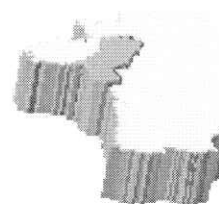


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



À propos de la représentation de l'espace

Perspective parallèle et axonométrie

B. TRUFFAULT

1988

Représentation graphique des objets à trois dimensions

Dans l'enseignement français la représentation graphique de l'espace a longtemps été synonyme de géométrie descriptive, l'enseignement de la perspective restant l'apanage des plasticiens et des architectes. Le rôle joué par Monge dans la création de l'Ecole Polytechnique, puis l'influence de ce modèle sur le développement ultérieur de la formation des ingénieurs expliquent sans doute, au moins en partie, ce divorce. Ainsi la perspective parallèle, ignorée des premiers, méprisée des seconds, reste singulièrement absente de la littérature de langue française alors qu'elle occupe une place importante dans les manuels allemand de "darstellende Geometrie".

On assiste aujourd'hui au retour dans les programmes de l'enseignement du second degré des préoccupations liées à la représentation de l'espace, mais il nous semble que les outils proposés sont loin d'être à la hauteur des ambitions affichées. On pourrait espérer un meilleur lien entre les développements relatifs aux transformations affines ou projectives et ceux consacrés à la représentation des objets à trois dimensions qui sont par essence intimement liés.

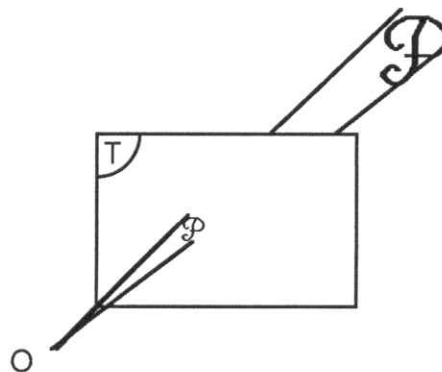
Nous nous attachons ici à présenter une approche heuristique de la question en limitant la partie technique à l'aspect affine, c'est-à-dire la perspective parallèle. On ne peut développer ce sujet sans que l'aspect métrique de la géométrie concrète s'impose très vite et amène à parler d'axonométrie.

On a là une technique qui présente le double avantage de pouvoir être mise en oeuvre à partir de présupposés relativement modestes et de produire des images tout à fait suggestives des objets représentés. C'est de plus un cadre tout à fait plaisant pour FAIRE DE LA GEOMETRIE.

§1 Perspectives.

Pour représenter des objets à trois dimensions on est amené à utiliser de façon systématique leur image sur des plans. Les supports sont les plus divers : papier, tableau "noir", film photographique, écran cathodique, etc . . . Les techniques de fabrication peuvent apparaître très différentes, mais l'élaboration de ces vues relève d'un même principe, celui de la vision elle-même : la perspective.

* La perspective centrale (ou conique)



On considère

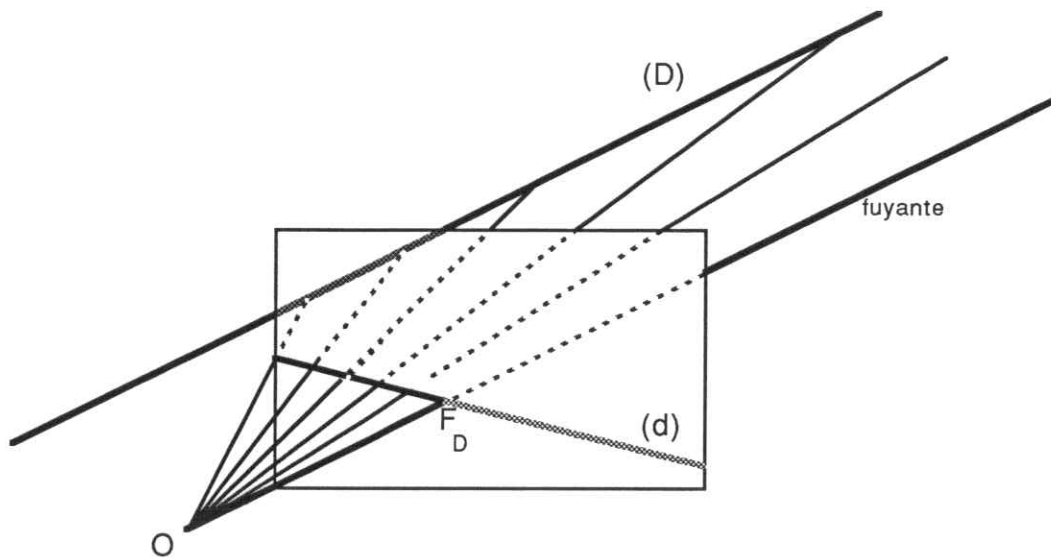
- un plan T : le tableau (*)
- un point O extérieur à T .

(*) A l'origine il s'agit du tableau du peintre, pas du tableau "noir".

La correspondance : $M \rightsquigarrow m$ entre l'espace et le tableau définie par la relation : M et m sont alignés avec O est la perspective de centre O .
Le centre d'une perspective est aussi appelé point de vue.

Il est clair que tout point m du tableau est l'image de la droite (Om) , ou plus précisément de $(Om) - \{O\}$. Une telle droite est appelée fuyante (elle échappe à la représentation sur le tableau, on ne peut pas la saisir).

Si une droite D ne passe pas par O et coupe le tableau, son image est la droite d : intersection du tableau avec le plan défini par D et O .

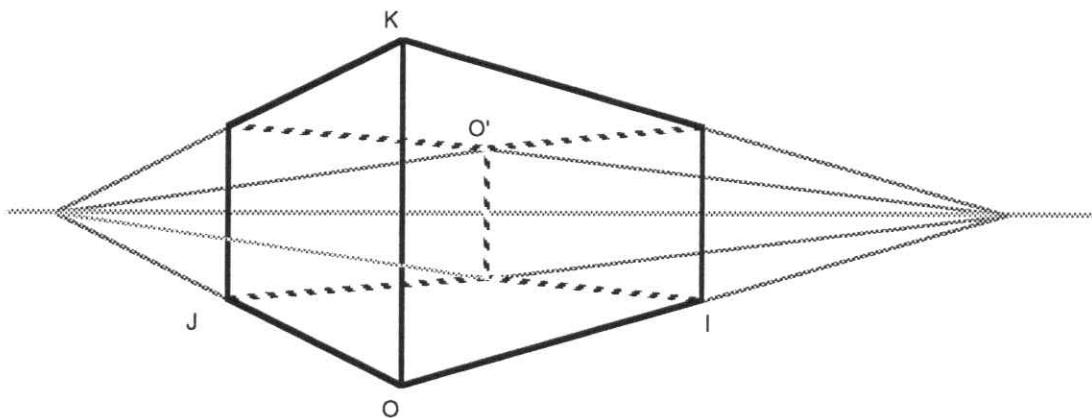


On remarquera que d passe par le point d'intersection f du tableau avec la fuyante parallèle à D . Ce point n'est l'image d'aucun point de (D) (à moins d'admettre l'existence d'un "point à l'infini" en se plaçant dans le cadre de la géométrie projective).

On remarquera aussi que le point f est commun aux images de toutes les droites parallèles à D on l'appelle le point de fuite de la direction de D .

On remarquera enfin que la perspective conserve le parallélisme des droites parallèles au tableau.

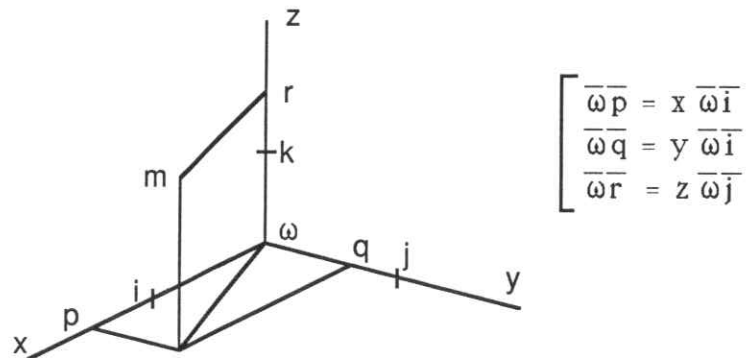
Si on connaît l'image en perspective d'un repère et les images des projections d'un point sur les arêtes, on peut de façon très mécanique construire son image



On suppose que sont donnés :

- 1) les axes avec leurs points de fuite (point à l'infini pour (Oz) suivant une convention naturelle)
- 2) les projections P, Q, R .

Tout point repéré par ses coordonnées vient trouver sa place sans problème sur le tableau. Puisque la projection respecte le parallélisme et conserve les rapports segmentaires.



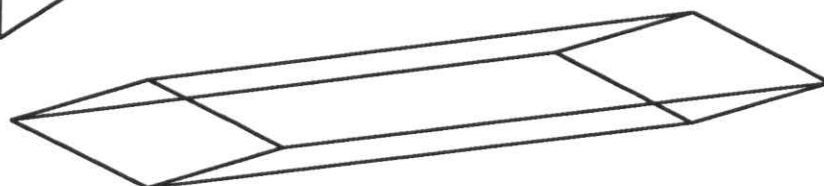
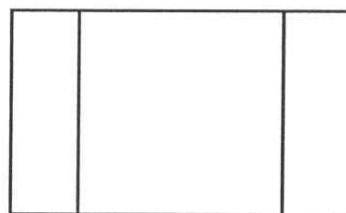
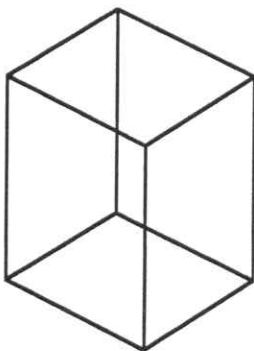
* Le théorème de Pohlke.

