I.R.E.M. A.P.M.E.P.

UNIVERSITE DE NANTES
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques et d'Informatique

Séminaire de Mathématiques. Conférence du 7 Novembre 1990

Annick FLANCHEC

L'INVOLUTION DE STEINER DANS LE PLAN

INTRODUCTION

Cet exposé n'a aucune vocation d'originalité. Les résultats exposés sont connus depuis fort longtemps !

L'exposé a pour but essentiel d'introduire une application générale du plan projectif comme issue d'un problème très simple du plan euclidien.

L'utilisation systématique des symétries, rotations, me semble intéressante car riche de sous-exercices pour les professeurs de lycée et les candidats aux concours.

Le lecteur comprendra aussi que l'introduction du centre du cercle de Steiner a 3 intérêts :

- celui d'unifier l'isogonalité avec celui de la droite de Steiner.

- Celui d'avoir très facilement des résultats en termes de coniques.

- Surtout celui de fournir une démonstration beaucoup plus simple que celle faisant intervenir les coordonnées barycentriques.

A vos tablettes donc pour extraire de cet exposé des situations, des sous-problèmes !

Une première problématique : celle de la droite de Steiner

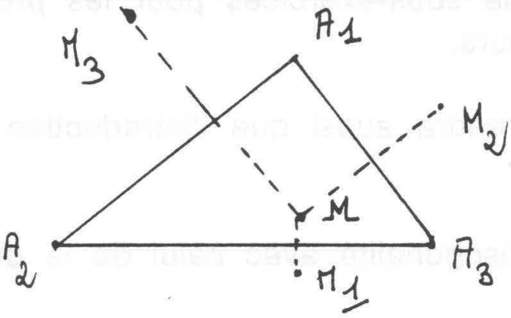
Soit un triangle A_1, A_2, A_3 . Soit M un point du plan.

Soit M_1, le symétrique de M/A_2A_3

M_2, le symétrique de M/A_1A_3

M_3, le symétrique de M/A_2A_1

Une 1ère question : Quand M_1 M_2 M_3 sont-ils alignés ?



Remarquons que si nous appelons S_{23} la symétrie $/A_2A_3$

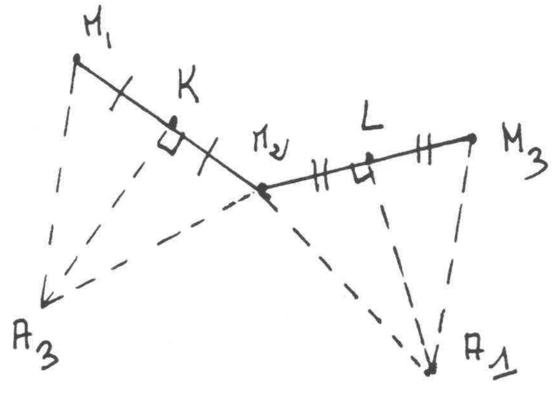
$M_1 = S_{23}(M)$; $M_2 = S_{31}(M)$; $M_3 = S_{12}(M)$

et $M_2 = (S_{31} \circ S_{23})(M_1)$ et $(M_3 = (S_{12} \circ S_{31})(M_2)$

$M_2 = R_1(M_1)$ $\quad$ $M_3 = R_2(M_2)$

où R_1 est la rotation de centre A_3 d'angle $2(A_3A_2\ ,\ A_3A_1)$

R_2 est la rotation de centre A_1 d'angle $2(A_1A_3\ ,\ A_1A_2)$



Soit K le milieu de M_1M_2

Soit L le milieu de M_2M_3

$M_1M_2M_3$ seront alignés ssi

$A_3K // A_1L$

Remarquons que :

$$(A_3K, A_1L) = (A_3K, M_2A_3)+(M_2A_3, M_2A_1)+(M_2A_1, A_1L)$$
$$= (A_3A_2, A_3A_1)+(M_2A_3, M_2A_1)+(A_1A_3, A_1A_2)$$
$$= (A_2A_3, A_2A_1)+(M_2A_3, M_2A_1)$$

M_1, M_2, M_3 seront alignés ssi l'on a :

$$(M_2A_3, M_2A_1) = -(A_2A_3, A_2A_1)$$

Ou M_1, M_2, M_1 seront alignés ssi M_2 est sur le cercle symétrique du cercle (A_1A_3)

