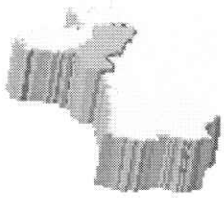
IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



Broderie autour du nombre d'or

Du collège à la faculté

Annick FLANCHEC

1989

PREAMBULE

Cette brochure reprend pour l'essentiel l'exposé (improvisé) fait au séminaire de l'IREM. La partie "nombre d'or et art" n'a pas été reprise, étant donné son caractère audiovisuel.

Il ne s'agit évidemment pas d'un exposé célébrant de façon mystique le nombre divin, ni d'un exposé synthèse de toutes les propriétés du nombre d'or.

Les lecteurs seront sans doute surpris de ne pas retrouver les constructions classiques du pentagone. La raison en est simple : Bernard TRUFFAULT, dans sa brochure sur les polyèdres en parlera mieux que moi.

Le fil conducteur de l'exposé a été le suivant : donner matière à problèmes et activités à partir du nombre d'or et ceci du collège à l'Université.

J'espère que les collègues y trouveront des idées. Il serait intéressant qu'ils communiquent à l'IREM les activités qu'ils ont pu réaliser.

LE NOMBRE D'OR COMME "DIVINE PROPORTION"

Luca PACCIOLI dans "De divina Proportione" (illustré par Léonard de Vinci) le définit comme suit :

"C'est une proportion irrationnelle entre 3 termes telle que que si le plus est 10, le moyen sera √125 - 5 et le plus petit 15 - √125" et plus loin, *"les 2 parties sont entre elles comme la plus grande des deux est au tout"*.

Il s'agit donc de trouver le rapport $\frac{a}{b}$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$.

Posons $\varphi = \frac{a}{b}$. φ vérifie donc $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

et φ est solution de $x^2 = x + 1$ (équation 1)

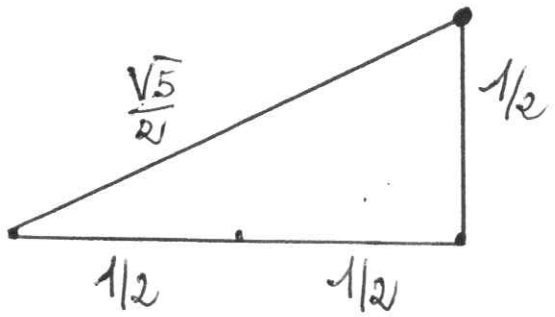
Les 2 racines de (1) sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

φ étant positif, φ égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Comment construire à la règle et au compas $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

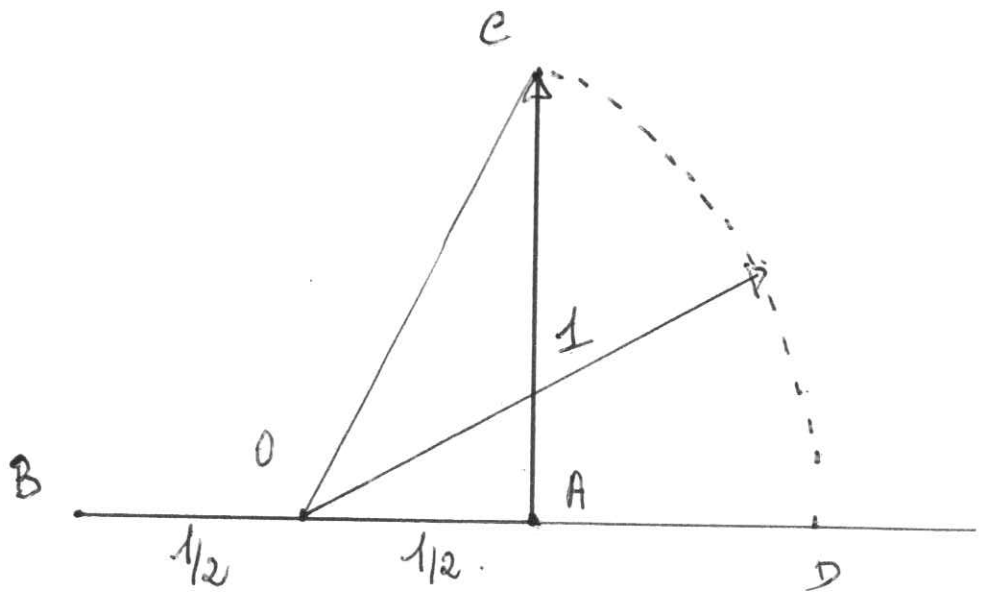
Remarquons qu'il suffit de construire $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ et $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$.

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ est donc la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle.



2 constructions simples s'ensuivent (l'unité 1 étant choisie)

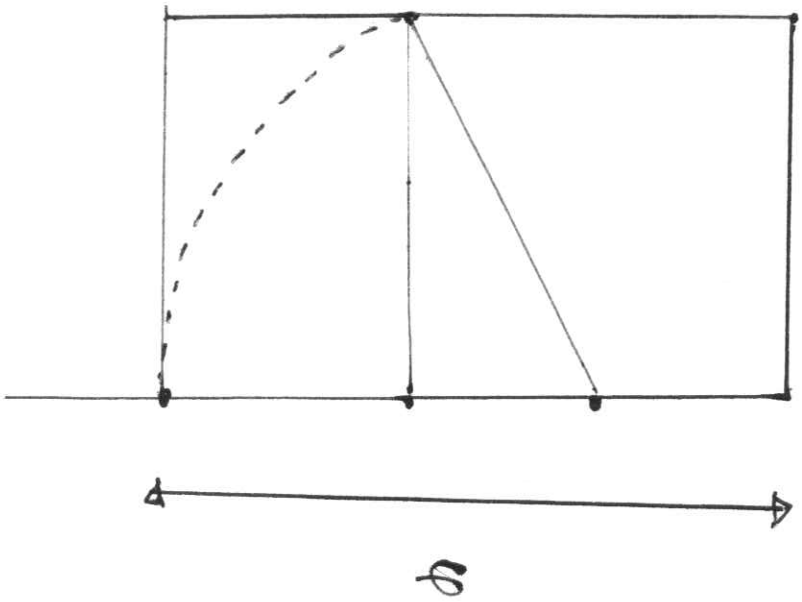
CONSTRUCTION I



BD a pour longueur φ !

