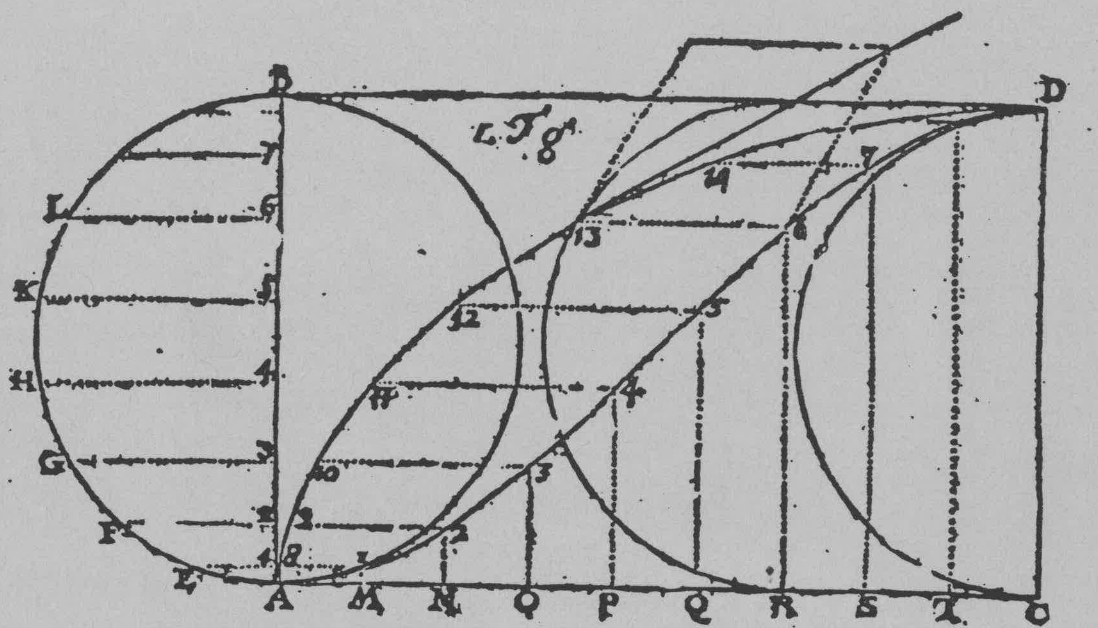
L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

AU LYCEE

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN PREMIERE ET TERMINALE



RECHERCHES DIDACTIQUES

FORMATION DES MAITRES

I.R.E.M. DES PAYS DE LA LOIRE

LE MANS OCTOBRE 1991

BON DE COMMANDE

à retourner à I.R.E.M. PAYS DE LA LOIRE
2, Chemin de la Houssinière
44072 NANTES CEDEX

M, Mme, Mlle ....

Adresse ....

Pays ....

Désignation de la commande	Quantité	Prix unitaire	Total
L'enseignement des mathématiques par situations-problèmes TOME 1		35,00 F	
L'enseignement des mathématiques par situations-problèmes TOME 2		35,00 F	
L'enseignement des mathématiques par situations-problèmes TOME 3		25,00 F	
Logo et géométrie en 4ème-3ème		20,00 F	
L'enseignement des mathématiques au lycée Suites Numériques		25,00 F	
L'enseignement des mathématiques au lycée Histoire des Maths en 1ère et Term.		30,00 F	

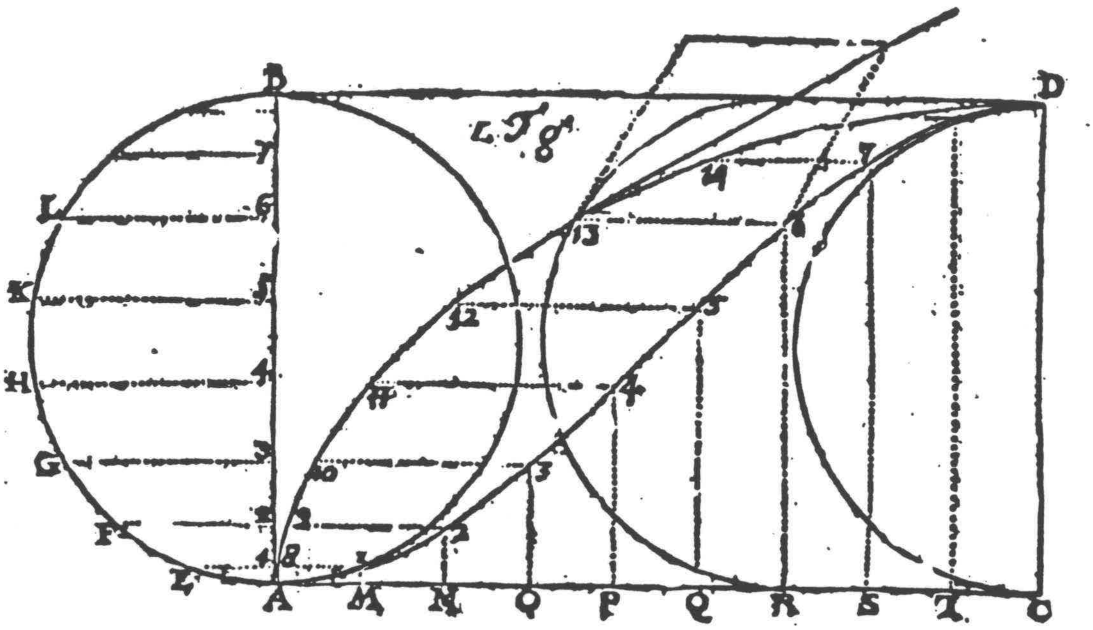
A , le Signature

30

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

AU LYCEE

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN PREMIERE ET TERMINALE



RECHERCHES DIDACTIQUES

FORMATION DES MAITRES

I.R.E.M. DES PAYS DE LA LOIRE

LE MANS OCTOBRE 1991

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN PREMIERE ET TERMINALE

Monique NOUET
I.R.E.M. des Pays de Loire
Centre du Mans

Cet article est un compte rendu d'activités qui se sont déroulées dans des classes de Première S et de Terminale C. Elles concernent essentiellement trois thèmes : l'introduction des équations du second degré (Première S), la construction des tangentes à des courbes par la méthode de Roberval (Terminale C) et enfin des calculs d'aires (Terminale C). Ces activités n'ont pas été traitées au cours d'une même année scolaire.

I. EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Les élèves de Troisième et Seconde savent résoudre des équations de degré 2 dans des situations particulières : $x^2 = a$ ou $ax^2 + bx = 0$. Confrontés à l'équation $x^2 - 6x + 4 = 0$ ils reproduisent les mécanismes de résolution déjà rencontrés et proposent l'une des deux transformations : $x^2 = 6x - 4$ ou $x(x - 6) = -4$. Apparait alors soit une situation bloquée (l'élève arrête tout calcul) soit un mimétisme poussé à l'extrême, mimétisme qui conduit à écrire, pour les deux situations particulières évoquées, $x = \sqrt{6x - 4}$ ou $x = \dfrac{-4}{x - 6}$, la résolution étant alors considérée comme achevée. Ces expressions sont bien sûr non recevables en tant que solutions de l'équation puisque x n'est pas connu. Cependant, il est possible de rétorquer que x est connu puisque $x = \sqrt{6x - 4}$ (dans le premier cas exprimé) et donc que $x = \sqrt{6\sqrt{6x - 4} - 4}$, processus de détermination de x qui peut être itéré. Ceci peut être une approche de la méthode de détermination, à l'aide de suites numériques, d'une valeur approchée d'une solution d'une équation.

