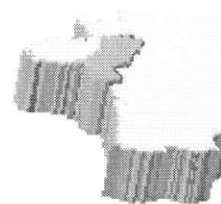


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



Comment calculer les polyèdres réguliers et semis-réguliers

Philippe et Dominique MARTIN

1989

Comment calculer les polyèdres réguliers et semi-réguliers.

Méthodes utilisées dans un système informatique de déduction de polyèdres à partir de propriétés abstraites.

Par Dominique et Philippe MARTIN

I- Introduction

Cette présentation résulte d'un travail de recherche en informatique dans le domaine de la synthèse d'images, entrepris depuis plusieurs années. Ce projet de recherche a pour but d'étudier des techniques informatiques d'obtention d'objets complexes à partir d'une description abstraite assez proche de l'homme, en opposition à une description de bas niveau de l'objet, en termes de coordonnées. Dans ce travail l'univers des polyèdres a été choisi pour sa richesse, tant au niveau des objets qu'il renferme, mais aussi du vocabulaire de description. Ici nous n'aborderons pas l'aspect informatique. Notre objectif est plutôt de montrer comment les mathématiques peuvent intervenir dans la résolution d'un problème concret, et aussi de montrer comment un outil informatique peut faciliter la compréhension d'objets mathématiques complexes comme le sont certains polyèdres. L'un des points clé du logiciel est le calcul des angles dièdres des polyèdres réguliers et semi-réguliers. Nous montrerons ici comment résoudre ce problème de manière numérique pour tous ces objets.

Nous espérons aussi par les quelques images présentées ici, donner l'envie de mieux connaître cet univers des polyèdres semi-réguliers, l'ordinateur permettant de découvrir des formes moins connues que celles des solides de Platon.

II- Quelques propriétés et définitions relatives aux polyèdres.

Nous n'allons pas chercher ici à donner une définition très formelle de ce que l'on entend par "polyèdre". Disons simplement qu'un polyèdre est défini par la donnée d'un ensemble de faces planes qui sont des polygones. Un polygone est une ligne brisée fermée. Chaque segment de cette ligne est un côté du polygone. Des côtés du polygone peuvent se recouper ailleurs qu'en un sommet. Un **polyèdre** est un recollement de faces polygonales le long de leurs côtés; les arêtes du polyèdre séparent toujours exactement deux faces. De façon analogue aux côtés des faces, deux faces peuvent se recouper selon une ligne qui n'est pas une arête. Remarquons que ces objets ne définissent pas forcément de façon claire un solide, les notions d'intérieur et d'extérieur pouvant parfois disparaître, comme dans le cas des polygones croisés.

Un polygone est **régulier** lorsque toutes ses arêtes sont égales, et tous ses angles au sommet sont égaux.

Un polyèdre est **régulier** lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers égaux (fig.1).

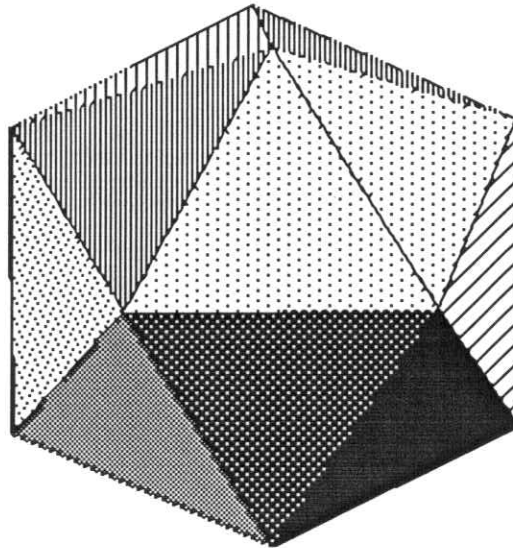
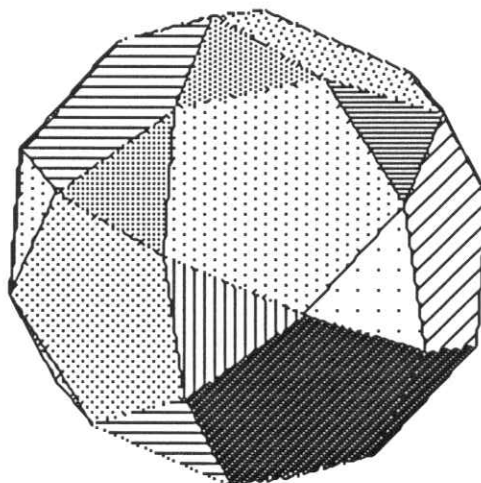


fig. 1. Un polyèdre régulier: l'icosaèdre.

Un polyèdre est **semi-régulier** (premier genre) lorsque toutes ses faces sont des polygones réguliers (non nécessairement tous égaux), et que tous les sommets du polyèdre sont identiques (on trouve la même séquence de faces autour de chaque sommet)(fig 2).



Autour de chaque sommet on trouve la séquence de faces:
triangle, pentagone, triangle, pentagone.

fig. 2. Un polyèdre semi-régulier (premier genre): l'icosidodécaèdre.