Un théorème méconnu dit que si on choisit dans un plan quatre points non alignés, il existe une longueur a et une direction δ telle que, les quatre points soient les projections suivant δ des quatre sommets appartenant à trois arêtes adjacentes d'un cube d'arête a .

Mieux formalisé cela donne l'énoncé qui suit.

Théorème : Toute transformation affine de l'espace dans l'un de ses plans est la composée d'une similitude et d'une perspective parallèle.

Ainsi considérant les schémas ci-dessous, si on déclare voici des images en perspective parallèle d'un cube, **on a raison !**



En conséquence, il n'existe pas de restrictions pour le choix de l'image d'un repère en perspective parallèle repère sinon celles liées au caractère plus ou moins réaliste de l'effet recherché, ou encore celles que nous étudierons plus loin lorsque nous nous préoccupons de la restitution des données de nature métrique.

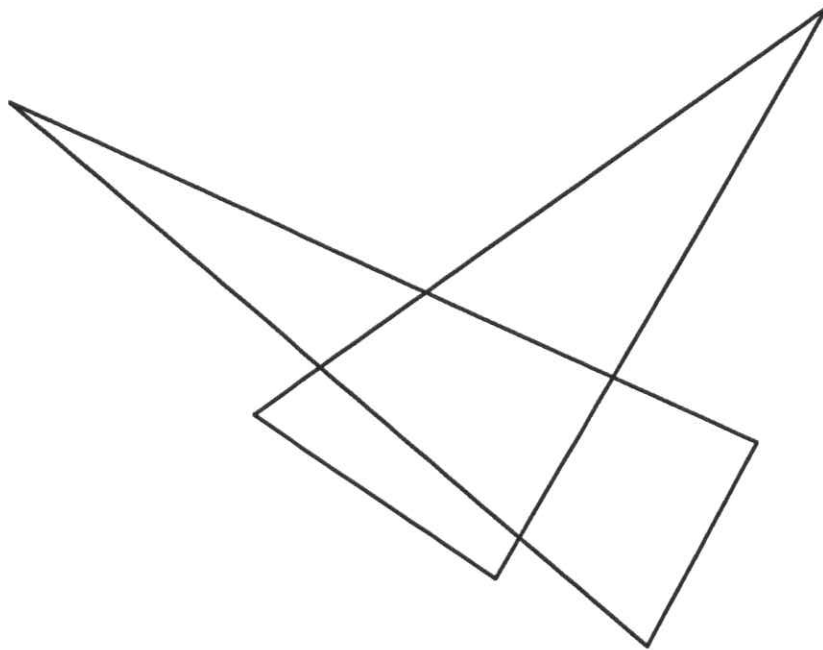
* La lecture d'une image.

La lecture d'une image en perspective parallèle ou conique (nous dirons épure) est une opération beaucoup moins banale que la construction de celle-ci. Elle suppose en effet de la part du cerveau des opérations complexes pour restituer, même partiellement, l'information perdue dans l'écrasement des fuyantes.

Il serait hors de propos de chercher à analyser ici ces mécanismes, mais il est indispensable de prendre conscience qu'ils existent, si on souhaite sortir des comportements instinctifs dans ce domaine.

C'est dans cet esprit que nous avons composé la couverture du présent fascicule et qu'on devrait prendre connaissance des considérations qui suivent.

Deux triangles dessinés sur une feuille de papier où ils semblent se chevaucher

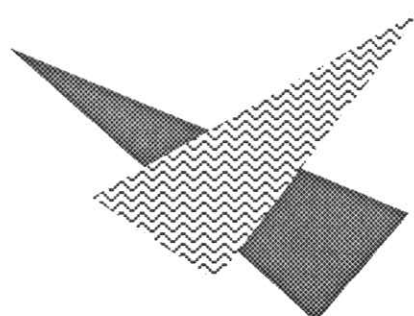
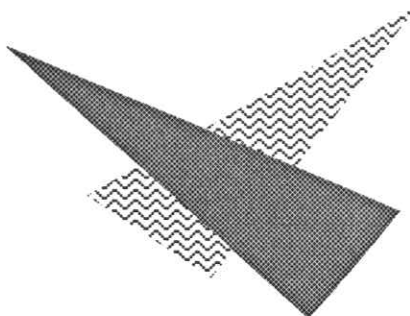


peuvent, si on les imagine dans l'espace, évoquer aussi bien ...

ceci ...

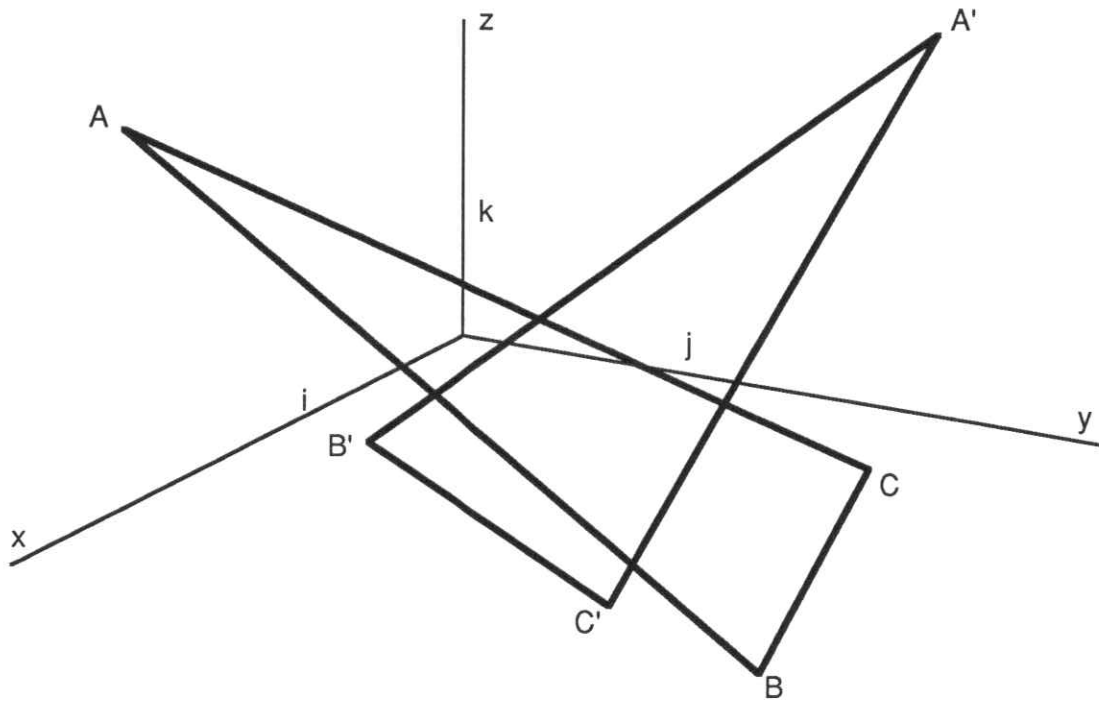
que ...

cela



et avec un peu d'imagination on pourrait y voir tout autre chose que des triangles.

Restons en, quant-à nous, aux triangles. Ajoutons des éléments qui évoquent un repère. Donnons des noms aux divers éléments de cette figure.

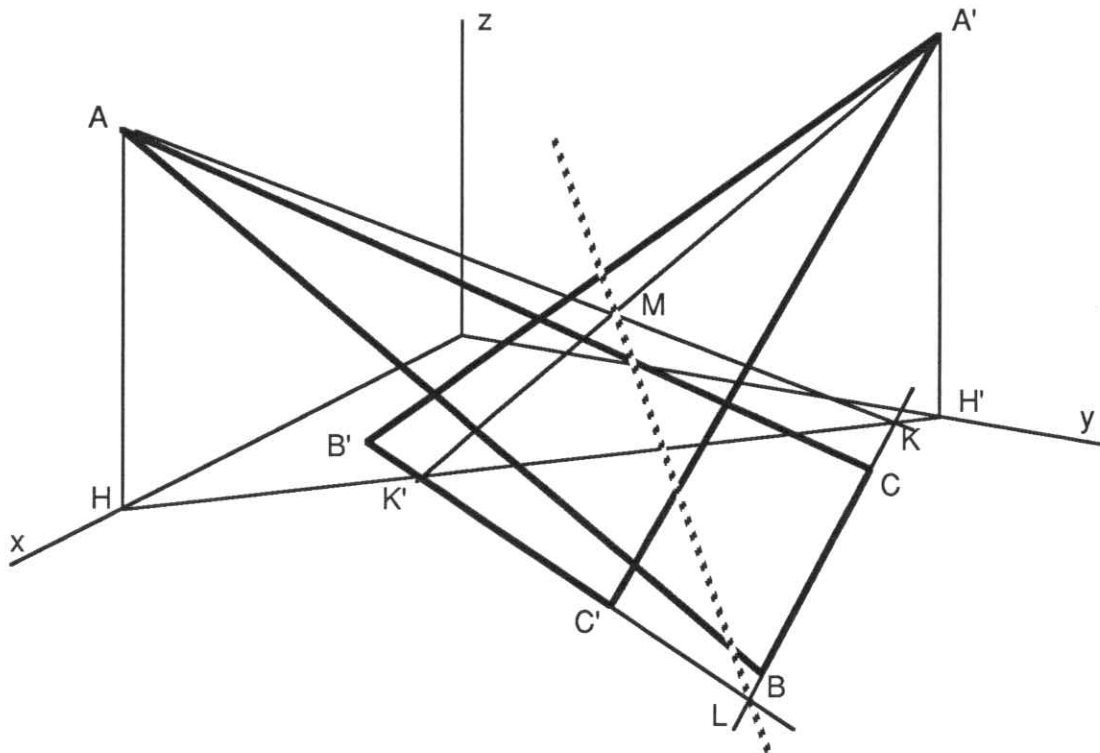


Cela ne nous fait pas avancer ... tant qu'on n'a pas précisé la position des sommets des triangles par rapport au repère.

