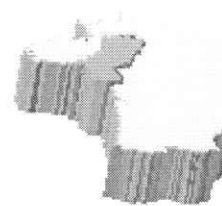


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



NANTA IREMICA N° 34

De la géométrie dans tous les azimuts

B. MARQUIS
J. VENARD

1990

ISBN : 2-86300-022-5

S O M M A I R E

Introduction.	page 1
Une application du plan dans lui-même qui transforme toute droite en une droite n'est pas nécessairement bijective.	page 2
Ellipses circonscrites à un parallélogramme.	page 5
Une minimisation.	page 9
Conique ayant perdu ses éléments, souhaite les retrouver.	page 11
A propos d'une pyramide, chassons une idée fausse.	page 14
La fourmi, le verre et la confiture.	page 15
A propos de la trisection de l'angle .	page 18
Passer d'un triangle quelconque à un triangle équilatéral.	page 21
Le triangle qui veut devenir pyramide.	page 25

INTRODUCTION

Dans les pages qui suivent, se trouvent regroupés quelques-uns des problèmes de géométrie travaillés par un groupe IREM qui a fonctionné en Maine et Loire.

Nous avons retenu uniquement les thèmes qui nous ont particulièrement intéressés ; la plupart d'entre eux peuvent fournir des idées pour des activités de géométrie dans nos classes de lycée.

Les solutions ne sont pas toujours entièrement développées. Nous sommes à la disposition des collègues pour donner éventuellement des informations complémentaires.

Les animateurs du groupe :

J. VENARD

B. MARQUIS

Février 1990

**UNE APPLICATION f DU PLAN P DANS LUI-MÊME QUI
TRANSFORME TOUTE DROITE EN UNE DROITE N'EST PAS
NECESSAIREMENT BIJECTIVE.**

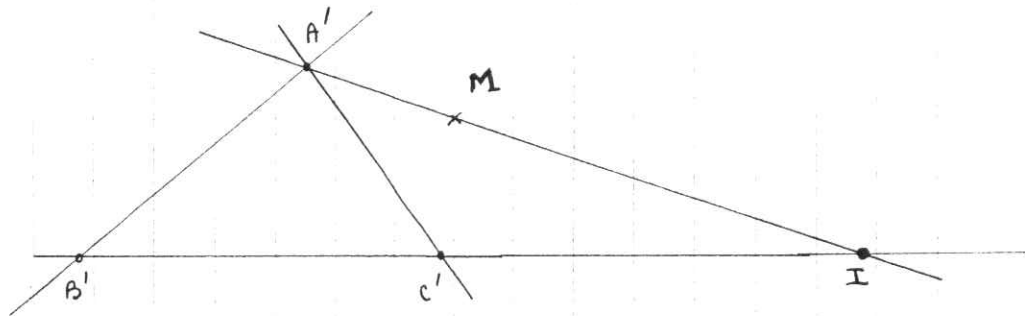
I) Soit f une application du plan P dans lui-même qui transforme toute droite en une droite.

Si $f(P)$ contient trois points non alignés, alors f est bijective ; en effet :

① une telle application est surjective :

Il existe trois points A, B, C du plan (nécessairement non alignés) dont les images A', B', C' par f ne sont pas alignées.

Soit M un point quelconque du plan, distinct de A', B' et C' . Parmi les trois intersections $(A'M) \cap (B'C')$, $(B'M) \cap (CA')$ et $(CM) \cap (AB')$, l'une au moins n'est pas vide. Supposons par exemple $(A'M) \cap (B'C') \neq \emptyset$ et notons I le point commun à $(A'M)$ et $(B'C')$.



Le point I appartient à l'image de la droite (BC) par f ; il existe donc un point i de (BC) tel que : $f(i) = I$.

Le point M appartient donc à l'image par f de la droite (Ai) et M possède donc un antécédent par f .

On déduit de ce qui précède que tout point du plan possède un antécédent par f .

L'application f est surjective.

② une telle application est injective :

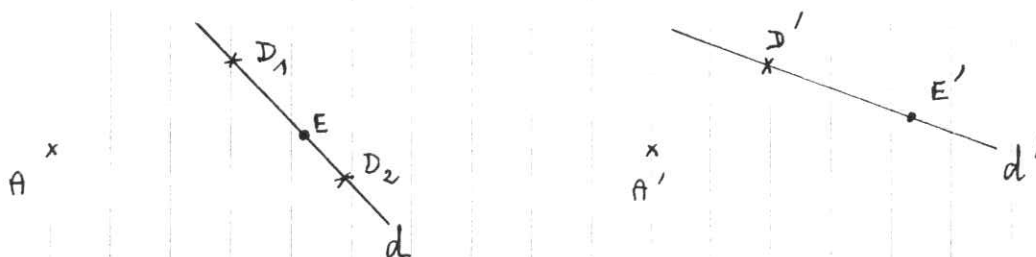
Remarques

. Toute droite est l'image d'au moins une droite.

. Deux droites d_1 et d_2 deviennent deux droites d'_1 et d'_2 ; si d'_1 et d'_2 sont parallèles disjointes, alors d_1 et d_2 sont parallèles disjointes.

* Supposons qu'il existe deux points D_1 et D_2 distincts ayant la même image D' . Les points D_1 et D_2 définissent une droite d dont l'image d' contient D' .

Il existe au moins un point A non situé sur d dont l'image A' n'est pas sur d' ; de plus il existe au moins un point E de d dont l'image E' n'est pas D' (alors $E \neq D_1$ et $E \neq D_2$).



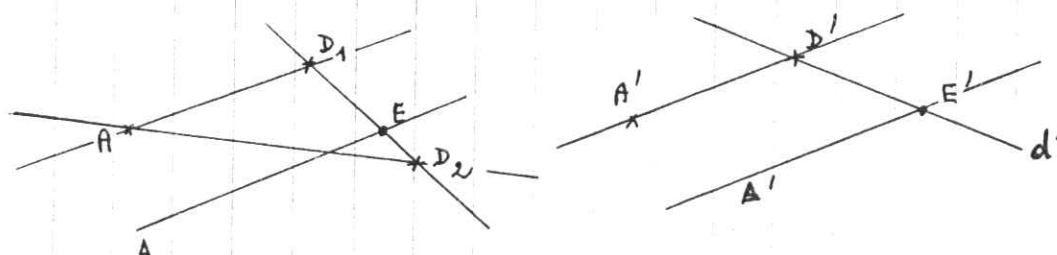
Soit Δ' la droite contenant E' et parallèle à $(A'D')$. Il existe au moins une droite Δ contenant E dont l'image est Δ' .

Puisque les droites (AD_1) et (AD_2) ont pour image $(A'D')$, et puisque Δ et $(A'D')$ sont parallèles disjointes, on peut affirmer :

Δ et (AD_1) sont parallèles disjointes

et

Δ et (AD_2) sont parallèles disjointes.



On arrive à une contradiction.

Donc f est injective.

* Conclusion : Si $f(P)$ contient trois points non alignés, alors f est bijective.

II) Soit f une application du plan P dans lui-même qui transforme toute droite en une droite.

Supposons que $f(P)$ ne contienne pas trois points non alignés.

L'image d'une droite étant une droite, $f(P)$ contient au moins une droite. Donc ici : $f(P)$ est une droite, et f n'est donc pas bijective.

Exemple d'une telle application :

Le plan P est rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

L'application f associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ défini comme suit :

Si $x > 0$ et $y < 0$: $M'(|\ln y|, 0)$

Si $x > 0$ et $y \geq 0$: $M'(\ln x, 0)$

Si $x \leq 0$ et $y > 0$: $M'(\ln y, 0)$

Si $x < 0$ et $y \leq 0$: $M'(\ln|x|, 0)$

Si $x = 0$ et $y \leq 0$: $M'(0, 0)$.

ELLIPSES CIRCONSCRITES A UN PARALLELOGRAMME

Soit ABCD un parallélogramme, non aplati et non rectangle.
Supposons : $AC > BD$.

I) Il existe au moins une telle ellipse.

On considère le rectangle $AB_1C_1D_1$ (voir fig. 1) inscrit dans le cercle (Γ) de diamètre $[AC]$: l'affinité orthogonale d'axe (AC) qui transforme B_1 en B transforme le cercle (Γ) en une ellipse ; cette ellipse est bien circonscrite au parallélogramme ABCD.

II) Analyse : soit (E) une ellipse contenant A, B, C et D et soit Δ son axe focal.

1°) Soit $\mathcal{A}$ l'une des deux affinités orthogonales d'axe Δ qui transforment (E) en son cercle principal (C) : $\mathcal{A}$ transforme ABCD en un parallélogramme inscrit dans le cercle (C), donc en un rectangle dont le centre O est le centre de (C), donc de (E) ; le point O est donc invariant par $\mathcal{A}$ et est l'image par $\mathcal{A}$ du centre du parallélogramme ABCD.

Donc : le centre de l'ellipse (E) est le centre du parallélogramme ABCD.