La mise en place de la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ à l'aide de la forme canonique est en général considérée comme ne posant aucun problème dès lors que la technique utilisée est bien expliquée. Au cas où des difficultés d'utilisation se présenteraient, le recours à un traitement de choc : résolution de 20 à 30 exemples du même type, devrait dissiper ces difficultés !

Citons cet extrait des Entretiens sur les Sciences de Lamy[1] :

"Il faut acoûtumer les Hommes à voir eux-mêmes la vérité. Lorsque pour leur rendre les Sciences faciles, on ne les oblige point de la chercher eux-mêmes, de la découvrir, de la consulter, il se peut bien faire qu'à force de leur rebatre les choses, on les fasse entrer dans leur mémoire. On dirait même à les entendre parler, qu'ils les savent ; mais la suite fait voir le contraire, outre que ce qui n'est que dans les mémoires se perd aisément ".

S'il est, en effet, possible de parvenir à ce qu'un élève quelque peu en difficulté sache à un moment donné de sa scolarité résoudre une équation du second degré, il est moins certain de parvenir à ce qu'il ait une bonne compréhension de la technique et que celle-ci laisse des traces permanentes. Je me suis posé la question en ces termes lorsqu'une élève de Première S, résolvant une telle équation avec une technique qui me semblait en voie d'acquisition, me dit "**Je ne vois pas** pourquoi on divise par 2, **je vois bien** que ça marche mais je ne comprends pas pourquoi"[2]. Face à cette situation, élève convaincu mais non éclairé, ce que traduit bien le vocabulaire traditionnel : "je comprends" mais "je ne vois pas", il m'a semblé indispensable de procéder à un changement de cadre puisque le numérique n'était pas suffisamment éclairant. La méthode de résolution basée sur une démonstration géométrique, que l'on trouve chez les géomètres Grecs et Arabes, m'a apporté les éléments nécessaires à ce changement de cadre. Elle est exposée dans la brochure Equations du Second Degré, I.R.E.M. de Toulouse. Intégrée les années suivantes à la présentation des équations du second degré elle a permis d'apporter l'éclairage nécessaire à une bonne compréhension de la technique de recherche de la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.

---

[1] LAMY, Entretiens sur les Sciences, 3ème édition, 1706 à Lyon (chez Jean Certe)

[2] Remplacement de bx par 2 (1/2) b x

Voici sous sa forme la plus récente la fiche qui fut proposée à des élèves de Première S.

Un procédé géométrique de résolution

Avec les géomètres Arabes (du VIIème au XVème siècle) les problèmes du Second Degré reçoivent une résolution algébrique justifiée géométriquement. En voici un exemple.

Problème

Un carré et dix racines sont égaux à 39 en nombre.

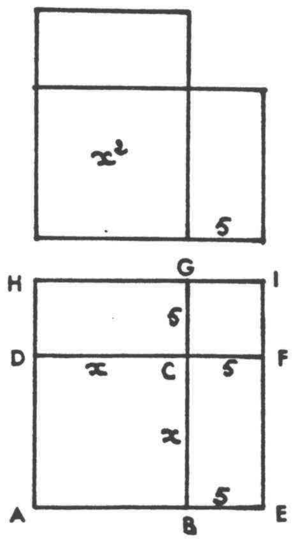
Transcription actualisée

Un carré et dix racines sont égaux à 39 en nombre

$$x^2 \quad + \quad 10\,x \quad = \quad 39$$

Adaptation de la solution proposée

Construire un carré d'aire x^2. Sur deux côtés du carré construire un rectangle dont le deuxième côté mesure 5 unités. Compléter la figure pour obtenir un carré.



Exercice explicatif

1 - Quel est sur la figure le carré d'aire x^2 ?

2 - Le nombre 10 x représente la somme des aires de deux rectangles isométriques.

a - Quelle est l'aire de chaque rectangle ?

b - Quelles sont les dimensions (longueur et largeur) de ces rectangles ?

3 - Un polygone de la figure a pour aire 39. Quel est ce polygone ?

4 - a - Quelle est l'aire du carré CFIG ? du carré AEIH ?

b - Quelle est la longueur des côtés du carré AEIH ?

Commentaire

Les questions 4a et 4b permettent de justifier l'égalité :

$(x + 5)^2$	=	39	+	25
aire du carré AEIH		aire du polygone AEFCGH		aire du carré CFIG

La suite de la résolution ne pose plus de problème.

5 - Adaptez cette méthode de résolution aux équations

$x^2 + 8x - 9 = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x^2 + 6x + 10 = 0$,
$x^2 + 3x - 10 = 0$, $x^2 + x - 1 = 0$, $5x^2 - x + 1 = 0$,
$x^2 - 4x + 3 = 0$, $3x^2 + 5x - 4 = 0$.

Cette étude n'a pas été la première activité dans l'apprentissage des méthodes de résolution des équations du second degré. Nous avons rappelé que les élèves avaient déjà rencontré des équations du second degré réduites. La résolution d'un problème de Diophante peut apporter un exemple de problème dont la solution exposée par Diophante revient par symétrisation du problème, à une équation du type $x^2 = a$.

Voici la fiche proposée aux élèves :

Un problème de Diophante. Livre 1 Problème 7

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Solution proposée par Diophante

"*Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est*

20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes. Il faut aussi que leur produit forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités et l'arithme devient 2 unités.

En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition ".

Exercice explicatif

Appelons x et y les deux nombres ($x \leq y$), A et B leurs images sur une droite de repère $(o, \vec{\imath})$.

1 - Quelle est l'abscisse du milieu I du segment [AB] ?

2 - Posez $d = \frac{y - x}{2}$

a - Exprimez d à l'aide des points de la figure.

b - Vérifiez que $x = 10 - d$ et $y = 10 + d$.

3 - Terminez la résolution.

Remarque

La méthode de résolution a consisté à symétriser le problème en prenant pour origine sur la droite (AB) le point I, les deux inconnues x et y étant alors exprimées en fonction de la seule inconnue d.

Compréhension du texte

Cette partie d'étude s'est déroulée oralement. Elle a consisté à établir un parallèle entre les éléments de l'exercice traité et les éléments du texte de Diophante. Nous le reproduisons ici sous forme d'un tableau.

Texte de Diophante	Interprétation
Que l'excédent des nombres soit deux arithmes	$y - x$ $y - x = 2\,d$ $d = \frac{y - x}{2}$ l'arithme, inconnue auxiliaire, est la demi différence des deux nombres ($d = IA = IB$).
la somme ... si nous la divisons en deux parties égales sera... 10 unités	$\frac{x + y}{2} = 10$ abscisse de I : 10
Si nous ajoutons à l'une des parties et si nous retranchons à l'autre partie	$10 +$ $10 -$
la moitié de l'excédent des nombres... l'arithme	on obtient $y = 10 + d$ et $x = 10 - d$
la somme des nombres est 20 unités, l'excédent est deux arithmes	$(10 + d) + (10 - d) = 20$ $(10 + d) - (10 - d) = 2\,d$ Ainsi x et y d'une part, 10 + d et 10 - d d'autre part, ont la même somme et la même différence.
... leur produit forme 96 unités leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme	$(10 + d)\,(10 - d) = 96$ $(10 + d)\,(10 - d) = 100 - d^2$ donc $100 - d^2 = 96$, $d = 2$

La conclusion "En conséquences, le plus grand sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, **et ces nombres satisfont à la proposition**" met en évidence le fait que Diophante effectue en fin de calcul une vérification du résultat obtenu.

