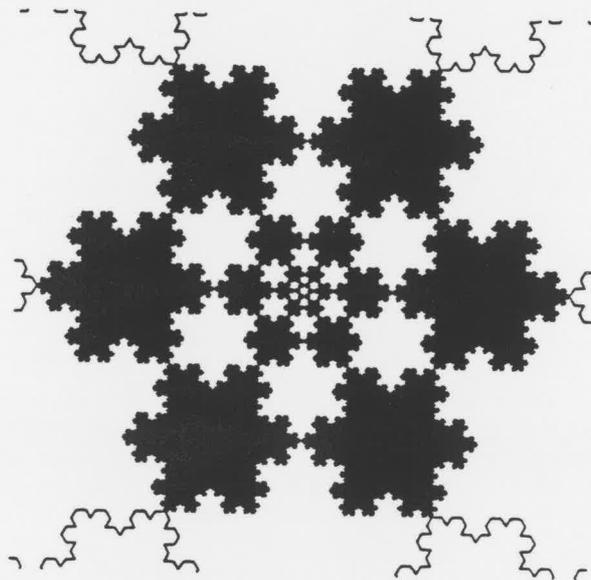


Séminaire IREM-APMEP : séance du 7 Mars 1990

**LES COURBES DE VON KOCH ET DE SIERPINSKI
COMME PARADIGMES DE FRACTALS.**



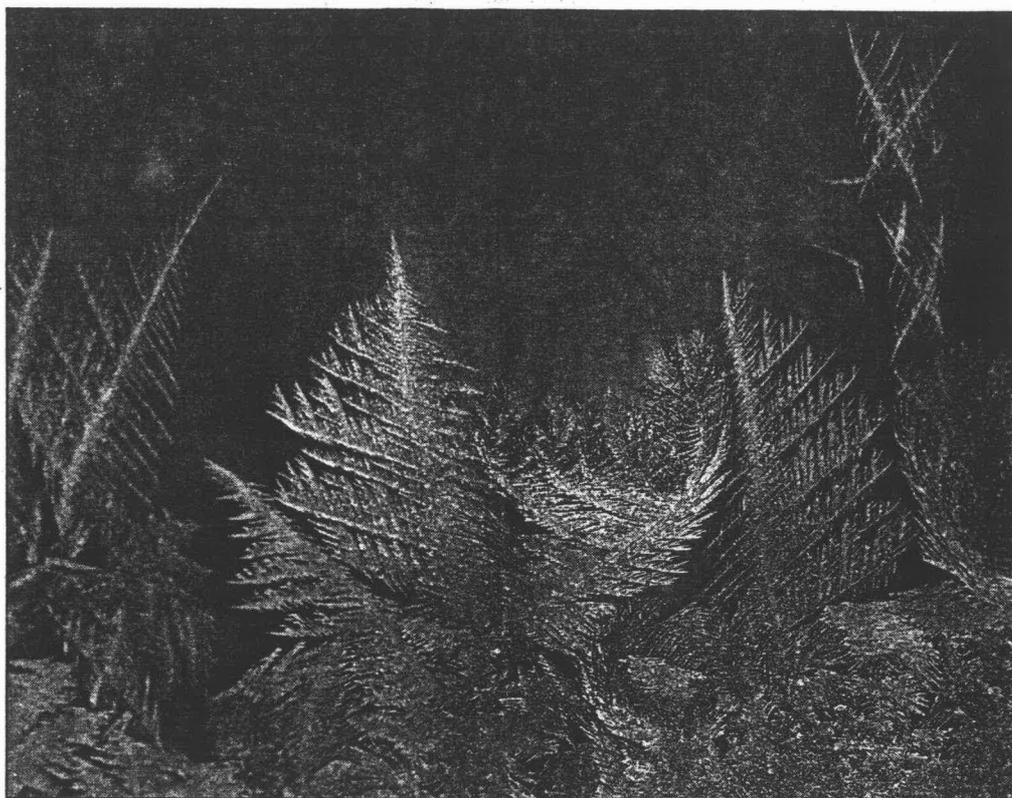
par A. ROBERT, professeur à l'Université de Neuchâtel (Suisse)

Les fractals

Le mathématicien Mandelbrot ne se contente pas de discuter sur l'existence de la longueur pour une côte d'île. Lorsqu'on prend une carte géographique à une certaine échelle, cette longueur peut s'estimer à l'aide d'un curvimètre. Sur la carte ayant une échelle inférieure, donc plus détaillée, la nouvelle estimation sera notablement plus grande. Continuant à tenir compte d'irrégularités de plus en plus fines, on obtiendra des résultats de plus en plus grands, laissant penser que la longueur de la côte n'existe pas ou est infinie. Le modèle d'une courbe lisse pour présenter une côte n'est pas adapté à la situation. C'est pourquoi il est préférable d'analyser la rapidité avec laquelle ces longueurs approchées tendent vers l'infini. Mandelbrot émette alors une notion à Hausdorff (1868-1942) et parvient à la conclusion que la dimension de la côte est supérieure à 1.

par Alain ROBERT
Professeur à l'IMI,
Université de Neuchâtel

Des phénomènes semblables apparaissent dans l'étude des surfaces poreuses (électrodes de batteries, membranes des poumons) et des volumes poreux (jusqu'aux amas galactiques!). Les physiciens commencent même à utiliser des interprétations fractales sur les phénomènes de décharges électriques (étincelles), l'écoulement de liquides, la turbulence, etc. On comprend donc l'ubiquité de cette notion nouvelle...
Si la notion de fractal a acquis récemment la notoriété qu'elle



Cette photographie montre une formation de givre sur une vitre. On peut y reconnaître une self-similarité bien caractéristique d'un fractal.



Benoît B. Mandelbrot...

... a fait ses études à l'École Polytechnique de Paris. Il les a complétées par des études d'astronautique au Caltech de Pasadena (U.S.A.) et a finalement obtenu le titre de docteur de l'Université de Paris. Il a poursuivi ses recherches avec le soutien du CNRS (France), ISA (Princeton, USA) et a visité les universités de Genève, Lille, Harvard, Yale, MIT,...

Il est actuellement employé par IBM en tant que IBM Fellow, et par Yale en tant que professeur adjoint de mathématiques. Récipiendaire de la médaille Franklin, il vient encore de recevoir en 1989 le prix Harvey (USA) pour la science et la technologie. Son livre «Fractals, forme, chance et dimension» est issu d'une suite de conférences qu'il a données au Collège de France à Paris en 1973 et 1974.

Le terme «fractal» vient de fractus (adj. latin), et s'applique à des parties d'espaces métriques: une courbe fractale, une surface fractale. Il a donc la même origine que le terme fractionnaire et s'applique en effet aux objets de dimension fractionnaire (au sens de Hausdorff). D'adjectif, il est devenu substantif et on parle aujourd'hui du fractal de von Koch, du fractal de Sierpinski, du fractal de Mandelbrot, etc.

Dans un sens, l'idée que des objets irréguliers puissent être utilisés en physique était déjà venue à Henri Poincaré et à Jean Perrin. Les travaux de ce dernier sur le mouvement brownien (agitation thermique) lui valurent d'ailleurs le prix Nobel. Mais l'ubiquité des fractals dans la nature est certainement l'idée de Mandelbrot.

