UNIVERSITE DE NANTES

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

2, rue de la Houssinière
44072 NANTES CEDEX 03 (FRANCE)



# RECUEIL D'EXERCICES

## DEUG A 1$^{\text{ère}}$ année

### ANALYSE ET ALGEBRE

### M ET M'

Année universitaire 1989/90

# Cours d'algèbre - Têtes de chapitres

1- Résolution de systèmes d'équations linéaires . Méthodes pratiques .

2 - Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces vectoriels. Somme directe. Supplémentaire. Sous-espaces engendrés par un système de vecteurs.

3 - Système libre, système générateur, base.

4 - Théorème de la base incomplète. Dimension d'un espace vectoriel. Dimension d'une somme, d'une somme directe.

5 - rang d'un système de vecteurs, rang d'un système d'équations linéaires. Méthode de calcul.

6 - Application linéaire. Composition, application identique, inverse.

7 - Matrice. Matrice d'un vecteur (matrice colonne), matrice d'une équation, linéaire (matrice ligne), matrice d'un système de vecteurs, d'un système d'équations linéaires, d'une application linéaire. Somme de matrices, produit de matrices, matrice unité, matrice inverse. Transposée d'une matrice.

8 - Rang d'une matrice. Méthode de calcul du rang : opération sur les lignes, sur les colonnes.

9 - Calcul de l'inverse d'une matrice par manipulation sur les lignes ou sur les colonnes. Résolution de systèmes linéaires par inversion de matrice.

10 - Déterminant d'une matrice carrée. Calcul du déterminant par manipulation des lignes et des colonnes. Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Formule en dimension 2 et 3.

11 - Propriétés du déterminant. Déterminant non nul si la matrice est inversible. Calcul de l'inverse d'une matrice (matrice des cofacteurs). Relation entre le rang et les déterminants des sous-matrices.

12 - Valeur propre, vecteur propre. Polynôme caractéristique. Diagonalisation des matrices carrées, des endomorphismes. Théorème de Cayley-Hamilton.

13 - Applications : calcul des puissances d'une matrice, résolution de systèmes linéaires, de systèmes récurrentiels, d'équations différentielles linéaires.

14 - Triangularisation d'une matrice. Exemples.

15 - Isométries en dimension 2 et 3.

# Chapitre 1

## Résolution de systèmes d'équations linéaires. Méthodes pratiques

1) Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x+y-z=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ y+z-t=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 6y-2z+t=-2 \end{cases}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases} \quad \text{, avec } j=e^{\frac{2i\Pi}{3}} \quad \text{et a,b,c des complexes}$$

Comment choisir, a, b et c pour que la solution soit réelle ?

3) Résoudre et discuter, suivant le paramètre m, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+my-z=-2 \\ x+2y+mz=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z+mt=1 \\ mx+z+t=1 \\ x+mz+t=0 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$$

4) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=a_1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+x_{n-1}+\lambda x_n=a_n \end{cases}$$

où $\lambda$ et les $a_j$ sont des complexes donnés

5) Déterminer les valeurs de a de telle sorte que le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z = 1 \\ 2x+3y+az=3 \\ x+ay+3z = 2 \end{cases}$$ ait

(i) aucune solution

(ii) une solution unique

(iii) plusieurs solutions

chapitre 2

## Espaces vectoriels

1) i) Montrer que l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ii) Soit F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont paires et G l'ensemble de celles qui sont impaires. Montrer que F et G sont des s.e.v de E. Montrer que : $E = F \oplus G$.

2) i) On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $e_1 = (1,0,0,1)$, $e_2 = (-1,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,1)$ et $e_4 = (2,0,1,0)$.

Soit $E = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_2\}$, $F = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{e_3,e_4\}$. Montrer que: $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

ii) $e_1 = (1,0,0,1)$ ; $e_2 = (-1,1,0,0)$ ; $e_3 = (0,0,1,1)$ et $e_5 = (2,-1,2,3)$

Soit $E = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{e_1,e_2\}$ et $G = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{e_3,e_5\}$. Déterminer $E+G$ et $E \cap G$.

3) Soient U,V et W les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$U = \{(a,b,c) ; a+b+c = 0\}$, $V = \{(a,b,c) ; a = c\}$, $W = \{(0,0,c); c \in \mathbb{R}\}$

a) Montrer que U, V et W sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que: (i) $\mathbb{R}^3 = U+V$

(ii) $\mathbb{R}^3 = U+W$

(iii) $\mathbb{R}^3 = V+W$

Quand la somme est-elle directe ?

4) Déterminer $F_1 \cap F_2$, où $F_1 = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{(4,2,-5),(-1,3,1)\}$ et $F_2 = \text{vect}_{\mathbb{R}}\{(3,-4,2),(5,-2,-2)\}$.

5) Montrer que les sous-espaces engendrés par $u_1$ et $u_2$ d'une part, et par $v_1$ et $v_2$ d'autre part, sont identiques:

$u_1 = (2,3,-1)$, $u_2 = (1,-1,-2)$, $v_1 = (3,7,0)$, $v_2 = (5,0,-7)$.

6) i) Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$.e.v. .

ii) Soit: $P(x) = x^2+3x+5$ ; $Q(x) = x^2-x$; $R(x) = 3x^2+1$ ; $S(x) = x+2$.

Exprimer P comme combinaison linéaire de Q, R et S .

7) Soient U et V deux s.e.v. d'un espace vectoriel E .

On suppose en outre que $U \cup V$ est aussi un s.e.v de E .

Montrer que l'on a soit: $U \subseteq V$, soit: $V \subseteq U$.

8) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et A,B,C trois s.e.v de E tels que :

$A \cap B = A \cap C$ , $A+B = A+C$ , $B \subseteq C$ .

Montrer que $B = C$.

9) Soient U,V et W des s.e.v. d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ .

Montrer que : $(U \cap V) + (U \cap W) \subseteq U \cap (V+W)$.

Trouver des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels l'égalité ci-dessus n'est pas vérifiée.

10) Soit $E_1$, $E_2$ et $E_3$ trois s.e.v. d'un espace vectoriel E .

a) Montrer que $(E_1 \subseteq E_2) \Rightarrow ( E_1+(E_2 \cap E_3) = E_2 \cap (E_1+ E_3) )$

b) Soit F un autre s.e.v de E.

Montrer que : $( E_1 \subseteq E_2,\ E_1 \cap F = E_2 \cap F$ et $E_1+F = E_2+F ) \Rightarrow (E_1 = E_2)$

Donner un contre-exemple dans le cas où $E_1$ n'est pas inclus dans $E_2$.

## Chapitre 3

### Système libre, système générateur, base

1) Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1,2,-1,-2)$, $b = (2,3,0,-1)$, $c = (1,3,-1,0)$, $d = (1,2,1,4)$.

Montrer que a,b,c,d sont linéairement indépendants.

Calculer les coordonnées de $x = (7,14,-1,2)$ dans la base $(a,b,c,d)$.

2) Pour tout entier n, on désigne par $x_n$ le vecteur $(1,n,n^2)$ de $\mathbb{R}^3$. On note :

$$E = \mathrm{Vect}(x_1,x_2) \quad F = \mathrm{Vect}(x_3,x_4)$$

les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par $x_1,x_2$ et $x_3,x_4$. Construire une base de $E \cap F$.

3) Préciser la dépendance des systèmes de vecteurs suivants appartenant à $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$:

a) $(3,2)$, $(4,-1)$, $(5,-2)$ ;

b) $(9,-3,7)$, $(1,8,8)$, $(5,-5,1)$ ;

c) $(2,-1,5,7)$, $(3,1,5,-2)$, $(1,1,1,-4)$.

4) Démontrer que les fonctions : sin x, cos x, sin 2x, cos 2x, ..., sin n x, cos n x, sont linéairement indépendantes.

5) Soit $I = \{-N, -N+1, \dots, -1,0,1,\dots,N\}$ , $N \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la famille $\{e^{nx} / n \in I\}$ est libre dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .

6) $\alpha,\beta,\gamma$ étant trois nombres réels distincts deux à deux, montrer que les polynômes A,B et C forment une base de l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

$$A(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \; ; \; B(x) = \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} \; ; \; C(x) = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} .$$

Décomposer les polynômes 1, x, $x^2$ sur cette base.

7) Montrer que $(n+1)$ polynômes $P_k(x)$, $\deg P_k = k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Applications:

a) Démontrer que les polynômes : 1, x, $x(x+1)$, ....., $x(x+1)...(x+n)$, forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n+1$.

b) Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels de degré n. Montrer que $P(x)$ et ses n dérivées sont linéairement indépendants.

8) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les systèmes de vecteurs suivants :

i) $a_1 = (1,2,2,1)$, $a_2 = (5,6,6,5)$, $a_3 = (-1,-3,4,0)$, $a_4 = (0,4,-3,-1)$ ;

ii) $a_1 = (2,-5,3,10)$, $a_2 = (1,-1,1,3)$, $a_3 = (3,3,1,1)$ ;

iii) $a_1 = (1,2,5,-1)$, $a_2 = (3,6,5,-6)$, $a_3 = (2,4,0,-2)$ ;

iv) $a_1 = (2,0,4,2)$, $a_2 = (1,2,-2,-3)$, $a_3 = (3,1,3,4)$, $a_4 = (2,4,9,5)$.

Etudier, dans chaque cas, l'indépendance ou la relation de dépendance s'il en existe une. Déterminer une base de chacun des sous-espaces engendrés.

*9) Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Les systèmes:

$B' = (e_1, e_1+e_2, ..., e_1+e_2+...+e_n)$, $B'' = (e_1+e_2, e_2+e_3, ..., e_{n-1}+e_n, e_n+e_1)$,

sont-ils des bases de E?

Le système $\mathcal{S} = \{e_i - e_j \,/\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ est-il générateur de E?

## Chapitre 4

### Théorème de la base incomplète. Dimension d'un espace vectoriel

1) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les trois vecteurs :

$(1,4,-1,0)$, $(6,10,1,0)$ $(2,2,1,1)$.

Déterminer un quatrième vecteur complétant une base. On choisira un vecteur ayant le plus possible de composantes nulles.

2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$, constituée en partie par une base du sous-espace E ayant pour générateurs:

$g_1 = (2,-2,3,1)$, $g_2 = (-1,4,-6,-2)$.

3) Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par:

$X_1 = (2,2,1,0)$ , $X_2 = (1,4,2,-1)$, $X_3 = (2,1,-1,0)$, $X_4 = (2,-5,4,2)$

et $Y_1 = (2,1,4,5)$, $Y_2 = (1,2,3,4)$.

Déterminer les dimensions de E,F, E+F, E$\cap$F et trouver une base de chacun d'eux.

4) Même exercice avec :

a) $X_1 = (1,2,-1,-2)$, $X_2 = (3,1,1,1)$, $X_3 = (-1,0,1,-1)$ et

$Y_1 = (2,5,-6,-5)$, $Y_2 = (-1,2,-7,-3)$.

b) $X_1 = (1,2,0,1)$ , $X_2 = (2,1,3,1)$ , $X_3 = (1,-4,6,-1)$ et

$Y_1 = (1,2,1,0)$, $Y_2 = (-1,1,1,1)$ , $Y_3 = (2,-1,0,1)$ $Y_4 = (2,2,2,2)$ .

## Chapitre 5

### Rang d'un système de vecteurs, rang d'un système d'équations

1) Déterminer le rang du système linéaire suivant, où a est un paramètre :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ ax+y+az=0 \end{cases}$$

2) Déterminer le rang du système linéaire suivant, où m est un paramètre:

$$\begin{cases} mx+2my+z+2t=0 \\ 2x+my+2mz+t=0 \\ x+2y+mz+2mt=0 \\ 2mx+y+2z+mt=0 \end{cases}$$

3) Déterminer les rangs des systèmes linéaires suivants (a et b sont des paramètres) :

$$\begin{cases} x+y+2z+3t=0 \\ x+(2-a^2)y+2z+3t=0 \\ 2x+3y+z+5t=0 \\ 2x+3y+z+(9-a^2)t=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} ax+a^2y=0 \\ x+(2a+b)y+(a+b)^2z=0 \\ y+(2a+3b)z+(a+2b)^2t=0 \\ z+(2a+5b)t=0 \end{cases}$$

4) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le système $\mathcal{S}$ des vecteurs suivants :

$a=(1,2,0)$ $b=(0,1,1)$ $c=(1,0,2)$ $d=(1,1,1)$

Calculer le rang de $\mathcal{S}$.