Ces activités, qui ont nécessité 1 h à 1 h 30 de travail en classe, n'ont pas été les seules à précéder le cours sur les polynômes et équations du second degré. Dans un premier temps nous avons étudié des exercices conduisant à la résolution d'équations du second degré qu'en principe les élèves entrant en Première ne savent pas résoudre seuls. Ensuite nous avons étudié des exercices conduisant à des équations particulières ($ax^2 + bx = 0$ et $ax^2 + c = 0$). C'est dans ce cadre que s'est située l'analyse du texte de Diophante. La méthode générale (forme canonique et complétion du carré) termine alors l'ensemble des activités étudiées. Cet enchaînement a permis tout d'abord de justifier l'étude de ce chapitre (équations du second degré) puis de rappeler les techniques anciennes et éviter que, devant l'équation $x^2 + 8x = 0$, les élèves ne mobilisent les formules générales et enfin de permettre à toute la classe de bien maîtriser la technique de mise sous forme canonique de $ax^2 + bx + c$. La lecture de texte de Diophante demande une analyse parallèle : interprétation des mots (excédent des nombres, arithme...) structuration du calcul... Les élèves apprécient, face à ce discours, l'efficacité et la concision du symbolisme algébrique.

Le problème de Diophante traite algébriquement un problème de type arithmétique. Voyons pour terminer un problème géométrique à résolution géométrique : la proposition 11 du Livre II des Eléments d'Euclide. Notons que ce texte est beaucoup plus difficile à travailler avec une classe que le précédent et nécessite d'abord une analyse complète du texte : découpage des propositions successives, articulation de ces propositions entre elles, illustration géométrique des propriétés exprimées, formulation en termes modernes, démonstration des propriétés mises à jour. Ce travail a essentiellement été réalisé collectivement, après une phase de lecture individuelle partie par partie, des éléments du texte (texte du problème, proposition préliminaire, début de la démonstration).

Un problème d'Euclide

Livre II proposition 11

Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segments, soit égal au carré de l'autre segment.

Proposition préliminaire (L.II, prop. 6)

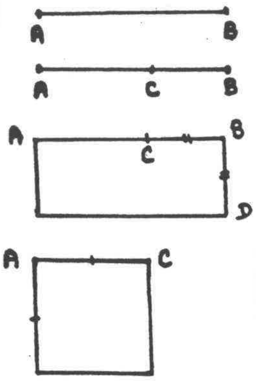
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le carré de la moitié de la droite entière est égal au carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée.

Démonstration de la proposition 11 :

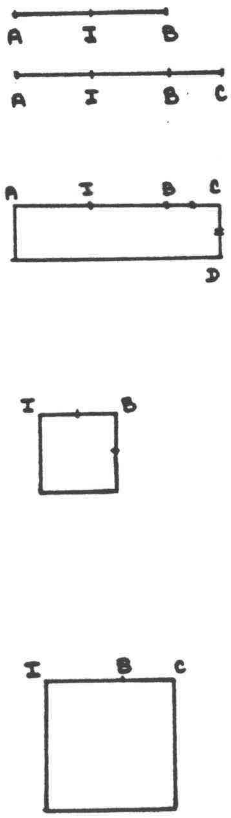
Soit la ligne droite AB, qu'il faut couper en sorte que le rectangle contenu sous la droite AB et un des segments, savoir le moindre, soit égal au carré de l'autre segment, savoir le plus grand.

Soit décrit le carré AD de la ligne droite AB et ayant divisé le côté CA en deux également au point E, soit menée EB et soit prolongée CA au point F, de sorte que EF soit posée égale à EB et de AB, soit retranchée AH, égale à AF, car AB est plus grande que AF puisque EA, AB sont plus grandes que EB ou EF son égale : otant donc la partie commune EA ; restera AB, plus grande que AF. Je dis que AB est coupée au point H en sorte que le rectangle contenu sous AB, BH est égal au carré de AH, de sorte que BH est le plus petit, et AH, le plus grand. Car soit décrit AG, carré de AH, et prolongé le côté HG, vers K, en sorte que HK coupe DC au point K, laquelle sera parallèle à FC et BD, partant DH et CG seront parallélogrammes rectangles et DH, sera contenu sous la droite AB, et le segment BH, car DB est égale à AB, lequel rectangle est égal au carré HF, de l'autre segment AH. D'autant que CA, étant coupée en deux également à E, à laquelle l'on a ajouté AF, le rectangle contenu sous CF, FA, c'est-à-dire le rectangle CG, (car FG est égale à FA) avec le carré de la moitié AE, est égal au carré de EF ; c'est à dire au carré de EB qui est égale à EF : mais le carré de EB, est égal aux carrés de EA et AB. Par quoi le rectangle CG, avec le carré de AE sera aussi égal aux carrés de AE, AB ; otant donc le commun carré de AE, restera le rectangle CG, égal au carré de AB, qui est le carré AD. Donc si l'on ôte le commun rectangle CH, restera le rectangle HD, égal au carré HF, ce qui est proposé. Nous avons donc coupé etc... Ce qu'il fallait faire ".

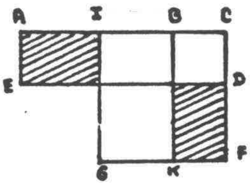
Analyse du texte du problème

Illustration	Texte	Actualisation
	Partager une droite donnée de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un de ses segments soit égal au carré de l'autre segment.	Partager [AB] avec C de manière que le rectangle ayant pour côtés [AB] et [BC] ait la même aire que le carré de côté [AC] $AB \times BC = AC^2$

Analyse du texte de la proposition préliminaire

Illustration	Texte	Actualisation
	Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et si on lui ajoute une droite le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée et sous la droite ajoutée avec le carré de la moitié de la droite entière est *égal* au carré décrit avec la droite composée de - la moitié de la droite entière avec - la droite ajoutée	$AB = AI + IB$ et $AI = IB$ $AB \to AB + BC$ $AB + BC$ $\times$ BC $+$ $\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ $=$ $\left(\frac{AB}{2} + BC\right)^2$ $\frac{AB}{2}$ $+$ BC

Etude de la figure



1. Comparez les aires des deux rectangles hachurés
2. Retrouvez . a) un polygone dont l'aire soit égale à :

$(AB + BC) \times BC + (\frac{AB}{2})^2$

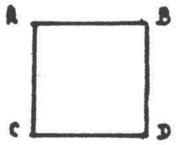
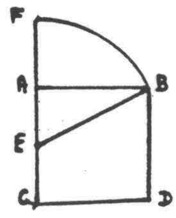
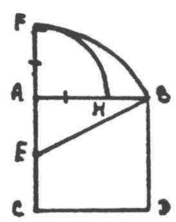
. b) un polygone dont l'aire soit égale à : $(\frac{AB}{2} + BC)^2$

3. Justifiez l'égalité des aires de ces deux polygones :
   - algébriquement
   - géométriquement

Etude de la solution

A - Construction du point solution

Cette construction est exposée ; elle sera justifiée ultérieurement.

Illustration	Texte	Notes
  	Soit décrit **le carré AD de la ligne droite AB** (1) et ayant divisé le côté AC en deux également au point E, de sorte que EF soit posée égale à EB et de AB, soit retranchée AH, égale à AF, car AB est plus grande que AF (2), puisque EA, AB sont plus grandes que EB ou EF son égale **(3)**. Otant donc la partie commune EA, restera AB, plus grande que AF. Je dis que .... le plus grand	(1) le carré AD est le carré de diagonale AD, le carré **de** la ligne droite AB est le carré de côté [AB] (dont l'aire est le carré de AB) (2) Voir jusification de l'inégalité AF < AB (3) EA + AB > EB ou EA + AB > EF Déclaration : le point H est le point cherché

Justification de l'inégalité AF < AB (2)
1 - Appliquez l'inégalité triangulaire au triangle ABE.
2 - Justifiez l'égalité EF = EA + AF
3 - Justifiez l'inégalité AF < AB.