De façon analogue, on considère aussi comme **semi-régulier** (deuxième genre) les polyèdres dont toutes les faces sont égales (mais non nécessairement régulières) et dont tous les sommets sont réguliers (mais non nécessairement égaux) (fig 3).

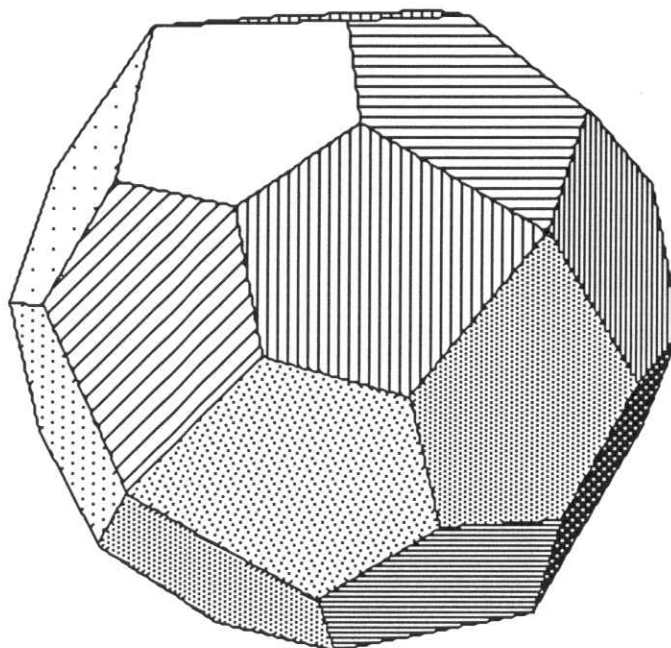


fig. 3. Un polyèdre semi-régulier du deuxième genre: l'icositétraèdre pentagonal.

Un polygone régulier peut être **étoilé** ou **convexe**, selon que ses arêtes se recoupent ou pas. Pour un polygone étoilé on appelle **ordre d'étoilement** le nombre de tours à effectuer autour du centre pour voir le polygone se refermer. Cet ordre est aussi le nombre de sommets sautés pour joindre un sommet à un autre, lorsque l'on considère les sommets du polygone régulier convexe de même taille.

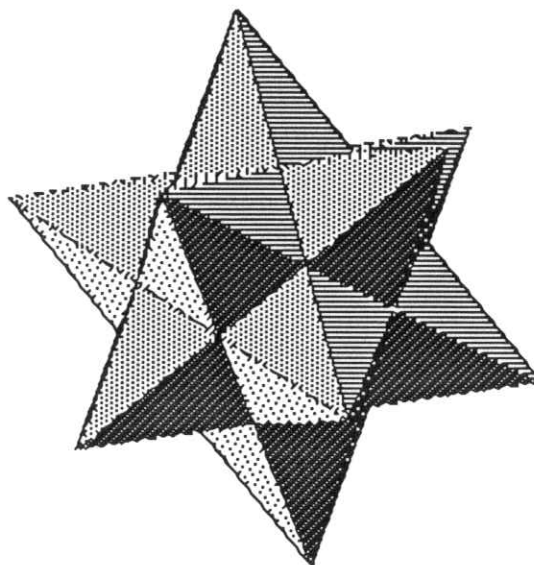
Un sommet d'un polyèdre archimédien peut être **étoilé**, **croisé** ou **convexe**, selon que les faces attachées au sommet se recoupent ou pas. En coupant un tel sommet par un plan, on obtient respectivement un polygone étoilé, croisé ou convexe.

Un polyèdre sera dit **étoilé** lorsque ses sommets sont étoilés ou que l'une de ses faces est étoilée. Il est **convexe** si toutes ses faces sont convexes et tous ses sommets aussi.

Un polyèdre régulier convexe est appelé **solide de Platon** (fig. 1).

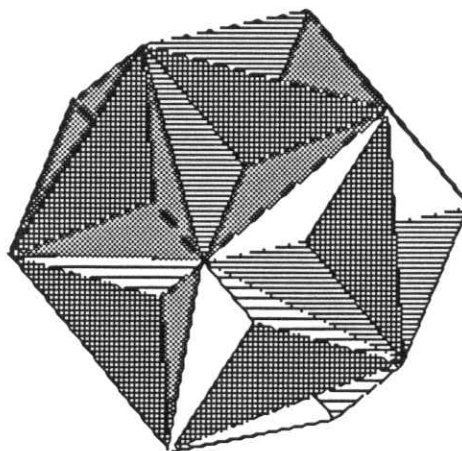
Un polyèdre régulier à faces étoilées est appelé **solide de Képler** (fig.4).

Un polyèdre régulier à sommets étoilés est appelé **solide de Poinot** (fig. 5 et 6).