Indications bibliographiques

- Mandelbrot:
- Fractals: Form, Chance and Dimension, W. H. Freeman (1977)
- The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman (1982)
O. Peitgen (et coauteurs):
- The Beauty of Fractals, Springer-Verlag (1986)
- The Science of Fractal Images, Springer-Verlag (1988)

connaît, c'est bien en raison de ses relations avec la notion d'itération, si facile à simuler par ordinateur. Ainsi, l'informatique fournit un outil idéal pour produire des images de fractals et les étudier. Inversement, les méthodes fractales permettent d'engendrer des images digitales dans un mode interactif d'où leur intérêt en infographie.

Les Grecs nous ont appris l'importance des coniques (ellipse, parabole et hyperbole), puis plus généralement des courbes ayant une tangente variant continuellement. Mais il a fallu attendre le XXe siècle pour que les courbes totalement irrégulières (sans dérivée) perdent leur caractère d'épouvantail...

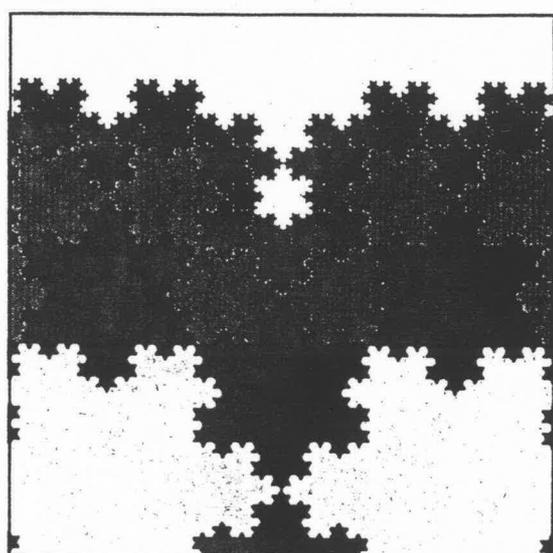
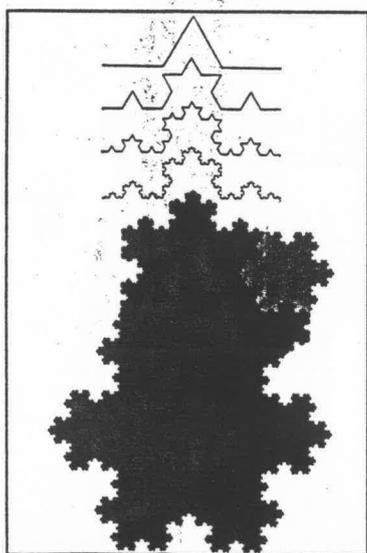
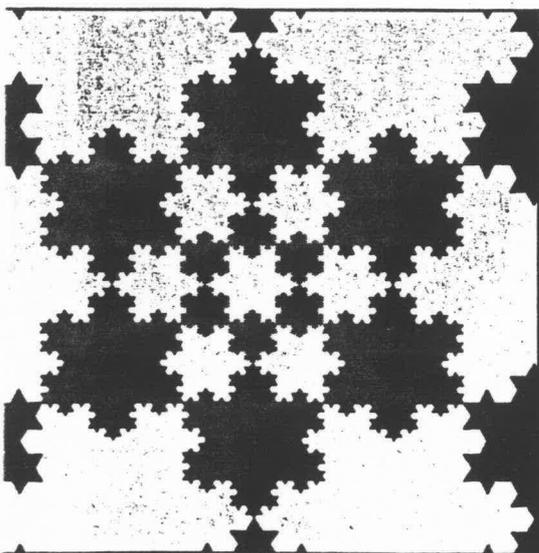
Les mathématiciens se doivent d'isoler les situations typiques les plus simples. C'est pourquoi ils aiment à revenir à la courbe imaginée par Helge von Koch en 1904 (illustration). Cette courbe, et le flocon auquel elle donne naissance, présente beaucoup de symétries et constitue un paradigme de la situation. Elle permet de réaliser des motifs décoratifs présentant un intérêt esthétique... en plus de son caractère théorique.

Les recherches d'analyse ultramétrique poursuivies à l'IMI et soutenues par le Fonds National de la Recherche Scientifique mettent en évidence une méthode d'étude des fractals par l'analyse p-adique.

La notion de dimension

La droite, le cercle, et plus généralement toute courbe lisse sont des objets de dimension 1. Le carré, le disque et plus généralement toute portion de surface sont des objets de dimension 2. Un cube, une boule... sont des objets de dimension 3. Lorsqu'on double la taille d'une courbe, sa longueur double; la même opération quadruple la surface du carré ou du cercle et multiplie par 8 celle d'un cube. Le facteur 2 d'agrandissement linéaire se répercute par un facteur 2^d en dimension d pour l'aire ou le volume respectivement.

On peut attribuer une dimension non entière à un fractal permettant aussi de représenter la variation métrique au cours d'un agrandissement linéaire de facteur 2 (ou 3). Pour la courbe de von Koch, on constate que son premier tiers a pour longueur le quart de la courbe totale. La dimension d de cette courbe doit donc satisfaire 3^d = 4! Tout gymnasiaste découvrira la solution de cette équation: d = log4/log3 = 1,2618595... C'est la dimension attribuée à la courbe de von Koch (sa longueur est infinie).



Les images ont été réalisées dans le cadre d'un travail pratique en infographie à la section de mathématiques de l'IMI par J.-P. Renfer. Elles illustrent des symétries du flocon de von Koch qui n'avaient pas encore été mises en évidence.

LES COURBES DE VON KOCH ET DE SIERPINSKI COMME PARADIGMES DE FRACTALS

par A. Robert^{*)}

Professeur à l'Université de Neuchâtel (Suisse)

1. LA COURBE DE VON KOCH

C'est à Helge von Koch (1904) que l'on doit l'exemple de courbe continue non différentiable qui suit. Les premières approximations laissent entrevoir le principe itératif conduisant (convergence uniforme oblige!) à la limite en question.

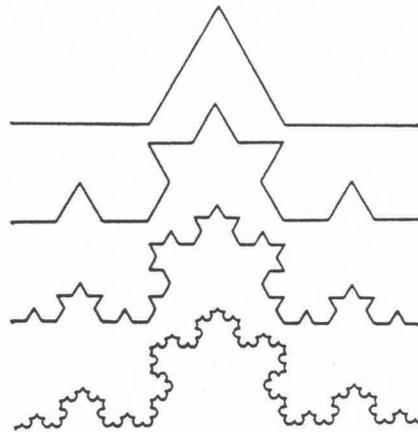


Fig.1

Il est évident que cette courbe est réunion de 4 portions réduites à l'échelle $1/3$ de la courbe entière (les deux portions centrales sont inclinées. Il est aussi évident que l'on retrouve une copie de la courbe à la même échelle $1/3$ en position horizontale au sommet (qui joue le rôle de centre d'homothétie). Cette remarque suggère de filmer la courbe en effectuant un zoom $1 : 3$ sur cette portion centrale, et de projeter le résultat en cycle. On aura ainsi l'impression de s'approcher indéfiniment du sommet, sans jamais obtenir d'image plus simple. Ceci illustre bien la non différentiabilité de la courbe (en ce point). Les lignes brisées qui approchent la courbe ont pour longueur $(4/3)^n \rightarrow \infty$. La courbe limite n'est pas rectifiable (le lecteur est invité à réfléchir à cette déduction : nous ne sommes pas en train de reproduire le paradoxe grec consistant à dire que la longueur de la diagonale du carré unité est 2 puisque cette diagonale peut être approchée uniformément par des lignes en escalier de longueur 2 !). L'intersection de la courbe avec l'horizontale de base est l'ensemble triadique de Cantor : il est totalement discontinu.