On peut décider par exemple que

- les côtés BC et $B'C'$ sont dans le plan (xOy) ,
- le sommet A est dans le plan (xOz) ,
- le sommet A' est dans le plan (yOz) .

Alors tout est différent ...

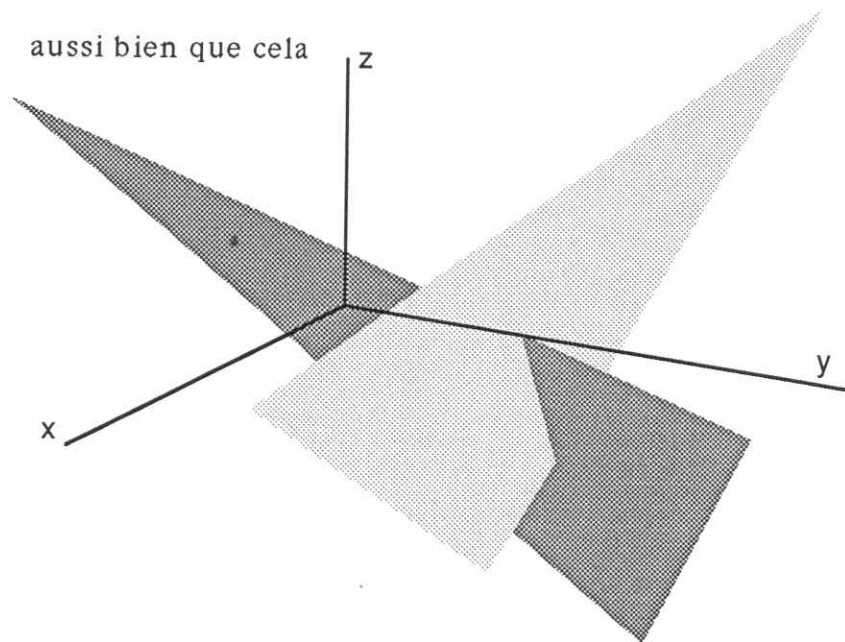
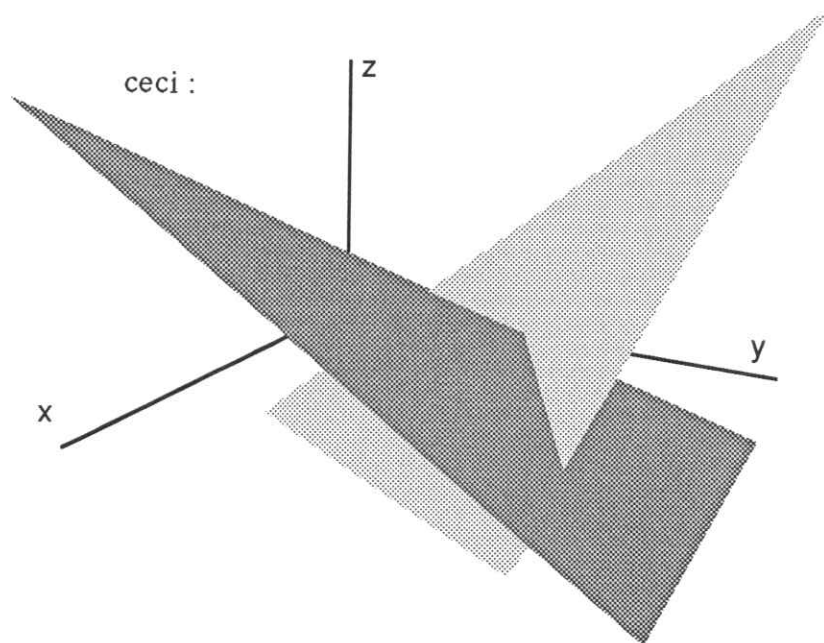


Les droites (BC) et $(B'C')$ étant dans un même plan se coupent en un point L .

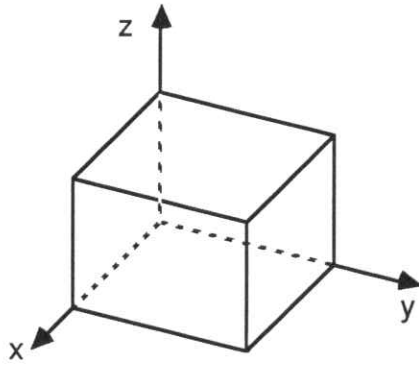
On peut construire un second point commun aux plans des deux triangles. On considère le plan parallèle à (Oz) qui contient les sommets A et A' . Il coupe (xOz) et (yOz) suivant des droites parallèles à (Oz) . Celles-ci rencontrent respectivement les axes (Ox) et (Oy) en H et H' . La droite (HH') est l'intersection du plan auxiliaire avec (xOy) . Les points K et K' où elle coupe les droites (AB) et $(A'B')$ sont situés dans un même plan que les sommets A et A' . Le point M intersection des droites (AK) et $(A'K')$ est donc un second point commun au plan des deux triangles.

Les plans (ABC) et $(A'B'C')$ se coupent suivant la droite (LM) .

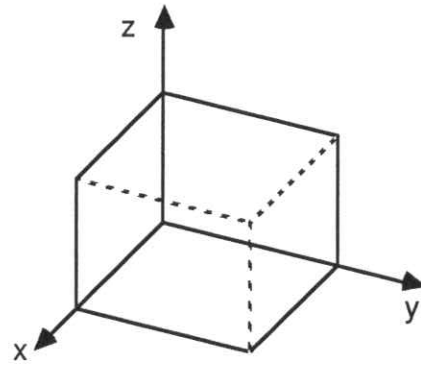
Un dernier effort pour, en suivant le contour des triangles, décider lequel cache l'autre et on peut obtenir ...



Tout dépend de l'orientation choisie pour le repère.



ici positive,
on obtient une vue plogéante
(le regard est dirigé vers le bas)



ici négative,
on obtient une vue plafonnante
(le regard est dirigé vers le haut)

Et le lecteur qui a eu la constance de nous suivre dans ce périple mérite bien qu'on lui offre un instant de détente.

un escalier, ils n'étaient jamais sur d'arriver en haut
et ceux qui descendaient plus bas
montaient et descendaient.
De même, quand ils les escaliers qui
quels étaient Ils ne savaient plus
Alors il arrivait souvent qu'avec un escalier
prévu pour la montée on réussisse à monter
sauf quand c'était
expressément écrit dessus.
avec un escalier qu'on ne serait descendu

**DANS CES CONDITIONS, LA LOGIQUE SHADOK
NE REPOSAIT PAS SUR DES BASES SOLIDES . . .**

Nous ne pouvons que conseiller de reprendre l'exemple précédent en le modifiant à sa guise par exemple :

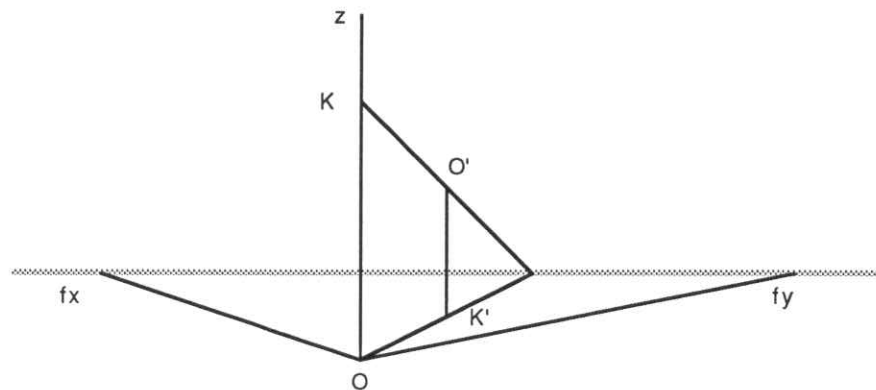
- en gardant la même figure de départ mais en changeant la position des sommets par rapport au repère,
- en travaillant sur d'autres polygones que des triangles,
- en coupant un parallélépipède, un prisme, une pyramide par un ou des

plans, puis de tels polyèdres entre eux.
etc...