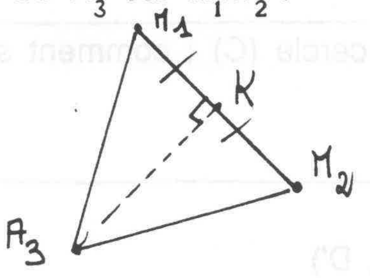
$\boxed{M_1, M_2, M_3 \text{ seront alignés ssi } M \text{ est sur le cercle } (A_1, A_2, A_3)}$

La droite M_1, M_2, M_3 sera alors appelée S_M (la droite de Steiner de M)

$\boxed{\text{Une 2ème question se pose : l'étude en général de la droite } M_1M_2}$

Reprenons les notations précédentes en nommant
$\alpha = (A_3A_2, A_3A_1)$ (modulo π)

* <u>1er cas</u> : $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Le triangle $A_3M_1M_2$ est un vrai triangle. Soit K la projection de A_3 sur M_1M_2 .



$(\overrightarrow{A_3M_1}, \overrightarrow{A_3K}) = \beta$

où $\beta = \alpha$ si $\cos\alpha > 0$
$\pi - \alpha$ si $\cos\alpha < 0$.

Soit H l'homothétie de centre A_3, de rapport $\cos\alpha$

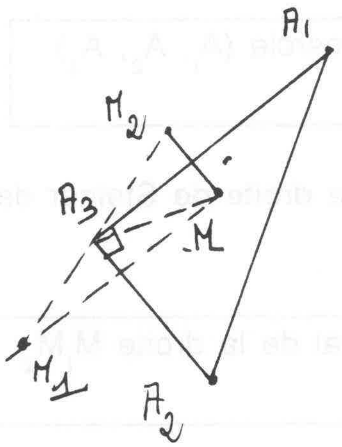
R la rotation de centre A_3, d'angle β .

Alors $K = HoR(M_1) = HoRoS_{23}(M)$.

Mais $R = S_\Delta o S_{23}$ où Δ est la bissectrice intérieure de (A_3A_2, A_3A_1) et $K = HoS_\Delta(M)$.

* M_1M_2 est la perpendiculaire en $H\ S_\Delta(M)$ à $A_3H\ S_\Delta(M)$.
* en particulier, la médiatrice de M_1M_2 est symétrique de A_3M par rapport à Δ.

* <u>2ème cas</u> $\alpha = \frac{\pi}{2}$



* La droite M_1M_2 passe par A_3.
* Considérons donc (D) sa direction perpendiculaire.

$$((D), OM) = D, A_3M_1) + (A_3M_1, A_3M)$$
$$= -\frac{\pi}{2} + 2(A_3A_2, A_3M)$$
$$= 2[-\frac{\pi}{4} + (A_3A_2, A_3M)]$$
$$= 2[(\Delta, A_3A_2) + (A_3A_2, A_3M)]$$
$$= 2[\Delta, A_3M].$$

(D) est bien symétrique de A_3M par rapport à Δ. Le résultat est donc valable dans tous les cas.

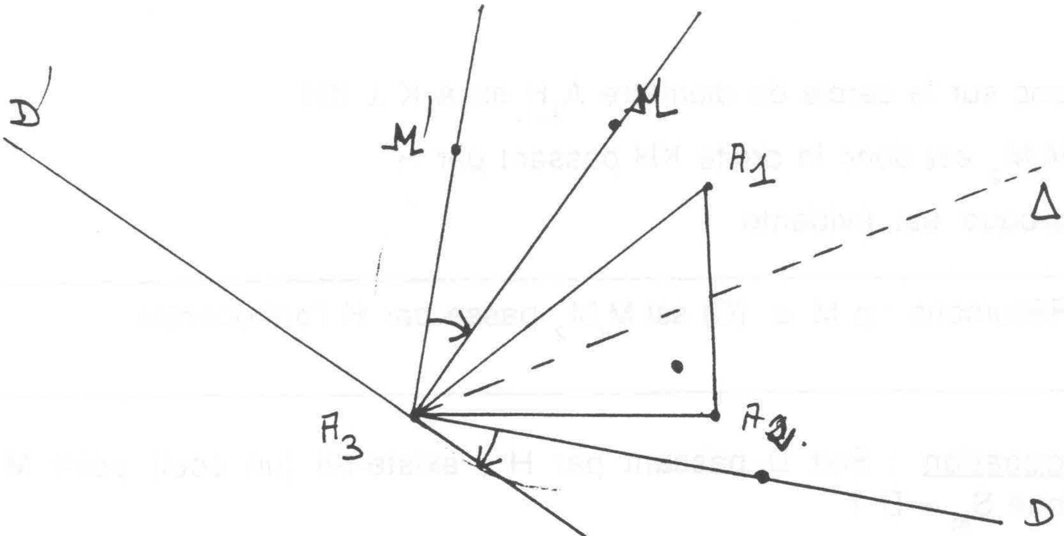
Revenons à M sur le cercle (C).