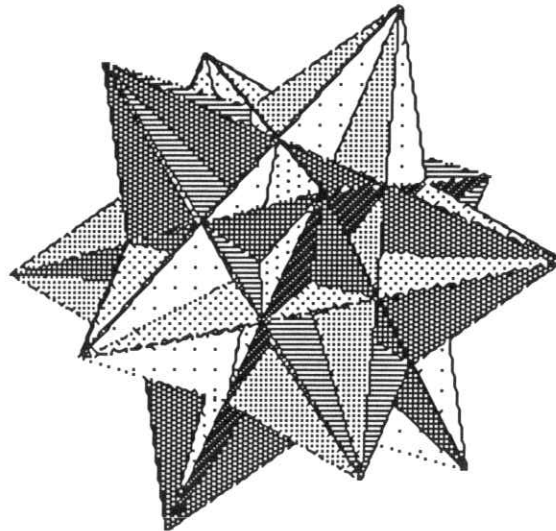
Toutes les faces sont des étoiles à cinq branches.
Les sommets sont convexes.

fig. 4. Un solide de Képler: le petit dodécaèdre étoilé.



Toutes les faces sont des pentagones réguliers qui se recoupent.
Les sommets sont étoilés.

fig. 5. Un solide de Poincaré: le grand dodécaèdre.



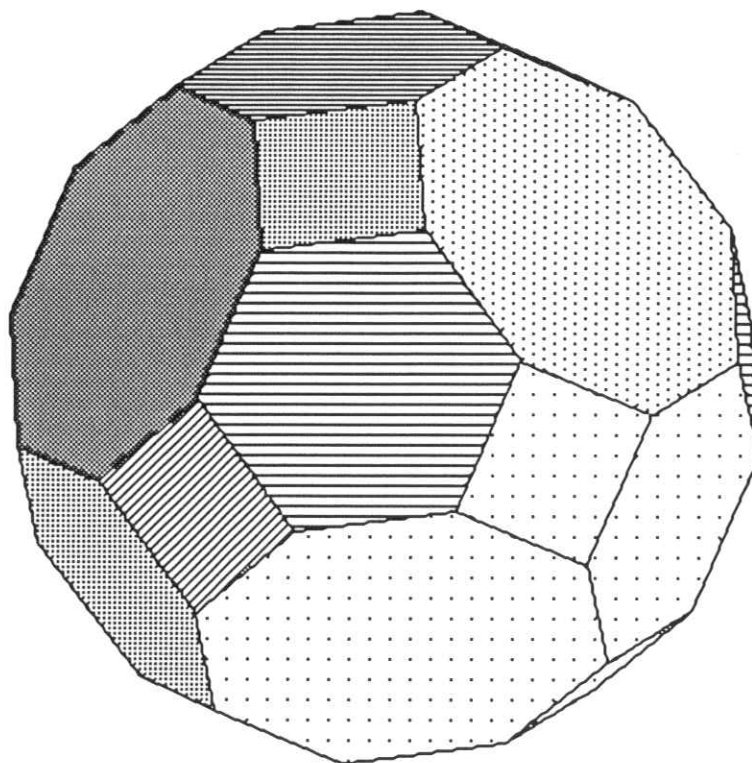
Toutes les faces sont des triangles équilatéraux qui se recourent.
Les sommets sont étoilés.

fig. 6. Un solide de Poincaré: Le grand icosaèdre.

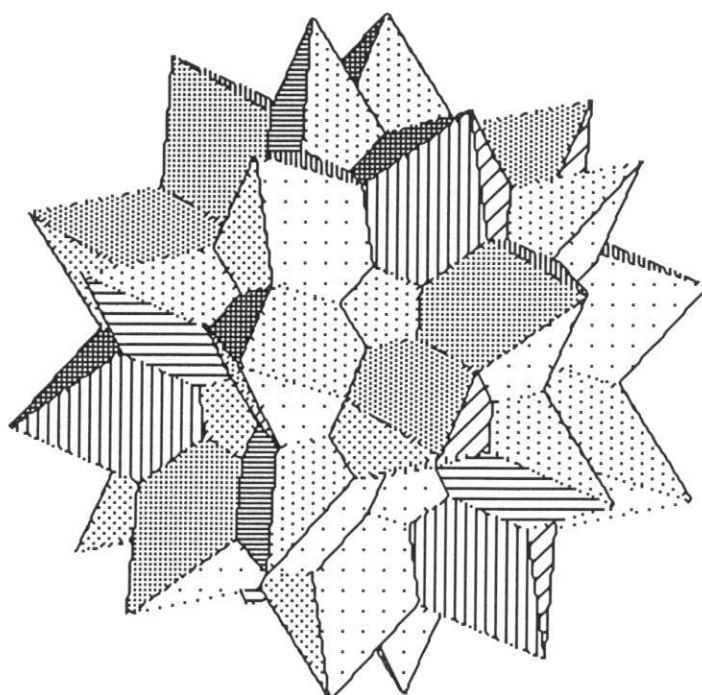
La classe des polyèdres semi-réguliers convexes du premier genre comprend les **polyèdres archimédiens** (fig.7), déjà connus d'Archimède, et la classe des **prismes** et **antiprismes** convexes acceptés par Képler comme de même nature que les archimédiens. Les prismes et antiprismes sont constitués par deux bases parallèles formées de deux polygones réguliers identiques, reliées par une face latérale constituée de carrés pour les prismes, de triangles pour les antiprismes. Les polyèdres archimédiens sont au nombre de 13 (15 si l'on compte les deux modèles droit et gauche, miroir l'un de l'autre, du cube adouci et du dodécaèdre adouci). Par contre il y a une infinité de prismes et d'antiprismes, puisque les polygones réguliers sont en quantité infinie.