Accessoirement

Le lecteur qui par plaisir ou par obligation pratique la perspective pourra aussi voir dans la figure de départ une image en perspective conique et définir le repère par la donnée

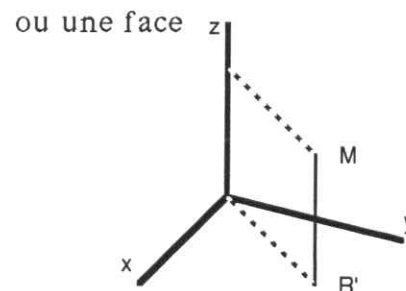
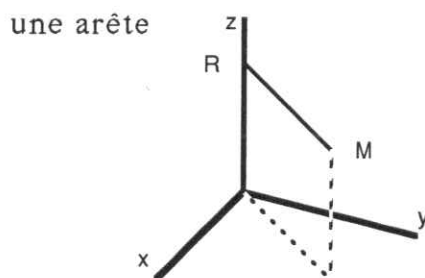
- des points de fuite des trois arêtes,
- de l'origine,
- du point de coordonnées (1,1,1) dont la position sur la fuyante sera précisée par la donnée de sa projection sur l'une des arêtes ou l'une des faces du repère.



Soit, en résumé, exactement (à des variantes près) ce qui peut être choisi arbitrairement en vue de reconstituer l'image du pavé associé au repère.

Conclusion : On retiendra tout particulièrement les deux idées suivantes.

- Dans une perspective parallèle un point du tableau est l'image d'une droite, mais on peut préciser la position d'un point par rapport à un repère en lui adjoignant l'image de sa projection sur :



du trièdre de référence.

■ La perspective parallèle conserve :

■ l'incidence c'est-à-dire les relations d'égalité, d'inclusion et de parallélisme entre les points droites et plans.

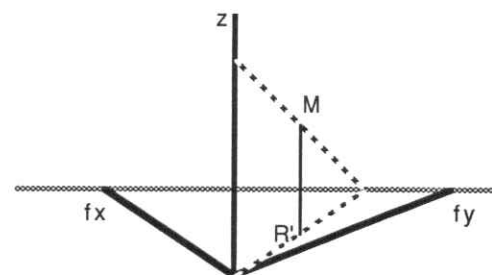
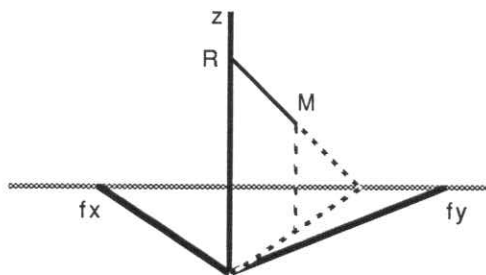
■ Les rapports de mesure algébriques entre segments à supports parallèles.

Ce qui se traduit : la perspective parallèle est une application affine.

On peut ajouter (ce qui restera une curiosité jusqu'à ce qu'on ait formalisé la géométrie projective) que, si on admet que toutes des droites parallèles ont en commun un point à l'infini et que les points à l'infini forment un plan, alors deux plans parallèles se coupent suivant une droite du plan de l'infini, une droite et un plan parallèles se coupent en un point à l'infini.

Dans ces conditions les perspectives, qu'elles soient parallèles ou centrales, auront le même statut et on retiendra que la perspective conserve l'incidence, au sens projectif du terme, c'est-à-dire les relations d'égalité et d'inclusion entre les points, droites, plans de l'espace projectif.

Pour localiser un point sur une fuyante on procède exactement comme dans le cas affine.



§2 Axonométrie.

Jusqu'à maintenant nous avons envisagé la représentation de l'espace uniquement à partir des propriétés d'incidence. Il est indispensable de savoir aussi prendre en compte les données métriques. Précisons notre préoccupation.

Position du problème : formuler des règles de mise en place des épures de perspective parallèle qui permettent la prise en compte et la restitution des informations de nature métrique. En d'autres termes, il s'agit maintenant de savoir comment réaliser des épures en perspective parallèle à une échelle donnée.

Dans ce contexte il sera commode de parler d'unité graphique plutôt que d'échelle. On la définit naturellement comme :

unité de longueur $\times$ échelle de la représentation ,
par exemple si l'unité de longueur est le mètre et si l'échelle est $1/50$ l'unité graphique sera 2 cm .

Convention : l'unité graphique sera notée u ou U .

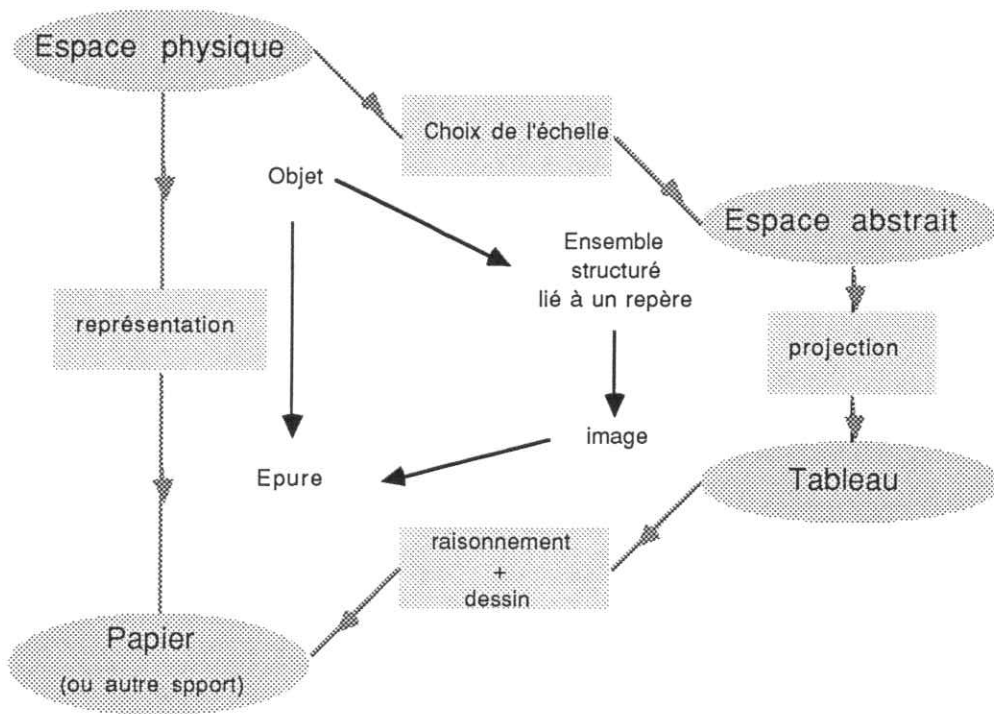
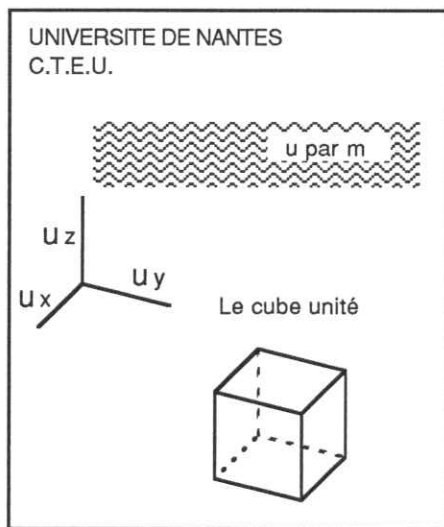
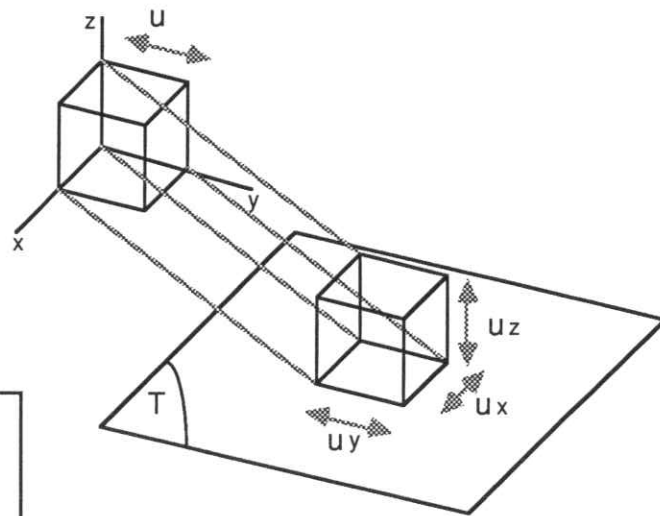
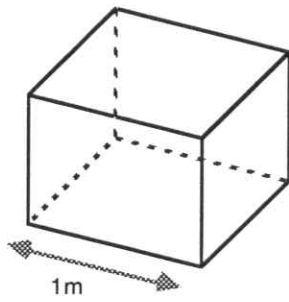
Avant d'aller plus loin il n'est peut-être pas inutile de consacrer quelques instants à analyser l'action qui consiste à représenter des objets de l'espace au moyen d'une perspective à une échelle donnée.

Le choix d'une unité graphique nous transporte de l'espace physique dans l'espace abstrait. L'objet à représenter est alors décomposé en un ensemble de sommets, de lignes droites ou courbes, de faces planes ou gauches etc, le tout étant structuré en liaison avec la donnée d'un repère

Dans la pratique le choix du repère n'est pas toujours explicité. En effet, il est en général fourni par l'objet lui-même (penser à la représentation d'un cube). On doit rester conscient que, ce choix existe toujours même s'il reste implicite ou s'il se fait d'instinct.

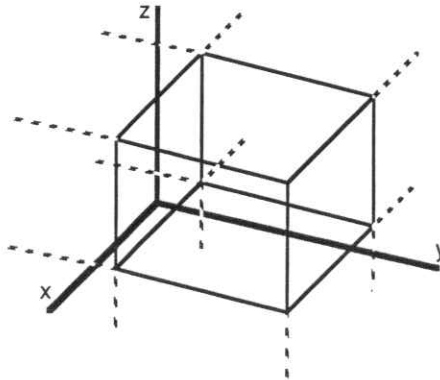
La réalisation de l'épure consiste à matérialiser l'image de l'objet sur le tableau. Cette image est, on le sait, entièrement déterminée par le choix de l'image du repère.