Trouver une relation linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{S}$.

Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ extraites de $\mathcal{S}$.

5) Soit $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{C}^3$. On pose :

$$u_1 = (p-2)e_1 + 2e_2 + 2p\, e_3$$

$$u_2 = 2e_1 + p\, e_2 + 2(p+1)\, e_3$$

$$u_3 = -e_1 + 2\, e_2 + (p+1)e_3$$

Déterminer le rang de $(u_1, u_2, u_3)$ suivant les valeurs du paramètre p.

6) Calculer les rangs des systèmes de vecteurs de E suivants :

a) $E = \mathbb{R}^4$ ;

$a = (2,1,3,-1)$, $b = (4,2,1,5)$,

$c = (3,1,5,2)$, $d = (5,2,3,8)$.

b) $E = \mathbb{R}_3[X]$;

$P_1(X) = 3 + 3X + X^2 + X^3$, $P_2(X) = 1 - X - X^2 + X^3$,

$P_3(X) = -1 - X + X^2 + X^3$, $P_4(X) = 3 - 3X + X^2 - X^3$.

7) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Déterminer suivant la valeur de $\alpha$, le rang du système de vecteurs $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de E définis par :

$$x_1 = e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3 + a^3 e_4,$$

$$x_2 = \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 + e_4,$$

$$x_3 = \alpha^2 e_1 + \alpha^3 e_2 + e_3 + \alpha e_4,$$

$$x_4 = \alpha^3 e_1 + e_2 + \alpha e_3 + \alpha^2 e_4,$$

$$x_5 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

8) Donner les rangs des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 0 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

9) Résoudre le système suivant à $(p+1)$ inconnues réelles :

$$\begin{cases} x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \dots + C_n^p x_p = 0 \\ x_0 + C_{n+1}^1 x_1 + C_{n+1}^2 x_2 + \dots + C_{n+1}^p x_p = 0 \\ . \\ . \\ . \\ x_0 + C_{n+p}^1 x_1 + C_{n+p}^2 x_2 + \dots + C_{n+p}^p x_p = 0 \end{cases}$$

où $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $0 < p \leq n$.

## Chapitre 6

# Applications linéaires

1) Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer pour chacune d'elles le noyau et l'image:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y) = (3x-y,\ 2x+4y,\ 5x-y)$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (z, x+y)$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) = (x+2y, y-z,\ x+2z)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $f(x,y,z) = (2x+3y-8z, x+y,\ 4x-5x,\ 6y)$

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z,t) = (3x-4y+2x-5t, 3x-z+2t)$

2) Montrer que toute rotation du plan $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire.

**Dans tout les exercices qui suivent, E désigne un espace vectoriel sur un corps K.**

3) Soient f un endomorphisme de E et $\lambda$ un élément de K. Montrer que: $E_\lambda = \{x \in E / f(x) = \lambda\, x\}$ est un s.e.v de E. Examiner le cas où $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

4) Projections.

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E. La projection sur F parallèlement à G est l'application linéaire $p: E \to E$ définie par $p(x+y) = x$, où $x \in F$, $y \in G$. Montrer que cette projection vérifie :

a) $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.

b) F est le s.e.v. des éléments de E invariants par p.

c) $p \circ p = p$.

5) Un endomorphisme $p$ de $E$ est appelé un projecteur si $p \circ p = p$.

i) Montrer que $p$ est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.

ii) Si $p$ est un projecteur, montrer :

a) $Im\,(Id_E - p) = Ker\,p$.

b) $Ker\,(Id_E - p) = Im\,p$.

c) $E = Im\,p \oplus Ker\,p$.

d) En déduire que $p$ est la projection vectorielle sur $Im\,p$ parallèlement à $Ker\,p$.

iii) Soient $p$ un projecteur et $u$ un endomorphisme de $E$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

a) $p \circ u = u \circ p$.

b) $Ker\,p$ et $Im\,p$ sont stables par $u$.

iv) Soient $p$ et $q$ deux projecteurs. Trouver une CNS pour que $p+q$ soit un projecteur.

6) Symétries vectorielles.

i) Soient $F$ et $G$ deux s.e.v supplémentaires de $E$. La symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est l'application linéaire $s : E \to E$ définie par: $s(x+y) = x-y$, où $x \in F$, $y \in G$. Montrer que cette symétrie vérifie :

a) $s$ est un isomorphisme.

b) $F$ est le s.e.v des éléments de $E$ invariants par $s$, et $G$ est le s.e.v des éléments de $E$ transformés en leur opposé.

c) $s \circ s = Id_E$ ($s$ est une involution).

ii) Soit $s$ un endomorphisme de $E$ vérifiant $s \circ s = Id_E$. Montrer que :

a) $E = Ker\,(s - Id_E) \oplus Ker\,(s + Id_E)$.

b) $s$ est la symétrie par rapport à $Ker\,(s - Id_E)$ parallèlement à $Ker\,(s + Id_E)$.

7) Soient F et G deux s.e.v. de E et f l'application linéaire : $F \times G \to E$, définie par: $f(x,y) = x + y$.

a) Déterminer Im f et Ker f.

b) Montrer que Ker f est isomorphe à $F \cap G$.

c) En déduire la formule :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

8) Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un espace vectoriel sur K, $(b_1, \ldots, b_n)$ une suite d'éléments de F.

i) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f: E \to F$, vérifiant :

$\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n, f(e_i) = b_i$.

ii) Soient A un s.e.v de E, et B un s.e.v de dimension finie de F vérifiant :

$\dim A + \dim B = \dim E$. Montrer qu'il existe une application linéaire :

$f : E \to F$, vérifiant $\operatorname{Ker} f = A$ et $\operatorname{Im} f = B$. Est-elle unique ?

Application : Trouver $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linéaire vérifiant: $\operatorname{Ker} f = \{(x,x,x) / x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(a,b,0,0)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

* 9) On pose $f^0 = Id_E$ et $f^n = f \circ \ldots \circ f$, n fois $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ et $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$.

b) $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1} \Rightarrow \operatorname{Ker} f^{n+1} = \operatorname{Ker} f^{n+2}$

En déduire l'existence d'un entier $n_0$ vérifiant :

$n < n_0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f^n \neq \operatorname{Ker} f^{n+}$ et $n \geqslant n_0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ker f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$

En déduire que l'entier $n_0$ du b) vérifie aussi :

$n < n_0 \Rightarrow \operatorname{Im} f^n \neq \operatorname{Im} f^{n+1}$ et $n \geqslant n_0 \Rightarrow \operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^{n+1}$

d) $E = \operatorname{Ker} f^{n_0} \oplus \operatorname{Im} f^{n_0}$, $n_0$ étant l'entier du b).

e) L'homomorphisme $g : \operatorname{Im} f^{n_0} \to \operatorname{Im} f^{n_0}$ induit par f (i.e défini par : $g(x) = f(x)$) est un isomorphisme.

* 10) i) Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E, telle que $(e_1, ...., e_p)$ soit une base de Ker f et $(f(e_{p+1}), ... f(e_n))$ une base de Im f.

ii) Soient f et g deux endomorphismes de E.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme h de E tel que : $g = h \circ f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

b) Montrer qu'il existe un endomorphisme $\ell$ de E tel que $f = g \circ \ell$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

## Chapitre 7

### Matrices

1) Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^n$ en remarquant que $A = 2I+B$.

2) Montrer que le produit de deux matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure).

3) Soient trois réels p,q,r vérifiant : $p^2 + q^2 + r^2 = 1$. On considère la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} p^2 & qp & rp \\ pq & q^2 & rq \\ pr & qr & r^2 \end{bmatrix}$$

et on pose $B = I_3 - A$

Montrer que $A^2 = A$ et en déduire AB, BA et $B^2$.

4) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_K(3\times 3)$ .

On dit que la matrice A est magique de somme S si :

$S$ = la somme des termes de la ligne i ($i = 1,2,3$)

= la somme des termes de la colonne j ($j = 1,2,3$)

$= a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$= a_{31} + a_{22} + a_{13}$

a) En considérant parmi les équations précédentes celles qui contiennent $a_{22}$, montrer que : $S = 3\,a_{22}$.

b) Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ donnés, montrer qu'il existe une seule matrice magique $M(a,b,c)$ telle que :

$S = 3a$ , $a_{11} = a+b$ , $a_{31} = a+c$ . Ecrire $M(a,b,c)$.

5) Soit A la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ Calculer ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ .

b/ Soit $A \in \mathcal{M}_K(m\times n)$.

Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont des matrices symétriques.

c/ Soient A et $B \in \mathcal{M}_K(n\times n)$ .

On suppose A et B symétriques. A quelle condition la matrice AB est-elle symétrique ?

6) Pour tout nombre réel t, soit $M_t$ la matrice :

$$M_t = \begin{bmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}$$

a/ Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2 : M_s . M_t = M_{s+t}$

b/ En déduire l'existence et l'expression de $(M_t)^{-1}$.

7) Pour tout nombre réel θ, soit $A(\theta)$ la matrice :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

a/ Montrer que $A(\theta)$ est inversible pour tout θ et que $[A(\theta)]^{-1} = A(-\theta)$.

b/ En développant $[A(\theta)+A(-\theta)]^n$ , montrer que l'on peut déterminer $\cos^n\theta$ en fonction de cosinus d'arcs multiples de θ.

*8) Soit $A \in \mathcal{M}_K (n\times n)$.

a) On suppose que $A^3 = 0$.

Montrer que $I-A$ est inversible et que $(I-A)^{-1} = I+A+A^2$.

b) On suppose maitenant qu'il existe $p \geq 2$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $(I-A)$ est inversible et calculer $(I-A)^{-1}$.

c) On suppose A triangulaire supérieure et telle que les coefficients de la diagonale soient nuls. Démontrer que les k dernières lignes de $A^k$ $(k \geq 1)$ sont nulles. En déduire que A satisfait au b).

d) Application : Calculer par cette méthode l'inverse de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) a/ Soit:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer $A^2$ et $A^3$ et résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ :

$$x I_3 + yA + zA^2 = A^3$$

En déduire que A est inversible et calculer $A^{-1}$ .

b/ Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$ vérifiant :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = 0 ,$$

les $a_i$ étant réels et $a_0 \neq 0$, est inversible et exprimer son inverse.

10) On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a/ Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire que A est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de A et de I.

b/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n$ peut s'écrire sous la forme:

$$A^n = u_n A + v_n I \quad , \quad \text{où } u_n \text{ et } v_n \text{ sont des réels.}$$

c/ On pose: $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$ . Calculer $\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n$ et $\beta_n$, puis $u_n$ et $v_n$ en fonction de n.

d/ Calculer $A^n$.

11) a/ Soient $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ les 3 racines cubiques de l'unité. On considère les matrices :

$$A_k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_k^2 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & 1 & \varepsilon_k^2 \\ \varepsilon_k^2 & \varepsilon_k & 1 \end{pmatrix} \qquad k = 1,2,3.$$

Calculer les produits $A_k A_\ell$ en distinguant les deux cas $k \neq \ell$ et $k = \ell$.

b/ Montrer que toute matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

où a,b et c sont trois réels, peut s'écrire de manière unique sous la forme: $M = x\,A_1 + y\,A_2 + z\,A_3$, où x,y et z sont des nombres complexes que l'on calculera en fonction de a,b,c.

c/ En déduire que : $M^n = x^n A_1 + y^n A_2 + z^n A_3$.

Appliquer ce résultat lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$.

12) Soit $\Delta_{ij} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$, la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1.

Montrer que $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$ commute avec toute matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$ si et seulement si elle commute avec les $n^2$ matrices $\Delta_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

En déduire la forme particulière de B.