CONSTRUCTION II (qui est la construction I vue différemment).

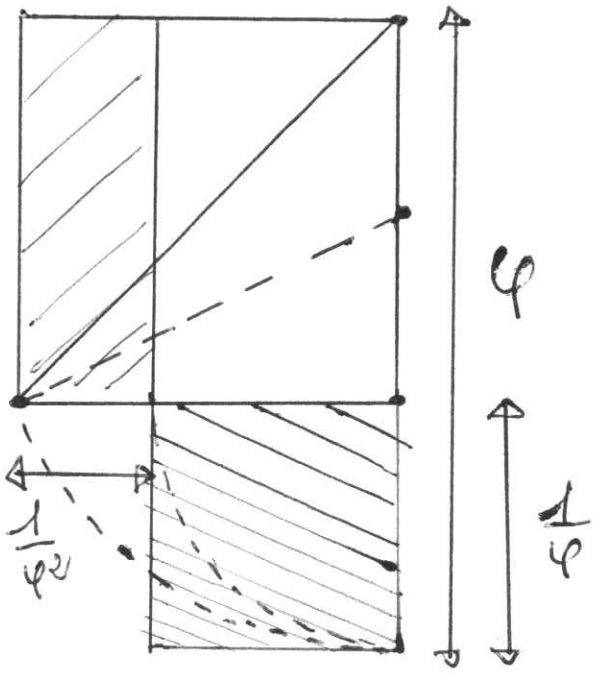
L'on part d'un carré de côté 1.



Cette construction a été très usitée au 13è-14è siècle dans des rétables. Les tracés de la figure ci-dessus étaient explicitement utilisés : par exemple, dans une nativité, l'arc de cercle est le support géométrique de la forme de Marie allongée...

Mais revenons à l'équation (1). La racine $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est $-\frac{1}{\varphi}$ et l'on a donc $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ et $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi}$.

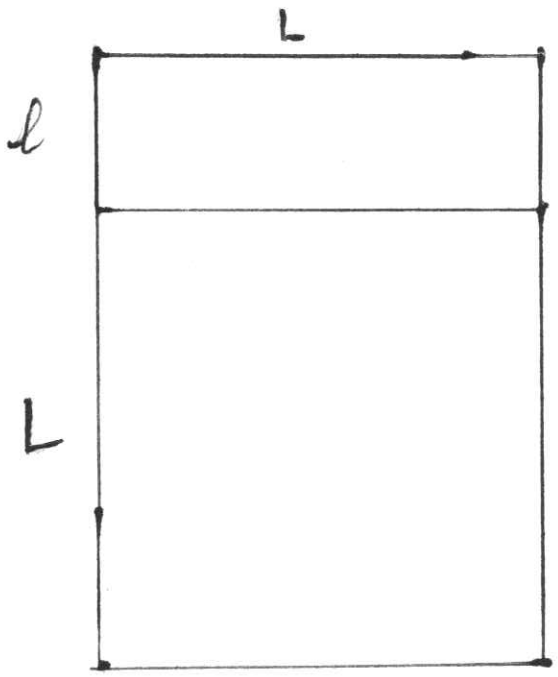
Nous retrouvons ces quantités sur le rectangle précédent.



Le rectangle hachuré et le carré hachuré ont donc des aires égales. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'Euclide donne la propriété de la proportion divine.

LES RECTANGLES ET LE NOMBRE D'OR

1ère approche : Je prends un rectangle quelconque que je complète par un carré



- J'obtiens un nouveau rectangle de longueur $L' = L + l$, largeur $l' = L$

Les esthètes considèrent qu'est important pour un rectangle, le "rapport des formes" ρ : ρ égal à $\frac{L}{\ell}$

Nous avons $\rho' = \frac{L'}{\ell'} = \frac{L+\ell}{L} = 1 + \frac{1}{\rho}$.

- Continuons la même opération à partir du 2è rectangle. Nous avons une suite de rectangles dont le rapport des formes ρ_n est régi, d'après ce qui précède, par la loi : $\rho_{n+1} = 1 + \frac{1}{\rho_n}$ (1) et $\rho_0 = \frac{L}{\ell}$ (2).

Nous avons ainsi naturellement pour les élèves de Lycée, une suite définie par récurrence. Des calculs simples à la calculette (cf "Apprivoiser l'infini" du GEM) montrent que les nombres ρ_n se "stabilisent" rapidement. La notion de limite de suite peut être ainsi pratiquement introduire. Les élèves peuvent même constater que le "point de stabilisation" (ou limite) est le même quelque soit le rectangle de départ.

En Terminale et Deug A_1, l'on vérifie (en prenant les suites de rang pair et impair) que la suite ρ_n converge. Soit ρ sa limite. Alors

$\rho = 1 + \frac{1}{\rho}$ et ... $\rho = \varphi$

Moralité : la suite (ρ_n) converge vers φ pour tous les rectangles de départ

Mais l'on peut remarquer aussi que la suite est constante si $\rho_0 = \varphi$ [joli exercice sur la récurrence]

2ème approche : Au lieu d'ajouter, je vais enlever !

Au rectangle initial, j'enlève le carré hachuré

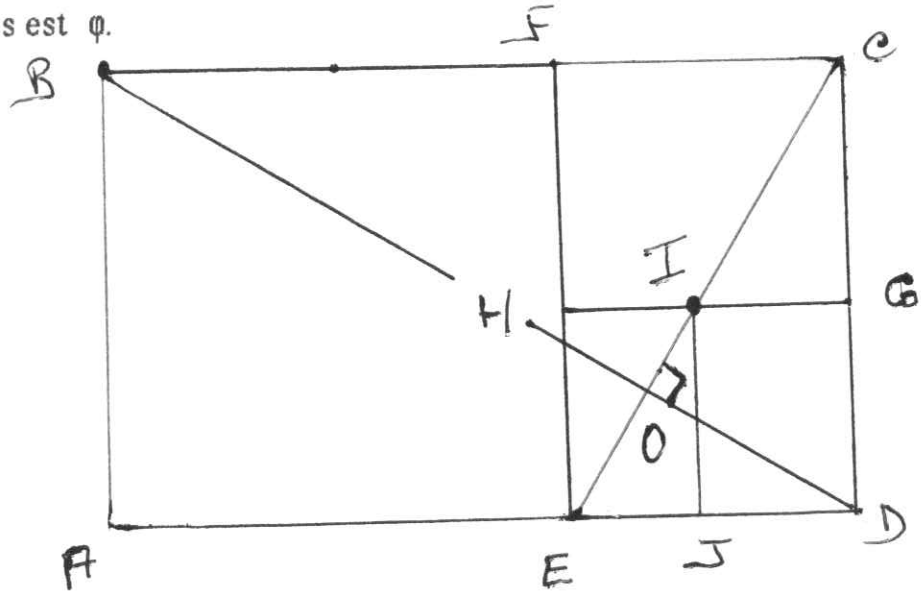
Je me pose la question : quel doit être le rapport de formes initial pour le rapport de formes du rectangle restant lui soit égal.

