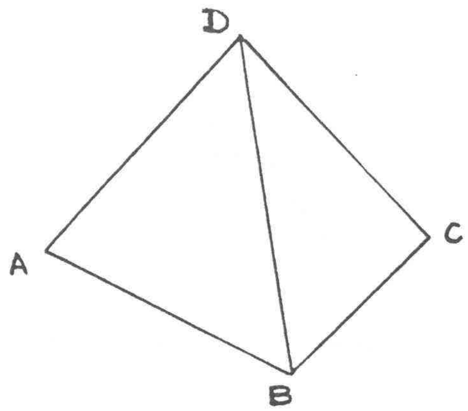
posée sur sa face carrée

Dessinez le cube "évidé" :
- trou au-dessus
- trou à droite



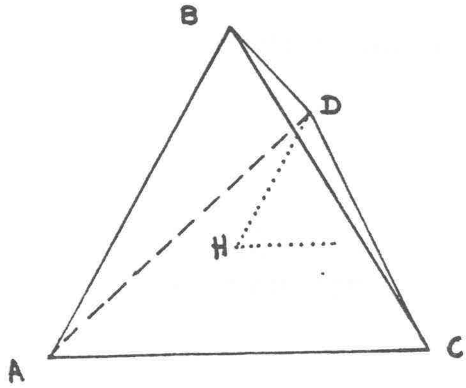


Exemple 2 : tiré de l'excellent livre de Gérard Audibert : La perspective cavalière (Publication de l'A.P.M.E.P. 1990 n° 75)



ABCD est un tétraèdre régulier dont l'arête mesure 5 cm.

1°) Dessinez-le avec (ABC) comme plan frontal, D vers l'arrière, en PC (60° ; 0,5)



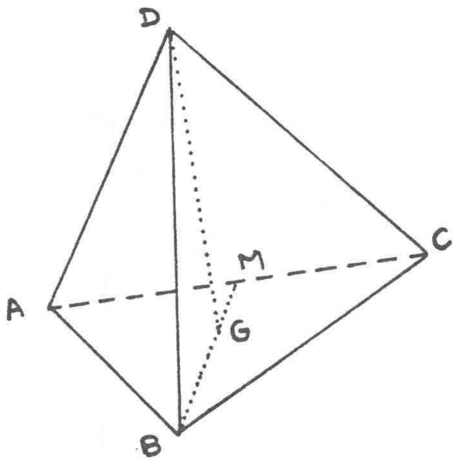
On dessine successivement :
- ABC
- H, centre de gravité de ABC
- la fuyante passant par H

Hauteur du tétraèdre

$$5\sqrt{\frac{2}{3}}$$

- D, sur la fuyante, défini par HD = $5\sqrt{\frac{2}{3}} \times 0{,}5$

2°) Dessinez-le posé sur sa base ABC. Plan frontal arrière : le plan contenant [AC], B devant.



On dessine successivement :
- [AC]
- M, milieu de [AC]
- la fuyante passant par M
- B défini par MB = $5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0{,}5$
- G, centre de gravité de ABC
- D défini par GD = $5\sqrt{\frac{2}{3}}$,

  (GD) "verticale"

Remarque : Nous pensons que de tels exercices de dessin peuvent être l'objet de questions dans un devoir de contrôle.

CHAPITRE III : TROUVER LA BONNE COUPE

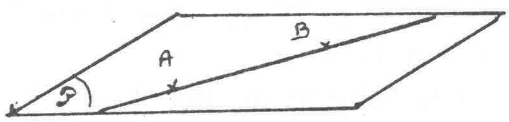
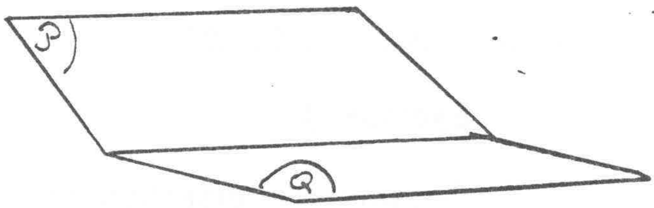
De nombreux exercices de géométrie dans l'espace rencontrés en 3ème et en 2nde peuvent être ramenés à des problèmes de géométrie plane par le choix d'un plan de coupe judicieux.

A tous les niveaux un support matériel ne peut être que bénéfique et l'utilisation d'un rétroprojecteur en superposant des transparents diversement colorés aide à une bonne vision du (ou des) plan(s) de coupe.

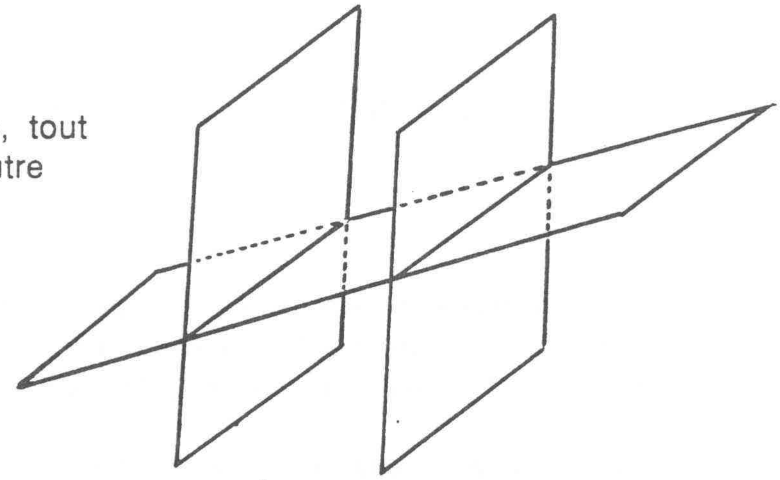
A. Exemples de dessins de sections planes

1) Rappels de théorèmes

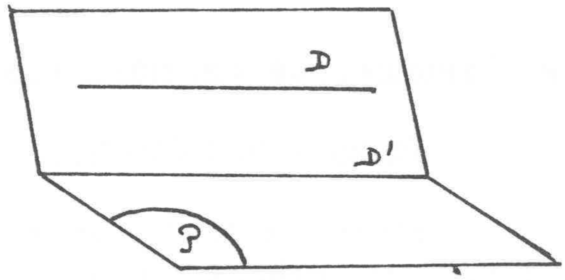
Il est bien entendu que les théorèmes de la géométrie dans l'espace ne sont pas exigibles au collège. Néanmoins, les outils utilisés ci-après ont déjà été rencontrés lors d'activités dans le 1er cycle.

Enoncé	illustration avec les conventions de dessin habituelles
Si A et B sont deux points distincts d'un plan P alors (AB) est incluse dans P	
P et Q sont deux plans non parallèles de l'espace, leur intersection est une droite	

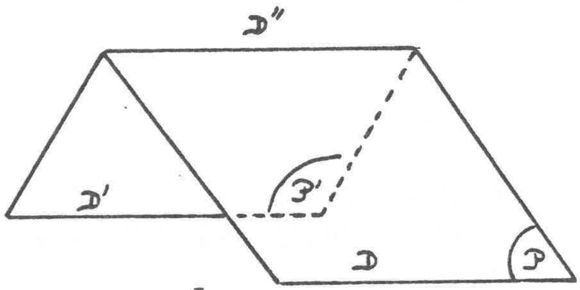
Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles



Si une droite D est parallèle à un plan P, tout plan contenant D et sécant avec P le coupe selon une droite D' parallèle à D.