B - Construction complémentaire

Car soit décrit AG, carré **de** AH (1), et prolongé le côté HG, vers K en sorte que HK coupe DC au point K, laquelle sera parallèle à FC et BD (2) partant DH et CG seront parallélogrammes rectangles (3) et DH sera contenu sous la droite AB et le segment BH, car DB est égal à AB (4) Lequel rectangle est égal au carré HF, de l'autre segment AH.(5)	(1) Construire le carré de diagonale [AG] ou encore de côté [AH] (2) (HK) // (FC) (3) les parallélogrammes de diagonales [DH] et [GC] sont des rectangles (4) le rectangle de diagonale [DH] a pour côtés DB, égal à AB et BH. Déclaration le rectangle de diagonale DH (HBDK) à la même aire que le carré de diagonale [HF] (c'est à dire de côté [AH])

Cette dernière phrase exprime encore que H est le point cherché puisque $AH^2 = BA \times BH$, ce qui reste à démontrer.

C. Justification

D'autant que CA étant coupée en deux également à E, à laquelle l'on a ajouté AF, le rectangle contenu sous CF, FA c'est à dire le rectangle CG (1) (car FG est égal à FA) avec (2) le carré de la moitié AE (3) est égal (4) au carré de EF (5) c'est à dire au carré de EB (6) qui est égal à EF, mais le carré de EB (6) est égal aux carrés de EA et AB (7) Par quoi le rectangle CG avec le carré de AE (8) sera aussi égal aux carrés de AE, AB (9) ; ôtant donc le commun carré de AE, restera le rectangle CG égal au carré de AB qui est le carré AD (10) Donc si l'on ôte le commun rectangle CH (11) restera le rectangle HD (12) égal au carré HF (13) ce qui est proposé.	(1) CF x FA (2) $+$ (3) AE^2 (4) $=$ (5) EF^2 (6) EB^2 (7) $= EA^2 + AB^2$ (8) aire (CFGK) $+ AE^2$ (9) $= AE^2 + AB^2$ (10) aire (CFGK) $= AB^2$ $=$ aire du carré de diagonale [AD]. (11) rectangle de diagonale [CH] (12) rectangle de diagonale [HD] (13) Carré de diagonale [HF].

D. Explications

1 - Justifiez la phrase "Le rectangle compris sous CF, FA c'est à dire .... qui est égal à EF.

2 - Justifiez la phrase "Le carré de EB est égal aux carrés de EA et AB"

3 - Utilisez la phrase "Par quoi le rectangle CF ... ... ; ôtant donc le commun carré de AE, ... carré AD" pour démonter que le rectangle CKGF et le carré ABDC ont la même aire.

4 - Terminez la démonstration pour conclure : le rectangle HD est égal au carré HF.

L'étude des polynômes et équations du second degré se situe généralement dans le courant du premier trimestre de l'année scolaire. L'analyse de ce texte, qui ne doit pas être une première rencontre avec les textes historiques, compte tenu de sa complexité, nécessite un travail collectif d'environ 2 heures. Après avoir franchi les premières difficultés de lecture, les élèves réussissent dans l'énoncé de la proposition préliminaire puis dans la dernière partie du texte, à retrouver seuls sur une figure les éléments intervenant dans le texte, les césures se placent plus spontanément, l'exercice revêt alors un caractère ludique. Ce texte n'est pas systématiquement étudié en Première. Les critères conduisant à son étude prennent en compte le niveau de la classe et le temps déjà consacré aux problèmes du Second degré.

II. TANGENTES AUX COURBES : LA METHODE DE ROBERVAL

La représentation de courbes à l'aide d'un paramétrage ($x = f(t)$, $y = g(t)$) figure au programme de Terminale C avec notamment la construction de la tangente à la courbe en un de ses points.

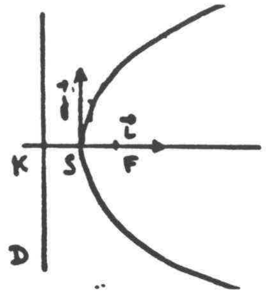
Si on regarde ces courbes comme des trajectoires de points mobiles, passage d'un point de vue statique à un point de vue cinématique, en introduisant la notion de mouvement, alors il est possible de déterminer, à l'aide de la méthode de Roberval, les tangentes à des courbes en composant des mouvements. Le travail sur la parabole et la cycloïde présenté ici a été réalisé avec une classe de Terminale C en application du cours sur les courbes paramétrées.

Tangente à la parabole

Voici la fiche présentée aux élèves, fiche qui avait pour objectif, outre la présentation de la méthode de Roberval, de prouver l'existence d'une tangente en chaque point de la parabole et de dégager une propriété de cette tangente.

Exercice

Une équation de la parabole de foyer F et de directrice D dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est $y^2 = 2px$, p paramètre de la parabole, égal à FK.



Pour paramétrer la parabole, posons

$x = \frac{1}{2p} t^2$, t nombre réel

$y = t$

1 a) Calculez $x'(t)$ et $y'(t)$.

b) Le vecteur $\vec{v}(t)$, de coordonnées $x'(t)$ et $y'(t)$ peut-il s'annuler ?

c) Qu'en déduit-on pour la parabole ?

2 Notons M(t) un point de la parabole, H(t) son projeté orthogonal sur D, $\vec{v}(t)$ le vecteur $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$, directeur de la tangente en M à la parabole. Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{FM} \cdot \vec{v}(t)$. Quelle propriété déduisez-vous pour la tangente à la parabole ?

3 Soit M (x_0, y_0) un point de la parabole. Démontrez que la tangente en M à la parabole a pour équation cartésienne $yy_0 = p(x + x_0)$.

La méthode de Roberval

Histoire et principe

"Il semble que Roberval ait inventé sa méthode pour rechercher les tangentes, vers 1635, à l'époque où il travaille sur la cycloïde. Elle est publiée en 1693 dans un traité intitulé <u>Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes</u>.

La paternité de l'invention fut l'objet de disputes entre Roberval et Torricelli. Dans son traité, Roberval considère une courbe comme la trajectoire d'un point en mouvement. Son "principe d'invention" est le suivant : "la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là". D'où il déduit la règle générale pour trouver de manière directe la tangente en un point d'une courbe "par les propriétés spécifiques de la courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante ; de tous *ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de ligne courbe". Roberval applique avec succès ce principe à treize courbes, celles connues des anciens et celles introduites par les géomètres du XVIIème siècle "*[1].

Texte de Roberval

Extrait des Observations sur la composition des Mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes. Recueil de l'Académie, t.VI, p. 24 à 28 et p. 76 à 80.

PROBLEME I.

Propoſition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de p opriétez ſpécifiques, qui nous faſſent connoître les mouvemens qui les décrivent.[2]

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les propriétez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement

2 compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

---

[1] I.R.E.M. Le Mans, Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle, p. 134.

[2] Lire : Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connaître les mouvements qui les décrivent.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de la répéter.

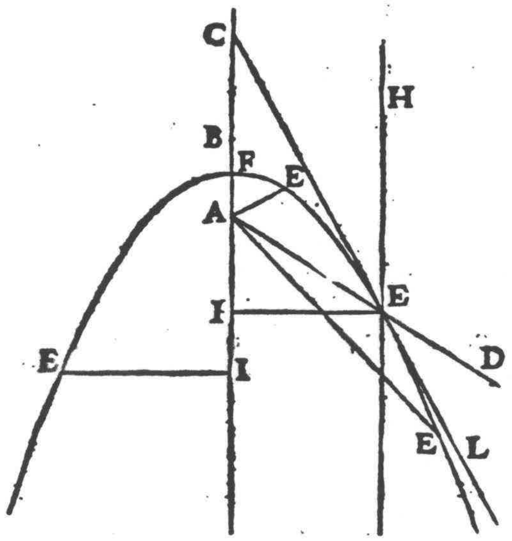
Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monsieur Paschal, de la Roulette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

Premier exemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquiéme méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole étant donnez de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet: soit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & soit FB égale à AF la même ligne BFA sera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole passera par les points E.