Je cherche donc $\rho = \frac{L}{\ell}$ tel que $\rho = \rho'$

1er cas : $\rho' = \frac{L-\ell}{\ell} = \frac{L}{\ell} - 1$ et $\rho = \rho - 1$ impossible

2ème cas : $\rho' = \frac{\ell}{L-\ell} = \frac{1}{\ell - 1} = \rho$ ou $\rho(\rho - 1) = 1$ et... $\rho = \varphi$!

J'appellerai rectangle d'or tout rectangle dont le rapport des formes est φ.



Soit ABCD un rectangle d'or. D'après ce qui précède, le rectangle FCDE est aussi un rectangle d'or.

. Et je continue à enlever...

J'ai donc une suite de rectangles d'or emboîtés les uns dans les autres. L'intuition nous dit qu'il ne restera à la fin qu'un point. Oui, mais lequel ?

. Quittons momentanément ce problème pour nous en poser un autre. Les rectangles ABCD et FCDE sont semblables. En terminale C, l'on dira qu'il existe une similitude de centre O, de rapport $-\frac{\pi}{2}$, et de rapport $\phi - 1$ ou $\frac{1}{\varphi}$ faisant se correspondre

A B C D

F C D E

Mais où est O ?

. Quittons momentanément ce problème et remarquons :

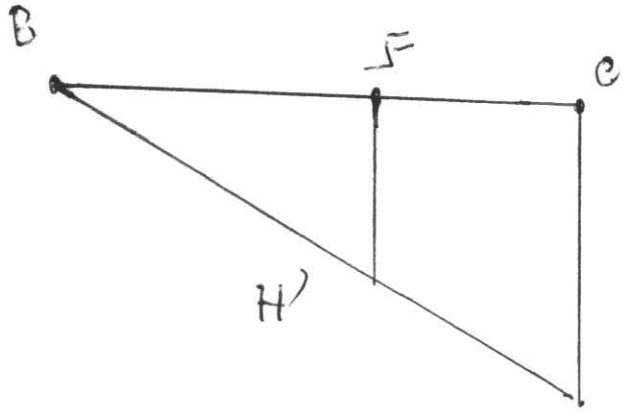
Comme BD $\rightarrow$CE, l'angle de BD et de CE est celui de la similitude et nous venons de montrer que BD est perpendiculaire à CE ! Appelons w leur point d'intersection. Si par chance, $\frac{wC}{wB}$ était égal à $\frac{1}{\varphi}$, w serait O ! Calculons donc $\frac{wC}{wB}$.

Mais les triangles B C D
B W C sont semblables

et $\frac{wB}{BC} = \frac{wC}{CD}$ et $\frac{wC}{wB} = \frac{CD}{BC} = \ldots \frac{1}{\varphi}$!

O est donc le point de concours des 2 diagonales.

. O' le centre de similitude de la 2ème étape sera donc le point de rencontre de CE et HD. Sur la figure, H semble être sur BD. Vérifions-le ! Soit H' le point d'intersection de BD et de FE.



En appliquant le théorème de Thalès, l'on a :

$$\frac{FH'}{CD} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{\varphi}$$

Or $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \quad (\varphi(\varphi - 1) = 1\ !)$

et $FH' = \varphi CD - BF = BC - BF = FC$

H' est bien le sommet du 2ème carré "enlevé" ou H' = H

O' est donc à l'intersection de CE et BD et . . . est en O.

Moralité : O est le centre de similitude pour les 2 rectangles dc la 2ème étape et ... pour les 2 rectangles de la n^{è}me étape.
Moralité : O est dans tous les rectangles d'or successifs.

Par une considération de diamètre tendant vers zéro, O est le seul point d'intersection de tous les rectangles d'or emboîtés.

LA SPIRALE ISSUE D'UN RECTANGLE D'OR

Je reprends les notations du paragraphe précédent.

Etant toujours esthète, je cherche à rejoindre les points A, F, G, J, etc par une courbe agréable.

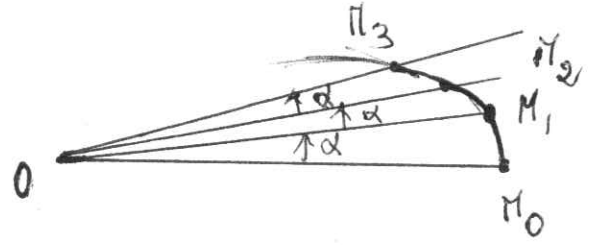
J'ai donc le problème suivant :

J'ai une suite de points (M_n) vérifiant :

$M_0 = A$

$M_{n+1} = S(M_n)$ où S est la similitude de centre O, d'angle $-\frac{\Pi}{2}$; de rapport $\frac{1}{\varphi}$.

Etudions le cas général où S est de centre O, de rapport k, d'angle α . Cela va nous donner matière à un joli exercice en deug A_1 sur les coordonnées polaires. Le dessin suggère que l'on a tracé une spirale logarithmique.



Cherchons donc si une spirale d'équation $\rho = Ke^{\ell\sigma}$ peut contenir tous ces points !

L'on doit avoir $Ke^{\ell(\sigma+\alpha)} = k\,Ke^{\ell\sigma}$

ou $e^{\ell\alpha} = k$ ou $l = \frac{\text{Log } k}{\alpha}$

Mais $\rho_0 = ke^{\ell\sigma_0}$ et $K = \rho_0 e^{-\frac{\text{Log } k}{\alpha}\sigma_0}$

S'il y a une spirale, elle a pour équation $\rho = \rho_0 e^{+\frac{\text{Log } k}{\alpha}(\sigma-\sigma_0)}$

C'est un jeu d'enfants (sachant utiliser le raisonnement par récurrence) que de vérifier que tous les points M_n sont sur cette spirale.