<u>Matrice d'une application linéaire</u>.

13) Trouver la représentation matricielle de chacune des applications linéaires de l'exercice 1 du chapitre 6 .

14) Déterminer la matrice de chacun des opérateurs suivants dans la base indiquée.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , défini par $f(x,y) = (4x-2y, 2x+y)$ ,
dans la base $B = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (-1,0)$ .

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , défini par : $f(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$ , dans la base
$B = (e_1, e_2, e_3)$, avec $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,0,0)$ .

15) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ , l'application linéaire définie par :

$f(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$

Déterminer la matrice de f dans les bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$e_1 = (1,1,1)$ $\quad e_2 = (1,1,0)$ $\quad e_3 = (1,0,0)$

$\varepsilon_1 = (1,3)$ $\quad \varepsilon_2 = (1,4)$

16) Considérons le corps des complexes $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

Soit T l'opérateur de conjugaison sur $\mathbb{C}$ tel que : $T(z) = \overline{z}$ . Trouver la matrice représentant T dans la base$(1,i)$ , puis dans la base $(1+i, 1+2i)$ .

17) Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a)Déterminer u , Ker u et Im u .

b)Montrer que u est la composée d'une homothétie et d'une projection vectorielle sur un plan,parallèlement à une droite,que l'on déterminera.

18) Soit E = $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de chacun des opérateurs linéaires suivants, lorsque E est muni de sa base canonique :

$f : E \to E$, défini par $f(M) = AM$.

$g : E \to E$, défini par $g(M) = MA$.

$h : E \to E$, défini par $h(M) = AM - MA$.

19) a) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit E le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $\{e^t, e^{2t}, t\,e^{2t}\}$. Montrer que l'application D de E dans E définie par: $D(f) = f'$, est un endomorphisme de E. Déterminer sa matrice dans la base ci-dessus.

b) Même question avec: $F = \mathrm{Esp}\,\{e^{5t}, t\,e^{5t}, t^2\,e^{5t}\}$.

20) Soit E = $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X de degré $\leqslant 3$. On munit E de la base $B = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\}$.

Montrer que l'application f de E dans E ,définie par :

$f(P(X)) = (1-X^2)\,P''(X) - 2X\,P'(X)$,

est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base B.

21) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ . On considère l'application $f : E \to E$ , définie par :

$$f(aX^2+bX+c) = cX^2+bX+a .$$

a)Montrer que f est un isomorphisme.

b) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de E .

Calculer $A^2$, $A^{-1}$ .

c) Soient $E_1 = \{P \in E \,/\, f(P) = P\}$ et $E_2 = \{P \in E \,/\, f(P) = -P\}$ .

Montrer que $E_1$ et $E_2$ sont des s.e.v. de E et que : $E = E_1 \oplus E_2$ .
Calculer les matrices des projections associées à cette somme directe, dans la base canonique de E.

<u>Chapitre 8</u>

## Rang d'une matrice. Méthode de calcul du rang : opérations sur les lignes, sur les colonnes

1) Déterminer le rang des matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & -7 & -2 & -11 \\ 2 & 1 & -9 & -10 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Déterminer suivant les valeurs du réel a le rang des matrices :

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a+1 & 1-a & 2 & 1-a \\ 4 & 1+a & 3 & 1 \\ 2a+1 & a & 2a+1 & a \\ 3a+1 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) a) Soient A et B $\in \mathcal{M}_K(n \times n)$. Montrer que :

rang (AB) $\leqslant$ min (rang A, rang B)

b) On suppose que rang A = n. Montrer que :

rang AB = rang BA = rang B

c) Donner des exemples de matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(2\times 2)$ non nulles telles que :

rang (AB) < min (rang A, rang B)

rang (AB) = min (rang A, rang B)

4) Déterminer suivant les valeurs de $\alpha$ et de n, le rang de la matrice carrée d'ordre n $(n \geqslant 2)$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5) Déterminer les relations entre $\alpha$ et n pour que la matrice carrée d'ordre n $(n \geqslant 2)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1+\alpha & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\alpha & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

soit inversible.

(On distinguera soigneusement les cas $1+\alpha \neq 0$ et $1+\alpha = 0$)

Chapitre 9

## Calcul de l'inverse d'une matrice par manipulation sur les lignes ou sur les colonnes

1) Calculer l'inverse des matrices suivantes en utilisant seulement des transformations sur les lignes pour les réduire:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer les inverses des matrices suivantes:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & O & \cdots\cdots & O \\ O & a_2 & \cdots\cdots & O \\ \cdot\cdot & & & \\ \cdot\cdot & & & \\ O & O & \cdots\cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} O \cdots\cdots & O & a_1 \\ O & a_2 & O \\ \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & \\ a_n & O & O \end{bmatrix} \text{ où } a_1 a_2 \ldots a_n \neq O.$$

3) Dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(2\times2)$, déterminer l'inverse de :

$$A=\begin{bmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Déterminer les inverses des matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } a \neq b, a \neq c, b \neq c,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix} \text{avec } a,b,c \neq 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

en n' utilisant que des transformations sur les lignes.

5) Montrer que la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse en n'utilisant:

a) que des transformations sur les lignes,

b) que des transformations sur les colonnes.

6) Même problème que précédemment pour les matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

7) Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \cdots\cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & & n-2 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 \\ 0 & 1 & C_2^1 & C_3^1 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & C_3^2 & C_n^2 \\ \ldots\ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_n^n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

8) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a/ Calculer $A^{-1}$.

b/ Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

9) Soit $m \neq \pm 1$. Montrer que la matrice:

$$\begin{bmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ m & 1-m & m \end{bmatrix}$$

est inversible et résoudre le système :

$$\begin{cases} (m-1)x + y - z = m \\ 2x + my + z = 3 \\ mx + (1-m)y + mz = m^2 \end{cases}$$

10) a) Montrer que la matrice suivante est inversible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre le système $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ \quad y + 3z + 2t = 9 \\ 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$

c/ Etant donnée l'équation supplémentaire: $2x - 3y + az + 4t = b$ , déterminer avec justification a et b de sorte qu'elle soit vérifiée par toutes les solutions du système initial.

11) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a/ Calculer $A^{-1}$.

b/ Résoudre le système:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

## Chapitre 10

# Déterminants

**1)** Calculer les déterminants:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

**2)** Montrer que les déterminants suivants sont nuls :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$ $(a \in \mathbf{R})$ d) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & & a_2-b_n \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$ $(n>2)$

**3)** Calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

4) Soient a,b,c,d quatre réels et A la matrice:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer le produit $A\,{}^{t}A$ et en déduire det A.

5) Démontrer l'inégalité : $(ac+bd)^2 \leqslant (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

(Considérer la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a,b,c,d sont réels).

6) Soient a,b,c trois complexes et les matrices:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$ ( j racine cubique de l'unité).

a) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D telle que MJ = JD.

b) En déduire la décomposition de det M en produits de facteurs.

7) Calculer à l'aide d'une formule de récurrence les deux déterminants d'ordre n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

8) Calculer le déterminant d'ordre n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & n-3 & n-2 \\ .. & & & & & \\ .. & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

9) Calculer le déterminant d'ordre n+1:

$$P_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & & 0 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

*10) Etablir une formule de récurrence pour le déterminant $D_n$ tel que:

$a_{ij} = 1 (i \neq j)$ et $a_{ii} = 1+\alpha_i$ (les $\alpha_i$ étant des réels donnés).

11) Etablir une relation de récurrence entre $D_n$, $D_{n-1}$, $D_{n-2}$ pour le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

En déduire une relation de récurrence pour la suite $u_n = D_n - D_{n-1}$. Calculer $D_n$.

12) Calculer le déterminant suivant (en le considérant comme un polynôme) :

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

*13) Soit $(x_k)$ une famille de n éléments de $\mathbb{C}$ et soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ f(x) = \prod_{k=1}^{n} (x_k - x)$$

Soient a,b deux éléments non nuls et distincts de $\mathbb{C}$. On considère le déterminant d'ordre n défini par :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a \\ b & x_2 & a & & a \\ b & b & x_3 & a & a \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ b & & b & x_{n-1} & a \\ b & b & b & b & x_n \end{vmatrix}$$

a) Démontrer que $D = f(b) + b\,\Delta_1$ et que $D = f(a) + a\Delta_2$, où $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont des déterminants d'ordre n-1.

b) Montrer que : $D = [a\,f(b) - b\,f(a)]\ (a-b)^{-1}$.

*14) Calculer la dérivée de la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x \\ \sin x & \cos x & 1 \\ \ln|1+x| & 1+x & 1 \end{vmatrix}$$

(Exprimer cette dérivée sous forme d' une somme de déterminants).

Chapitre 11

## Applications des déterminants

1) Vérifier si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses quand c'est possible :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} -1+i & 1-i & -1 \\ 1-2i & -1+i & -i \\ 2-i & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

2) Soit $\varphi_m$ l'endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ -2 & m & -2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}, \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer m pour que $\varphi_m$ soit un isomorphisme et calculer dans ce cas la matrice de $\varphi^{-1}_m$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Dans le cas où $\varphi_m$ n'est pas un isomorphisme, déterminer la dimension du noyau de $\varphi_m$.

*3) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$.

Montrer que s'il existe deux endomorphismes injectifs de E, u et v tels que: $u \circ v + v \circ u = 0$, alors n est pair.

*4) Soit K un corps commutatif. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K définie par :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} a_{ij} = 1 & \text{si } j \leqslant i \\ a_{ij} = 0 & \text{si } j > i \end{array}$$

Montrer que A est inversible et calculer $A^{-1}$.

(On pourra considérer A comme la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n sur K rapportée à une base).

5) Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6) a étant un nombre réel,

a) Déterminer le rang de la matrice :

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{aligned} (2a+1)x - ay + (a+1)z &= a-1 \\ (a-2)x + (a-1)y + (a-2)z &= a \\ (2a-1)x + (a-1)y + (2a-1)z &= a \end{aligned}$$

7) Discuter suivant les valeurs des rationnels a et b , le rang de la matrice M à coefficients dans $\mathbb{Q}$ :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix}$$

8) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant les valeurs du réel m le système suivant:

$$\begin{cases} x+y+z = m+1 \\ mx+y+(m-1)z = m \\ x+my+z = 1 \end{cases}$$

9) Résoudre dans $\mathbb{C}$ et discuter suivant les valeurs de a et b le système suivant :

$$\begin{cases} -ax + by + z = 0 \\ x - ay + bz = 0 \\ bx + y - az = 0 \end{cases}$$

10) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter suivant les valeurs des paramètres a,b,c,d le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

11) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Dans chacun des cas suivants, donner une base de f(E). En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur X de coordonnées $(X_1, X_2, X_3)$ dans $\mathcal{B}$ appartienne à f(E):

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

12) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -5 & -7 \\ -1 & 9 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $f(\mathbb{R}^4)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $X = (a,b,c)$ appartienne à $f(\mathbb{R}^4)$.

13) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $f(\mathbb{R}^3)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X = (a,b,c,d)$ appartienne à $f(\mathbb{R}^3)$.

Même question pour :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 12

### Valeur propre, vecteur propre. Polynôme caractéristique. Diagonalisation des matrices carrées, des endomorphismes. Théorème de Cayley-Hamilton.

1) Diagonaliser les matrices suivantes, et déterminer les sous-espaces propres :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Donner des matrices $P$ et $P^{-1}$ telles que $P^{-1}AP$, ..., $P^{-1}DP$ soient diagonales).

2) Trouver toutes les matrices carrées réelles $2 \times 2$ admettant une valeur propre double qui sont diagonalisables.

3) On considère la relation :

$$(R) \begin{cases} u_{n+1} = -7u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 12u_n + 10v_n \end{cases} \quad \text{pour } n \geqslant 0$$

a) Montrer qu'il existe une matrice $(2 \times 2)$, $A$ telle que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

b) En déduire la solution générale de (R).

4) Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, et f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que P est le polynôme caractéristique de f.

a) Montrer que tout vecteur propre de f est dans le noyau de :

$P(f) = a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}$.

b) En déduire que P(f) est l'application nulle si A est diagonalisable.