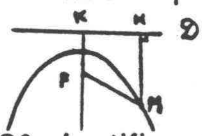


Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne AE, & l'autre est la ligne HE sur laquelle il se meût de même vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse eſt pareille à celle de la ligne A E par la conſtruction, puiſque A E eſt tôûjours égale à B I. Partant puiſque la direction de ces mouvemens égaux eſt connuë, ſçavoir ſuivant les lignes droites A E D, H E données de poſition, ſi vous diviſez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C[1] qui eſt le diamétre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conſéquent la direction du mouvement compoſé des deux HE AE,) la ligne L E C ſera la touchante.

Lecture du texte

1° Déterminez la directrice de la parabole.

2° Que représente, pour les notations traditionnelles



rappelées ici, "l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire et le point B" ?

3° Justifiez la construction de Roberval.

Cette fiche telle qu'elle est présentée ici a été travaillée en 1990-91 après l'étude des courbes paramétrées et de la parabole. La séance a duré une heure. Les élèves ont d'abord travaillé individuellement sur la première partie de la fiche : exercice, puis nous avons lu ensemble le texte de Roberval afin de retrouver dans la construction la caractérisation de la tangente mise en place dans la première partie. A condition d'établir un parallèle entre la caractérisation de la parabole donnée par Roberval et celle que les élèves ont apprise (foyer et directrice) donc de resituer dans le texte les éléments connus (foyer A et directrice perpendiculaire à (AB) en B) le texte est relativement bien compris par les élèves. Ils sont quelque peu surpris par l'utilisation d'une même lettre pour désigner des points différents dans la figure (la notation ne représentant que la propriété du point : E point quelconque de la parabole). Un élève s'est aussi étonné de voir des droites désignées à l'aide de trois points alors que depuis le collège on impose aux élèves de ne donner que deux points pour désigner une droite.

Signalons que le vieux français étonne toujours et ne facilite pas la lecture du texte, mais cela semble un exercice de transcription intéressant, il souligne notamment la non fixité de l'orthographe.

[1] Rhombe = losange.

Tangente à la cycloïde

HISTOIRE DE LA ROULETTE[1]

Appelée autrement trochoïde ou cycloïde
où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé
à la connaissance de la nature de cette ligne

"La Roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

.../ C'est là que j'ai fini de considérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette histoire, il paraît :

Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais sans en pénétrer les propriétés, a été le P. Mersenne.

Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, mesuré les plans et les solides, et donné le centre de gravité du plan et de ses parties, a été M. de Roberval.

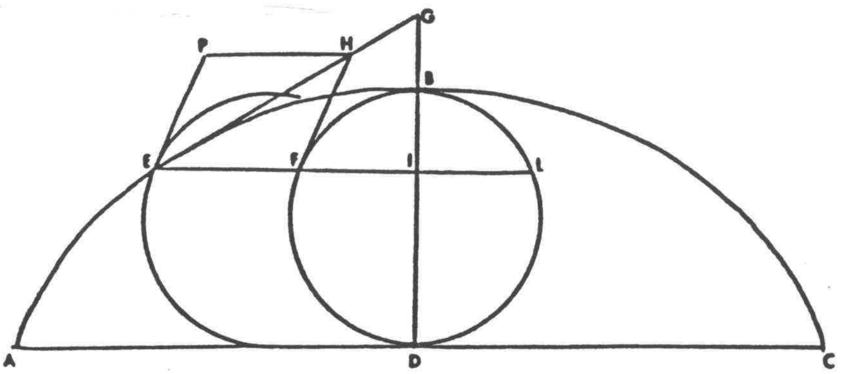
Que le premier qui en a mesuré la ligne courbe, a été M. Wren.

Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des solides et demi-solides de la ligne et de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe ; le centre de gravité des surfaces, demi-surfaces, quarts de surface, etc., décrites par la ligne et par ses parties, tournées autour de la base et autour de l'axe ; et la dimension de toutes les lignes courbes des Roulettes allongées ou accourcies ".

Ce 10 Octobre 1658.

[1] PASCAL, Oeuvres complètes, Bibliothèque de la Pléïade, p. 194, p. 200.

Construction de la tangente[1]



"Un point de la cycloïde est soumis à un mouvement droit et à un mouvement circulaire ; les directions de ces deux mouvements étant trouvées, la direction du mouvement composé sera la touchante. Considérons un point E de la cycloïde ABC de base AC et d'axe BD. La direction de la tangente FH au cercle de diamètre BD est la direction du mouvement circulaire auquel est soumis E. La direction de la droite EF est celle du mouvement droit. Soit H le point de EG tel que EF = FH, alors HE est la tangente de la cycloïde en E car sa direction est la direction composée des deux mouvements ".

Justification de la construction

Le roulement sans glissement du cercle sur la base (AC) conduit à l'égalité MA=$\overset{\frown}{ME}$, M étant le point de contact du cercle passant par E et de la base (AC) et $\overset{\frown}{ME}$ la longueur de l'un des arcs de ce cercle. Dans le mouvement de translation du cercle sur (AC), les points E, M, et Ω, centre du cercle ont la même vitesse. Puisque, à chaque instant, MA=$\overset{\frown}{ME}$, la vitesse de E sur le cercle est égale à la vitesse de M donc à la vitesse de E sur la droite (EF). On porte donc sur (EF) et sur la tangente au cercle en E (directions des deux mouvements) deux longueurs égales EF et EP. La diagonale du losange construit sur [EF] et [EP] donne la direction de la tangente à la cycloïde en E.

Questions

Soit (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormal direct du plan, $\vec{i}$ directeur de (AC)

[1] J.P. CLERO, E. LEREST, La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, p. 70.

1 - En utilisant une représentation paramétrée de la cycloïde ($\theta = (\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega M})$) déterminez les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{V(\theta)}$ directeur de la tangente en E à la cycloïde.

2 - Posant $\overrightarrow{u(\theta)} = R\vec{i}$, $\overrightarrow{v(\theta)} = -R' \cos\theta\,\vec{i} + R \sin\theta\,\vec{j}$ retrouvez les éléments de la construction de Roberval.

III. CALCUL D'AIRES

Dans le cadre de l'étude du calcul d'aires, en application ou en introduction du calcul intégral, nous présentons quelques méthodes, utilisées au cours des temps, pour déterminer des aires de figures classiques : le cercle (Archimède - Arnauld) et la cycloïde (Roberval).

Tout ou partie, suivant les années, a été travaillé en Terminale C. Le texte d'Archimède a été lu collectivement puis les aides ont été fournies lors du travail individuel. Après résolution des exercices proposés en aides, l'analyse du texte a été reprise collectivement.

Aire du disque : la méthode d'Archimède

Extrait du traité De la mesure du cercle d'Archimède[1]

Proposition 1

"*Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.*

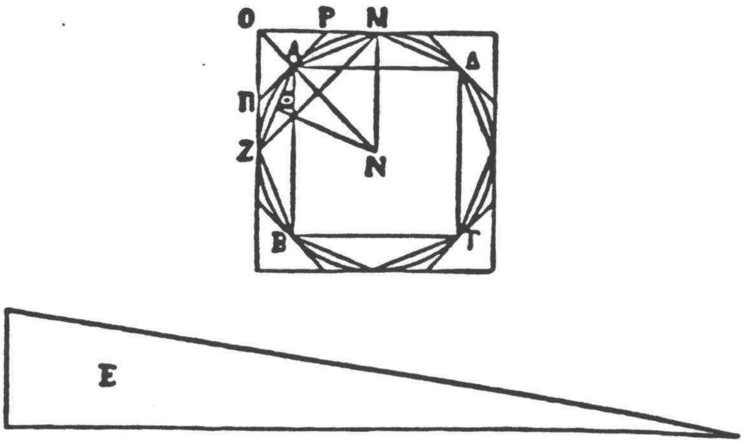
Que le cercle ΑΒΓΔ soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle E ; je dis qu'il lui est équivalent.