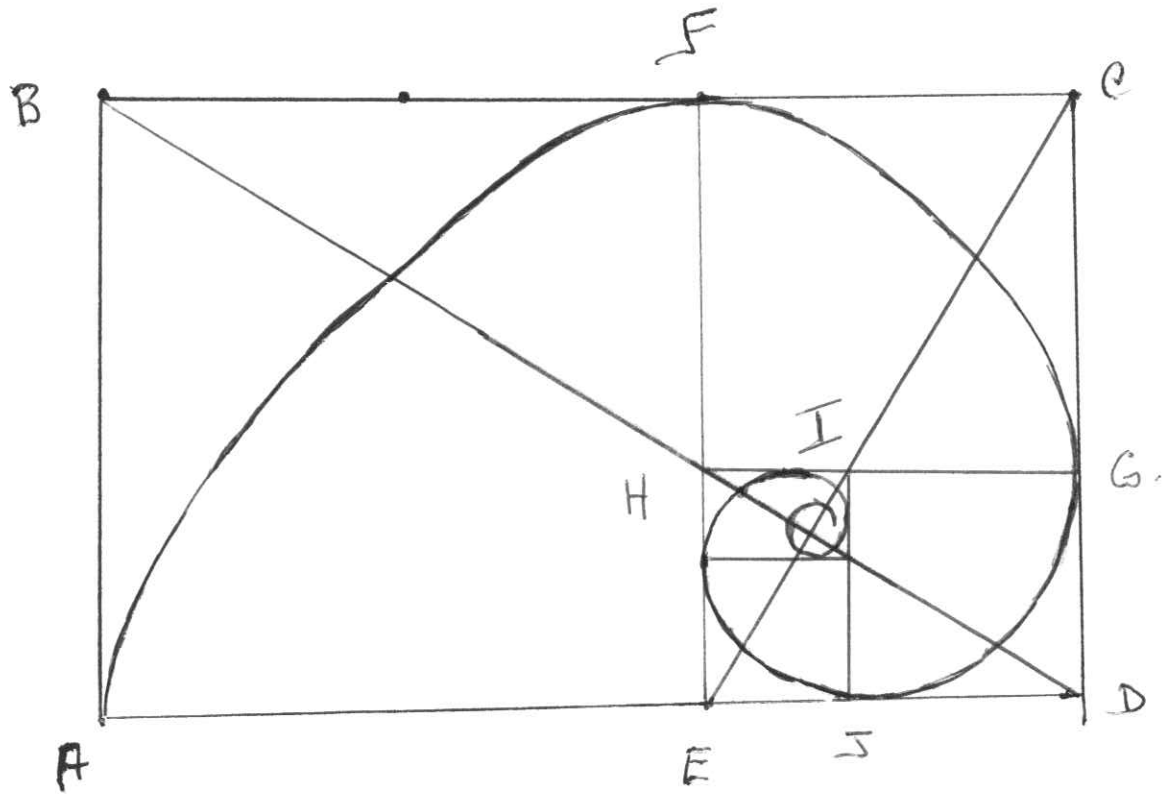
Revenons à notre situation particulière et . . . A, F, G, I . . . sont sur une spirale de point asymptote O. Je trace cette spirale et comme tout un chacun, j'ai très envie de la tracer tangente en F à BC, en G à CD etc . . . Mais en ai-je le droit ? Ceci peut devenir matière à un exercice de deug A_1 (ou de lycée technique !).

Rappelons que si V est l'angle entre le rayon vecteur et la tangente, cotg V est égale à $\frac{\rho'}{\rho}$.

Dans notre cas, $\text{cotg } V = 1 = \frac{\text{Log } k}{\alpha} = \frac{-(\text{Log } 1/\varphi) \times 2}{\pi}$

ou $\text{cotg } V = \frac{2 \text{Log } \varphi}{\pi}$ ou $\pi \text{ cotg } V = 2 \text{ Log } \varphi$.

Tous calculs faits, V = 72°58' ; Calculons maintenant V' = (OF, BC). Les courageux trouveront que V' = 74°39' . Hélas donc, la spirale issue du rectangle d'or n'est pas tangente aux côtés du rectangle. Seuls les esthétisants seront déçus ! Le professeur de maths a, lui, trouvé un bel exercice !

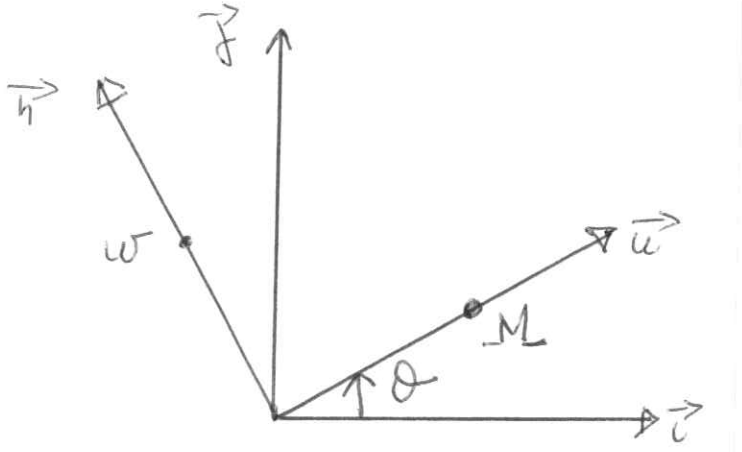


Cependant, certains esthètes soutiennent que cette spirale est "divine" ! "Divine" au sens suivant : prenons un point sur la spirale et quittons la tangentiellement ; le regard arrive normalement à la volute suivante :

Traduit en langage mathématique, cela voudrait dire (entre autres) que la spirale l'enveloppe de ses normales ou est ... sa propre développée.

Cela nous amène à poser un autre problème mathématique (au niveau du deug A_1-deug A_2) : quelle est la développée d'une spirale ; une spirale peut-elle être sa propre développée ?