Théorème du "toit" : soient D et D' deux droites parallèles.
Si un plan P contenant D coupe un plan P' contenant D', alors l'intersection de P et P' est une droite D" parallèle à D et D'
(D" est le faîtage du toit, D et D' symbolisent les gouttières)

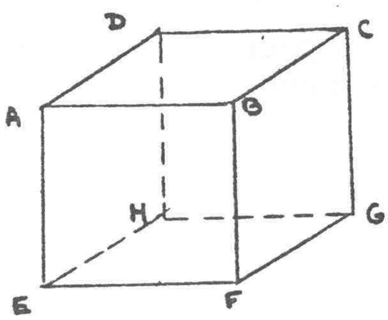


-----

2) Des sections planes

Exemple 1

Dessiner l'intersection des plans (DBE) et (CDHG).

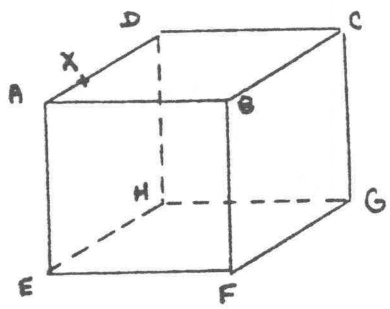


Les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles donc (DBE) les coupe selon deux droites parallèles.

La droite cherchée est donc la parallèle à (BE) passant par D (point de l'intersection).

Exemple 2

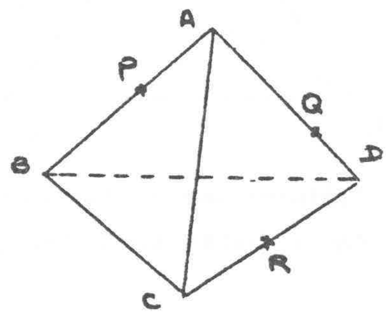
Dessiner les contours de l'intersection du cube avec le plan parallèle à (DBE) passant par X.



Si deux plans sont parallèles (ici (DBE) et le plan cherché) tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Exemple 3

Dessiner les contours de l'intersection du plan (PQR) et du tétraèdre ABCD.
P, Q et R étant fixés comme sur le dessin

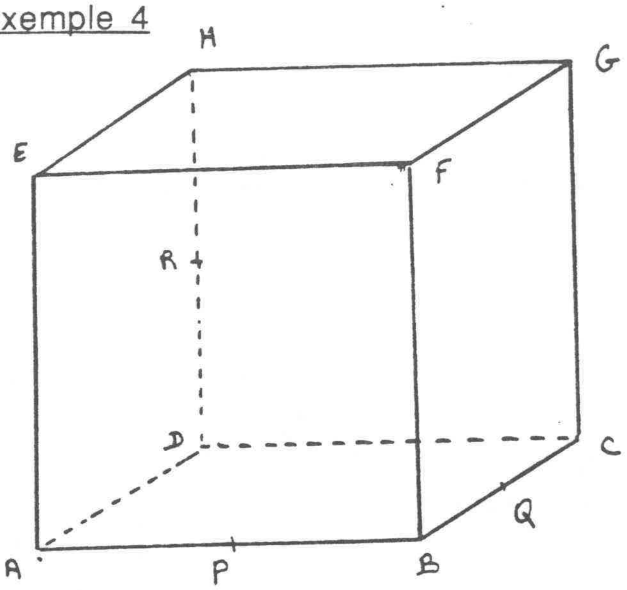


(PQ) et (BD) sont coplanaires et non parallèles, elles sont sécantes en T.

$$\left.\begin{array}{l} T \in (PQ) \cap (BCD) \\ R \in (PQR) \cap (BCD) \end{array}\right\} \Longrightarrow (TR) = (PQR) \cap (BCD)$$

$\{S\} = (TR) \cap (BC)$; $S \in (PQR) \cap (ABC)$
or $P \in (PQR) \cap (ABC)$
donc $(PQR) \cap (ABC) = (PS)$

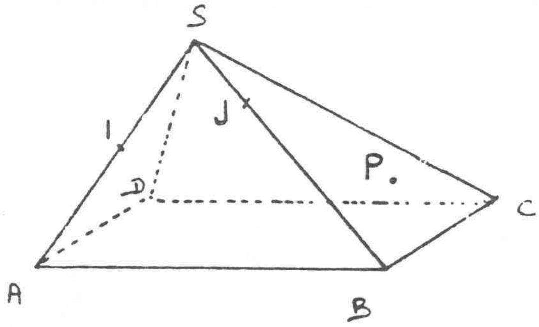
Exemple 4



Tracez la section du cube par le plan (PRQ)

P, Q et R sont milieux d'arêtes.

Exemple 5

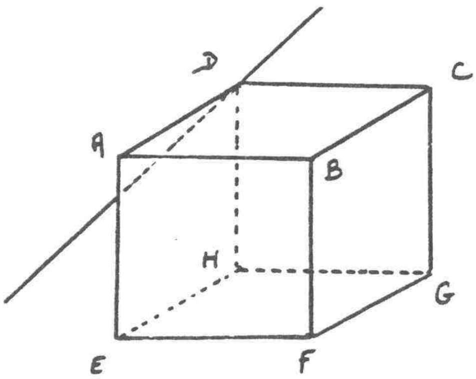


ABCDS est une pyramide
ABCD est un parallélogramme
$I \in]SA[$
$J \in]SB[$

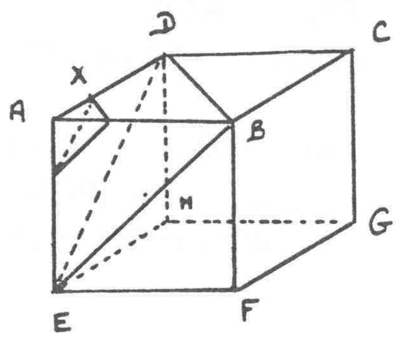
P est un point intérieur strictement au triangle SDC.

Déterminez l'intersection du plan (IJP) avec chacune des faces latérales de la pyramide ainsi qu'avec le plan (ABCD).