<u>3ème question</u> : soit M' sur le cercle (C) ; comment sont disposés M et M' quand $(S_M, S_{M'}) = \alpha$?

Alors $(D), (D') = \alpha = (D, \Delta) + (\Delta, D')$

et $\alpha = (\Delta, A_3M) + (A_3M', \Delta)$

$\alpha = (A_3M', A_3M)$.



Nous avons un cas particulier. bien connu : $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$A_3M \perp A_3M'$ et ... M' est diamétralement opposé à M sur (C).

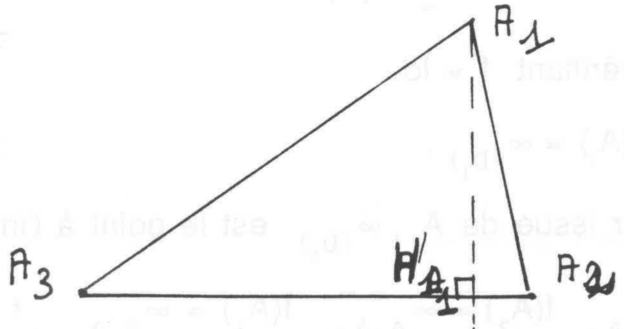
<u>4ème question</u> : Qu'enveloppe S_M quand M parcourt (C) ?

Choisissons A_3 tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et reprenons les notations précédentes.

K est sur le transformé de (C) par HoS_Δ , soit (C').

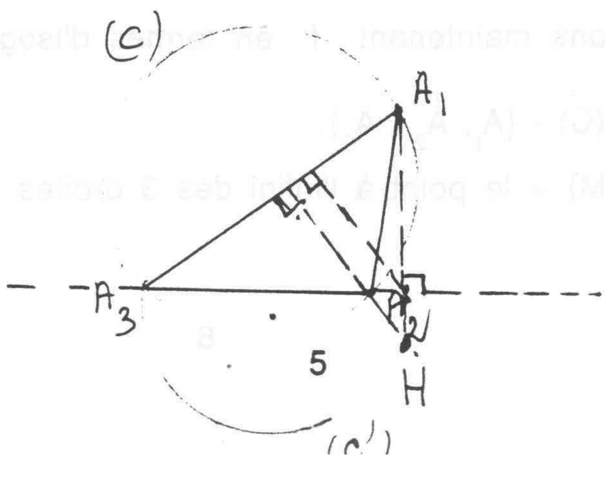
(C') passe par $(HoS_\Delta)(A_1)$ et $(HoS_\Delta)(A_2)$ et $(H_0S_\Delta)(A_3)$.

Examinons $(HoS_\Delta)(A_1)$; $S_{2B}(A_1)S_{31}(A_1)$ est la hauteur issue de A_1 .



et $HoS_\Delta(A_1)$ est le pied de la hauteur issue de A_1.

(C') est donc le cercle $A_3H_{A_1}H_{A_2}$ et est donc le cercle de diamètre A_3H.



K est donc sur le cercle de diamètre A_3H ou $A_3K \perp KH$

M_1M_2 est donc la droite KH passant par H.

La réciproque est évidente

Résumons : p $M \in (C)$ ssi M_1M_2 passe par H l'orthocentre.