Un polyèdre semi-régulier convexe du deuxième genre est appelé **polyèdre de Catalan**. Citons l'infinité de **bi-pyramides** et de **trapèzoèdres**. Les bi-pyramides sont constituées de deux pyramides recollées par leur base polygonale régulière.

Il existe aussi de nombreux polyèdres semi-réguliers non convexes (fig 8), dont les faces ou les sommets sont étoilés, ou croisés. En particulier, il existe une infinité de prismes et d'antiprismes à bases étoilées (premier genre) ainsi que de bi-pyramides et trapèzoèdres étoilés (deuxième genre).



Autour de chaque sommet on trouve la séquence de faces:
carré, hexagone, octogone.
fig. 7. Un polyèdre archimédien: le grand rhombicuboctaèdre.



Autour de chaque sommet on trouve la séquence de faces:
triangle, étoile à cinq branches, triangle, étoile à cinq branches.
fig. 8. Un polyèdre semi-régulier non convexe du premier genre: le grand icosidodécaèdre.

Pour un polyèdre régulier, tous les **angles dièdres** sont égaux. Pour un polyèdre archimédien, les angles dièdres sont les mêmes pour deux couples identiques de faces.

Un polyèdre est appelé **dual** d'un autre, lorsque les sommets du premier peuvent être mis en correspondance avec les faces du second. La relation de dualité entre deux polyèdres est symétrique.

Le dual d'un polyèdre régulier est régulier.

Les semi-réguliers du premier genre sont duals des semi-réguliers du deuxième genre (et vice-versa). Le dual d'un prisme est une bi-pyramide, et le dual d'un antiprisme un trapèzoèdre.

Les semi-réguliers du premier genre sont inscriptibles dans une sphère circonscrite, c'est-à-dire que tous les sommets d'un tel polyèdre sont sur une même sphère.

Les semi-réguliers du deuxième genre admettent une sphère inscrite, c'est-à-dire que toutes les faces d'un tel polyèdre sont tangentes à une même sphère.

III- Fonctionnement général du logiciel de création de polyèdres.

Au départ l'utilisateur fournit de manière interactive des informations abstraites à l'ordinateur, il déclenche une déduction, et le programme calcule à partir des propriétés de départ tous les polyèdres qui vérifient ces contraintes.

Exemples simples de définition de polyèdres:

1°) Propriétés:

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des carrés

Réponse:

- le cube

2°) Propriétés:

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des triangles
- il y a cinq faces attachées à chaque sommet.

Réponse:

- l'icosaèdre,
- le grand icosaèdre

3°) Propriétés:

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des triangles
- il y a cinq faces attachées à chaque sommet
- le polyèdre est convexe.

Réponse:

- l'icosaèdre

4°) Propriétés:

- le polyèdre est régulier et convexe.

Réponse:

- le cube, le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le dodécaèdre

5°) Propriétés:

- le polyèdre est régulier
- les faces sont des hexagones

Réponse:

- aucun

6°) Propriétés:

- le polyèdre est semi-régulier
- la séquence de faces autour d'un sommet est
triangle,
étoile à cinq branches,
triangle,
étoile à cinq branches.

Réponse:

- le grand icosidodécaèdre.

7°) Propriétés:

- dual du cube adouci;

Réponse:

- l'icositétraèdre pentagonal.

Techniquement, le logiciel cherche à partir des propriétés de départ à calculer des données numériques caractéristiques du polyèdre. Par exemple à partir d'une forme de face (triangle, carré, etc) et de la propriété "régulier", le programme calcule l'angle dièdre entre deux faces. Il est alors facile de déduire à partir d'une face, toutes les faces du polyèdre. Ces calculs se font à l'aide de règles de déduction qui se déclenchent en fonction des connaissances déjà acquises par le système. Certaines de ces règles sont assez élémentaires: par exemple déduire les coordonnées de tous les sommets d'une face convexe à partir d'un sommet et du nombre de sommets. Par contre, le calcul de l'angle dièdre n'est pas aussi aisé. Nous allons montrer comment ces difficultés ont été résolues aussi bien pour les polyèdres réguliers que semi-réguliers.

IV- Calcul de l'angle dièdre des polyèdres réguliers.

Précisons tout d'abord les données du problème. Il faut disposer de connaissances aptes à fixer la valeur de l'angle dièdre du polyèdre afin d'établir un algorithme de calcul de celui-ci. Dans le cas des réguliers, la connaissance de l'angle au sommet des faces, le nombre de faces que l'on recolle autour d'un sommet, et l'ordre d'étoilement du sommet, détermine complètement la géométrie de celui-ci.