5) Soit: $q(t) = t^2 - 4t + 3$. Calculer q(A), q(B) et q(C),

où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Le polynôme: $p(t) = (t-1)^3$ est le polynôme caractéristique de

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver un polynôme q(t) tel que q(A) = q(B) = 0.

8) a) Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$$

admet-elle une valeur propre double ?

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Calculer $M^n$, $n \in \mathbb{N}$, lorsque:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

9) Soit A une matrice symétrique d'ordre n. On suppose que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont deux valeurs propres distinctes de A , de vecteurs propres $v_1$ et $v_2$. Montrer que: $v_1({}^t v_2) = 0$.

10) Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 2 \\ -m & 5m & 4m-1 & 6m-2 \\ m & -m & 1 & -2m \\ 0 & -m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Pour quelles valeurs de m, A est-elle diagonalisable?

c) Prenons m = 1. Trouver une base de vecteurs propres ; déterminer la matrice de changement de base ainsi que son inverse.

11) Soient A et B deux matrices ( $n \times n$). Supposons que A admette n valeurs propres distinctes. Montrer que: AB = BA , si et seulement si tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

*12) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E vérifiant : $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que, si $\lambda$ est une valeur propre de f et si $E_\lambda(f)$ est le sous-espace propre de f associé à $\lambda$, alors $E_\lambda(f)$ est stable par g.

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre commun à f et g.

c) On suppose maintenant que f possède n valeurs propres distinctes. Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g. En déduire que f et g sont diagonalisables dans une même base.

d) Montrer que, réciproquement, si f et g sont diagonalisables dans une même base, f et g commutent.

13) Applications de l'exercice 12.

a) Trouver les matrices qui commutent avec la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Trouver les matrices B vérifiant $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

14) Soit A une matrice $(n\times n)$. On suppose que son polynôme caractéristique P vérifie: $P(0) \neq 0$.

a) Démontrer que A est inversible.

b) Soit Q le polynôme caractéristique de $A^{-1}$.

Montrer que $Q(X) = \dfrac{(-1)^n}{P(0)} X^n \; P(1/X)$.

c) Calculer : Q pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

*15) Soit la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^2$. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b) Calculer le rang de $A+I$ et $A-I$ (distinguer le cas où n est pair ou impair ).

c) En déduire que A est diagonalisable. Diagonaliser A pour $n = 2,3,4$.

16) i)Soit la matrice complexe:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2$ et $A^3$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A et de $A^2$.

ii) Soit la matrice complexe $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

En remarquant que B est combinaison linéaire de I, A et $A^2$, déterminer les valeurs propres de B (sans calculer son polynôme caractéristique).

Chapitre 13

## Applications

1) a) Diagonaliser la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer $A^n$.

c) Soient les suites $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases}$$

Calculer $u_n$, $v_n$, $w_n$ en fonction de n.

d) Résoudre le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

Déterminer la solution satisfaisant les conditions initiales:

$x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

2) Mêmes questions que le 1) avec la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et les conditions initiales $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 5$.

3) Mêmes questions que le 1) avec la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = -1$.

4) Soient les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -10\,u_n - 28\,v_n \\ v_{n+1} = 6\,u_n + 16\,v_n \end{cases}$$

Calculer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $u_0$, $v_0$ et n.

5) Soit $(u_n)$ une suite de réels définie par $u_0$, $u_1$, $u_2$ et la relation:

$u_{n+3} = -3u_n + 5u_{n+1} - u_{n+2}$ . On se propose de calculer $u_n$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $u_2$ et n.

a) Exprimer la relation en écriture matricielle, $X_{n+1} = M X_n$, en posant: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

b) Calculer $M^n$ à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton (Indication: si P(x) est le polynôme caractéristique de M, la relation de la division euclidienne de $x^n$ par P(x) s'écrit : $x^n = P(x)\,Q(x) + ax^2 + bx + c$ , a,b,c étant des coefficients que l'on déterminera ).

c) En déduire $u_n$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $u_2$ et n.

6) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire les matrices $B^n$, $n \geq 2$.

7) Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+z \\ \dfrac{dy}{dt} = z+x \\ \dfrac{dz}{dt} = x+y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y+z+3\,e^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = z+x+3\,t\,e^{-t} \\ \dfrac{dz}{dt} = x+y+3\,t^2\,e^{-t} \end{cases}$

8) Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

## Chapitre 14

### Triangularisation

**1)** a)Soit la matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable? Triangularisable? Si oui trouver une matrice A' diagonale ou triangulaire supérieure semblable à A. Déterminer P telle que : $A' = P^{-1}AP$.

b) Mêmes questions avec la matrice réelle $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**2)** a) Triangulariser les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer $B^n$, $n \in \mathbb{N}$.

**3)** Triangulariser les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4) Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} t+1 & t^2-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui dépend du paramètre t et qui représente une transformation ($\mathcal{T}$) dans une base donnée du plan Oxy.

a) Cette matrice A est-elle toujours diagonalisable ? Etudier le cas d'exception.

b) Trouver dans ce cas une matrice triangulaire semblable et préciser la transformation $\mathcal{T}$ correspondante.

5) Déterminer, en utilisant des réduites triangulaires, les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6) Calculer $A^{100}$, où A est la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

7) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer une matrice triangulaire B semblable à A , c'est-à-dire égale à $P^{-1}AP$.

c) Déterminer une matrice de Jordan C semblable à A (les seuls termes non nuls en dehors de la diagonale sont des 1, et appartiennent à la parallèle située immédiatement au dessus de la diagonale).

d) Calculer $C^n$ , où n est un entier positif et indiquer sans faire les calculs comment on peut obtenir $A^n$.

8) a) Déterminer les sous-espaces propres de la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Calculer $(A+I)^2$.

c) En déduire une base dans laquelle la matrice devient :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9) Soient les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Montrer que A est semblable à B. Trouver une matrice de passage P.

10) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ou triangularisables dans $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ? Si oui trouver une matrice diagonale ou triangulaire semblable.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

11) Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a < b$$

Déterminer P et $P^{-1}AP$.

## Cours d'analyse. Têtes de chapitres

1- Suites numériques réelles ou complexes. Structure de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Critère de CAUCHY.

2- Limites de fonctions numériques. Limite d'une fonction en un point. Relation entre limites de fonctions et limites de suites. Limites de fonctions monotones bornées. Limites d'une fonction en $\pm\infty$ ; limites infinies.

3-Fonctions continues. Continuité et convergence. Prolongement par continuité. Extrema d'une fonction continue dans un intervalle compact. Théorème des Valeurs Intermédiaires. Image continue d'un intervalle. Continuité uniforme (d'une fonction continue sur un intervalle compact).

4- Fonctions dérivables. Dérivées de fonctions, sommes, produits, quotients, composées ; des polynômes, fractions rationnelles. Dérivées des fonctions réelles monotones et de leurs réciproques. Extrema, Théorème de ROLLE, Théorème des accroissements finis, formules de TAYLOR (MAC LAURIN). Interpolation polynômiale (polynômes de LAGRANGE).

5- Fonctions élémentaires.

- Fonctions exponentielles réelles, ln, ch, sh, puissance, fonctions réciproques.

- Fonction exponentielle complexe, trigonométriques, réciproques, nombre $\pi$.

6- Polynômes. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Divisibilité, racines d'un polynôme, polynôme dérivé. Division suivant les puissances croissantes.

7- Fonctions rationnelles à une variable. Décomposition en éléments simples. Pratique de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

8- Développements limités.

9- Graphes de fonctions réelles. Etude locale, position du graphe par rapport à la tangente, points d'inflexion. Branches infinies.

10 - Intégrales et primitives. Intégrales des fonctions continues et primitives. Interprétation géométrique de l'intégrale. Théorème de la moyenne. Règle de Chasles. Intégration par parties. Changement de variables. Calcul de primitives.

11 - Equations différentielles.

12- Courbes planes. Courbure. Tangente, vecteur vitesse. Etude locale, branches infinies. Construction de courbes paramétrées planes. Courbes rectifiables, longueur de l'arc.

Chapitre 1

## Suites numériques

1) a) Soient a et b deux nombres réels .

Montrer que $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ . Etudier le cas d'égalité.

b) En déduire la borne supérieure de l'ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$$A = \{xy/(x,y) \in \mathbb{R}_+^{\,2} \text{ et } x^2+y^2=6\}.$$

2) Soit E l'ensemble des nombres réels de la forme:

$$u_n = \frac{n-1/n}{n+1/n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que E est borné, trouver sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Etudier l'existence d'un plus grand et d'un plus petit élément.

3) Soient $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , $b_i > 0$ , $1 \leqslant i \leqslant n$ .

a) Soient $m = \operatorname{Inf} a_i$, $M = \operatorname{Sup} a_i$. Montrer que

$$m \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leqslant M$$

b) Montrer que : $\operatorname{Inf}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \leqslant \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} \leqslant \operatorname{Sup}\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ .

**10)** Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 1$ par: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ ,

n'est pas une suite de Cauchy. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ .

**11)** Utiliser le critère de Cauchy pour montrer que la suite de terme

général: $u_n = \dfrac{1}{2+1} - \dfrac{1}{2^2+2} + \ldots + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{2^n+n}$ , est convergente.

**12)** Soit $(x_n)$ une suite réelle telle que : $0 < a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ , et

$$x_{n+2} = \sqrt{x_n \, x_{n+1}} \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq x_n \leq b$

b) Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que : $|x_{n+1} - x_n| < k\,|x_n - x_{n-1}|$

c) Montrer que la suite $(x_n)$ converge.

**13)** a) Soit $(u_n)$ une suite. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers $\ell$. Montrer que $(u_n)$ converge vers $\ell$.

b) Etudier la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}}$ .

c) Soit $(u_n)$ une suite. On suppose que les sous-suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent. Montrer que $(u_n)$ converge .

14) Etudier les suites suivantes définies par : $u_0 = +3$ et les relations :

a) $u_{n+1} = \dfrac{4(u_n - 1)}{u_n}$ b) $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2 + 1}$

(On s'inspirera de l'étude des graphes des fonctions numériques :
$x \to \dfrac{4(x-1)}{x}$ ; $x \to \dfrac{1}{x^2+1}$ )

15) On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_n = \sqrt{2 - u_{n-1}},\ n \geqslant 1 .$$

a) Montrer que l'on a pour tout $n \geqslant 1$ :

$1 \leqslant u_{2n+1} \leqslant 3/2$ et $\frac{1}{2} \leqslant u_{2n} \leqslant 1.$

Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in N}$ est décroissante, et que la suite $(u_{2n})_{n\in N}$ est croissante.

b) On pose : $y_n = u_{2n+1} - u_{2n}$, $n \geqslant 1$. Montrer que : $y_n \leqslant \frac{2}{3} y_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N}$ vers une limite que l'on déterminera.

16) Soit $(u_n)$ une suite bornée de nombres réels. On suppose que pour tout entier non nul n, on a : $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$. On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

a) Montrer que la suite $(v_n)$ est croissante et convergente.

b) Démontrer que $\lim v_n = 0$ .

*17) Soit une suite $(u_n)$ dont la limite est nulle.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(u_0 + \dots + u_n) = 0$.

b) On considère deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $\lim a_n = a$ et $\lim b_n = b$, on définit $c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1)$.

Démontrer qu'il existe un nombre M tel que :

$$|c_n - ab| \leqslant \frac{M}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (|a - a_k| + |b - b_k|)\right) \quad (\forall n \geqslant 0)$$

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = ab$.

18) Trouver la limite des suites définies par:

a) $u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Log} k}{k}\right)$.

b) $v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \, e^{\left(\frac{1}{n-k+1}\right)}\right)$ où $x_k$ est la suite définie par:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{k+1} = \sqrt{1 + x_k} \end{cases}$$

(utiliser l'exercice 17)

19) a) Soit $(u_n)$ une suite de nombres complexes.