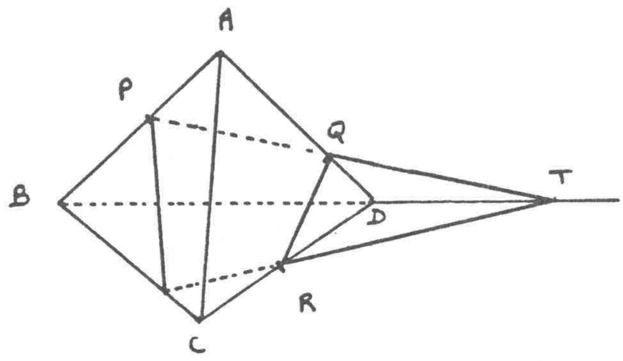
Corrigés :



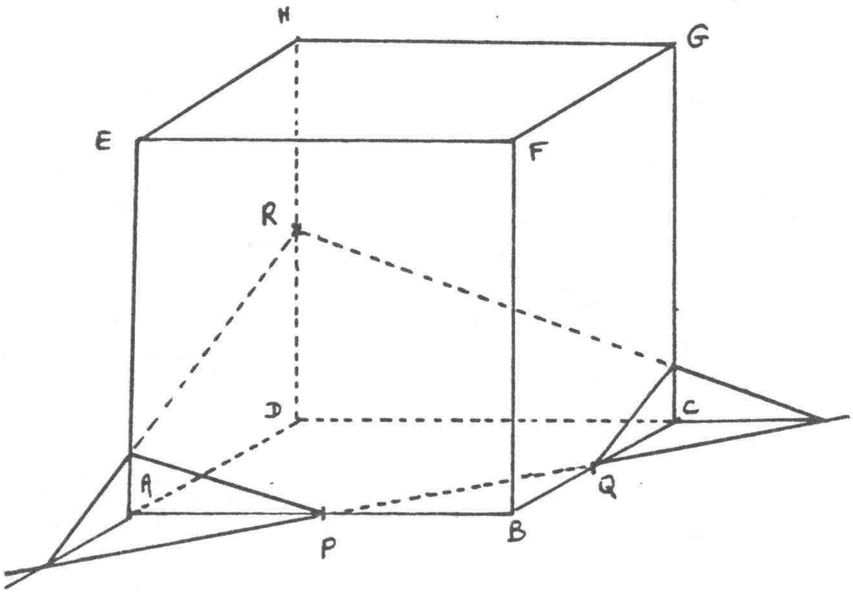
Exemple 1



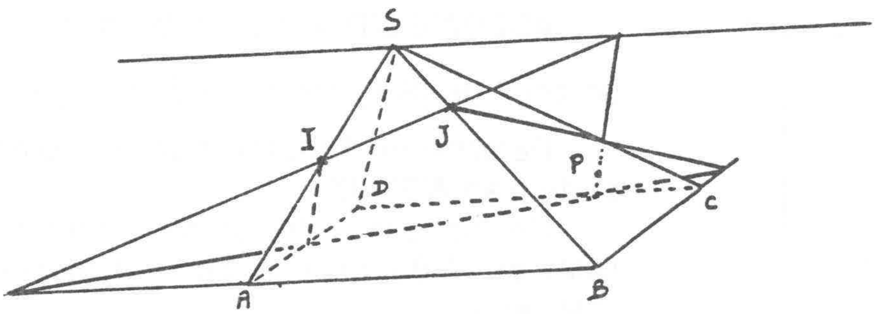
Exemple 2



Exemple 3



Exemple 4

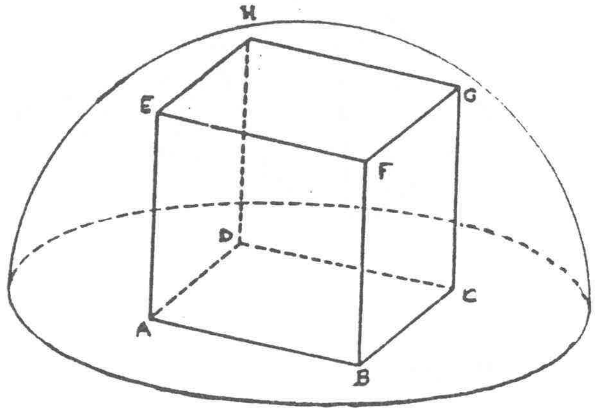


Exemple 5

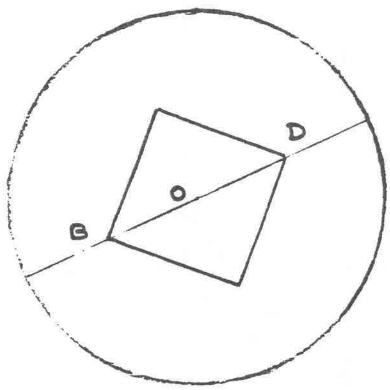
B. Calculer - Démontrer

Exemple 1 "Coincé dans la bulle"

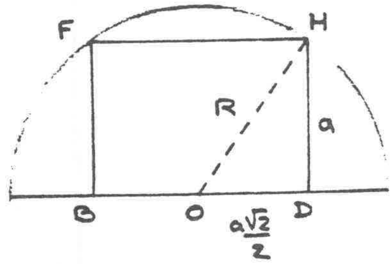
Calculer la longueur de l'arête du cube en fonction du rayon R de la demi-sphère.
(A, B, C et D sont dans le plan équatorial ; E, F, G et H appartiennent à la demi-sphère (ABCDEFGH est un cube)



Vue de dessus



coupe selon le plan BDHF :

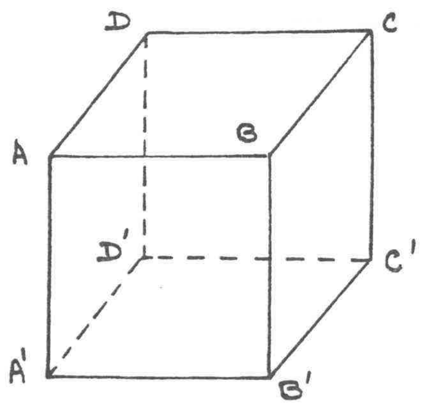


$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \; ; \; R = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$a = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

- - - - -

Exemple 2 Thalès et espace



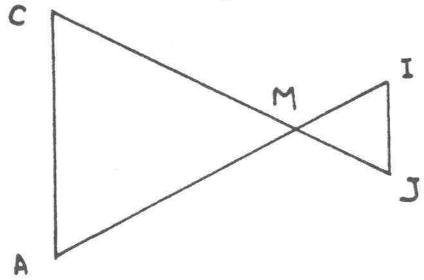
ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a. M est un point de [BB'] défini par $B'M = \frac{1}{3} B'B$.

Déterminer l'intersection du plan (AMC) et du plan A'B'C'D'.

On appelle I le point d'intersection de (AM) et (A'B') et J le point d'intersection de (CM) et (B'C').

On suppose a = 6. Calculer IJ.

Une clé consiste à dessiner la figure suivante dans le plan (AMC) :