La règle effectue le calcul de l'angle dièdre d à partir des paramètres s (angle au sommet du polygone), k (ordre d'étoilement), n (nombre de faces autour du sommet). Ces données ont elles-mêmes été calculées par d'autres règles si elles n'étaient pas fournies par l'utilisateur.

Lorsque l'on recolle des faces autour d'un sommet O , on effectue successivement deux rotations:

- l'une d'angle s dans le plan de la face,
- l'autre autour de l'arête de recollement, et d'une valeur égale à l'angle

$\pi-d$.

Pour une écriture simple de ces rotations, on choisit le repère (O,x,y,z) orthonormé, l'axe Ox portant l'arête de recollement des deux faces, et l'axe Oz orthogonal au plan de la face (fig. 9).

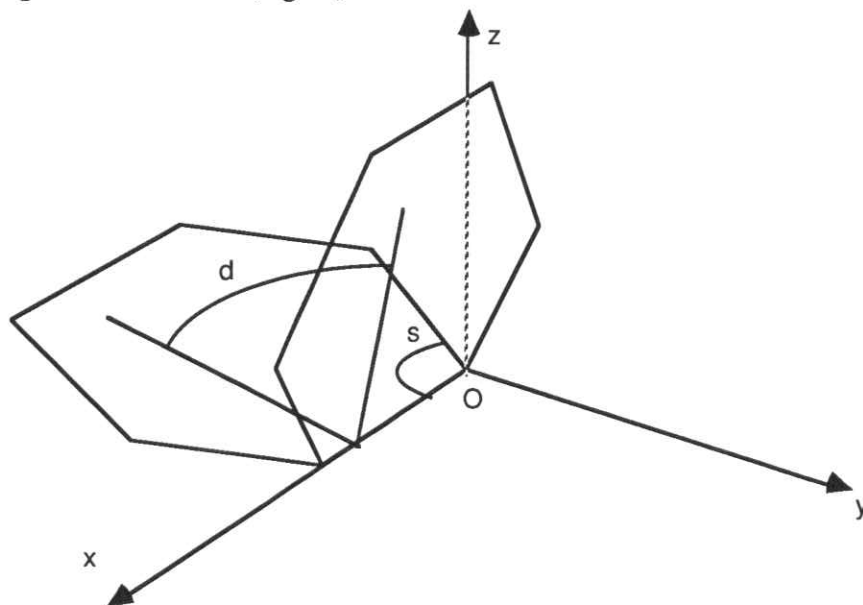


fig. 9. Calcul de l'angle dièdre de deux faces.

La matrice de cette transformation s'écrit:

$$R = \text{Rot}(\pi - d, Ox) \circ \text{Rot}(s, Oz) =$$

$$\begin{vmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ -\sin(s)\cos(d) & -\cos(s)\cos(d) & -\sin(d) \\ \sin(s)\sin(d) & \cos(s)\sin(d) & -\cos(d) \end{vmatrix}$$

Dire qu'au bout d'un certain nombre de faces recollées n , on retrouve la face initiale, signifie que cette matrice R vérifie:

$$R^n = \text{Identité.} \quad (1)$$

On suppose n minimal vérifiant cette relation. Une condition nécessaire pour que la relation (1) soit vérifiée est que les valeurs propres de R soient des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Le polynôme caractéristique $P(x)$ de la matrice R est:

$$P(x) = (1 - x)(x^2 - (\cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1)x + 1)$$

La racine $x = 1$ qui correspond aux invariants dans la rotation R ne nous donne rien; les deux autres racines sont deux complexes conjugués, dont la somme vaut d'une part:

$$\cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1$$

et d'autre part:

$$2 \cdot \cos(2k\pi/n)$$

somme des deux racines complexes conjuguées de l'unité.

L'entier k est compris entre 1 et $n-1$. Comme n est minimal, k doit être choisi premier avec n . Inversement, le choix d'un k premier avec n et compris entre 1 et $n-1$, donne une relation:

$$\cos(s) - \cos(d) - \cos(s)\cos(d) - 1 = 2 \cdot \cos(2k\pi/n)$$

permettant de calculer l'angle d à partir de s , k et n , et solution du problème.

On obtient donc finalement:

$$\cos(d) = [-1 + \cos(s) - 2\cos(2k\pi/n)] / (1 + \cos(s))$$

Les recollements de faces se font par rotation d'angle $2kp/n$ autour d'un axe qui passe par le sommet. Au bout de n recollements, on a tourné d'un angle de $2k\pi$ et donc effectué k tours autour du sommet. Pour s , k , n donnés, il n'existe pas toujours une valeur pour d , le membre de droite pouvant être plus grand que 1 en valeur absolue. Dans ce cas on produit un message d'erreur.

Une fois en possession de l'angle dièdre, et disposant d'une face et d'une arête qui n'a pas encore de voisine, on est en mesure de calculer une face voisine. Par un calcul de rotation dans l'espace, on peut déduire à partir des sommets de la face connue, les sommets de la face voisine.

Donnons le détail des calculs des transformations géométriques (fig. 10).