2°) Soit k le rapport de l'affinité $\mathcal{A}$; A, B, C, D se projettent orthogonalement en A_1, B_1, C_1, D_1 sur Δ et leurs images A', B', C' et D' par $\mathcal{A}$ sont telles que : $OA' = OB'$,

$$\text{donc : } OA_1^2 + k^2 AA_1^2 = OB_1^2 + k^2 BB_1^2 ,$$

$$\text{donc : } k^2 (AA_1^2 - BB_1^2) = OB_1^2 - OA_1^2 .$$

Le fait que ABCD ne soit ni aplati ni rectangle fait que : $AA_1 \neq BB_1$;

$$\text{donc : } k^2 = \frac{OB_1^2 - OA_1^2}{AA_1^2 - BB_1^2} .$$

Un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i}$ dirige Δ , étant choisi, les coordonnées des points A, B, C, D sont définies comme suit :

$A(\alpha, \beta)$, $B(\gamma, \delta)$, $C(-\alpha, -\beta)$, $D(-\gamma, -\delta)$; et : $k^2 = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \delta^2}$, donc :

$\frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha} \times \frac{\delta - (-\beta)}{\gamma - (-\alpha)} < 0$, donc les droites (AB) et (AD) ont des pentes de signes contraires.

D'où la conclusion : Pour qu'une ellipse soit circonscrite à ABCD, il faut que l'axe focal de cette ellipse passe par le centre O du parallélogramme ABCD et se situe dans l'une des parties du plan non hachurées sur la figure 3.

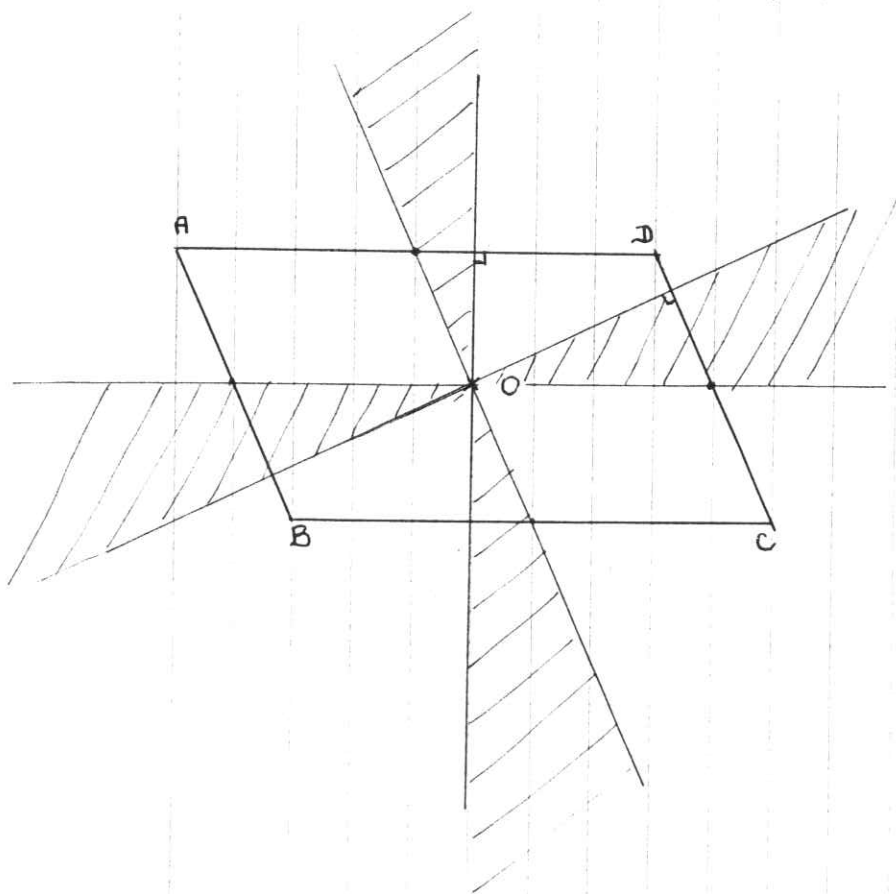
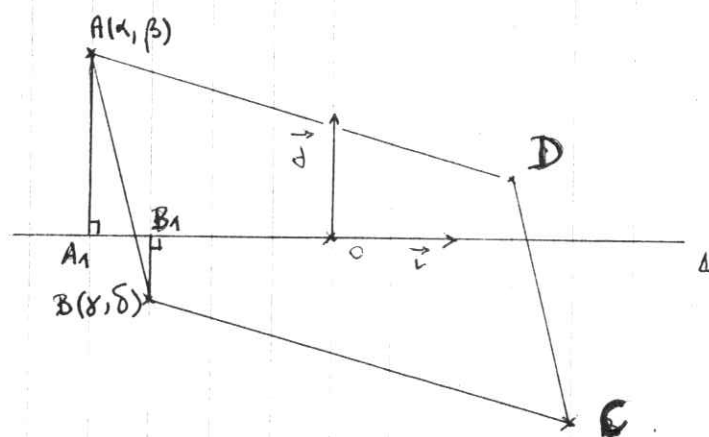
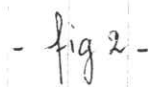
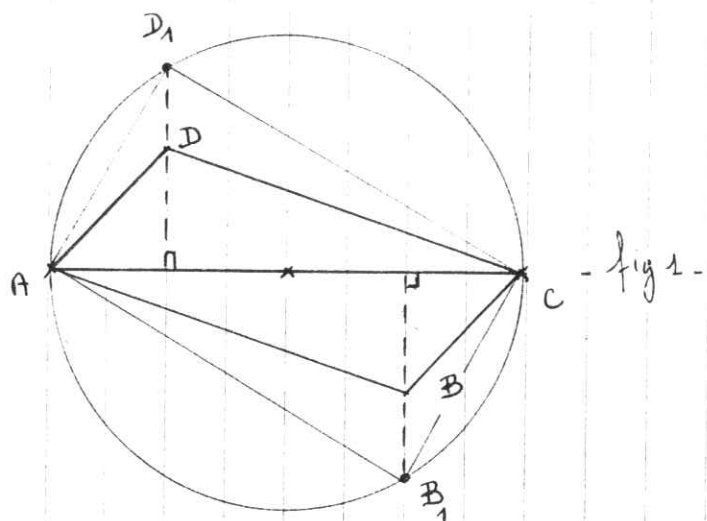
III) Réciproque : soit Δ une droite qui passe par O et est située dans l'une des parties non hachurées de la figure 3.

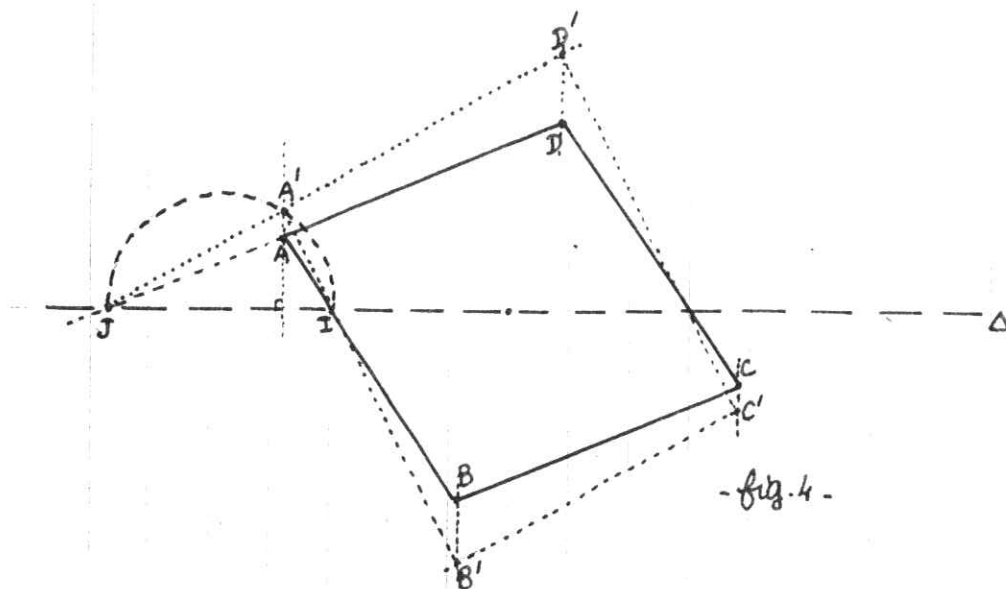
Δ coupe (AB) en I et (AD) en J. Une affinité d'axe Δ transforme (A, B, C, D) en un rectangle (A', B', C', D') si, et seulement si, le triangle IA'J est rectangle en A' (cf fig. 4).

Le cercle de diamètre [IJ] coupe la perpendiculaire en A à Δ en deux points A' et A'', symétriques par rapport à Δ . Les affinités $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ d'axe Δ qui transforment A en A' et A'' respectivement transforment (A, B, C, D) en deux rectangles (A', B', C', D') et (A'', B'', C'', D''), symétriques par rapport à Δ . Ces deux affinités ont des rapports opposés, et leurs réciproques transforment les deux cercles (A' B' C' D') et (A'' B'' C'' D'') en la même ellipse qui passe par A, B, C, D.

En conclusion : il existe une infinité d'ellipses circonscrites au parallélogramme ABCD.

Pour une droite Δ "convenablement placée", il existe une seule ellipse d'axe focal Δ circonscrite à ABCD.

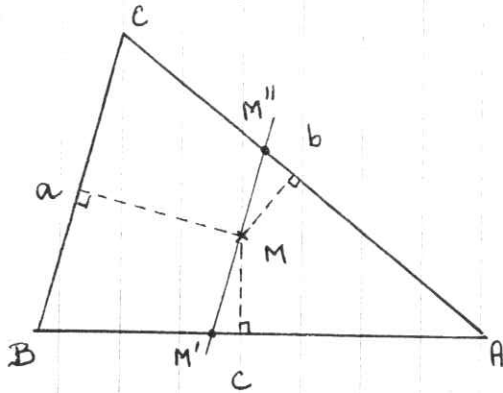




- fig. 4 -

UNE MINIMISATION

Soit ABC un triangle propre. Déterminer les points M intérieurs au triangle ABC qui réalisent le minimum de la somme des distances de M aux trois côtés du triangle.