^{*)} Texte d'une conférence faite à l'IREM de Nantes (France) le 7.03.90. Je tiens à remercier J.-P. Renfer qui a réalisé les images laser des flocons de von Koch (dans son travail de licence à l'IMI de Neuchâtel).

Une observation légèrement moins évidente consiste à remarquer que les deux sommets des triangles équilatéraux ajoutés dans la deuxième approximation sont alignés avec l'origine et le sommet supérieur, et qu'ils divisent en trois portions égales le segment qui joint ces derniers.

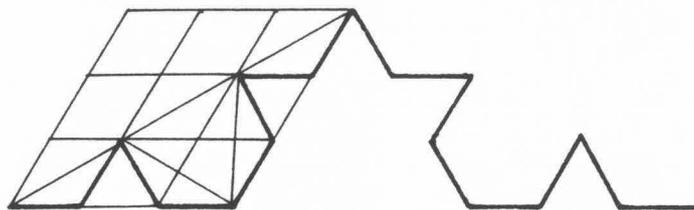


Fig.2

On en déduit la possibilité de construire une courbe de von Koch à partir du segment reliant l'origine et le sommet supérieur, et orientée vers le bas. Les approximations de cette dernière forment une suite d'encadrements de la courbe de von Koch limite. Une similitude permet donc de passer de la courbe entière sur sa première moitié. Cette même similitude va appliquer la première moitié de la courbe sur son premier tiers (car le raisonnement fait s'applique naturellement aussi à la première moitié, oblique, de la courbe!). Il en résulte que le carré de la similitude en question est l'homothétie de rapport $1/3$. Cela prouve par exemple que la distance de l'origine au sommet de la courbe est $1/\sqrt{3}$ (c'est le rapport de dilatation de la similitude...). La suite d'encadrements de la courbe admet pour aires $\sigma/3^n \rightarrow 0$. La courbe de von Koch est donc *négligeable* (au sens de la mesure de Lebesgue du plan).

Même si la courbe de von Koch n'est pas rectifiable, son centre de gravité est parfaitement bien défini. Voici comment on peut le trouver. Par raison de symétrie, il doit se trouver sur la verticale d'abscisse $1/2$, à une hauteur xh ($h = 1/\sqrt{12}$ désignant la hauteur de la courbe, i.e. la hauteur du triangle équilatéral de côté $1/3$ de la première approximation). Ce même raisonnement peut être fait pour chacune des moitiés de la courbe et comme les trois centres de gravité doivent être alignés, on en tire l'équation

$$x = \frac{h - x}{\sqrt{3}} \cdot \cos\pi/6 = \frac{h - x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h - x}{2},$$

d'où $x = h/3$: le centre de gravité est situé au tiers de la hauteur de la courbe.

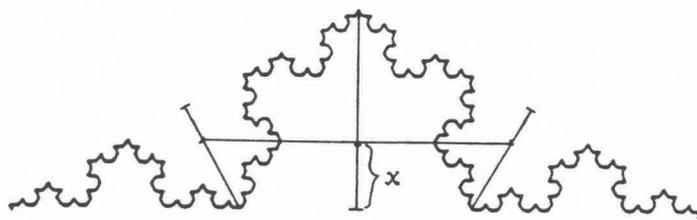


Fig.3

Il y a une paramétrisation uniforme de la courbe qui est canonique (remplaçant le paramètre spécial des courbes lisses). En effet, il est naturel de choisir la paramétrisation $t \in [0,1]$ qui passe par le sommet (centre de symétrie) en $t = 1/2$, passe par le point $(1/3,0)$ en $t = 1/4$, par $(2/3,0)$ en $t = 3/4$, etc. Les valeurs du paramètre étant ainsi prescrites pour tous les points rationnels $a/2^m \in [0,1]$, il y a un unique prolongement continu qui décrit la courbe. A l'aide de cette paramétrisation

$$t \mapsto \varphi(t) : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$$

le centre de gravité est donné par

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \in \mathbb{C}.$$

(D'ailleurs, pour toute paramétrisation continue $t \mapsto \gamma(t) : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$, on peut considérer le "barycentre" défini similairement par

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \gamma(t) dt \in \mathbb{C}.$$

On peut montrer que tous ces barycentres sont situés dans l'enveloppe convexe de l'image de la courbe dans \mathbb{C} .)

La dimension de self-similarité (c'est aussi la dimension de Hausdorff en l'occurrence) est définie comme suit : tout facteur d'accroissement linéaire l doit se répercuter par un facteur l^d du "contenu". Par exemple, si on multiplie par 2 le côté d'un carré, son aire est multipliée par $4 = 2^2$. Donc la dimension du carré est 2. Pour le cube, la duplication du côté produit une multiplication par $8 = 2^3$ du volume : il est de dimension 3. Pour une courbe lisse, tout agrandissement linéaire produit le même agrandissement de la longueur : les courbes lisses sont de dimension 1. Prenons maintenant la courbe non rectifiable de von Koch. Lorsqu'on en prend une homothétique trois fois plus grande, on constate que cette nouvelle courbe contient quatre portions équivalentes par isométrie à la première. On doit donc admettre que sa dimension d satisfait l'équation

$$3^d = 4 \quad (\text{donc } 1 < d < 2).$$

Il en résulte $d = \log 4 / \log 3 = 2 \log 2 / \log 3 = 1,2618595\dots$

Le même raisonnement permet de déterminer la dimension de l'ensemble triadique de Cantor. Ici, une homothétique de rapport 3 fait surgir une deuxième copie de l'ensemble original. La dimension d de ce dernier doit satisfaire

$$3^d = 2 \quad (\text{donc } 0 < d < 1).$$

et précisément $d = \log 2 / \log 3 = 0,6309298\dots$ (moitié de la dimension de la courbe...)

On peut prolonger la courbe de von Koch en courbe illimitée d'une façon naturelle. Il suffit de considérer que la portion de courbe construite au-dessus de l'intervalle $[0,1]$ est le premier quart d'une courbe similaire construite au-dessus de l'intervalle $[0,3]$. Puis recommencer au-dessus de l'intervalle $[0,9]$, etc. La paramétrisation canonique définie dans le paragraphe précédent se prolonge en paramétrisation canonique

$$\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$$

qui satisfait par construction l'équation fonctionnelle

$$\varphi(4t) = 3\varphi(t) \quad (t \geq 0).$$

Ce prolongement reste dans le secteur de \mathbb{C} défini par $0 \leq \text{Arg} z \leq \pi/6$ qui constitue l'enveloppe convexe de l'image de cette courbe illimitée.