Le schéma de la page suivante entend préciser ces idées sans trop de discours superflus.



Dans l'autre sens La restitution des données métriques à partir de l'épure est possible si l'on connaît les unités graphiques relatives aux directions des trois axes du repère.

En effet pour deux points bien identifiés sur l'épure en perspective parallèle, il est alors possible de déterminer les mesures d'un pavé dont ces points sont deux sommets opposés.



On note :

$$u_x, u_y, u_z$$

les unités graphiques relatives aux directions des trois axes.

Définition : Si on connaît effectivement les rapports

$$\frac{u_x}{u}, \frac{u_y}{u}, \frac{u_z}{u}$$

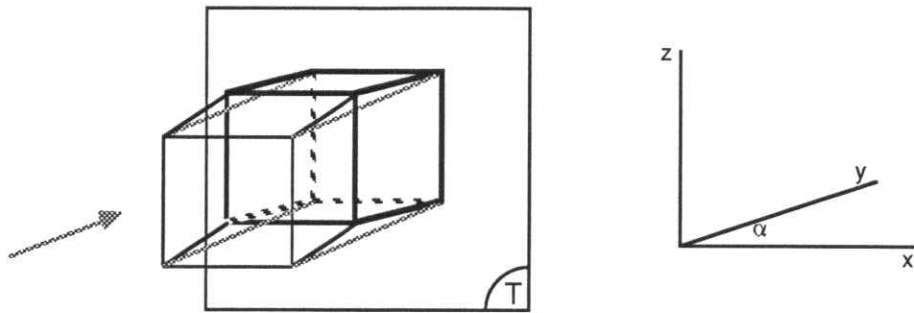
la perspective sera dite axonométrique on parle aussi d'axonométrie.

Expliciter les unités graphiques correspondant aux directions des trois axes est une chose possible mais laborieuse dans le cas général d'une perspective parallèle oblique. Il n'est pas utile de traiter ce problème dans sa généralité car, dans la pratique, on tourne la difficulté en utilisant soit

- des projections orthogonales,
- une des faces du repère pour tableau.

La première option fera l'objet de la section suivante. Pour la seconde des raisons de nature pratiques évidentes amènent à distinguer deux modes d'axonométries obliques.

- 1) La perspective cavalière où le tableau est vertical
(vue par un cavalier)



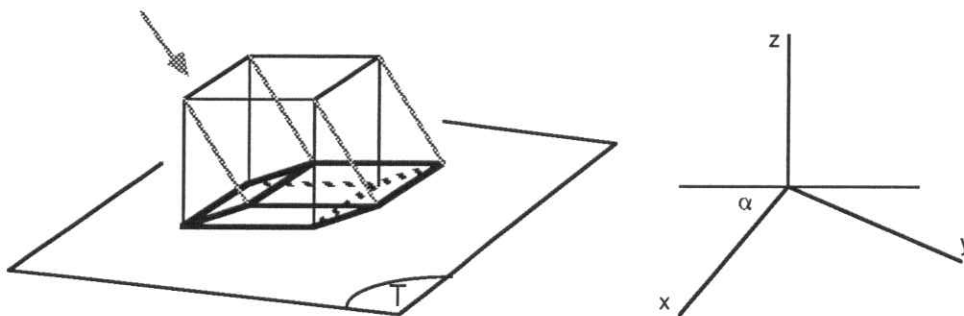
On aura donc :

$$\begin{aligned} u_x &= u_z = u, \\ u_y &\text{ arbitraire,} \\ \alpha &= \widehat{xOy} \text{ arbitraire.} \end{aligned}$$

Les choix usuels sont :

$$u_y = u/2, \quad \alpha = 30^\circ \text{ ou } 45^\circ.$$

- 2) La perspective dite militaire où le tableau est horizontal.



On aura donc :

$$\begin{aligned} u_x &= u_y = u, \\ u_z &\text{ arbitraire,} \\ \alpha &\text{ arbitraire.} \end{aligned}$$

Les choix usuels sont :

$$u_y = u/2, \quad \alpha = 30^\circ, 45^\circ \text{ ou } 60^\circ.$$

Nous n'avons pas à discuter ici les mérites comparés de ces modes de représentation, disons simplement que :

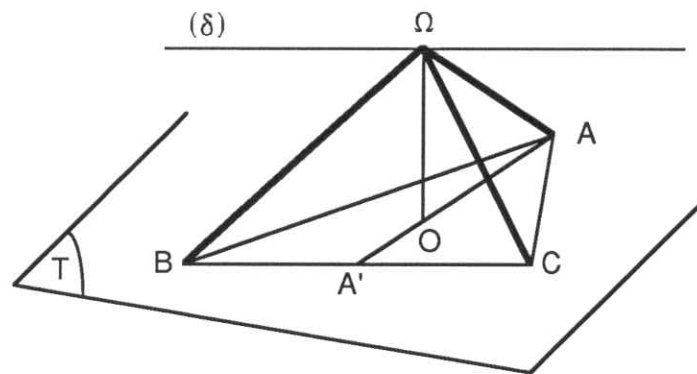
- tous les deux ont pour principal mérite la simplicité de leur principe, et la facilité de leur mise en oeuvre,
- la perspective cavalière restitue assez bien des objets de petite taille et peu compliqués.
- la perspective militaire est bien adaptée pour la représentation schématique de grands ensembles architecturaux.
- tous les deux sont totalement inadaptés à la représentation des corps ronds.

§3 Axonométrie orthogonale.

Le principe général de l'axonométrie orthogonale repose sur la proposition qui suit.

Lemme : Si les arêtes d'un trièdre trirectangle coupent un plan en trois points A, B et C, la projection orthogonale sur ce plan de son sommet est l'orthocentre du triangle ABC.

Démonstration : Soit T le plan, Ω le sommet du trièdre et O sa projection sur T.



On considère la droite δ parallèle à (BC) qui passe par Ω . Elle est dans le plan (ΩBC) qui est perpendiculaire à (ΩA). Il s'ensuit que (ΩA) et (δ) sont perpendiculaires.

La projection (AO) de (ΩA) est perpendiculaire à la projection de δ (cf. 8-2) qui est elle-même parallèle à BC.

La droite (OA) est donc une hauteur du triangle, et pour la même raison (OB), (OC) sont les deux autres hauteurs. ■

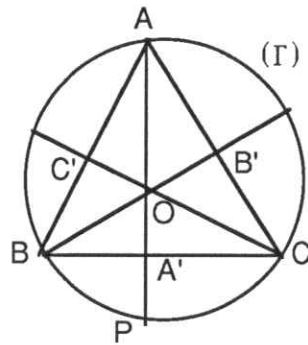
On remarquera de plus que dans les conditions ci-dessus le triangle $\Omega AA'$ est rectangle en Ω et que sa hauteur ΩO est telle que :

$$\Omega O^2 = OA \cdot OA'.$$

En outre, l'orthocentre du triangle ABC est situé à l'intérieur de celui-ci, ce triangle a donc ses trois angles aigus.

Réciproquement : Considérons un triangle ABC qui a ses trois angles aigus. On note :

- O son orthocentre,
- A'B'C' les pieds de ses hauteurs,
- son cercle circonscrit,
- P le point où (AA') recoupe Γ .



Nous savons que A' est le milieu de OP . La puissance de l'orthocentre par rapport à Γ s'exprime donc :

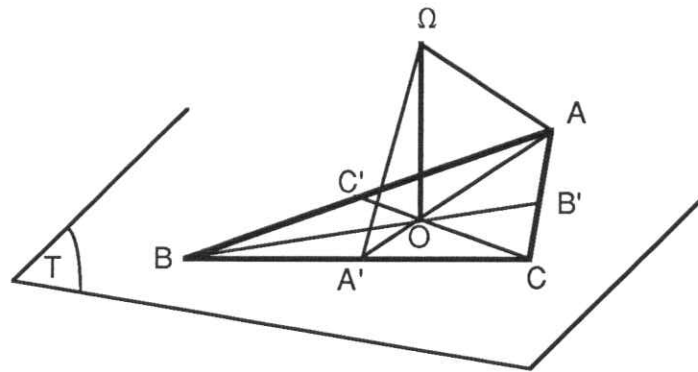
$$\Gamma(O) = \overline{OA} \cdot \overline{OP} = 2 \overline{OA} \cdot \overline{OA'}.$$

Il s'ensuit que :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = k^2.$$

Soit Ω un point de la perpendiculaire au plan de ABC en O tel que :

$$O\Omega = k.$$



Le triangle OAA' a sa hauteur $O\Omega$ telle que :

$$O\Omega^2 = OA \cdot OA',$$

ce triangle est donc rectangle en Ω . La droite (ΩA) est perpendiculaire à $(\Omega A')$.

Par ailleurs, la droite (BC) est perpendiculaire au plan $(\Omega AA')$ puisque l'angle $\Omega \hat{A} B$ se projette sur le plan (ABC) suivant l'angle droit $A \hat{A} B$.

La droite (ΩA) est donc orthogonale à deux droites du plan (ΩBC) , elle lui est perpendiculaire.