1) Notations : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$;

$\mathcal{A}$ = aire du triangle ABC.

A tout point M du plan, intérieur au triangle ABC, associons :

$\alpha_M, \beta_M, \gamma_M$: les distances de M à (BC), (CA), (AB) ;

$\mathcal{A}_M, \mathcal{B}_M, \mathcal{C}_M$: les aires des triangles MBC, MCA, MAB.

. Supposons que : $a \leq b \leq c$. Remarquons que :

$$\mathcal{A}_M = \frac{1}{2} a \times \alpha_M, \mathcal{B}_M = \frac{1}{2} b \times \beta_M, \text{ et } \mathcal{C}_M = \frac{1}{2} c \times \gamma_M$$

$$\text{et } a\alpha_M + b\beta_M + c\gamma_M = 2\mathcal{A}.$$

La somme à minimiser est : $\alpha_M + \beta_M + \gamma_M$.

2) La parallèle à (BC) en un point M intérieur au triangle ABC coupe [AB] en M' et [AC] en M'' ; et lorsque M décrit $[M'M'']$, la distance α_M est constante.

Fixons donc, momentanément, α_M ; alors : $b\beta_M + c\gamma_M = 2\mathcal{A} - a\alpha_M$,
et $\alpha_M + \beta_M + \gamma_M = (1 - \frac{b}{c})\beta_M + (1 - \frac{a}{c})\alpha_M + \frac{2}{c}\mathcal{A}$. Donc $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ dépend de β_M par une fonction affine, de coefficient directeur $(1 - \frac{b}{c})$;
notons f cette fonction : $b \leq c$, donc : $1 - \frac{b}{c} \geq 0$, donc, suivant que $b = c$ ou $b < c$, f est constante ou strictement croissante.

. Si $b = c$, alors la somme $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ ne dépend pas de M sur $[M'M'']$

et est égale à : $(1 - \frac{a}{c}) \alpha_M + \frac{2}{c} \mathcal{A}$.

. Si $b < c$, alors la somme $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ est minimum si, et seulement si, β_M l'est, c'est-à-dire : si β_M est nul, auquel cas :

$$M = M'' \text{ et } \alpha_M + \beta_M + \gamma_M = (1 - \frac{a}{c}) \alpha_M + \frac{2}{c} \mathcal{A}.$$

3) Faisons maintenant varier α_M : la fonction $g : \alpha_M \rightarrow (1 - \frac{a}{c}) \alpha_M + \frac{2}{c} \mathcal{A}$ est affine, de coefficient directeur $(1 - \frac{a}{c})$; or : $a \leq c$, donc, suivant que : $a = c$ ou $a < c$, g est constante ou strictement croissante.

. Si $a = c$, alors $a=b=c$ et la somme $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ est indépendante de M , et égale à $\frac{2}{c} \mathcal{A}$.

. Si $a < c$, alors g atteint son minimum en 0 et ce minimum est alors $\frac{2}{c} \mathcal{A}$; donc : ... ou bien $(a < b \text{ et } b = c)$ et alors $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ est minimum si, et seulement si : $M \in [BC]$;
... ou bien $a \leq b < c$ et alors $(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)$ est minimum si, et seulement si : $(M = M'' \text{ et } M'' \in (BC))$, c'est-à-dire : si $M = C$.

En conclusion : Notons S_M la somme des distances de M aux trois côtés du triangle ABC.

. Si ABC est équilatéral, alors S_M est indépendante de M (et égale à $BC\sqrt{3}$).

. Si ABC est isocèle et non équilatéral et si la base est le plus petit côté, alors S_M est minimale si, et seulement si, M est sur la base du triangle.

. Si ABC est isocèle, la base étant le plus grand côté, ou si ABC n'est pas isocèle, alors S_M est minimale si, et seulement si, M est au sommet opposé au plus grand côté.

CONIQUE AYANT PERDU SES ELEMENTS, SOUHAITE LES RETROUVER

Cette étude part d'une remarque : un cercle étant tracé, on sait construire son centre et son rayon.

Et pour une conique ?

I) Prenons une conique à centre, ellipse $\mathcal{E}$ ou hyperbole $\mathcal{H}$ (cf fig. 1)

1°) Les milieux de 2 cordes parallèles et distinctes sont alignés avec le centre O de la conique. La donnée de deux couples de cordes parallèles et distinctes, de directions différentes, détermine donc O (cf fig. 2).

2°) Un cercle $\mathcal{T}$ de centre O qui coupe la conique la coupe en quatre points M, P, Q et R tels que $MPQR$ soit un rectangle (quadrilatère dont les diagonales sont égales et ont le même milieu) ; en effet O , centre de symétrie de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{T}$, est aussi centre de symétrie du quadrilatère $MPQR$. Les axes de $\mathcal{E}$ sont axes de symétrie de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{T}$, donc du quadrilatère $MPQR$; donc, si ce dernier n'est pas un carré, alors les axes Δ et Δ' de $\mathcal{E}$ sont les parallèles en O à (MP) et à (MQ) (cf fig. 3).

3°) Connaissant les axes de $\mathcal{E}$, on connaît : ses sommets et ses foyers.

II) Prenons une parabole $\mathcal{P}$ (cf fig. 4)

1°) Les milieux de 2 cordes $[MP]$ et $[M'P']$ parallèles et distinctes sont sur une parallèle $\mathcal{D}$ à l'axe de $\mathcal{P}$ (cf fig. 5). L'axe Δ de $\mathcal{P}$ est alors la parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par le milieu d'une corde perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (cf fig. 6). Le sommet $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$ est le point commun à Δ et à $\mathcal{P}$.

2°) La droite $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{P}$ en un point T ; et la tangente en T à $\mathcal{P}$ est la droite (t) parallèle en T à (MP) . La droite (t) rencontre la tangente en $\mathcal{S}$ à $\mathcal{P}$ (perpendiculaire en $\mathcal{S}$ à Δ) en un point U qui est le projeté orthogonal du foyer F sur (t) . Donc le foyer F de $\mathcal{P}$ est le point de concours de Δ et de la

perpendiculaire en U à (t) (cf fig. 7).

3°) Connaissant l'axe de $\mathcal{P}$, son sommet et son foyer, on connaît sa directrice.