Il est même possible de prolonger φ canoniquement aux valeurs négatives de t en considérant le prolongement de la courbe de von Koch qui admet l'origine comme sommet. Cette paramétrisation satisfait la même équation fonctionnelle que ci-dessus et a pour enveloppe convexe dans \mathbb{C} , le secteur défini par $-\pi/2 \leq \text{Arg}z \leq \pi/6$. La restriction de φ à l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ redonne la courbe originale à une isométrie près. Une équation fonctionnelle relie aussi les valeurs négatives aux valeurs positives puisque la courbe admet l'axe de symétrie donné par la droite d'équation $\text{Arg}z = -\pi/6$

$$e^{i\pi/6} \cdot \varphi(-t) = \text{conjugué de } e^{i\pi/6} \cdot \varphi(t) \quad (t \geq 0).$$

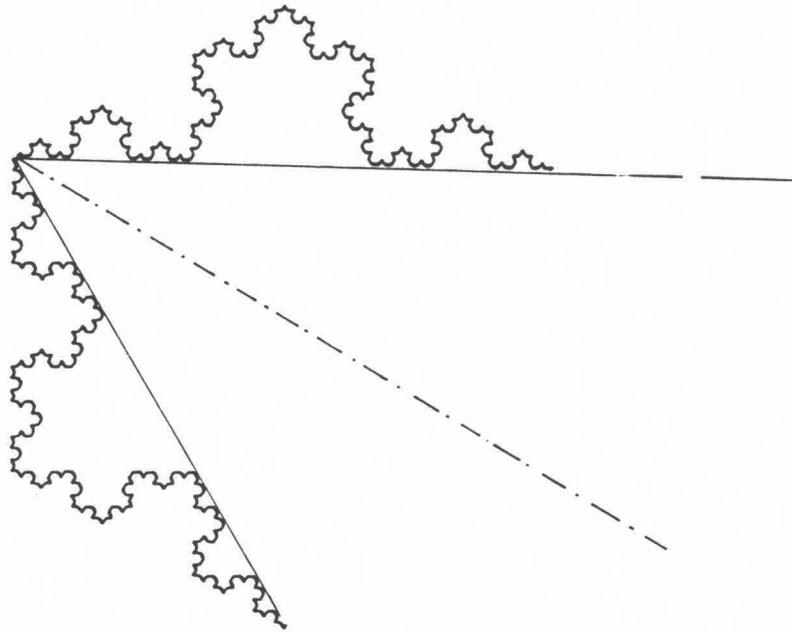


Fig.4

2. LE FLOCON DE VON KOCH

Passons maintenant au flocon de von Koch. Il s'agit de la courbe fermée simple obtenue en répétant la courbe de von Koch sur les trois côtés d'un triangle équilatéral. Comme le suggère la construction de la courbe illimitée, nous choisirons le triangle équilatéral de base ayant pour sommets les points 0 , 1 et $e^{-i\pi/3}$. L'aire de ce flocon est très facile à déterminer. En effet, l'aire S_0 du triangle équilatéral de côté 1 est

$$S_0 = \sqrt{3}/4.$$

L'aire S_1 de la première approximation du flocon (l'étoile de David à six branches) s'obtient en ajoutant trois triangles équilatéraux réduits à l'échelle de $1/3$ donc

$$S_1 = S_0 (1 + 3/9) = 4S_0/3.$$

On vérifie sans peine que l'aire de la limite est donnée par la série géométrique

$$S_\infty/S_0 = 1 + \frac{3}{9} \left[1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right] = 1 + 3^{-1} \left[1 - \frac{4}{9} \right]^{-1} = 8/5.$$

Donc à l'échelle convenue

$$S_\infty = (8/5) \cdot (\sqrt{3}/4) = 2\sqrt{3}/5.$$

La paramétrisation naturelle de ce flocon est donnée par une fonction f de période 3 qui coïncide avec φ sur l'intervalle $[-1,1]$. On a d'ailleurs la relation

$\varphi(t) = 3^k \varphi(4^{-k}t) = 3^k f(4^{-k}t)$ dès que $|t| \leq 4^k$ (i.e. $k \geq \log|t|/\log 4$). Elle permet de retrouver la paramétrisation illimitée $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à partir de la paramétrisation f du flocon par la formule

$$\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k f(4^{-k}t) \quad (\text{convergence stationnaire !}).$$

En tant qu'application continue et périodique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, cette fonction f admet un développement en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad (\omega = 2\pi/T = 2\pi/3).$$

Son coefficient constant c_0 en est la moyenne, c'est-à-dire le centre du flocon

$$\operatorname{Re} c_0 = 1/2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} c_0 = e^{-\pi/6}$$

d'où $c_0 = (1 - i\sqrt{3})/2$. Il est probablement plus commode de centrer le flocon par translation de ce centre de symétrie et considérer la fonction 3-périodique

$$f_0(t) = f(t) - c_0 = \sum_{k \neq 0} c_k e^{ik\omega t}$$

qui présente une symétrie de rotation d'ordre 6. Celle-ci fournit l'équation

$$f_0(t + 1/2) = e^{-2\pi i/6} f_0(t).$$

A son tour, cette relation est équivalente à

$$c_k = 0 \quad \text{sauf si } k \equiv 1 \pmod{6}.$$

Il serait déjà intéressant de calculer c_1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} f_0(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= e^{-2\pi i/12} \cdot \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} e^{2\pi i/12} f_0(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= e^{-2\pi i/12} \cdot \frac{2}{3} \operatorname{Re} \int_0^{3/2} e^{2\pi i/12} f_0(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

puisque $e^{2\pi i/12} f_0 = f_1$ satisfait $f_1(-t) = \overline{f_1(t)}$. On peut encore utiliser une self-similarité de la courbe pour se ramener à une intégrale sur $[0, 3/4]$...

Comme on le sait par ailleurs de façon générale, l'aire d'une courbe fermée simple (paramétrée dans le sens trigonométrique direct) est donnée par sa suite de coefficients de Fourier selon la formule

$$\text{Aire} = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} k |c_k|^2.$$

Dans notre cas, cette formule donne pour le flocon de von Koch la relation

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{6}} k |c_k|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5\pi}.$$

Finalement, revenons à l'observation cruciale de self-similarité de rapport $1/\sqrt{3}$ de la courbe de von Koch. Pour le flocon, elle se traduit par la possibilité de placer six flocons réduits du facteur $1/\sqrt{3}$ autour d'un flocon original ou trois flocons agrandis dans le rapport $\sqrt{3}$ (cf. fig.5).

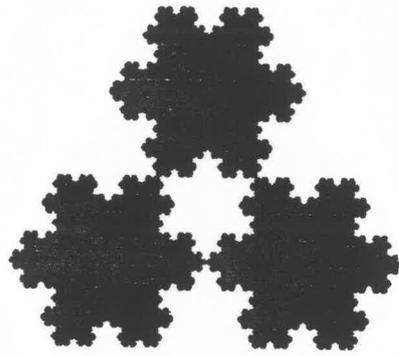
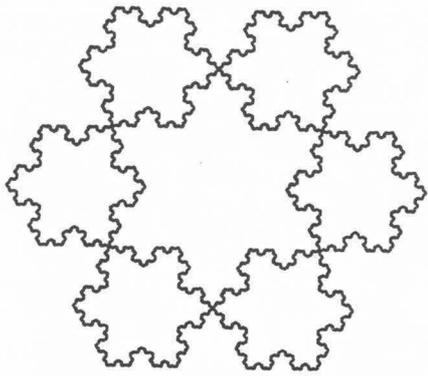


Fig.5

On peut en déduire un pavage du plan constitué par deux tailles de flocons de von Koch. On peut aussi circonscrire une chaîne de 18 flocons plus petits autour de la chaîne de 6, etc.