- - - - -

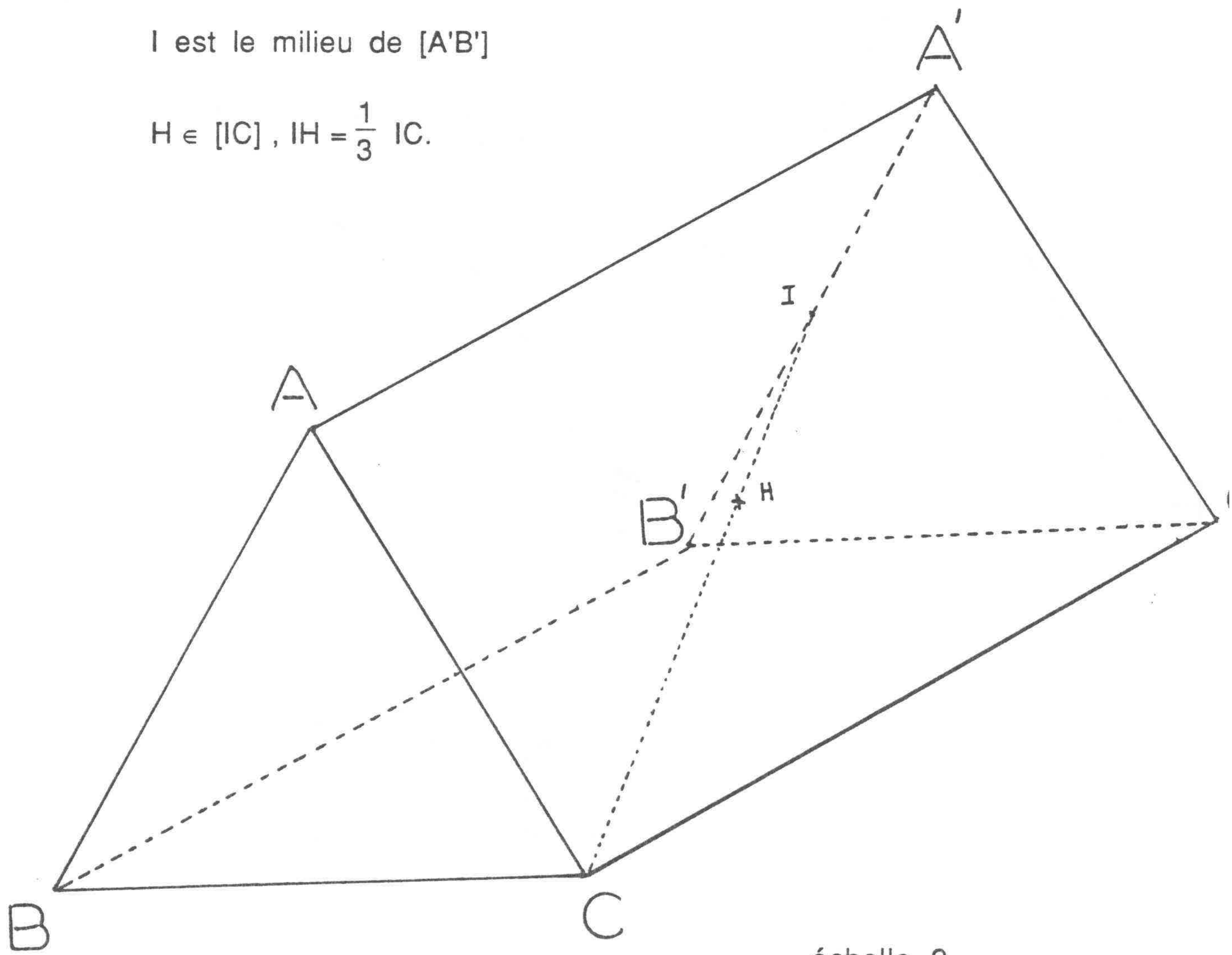
Exemple 3 : Dans un prisme

ABCA'B'C' est un prisme droit, ABC est un triangle équilatéral.

AB = 4 ; AA' = 10 en cm.

I est le milieu de [A'B']

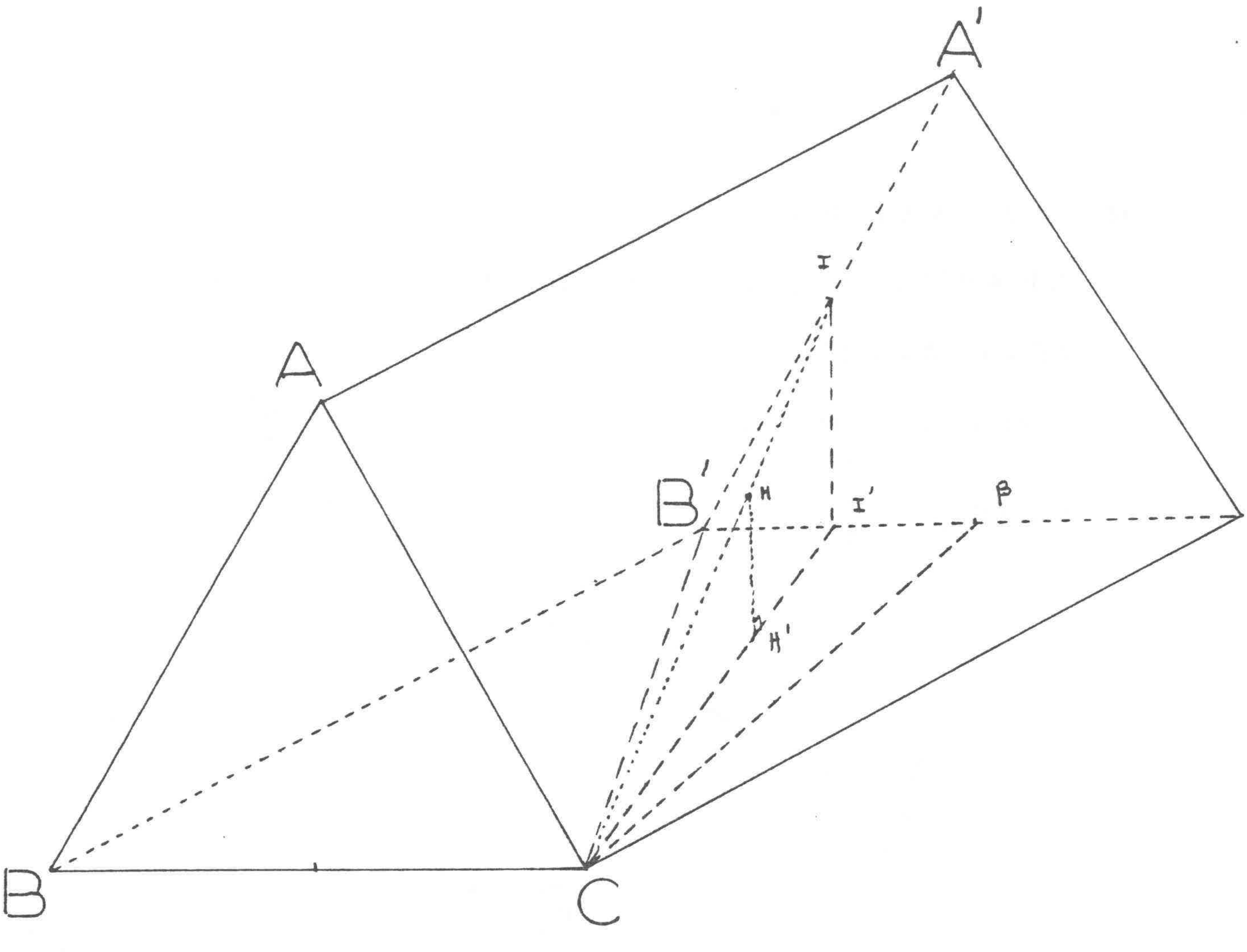
$H \in [IC]$, $IH = \frac{1}{3}$ IC.

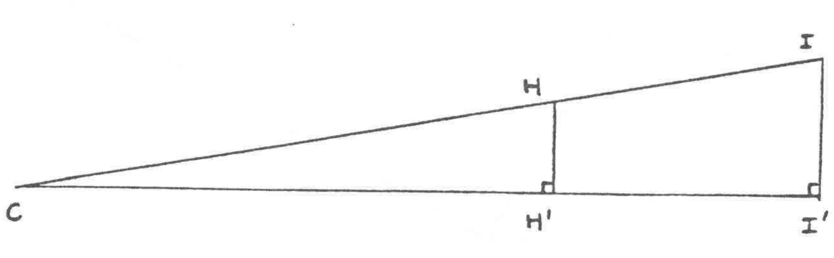


échelle 2

1°) H' est le projeté orthogonal de H sur (BCC'B')

Montrer que H' est centre de gravité du triangle βB'C où β = m [B'C'].