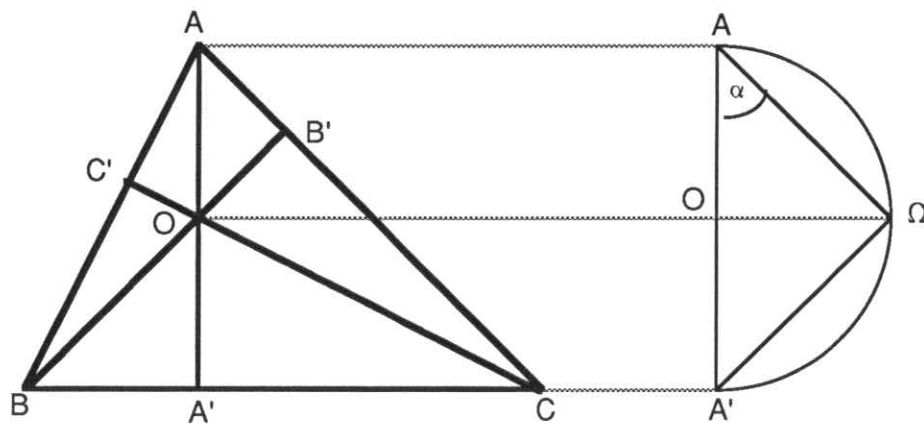
Il en va de même pour (ΩB) et (ΩC) qui sont respectivement perpendiculaires à (ΩAC) et (ΩAB) .

Le trièdre d'arêtes (ΩA) , (ΩB) , (ΩC) est trirectangle, on formule la propriété que nous venons de démontrer.

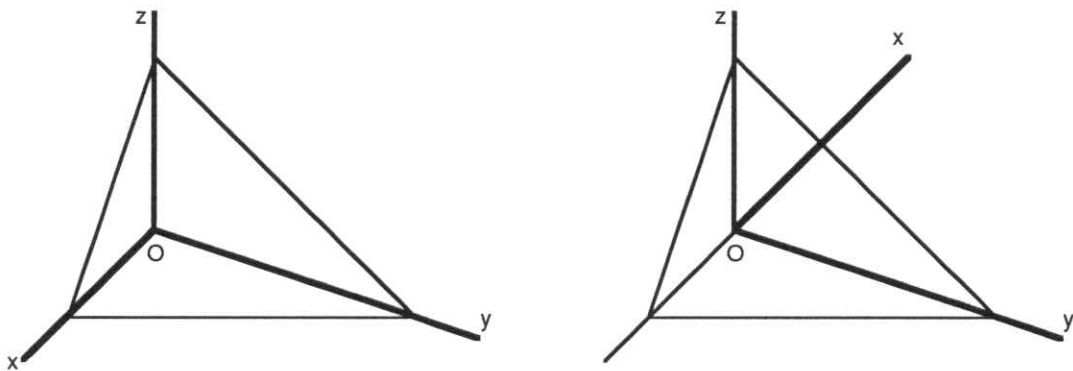
Théorème : Etant donné un triangle dont les angles sont aigus, il existe deux trièdres trirectangles symétriques par rapport à son plan dont les arêtes se projettent orthogonalement suivant ses hauteurs.

De plus, on peut construire sans difficultés les angles des arêtes avec le

plan du triangle.



Nous disposons désormais de tous les éléments permettant la mise en place d'une axonométrie orthogonale à partir de la donnée des images d'un trièdre trirectangle.



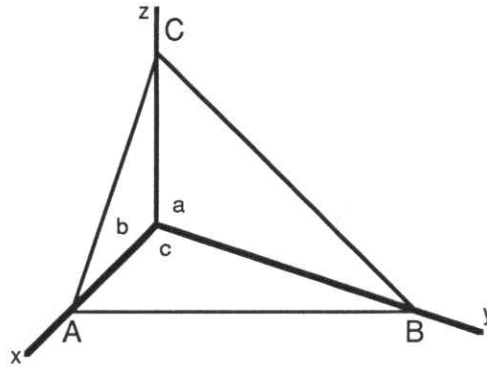
Si les droites $(x'x)$, $(y'y)$, $(z'z)$, sécantes en O, sont les images des arêtes d'un trièdre trirectangle, elles sont, nous l'avons vu, les hauteurs d'un triangle ayant trois angles aigus, dans ces conditions trois des six demi-droites d'extrémité O qu'elles déterminent forment trois angles obtus.

Montrons maintenant que cette condition est la seule restriction à l'arbitraire du choix des images des axes d'un repère orthonormé.

On considère trois droites du tableau $(x'x)$, $(y'y)$, $(z'z)$, concourantes en O et telles que les trois angles :

$$y\hat{O}z = a, \quad z\hat{O}x = b, \quad x\hat{O}y = c$$

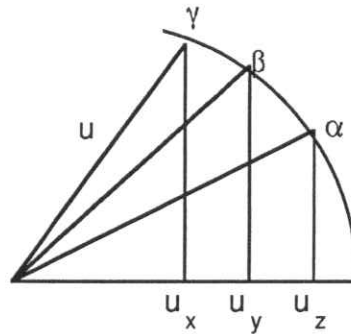
soient obtus ($\pi/2 < a, b, c < \pi$)



On choisit un point arbitraire A de (Ox) les perpendiculaires aux droites (Oz) et (Oy) issues de A coupent respectivement (Oy) et (Oz) en B et C. Le point O est ainsi l'orthocentre du triangle ABC et (x'x) est perpendiculaire à (BC).

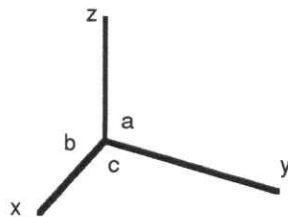
Les droites (BC) (CA) (AB) apparaissent comme étant les traces sur un plan parallèle au tableau des faces d'un trièdre trirectangle dont les arêtes se projettent suivant les droites données.

La construction évoquée plus haut donne les angles des trois axes avec le tableau et permet de déterminer les unités graphiques correspondantes.



* Calcul des unités graphiques.

On peut préférer obtenir les unités graphiques par le calcul. On part des données ci-dessus :



et on reprend les notations déjà utilisées.

S4 Les axonométries orthogonales normalisées.

Nous étudions maintenant les règles concernant les deux types d'axonométries orthogonales les plus couramment utilisées.

* La perspective isométrique.

On a une perspective isométrique quand les unités graphiques sur les trois axes sont égales :

$$U_x = U_y = U_z.$$

cette condition s'écrit encore :

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma.$$

Elle équivaut à :

$$\frac{\cos a}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos b}{\sin c \cdot \sin a} = \frac{\cos c}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Ce qui équivaut aussi à :

$$\sin 2a = \sin 2b = \sin 2c.$$

On a ainsi ou bien

$$2a = 2b \pmod{2\pi}$$

$$2a = \pi - 2b \pmod{2\pi}$$

ce qui entraîne comme $\pi/2 < a, b < \pi$

$$a = b \text{ ou bien } a = 3\pi/2 - b.$$

La deuxième égalité entraînerait :

$$c = 2\pi - (a+b) = \pi/2,$$

c'est exclu, on a donc nécessairement

$$a = b$$

et par suite :

$$a = b = c = 2\pi/3.$$

On obtient ainsi :

$$\cos^2 \alpha = (1/2) / (\sqrt{3}/2)^2 = 2/3$$

$$\cos \alpha = \sqrt{2/3}$$

$$U_x = U_y = U_z = \sqrt{2/3} U \approx 0,82 U$$

(où U désigne l'unité graphique de la représentation).

Remarque: On peut évidemment définir directement ce mode de représentation comme projection orthogonale de l'espace rapporté à un repère orthonormé sur un plan perpendiculaire à une diagonale du cube construit sur les sommets du repère.

On trouvera en annexe des schémas présentant des choix possibles du repère associé à un même cube unité.

* La perspective dimétrique.

On impose maintenant aux unités graphiques d'être proportionnelles à :

$$1/2, 1 \text{ et } 1.$$

C'est-à-dire qu'on doit avoir par exemple :

$$2U_x = U_y = U_z$$

ce qui équivaut à :

$$4 \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \gamma,$$

ou encore à :

$$4 \sin 2a = \sin 2b = \sin 2c.$$

La deuxième égalité se traduit comme au point précédent par :

$$b = c$$

On a alors

$$a = 2\pi - (b + c) = 2\pi - 2b,$$

$$\sin a = -\sin 2b$$

et par suite :

$$4 \sin 2a = \sin 2b = -\sin a,$$

$$8 \sin a \cos a = -\sin a,$$

$$\cos a = -1/8,$$

$$a \approx 97,18^\circ,$$

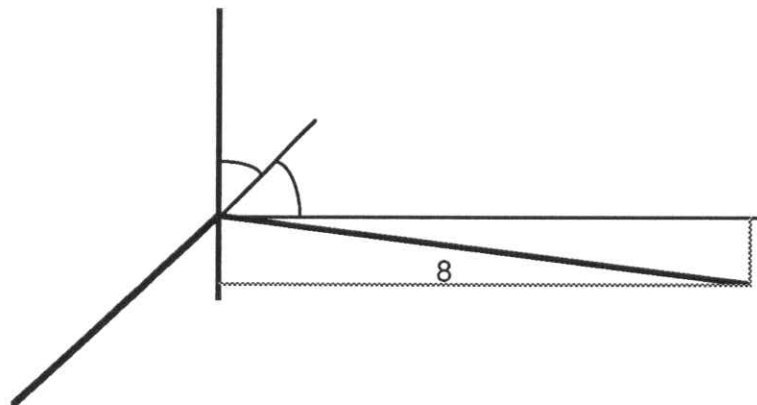
on a ainsi

$$b = c = \frac{1}{2}(360^\circ - a) \approx 131,41$$

$$a \approx 97,2^\circ \text{ et } b = c \approx 131,4^\circ.$$

La construction des axes est immédiate à partir des données

$$\cos a = -1/8, \quad b = c = \frac{1}{2}(2\pi - a).$$



La disposition des axes étant ainsi définie, calculons maintenant les coefficients de projection.