- Ellipse -

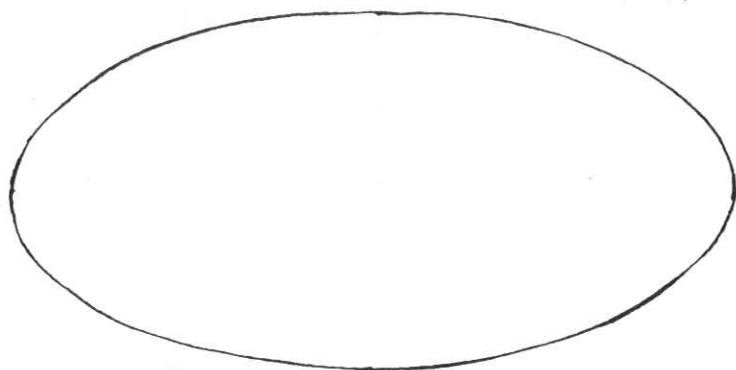


fig.1

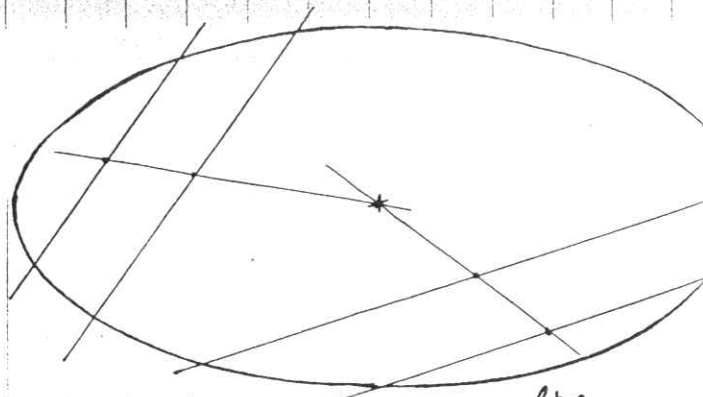


fig.2

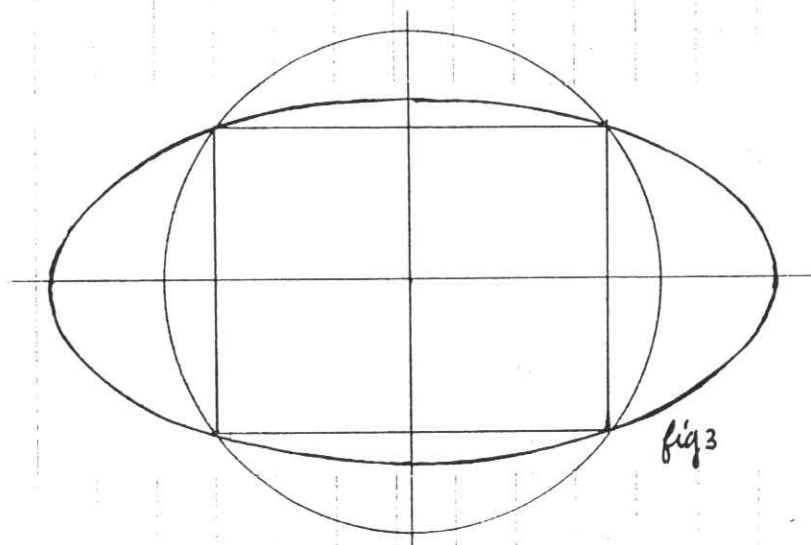


fig.3

- Parabole -

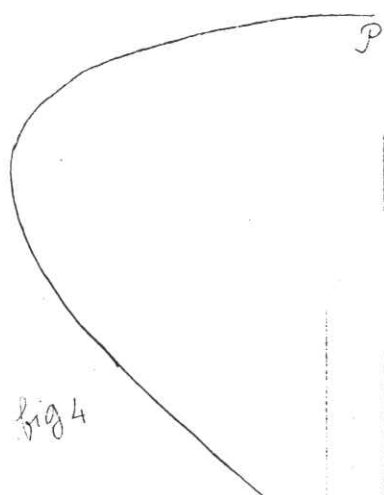


fig.4

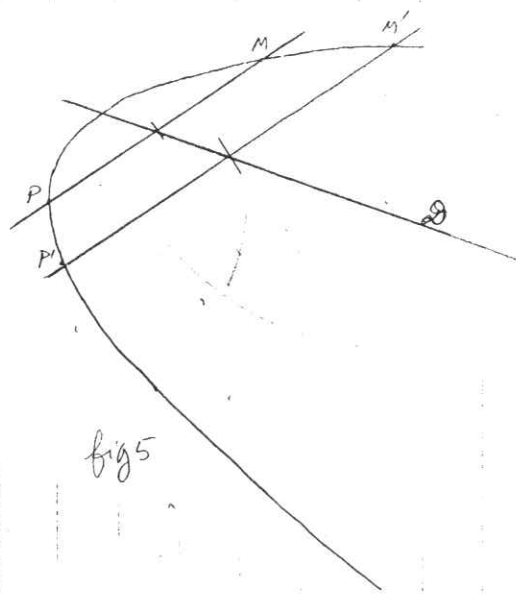


fig.5

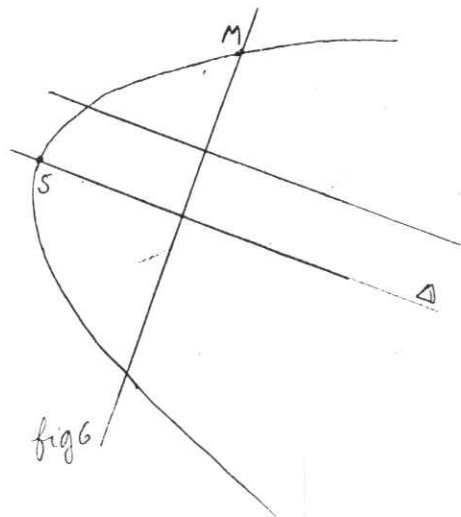


fig.6

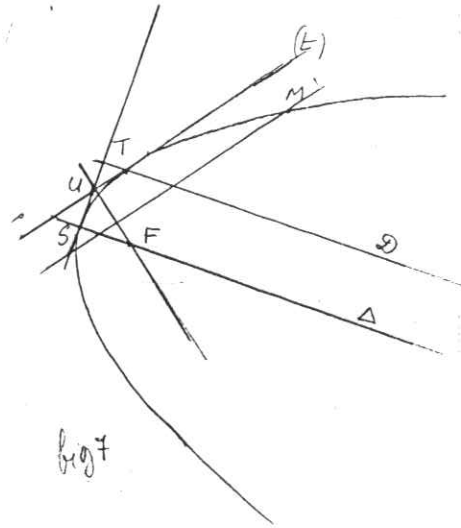


fig.7

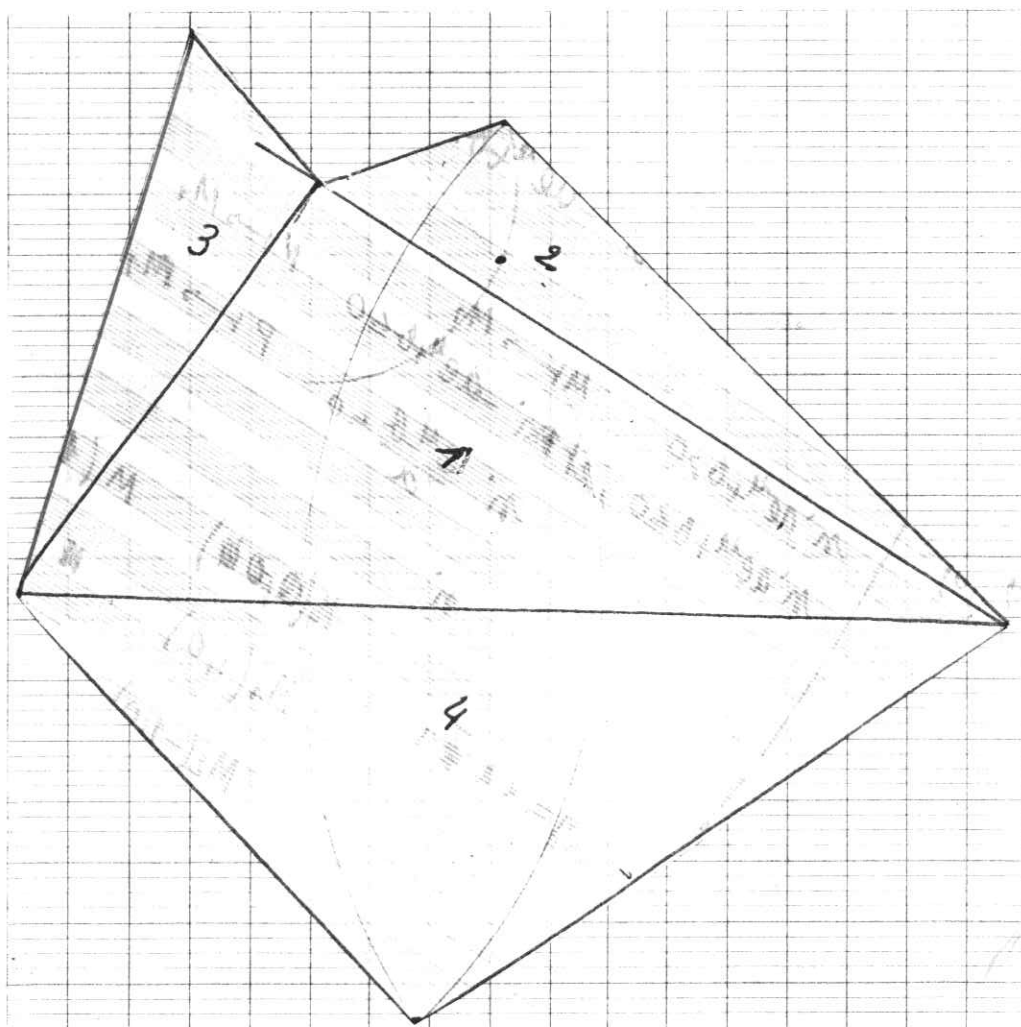
A PROPOS D'UNE PYRAMIDE, CHASSONS UNE IDEE FAUSSE.

Etant donné un triangle propre quelconque, l'un au moins de ses sommets se projette orthogonalement sur le côté opposé entre les deux autres sommets. Qu'en est-il pour un tétraèdre ?

Plus précisément : étant donné un tétraèdre propre, est-on sûr que l'un au moins de ses sommets se projette orthogonalement à l'intérieur de la face opposée ?

Madame DELEAU, Inspecteur Général, nous a proposé un contre-exemple : $OABC$, avec, définis dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $A(1, 1, -5)$, $B(-1, -1, 0)$, $C(-4, 1, 0)$.

En voici un patron :



LA FOURMI, LE VERRE ET LA CONFITURE

Problème : (voir fig. 1)

Un verre cylindrique est posé sur une table. Sur la paroi intérieure du verre, il y a une goutte de confiture, notée C . Sur la paroi extérieure du verre se trouve une fourmi ; la position initiale de cette fourmi est notée F .

Décrire le plus court chemin que doit suivre la fourmi pour aller de F en C .

Pour résoudre ce problème -connu- on réalise un développement du cylindre qu'est le verre et on introduit le point C' symétrique de C par rapport au bord supérieur du verre (voir fig. 2).

Dans le cas de la figure 2, le circuit le plus court est FJC et, dans l'espace, la trajectoire Γ de la fourmi est alors constituée de deux arcs d'hélices circulaires.

Dans une classe de Terminale C, un bon exercice consiste à introduire un repère de l'espace et à chercher, relativement à ce repère, une représentation paramétrique de la courbe Γ .

MAIS SI LE VERRE ETAIT CONIQUE (fig. 3) ?