<u>5ème question</u> : Soit D passant par H ; existe-t-il (un seul) point M (sur (C)) tel que $S_M = D$?

* Supposons que M existe. La projection K de A_3 sur D est $(H o S_\Delta)(M)$;

ou $M = (H^{-1} o S_\Delta)(K)$

K appartenant au cercle de diamètre A_3H, $M \in (C)$.

* $M = H^{-1} S_\Delta(K)$ convient de toute évidence.

Résumons une partie de nos résultats dans le plan projectif $\hat{P}$.

Nous avons, en passant, défini une application $f : (C) \to D_\infty$.

posons en effet $f(M) = \infty_{(D)} \perp S_M$ <u>f est alors bijective</u> .

Ceci est peut-être une "bonne" façon de se représenter la droite de l'infini comme un cercle !!

Nous appellerons aussi $f : D_\infty \to (C)$ l'inverse de f et avons ainsi

$f : (C) \amalg D_\infty \to (C) \amalg D_\infty$ vérifiant $f^2 = Id$.

Etudions $f(A_1)$. $f(A_1) = \infty_{(D_1)}$.

Comme S_{A_1} = la hauteur issue de A_1 , $\infty_{(D_1)}$ est le point à l'infini de A_2A_3 .

Alors $f(A_1) = \infty_{A_2A_3}$ $f(A_2) = \infty_{A_1A_3}$ $f(A_3) = \infty_{A_1A_2}$ f est alors une

bijection de $(C) - (A_1, A_2, A_3)$ vers $D_\infty - \{\infty_{A_1A_2}, \infty_{A_2A_3}, \infty_{A_3A_1}\}$.

Traduisons maintenant f en termes d'isogonalité.

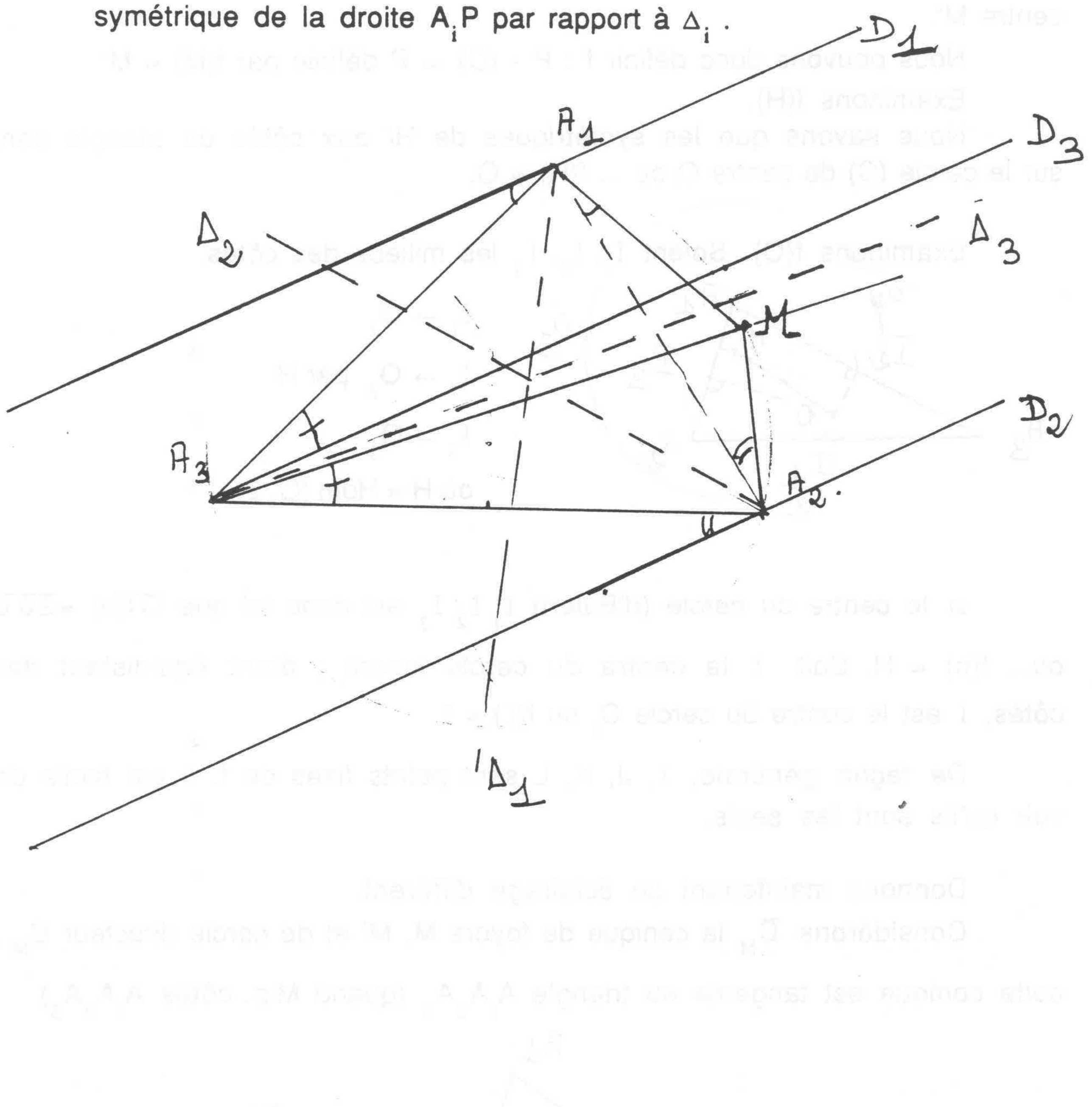
. Soit M dans $(C) - \{A_1, A_2, A_3\}$.