Montrer que si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $\ell, \ell < 1$ alors $(u_n)$ tend vers zéro.

b) Exemples : trouver les limites des suites de terme général:

$$\frac{a^n}{n^p}, \frac{a^n}{n!}, \frac{n!}{n^n}, \frac{n^\alpha}{n!}$$

20) Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ et p un entier $\geqslant 1$, on pose $u_n = S_{np} - S_n$.

Montrer que la suite $(u_n)$ converge et que si L(p) désigne sa limite, on a :
$L(pq) = L(p) + L(q)$.

21) Soient $u_0 = a$, $v_0 = b$, $0 < a < b$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$.

a) Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites adjacentes.

b) Calculer $u_n$ et $v_n$ explicitement en posant $a = b \cos \alpha$, où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire que $\lim u_n = b \dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$

d) Application numérique : $a = 1$, $b = 2$ ; en déduire une valeur approchée de $\pi$ à $10^{-9}$ près.

**22)** On considère la suite de terme général :

$$S_{p,n} = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots + \frac{1}{(2n)^p}$$

(n et p sont des entiers, p est un paramètre ).

a) Montrer que si $p \geqslant 2$, $S_{p,n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (on cherchera un encadrement de $S_{p,n}$)

b) On prend $p = 1$, montrer que la suite $S_{1,n}$ est croissante et majorée.

c) Soit $u_n = \sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \dots + \sin \frac{1}{2n}$

Montrer que $u_n$ converge vers la même limite que $S_{1,n}$.

(rappel : pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x$).

**23)** a) Tracer le graphe de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

b) Trouver la fonction $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^n}{1 + x + x^2 + \dots x^{n+p-1}}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

✲ **24)** Soit $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, une fonction avec la propriété qu'il existe une suite $P_n(x)$ de polynômes de degré $\leqslant 3$ telle que :

$$\forall x \in [0,3], \quad \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = f(x)$$

Démontrer que $f(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant 3$.

**25)** Soient $f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ , définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ , $\forall x \in [0,1]$ .

b) Démontrer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$

**26)** a) Tracer dans un repère orthonormé la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. En déduire si k est un entier supérieur ou égal à 2 les inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$$

b) On pose $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que:

$$\frac{\ell n(n+1) - \ell n(2) + 1}{\ell n(n)} < \frac{U_n}{\ell n(n)} < 1 + \frac{1}{\ell n(n)}$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\ell n(n)} = 1.$$

**27)** Soient $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , définies par:

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et } f_n = f_1 \circ f_{n-1} \quad \text{si } n \geq 2$$

a) Trouver $f_n(x)$ en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

## Chapitre 2

# Limites de fonctions

1) Etudier la limite et éventuellement les limites à gauche et à droite de:

a) $\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$ en $x = 4$ b) $\dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$ en $x = 1$.

Quelles sont les limites de ces fonctions quand $x \to -\infty$, quand $x \to +\infty$ ?

2) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right)$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x} - 1}$, d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$ $(a \in \mathbf{R}^*_+, n, m \in \mathbf{N}^*)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^4+1}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$

3) Etudier les limites à droite et à gauche en 0 des fonctions f et g définies pour $x \neq 0$ par : $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $g(x) = \dfrac{1}{x+2|x|}$.

4) On rappelle la propriété suivante :

"Pour que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ tende vers b (a pouvant désigner $+\infty$ ou $-\infty$, b pouvant désigner $+\infty$ ou $-\infty$).

a) Soit: $f(x) = x^{\alpha} \sin x$, donner deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que : $f(x_n) = x_n^{\alpha}$, $f(y_n) = -y_n^{\alpha}$.

En utilisant la propriété rappelée ci dessus, montrer que pour $\alpha \geq 0$, f(x) ne tend pas vers une limite quand $x \to +\infty$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ pour $\alpha < 0$.

5) Les fonctions suivantes ont-elles une limite quand x tend vers 0 ?

a) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ b) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$

6) Montrer qu'une fonction monotone sur un intervalle ouvert I admet en tout point de cet intervalle une limite à gauche et une limite à droite finie.

7) Soient $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, définies par:

$$f_n(x) = \begin{cases} n x^n & \text{si } x \in [0,1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Trouver $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ $\forall x \in [0,1]$.

8) On considère la suite $(f_n)$ de fonctions réelles définies sur [0,1] par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+2)\,x \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n+2} \\[2ex] 2-(n+2)x \quad \text{si } \dfrac{1}{n+2} < x < \dfrac{2}{n+2} \\[2ex] 0 \quad \text{si } x > \dfrac{2}{n+2} \end{cases}$$

Etudier la convergence de $(f_n)$ sur [0,1].

9) Soit $(f_n)$ la suite de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{(n+1)(x+x^2)}{(n+1)\,x+1}$$

Montrer que la suite $(f_n)$ converge sur $\mathbb{R}^+$.

10) Soit $\alpha$ un nombre réel et $(f_n)$ la suite de fonctions réelles définies sur [0,1]

par :

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)^{\alpha}\left(\dfrac{x}{n+1} - x^2\right) \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n+1} \\[3ex] 0 \quad \text{si } \dfrac{1}{n+1} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de $\alpha$ la suite $(f_n)$ converge-t-elle sur [0,1]?

## Chapitre 3

### Continuité

1) En quels points de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues?

a) $f : x \to 3x + \dfrac{|2x|}{x}$ si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , $f(0) = 2$.

b) $g : x \to E(x) + E(2-x)$

c) $h : x \to -E\,(E(x)-x)$

d) $f_1 = g+h$  e) $f_2 = g\,h$  f) $f_3 = hog$  g) $f_4 = goh$

2) Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction sup $\{f,g\}$ est-elle continue ?

3) Soit f une fonction réelle définie et monotone sur $[0,1]$. Démontrer que f est continue à droite au point O si et seulement si la suite:

$$\left(f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n \in N} \text{ admet la limite } f(0).$$

4) Etudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

a) $f : x \to \dfrac{1}{2x}\,[(1+x)^n - 1]$  $(n \in \mathbf{N})$

b) $f : x \to x \sin \frac{1}{x}$

c) $f : x \to \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

d) $f : x \to \sin x \sin \frac{1}{x}$

e) $f : x \to \sin\,(1+x)\, \ell n\, |1+x|$

f) $f : x \to \cos x \cos \frac{1}{x}$ .

5) Etudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

6) Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant: $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $f = g$.

7) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^* \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$, définir $f^{-1}$. Etudier la continuité.

8) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout couple $(x,y)$ de nombres réels on ait : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

a) Démontrer que $f(n) = n\,f(1)$ pour tout entier relatif n.

b) Démontrer que: $f(\frac{1}{q}) = \dfrac{f(1)}{q}$ pour tout entier $q > 0$. En déduire que: $f(r) = r\,f(1)$ pour tout nombre rationnel r.

c) En déduire que : $f(x) = x\,f(1)$, pour tout nombre réel x.

9) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans ce même intervalle. Démontrer qu'il existe un point x de $[0,1]$ tel que $f(x) = x$.

10) Soit f une fonction réelle, bijective, continue, définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, $(a < b)$.

Montrer que si $f(a) < f(b)$, alors f est strictement croissante.

11) Soit $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$ , continue, telle que :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty .$$

Montrer que $\forall A > f(a)$, on peut trouver $c \in [a,b[$ tel que $f(c) = A$.

12) Soit $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 .$$

a) Montrer que pour tout A compris entre $f(a)$ et 1, il existe $c > a$ tel que: $f(c) = A$.

b) On suppose f strictement croissante. Montrer que la valeur c de a) est unique.

13) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$ .

On suppose $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel x (resp.y) tel que: $f(x) \leqslant 0$ (resp.$f(y) \geqslant 0$). En déduire que l'équation: $f(x) = 0$, admet au moins une solution.

b) Démontrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

14) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$ . Démontrer que si f est périodique de période T alors f est bornée dans $\mathbb{R}$.

*15) Soit f une fonction bornée sur [a,b] on pose :

$$M(x) = \sup_{y \in [a,x]} f(y)$$

Montrer que si f est continue pour une valeur $x_0 \in ]a,b[$ et si $f(x_0) < M(x_0)$, il existe un intervalle ouvert contenant $x_0$ où la fonction $x \to M(x)$ est constante.

*16) Soit f une fonction réelle définie et strictement croissante sur un intervalle [a,b] de $\mathbb{R}$ telle que : $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

a) Montrer que f est une surjection de [a,b] sur [f(a),f(b)] .

b) Soit $x_0 \in [a,b[$. Montrer que f est continue à droite en $x_0$ . (considérer $\inf\limits_{x_0<y<b} f(y)$ ).

c) Soit $x_0 \in ]a,b]$. Montrer que f est continue à gauche en $x_0$.

d) En déduire que f est continue sur [a,b].

17) Etudier la continuité uniforme des fonctions: $x \to \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, et $x \to x^2$ sur $\mathbb{R}$ .

18) a) Montrer que la fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

b) On considère les suites réelles $(x_n)$ et $(y_n)$ de $\mathbb{R}$ définies par :

$$x_n = \sqrt{\frac{\Pi}{2} + 2n\Pi} \qquad y_n = \sqrt{\frac{3\Pi}{2} + 2n\Pi}$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$.

En déduire que la fonction $x \to \sin x^2$ n'est pas uniformément continue.

19) a) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) L'application continue: $x \to ax+b$ $(a,b \in \mathbb{R})$, est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ? bornée ?

20) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \ , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ , où k est un réel } (0<k<1) .$$

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) On considère la suite $(x_n)$ définie par le premier terme $x_1$ et la relation de récurrence $x_n = f(x_{n-1})$.

Montrer que cette suite est convergente et que sa limite $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$. Cette équation admet-elle d'autres solutions ?

## Chapitre 4

### Dérivation

1) Calculer la dérivée n-ième des fonctions f,g,h définies par :

$$f(x)=x^{\beta}\ln x\ ,\quad g(x)=x^{\beta}\sin x\ ,\quad h(x)=\frac{3x+7}{x^2+x-6}\ .$$

Indication : a) Montrer que $f^{(n)}(x)$ est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = x^{\beta-n}(a_n \times \ln x + b_n)\ .$$

b) Trouver a et b tels que $h(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$ .

2) On donne une fonction f continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[, telle que: $f(a) = f(b) = 0$, et un point $d \notin [a,b]$.

Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que la tangente en (c,f(c)) au graphe de f passe par (d,0)

Indication : après traduction géométrique de la question, on appliquera le théorème de Rolle à $g(x) = f(x)/(x-d)$.

3) Soient p et q des nombres réels, et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que le polynôme :

$f(x) = x^n + px + q$ , a au plus deux racines réelles distinctes si n est pair et au plus trois racines réelles distinctes si n est impair.

4) Ecrire la formule de Taylor-Mac Laurin à l'ordre n pour les fonctions suivantes : $e^x$ , sin x, cos x, $\ln(1+x)$, ainsi que celle pour la fonction tg x à l'ordre 5.

5) Montrer que si une fonction n fois dérivable prend la valeur 0, en $(n+1)$ points différents d'un intervalle donné, il existe un point dans cet intervalle où la dérivée d'ordre n prend la valeur 0.

6) a) Montrer que la dérivée n-ième de :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{s'écrit} \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où $P_n$ est un polynôme de degré n.

b) En dérivant la relation: $(1+x^2) f'(x) + 2x f(x) = 0$ , démontrer que:

$$0 = P_{n+1}(x) + 2(n+1)\, x\, P_n(x) + (1+x^2)(n^2+n)\, P_{n-1}(x)$$

c) En comparant $f^{(n+1)}(x)$ et $f^{(n)}(x)$ , démontrer qu'on a aussi :

$$0 = -P_{n+1}(x) - 2(n+1)x\, P_n(x) + (1+x^2)P'_n(x) .$$

d) En déduire une relation entre $P_{n-1}$ et $P'_n$ .

e) Démontrer enfin que $P_n$ admet n racines réelles distinctes en construisant le tableau de variations de $f^{(n)}$.

7) Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ sauf peut-être en $x_0 \in\ ]a,b[$ .

a) Montrer que si f' a une limite en $x_0$ alors f est dérivable en $x_0$ et

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

b) Donner un contre exemple à la réciproque.