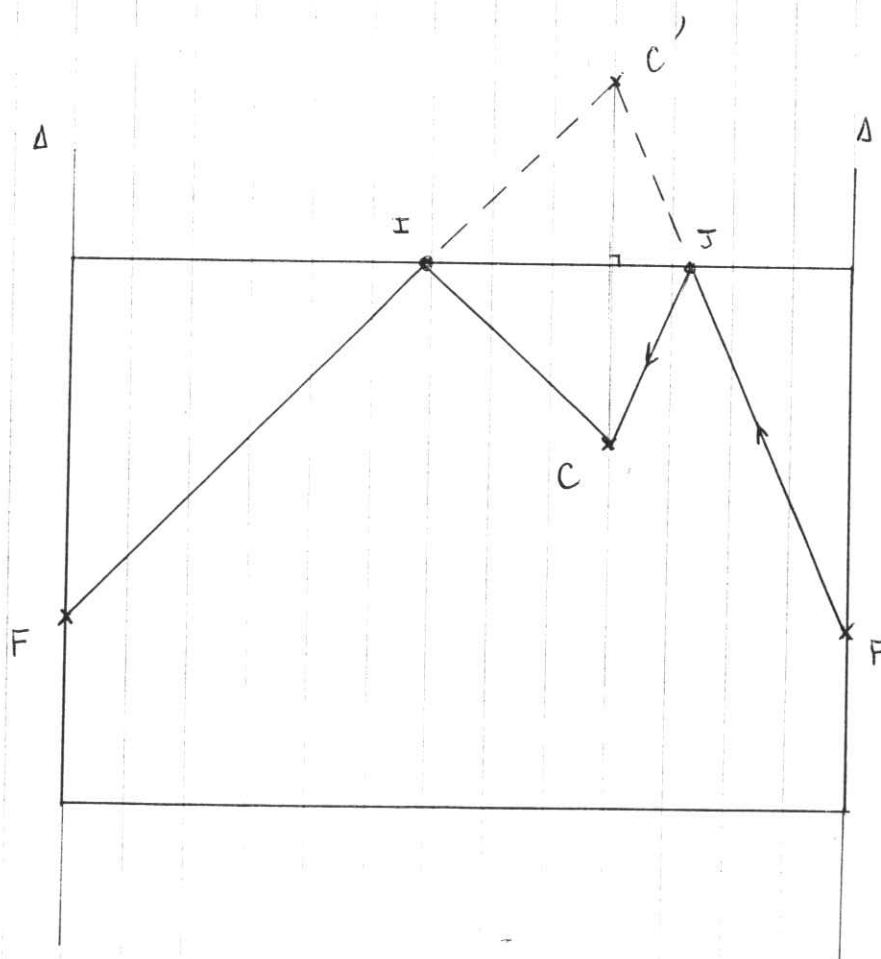
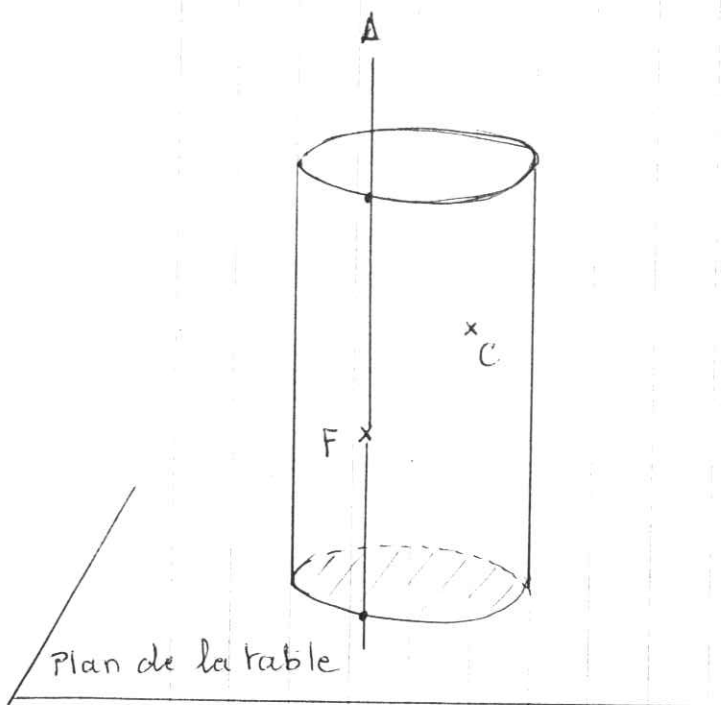
On peut toujours réaliser un développement de la partie conique du verre. (voir fig. 4).

On doit alors construire le point I tel que la droite (SI) soit la bissectrice intérieure de $\widehat{FIC}$.

Jusqu'à présent nous n'avons pas réglé ce problème.

Peut-être n'y a-t-il pas de construction possible du point I à l'aide de la règle et du compas (ce qui resterait à prouver) ?

Le problème reste ouvert...



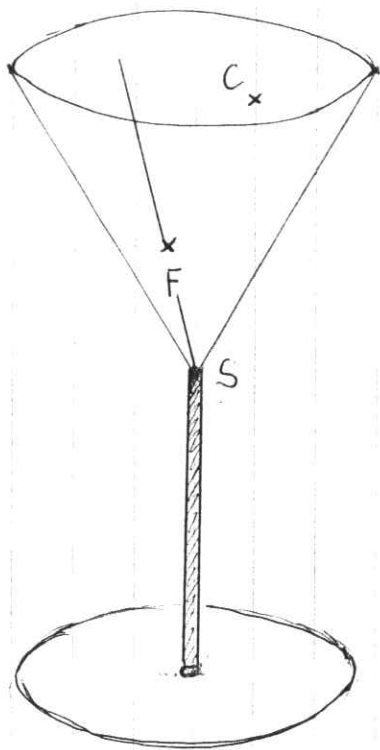
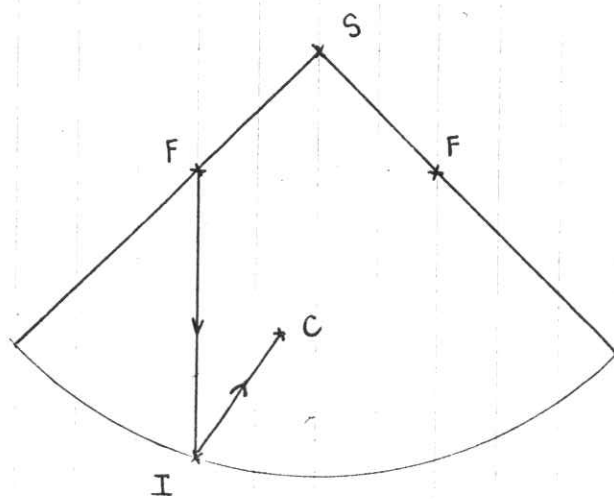


fig 3



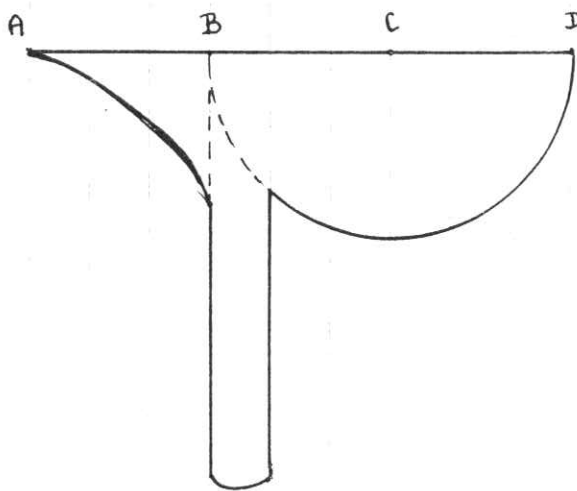
- fig 4 -

A PROPOS DE LA TRISECTION DE L'ANGLE

Problème : L'angle $\widehat{xoy}$ est donné ; il est mesuré par θ , où θ appartient à $]0, \pi[$.

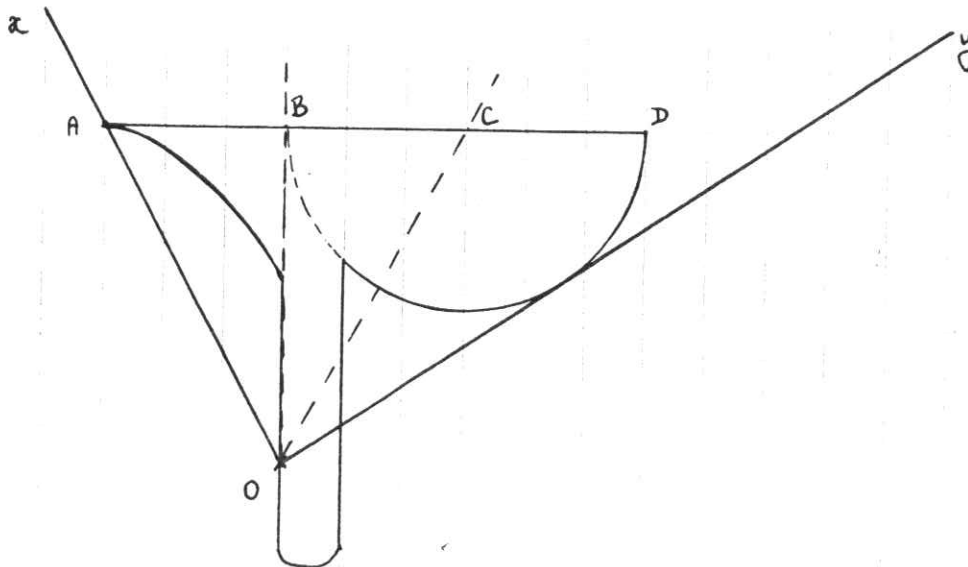
① Trisecter avec le tomahawk :

a) Comment confectionner un tomahawk ?



$$AB = BC = CD = R.$$

b) Trisecter $\widehat{xoy}$ avec le tomahawk :



* Chacun des angles $\widehat{xob}$, $\widehat{boc}$ et $\widehat{coy}$ est mesuré par $\frac{\theta}{3}$.