Un calcul rapide montre que si M a pour coordonnées polaires (ρ, θ) ou $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$ et si, ρ est égal à $k\,e^{\ell\theta}$, w le centre de courbure en M vérifie : $\overrightarrow{OW} = Kle^{\ell\theta}\,\vec{n}$



w a donc pour coordonnées polaires $(Kle^{\ell\theta}, \theta + \frac{\pi}{2})$ et décrit donc une spirale d'équation $\rho = Kle^{-\ell\frac{\pi}{2}}\,e^{\ell\theta}$. w sera sur la spirale initiale si

$1\, e^{-\ell \frac{\ell \pi}{2}} = 1$ ou $1 = e^{\frac{\ell \pi}{2}}$.

Nommons α le nombre "divin" solution de l'équation $1 = e^{\frac{\ell \pi}{2}}$.

Si la spirale issue du nombre d'or était "divine" nous devrions donc avoir

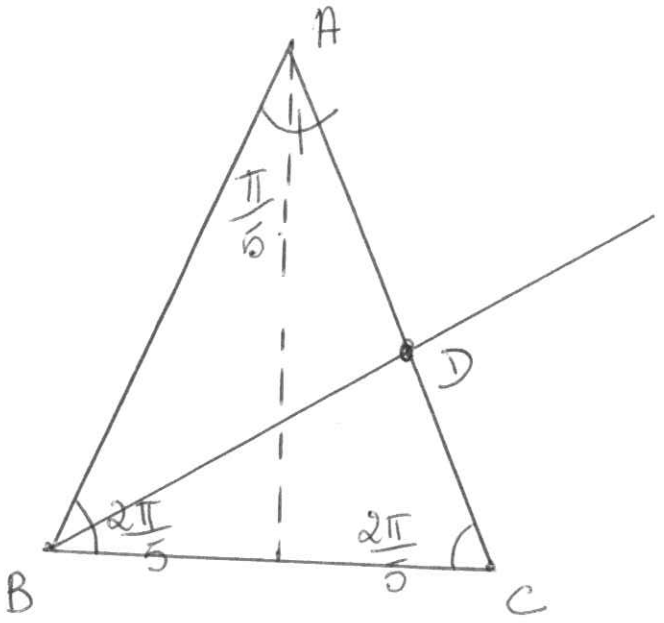
$$\frac{2 \operatorname{Log} \varphi}{\pi} = \varphi \quad \text{ou} \quad \operatorname{Log} \varphi = \frac{\pi}{2} \varphi$$

Tous calculs faits, ceci est faux ! Il est vrai qu'il s'en faut de quelques minutes en termes d'angle entre la direction tangentielle à une volute et la direction normale de l'autre volute ! Cette différence étant invisible à l'oeil nu, l'on peut comprendre les ... esthètes. Nous pouvons aussi faire une remarque à propos des spirales (logarithmiques). D'après ce qui précède, une spirale est globalement invariante par un certain nombre de similitudes. Cette propriété a fait considérer à Jacques Bernouilli que les spirales logarithmiques étaient "merveilleuses". A tel point qu'il a demandé à en faire graver une sur sa tombe !

LES TRIANGLES "SUBLIMES"

Le premier triangle "sublime" est longuement cité par Euclide (Ecrits IV).

Il est isocèle et un angle de sa base est le double de son angle au sommet.



Comme pour le rectangle, nous allons "enlever" un triangle. BD sera la bissectrice intérieure en B.

Nous nous apercevons immédiatement que BDC est lui aussi sublime ! Nous pourrions envisager la même problématique que pour le rectangle : itération, recherche du centre de similitude, etc... et ne le ferons pas ! Nous allons nous poser un autre problème : où est le nombre d'or ?

Nous remarquons tout d'abord que AD = BD = BC et que les triangles suivants sont semblables

A	B	C
B	D	C

Mais alors $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$

ou $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AC - AD} = \frac{1}{AC/AD - 1}$

Posons $\frac{AC}{AD} = \rho$. Nous avons donc $\rho(\rho - 1) = 1$ ou $\rho = \varphi$.

La proportion $\frac{AC}{AD}$ est égale au nombre d'or... ainsi que la proportion $\frac{AD}{DC}$

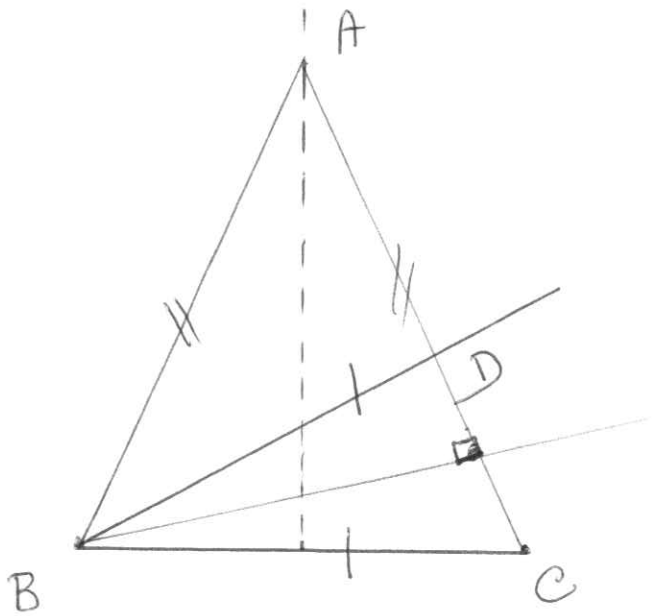
D divise AC dans la proportion divine.

Nous avons donc une nouvelle relation

$$2 \cos \frac{2\Pi}{5} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Posons-nous maintenant le problème réciproque : comment construire ce triangle sublime, A et C étant donnés. Le problème est d'importance, puisque, s'il est résolu, il nous permettra de construire $\frac{2\Pi}{5}$ et $\frac{\Pi}{5}$ (angles essentiels pour le pentagone et le décagone).

Construisons D sur AC tel que $\frac{AD}{DC} = \varphi$ (nous le pouvons grâce à la 1ère partie).



Construisons B sur la médiatrice de DC et sur le cercle de centre A et rayon AC.

Montrons que ABC est sublime.

Les triangles ABC et BDC isocèles et ayant un angle commun sont semblables et $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$ $\quad AC \cdot DC = BC^2$.