Soit (O, i, j, k) le repère dans lequel sont exprimées les coordonnées des entités géométriques. Comme précédemment, on appelle d l'angle dièdre de deux faces.

Soient

- $M1(x_1, y_1, z_1)$ et $M2(x_2, y_2, z_2)$ les sommets de l'arête de recollement.

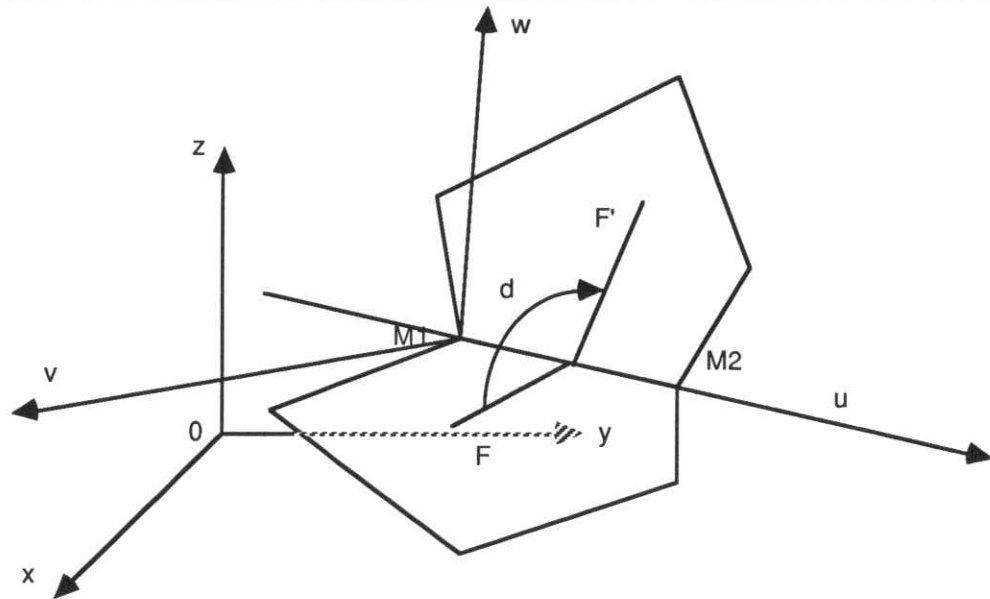


fig. 10. Calcul de la face voisine à l'aide de l'angle dièdre.

La face F' s'obtient à partir de F par rotation d'angle d autour de l'arête $M1M2$. Pour calculer cette face, il faut déterminer l'image M' de coordonnées (x',y',z') d'un point M de coordonnées (x,y,z) quelconque. Dans un repère orthonormé $(M1,u,v,w)$ dont l'un des axes est $u=M1M2/norme(M1M2)$, la rotation s'écrit:

$$Rot = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(d) & -\sin(d) \\ 0 & \sin(d) & \cos(d) \end{pmatrix}$$

Pour obtenir M' dans le repère (O,x,y,z) , on applique les transformations suivantes:

- une translation de vecteur $O M1$,
- un changement de base unitaire de (O,i,j,k) vers (O,u,v,w) ,
- la rotation Rot
- un changement de base unitaire de (O,u,v,w) vers (O,i,j,k) ,
- une translation de vecteur $M1 O$,

Exprimons la matrice P de changement de base.

On calcule d'abord u comme indiqué:

$$M1M2 = (x2-x1).i + (y2-y1).j + (z2-z1).k = a.i + b.j + c.k$$

$$u = M1M2/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = u1.i + u2.j + u3.k$$

$$\text{On pose } s = \sqrt{u1^2 + u2^2}$$

$$P \text{ s'écrit: } \begin{vmatrix} 1 & u_1 & -u_2/s & -u_1u_3/s & 1 \\ 1 & u_2 & u_1/s & -u_2u_3/s & 1 \\ 1 & u_3 & 0 & s & 1 \end{vmatrix}$$

Comme cette matrice est unitaire, son inverse est simplement la transposée.

Le cas particulier où s est nul signifie que l'arête M_1M_2 est parallèle à l'axe Oz . Dans ce cas la rotation s'effectue directement autour de Oz , sans nécessité de changement de base. Elle s'écrit donc:

$$\text{Rot} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(d) & -\sin(d) & 0 & 1 \\ 1 & \sin(d) & \cos(d) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on doit composer avec la translation seulement.

Il est important d'engendrer les faces toujours de la même façon, et spécialement de respecter leur orientation. Les calculs de rotation dans l'espace sont conduits de façon à engendrer une face voisine dont l'arête de recollement est orientée en sens inverse de l'arête sur laquelle on recolle. Les coefficients du plan de la face sont eux aussi choisis de manière à fournir une normale orientée toujours de la même façon, ce qui est utile pour la visualisation par exemple. Cette règle met aussi à jour la valeur du centre de la face déduite. Cette information est utile pour le calcul du polyèdre dual.

IV- Calcul des angles dièdres des polyèdres semi-réguliers du premier genre.