② Un "instrument" plus classique : la parabole (cf page 20).

. On veut construire un angle mesuré par $\frac{\theta}{3}$.

. Soit α le réel $\frac{\theta}{3}$. Remarque : $0 < \theta < \pi$, donc : $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, donc :

$$\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1.$$

Soit a le réel $\cos \theta$; alors : $a = \cos 3\alpha$ et $|a| < 1$.

Le nombre $\cos \alpha$ est l'une des solutions de l'équation (E) :

$$4x^3 - 3x - a = 0. \text{ Or : } (E) \Leftrightarrow 8x^3 - 6x - 2a = 0;$$

$$\text{donc : } (E) \Leftrightarrow (2x)^3 - 3(2x) - 2a = 0.$$

Donc $2 \cos \alpha$ est l'une des solutions de l'équation :

$x^3 - 3x - 2a = 0$; $2 \cos \alpha$ est donc une solution, strictement comprise entre 1 et 2, de l'équation (E') : $x^4 - 3x^2 - 2ax = 0$;

$$\text{et : } (E') \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + (x - a)^2 = a^2 + 4.$$

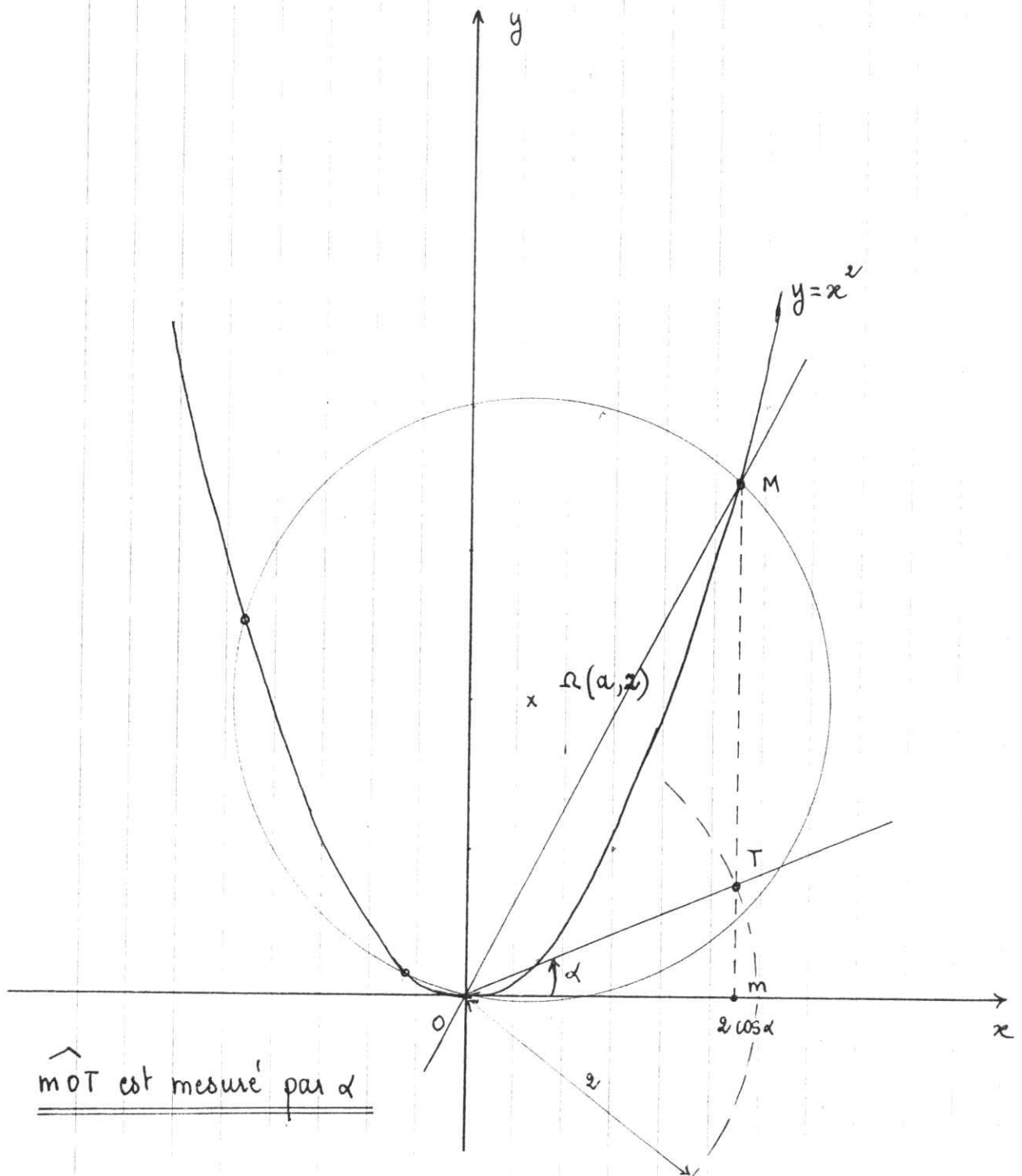
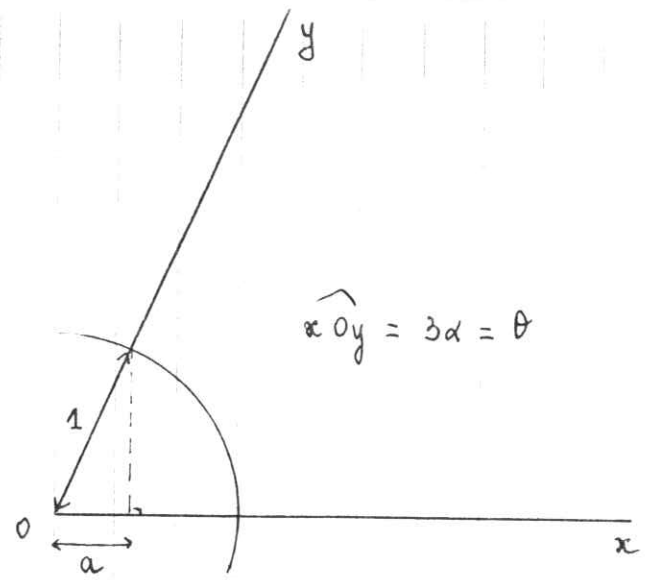
Les solutions de (E') sont donc les abscisses des points communs à la parabole P d'équation : $y = x^2$ et au cercle Γ d'équation :

$$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2 + 4.$$

. On peut donc obtenir graphiquement le réel $(2 \cos \alpha)$, puis construire un angle mesuré par α .

. Remarque : Le cercle Γ et la parabole P ont en commun 4 points (réels) ayant pour abscisses : 0, $2 \cos \alpha$, λ et μ , réels tels que :

$$-2 < \lambda < -1 < \mu < 1 < 2 \cos \alpha < 2.$$



PASSER D'UN TRIANGLE QUELCONQUE A UN TRIANGLE EQUILATERAL

Problème :

Soit ABC un triangle propre, quelconque. Soit O un point du plan ; soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (le plan étant supposé orienté).

Soit A', B', C' les images respectives de A, B, C par r ; soit U, V, W les milieux respectifs des segments $[A'B], [B'C], [CA]$.

Démontrer que le triangle UVW est équilatéral.

Remarques :

* Le problème proposé est une généralisation du cas où le point O est pris au centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

* Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement égaux.

Méthode :

Démontrer que UVW est équilatéral, c'est démontrer que V est l'image de U par la rotation de centre W et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $(-\frac{\pi}{3})$.

Or (cf fig. 1) : $U \xrightarrow{h} B \xrightarrow{r} B' \xrightarrow{h'} V$, où h est l'homothétie de centre A' et de rapport 2 et où h' est l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

La transformation $h' \circ r \circ h$ est une rotation r' de même angle que r ; démontrons que son centre est W , c'est-à-dire que $r'(W) = W$.

Le point W est le milieu de $[AC']$, donc $r'(W)$ est le milieu de $[r'(A) \ r'(C')]$.

$A \xrightarrow{h} A_1 \xrightarrow{r} A_2$ et OAA_2A' est un losange (cf fig. 2).

$C \xrightarrow{h} C_1 \xrightarrow{r} C_2$.

Remarque : C' est le milieu de $[A'C_1]$, donc C'' , image de C' par r , est le milieu de $[A''C_2]$ où $A'' = r(A')$.

Démontrer que $r'(W) = W$, c'est démontrer que $r'(W)$ est le milieu de $[AC']$; or $r'(W) = h'(roh(W))$ et $roh(W)$ est le milieu de $[A_2C_2]$, donc $r'(W)$ est le milieu de $[h'(A_2) h'(C_2)]$.

Notons L le milieu de $[A_2C_2]$; alors $r'(W) = h'(L)$.