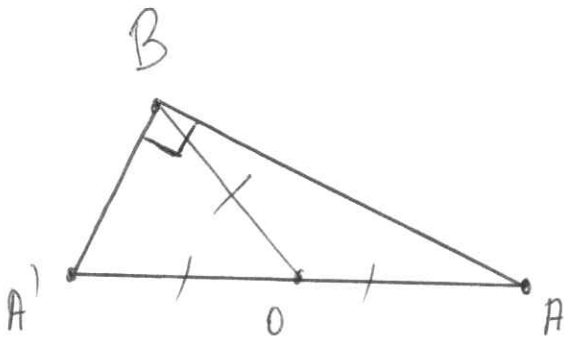
Mais $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{DC} = \varphi$ et $AC \cdot DC = AD^2$ ou $AD = BC = BD$.

Le triangle ADB est donc isocèle et $ADB + 2\,BAC = \pi$ et $2\,BAC = BDC = ACB$ et. . . le triangle est sublime.

Le 2ème triangle sublime semble peu cité dans la littérature.

Considérons avec les notations précédentes, le triangle isocèle DAB. Son angle au sommet est le triple du triangle de base ! AB sa base, d'après ce qui précède est φ fois AD.

Traçons le cercle de centre D, passant par A et supposons le rayon égal à 1. AB est de longueur φ .



Nous savons donc construire simplement ce triangle sublime (inscrit dans le cercle) connaissant un de ces sommets. Mais il y a mieux : soit A' le point diamétralement opposé à A. $A'BD = \frac{2\pi}{5}$. A'B est alors la longueur du côté du pentagone inscrit dans un cercle de rayon 1, traditionnellement appelé C_5 . Mais alors $C_5^2 + \varphi^2 = 4$ et $C_5 = \sqrt{4-\varphi^2}$.

Mais nous avons aussi AB égal à $2\cos\frac{\pi}{5}$, ou $2\cos\frac{\pi}{5} = \varphi$!!

LES SUITES DE FIBONACCI

C'est au départ une histoire de lapins ! Fibonacci dans Liber Abacci (1202 et 1228) pose le problème suivant :

"*Combien de paires de lapins peut engendrer une seule paire pendant une année ?*

Quelqu'un a mis une paire de lapins dans un endroit entouré de murs pour savoir combien de paires de lapins naîtraient au cours d'une année, la nature des lapins étant telle que dès l'âge de 2 mois, une paire en engendre tous les mois une autre. Comme la 1ère femelle met bas le 1er mois ... "

Réponse : 1er mois : **2** 2è mois : **3**
3è mois : **5** 4è mois : **8**
5è mois : **13** 6è mois : **21**
7è mois : **34** 8è mois : **55**
9è mois : **89** 10è mois : **144**

Certains pourront parler de marches gravies une à une ou sautées de 2 en 2 etc...

Je conseille à ce sujet la lecture de l'excellente brochure de l'IREM de Poitiers : "Les nombres de Fibonacci".

Pour ma part, je trouve qu'on a là de bonnes motivations pour introduire les suites réelles (u_n) où $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ - (I)

Dans le cas strict de Fibonacci, $u_0 = 1$ $u_1 : 2$. Je préfère le numérotage suivant : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 : 1$; $u_3 = 2 \ldots$ et la notation F_n .

Mais me direz-vous, que vient faire le nombre d'or, (exprimé grâce à un radical !), dans une histoire de nombres (entiers !) de lapins ?

Examinons les puissances de φ

$\varphi^2 = \varphi + 1$

$\varphi^3 = \varphi(\varphi+1) = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$

$\varphi^4 = \varphi(2\varphi+1) = 2\varphi^2 + \varphi = 3\varphi + 2.$

Un raisonnement par récurrence enfantin permet de montrer que

$$n \geqslant 1 \mid \varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1} \mid$$

Examinons les puissances de $\frac{1}{\varphi}$

$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \qquad \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 1 - (\varphi - 1) = 2 - \varphi$

$\frac{1}{\varphi^3} = \frac{2}{\varphi} - 1 = 2(\varphi - 1) - 1 = 2\varphi - 3$

$\frac{1}{\varphi^4} = 2 - \frac{3}{\varphi} = 2 - 3(\varphi - 1) = -3\varphi + 5$

et... $\quad n \geqslant 1 \quad \frac{1}{\varphi^n} = (-1)^{n+1} F_n \varphi + (-1)^n F_{n+1}$

Mais nous avons mieux. Par exemple en deug A_1, l'on démontre que toute suite de type (I) s'étudie de la manière suivante : l'on cherche les suites de la forme (r^n). r est alors solution de l'équation $r^2 = x+1$. Equation dont les 2 racines sont φ et $\frac{1}{\varphi}$. Grâce aux espaces vectoriels, l'on montre qu'alors, $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(-\frac{1}{\varphi})^n \qquad u_n = 0 = \lambda + \mu \quad$ et $- \lambda = \mu$

$$F_1 = 1 = \lambda\varphi - \frac{\mu}{\varphi}$$

$$\text{et } 1 = \lambda(\varphi + \frac{1}{\varphi}) = \lambda(\frac{\varphi^2 + 1}{\varphi}) = \lambda(\frac{\varphi + 2}{\varphi})$$

$$\lambda = \frac{\varphi}{\varphi + 2} \qquad \mu = -\frac{\varphi}{\varphi + 2}$$

$$F_n = \frac{\varphi}{\varphi + 2} \varphi^n + (-1)^{n+1} \frac{\varphi}{\varphi + 2} \frac{1}{\varphi^n}$$

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi + 2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(\varphi + 2)\varphi^{n-1}}$$

Grâce à cette expression, nous pouvons examiner le comportement de $\frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \times \frac{1 + (-1)^{n+2} \frac{1}{\varphi^{2n+1}}}{1 + (-1)^{n+2} \frac{1}{\varphi^{2n}}}$

Comme φ est strictement supérieur à 1, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers le nombre d'or φ.

Mais venons-en donc à l'algèbre homologique annoncée. Etudions la divisibilité par un nombre p donné (pas forcément entier) des termes de la suite (F_n) ou encore étudions F_n mod p.