8) a) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ , $\alpha > 0$ , et telle que $f''(a) \neq 0$.

Pour h tel que: $|h| < \alpha$, on choisit $\theta(h) \in ]0,1[$ tel que :

$f(a+h) - f(a) = h\, f'(a+\theta(h).h)$ .

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = \dfrac{1}{2}$ .

b) On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^3$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$ .

Démontrer qu'on a alors $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ .

c) Appliquer ce qui précède à la fonction Arctg . Montrer que, pour cette fonction, $\theta(h)$ est unique.

9) Soit f une fonction définie sur $R^+$ telle que : $|f'(x)| \leqslant k < 1$, pour tout $x > 0$ , et $f(0) > 0$ ; montrer que l'équation: $f(x) = x$ , a une seule racine positive et que cette racine est la limite de la suite $(x_n)$ définie par :

$x_1 = f(0)$, $x_2 = f(x_1)$ , ... , $x_n = f(x_{n-1})$ .

*10) Montrer que si f est une fonction dérivable sur [a,b] et si $f'(a) = f'(b) = 0$ , alors, il existe un point $c \in ]a,b[$ tel que l'on ait :

$\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$. Interprétation géométrique.

( Considérer la fonction g définie par $g(a) = 0$, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \neq a$ )

11) En étudiant les variations de la fonction :

$$x \to P(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + .... + (-1)^n \; \frac{x^n}{n}$$

étudier l'existence des racines réelles du polynôme P(x).

12) Soit $x \to f(x)$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$.

a) On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \neq 0$. Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ et de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

b) On suppose maintenant que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

c) Si $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, étudier la limite de $f(x)$ pour $x$ tendant vers $+\infty$.

13) Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction: $x \to y = x^n(1-x)^n$, en déduire la somme des carrés des coefficients du binôme.

14) Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction: $x \to y = (1-x^2)\cos x$.

15) Etudier les graphiques des fonctions suivantes :

a) $x \to y = \frac{x^2+x-2}{x^2}$ au voisinage du point $x = 4$.

b) $x \to y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ au voisinage du point $x = 1$.

c) $x \to y = x^3 - 3x + 2$ au voisinage du point $x = 0$.

16) Montrer en utilisant la formule de Taylor que si les fonctions f et g possèdent au point a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n et si :

$f(a) = f'(a) = \dots = f(n-1)(a) = 0$ ,

$g(a) = g'(a) = \dots = g(n-1)(a) = 0$ , $g^{(n)}(a) \neq 0$ ,

alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ .

Application : trouver $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$ , $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left( \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} \right)$ .

17) a) Soit: $x \to f(x)$, une fonction admettant une dérivée pour tout $x \in [a,b]$ et une dérivée seconde pour tout $x \in ]a,b[$. Montrer qu'à tout nombre $x \in ]a,b[$ correspond au moins un nombre $c \in ]a,b[$ tel que:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

b) Soit: $x \to f(x)$, une fonction admettant des dérivées $f', \dots, f^{(n-1)}$ dans $[a,b]$ et une dérivée d'ordre n pour tout $x \in ]a,b[$. Si de plus elle prend la valeur 0 pour a et pour b et pour n-2 nombres $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ appartenant à $]a,b[$, montrer qu'il existe au moins une valeur $c \in ]a,b[$ telle que, pour tout $x \in ]a,b[$ :

$$f(x) = (x-a)(x-a_1)\dots(x-a_{n-2})(x-b)\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Retrouver comme cas particulier la formule précédente.

18) Soit f une fonction de classe $C^5$ sur $[0,1[$. On pose:

$$u(x)=f(x)-f(0)-[f'(x)+f'(0)]\frac{x}{2}+[f''(x)-f''(0)]\frac{x^2}{12}-\frac{Ax^5}{720}.$$

où A est une constante réelle.

Peut-on choisir A pour que $u(1)=0$ ? Avec cette valeur de A, démontrer qu'il existe c, $0<c<1$, tel que : $A=f^{(5)}(c)$.

19) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 6 P(x) de la fonction:

$x\to\sqrt{1+x}$ . Donner une majoration de $|P(x)-\sqrt{1+x}\,|$ sur $[0,\frac{1}{2}]$ .

Chapitre 5

## Fonctions élémentaires

1) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{4x}$ b) $g(x) = e^{(x^5)}$

c) $h(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ d) $u(x) = \tan(e^{2x})$

e) $v(x) = e^{-\ell n x}$

2) Déterminer la dérivée n-ième de $f(x) = x e^x$.

3) Tracer les graphes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = x e^{-x^2}$ c) $h(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

4) Soit $f(x) = 2e^{-3x}$. Déterminer l'équation de la droite tangente à f au point (0,2).

5) Trouver le point du plan où la droite: $y = -4x - 7$, est tangente à la courbe: $y = e^{x^2 - 4}$.

6) a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant 1 + x$.

b) Utiliser a) pour montrer que pour tout x, $e^x \neq x$.

c) Utiliser a) pour montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

7) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2^{-x}$ , b) $g(x) = x^{x}$ , c) $h(x) = 3^{5x-7}$

d) $u(x) = (1 + 1/x)^{x}$ , e) $v(x) = (\ell n x)^{\ell n x}$ .

8) Montrer que, pour $|x| > 1$ :

$$\ell n(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ell n(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

9) Etudier les trois fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = \ell n(1+x^2)$ , $g(x) = \ell n\,|x|$ , $h(x) = x - \ell n\, x$ .

*10) Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$, dérivable en 1 et satisfaisant pour tout x et y dans $]0,+\infty[$ à : $f(xy) = f(x) + f(y)$ .

a) Montrer que $f(1) = 0$ .

b) Montrer que, pour tout x et y dans $]0,+\infty[$ , $f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x)$ .

c) En déduire que si $0 < |h| < x$ , alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x}\,\frac{f(\frac{x+h}{x}) - f(1)}{h/x}$$

d) Déduire de c) que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$f(x) = f'(1)\,\ell n x$ .

11) Simplifier les expressions suivantes :

$sh(\ell n x)$ , $th\,(\ell n \sqrt{x}\,)$ , $(ch\, x + sh\, x)^n$.

12) Calculer en fonction de sh et ch les sommes :

$S = ch\, x + ch\, 2x + \ldots + ch\, n\, x$

$T = sh\, x + sh\, 2x + \ldots + sh\, n\, x$ .

13) Calculer ch(nx) et sh(nx) à l'aide de ch x et sh x.

Application: Calculer ch 5 x, sh 5 x, ch 4 x et sh 4 x en fonction de ch x et sh x.

14) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

(on pourra poser $t = e^{2x}$).

15) Montrer que le système :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

a des solutions si et seulement si $a \geqslant \sqrt{b^2+4}$.

Résoudre ce système.

16) Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions ci-après admettent une réciproque que l'on calculera:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $h(x) = \cos x$ d) $u(x) = \sin^2 x$

e) $v(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ f) $w(x) = \dfrac{3e^x - 2}{e^x + 4}$.

17) Calculer $(f^{-1})'(c)$ pour :

a) $f(x) = x^3+7$ , $c = 6$ b) $f(x) = x + \sin x$ , $c = 0$

c) $f(x) = 4 \ln x$ , $c = 0$.

*18) Supposons que $f^{-1}$, $f'[f^{-1}(x)]$ et $f''[f^{-1}(x)]$ existent et que $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$.

Montrer que :

$$(f^{-1})''(x) = \frac{-f''[f^{-1}(x)]}{[f'(f^{-1}(x))]^3} .$$

19) Calculer la valeur numérique de :

$\sin(\mathrm{Arc}\sin(-1/2))$ , $\cos(\mathrm{Arctg}(-1))$

$\sin(\mathrm{Arc}\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}))$ , $\mathrm{Arc}\,\mathrm{cotg}(\mathrm{tg}\,\Pi/3)$ .

20) Simplifier les expressions suivantes :

$\cos(\mathrm{Arc}\sin x)$ , $\cos(2\,\mathrm{Arc}\sin x)$ ,

$\sin(2\,\mathrm{Arc}\sin x)$ , $\mathrm{tg}(\mathrm{Arc}\cos\sqrt{1-x^2})$ .

21) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\mathrm{Arc}\cos(-3x) \ , \ \mathrm{Arctg}\sqrt{x} \ , \ x\,\mathrm{Arc}\sin(x^2) \ , \ \mathrm{Arctg}\frac{x+1}{x-1} .$$

22) Montrer les relations suivantes :

a) $\mathrm{Arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arc}\sin x$ pour $-1 < x < 1$.

b) $\mathrm{Arctg}\,x + \mathrm{Arctg}\,y = \mathrm{Arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ pour $xy < 1$.

**23)** a) Montrer que $\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\cos(-x) = \pi$ .

b) Calculer $y = \operatorname{Arc}\sin \dfrac{2x}{1+x^2} + \operatorname{Arc}\cos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

(On pourra poser $x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ , $\theta \in ]-\pi, \pi[$) .

**24)** a) Calculer: $y = \operatorname{Arctg} a + \operatorname{Arctg} b$, a et b réels .

b) Dériver les fonctions $f(x) = \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{2x^2}$

et $g(x) = \operatorname{Arctg} \dfrac{x}{x+1} - \operatorname{Arctg} \dfrac{x-1}{x}$ , $x \neq 0$ , $x \neq -1$ .

Conclure. Pouvait-on prévoir le résultat ?

**25)** Calculer l'expression: $\alpha = 4 \operatorname{Arctg} 1/5 - \operatorname{Arctg} 1/239$ .

**26)** Etudier la courbe définie par :

$$y = \operatorname{Arctg}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) .$$

Déterminer sa fonction réciproque.

**27)** Déterminer les dérivées de :

$$f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad g(x) = \operatorname{sh}\left(\operatorname{Arctg} e^{2x}\right) .$$

**28)** Simplifier les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arg\,sh}\left(2x\sqrt{1+x^2}\right) , \qquad \operatorname{Arg\,th} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} .$$

29) Limite lorsque $x \to +\infty$ de :

$$y = \frac{1}{x^2} (\operatorname{Arg\,sh} x)^{\alpha} \quad , \qquad \alpha > 0.$$

## Chapitre 6

# Polynômes

1) Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$ :

a) $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par: $X^3 + X + 2$

b) $X^4 - X^3 + X - 2$ par: $X^2 - 2X + 4$

c) $X^5 + X + 1$ par: $X^3 - X^2 + 1$ .

2) Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{C}[X]$ de :

a) $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par: $X - 1 + i$ .

b) $4X^3 + X^2$ par: $X + 1 + i$ .

3) Effectuer dans $\mathbb{R}[X]$ la division euclidienne de :

$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ , par : $(X - a)$ .

4) Effectuer dans $\mathbb{R}[X]$ les divisions euclidiennes par $(X^2 - 2X\cos\varphi + 1)$ de :

a) $X^n \sin\varphi - X \sin n\varphi + \sin(n-1)\varphi$.

b) $X^{n+1} \cos(n-1)\varphi - X^n \cos n\varphi - X\cos\varphi + 1$ .

Dans les deux cas on trouve que le reste est nul. Peut-on démontrer ce résultat plus rapidement en se plaçant dans $\mathbb{C}[X]$?

5) a) Effectuer la division euclidienne de $P(X) = X^n - 1$ , par $Q(X) = X^p - 1$ .

b) Quelle relation doit-on avoir entre n et p pour que Q divise P?

c) Prouver que le P.G.C.D de P et Q est $X^d - 1$, d étant le P.G.C.D . de n et p.

6) Déterminer le P.G.C.D des polynômes suivants :

a) $X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et $X^4+2X^3+X+2$.

b) $2X^5+4X^4+4X^3+2X^2+6X+6$ et $2X^2+4X+4$.

c) $X^5+X^4-X^3+X^2+X-1$ et $X^5+X^4+2X^2-1$.

d) $X^4+X^3-3X^2-4X-1$ et $X^3+X^2-X-1$.

e) $2X^6-5X^5-14X^4+36X^3+86X^2+12X-31$ ; $2X^5-9X^4+2X^3+37X^2+10X-14$ et $X^3-2X-1$.