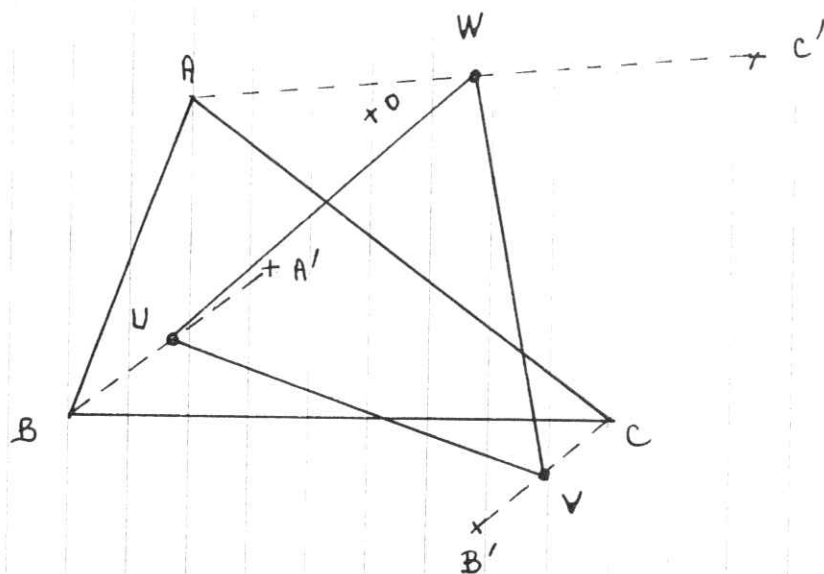
Démontrer que $r'(W) = W$, c'est donc démontrer que $W = h'(L)$, c'est encore démontrer que $\overrightarrow{CW} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CL}$, c'est-à-dire que W est le milieu de $[CL]$, autrement dit que $ACCL$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LC}$.

Or $LA'A''C''$ est un parallélogramme (cf fig. 3); de plus $OAA'A''$ et $OCC'C''$ sont des losanges; on a donc :

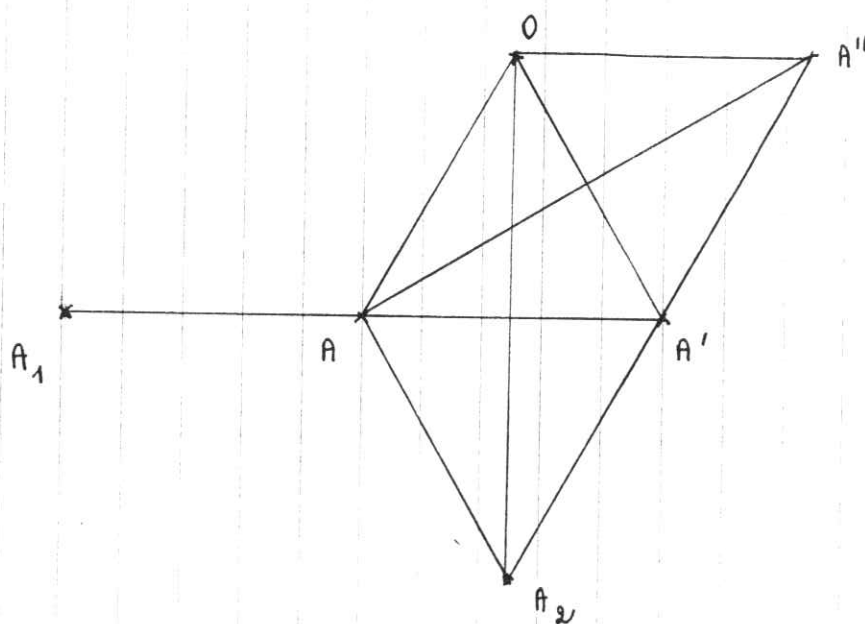
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C''C} - \overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{C''C} - \overrightarrow{C''L} = \overrightarrow{LC}$$

On en déduit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LC}$ et donc : $r'(W) = W$.

Le triangle UVW est donc équilatéral.



- fig 1 -



- fig 2 -

LE TRIANGLE QUI VEUT DEVENIR PYRAMIDE

Problème 1

Dans un plan P , on donne un triangle ABC et on note A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ (cf fig.1). En se plaçant dans l'un des demi-espaces délimités par le plan P , on fait pivoter les triangles ABC' , BCA' , $CA'B'$ autour des droites $(B'C')$, (CA') , (AB') respectivement.

Peut-on ainsi constituer un tétraèdre propre ?

. Voir fig.1 - Dans le pliage autour de $(B'C')$, A décrit un demi-cercle Γ_A situé dans le plan qui contient a et est perpendiculaire à $(B'C')$; de même : B décrit un demi-cercle Γ_B situé dans le plan qui contient b et est perpendiculaire à (CA') .

Ces deux plans se coupent suivant une droite Δ qui contient H , orthocentre du triangle ABC , et est perpendiculaire au plan P (cf fig. 2).

Γ_A a pour centre a et coupe en général Δ en un point α .

Γ_B a pour centre b et coupe en général Δ en un point β .

. En supposant l'existence de α et β , démontrons que : $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned}\text{cf fig.2 : } H\alpha^2 &= a\alpha^2 - Ha^2 \\ &= aA^2 - (CH^2 - Ca^2) \quad (\text{cf fig.1}) \\ &= (aA^2 + aC'^2) - CH^2\end{aligned}$$

$$\text{donc : } H\alpha^2 = CA'^2 - CH^2. \text{ De même : } H\beta^2 = CB'^2 - CH^2;$$

$$\text{or : } CA' = CB'. \text{ Donc : } \alpha = \beta.$$

. De même : le demi-cercle Γ_C décrit par C , dont le plan contient aussi Δ , coupe en général Δ en un point γ ; et : $\alpha = \gamma$.

Donc lorsque les demi-cercles Γ_A , Γ_B , Γ_C coupent Δ , le tétraèdre existe.

. Existence de α , β , γ : ces trois points existent si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} aH < aA \\ bH < bB \\ cH < cC \end{array} \right\} , \text{ c'est-à-dire : si, et seulement si, H est intérieur} \\ \text{au triangle ABC.}$$

Remarque :

Le tétraèdre ainsi constitué est tel que ses arêtes opposées ont la même longueur.

On vérifie qu'en "dépliant" un tétraèdre dont les arêtes opposées ont même longueur, on obtient le dessin de la figure 1.

Problème 2 (généralisation du problème)

Soit un tétraèdre (propre) ABCD : "ouvrons" ce tétraèdre en faisant pivoter les triangles DAB, DBC et DCA autour des droites (AB), (BC) et (CA) respectivement : le point D se rabat alors sur le plan (ABC) en A', B', C' comme sur la figure 3.

Remarque : $|y-z| < BC < y+z$; $|z-x| < CA < z+x$; $|x-y| < AB < x+y$.

. Prenons maintenant, dans un plan P, un triangle (propre) ABC ; et supposons qu'on ait pu construire trois triangles (propres) BCA', CAB' et ABC', extérieurs au triangle ABC, tels que : $AB' = AC'$, $BC' = BA'$ et $CA' = CB'$ (cf fig.3).

Peut-on alors constituer un tétraèdre ?

Remarque : x, y, z désignant (comme sur la figure 3) les distances AB', BC' et CA', pour que la figure 3 puisse être réalisée, il faut que :

$(|y-z| < BC < y+z \text{ et } |z-x| < CA < z+x \text{ et } |x-y| < AB < x+y)$.

Et cette condition nécessaire est suffisante à la réalisation de la figure 3.

. Dans le pliage autour de (BC), le point A' décrit un demi-cercle Γ_A , situé dans le plan contenant I et perpendiculaire au plan P (cf fig.4) ; dans le pliage autour de (CA), le point B' décrit un demi-cercle Γ_B , situé dans le plan contenant J et perpendiculaire au plan P.

. Ces deux plans se coupent suivant une droite Δ qui coupe P en Ω , point commun à (A'I) et (B'J), et qui est perpendiculaire à P;

$\Gamma_{A'}$ a pour centre I et coupe en général Δ en un point α ;

$\Gamma_{B'}$ a pour centre J et coupe en général Δ en un point β .

. Démontrons qu'alors : $\alpha = \beta$:

$$\begin{aligned}\Omega\alpha^2 &= I\alpha^2 - I\Omega^2 \\ &= IA'^2 - (C\Omega^2 - CI^2) \\ &= CA'^2 - C\Omega^2.\end{aligned}$$

De même : $\Omega\beta^2 = CB'^2 - C\Omega^2$. Or : $CA' = CB'$; donc : $\alpha = \beta$.

. Démontrons maintenant que le plan du demi-cercle Γ_C décrit par C' contient Δ . Il suffit pour cela de prouver que les trois droites (IA'), (JB'), (KC') du plan P sont concourantes :

Ω et A' sont sur une même ligne de niveau de l'application : $M \mapsto MC^2 - MB^2$

Ω et B' sont sur une même ligne de niveau de l'application : $M \mapsto MC^2 - MA^2$

Il en résulte que :

$$\left. \begin{aligned}\Omega C^2 - \Omega B^2 &= z^2 - y^2 \\ \Omega C^2 - \Omega A^2 &= z^2 - x^2\end{aligned}\right\}, \text{ donc : } \Omega A^2 - \Omega B^2 = x^2 - y^2 = CA'^2 - CB'^2;$$

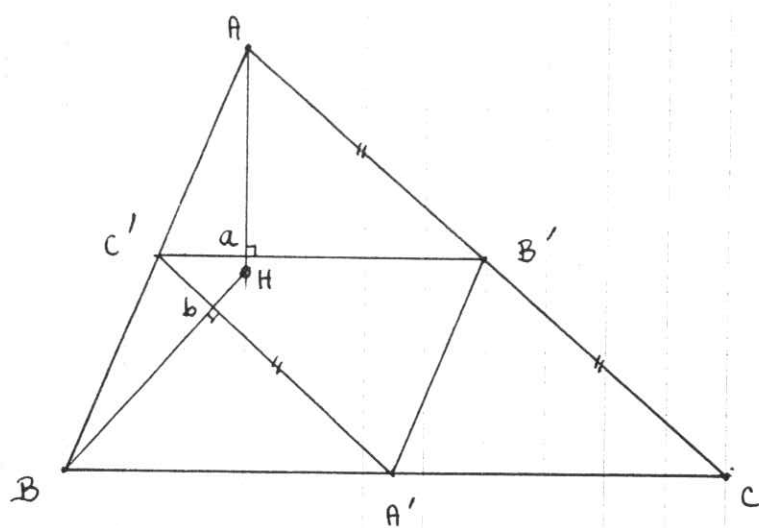
donc Ω et C' sont sur une même ligne de niveau de l'application :

$M \rightarrow MA^2 - MB^2$; et donc la droite (CK) contient Ω .