Dans A'B'C' : $\beta = p\ (A')$; $\beta = m\ [B'C']$
$I = m\ [A'B']$; soit $I' = p\ (I)$ alors $I' = m\ [B'\beta]$

Considérons le plan (II'H)

La parallèle à (II') passant par H est incluse dans (II'H)

donc $H' \in (II'H)$

Déterminons l'intersection de (II'H) et (BCC'B') :

$C \in (II'H)$ car $C \in (IH)$ alors : $C \in (II'H) \cap (BCC'B')$
$I' \in (B'C')$ donc $I' \in (BCC'B')$ et $I' \in (II'H) \cap (BCC'B')$

$$(II'H) \cap (BCC'B') = (CI')$$

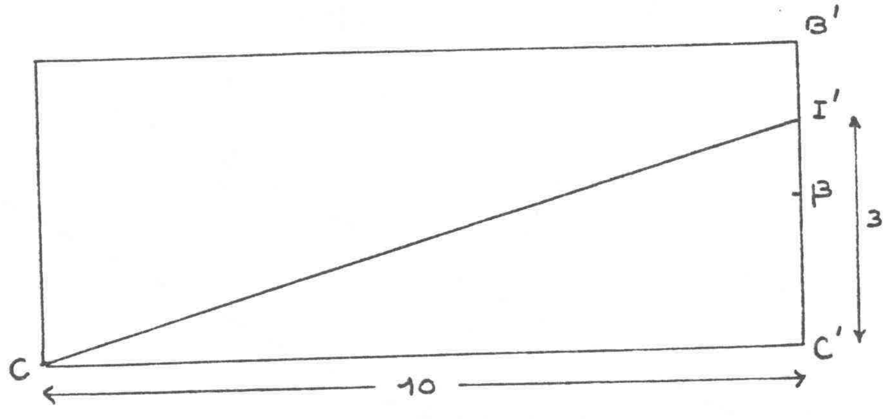
$$\left.\begin{array}{l} \text{Alors } H' \in (II'H) \\ \quad H' \in (BCC'B') : \text{d'après l'énoncé} \end{array}\right\} H' \in (CI')$$

Propriété de Thalès : $I'H' = \frac{1}{3}\ I'C$ (? en vectoriel)
or (I'C) est une médiane de $B'\beta C$ donc :

H' est le centre de gravité de $B'\beta C$.

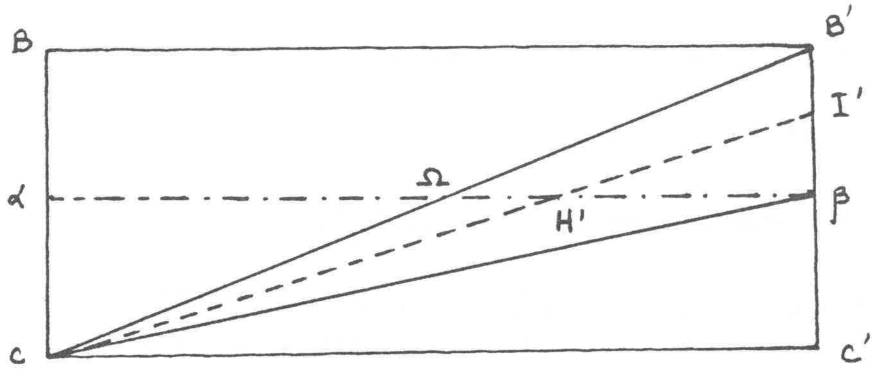
$$II' = \frac{1}{2}\ A'b = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$CI' = \sqrt{109}$$



2°) Monter que H' appartient à ($\alpha\beta$) où α = m [BC].

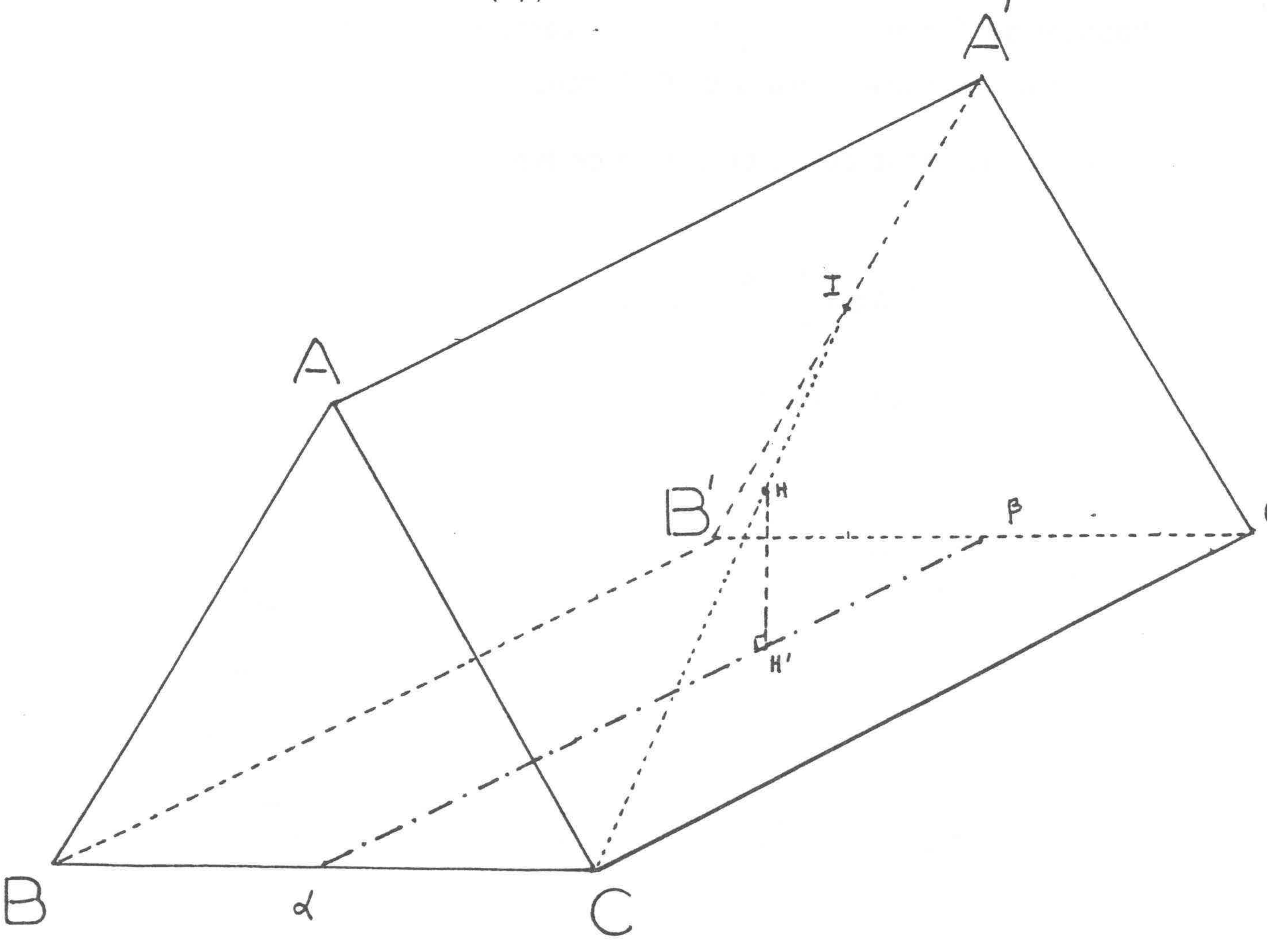
Dans le plan (BCC'B') en vraie grandeur



(α, β) $\cap$ (CB') = { Ω } , Ω milieu de [CB']