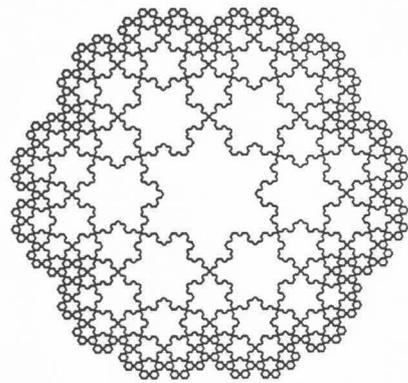
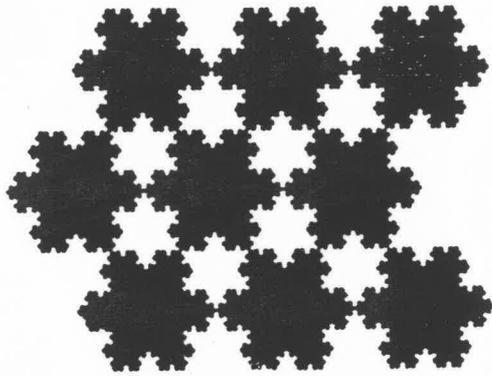


Fig.6

Il est intéressant de constater que les itérations conduisent ici à une frontière non connexe. Il s'agit de paver les "trous". Pour ceci, on procède comme dans la figure suivante.

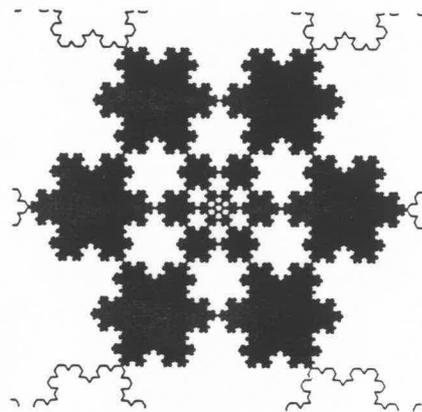
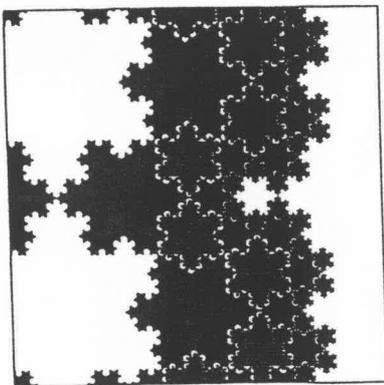


Fig.7

Cette façon de paver un "trou", permet de paver le plan entier sauf un point (le centre) à l'aide de flocons homothétiques. On reconnaît ici un schéma de spirales...

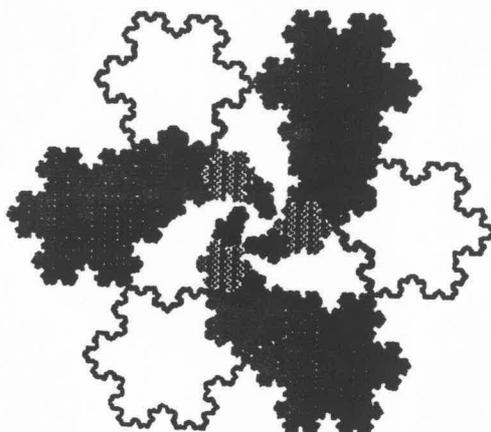


Fig.8

Une autre spirale formée de flocons apparaît d'une autre façon comme suit.

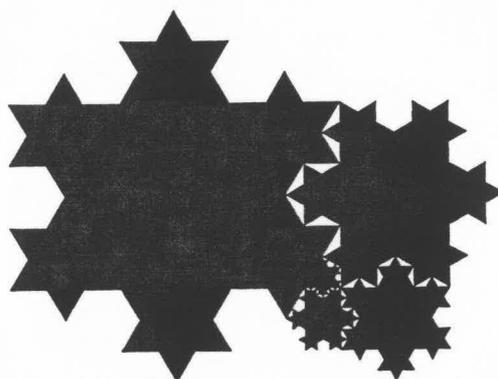


Fig.9

3. LE NAPPERON DE SIERPINSKI

Partons d'un triangle plein et retranchons-lui le triangle obtenu en joignant les milieux de ses côtés. Il reste alors trois triangles similaires au premier mais de dimension moitié. Reconnençons le procédé d'excavation sur chacun des trois petits triangles (cf. illustration) : il restera une figure formée de neuf triangles plus petits... En itérant le procédé, on voit qu'il restera finalement une figure extrêmement complexe qui n'est rien d'autre que le napperon de Sierpinski. Si l'aire du triangle initial est S_0 , il ne restera que les trois quarts de S_0 après la première extraction. Après la $n^{\text{ème}}$ itération, la figure restante n'aura plus qu'une aire de $(3/4)^n S_0$. Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces aires tendent vers zéro et le napperon de Sierpinski est d'aire nulle (il est négligeable au sens de la mesure de Lebesgue dans le plan).

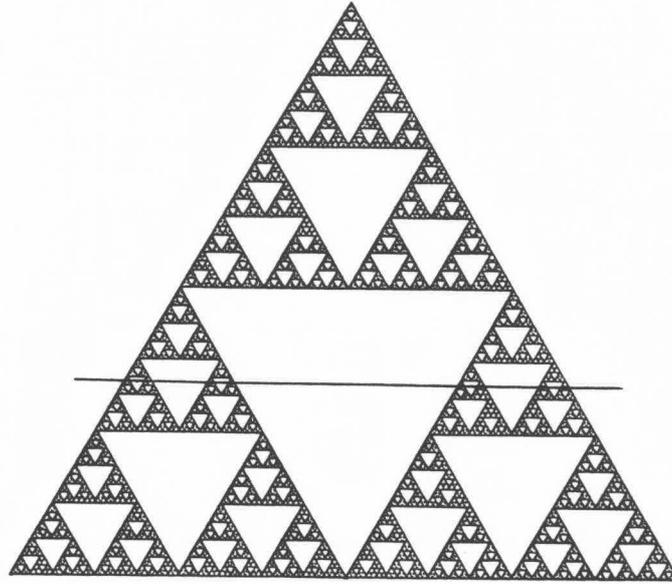


Fig.10

Une coupe de ce napperon au tiers de sa hauteur révèle la présence d'un ensemble ressemblant à l'ensemble triadique de Cantor. En effet, une telle coupe partage aussi le premier triangle enlevé dans la proportion $1/3, 2/3$ et à la deuxième itération, on retrouve une coupe parfaitement similaire à la première. L'ensemble totalement discontinu que l'on obtient est le suivant. Partant d'un intervalle $I = I_0$, on lui enlève une portion médiane de longueur moitié. Il reste alors deux intervalles de longueur égale au quart de la longueur de l'intervalle original : $I_1 = I'_1 \cup I''_1$. On recommence sur chacun des intervalles restants l'opération faite pour I . A la $n^{\text{ème}}$ étape, I_n est réunion disjointe de 2^n intervalles dont la somme de longueurs vaut 2^{-n} fois la longueur de l'intervalle original. L'ensemble limite (intersection des I_n) est négligeable et isométrique à la section du napperon de Sierpinski au tiers de sa hauteur.

Si on amplifie d'un facteur deux (linéairement) un napperon de Sierpinski, on retrouve trois copies du napperon original. Cela montre que son "contenu" triple si on double ses dimensions linéaires. Sa dimension d doit donc être racine de l'équation $2^d = 3$:

$$d = \log 3 / \log 2 = 1,5849625\dots$$

Nous allons illustrer l'ubiquité du fractal de Sierpinski par différentes constructions inattendues.