Nous avons pour p=1, 2, 3 le tableau suivant :

p	F_n modulo p
1	0 1 1 0 1 1 0
2	0 1 1 2 0 2 2 1 0 1 1 2...
3	0 1 1 2 3 1 0 1 1

Ceci suggère une périodicité. Qu'en est-il ? Appelons $\overline{F}_n$ la classe de F_n dans Z/pZ. $(\overline{F}_n)$ est une suite dans Z/pZ vérifiant

$$\overline{F}_{n+2} = \overline{F}_{n+1} + \overline{F}_n \quad . \quad \overline{F}_0 = 0 \quad \overline{F}_1 = 1$$

Etudions S_p l'ensemble des suites (U_n) de Z/pZ vérifiant :

$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

Il est évident que $\alpha : S_p \to Z/pZ \times Z/pZ$ définie par $\alpha[(U_n)] = (U_0, U_1)$ est une bijection.

Si de surcroît, je munis S_p de la structure naturelle de Z/pZ module (généralisant les espaces vectoriels), α est un isomorphisme de Z/pZ-modules.

Mais réfléchissons à (I). Appelons D l'opération "décalage d'un indice sur les suites $[D[(U_n)] = (U_{n+1})]$. (I) s'écrit alors $D^2 = D+Id$. Certes,

nous n'avons pas le nombre d'or (solution de $x^2 = x+1$) mais un "opérateurs d'or" D vérifiant $D^2 = D+Id$. Si nous associons le morphisme $L : Z/pZ \times Z/pZ \to Z/pZ \times Z/pZ$ vérifiant $L\alpha = \alpha D$, L est encore un "opérateur d'or". $L(x, y) = (y, x+y)$ et ... L est bijective.

Remarquons que vérifier la périodicité des suites de S_p revient à montrer que $D^q = Id$ pour un certain q ou encore que $L^q = Id$.

Montrons-le simplement. On vérifie aisément que (0, 1) et (1, 1) = L(0, 1) forment une base de $Z/pZ \times Z/pZ$. Il suffit dès lors de vérifier qu'il existe q tel que $L^q(0,1) = (0,1)$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $n \geqslant 1$ $L^n(0,1)$, soit différent de (0, 1). Alors pour tout n, n' $(n \neq n')$ $L^n(0,1)$ est différent de $L^{n'}(0,1)$ [L étant bijective] ; l'on a donc une suite infinie d'éléments distincts dans l'ensemble fini $Z/pZ \times Z/pZ$, ce qui est absurde ? Nous pouvons donc conclure : pour toute suite (U_n) de S_p pour tout n, $U_{n+q} = U_n$.

En partitulier $\overline{F}_{n+q} = \overline{F}_q = \overline{F}_0 = 0$ ou F_q est divisible par p.

Ceux qui désireraient plus de renseignements sur la divisibilité des nombres de Fibonacci consulteront avec profit la brochure de l'IREM de Poitiers.

ANNEXE

TC : Un problème en or

Le problème consiste à découvrir et à étudier quelques aspects du nombre irrationnel $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé parfois "nombre d'or, qui suscite la curiosité depuis l'Antiquité.

I) Soit k un réel appartenant à]0, 1[. Il s'agit d'étudier la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et, pour tout entier n : $u_{n+2} = k\,u_{n+1} + (1-k)u_n$.

A] Placer, sur une droite (D) rapportée à un repère normé, les points A(0), B(1). (Pour réaliser la figure, on pourra choisir $k = \frac{2}{5}$ et une unité de 10 cm). On note M_n le point d'abscisse u_n (n étant un entier).

1) n étant un entier, comment est défini M_{n+2} à partir de M_n et de M_{n+1} ? En déduire une transformation f simple de (D) transformant, pour tout entier n, M_n en M_{n+1}.

2) Placer le point $C(u_2)$ (M_0 = A, M_1 = B, M_2 = C). Utiliser alors f pour construire simplement, à l'aide d'une construction réalisable exclusivement avec une règle non graduée et un compas, les points M_3, puis M_4, puis M_5, puis M_6.

3) Pour tout élément n de **N**, exprimer u_n en fonction de n et conclure quant à la convergence de u.

B] En s'appuyant sur les conclusions précédentes, rédiger l'énoncé d'un exercice destiné à des élèves de $1^{ère}$ ou de Terminale et consistant à étudier la suite u sans recours à une interprétation géométrique.

II) On construit le carré direct (A, C, C', A'), et le rectangle direct (A, B, B', A'). On se propose de déterminer k, et de construire le point C associé, de façon à ce que (A, B, B', A') et (B, B', C', C) aient des côtés respectifs proportionnesl.

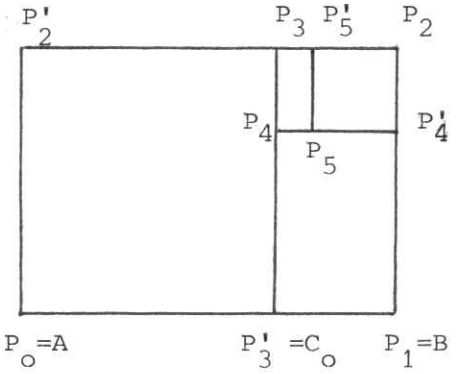
1) Démontrer que C est solution du problème si, et seulement si, le milieu 0 de [AC] est le centre du cercle circonscrit au triangle (A', C', B).

2) En déduire que le problème admet une solution unique, C_0, que l'on construira à la règle et au compas.

3) Calculer le quotient $\frac{AB}{BB'}$, que l'on notera φ , correspondant au choix $C = C_0$. Calculer la valeur k_0 de k qui caractérise C_0. Comparer $\frac{AB}{AC_0}$ et $\frac{AC_0}{BC_0}$.

III) On définit les suites de points $(P_n)_{n+\mathbf{N}}$ et $(P'_n)_{n \in N^*-\{1\}}$ de la façon suivante. On pose : $P_0 = A$, $P_1 = B$, $P_2 = A'$, $P_3 = C'$, $P'_3 = C_0$. $(C = C_0)$ P_4 et P'_4 sont les points appartenant respectivement à $[P_3\ P'_3]$ et $[P_2\ P_1]$ et tels que (P_1, P'_4, P_4, P'_3) soit un carré ; plus généralement, P_{n+3} et P'_{n+3} sont les points de $[P_{n+2}\ P'_{n=2}]$ tels que $(P_n, P'_{n=3}, P_{n+3}, P'_{n=2})$ soit un carré.