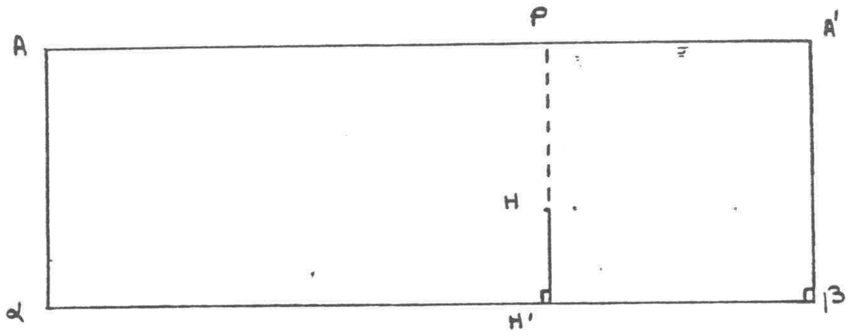
donc ($\beta\Omega$) est une médiane de CB'β

alors H' $\in$ (β Ω)
soit H $\in$ ($\alpha\beta$)



3°) Montrer que (HH') et (AA') sont perpendiculaires. Dessiner la section du plan (CHH') avec le prisme.

Dans le plan (AA'$\beta\alpha$), en vraie grandeur :

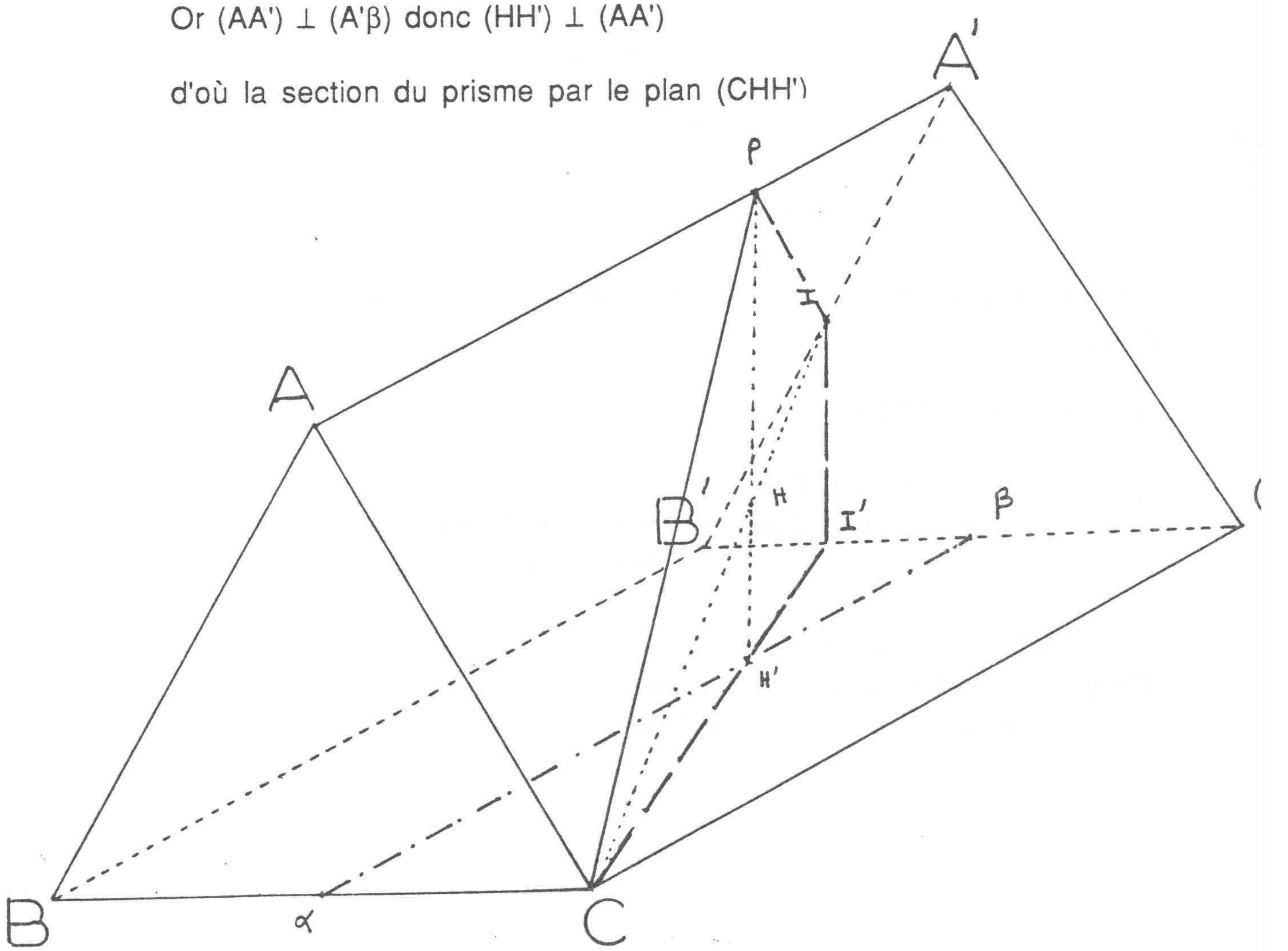


β et A' sont équidistants de B' et C' : ils appartiennent au plan médiateur de [B'C'].