Le processus aléatoire suivant donne une *méthode de Monte-Carlo* pour le dessin du fractal de Sierpinski. Fixons trois points A, B et C non alignés dans le plan. A partir d'un point P intérieur au triangle ABC , on construit une suite (P_n) de points aléatoires en décidant que P_{n+1} est avec probabilité $1/3$ le point milieu de $P_n A$, de $P_n B$ ou de $P_n C$. Par exemple, on peut jouer avec un dé et décider que les issues 1 et 2 (resp. 3,4 ou 5,6) correspondent à un

déplacement du point dans la direction de A (resp. B ou C). Mis à part les quelques premiers points, un graphique d'une telle suite retrace le fameux napperon ! La raison en est simple. Le premier point P est arbitraire : il a peu de chance de se trouver sur le napperon. Mais le deuxième ne peut que se trouver dans les trois triangles homothétiques au premier dans le rapport 1/2 (représentant les trois déplacements possibles dans les directions A, B ou C). Ainsi, P_1 se trouvera nécessairement dans la première approximation du napperon. Itérativement, P_n devra se trouver dans la $n^{\text{ème}}$ approximation du napperon. Pour peu que les issues soient distribuées de façon équitable (!) la suite des P_n avec $8 \leq n \leq 100'000$ donnera une très bonne image du napperon.

Deuxièmement, revenons au triangle formé par les coefficients binomiaux (dénommé aussi triangle de Pascal en Occident...).

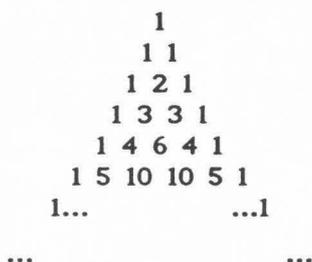


Fig.11

Plus précisément, intéressons-nous à la parité des coefficients binomiaux. Pour cela, remplaçons tous les nombres pairs par 0 et les nombres impairs par 1. Mod 2, on trouve le triangle



Fig.12

Comme on le sait bien, tous les coefficients binomiaux intermédiaires d'une ligne d'indice 2^k sont pairs et on obtient une ligne du type 1 0... ...0 1 qui se répercute ensuite par la présence d'un triangle de zéros dans les lignes suivantes. On reconnaît facilement dans les figures formées par les 2^k premières lignes $0 \leq i < 2^k$ (la ligne de base ayant l'indice $i = 2^k - 1$ n'a que des 1, donc correspond à des coefficients binomiaux tous impairs) des approximations du napperon de Sierpinski. Dans un sens qu'il serait facile de préciser, le triangle de Pascal mod 2 tend vers le napperon de Sierpinski.

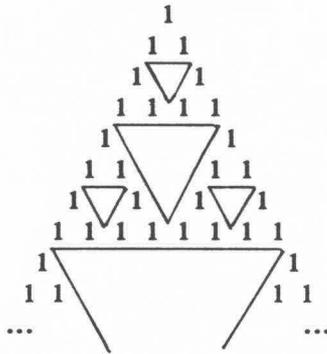


Fig.13

(On admet qu'il est plus fréquent de considérer la taille des coefficients binomiaux dans une ligne : convenablement normalisée, cette distribution binomiale tend vers une courbe en cloche de Gauss...). Du point de vue physique, on peut parvenir à l'observation précédente par un chemin légèrement différent. Au lieu d'additionner les deux coefficients d'une ligne pour passer à la ligne suivante, on peut décider de les soustraire : modulo 2, le résultat sera le même. Ainsi, partant de la ligne illimitée

...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0...

et d'en faire les différences finies (mod 2)

....0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0....

A son tour, cette ligne admet les différences finies

.....0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0.....

On peut imaginer que les 1 représentent des spins orientés vers le haut tandis que les zéros représentent des spins orientés vers le bas. Au cours du temps, les variations d'orientation se propagent comme une onde, avec les interférences caractéristiques d'une onde. On trouve ainsi une image du tableau de Pascal modulo 2 qui illustre encore l'approximation du napperon.

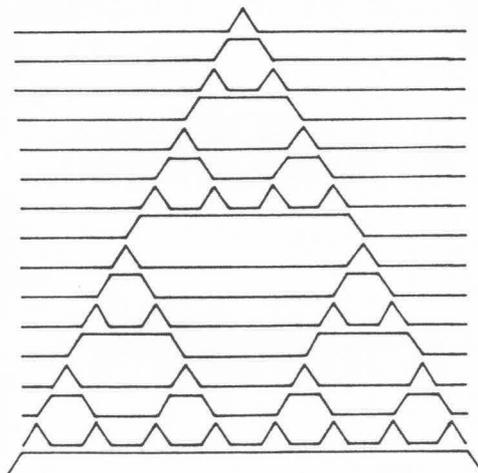


Fig.14

4. LES COURBES DE SIERPINSKI

Le napperon de Sierpinski est aussi une courbe ! Indiquons quelques approximations de cette courbe par des courbes simples (sans point double). Pour rejoindre deux points A et B, le plus court chemin est donné par le segment d'extrémités A et B. Partant de cette "courbe", on peut — comme un écolier qui flânerait — décider de rejoindre A et B par la ligne brisée formée de trois segments de longueur moitié. Ensuite, on pourrait remplacer chacun des nouveaux segments par trois autres de longueur moitié et ainsi de suite...

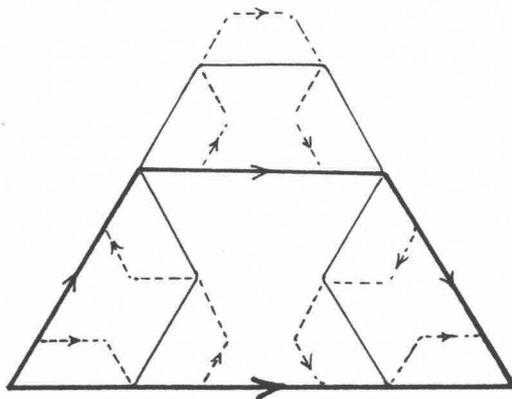


Fig.15

Si on utilise un algorithme naturel pour les contours à gauche et à droite, on voit que cette suite de lignes polygonales tend uniformément vers le napperon (qui est ainsi une courbe avec points doubles). Indiquons en effet par la lettre D un contour à droite (changement de direction de $\pi/3$) et par G un contour analogue à gauche. Alors, la première approximation correspond aux deux contours à droite DD. La deuxième correspond à GGDDGG (les deux lettres grasses D représentent les sommets de la première approximation. Pour passer à l'approximation suivante, il suffit d'insérer alternativement les couples DD, GG entre les lettres précédentes

DDGGGGDDGGDDDDGGDDGGGGDD

On voit bien comment continuer !

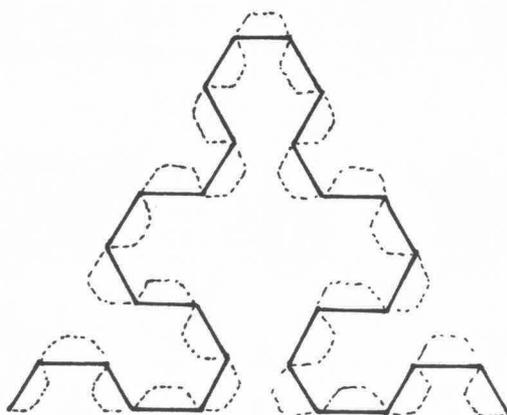


Fig.16

De plus, et comme pour la courbe de von Koch, on voit qu'il y a une paramétrisation naturelle de cette courbe par l'intervalle $[0,1]$ (si on en fixe l'origine A et l'extrémité B). Cette courbe de Sierpinski est de longueur infinie puisque son approximation d'ordre n a pour longueur $(3/2)^n \ell$ (ℓ : longueur du segment original). La paramétrisation canonique "uniforme" décrit la courbe à vitesse constante infinie...