En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré ΑΓ, divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle. Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle. Prenons le centre N et menons la perpendiculaire ΝΞ ; dès lors, ΝΞ est plus petit que le côté du triangle. Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi

[1] ARCHIMEDE, La mesure du cercle, in Collection des Universités de France Archimède Tome 1, traduction C. MUGLER, Edition Les Belles Lettres, 1970.

plus petit que le côté restant, puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle ; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle ; ce qui est absurde.

D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le triangle Ε ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons les tangentes aux points. Dès lors, l'angle sous OA, AP est droit ; par conséquent, OP est plus grand que MP ; car MP est égal à PA, et le triangle POΠ est donc aussi plus grand que la moitié de la figure OZAM. Il reste un ensemble de segments, pareils au segment ΠZA, qui est moindre que l'excédent du triangle Ε sur le cercle ABΓΔ .



En conséquence, la figure rectiligne circonscrite est plus petite encore que le triangle Ε ; ce qui est absurde, car elle est plus grande, parce que NA est égal à la hauteur du triangle, tandis que le périmètre est plus grand que la base du triangle. Dès lors, le cercle équivaut au triangle E ".

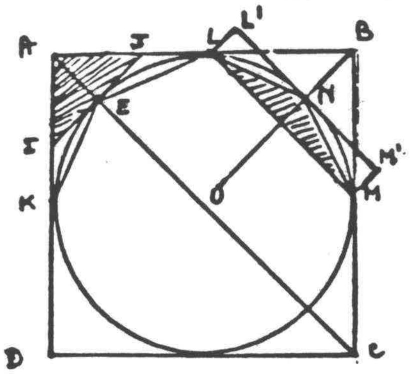
Quelques aides

1- L'axiome d'Archimède énoncé au livre X des Eléments d'Euclide est le suivant : "En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, du reste plus de sa moitié, etc... on peut arriver à une grandeur moindre que la plus petite grandeur"[1].

En termes modernes : si a et b sont des nombres réels positifs, a > b, alors il existe toujours un nombre naturel m tel que m b > a.

[1] EUCLIDE, Eléments, Livre.X, Prop. 1.

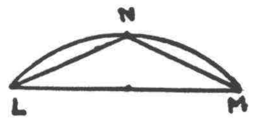
2 - Polygones réguliers inscrits et exinscrits à un cercle.

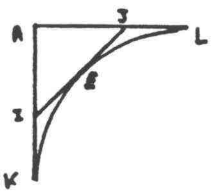


a) Polygone inscrit dans le cercle.

- on note l le périmètre du polygone (KELNM...) inscrit dans le cercle et h son apothème. Exprimez l'aire du polygone à l'aide de l et h .

- en utilisant le rectangle LL'M'M démontrez que l'aire du triangle LMN est supérieure à la moitié de l'aire du segment de cercle $\overset{\frown}{LNM}$.





b) Polygone exinscrit au cercle.

- on note l' le périmètre du polygone (carré ou polygone KIJL... ou tout autre polygone régulier exinscrit au cercle). Exprimez l'aire du polygone à l'aide de l' et R.

- Démontrez que l'aire du triangle AIJ est supérieure à la moitié de l'aire du triangle mixtiligne KAL, noté $\overset{\frown}{AKL}$ (les côtés sont [AK], [AL] et l'arc de cercle $\overset{\frown}{KL}$).

- Comparez les distances JE, JA, JL.
- Comparez les aires des triangles AEJ et AEL
- Démontrez les inégalités :

$$\text{Aire (AEJ)} > \frac{1}{2} \text{ aire (AEL)}$$

$$\text{Aire (AIJ)} > \frac{1}{2} \text{ aire } (\overset{\frown}{AKL}).$$

Lecture et compréhension du texte

Notons $\mathcal{A}c$ l'aire du cercle

$\mathcal{A}t$ l'aire du triangle dont un côté est égal au rayon et l'autre égal au périmètre du cercle

$\mathcal{A}p$ l'aire d'un polygone inscrit ou exinscrit au cercle.

1 - Supposons $\mathcal{A}c > \mathcal{A}t$

Posons $e = \mathcal{A}c - \mathcal{A}t$, excédent du cercle sur le triangle

Inscrivons des polygones dans le cercle ; d'un polygone à l'autre on double le nombre de côtés.

En passant du polygone P au polygone suivant P' on enlève à $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$ plus de la moitié de $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$. En procédant ainsi un certain nombre de fois on peut obtenir un polygone pour lequel

$\mathcal{A}c - \mathcal{A}p$ est inférieur à e (Axiome d'Archimède). Pour un tel polygone P on a :

$$\mathcal{A}c - \mathcal{A}p < e$$

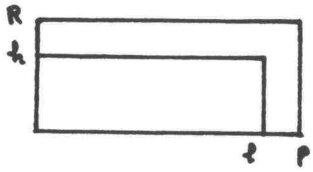
donc $\mathcal{A}c - \mathcal{A}p < \mathcal{A}c - \mathcal{A}t$

par suite $\mathcal{A}t < \mathcal{A}p$

or $\mathcal{A}p = \frac{1}{2} h\, l$ — h apothème du polygone

l périmètre du polygone

et $\mathcal{A}t = \frac{1}{2}$ Rp.



Puisque $h <$ R et $l <$ p

on a $lh <$ Rp

$\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$

Il y a contradiction avec l'inégalité $\mathcal{A}p > \mathcal{A}t$ précédemment établie donc $\mathcal{A}c > \mathcal{A}t$ est impossible.

2 - Supposons $\mathcal{A}c < \mathcal{A}t$

Posons $e = \mathcal{A}t - \mathcal{A}c$

Circonscrivons des polygones au cercle, d'un polygone à l'autre on double le nombre de côtés.

En passant du polygone P au polygone suivant P' on enlève à $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$ plus de la moitié de $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$. On peut ainsi obtenir un polygone pour lequel $\mathcal{A}p - \mathcal{A}c$ est inférieur à e. Pour un tel polygone P on a :

$$\mathcal{A}p - \mathcal{A}c < e$$

$$\mathcal{A}p - \mathcal{A}c < \mathcal{A}t - \mathcal{A}c$$

$$\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$$

or $\mathcal{A}p = \frac{1}{2} R\, l$

$$\mathcal{A}t = \frac{1}{2} R\, p$$

Puisque $l >$ p

on a $\mathcal{A}p > \mathcal{A}t$

Il y a contradiction avec $\mathcal{A}p < \mathcal{A}t$

donc $\mathcal{A}c < \mathcal{A}t$ est impossible

Par suite $\mathcal{A}c = \mathcal{A}t$

$$\mathcal{A}c = \frac{1}{2} \text{Rp}.$$

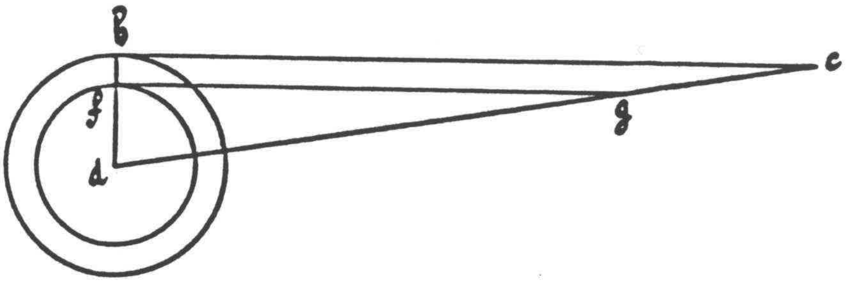
Aire du cercle : Arnauld et la méthode des indivisibles

Extrait des Nouveaux éléments de géométrie d'Arnauld (1667)[1]

Cinquième théorème

"Le cercle est égal au triangle rectangle, qui a pour côtés de son angle droit le rayon du cercle, et une ligne égale à la circonférence du cercle.