Contrairement au cas des polyèdres réguliers, l'angle dièdre entre deux faces adjacentes n'est pas toujours le même. Cependant comme nous l'avons mentionner, il est possible de démontrer qu'un polyèdre semi-régulier est inscriptible dans une sphère. Il en résulte que si l'on considère un sommet, la connaissance de la séquence de faces recollées autour de ce sommet et de son ordre d'étoilement, définit de manière unique la géométrie du sommet, et donc tous les angles dièdres entre chaque couple de faces. Comme pour un polyèdre semi-régulier, les sommets sont identiques, on est alors capable de calculer la totalité de celui-ci.

Nous appelons angle au sommet du polyèdre, l'angle d'une arête issue d'un sommet avec la droite passant par ce sommet et le centre du polyèdre. Dans un premier temps nous établissons d'abord la relation qui relie l'angle au sommet s avec les autres données du polyèdre. Ensuite le calcul des angles dièdres s'effectue facilement à partir de s .

Sur le schéma de la figure 11 les points O, A, B, C sont des sommets du polyèdre, et donc sont situés sur une sphère. O désigne le sommet du polyèdre autour duquel sont recollées les faces. OA, OB, OC sont trois arêtes appartenant à deux faces voisines du polyèdre, et attachées en O. Soit O' le point d'intersection du plan passant par A,B,C, et perpendiculaire au rayon de la sphère circonscrite au polyèdre et passant par O. Les angles au sommet des faces de plan AOB et BOC sont notés respectivement a et b, tandis que leurs projections sur le plan O' A B sont notées a', b'. L'angle t est celui que fait le plan O'AB avec les arêtes OA, OB, OC du polyèdre.

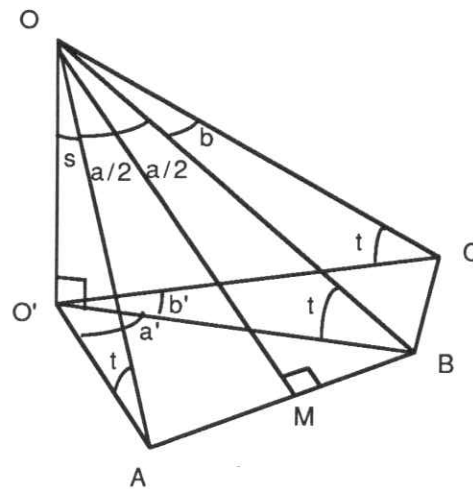


fig. 11.

On a

$$\sin(a/2) = AM/OA$$

et

$$\sin(a'/2) = AM/O'A$$

donc

$$\sin(a/2) / \sin(a'/2) = \sin(b/2) / \sin(b'/2) = \dots = \cos(t) = \cos((\pi/2) - s) = \sin(s)$$

On en déduit:

$$\sin(a'/2) = \sin(a/2) / \sin(s)$$

et

$$a' = 2 \cdot \text{ArcSin}(\sin(a/2) / \sin(s))$$

De même pour b', c', etc.

La somme des a', b', c', ... ainsi obtenue est égale à un nombre entier de tours soit $2k\pi$, où k est l'ordre d'étoilement du polyèdre.

On a donc la relation:

$$k\pi = \text{ArcSin}(\sin(a/2) / \sin(s)) + \text{ArcSin}(\sin(b/2) / \sin(s)) + \dots$$

ce qui permet d'avoir une relation entre les angles au sommet des faces et l'angle s du polyèdre. Il faut en déduire une valeur de s si elle existe. Pour cela on considère la fonction

$$f(x) = k\pi - (\text{ArcSin}(\sin(a/2) / x) + \text{ArcSin}(\sin(b/2) / x) + \dots)$$

Trouver s revient à trouver les zéros de f . L'étude de cette fonction montre qu'elle est définie sur $[\text{Max} .. 1]$, où Max représente le plus grand nombre entre $\sin(a/2)$, $\sin(b/2)$, ...

La courbe de f est monotone croissante.

Pour trouver les zéros de f on utilise la méthode de Newton. Comme la courbe est monotone croissante (fig. 12), de concavité tournée vers le bas, on est assuré de la convergence en prenant un point de départ situé entre la valeur " Max " et la racine, point caractérisé par une valeur de f négative.

On recherche pour le point de départ la première valeur de f négative en effectuant une dichotomie sur l'intervalle $[\text{Max} .. 1]$. La somme des angles au sommet de chaque face doit être inférieure à $2k\pi$, puisqu'en projection cette somme est égale à $2k\pi$. Donc $f(1)$ est obligatoirement positif. Pour que la racine s existe, il faut donc que $f(\text{Max})$ soit négatif. Lorsque la fonction f ne change pas de signe sur $[\text{Max} .. 1]$, il n'existe aucune valeur de s . Il y a impossibilité de construire le polyèdre dans ce cas. Un message d'erreur est alors produit.