*7) Montrer que: $\forall\, P \in K[X]$, $P(X)-X$ divise $P[(P(X)]-X$.

8) Prouver que les polynômes suivants vérifient: Q divise P :

a) $P(X) = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$, $Q(X) = X^2+X+1$ $(n,m,p \in \mathbb{N})$.

b) $P(X) = (X+1)^{2n} - X^{2n}-2X-1$, $Q(X) = X(X+1)(2X+1)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

c) $P(X) = nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$, $Q(X) = (X-1)^2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

d) $P(X) = (1+X)(1-X^n)-2n\,X^n(1-X)-n^2\,X^{n-1}(1-X)^2$,

$Q(X) = (X-1)^3$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$.

9) a) Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $P(X) = X^{2n}+X^n+1$ est-il divisible par le polynôme $Q(X) = X^2+X+1$ ?

b) Même question pour :

$$P(X) = X^{4n}-X^{3n}+X^{2n}-X^n+1 \text{ et } Q(X) = X^4-X^3+X^2-X+1.$$

10) Trouver le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de :

$$P(X) = (X-2)^{2n}+(X-1)^n+1 \text{ par } Q(X) = (X-1)^2(X-2).$$

11) Montrer que si p et q sont deux entiers non nuls premiers entre eux, $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p-1)(X^q-1)$.

12) a) Montrer que le polynôme: $P(X) = X^5-6iX^4-11X^3+2iX^2-12X+8i$, admet la racine 2i. Quelle est sa multiplicité ? Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $X^6-7X^3-8=0$, et factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme: $X^6-7X^3-8$.

13) Factoriser dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ respectivement les polynômes :

a) $X^5+1$, b) $X^4-X^2+1$, c) $2X^4-X^3+X^2-X-1$.

14) Factoriser: $(X+i)^n-(X-i)^n$.

15) Soient a,b deux entiers relatifs non nuls et n un entier naturel.

Montrer que le polynôme: $P(X) = \dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$ de $\mathbb{R}[X]$,

ainsi que toutes ses dérivées prennent des valeurs entières pour $X=0$ et $X=\frac{a}{b}$ (Utiliser la formule de Taylor).

16) Montrer que le polynôme suivant n'a pas de racine multiple:

$$P(X) = 1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\dots+\frac{X^n}{n!}.$$

17) Montrer que le polynôme :

$$P_{n+1}(X) = 1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+\dots+\frac{X(X+1)\dots(X+n)}{(n+1)!}$$

a pour racines : $-1, -2, \dots, -n, -(n+1)$.

18) P étant un polynôme à coefficients réels, montrer que le polynôme :

$$Q(X) = \frac{X-a}{2}\,[P'(X)+P'(a)] - P(X) + P(a)$$

admet a pour racine multiple. Quel est son ordre ?

19) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. On suppose que $P'$ divise P. Montrer que:

$P(X) = \lambda(X-a)^n \quad (\lambda, a \in \mathbb{R})$.

b) Trouver tous les polynômes P de degré n à coefficients réels tels que :

$P(X) = P'(X)\,P''(X) \ldots P^{(n)}(X)$.

20) a) Montrer que si un polynôme à coefficients réels admet une racine complexe z alors il admet aussi $\bar{z}$ comme racine.

b) Soit P un polynôme à coefficients rationnels admettant $\alpha+\beta\sqrt{3}$ comme racine, avec $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\alpha-\beta\sqrt{3}$ est aussi racine de P. (Application : Factoriser le polynôme: $X^4-5X^3+6X^2+2X-4$, en sachant que $1+\sqrt{3}$ est racine). Généraliser ce résultat pour $\alpha+\beta\sqrt{k}$ où k n'est pas un carré parfait.

21) Soit $P(X) = X^3+X+1$ .

a) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$, puis qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

b) Montrer que P a une racine $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

c) Chercher tous les diviseurs de P dans $\mathbb{R}[X]$.

**22)** Soient S et T deux polynômes premiers entre eux.

a) Montrer qu'il existe un couple de polynômes (U,V) tels que:

$$SU + TV = 1$$

b) Montrer que l'on peut trouver un couple unique de polynômes (U,V) vérifiant l'égalité précédente avec :

$$\deg U < \deg T \text{ et } \deg V < \deg S .$$

c) Déterminer (U,V) dans les cas particulìers suivants :

$$S(X) = X^3+1 \qquad T(X) = X^4+1$$

$$S(X) = X^5+1 \qquad T(X) = X^2+1$$

$$S(X) = (1-X)^k \qquad T(X) = X^k \ (k = 2,3,\dots,n) .$$

**23)** Soit n un entier strictement positif.

a) Démontrer qu'il existe un couple unique (P,Q) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré $<n$, vérifiant : $(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$

b) Démontrer que : $P(X) = Q(1-X)$, $Q(X) = P(1-X)$ .

c) Montrer qu'il existe une constante a telle que :

$$(1-X)\, P'(X) - n\, P(X) = a\, X^{n-1}$$

En déduire les coefficients de P et la valeur de a.

**24)** Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4 de:

a) $2-3X^3+X^4$ par $1+X+X^5$ .

b) $1$ par $1-X$ .

c) $1-X$ par $1+X^2$ .

25) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de:

a) $1-abX^2$ par $1-(a+b)X+abX^2$ , $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

b) $1-X\cos a$ par $1-2X\cos a+X^2$.

c) $X\sin a$ par $1-2X\cos a+X^2$.

d) $\sum_{k=0}^{n} X^k$ par $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$.

Chapitre 7

## Fractions rationnelles

1) Sur le corps des complexes, effectuer la somme:

$$\frac{x^2 - jx + 1}{x^2 - ix + 1} + \frac{x^2 - j^2x + 1}{x^2 + ix + 1}.$$

2) Déterminer $\alpha, \beta, \gamma$ de façon que l'expression suivante soit un polynôme en $x$ :

$$\frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x-1} + \frac{x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \alpha}{x-2} + \frac{x^3 + \gamma x^2 + \alpha x + \beta}{x-3}$$

3) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

a) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ b) $\dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ c) $\dfrac{x^4}{x^2+1}$ d) $\dfrac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}$

e) $\dfrac{8}{(x+1)(x-1)^5}$ f) $\dfrac{2}{(x-1)^4\,(x^2+1)}$ g) $\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x^4-1)}$ h) $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

i) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$, (a,b,c distincts) j) $\dfrac{x^3-3x-4}{(x^2+2)(x^2+x+1)}$

4) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

$$\frac{x^7+1}{(x^2+x+1)^3}$$

5) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ :

$$\frac{x+1}{x^2+1},\ \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2},\ \frac{1}{(x+1)(x^4+1)},\ \frac{x+i}{x^2+ix+1},\ \frac{x^2}{(x^2+1)^3}.$$

6) Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$. En déduire leur décomposition sur $\mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{x^5+1},\ \frac{1}{x^6-1},\ \frac{1}{(x^3-1)^2},\ \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+x+1)},\ \frac{x^2-3x-2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}$$

$$\frac{x^6}{(x^2+1)^2(x+1)^2},\ \frac{1}{x(x^4-1)},\ \frac{1}{x^n-1},\ \frac{1}{x^n+1},\ n\in\mathbb{N}^*$$

$$\frac{x^p}{1-x^{2q}},\ p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}^*,\ p<2q.$$

## Chapitre 8

### Développements limités

1) Trouver un développement limité au voisinage de $x = 0$ de chacune des fonctions suivantes :

$\mathrm{tg}^2 x$ (à l'ordre 6) , $\mathrm{ch}\, x \sin x$ (à l'ordre 5), $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (à l'ordre 4),

$\dfrac{1}{\cos x}$ ( à l'ordre 4) , $\dfrac{x}{\sin x}$ (à l'ordre 4) , $\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$ (à l'ordre 4),

$\dfrac{x}{e^x - 1}$ (à l'ordre 4), $\sqrt{1+\sin x}$ ( à l'ordre 3), $\sqrt{1+\mathrm{tg}\, x}$ (à l'ordre 4),

$\sin(\ln(1+x))$ (à l'ordre 4), $e^{\sin x}$ (à l'ordre 4) , $e^{\sqrt{\cos x}}$ (à l'ordre 4),

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (à l'ordre 3) , $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (à l'ordre 3) .

2) Soit f définie au voisinage de 0 par :

$$f(x) = \ln \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}\, x}$$

a) Calculer $f'$ au voisinage de 0. En déduire un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f.

b) Retrouver le même résultat sans utiliser la dérivation.

3) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et en déduire les développements limités au voisinage de 0 de:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 8 , b) $\mathrm{Arc}\sin x$ à l'ordre 9 ,

c) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ à l'ordre 9 , d) $\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{Arc}\sin x$ à l'ordre 9 .

4) Développement limité à l'ordre 8 au voisinage de 0 de :

$y = \text{Arctg}(\text{Arc}\sin x) - \text{Arc}\sin(\text{Arc}\,\text{tg}\, x)$.

5) On se propose de calculer le développement limité à l'ordre 3 au

voisinage de l'$\infty$ de $f(x) = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

a) Soit: $u(t) = f(1/t)$. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $u'(t)$.

En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de l'$\infty$ de $f(x)$.

b) Calculer le développement limité de $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ à l'ordre 3 au voisinage de l'$\infty$.

Retrouver le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de l'$\infty$.

6) Trouver les quatre premiers termes du développement limité de

$y = \dfrac{\ell n\, x}{x^2}$ et de $y = \sqrt{x}$ au voisinage de 1.

7) Trouver un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $x = \frac{\pi}{3}$ de

$y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

8) a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de

$x_0 \in ]0,\pi[$ de: $f(x) = \ell n \sin x$. Examiner le cas où $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer directement ce développement limité au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

9) Trouver un développement limité au second ordre au voisinage de

l'infini de $y = \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$.

10) Trouver le développement généralisé au voisinage de x infini à l'ordre

2 de $y = \dfrac{x^3-2x^2+2x+2}{x-1}$ .

11) Calculer les développements limités au voisinage de $+\infty$ de:

a) $\dfrac{\ell n(1+\frac{1}{x})}{\sin\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 , b) $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$ à l'ordre 3 ,

c) $x\,\ell n\,(1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{x})$ à l'ordre 4 .

12) Calculer les développements généralisés à l'ordre 2, au voisinage de 0 , des fonctions suivantes :

a) $e^{\mathrm{tg}\,x}-e^{x}$ , b) $\mathrm{tg}[\ell n(1+x)]-\ell n(1+\mathrm{tg}\,x)$ , c) $\dfrac{1}{\sin^3 x}$ , d) $\dfrac{1}{e^x-1}$ .

13) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 x-x^2}{(\cos x-1)(e^x-1)^2}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{x}}{2}-\ell n\,(\frac{e^x-1}{x})}{\sin x-x}\ ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\mathrm{tg}\,x}+\cos(\ell n(1+x))-2+x}{x^4}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}x(\frac{2}{\Pi}\mathrm{Arctg}\,x-1).$$

14) Limite lorsque x tend vers 0 de:

a) $y=e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ell n\cos x}$ , b) $y=\dfrac{e^{\mathrm{Arc}\sin x}-e^{\sin x}}{e^{\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,x}-e^{\mathrm{tg}\,x}}$ .

15) Limite lorsque x tend vers $+\infty$ de:

$$y = x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right].$$

16) Peut-on prolonger par continuité en $x=1$, la fonction définie par:

$f(x) = x^{\frac{x}{1-x}}$ ? Si oui, le prolongement est-il dérivable en $x=1$ ?