1) Démontrer qu'il existe une similitude directe s, dont on précisera les éléments caractéristiques, transformant pour tout entier n, P_n en P_{n+1}.



2) Le plan (P) est ici rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$. Pour tout entier n, on note x_n et y_n les coordonnées du point P_n ; on pose alors : $\alpha_n = x_{2n}$, $\beta_n = y_{2n}$; exprimer α_n et β_n en fonction de n et étudier la convergence des suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Indication : * on pourra projeter P_{2n} sur les axes de coordonnées.

* une autre méthode consiste à étudier la suite complexe de terme général Z_n, Z_n désignant l'affixe de P_n.

3) a) Vérifier que la rotation vectorielle ρ de mesure $+\frac{\pi}{2}$ associe à tout vecteur $\vec{u}(X, Y)$ l'image $\vec{u}'(-Y, X)$.

b) On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 0 \\ a_1 = 1 \; ; \; b_1 = 0 \end{cases} \quad ; \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{\varphi}(b_{n+1} - b_n) \\ b_{n+2} - b^{n+1} = \frac{1}{\varphi}(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

Calculer a_2 , b_2 , a_3 , b_3. Déduire des questions précédentes ce que sont les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

IV) Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note (D) la droite d'équation "$x = -\frac{5}{4}$" et on place le point $F(-\frac{3}{4}, 0)$. On note (Δ) la droite d'équation "$y = x$" , et $\mathcal{P}$ l'ensemble des centres des cercles tangentes à (D) et passant par F.

1) Construire, à la règle et au compas, les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de (Δ).

2) Ecrire une équation de $\mathcal{P}$.

3) On considère la suite v dont les termes successifs sont :

$$v_0 = 0 \; , \; v_1 = \sqrt{1} \; , v_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} \; , v_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \; , \ldots\ldots v_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}.$$

a) Ecrire une relation de récurrence caractérisant, avec v_0, la suite v.

b) Etudier les variations et la convergence de v.

c) Etablir un rapport entre la question 1) et l'étude faite en 3).

4) On condidère les points $A(\varphi, \varphi)$, $B(-1, \varphi)$, $C(0, \varphi)$, $A'(\varphi, 0)$, $B'(-1, 0)$, $C'(0, 0)$.

a) Vérifier que la figure constituée par le carré (A, C, C', A') et le rectangle (A, B, B', A') est de même nature que celle obtenue dans la partie II, sauf en ce qui concerne la distance AB. On remarquera que l'on peut alors lui appliquer les conclusions de la question III, 1).

b) On note K le milieu de [BB'], L celui de [B'C']. Démontrer que (AK) est orthogonale à (BL), et que : $AK = \varphi \, BL$.

c) Préciser les intersections de la parallèle à (BL) passant par K avec les droites (AB) et (A'B'). En déduire, de façon purement géométrique, que le point A appartient à l'ensemble $\mathcal{P}$ (défini en IV).

V) Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 8 cm) ; placer les points I(1, 0) et J(0, 1). On définit la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de points de (0x) de la façon suivante :

- $T_1 = I$; T_2 a pour abscisse 2.

- n désignant un élément de $\mathbf{N}$, la parallèle à (T_nJ) passant par $\bar{+}$ coupe (0J) en un point T'_{n+1} ; T_{n+1} est alors le point de (0x) tel que $\overline{IT}_{n+1} = \overline{0T'}_{n+1}$.

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on note t_n l'abscisse de T_n.+

1) Etablir une relation de récurrence entre t_n et t_{n+1} vérifiée pour tout n de $\mathbf{N}^*$.

*2)*a) Etudier la convergence de la suite $t_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

b) Déterminer, sans calculatrice, une approximation de φ à $0{,}5 \times 10^{-2}$ près.

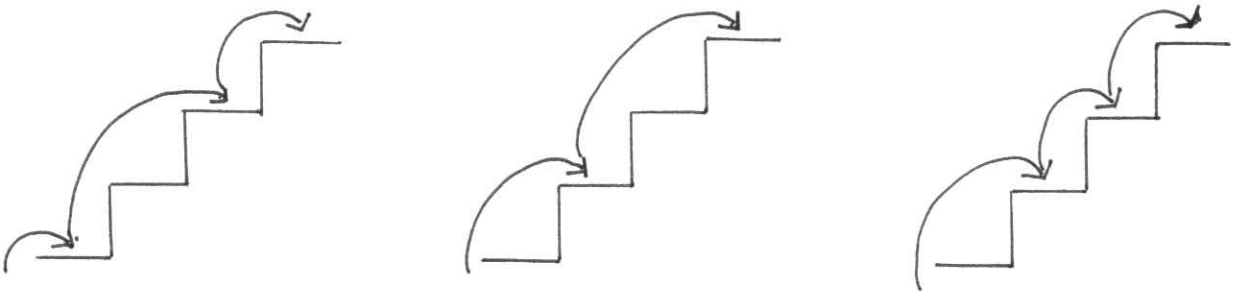
*3)*a) Mettre enf évidence une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'entiers, que l'on définira par ses premiers termes et une relation de récurrence Γ entre f_n, f_{n+1} et f_{n+2} , telle que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $t_n : \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

b) En appliquant la transformation s^{-1} (réciproque de s) à un rectangle (A, B, B', A') vérifiant les conditions imposées dans la partie II, mettre en évidence une suite géométrique vérifiant la même relation Γ de récurrence que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

c) Rechercher toutes les suites géométriques vérifiant la relation Γ .

d) Prolonger la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ à $\mathbf{N}$ de façon que la relation Γ reste vérifiée au rang n = 0. Déterminer alors deux réels λ et μ tels que, pout tout n de $\mathbf{N}$, on ait : $f_n \lambda(-\frac{1}{\varphi})^n + \mu \varphi^n$.

4) On gravit un escalier de 40 marches en franchissant, quand on le souhaite, deux marches à la fois (jamais plus). De combien de façons peut-on ainsi gravir cet escalier ?

Proposer deux méthodes pour réaliser ce calcul (l'une utilisant une programmation de la calculatrice).

Exemples :