Alors f(M) = le point à l'infini des 3 droites D_1, D_2 , D_3 .

où D_i est la symétrique de A_iM par rapport à Δ_i (la bissectrice en A_i).

. Soit $P \in D_\infty - \{\infty_{A_1A_2}, \infty_{A_2A_3}, \infty_{A_3A_1}\}$

f(P) est le point M (du cercle (C) possédant la propriété suivante : A_iM est symétrique de la droite A_iP par rapport à Δ_i .



Deuxième problématique :
celle du cercle de STEINER

Gardons les notations du début.

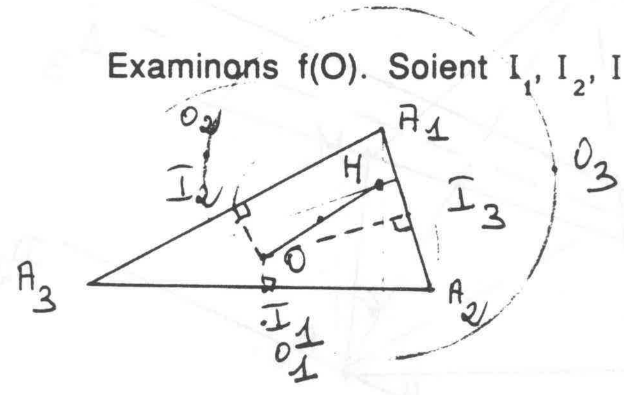
Soit M un point du plan ; le 1er paragraphe nous a montré que si $M \notin (C)$, $M_1 M_2 M_3$ définissent un cercle. Nous noterons ce cercle C_M et son centre M'.

Nous pouvons donc définir $f : P - (C) \rightarrow P$ définie par $f(M) = M'$

Examinons f(H).

Nous savons que les symétriques de H/ aux côtés du triangle sont sur le cercle (C) de centre O ou ... f(H) = O.

Examinons f(O). Soient I_1, I_2, I_3 les milieux des côtés.