Soit le centre d, le rayon db, la tangente bc, égale à la circonférence et l'hypoténuse .



Si on tire de tous les points du rayon des circonférences concentriques au cercle, elles rempliront tout le cercle, et elles seront parallèles entre elles, en la manière que les circonférences le peuvent être, et coupées perpendiculairement par le rayon.

Si on tire aussi de tous ces mêmes points du rayon par lesquels auront passé ces circonférences des parallèles à bc, jusques en dc, ces parallèles rempliront le triangle. Et ainsi la somme de ces circonférences et de ces parallèles sera égale, étant déterminée de part et d'autre par les points du même rayon, étant clair que l'on ne saurait tirer une circonférence par aucun point, qu'on ne tire aussi une parallèle à dc par ce même point, et au contraire.

Or, la circonférence et la parallèle tirées du même point sont égales, comme on peut voir en examinant laquelle on voudra : par exemple celle du point b. Car : bd : df :: circonf b : circonf f
bc : fg

Donc circonf b: circonf f::bc:fg. Donc alternando circonf b:bc:: circonf f:fg. Or la circonférence passant par le point f, est égale à fg, parallèle à bc ".

---

[1] ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, 1667, réédition I.R.E.M. de Dijon, 1985.

Exploitation du texte

Nous avons procédé à une lecture collective du texte en apportant, au fur et à mesure des besoins, les éléments nécessaires à la compréhension du texte :

- "Le cercle est égal au triangle rectangle" : le cercle et le triangle ont la même aire
- "Si on tire de tous les points du rayon des circonférences concentriques au cercle" : un point (f) du rayon db étant choisi tracer le cercle de centre d passant par f. Faire varier f dans le segment [db].
- "Or la circonférence et la parallèle tirées du même point sont égales...

bd : df :: circonf b : circonf f
bc : fg "

Ces dernières lignes se lisent :

bd est à df comme la circonférence b est à la circonférence f et bd est à df comme bc est à fg.

Elles se notent actuellement

$$\frac{bd}{df} = \frac{circonf.b}{circonf.f} \quad \text{et} \quad \frac{bd}{df} = \frac{bc}{fg}$$

La première, écrite $\frac{circonf.b}{bd} = \frac{circonf.f}{df}$ traduit l'invariance du rapport de la longueur de la circonférence du cercle à la longueur du rayon. La deuxième traduit la similitude des triangles dbc et dfg, (exprimable aussi à l'aide du théorème de Thalès ou d'une homothétie).

Ainsi $\frac{circonf.b}{circonf.f} = \frac{bc}{fg}$

Et comme bc = circonf b on a bien fg = circonf f.

Aire d'une arche de cycloïde : Roberval et les indivisibles.

Le calcul de l'aire d'une arche de cycloïde est étudié suivant les années dans le cadre d'une leçon sur les courbes paramétrées ou au cours de l'étude des applications du calcul intégral. L'étude de la cycloïde a porté sur :

- une histoire de la cycloïde (lecture de textes de Pascal extrait des Oeuvres Complètes de Pascal) permettant de définir la cycloïde et de proposer une recherche du paramétrage (1 h en travaux dirigés, en introduction aux courbes paramétrées).
- une détermination de la tangente en chaque point par la méthode de composition des mouvements de Roberval (séance d'une heure qui suit l'introduction de la cycloïde puis un travail personnel, à la maison, sur la recherche des tangentes à des courbes connues (droites, cercles, C(y =f(x)) et enfin un cours sur les courbes paramétrées).
- une détermination de l'aire d'une arche de cycloïde par la méthode des indivisibles (séance d'environ 1/2 heure présentée soit avec les courbes paramétrées comme dernière étude sur la cycloïde soit dans les applications du calcul intégral : méthodes de calculs d'aires).

Pour ces deux derniers thèmes nous n'avons pas travaillé sur les textes originaux de Roberval, en général assez complexes, mais sur une analyse publiée dans La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle qui présentait, outre cette analyse, des éléments de synthèse sur les indivisibles. Nous reproduisons ci-dessous les textes originaux relatifs à la construction de la tangente à la cycloïde et à l'aire de la cycloïde.

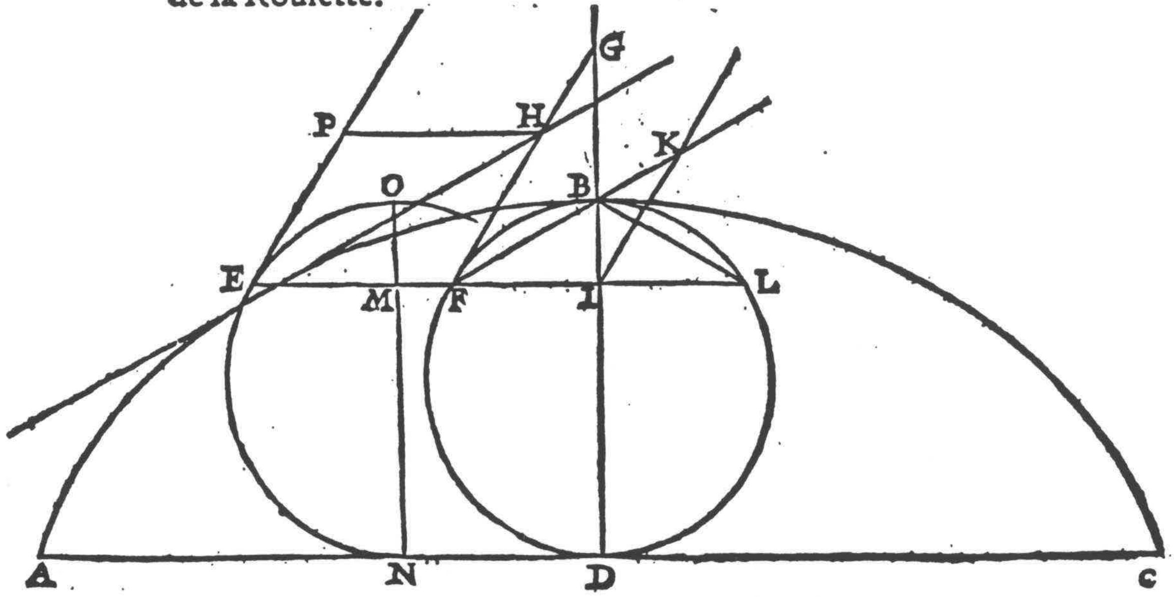
Tangente à la cycloïde

Onzième exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval.