Cette courbe peut être prolongée de façon illimitée dans un secteur et paramétrée par la droite réelle entière \mathbb{R} . La symétrie par rapport à l'axe vertical correspond alors —avec un bon choix de paramètre uniforme— à la symétrie $t \mapsto -t$. C'est d'ailleurs celle-ci qui est limite du triangle de Pascal mod 2. Il suffit de connaître l'équation de la prolongée à un ordre fini n pour obtenir la courbe limite par l'expression

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(3^n t).$$

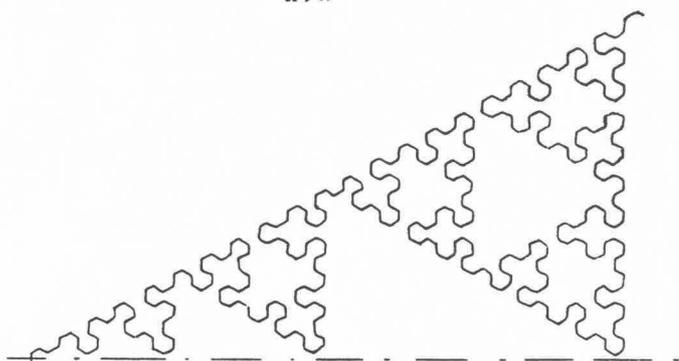


Fig.17

Venons-en à la courbe fermée de Sierpinski. Il suffit de placer six nappes alternativement au dedans et au dehors d'un hexagone régulier. Cette configuration symétrique représente une limite de courbes fermées simples ayant toutes la même aire, égale à l'aire de l'hexagone de base sur lequel elle est construite. On laisse au lecteur le soin d'écrire la relation d'aire en fonction des coefficients de Fourier de cette courbe. Comme cette courbe fermée présente une symétrie d'ordre 3 (et non 6), ses coefficients de Fourier non nuls sont ceux qui ont un indice $k \equiv 1 \pmod{3}$. Les pavages du plan obtenus par juxtaposition de ces courbes de Sierpinski sont intéressants.

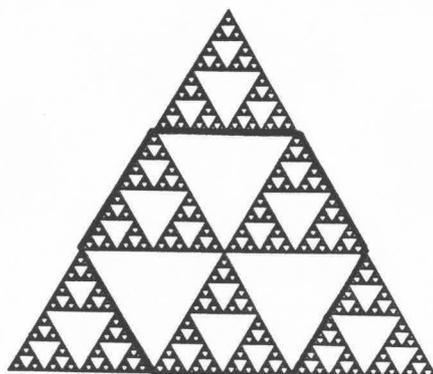


Fig.18

5. PARAMETRISATIONS p-ADIQUES

Un entier p-adique est donné par un développement illimité en base p

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$$

avec des coefficients ("digits") satisfaisant $0 \leq a_i \leq p-1$. Le développement en base p d'un entier naturel conduit à un tel développement (avec des $a_i = 0$ à partir d'un certain rang). Ces développements peuvent être additionnés avec le système des retenues usuel dans le cas où $a_i + b_i \geq p$. On peut aussi multiplier de tels développements. Avec ces deux lois de composition, on obtient l'anneau des entiers p-adiques \mathbb{Z}_p . Dans cet anneau, on trouve les entiers négatifs. Par exemple, si on prend tous les coefficients $a_i = p - 1$, le système des retenues montre que

$$1 + \sum_{i \geq 0} (p-1)p^i = 0.$$

Donc

$$\sum_{i \geq 0} (p-1)p^i = -1.$$

La topologie du produit sur les familles $(a_i)_{i \geq 0}$ munit \mathbb{Z}_p d'une structure d'anneau topologique. Pour cette topologie, \mathbb{Z}_p est compact et totalement discontinu (les seuls connexes de \mathbb{Z}_p sont les points). La numération en base 2 donne un homéomorphisme canonique entre \mathbb{Z}_2 et l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0,1]$ (il est donné explicitement plus bas). La figure 19 donne une image canonique de \mathbb{Z}_3 au-dessus de l'ensemble de Sierpinski: il y a une application continue canonique $\psi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow S$ qui est bijective hors des points doubles de S. Tous les espaces \mathbb{Z}_p sont homéomorphes (non canoniquement) entre eux et donc à l'ensemble de Cantor C.

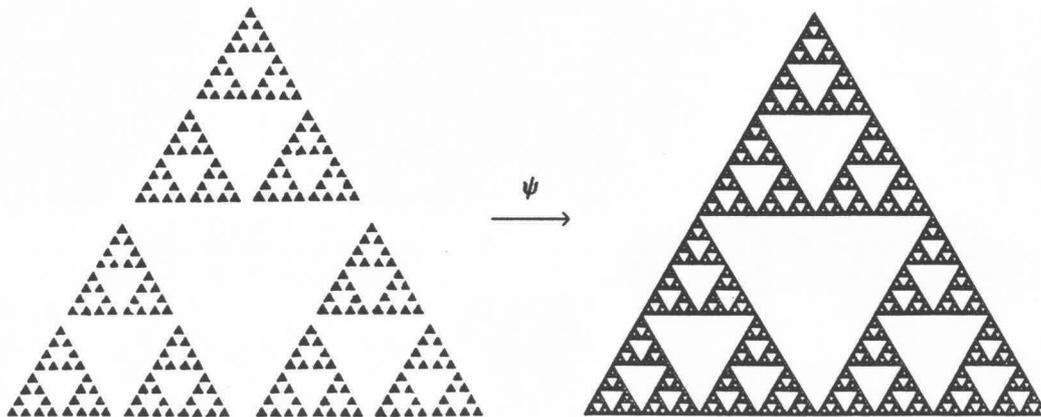


Fig.19

Introduisons les applications surjectives

$$\psi_p : \mathbb{Z}_p \rightarrow [0,1]$$

définies par

$$\sum_{i \geq 0} a_i p^i \mapsto \sum_{i \geq 0} a_i p^{-i-1} = 0, a_0 a_1 a_2 \dots \text{ en base } p.$$

Elles ne sont pas injectives car les points de

$$[0,1[\cap \mathbb{Z}[1/p] = \{a/p^m \text{ où } 0 < a < p^m, m \in \mathbb{N}\}$$

ont deux écritures en base p (l'une avec des zéros à partir d'un certain rang, l'autre illimitée). Par contre, en dehors de ces points, ψ_p est bijective. On observera que la composée de $\psi_3 : \mathbb{Z}_3 \rightarrow [0,1]$ avec la paramétrisation uniforme de S n'est autre que l'application canonique ψ représentée dans la figure 19

$$\psi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow [0,1] \rightarrow S.$$

La symétrie $t \mapsto -1-t$ de \mathbb{Z}_3 correspond à la symétrie de S relativement à son sommet (ce dernier, point fixe de la symétrie, est bien l'image de $t = -1/2$ dont le développement 3-adique a toutes ses composantes a_i égales à 1).