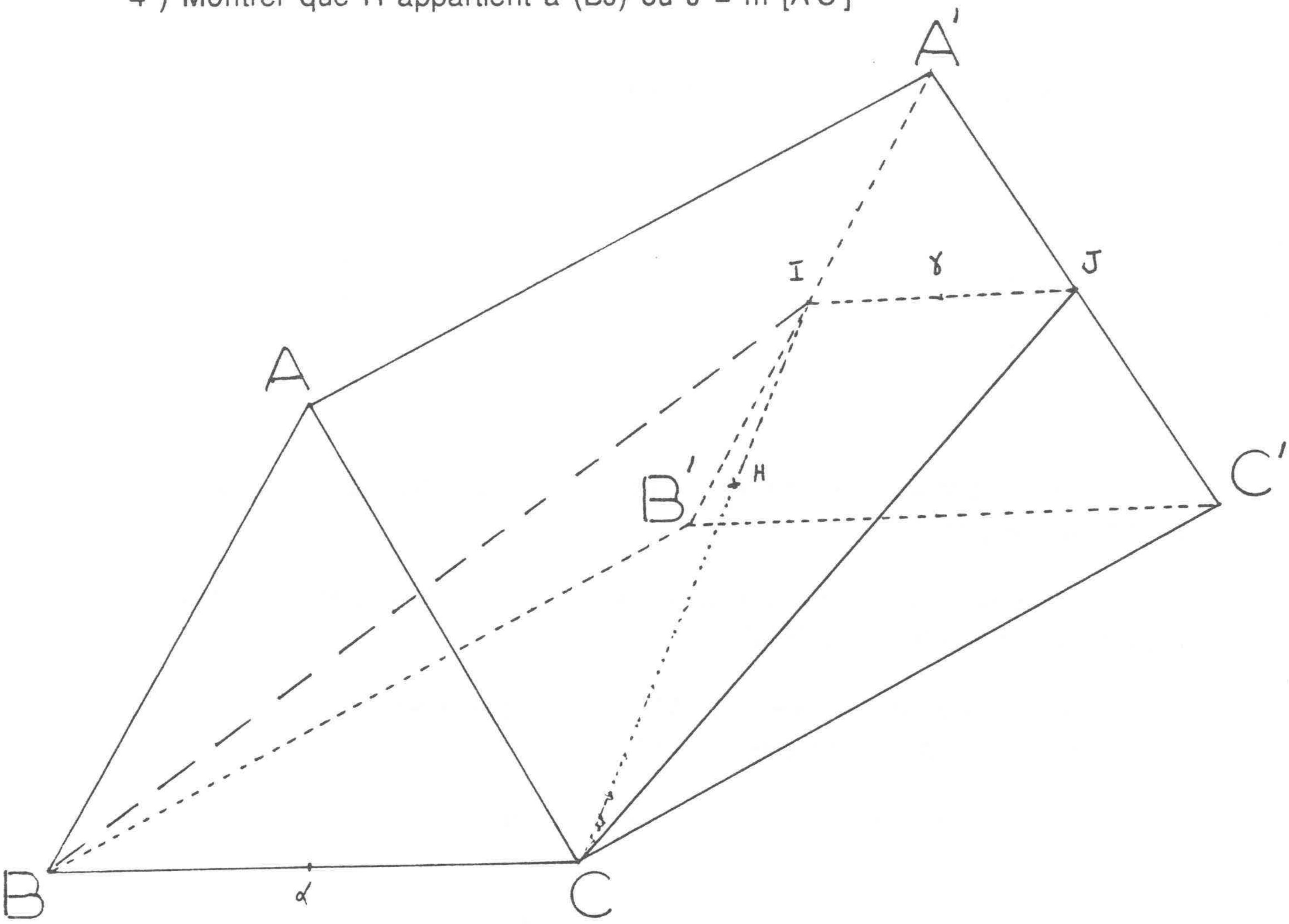
De même α et A sont équidistants de B', C' : ils appartiennent au même plan médiateur (de [B'C']).

(HH') // (A'β) donc (HH') et (AA') sont coplanaires.
Or (AA') $\perp$ (A'β) donc (HH') $\perp$ (AA')

d'où la section du prisme par le plan (CHH')



4°) Montrer que H appartient à (BJ) où J = m [A'C']



γ = m [IJ]

γ est équidistant de B' et C' : γ appartient à (AA'ba), plan médiateur de [B'C']

De même $\alpha \in$ (AA'$\beta\alpha$)

$(\alpha\gamma) \subset$ (AA'$\beta\alpha$)

or $(\alpha\gamma) \subset$ (BCJI) α = m [BC] : $\alpha \in$ (BCJI)

γ = m [JI] : $\gamma \in$ (BCJI)

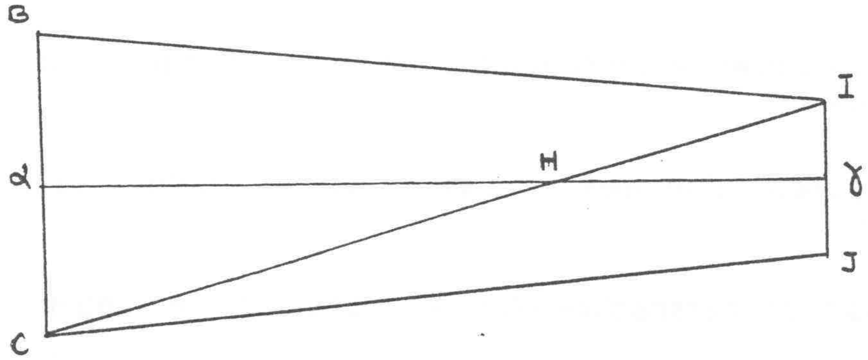
$$\left.\begin{array}{l}\text{donc (AA'}\beta\alpha) \cap \text{(BCJI)} = (\alpha\gamma) \\ \text{Mais H'} \in \text{(AA'}\beta\alpha\text{) (cf 3ème question)} \\ \text{et H} \in \text{B(CI) donc H} \in \text{(BCIJ)}\end{array}\right\} \text{H} \in (\alpha\gamma)$$

Considérons la symétrie $S_{(\alpha\gamma)}$.

$$\begin{array}{lcl} & S_{(\alpha\gamma)} & \\ I & \dashrightarrow & J \\ H & \dashrightarrow & H \\ C & \dashrightarrow & B \\ (CI) & \dashrightarrow & (BJ) \end{array}$$

or H invariant, donc $H \in (BJ)$

<u>Dans le plan (BCIJ)</u>, en vraie grandeur :



Cet exercice de longue haleine qui utilise un très grand nombre de résultats de géométrie du collège doit être mené sur plusieurs séances.

L'utilisation de maquettes et du rétroprojecteur a été une aide précieuse voire indispensable.