Ces connoiſſances ſuffiſent pour trouver les touchantes de la Roulette par les mouvemens composez ; car ayant pris un point de la Roulette, & ayant trouvé les deux directions de ſon mouvement droit & de ſon mouvement circulaire ; ſi l'on entend dans ces lignes de direction deux lignes qui ſoient entre elles comme la ligne BC ou la baſe de la Roulette, eſt au cercle de la Roulette, chacune de ces lignes étant priſe dans la direction du mouvement homologue, la direction du mouvement composé de ces deux ſera la touchante,

Car ſoit proposé la Roulette ABC de laquelle la baſe eſt ADC, le ſommet B & l'axe BD, & que l'on en demande la touchante au point E. Décrivez le cercle BFD de la Roulette, ſoit autour de l'axe BD, ſoit ſur quelque diamétre perpendiculaire à la ligne ADC ; du point

E tirez la ligne EF parallele à AC, & coupant en F la circonférence du demi-cercle de la Roulette (la plus proche du point E, si le point E étant pris entre A & B, vous avez décrit le cercle plus vers C que le point E, sinon au contraire &c.) tirez FG touchante du cercle, puis faites que comme AC est à la circonférence du cercle, ainsi EF soit à FH, prenant le point H dans la touchante FG, du point H tirez HE, ce sera la touchante de la Roulette.



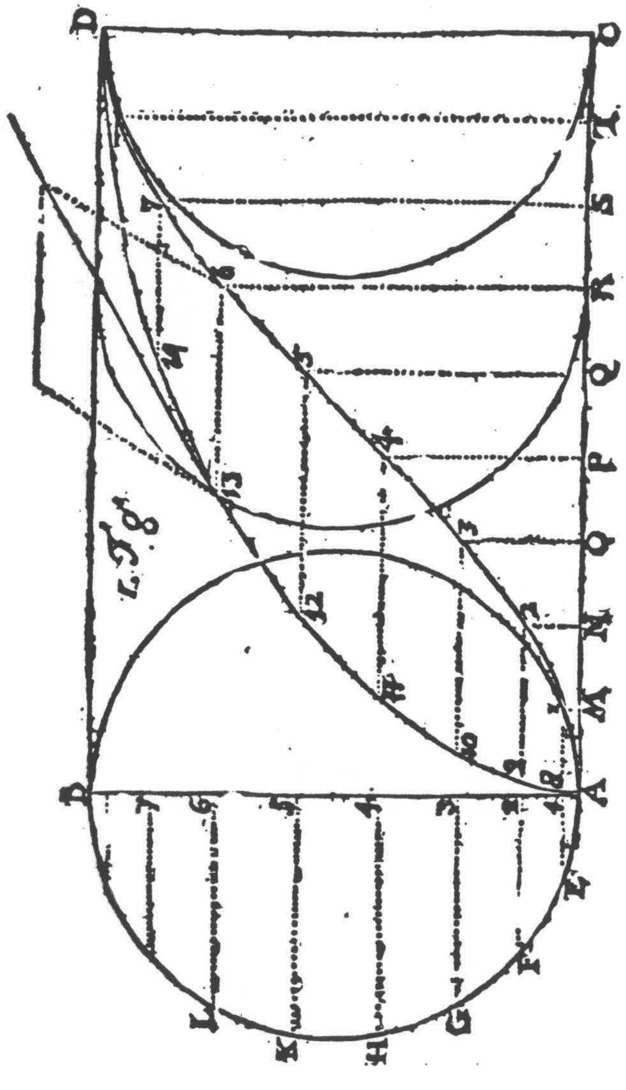
M. de F. tire cette touchante en cette façon. Tirez la ligne EF, comme ci-dessus. Tirez encore une ligne FB, & par le point E tirez EH parallele à FB, la ligne EH sera la touchante.

Or il est facile de démontrer que cette méthode s'accorde avec la premiére, mais elle n'est pas si générale n'étant proposée qu'au cas que la Roulette, soit du premier genre, c'est-à-dire que sa base AC soit égale à la circonférence de son cercle, ce que vous remarquerez dans cette démonstration que nous chercherons analytiquement, comme il s'ensuit.

Aire de la cycloïde

Nous posons que le diamétre AB du cercle AEFGB se meut parallelement à soy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, ensorte que quand le diamétre est en CD, le point

A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette course du diamétre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En aprés je considére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti; cette hauteur se marque tirant du point E au diamétre AB un sinus E1, & le sinus Verse A1 est la



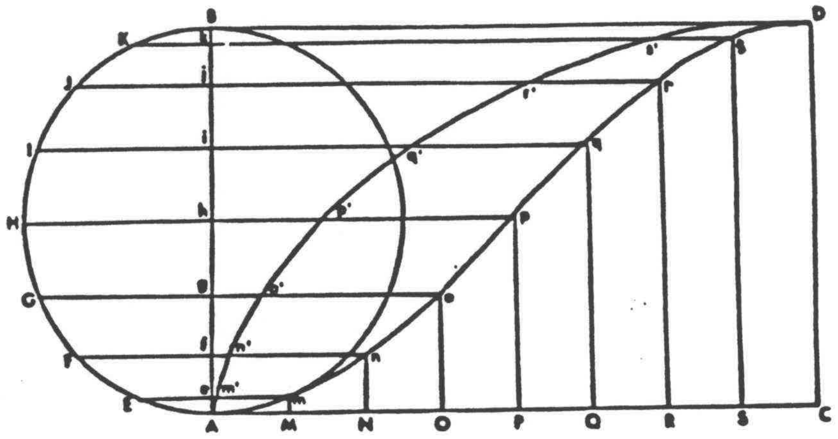
hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, & A2 sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G3, le sinus Verse A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G; & faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1. A2. A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pendant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E1, F2, G3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diametre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je sçai comme s'est fait la ligne A 8 9 D; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en CD; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A1, A2, &c. & des sinus E1, F2, &c. qui sont les mêmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 D C; & faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Aire de la cycloïde : analyse du texte de Roberval[1]

Les élèves ont disposé, en plus d'une initiation à la méthode des indivisibles, de cette analyse de la méthode de Roberval que nous avons lue collectivement et commentée afin d'en comprendre les éléments et notamment voir comment intervient la définition de la cycloïde.

"Nous allons voir la méthode des indivisibles, appliquée par Roberval, à la quadrature de la cycloïde :

Considérons le segment AC égal à la demi-circonférence AGB du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que AM = $\overset{\frown}{AE}$. Soient m, n etc... les points d'intersection des droites Ee, Ff etc... avec les perpendiculaires menées de M, N etc... à la droite AC ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval, la "compagne" de la roulette. Les points m', n' etc des droites Em, Fn etc tels que Ee = m'm, Ff = n'n etc sont les points de la cycloïde ; en effet, lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de M à AC alors $\overset{\frown}{AE}$ = $\overset{\frown}{Mm'}$ etc. La compagne



partage le rectangle ABCD en deux surfaces égales car chacun des segments Mm, Mn etc a son égal dans l'autre moitié. D'autre part, l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle AGB car la somme des segments Ee, Ff etc. est égale à la somme des segments m'm, n'n etc. Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD plus la moitié du cercle générateur, c'est-à-dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur. L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symétrique par rapport au centre du rectangle ABCD".

---

[1] J.P. CLERO, E. LE REST, La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, p. 50.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMEDE, La mesure du cercle, in Collection des Universités de France, Archimède Tome 1, traduction C. MUGLER, Edition Les belles Lettres, 1970.

ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, 1667, réédition I.R.E.M. de Dijon, 1985.

CLERO et LE REST, La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n° 16, 1980.

EUCLIDE, Eléments, Ed. Peyrard, Blanchard, Paris.

I.R.E.M. des Pays de Loire, Centre du Mans, Mathématiques, Arts et Techniques au XVIIème siècle, Publication de l'Université du Maine n° 4, 1987.

I.R.E.M. de Toulouse, Equations du Second degré, 1979.

LAMY, Entretiens sur les Sciences, 3ème édition, 1706 à Lyon (chez Jean Certe).

PASCAL, Oeuvres complètes, Bibliothèque de la Pléïade, 1954.

ROBERVAL, Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, T. VI., 1666-1699.