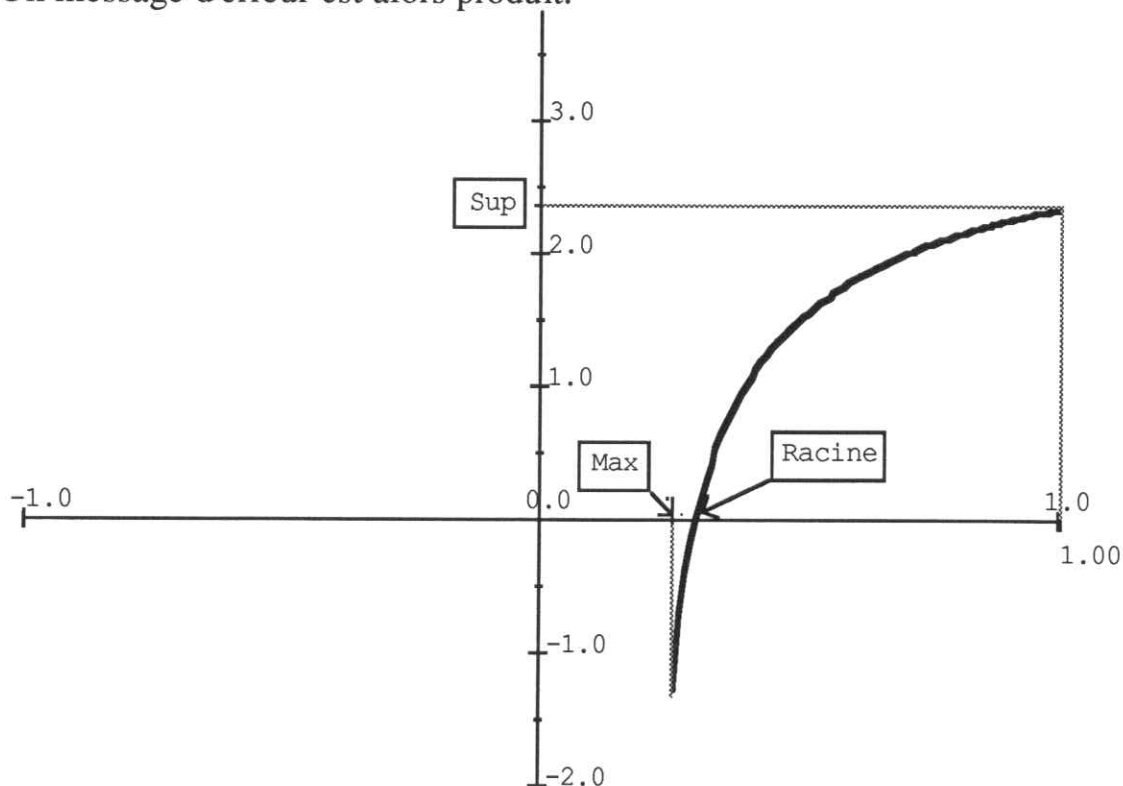


fig. 12. graphe de la fonction ayant s comme zéro.

A partir de l'angle s , on peut calculer le point A, puis avec les angles au sommet des faces, on détermine B et C. Les vecteurs OA, OB, OC donnent des vecteurs normaux aux plans OAB et OBC, et le produit scalaire de ces vecteurs normaux donne le cosinus de l'angle dièdre. Les angles au sommet des faces sont non orientés, donc toujours positifs.

Pour initialiser le calcul, on peut par exemple prendre A de coordonnées
 $(OA \cdot \sin(s), 0, OA \cdot \cos(s))$

Les coordonnées de B sont obtenues en écrivant qu'il se déduit de A par rotation d'angle a' autour de OO':

$$(OA \cdot \cos(a') \cdot \sin(s), OA \cdot \sin(a') \cdot \sin(s), OA \cdot \cos(s))$$

Et C s'obtient de manière analogue par une nouvelle rotation d'angle b' autour de OO'.

Pour le calcul du cosinus et du sinus de l'angle a' , on utilise les formules trigonométriques suivantes:

$$\sin(a') = 2 \sin(a'/2) \cos(a'/2)$$

$$\cos(a') = 1 - 2 \sin^2(a'/2)$$

ainsi que la relation établie précédemment:

$$\sin(a'/2) = \sin(a/2) / \sin(s) .$$

VI- Conclusion.

Ce travail comporte bien des aspects non mentionnés, et en particulier l'aspect informatique qui n'est pas abordé ici. Toutes les images de polyèdres ont été obtenues par le logiciel PolyForme, en cours de développement sur Macintosh. Il comporte actuellement une centaine de règles de déduction permettant d'explorer les formes polyédriques citées dans le texte.

Il nous a semblé intéressant de présenter cette facette mathématique de notre travail pour plusieurs raisons. D'une part il est remarquable de voir que des problèmes, d'énoncés fort simples, peuvent amener à des difficultés mathématiques non négligeables, et même aboutir à des problèmes impossibles à résoudre de manière exacte et nécessitant l'utilisation de méthodes numériques. D'autre part, on trouve très peu d'informations concrètement utilisables pour le calcul des paramètres des polyèdres remarquables. L'attrait et la richesse des images obtenues met bien en évidence que les méthodes employées ne sont pas uniquement de pures abstractions.