Revenons à l'homéomorphisme canonique entre \mathbb{Z}_2 et l'ensemble triadique de Cantor C . Voici comment on peut l'écrire. En utilisant la représentation décimale en base 3 des éléments $x \in [0,1]$, disons

$$x = \sum_{i \geq 0} x_i 3^{-i-1} = 0, x_0 x_1 x_2 \dots \text{ où } x_i = 0, 1 \text{ ou } 2,$$

la relation $x \in C$ équivaut à la propriété " $x_i \neq 1$ pour tout $i \geq 0$ ". Si $t \in \mathbb{Z}_2$ disons $t = \sum_{i \geq 0} t_i 2^i$, on peut lui associer l'élément $x \in C$ ayant toutes ses composantes paires $x_i = 2t_i$ et obtenir ainsi la paramétrisation

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cong} C \subset [0,1], \quad t = \sum_{i \geq 0} t_i 2^i \mapsto x = \sum_{i \geq 0} 2t_i 3^{-i-1}.$$

Cette paramétrisation peut être prolongée à l'anneau auquel on ajoute une racine de 1 d'ordre 3

$$\zeta^3 = 1 \text{ et } \zeta \neq 1 \quad \text{d'où} \quad \zeta^2 + \zeta + 1 = 0.$$

Dans ce nouvel anneau

$$\mathbb{Z}_2[\zeta] = \mathbb{Z}_2 + \zeta \mathbb{Z}_2$$

on calcule avec la règle $\zeta^2 = -\zeta - 1$.

Il y a une paramétrisation canonique de la courbe de von Koch par cet anneau $\mathbb{Z}_2[\zeta]$. Si

$$t + \zeta s = \sum_{i \geq 0} t_i 2^i + \zeta \sum_{i \geq 0} s_i 2^i = \sum_{i \geq 0} (t_i + \zeta s_i) 2^i$$

on lui associe un point $j_4(t + \zeta s) = \sum_{i \geq 0} x_i 4^{-i-1} \in [0,1]$ où

$$t_i + \zeta s_i = 0 \text{ (resp. } \zeta, 1+\zeta, 1) \implies x_i = 0 \text{ (resp. } 1, 2, 3).$$

(Cette application j_4 ressemble à une ψ_4 , mais ψ_p n'a été définie que pour p premier...) On voit que les points avec $s_i = 0$ ont une image dans un ensemble cantorien obtenu en retranchant de l'intervalle $[0,1]$ un intervalle médian de longueur moitié, etc. En composant cette application avec la paramétrisation uniforme de la courbe de von Koch K on obtient une paramétrisation de cette dernière qui étend la paramétrisation de l'ensemble

de Cantor par Z_2

$$Z_2[\zeta] \longrightarrow [0,1] \longrightarrow K.$$

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z_2[\zeta] & \longrightarrow & [0,1] \longrightarrow K \subset \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ Z_2 = Z_2[\zeta] \cap \mathbb{Q}_2 & \longrightarrow & \mathbb{C} = K \cap \mathbb{R} \end{array}$$

(on a posé $\mathbb{Q}_2 = \text{Frac}(Z_2)$: c'est le corps des nombres 2-adiques). La connaissance des premières composantes t_0 et s_0 de $t + \zeta s$ détermine sur quel "quart" de courbe l'image sera située. Itérativement, on détermine l'image exacte de $t + \zeta s$ sur la courbe K . A titre d'exercice, le lecteur pourra encore considérer l'application continue $t + \zeta s \mapsto 2s + \zeta t$ de $Z_2[\zeta]$ dans lui-même puis déterminer les images des paramétrisations composées

$$\begin{aligned} t + \zeta s &\mapsto 2s + \zeta t \mapsto \Phi(2s + \zeta t), \\ t + \zeta s &\mapsto 2s + \zeta t \mapsto 2t + \zeta 2s \mapsto \Phi(2t + \zeta 2s). \end{aligned}$$

Point n'est besoin d'épiloguer plus longtemps sur ces paramétrisations...

6. SYSTEMES ITERÉS

Sans prétendre faire une théorie générale, il peut néanmoins être utile de signaler une méthode générale de construction de fractals *self-similaires* dans un espace euclidien \mathbb{R}^k . Considérons pour cela un système fini de similitudes $S = (S_1, \dots, S_n)$, chaque S_i étant de la forme

$$S_i = \frac{1}{\nu_i} T_i + a_i$$

où T_i est une isométrie linéaire de \mathbb{R}^k , $\nu_i > 1$ (un facteur de contraction) et $a_i \in \mathbb{R}^k$ (translation). Pour toute partie A de \mathbb{R}^k , on pose

$$\begin{aligned} S(A) &= \cup S_i(A), \\ S^{k+1}(A) &= S(S^k(A)) \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Le cas le plus simple est celui des deux similitudes S_1 et S_2 de \mathbb{R} données par

$$S_1 = 3^{-1} \text{ Id.}, \quad S_2 = 3^{-1} \text{ Id.} + 2/3.$$

Avec $S = (S_1, S_2)$ on obtient évidemment

$$\begin{aligned} S([0,1]) &= [0,1/3] \cup [2/3,1], \\ S^2([0,1]) &= S([0,1/3] \cup [2/3,1]) = \\ &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]. \end{aligned}$$

On reconnaît la construction de l'ensemble de Cantor

$$C = \bigcap_{k \geq 1} S^k([0,1]).$$

De même, trois similitudes dans $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ permettent de construire l'ensemble S de Sierpinski et quatre similitudes la courbe de von Koch. Dans ces exemples, les facteurs de contraction sont égaux à $\nu = 1/3$ pour C , $\nu = 1/2$ pour S et $\nu = 1/4$ pour K . Ce sont les rapports de self-similarité respectifs.

Revenons au cas général et introduisons l'ensemble $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^k)$ des parties compactes non vides de \mathbb{R}^k . Pour A et $B \in \mathcal{P}_c$, on pose

$$\delta(A,B) = \text{Max}_{a \in A} (\text{dist}(a,B)).$$

Il est clair que $\delta(A,B) = 0$ exactement lorsque $A \subset B$. Pour obtenir une métrique sur \mathcal{P}_c , il s'agit simplement de symétriser la relation δ en posant

$$d(A,B) = \text{Max}(\delta(A,B), \delta(B,A)).$$

C'est la définition de la métrique de Hausdorff sur \mathcal{P}_c . Le théorème des applications contractantes dans un espace métrique fournit alors facilement le résultat général suivant.

Théorème. Pour tout système $S = (S_i)_{1 \leq i \leq n}$ de similitudes dans \mathbb{R}^k ayant des facteurs de contraction $\nu_i > 1$, l'application $S : \mathcal{P}_c \rightarrow \mathcal{P}_c$ définie ci-dessus est contractante et admet en conséquence un unique point fixe K appelé *attracteur* de S . De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}_c$, $S^k(A) \rightarrow K$ au sens de la métrique de Hausdorff sur \mathcal{P}_c .

Dans le cas d'un système $S = (S_i)_{1 \leq i \leq n}$ où tous les facteurs de contraction $\nu_i = \nu$ sont égaux, la dimension de self-similarité d d'un tel attracteur doit satisfaire $\nu^d = n$, c'est-à-dire $d = \log n / \log \nu$. En général, la dimension de self-similarité d sera définie par

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \nu_i^{-d} = 1.$$

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Les deux références suivantes expliquent le contexte général évoqué dans la dernière section 6. Elles contiennent de plus de nombreuses références.

HUTCHINSON J.E., *Fractals and Self Similarity*, *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1981) pp.713-747

LINSTRØM T., *Brownian Motion on Nested Fractals*, *Memoir of the AMS* (to appear)

Pour ce qui concerne les images (en couleur) de différents fractals (spécialement celui de Mandelbrot), on ne peut que recommander les deux livres suivants dont les tirages élevés ont permis d'abaisser le prix.

PEITGEN H.-O., RICHTER P.H., *The Beauty of Fractals*, Springer-V. (1986)
ISBN 3-540-15851-0

PEITGEN H.-O., SAUPE D., *The Science of Fractal Images*, Springer-V. (1988)
ISBN 3-540-96608-0