$I_1 \rightarrow O_1$

$I_2 \rightarrow O_2$ par H

$I_3 \rightarrow O_3$

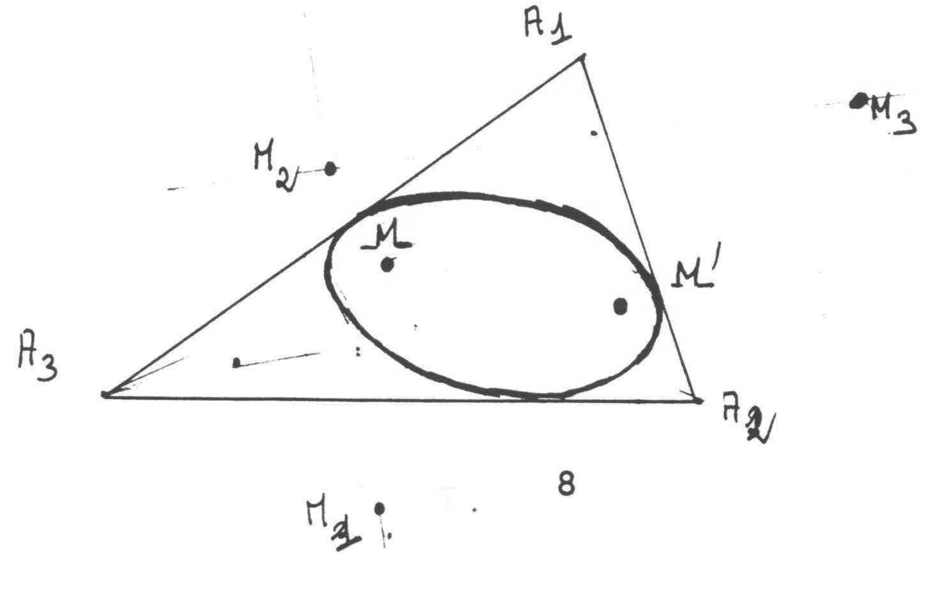
où H = Hom [O, 2]

ω le centre du cercle (d'Euler!) $I_1 I_2 I_3$ est donc tel que $\overrightarrow{Of(o)} = 2\overrightarrow{O\omega}$ ou... f(o) = H. Soit I le centre du cercle inscrit ; étant équidistant des côtés, I est le centre du cercle C_I ou f(I) = I.

De façon générale, I, J, K, L sont points fixes de f. Il est facile de voir qu'ils sont les seuls.

Donnons maintenant un éclairage différent.

Considérons $\overline{C}_M$ la conique de foyers M, M' et de cercle directeur C_M ; cette conique est tangente au triangle $A_1A_2A_3$ (quand $M \notin$ côtés $A_1A_2A_3$)



Remarquons que cette conique est une parabole de foyer M, de directrice S_M quand $M \in (C)$.

Mais poursuivons ! M' étant foyer de $\overline{C}_M$, les symétriques par rapport aux côtés du triangle sont sur le 2ème directeur... de centre M.

M' n'appartient donc pas à (C) et... f(M') = M quand M $\notin$ aux côtés.

f est donc une involution de P-(C) - côtés

$\rightarrow$ P-C-côtés

Elle sera évidemment appelée l'involution de Steiner du triangle.

Troisième problématique :
Etendre l'involution au plan projectif

Il est tentant (et commun) de considérer une droite comme un cercle.. de centre... le point à l'infini de sa direction perpendiculaire.

Quand M est sur (C), son "cercle de Steiner" devient la droite de Steiner. Nous avons déjà noté le point à l'infini de la direction perpendiculaire à S_M, f(M). Nous avons aussi défini - f : $D_\infty \rightarrow$ (C).

Nous avons donc f : $\hat{P} \rightarrow \hat{P}$

définie par : M $\in \hat{P}$ - {(C) ∐ D_∞} ; f(M) est le centre du cercle de Steiner.

M $\in$ (C) f(M) est le point à l'infini de la direction perpendiculaire à S_M.

M $\in D_\infty$ f(M) est l'unique point de (C) dont la droite de Steiner est perpendiculaire à (D) quand M = $\infty_{(D)}$.

Nous avons donc en fait démontré que f est une involution de $\hat{P}$ - 3 côtés $\rightarrow \hat{P}$ - 3 côtés, involution qui a 4 points fixes ; qui transforme une droite projective (D_∞ en l'occurrence) en un cercle.