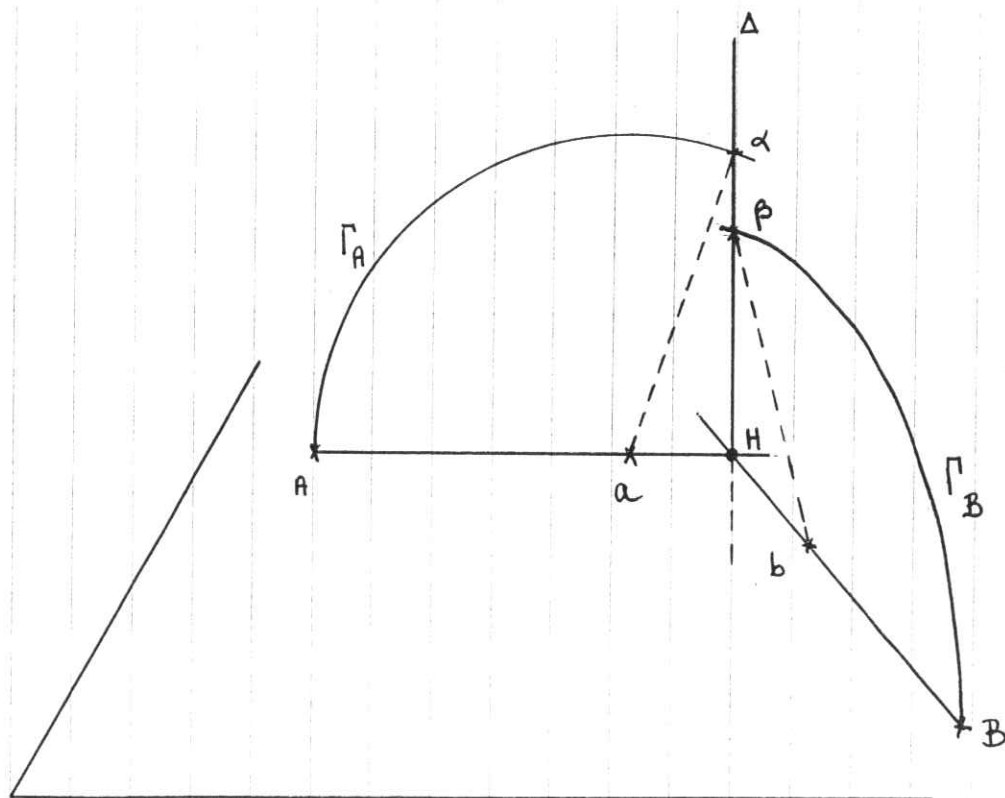
. En général, Γ_C coupe Δ en un point γ et on prouve alors que : $\alpha = \gamma$.

Conclusion :

Lorsque les points α , β et γ existent, on constitue bien ainsi un tétraèdre.



- fig 1 -



- fig 2 -

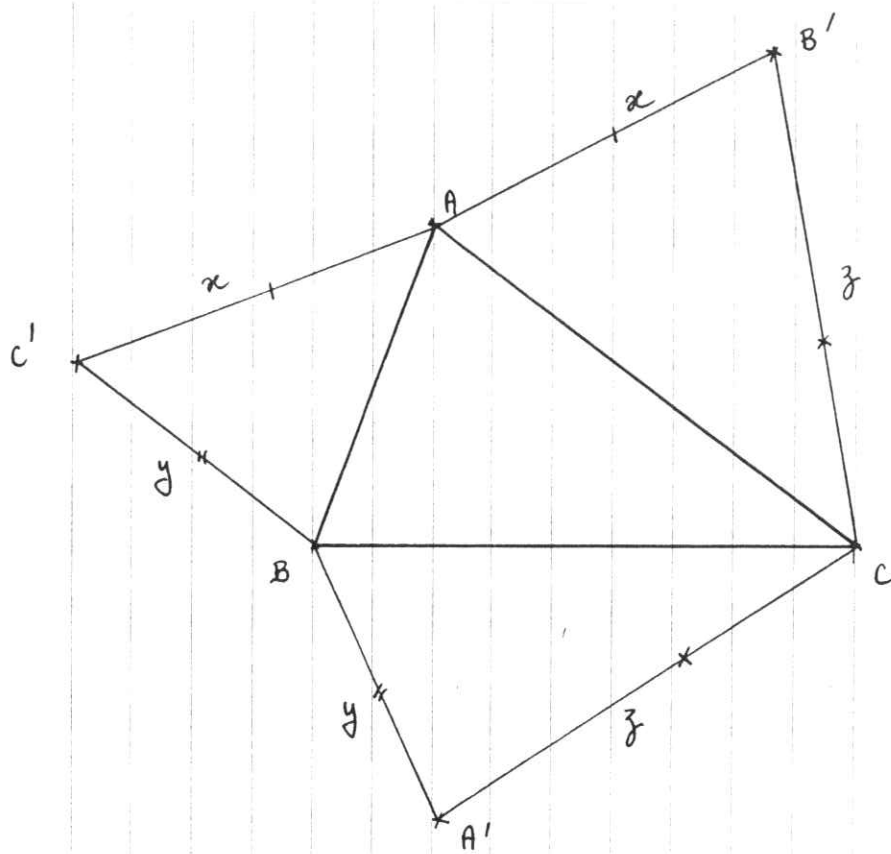


fig 3.

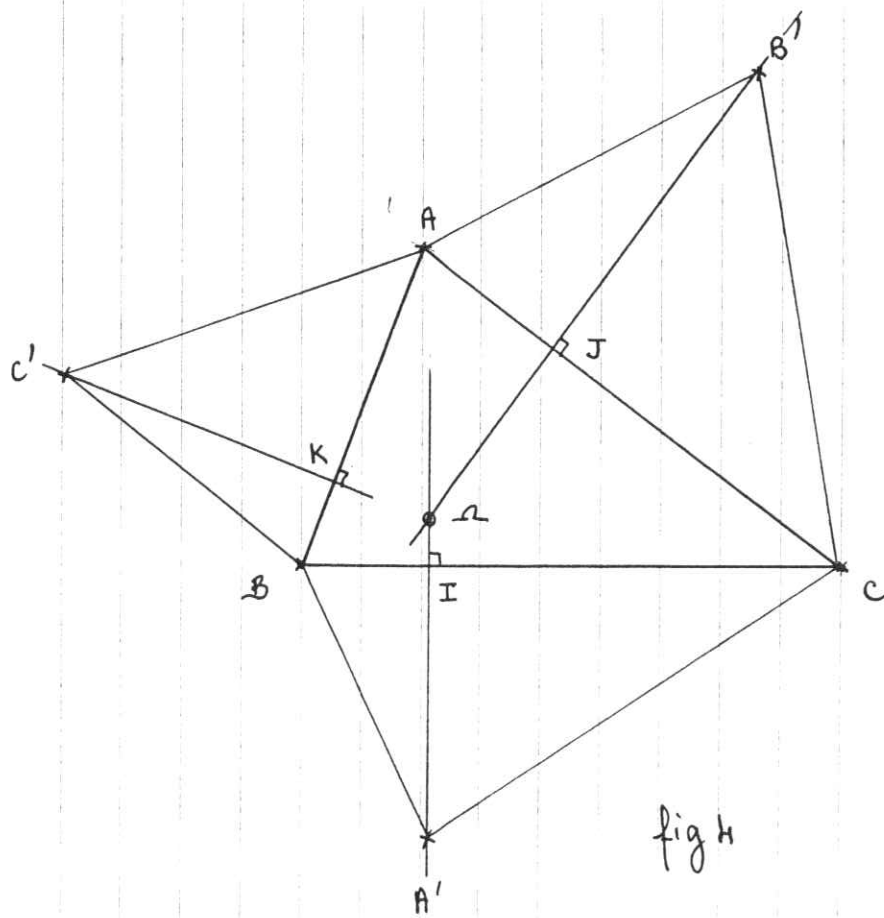


fig 4

Fin Mars 90

Auteurs : B. MARQUIS et J. VENARD

Mots clé : Géométrie du plan et de l'espace
Exercices, des problèmes.

Public : - professeurs de mathématiques des classes de Seconde, Première S et Terminale C.
- Candidats au CAPES.
- Stagiaires CPR.

Titre : De la géométrie dans tous les azimuts

Année : Juin 1990