On a, d'une part :

$$\cos^2 \alpha = -\cos a / \sin b \cdot \sin c = -\cos a / \sin^2 b ,$$

d'autre part

$$- 1/8 = \cos a = \cos (2\pi - 2b) = \cos 2b = 1 - 2 \sin^2 b .$$

D'où il vient :

$$\sin^2 b = 9/16 .$$

On obtient ainsi

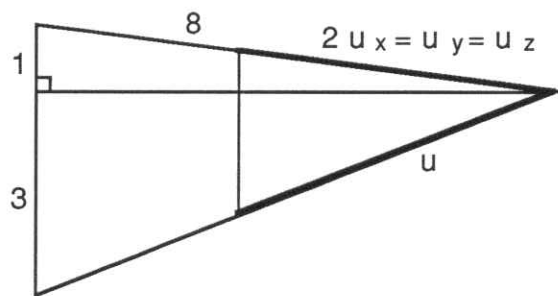
$$\cos^2 \alpha = (1/8)/(9/16) = 2/9 ,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{2}/3$$

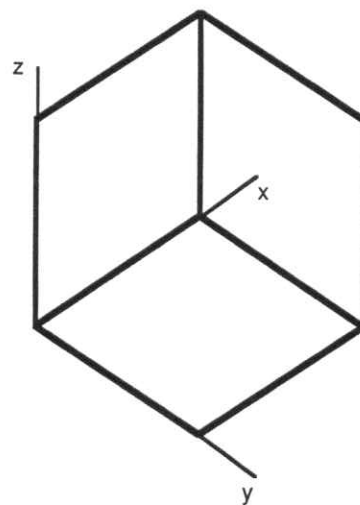
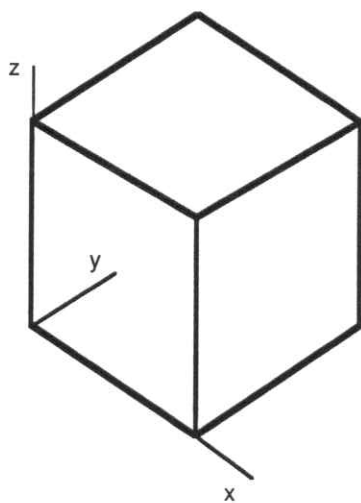
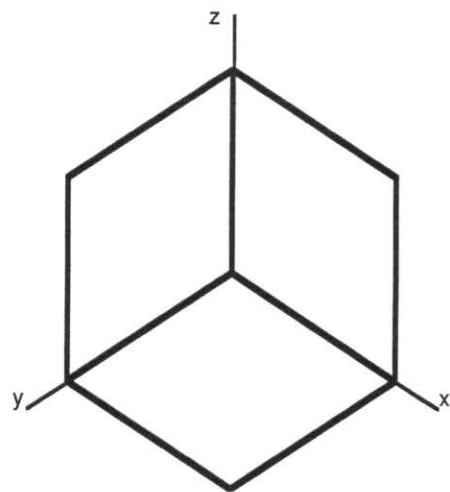
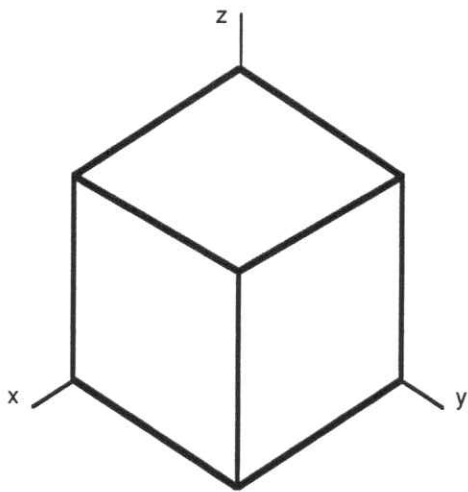
On a donc au bout du compte :

$$2 U_x = U_y = U_z = (2\sqrt{2}/3) U \approx 0,94 U .$$

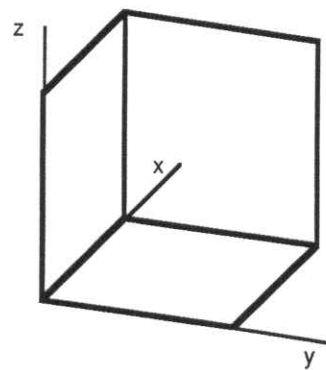
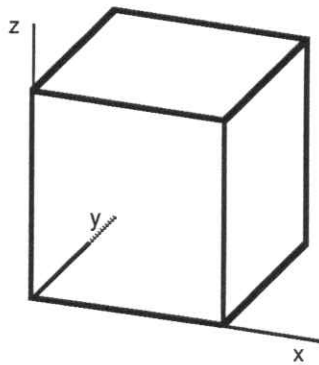
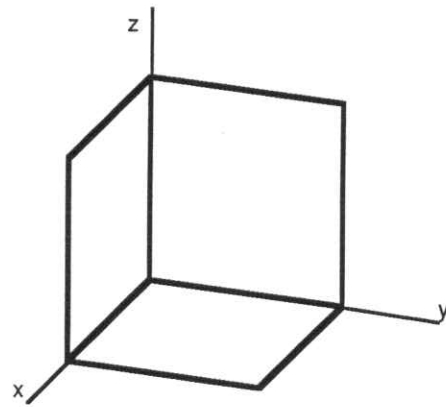
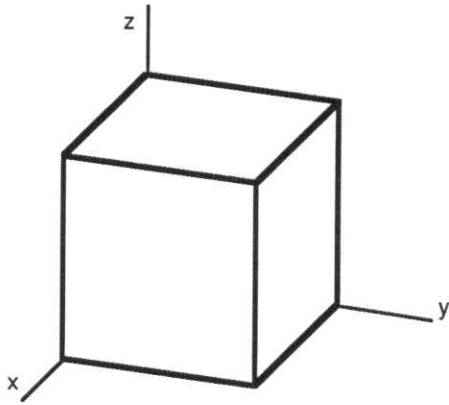
Chacun pourra s'assurer que le schéma suivant donne une construction facile à mettre en oeuvre de ces unités graphiques :



Perspective isométrique



Perspective dimétrique

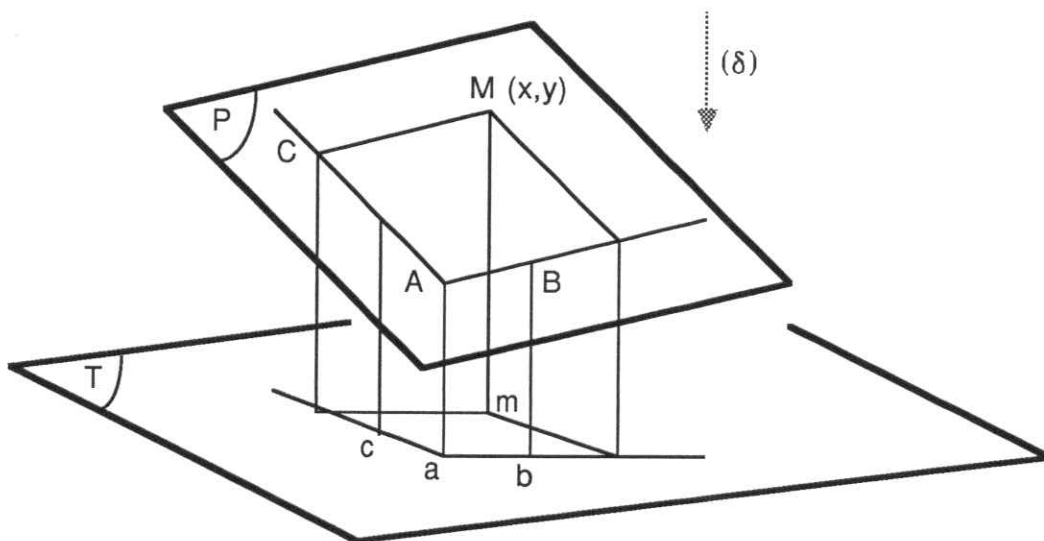


Appendice

Utilisation de l'affinité en perspective parallèle.

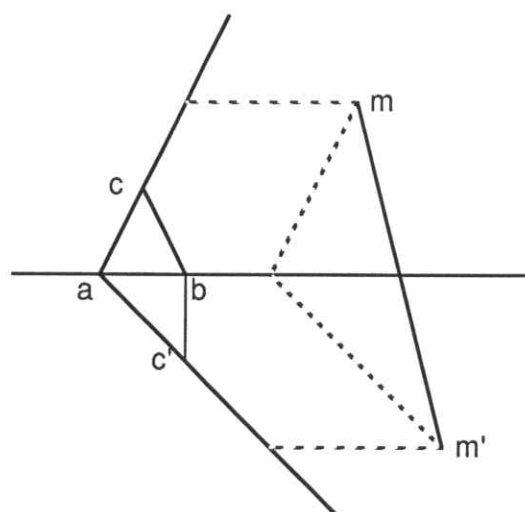
Lorsqu'on réalise l'épure d'un objet, on est très naturellement amené à considérer des sections par des plans judicieusement choisis. Ceci nous conduit à envisager la perspective parallèle comme une application entre des plans, application qui pourra être remplacée par une transformation du tableau lui-même comme on va le voir maintenant..