## Chapitre 9

# Etude de courbes y = f(x)

Etudier les courbes suivantes :

1) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x - \frac{1}{2}$

2) $y = \text{Arc}\sin e^{-x^2}$

3) $y = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$

4) $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$

5) $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

6) $y = (1 - x)\, e^x$

7) $y = x^x$

8) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

9) $y = \dfrac{\ln(1 + x)}{\ln(1 + 2x)}$

10) $y = \ln |\ln|x||$

11) $y = x \,\text{Arctg}\, \dfrac{x}{x - 1}$

12) $y = x^2 \,\text{Arctg}\, \dfrac{1}{x + 1}$

13) $y = \dfrac{\text{ch}\, x}{\text{th}^2 x}$

14) $y = x^{\frac{x}{1 - x}}$

## Chapitre 10

# Intégration

1) Soit f une fonction réelle continue périodique de période T.

Montrer que la fonction définie par $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ est constante.

2) Soit f une fonction définie et continue sur [a,b] telle que $\forall x \in [a,b]$,

$f(a+b-x) = f(x)$.

a) Montrer que : $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Appliquer le résultat précédent au calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

3) Calculer les primitives des fonctions suivantes (on précisera les intervalles de définition):

$$x^n \ln x,\ x^3 e^{2x},\ \text{Arc}\sin x,\ \cos^3 x,\ \text{tg}^2 x,\ \frac{e^x}{e^x+1},\ \sqrt{1+x^2},\ \sqrt{x^2-1},\ \sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}},\ \frac{1}{4x^2+4x+5},\ \frac{1}{x^2-4x+2},\ \frac{x^3-2}{x^3-x^2},\ \frac{2x^4+1}{(x-1)^3(x^2+1)},\ \frac{1}{(x^2+x+1)^2},\ \frac{\text{tg}\,x}{\cos x},$$

$$\frac{1}{\cos x},\ \frac{1}{1+\sin x},\ \frac{1-\text{tg}\,x}{1+\text{tg}\,x},\ \frac{1}{\text{ch}\,x},\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}},\ x\sqrt{-x^2+3x+6}.$$

4) Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctg} t\,dt\ ,\quad \int_1^e (\ell nt)^2\,dt\ ,\quad \int_1^2 t^n \ell nt\,dt\ ,\quad \int_0^{\pi} \sin^4 t\,dt\ ,\quad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt\ ,$$

$$\int_0^1 \frac{e^t-1}{e^t+1}\,dt\ ,\quad \int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^3)^2}\,dt\ ,\quad \int_0^1 \frac{1}{t^4+t^2+1}\,dt\ ,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t+\sin t}\,dt\ ,$$

$$\int_1^2 t\sqrt{t^2+2t+5}\,dt\ ,\quad \int_0^2 \sqrt{t^3(2-t)}\,dt\ .$$

5)

a) Montrer que: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

b) Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N}\ ,\ D_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \pi$

6) Pour tout entier $n \geqslant 0$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

a) Exprimer $I_{n+2}$ en fonction de $I_n$ .

b) En déduire la valeur de $I_{2n}$ et de $I_{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$ .

c) Montrer que : $1 \leqslant \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ .

En déduire que la suite de terme général : $\left(\dfrac{1.3.5.......(2n-1)}{2.4.6............2n}\right)^2 n$ , converge vers $\frac{1}{\pi}$ (formule de Wallis).

7) Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et donner leur dérivée :

$$g(x) = \int_a^x e^t \, dt \quad , \quad h(x) = \int_x^{x^2} e^t \, dt \ .$$

8) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction continue et soit :

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) \, dt \ .$$

a) Montrer que la fonction F est définie, continue, dérivable et calculer $F'$ .

b) Déterminer F pour $f(t) = |t|$ et tracer son graphe.

c) Montrer que si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ , alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$ .

9) Soit f la fonction :

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{1+\cos t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}\,dt\,.$$

a) Préciser le domaine de définition de f. Etudier sa parité .( On ne cherchera pas à déterminer explicitement f(x) ).

b) Etudier la dérivabilité de f et déterminer f' .

c) Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ tel que : $f'(c)=0$ .

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ .

10) Soient: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ , continue , $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ , positive et intégrable, $m=\text{Inf } f(x)$ , $M=\text{Sup } f(x)$ .

a) Montrer que la fonction F définie sur [a,b] par: $F(x)=f(x)\int_a^b g(t)\,dt$ , est continue et déterminer ses extrema en fonction de m et M .

b) En déduire qu'il existe un élément c de [a,b] tel que :

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt \quad \text{(première formule de la moyenne)}$$

Etudier le cas où g est constante et vaut 1 .

11) Vérifier que les intégrales suivantes ont un sens. Les calculer.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)}\ ,\ \int_2^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}\ ,\ \int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x+1)(x^2+1)}\ ,\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$$

12) En utilisant la notion de somme de Riemann, calculer les limites des suites :

a) $a_n = \dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \dots\dots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$ , $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_+$

b) $b_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}(1^\alpha + 2^\alpha + \dots\dots + n^\alpha)$ , $\alpha \in \mathbb{Q}_+$

c) $c_n = \dfrac{1+\sqrt{2}+\dots\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

d) $d_n = \dfrac{1}{n}\left[ (n+1)(n+2)\dots\dots(n+n) \right]^{\frac{1}{n}}$

13) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+u^2)}}{1+u^2}\, du .$$

a) Montrer que, pour tout nombre réel $h \neq 0$, on a :

$$\frac{1}{h}\Big[ f(x+h) - f(x) \Big] = \int_0^1 e^{-x(1+u^2)}\ \frac{e^{-h(1+u^2)} - 1}{h(1+u^2)}\, du .$$

b) Montrer, en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2, qu'il existe un nombre réel $A > 0$, tel que :

$$\forall y \in [-2,2] \quad \left| \frac{e^y - 1}{y} - 1 \right| \leqslant A|y| .$$

c) En déduire que f est dérivable et que :

$$f'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+u^2)}\, du .$$

d) On pose : $g(x) = f(x^2)$ , $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ .

Montrer que g et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad g'(x) + [(G(x))^2]' = 0$$

En déduire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\Pi}}{2} .$$

12) Soient a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$ .

a) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(u) = v = \frac{ab + u^2}{2\,u}$$

Etudier les variations de f. Montrer que la restriction de f à l'un ou l'autre de deux intervalles que l'on précisera , permet de définir dans chacun des cas une fonction réciproque. On désigne par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ ces deux fonctions.

Donner l'expression de $\varphi_1$ et de $\varphi_2$ .

b) On considère l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}} .$$

Effectuer les deux changements de variable :

$$u = \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} \quad , \text{puis : } v = \frac{ab + u^2}{2\,u} .$$

En déduire l'égalité : $I(a,b) = I\left(\sqrt{ab}\ ,\ \frac{a+b}{2}\right)$ .

c) On considère les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par les relations :

$$a_0 = a\ ,\ b_0 = b\ ,\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}\quad ,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} .$$

i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ , $0 < a_n < b_n$ et $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$ .

ii) Montrer que la suite $(a_n)$ est croissante, la suite $(b_n)$ décroissante.

iii) En déduire que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes et démontrer qu'elles ont même limite $\ell$ .

iv) Utiliser ces résultats pour établir la formule :

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2\ell} .$$

## Chapitre 12

### Equations différentielles

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'y = e^{x-y}$ .

b) $y' \, x \, \ell n x - (x^2 \ell n x + 1)\, y = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

c) $y' \, \ell n x + \dfrac{y}{x} = 1$ .

d) $(xy' - y)(\ell n y - \ell n x) = x$ .

e) $(x^2 - 1)\, y' + xy = -1$ .

f) $x\,(1 - y^2)\, y' + y\,(1 - x^2) = 0$ .

g) $\dfrac{x^2+1}{y} y' + x + y^2 = 0$ .

h) $2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$ (en remarquant que $y = x$ est une solution particulière ).

2) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2x^2 y' = x^2 + y^2$ .

b) $x^2 y' + xyy' - x^2 - y^2 = 0$ .

c) $2xy' - y = 10x^3 y^5$ .

d) $xy' - 2y = x$ .

e) $xy' - y = x$ .

3) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ .

b) $y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x$ .

c) $y'' - 2y' = 6x^2 - 2x - 4 + x^2 e^x + 4 x e^{2x}$.

d) $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^x + 7e^{-x}$.

e) $y'' + y = \cos^3 x$ .

f) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2} e^{-x}$ .

g) $y^{(4)} - y = 0$ .

h) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$ .

i) $y'' - 2y' + y = e^x + x$ .

4) a) Calculer :

$$\int_0^x e^t \sin 2t \, dt .$$

b) Résoudre l' équation différentielle :

$$y' \sqrt{1-x^2} + y = x \sqrt{1-x^2} \ , \ x \in ]-1 , 1[ .$$

5) Résoudre l' équation différentielle :

$$x^2 y'' - 2x^2 y' + y(x^2 - 2) + 0 .$$

(Vérifier que $x^2 e^x$ est solution,et en déduire toutes les solutions).

## Chapitre 12

# Courbes planes

### Courbes en coordonnées paramétriques

1) Tracer le graphe de la fonction : $f(t) = (2-\cos t\ ,\ -1-\sin t\ )\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ .

2) Tracer le graphe de la fonction :

$$g(t) = (\ t\ ,\ \sqrt{1-t^2}\ )\quad ,\ -1 \leqslant t \leqslant 1\quad .$$

3) Etudier et tracer le graphe des fonctions f et g définies par :

$$f(t) = (t^2 + t^3\ ,\ t^2 - t^3\ )\qquad ,\qquad g(t) = (\ \frac{t^2}{t-1}\ ,\ \frac{t^3}{t-1}\ )\ .$$

4) Etudier les courbes définies par les équations paramétriques suivantes :

a) $x = \dfrac{e^t}{1+t}\ ,\ y = \dfrac{t\,e^t}{1+t}$

b) $\begin{cases} x = t^3 + \dfrac{3}{t}\ ,\ y = 2\,t^3 + \dfrac{3}{t^2} \\ \text{(Etude du point stationnaire)} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1}\ ,\ y = \dfrac{t+2}{(t-1)^2} \\ \text{(Etude du point double,} \\ \text{tangente à l'origine)} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \dfrac{2\,t}{t^2-1}\ ,\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \\ \text{(Branches infinies,} \\ \text{point double)} \end{cases}$

e) $x = \dfrac{e^t - t}{t}\ ,\ y = t(t-2)$ (Point stationnaire, équation de la tangente en ce point)

Courbes en coordonnées polaires

5) Etudier les courbes suivantes :

a) $\begin{cases} r = 1 + \tan \frac{\theta}{2} \\ \text{(Asymptote, point double)} \end{cases}$ b) $r = \dfrac{\sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$

c) $r = \cos^3 \theta + \sin^3 \theta$ (Préciser les points où la tangente à la courbe est parallèle à la $2^{ème}$ bissectrice).

Courbure

6) Déterminer le centre et le rayon de courbure des fonctions suivantes :

$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \to (2 \cos t, 2 \sin t)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \to (t, t^2)$

7) Calculer le rayon de courbure de la fonction $r(t)$ au point $t_0$ :

a) $r(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$ ; $t_0 = 0$.

b) $r(t) = (t, \frac{1}{3} t^3)$ ; $t_0 = 0$.

8) Déterminer la longueur des courbes paramétrées suivantes :

a) $r(t) = (1 - t^2, 1 + t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $s(t) = (\sin t - t \cos t, t \sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

9) a) Etude de la courbe définie par: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

b) Calculer le rayon de courbure, le centre de courbure et la longueur de la courbe.

**10)** a) Etudier la courbe définie par :

$$r = \sqrt{\cos 2\theta}$$

b) Calculer le rayon de courbure en un point quelconque.

**11)** Courbure et centre de courbure en un point quelconque des courbes définies par:

$$\begin{cases} x = \theta^2 \cos\theta - 2\theta \sin\theta \\ y = \theta^2 \sin\theta + 2\theta\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a(\theta - k\sin\theta) \\ y = a(1 - k\cos\theta) \\ k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

**12)** Courbure et centre de courbure en un point de la courbe d'équation polaire :

$$r = a(1 + 2\cos\theta)$$

**13)** Soit la courbe d'équation polaire : $r = a \operatorname{th} \frac{\theta}{2}$. Soit M le point de la courbe correspondant à l'angle polaire $\alpha$. Calculer la longueur de l'arc OM .