AUTOUR DE L'ARCHE DE LA DEFENSE

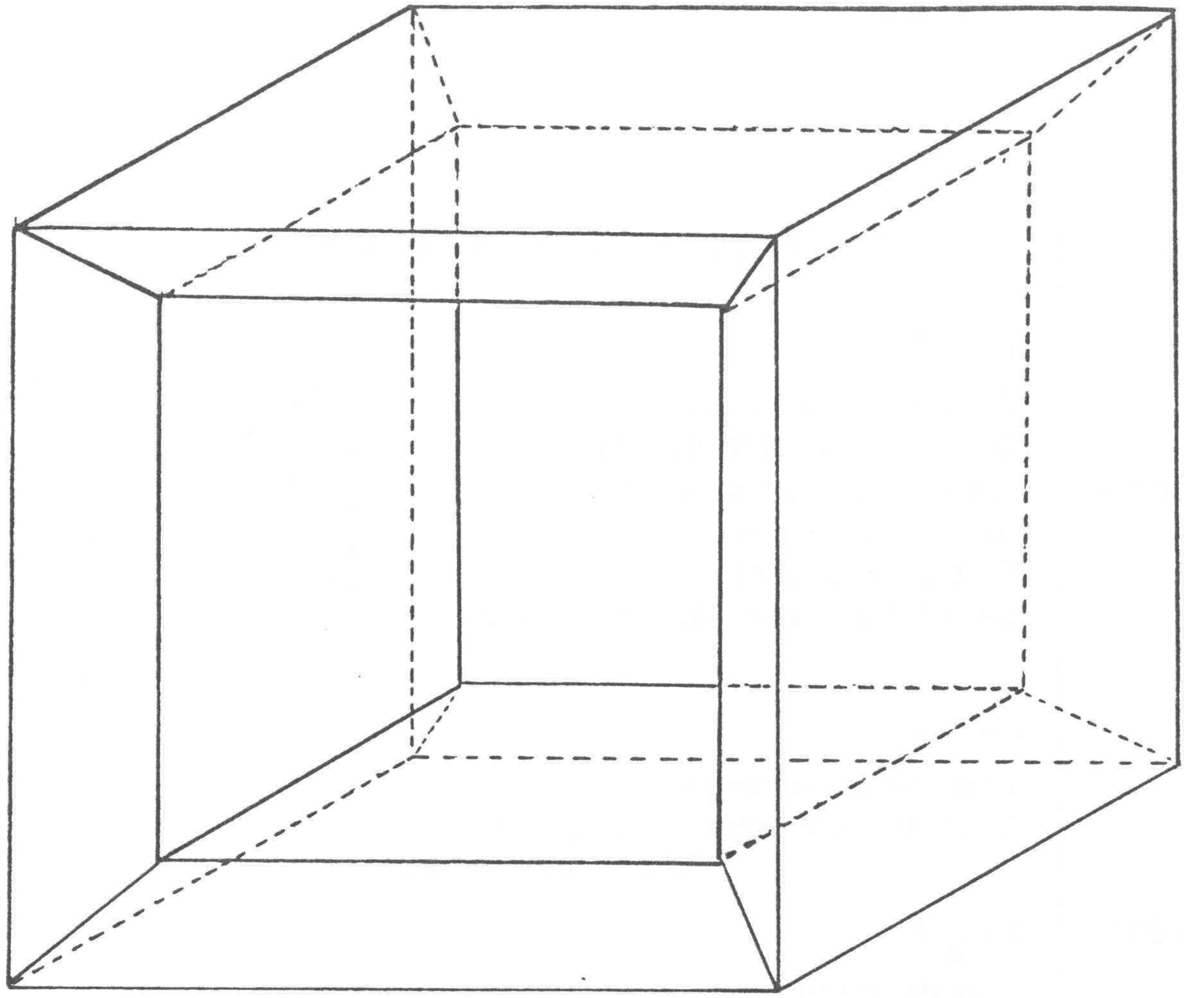
L'architecture orginale de l'Arche de La Défense a suscité de nombreux exercices dans plusieurs manuels.

Autour de ce thème voici une série d'activités qui furent proposées à des élèves de 5ème, 4ème, 3ème, 2de et 1ère.

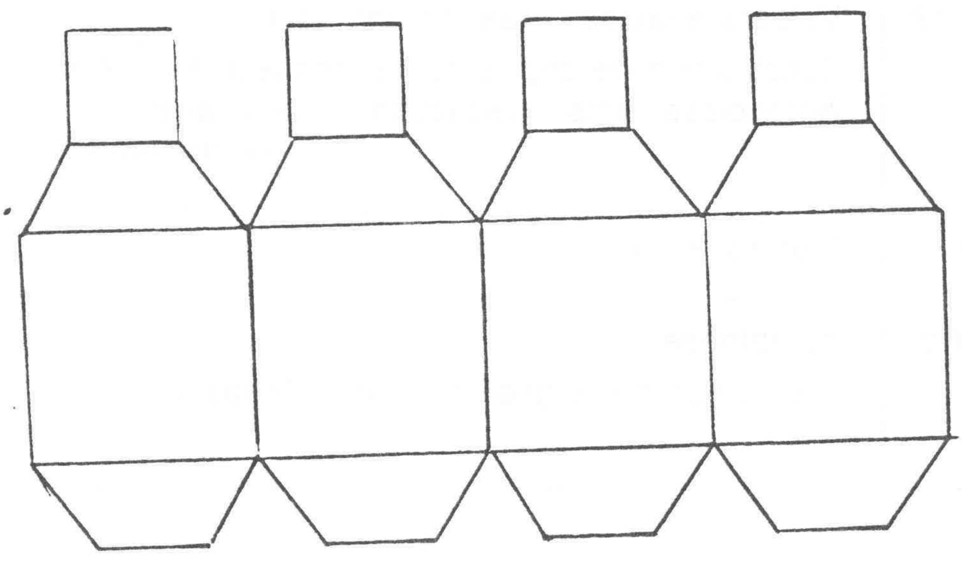
On peut assimiler le monument à un cube, la partie centrale étant elle-même un cube.

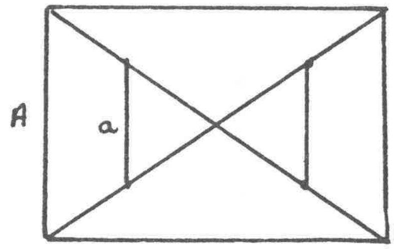
Les mesures données peuvent varier selon les niveaux d'enseignement.

- Faire un dessin en perspective d'un tel monument (les règles de la PC sont connues).
- Rechercher sur un gros cube à l'aide de fils de laines tendus la construction du cube "intérieur".
- Repérer le rôle joué par les diagonales du grand cube pour déterminer les côtés du petit cube.
- Extraire une figure plane.
- Faire un patron d'un tel monument.



Voici le patron le plus souvent proposé. La grosse difficulté réside dans le calcul des dimensions des trapèzes.



Niveau	Thèmes abordés (liste non exhaustive)
5ème	. $a = \frac{1}{2} A$. Extraire le rectangle . Construire le côté du petit cube (milieu d'un segment) . Réaliser un patron . Problème d'échelle . Calculer des aires et des volumes. 
4ème	. $a = \frac{1}{2} A$. . Extraire le rectangle . Côté du petit cube --> projection "droite des milieux" . $a \neq \frac{1}{2} A$. Calculs approchés . Cosinus . et toujours les échelles, des calculs d'aires et de volumes.
3ème	. Mêmes activités + . Théorème de Thalès . Valeurs exactes - valeurs approchées . Construction de segments de longueur $A\sqrt{2}$, $A\sqrt{3}$. Agrandissements - réduction --> aires --> volumes
2nde	. Mêmes activités + . homothétie . Théorèmes de la géomètrie dans l'espace

CONCLUSION

Devant les difficultés de lecture des représentations d'objets de l'espace rencontrées par les élèves de 2nde et même de 1ère S, nous sommes retournés à l'Ecole Maternelle et, avec l'aide des instituteurs, avons tenté de mieux comprendre comment de très jeunes enfants percevaient de telles représentations.

A l'issue d'une quinzaine de situations-tests nous pouvons dégager une idée qu'il reste à affiner : des élèves de grande section de maternelle et des adolescents ont des perceptions des représentations d'objets de l'espace assez voisines. Il semble nécessaire de développer très tôt un apprentissage.

La géométrie dans l'espace ouvre des voies variées, incitatives et ludiques qui pourraient être exploitées au travers d'activités de **vraie** recherche, ne nécessitant pas toujours un lourd arsenal de pré-requis. L'élève est en mesure de construire un savoir mathématique par une plus grande implication personnelle.

De plus, la distinction objet-dessin / objet-d'étude, ici obligatoire n'est pas, comme en géométrie plane, un obstacle ou un frein à la nécessité de démontrer, bien au contraire.

IREM des Pays de la Loire
Centre de Nantes
2, rue de la Houssière – BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03