Soit p la restriction à un plan P de la projection sur le tableau (T) suivant la direction δ .



Si le plan P n'est pas parallèle à δ , l'image d'un repère (A, B, C) de P sera un repère (a, b, c) de T et tout point M de P aura les mêmes coordonnées dans le repère (A, B, C) que son image m dans le repère (a, b, c) .

Dans T on choisit un point c' , tel que les triangles ABC et abc' soient semblables.



On considère alors les deux applications :

$$\begin{aligned} s : P &\longrightarrow T \\ M &\rightsquigarrow m' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : T &\longrightarrow T \\ m' &\rightsquigarrow m \end{aligned}$$

telles que les trois points M ,

M , m et m'

aient respectivement les mêmes coordonnées dans les repères :

$$(A, B, C), (a, b, c) \text{ et } (a, b, c').$$

On a de façon évidente :

$$p = \varphi \circ s,$$

l'application s est une similitude entre les plans P et T , il nous reste à préciser la nature de la transformation φ .

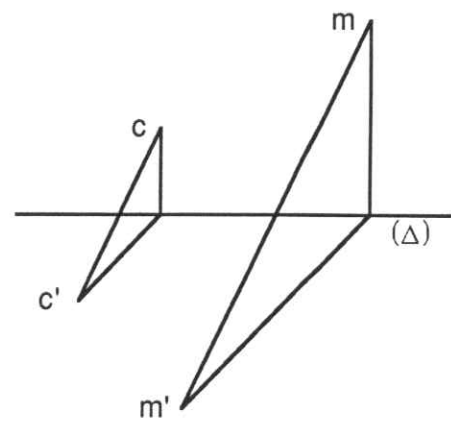
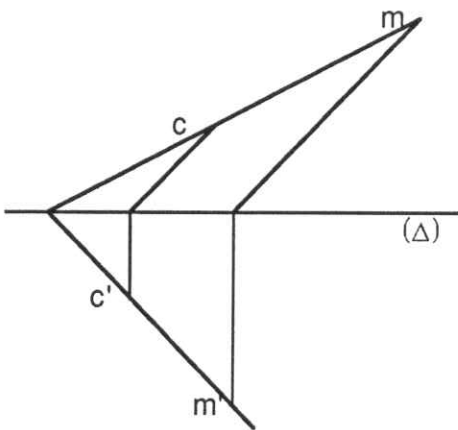
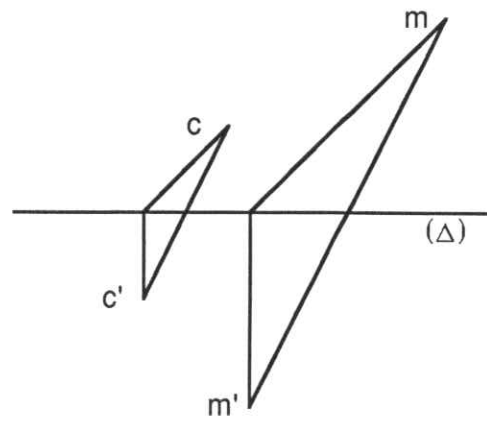
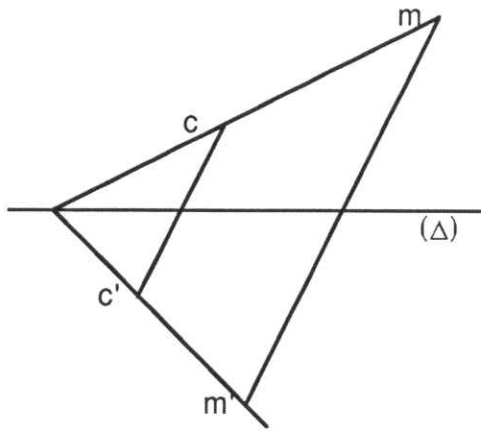
Il est clair d'emblée que φ

- est une bijection,
- laisse invariants les points de la droite (ab) ,
- conserve le barycentre.

Il s'ensuit presque immédiatement que

- l'image par φ de toute droite est une droite,
- φ respecte le parallélisme,
- la droite (mm') reste parallèle à (CC') .

De sorte que, pour construire l'image m d'un point quelconque m' , on n'a que l'embarras du choix. Nous laisserons à chacun le soin d'explicitier les arguments qui justifient les constructions suggérées par les schémas suivants où (Δ) désigne la droite (ab) et où les droites qui semblent parallèles le sont effectivement.



Vocabulaire : les applications telles que φ sont appelées affinités ou transvections, suivant que la direction (mm') coupe ou non la droite invariante par points. Cette dernière est appelée l'axe de l'affinité ou de la transvection.

On résume ce qui précède en un énoncé.

* Principes des figures semblables.

Soit (F) une figure plane et (f) son image en perspective parallèle sur le tableau.

Si (f') est une figure du tableau semblable à (F) dont deux points distincts coïncident avec leurs homologues dans (f) , alors la droite qui joint ces points est l'axe d'une affinité qui transforme (f') en (f) .

N.B. Les transvections ne sont pas mentionnées dans cet énoncé car, dans la pratique, on cherche à éviter la superposition entre la figure à construire (f) et la figure auxiliaire (f') . C'est pourquoi on les dispose en général de part et d'autre de l'axe choisi. Dans ces conditions on utilise une affinité.

N.B. : Pour qui a quelques connaissances sur les transformations, les considérations qui précèdent se résument à bien peu de choses.

En effet, si on reprend les notations utilisées au début. L'application S est l'une des deux similitudes qui transforment A en a et B en b .

L'application composée

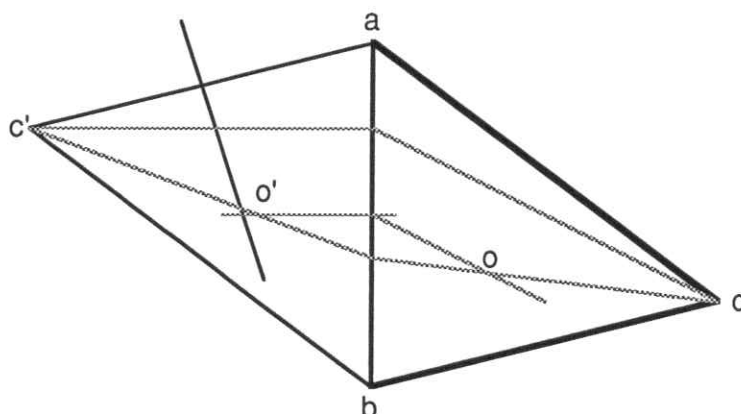
$$p \circ S^{-1} = \varphi$$

est une transformation affine qui laisse invariants les points a et b . C'est donc une affinité ou une transvection d'axe (ab) .

Appliquons maintenant ce principe dans des situations élémentaires.

Exemple 1 : On a sur le tableau trois points a, b, c . On sait, par ailleurs, que le triangle abc est l'image d'un triangle ABC dont les côtés sont connus.

Construire l'image du centre du cercle circonscrit à ABC .

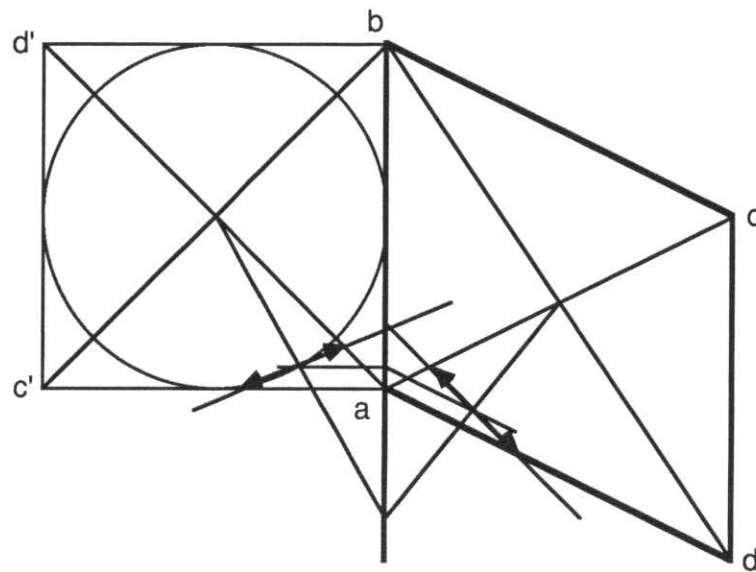


On construit un triangle abc' semblable à abc .

On construit le centre O' du cercle circonscrit à abc' .

L'affinité d'axe (ab) qui transforme c' en c , transforme O' en le point cherché.

Exemple 2 : Un parallélogramme $abcd$ du tableau est l'image d'un carré, construire l'épure du cercle inscrit dans celui-ci.



Remarque : Les affinités respectent la propriété pour une droite d'être tangente à une courbe, on peut donc obtenir, en même temps que l'image d'un point du cercle, celle de la tangente associée.

Exemple 3 : Un cercle est défini comme dans l'exemple précédent.

Construire sur l'épure ses points d'intersection avec une droite donnée δ .

On utilise l'image inverse δ' de δ par l'affinité déjà considérée.