Quatrième problématique : définir f à l'aide de relations sur les angles

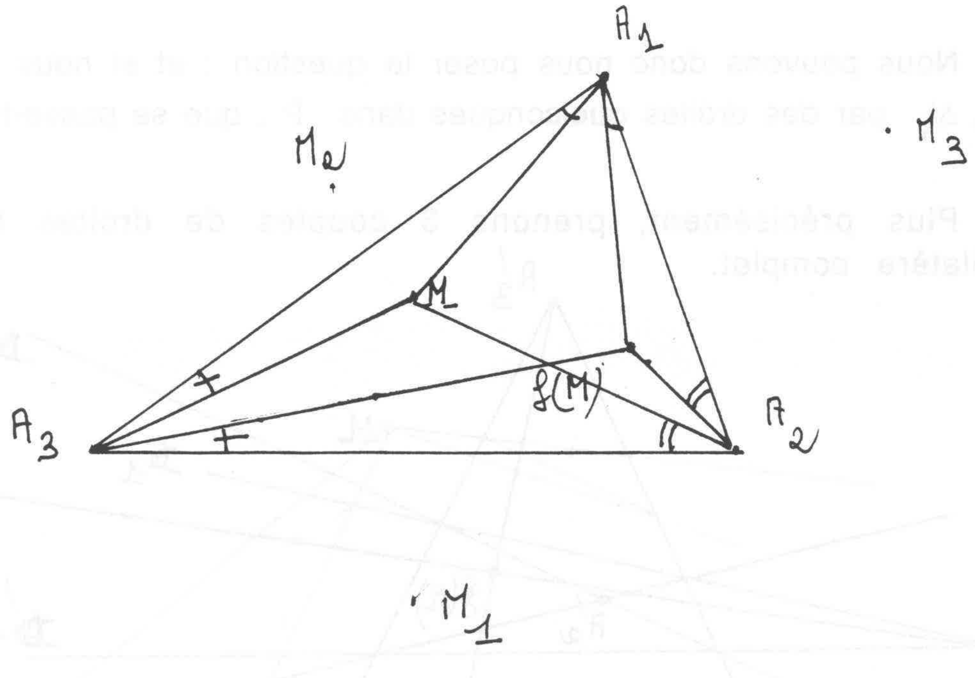
Nous avons vu au 1er paragraphe que si $M \in (C) - \{A_1, A_2, A_3\}$ ou à $D_\infty - \{\infty_{A_1A_2}, \infty_{A_1A_3}, \infty_{A_2A_3}\}$, f(M) est l'intersection des 3 droites symétriques des A_iM par rapport aux Δ_i.

Qu'en est-il quand $M \in P - \{(C) \cup 3 \text{ côtés}\}$?

Mais f(M) est sur la médiatrice de M_1M_2 et A_3 aussi (I-2).

Or nous savons que cette médiatrice est symétrique de A_3M par rapport à Δ_3.

Dans le cas général, f(M) est donc l'intersection des 3 droites symétriques des A_iM par rapport aux Δ_i . f généralise donc l'isogonalité classique.



Cinquième problématique : donner à f une expression projective

Soit M dans $\hat{P}$ - 3 côtés.

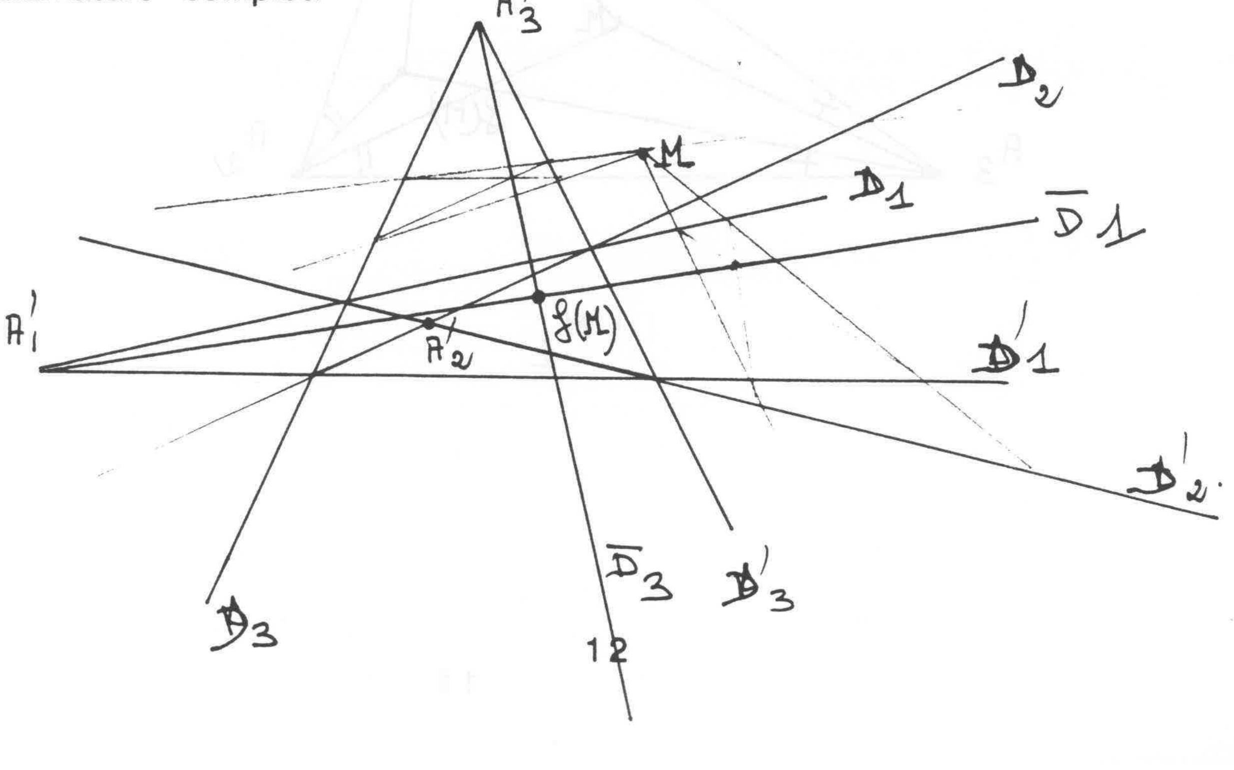
$A_3f(M)$ est la symétrique de A_3M/Δ_3 .

ou ...encore $(\Delta_3, \Delta'_3, A_3M_3, A_3f(M))$ est un faisceau harmonique.

Nous avons donc ainsi 3 faisceaux harmoniques.

Nous pouvons donc nous poser la question : et si nous remplacions les Δ_i, Δ'_i par des droites quelconques dans $\hat{P}$, que se passe-t-il ?

Plus précisément, prenons 3 couples de droites formant un quadrilatère complet.



Soit M dans $\hat{P}$ - $\{A'_1A'_3,\ A'_2A'_3,\ A'_1A'_2\}$

Soit $\overline{D}_1$ telle que $(D_1,\ D'_1,\ \overline{D}_1,\ A_1M) = -1$

$\overline{D}_2$ telle que $(D_2,\ D'_2, \overline{D}_2,\ A_2M) = -1$ (I)

Soit $\overline{D}_3$ telle que $(D_3,\ D'_3, \overline{D}_3,\ A_3M) = -1$

Soit $M' = \overline{D}_1 \cap D_2$; $M' \in \overline{D}_3$?

Soit h l'application homographique qui transforme
A en I, $B \to J$; $C \to K$; $D \to L$

Alors $A'_1 \to A_1$ par h ; $A'_2 \xrightarrow{h} A_2$; $A'_3 \xrightarrow{h} A_3$.

$D_1 \to \Delta_1$ $D'_{1'} \to \Delta'_1$, etc...

et $(\Delta_1, \Delta'_1, A_1h(M')\ ,\ A_1h(M)) = -1$

$\Delta_2, \Delta'_2\ ,\ A_2h(M')\ ,\ A_2h(M)) = -1$

D'après ce qui précède, nous avons aussi
$(\Delta_3, \Delta'_3\ ,\ A_3h(M')\ ,\ A_3h(M)) = -1$
et ... $(D_3,\ D'_3,\ A'_3M'\ ,\ A'_3M) = -1$
ou $A'_3M' = \overline{D}_3$ cqfd.

Nous avons ainsi défini grâce à I une transformation
$T : \hat{P}$ - côtés $\to$ $\hat{P}$ - côtés
définie par $T(M) = M'$

T est appelée classiquement la transformation quadratique associée au quadrilatère.

Nous savons qu'elle transforme $h^{-1}(D_\infty)$ en une conique passant par A'_1, B'_1, C'_1.

Une nouvelle question se pose : T transforme-t-elle toute droite en une conique ?

La réponse sera donnée dans un prochain séminaire quand nous examinerons l'inversion comme transformation du plan projectif.