

ARPENTAGE ET MATHÉMATIQUES AU XVII^{ème}

Xavier LEFORT

I.U.T. Saint Nazaire

L'introduction des calculatrices de poche en particulier et de la micro-informatique en général a révolutionné les méthodes de calcul utilisées par les géomètres de notre époque. Leurs prédécesseurs, les "arpenteurs", puisque le géomètre était alors le mathématicien occupé par les problèmes de géométrie, ont connu un bouleversement similaire au XVII^{ème} siècle lorsque les logarithmes ont modifié, non seulement leurs procédés calculatoires, mais aussi leurs méthodes opératoires sur le terrain. Ceci constitue un bon exemple des liens étroits entre mathématiques théoriques et appliquées, entre Science et Technique, d'autant que Napier avait conçu ses logarithmes dans le but de simplifier les calculs de l'astronomie(1).

En s'appuyant essentiellement sur des textes de l'époque(2), il est possible de mettre en évidence les techniques utilisées par les arpenteurs sur le terrain et sur le papier, au début et à la fin du siècle, l'introduction des logarithmes ayant fait entre temps oeuvre novatrice(3).

- (1) Dans son premier ouvrage Mirifi Logarithmorum canonicis descriptio... NAPIER, au livre second, dédie explicitement ses logarithmes à l'astronomie, cf. Histoire des logarithmes ch NAUX Tome I p. 55.
- (2) Les ouvrages d'enseignement du XVII^{ème} et du XVIII^{ème} comportent une grande partie de "Mathématiques appliquées" à l'arpentage, à la marine, à la construction des forteresses... Cependant, il existe conjointement des ouvrages techniques, et ceci, dès la fin du XVI^{ème} ; leurs auteurs peuvent être des praticiens comme des théoriciens (cf. bibliographie).
- (3) La présente étude a été effectuée dans le cadre des travaux du groupe "Histoire des Mathématiques" de l'I.R.E.M. de Nantes, section du Mans, début 1985. Elle a également fait l'objet d'un atelier de l'Université d'été de Toulouse (juillet 1986).

I. L'arpenteur de 1600

Exception faite de l'astronomie, les méthodes mathématiques appliquées à la technique de la fin du XVIème siècle sont très rudimentaires. Le domaine de la finance, celui des marchands utilisent bien sûr l'arithmétique de base, mais les algorithmes opératoires laissent à désirer quant à leur simplicité, puisque la notation décimale(1) des nombres rationnels n'est pas en place. Comme il n'y a pas de véritable industrie, il existe encore moins de bureaux d'études. Seuls avec les concepteurs des vaisseaux de marine, l'architecte et l'arpenteur se livrent aux calculs préalables et à l'établissement de plans.

Naturellement ces "théoriciens" du bâtiment utilisent la géométrie, euclidienne avec ça et là des références explicites à l'oeuvre d'Euclide(2), cependant on ne trouve aucune trace de trigonométrie et le principal résultat théorique utilisé est le théorème dit de Thalès. Ni les considérations angulaires, ni le "théorème de Pythagore" ne sont employés, compte-tenu des difficultés calculatoires qu'entraînent les fonctions trigonométriques et l'extraction des racines carrées. Cependant, les tables des sinus, les algorithmes de calcul de racines carrées, sont connus, mais l'écriture et l'utilisation de résultats établis sous forme fractionnaire rendent tables et méthodes difficiles à utiliser.

L'activité de l'arpenteur de 1600, comme celle de l'actuel géomètre expert est double : donner une image théorique de l'existant (levé de plan) pour permettre le travail théorique, puis implanter sur le terrain. On fait d'ailleurs remonter l'origine de cette profession aux égyptiens, ayant en charge de redistribuer les terres de la vallée du Nil, après leur inondation. Le travail est donc architectural, rural(3) et enfin géographique, dans la mesure où on demandera aux arpenteurs d'établir les cartes de région de plus en plus étendues.

Si les méthodes de calculs laissent à désirer, les appareils de mesure ne sont pas non plus de grande précision. Cette précision

(1) La Disme de Simon STEVIN date de 1585.

(2) En particulier Usage de l'Astrolabe JACQUINOT 1598.

(3) Un aspect non négligeable de l'activité de l'arpenteur était (est toujours ?) la répartition des terres dans le cadre des héritages.

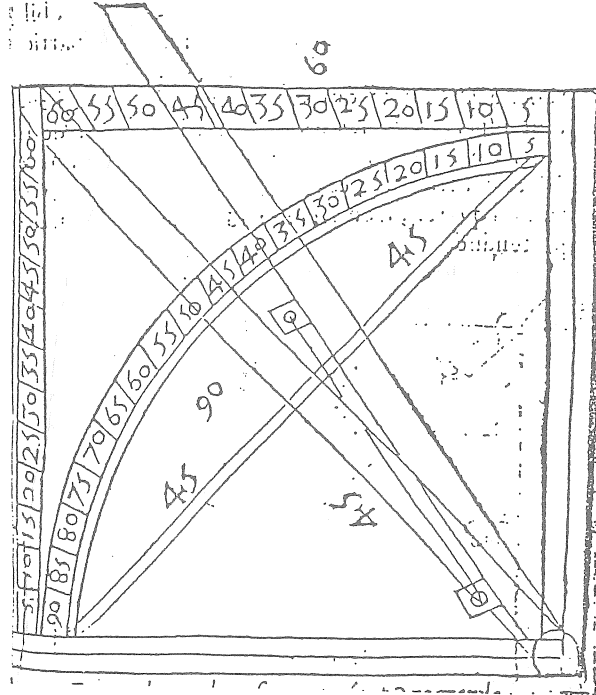
n'est pas un souci majeur, les techniques de construction ne la rendant pas nécessaire à cette époque. La mesure de longueur est faite au moyen de cordes ou de chaînes étalonnées, le problème étant bien sûr celui des unités. Puisque les angles ne sont pas mesurés, les arpenteurs utilisent un carré géométrique, décrit par exemple par Jean Abraham dit "Launay" dans son Arithmétique arpentage universel de 1624 :

L'un des costez de/dits triangles doit estre diuisé en 60 parties égales; afin de cognoistre les parties sur lesquelles la règle mobile d'iceluy quarré sera arrestee.

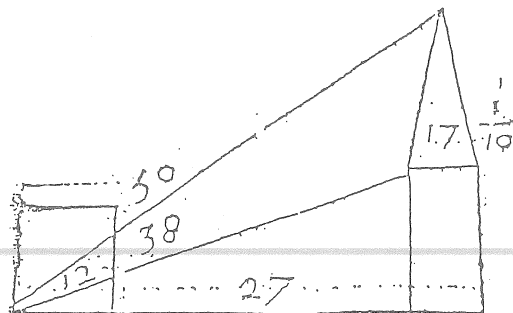
La règle mobile doit estre de mesme longueur que la règle diagonelle, l'un des bouts d'icelle sera en forme ronde plate, qui sera percee en l'endroit du milieu & centre d'iceluy rond pour y passer vne vis qui passera aussi par le trauers de l'espaisseur du dit quarré en l'angle où est joint l'un des bouts de la ligne diagonelle, afin de ferrer plus aisément ladite règle mobile; la haussant ou baissant pour s'en seruir, & faut que la règle mobile soit tres droite; & qu'il y ait sur le long d'icelle deux pinulles ou tablettes percées; chacune d'un petit pertuis de la grosseur d'une teste d'espingle; dans lesquelles tablettes par le dedans d'icelles y aura un canal percé au trauers de la grosseur d'un petit poids correspondant aux pertuis de l'une & l'autre desdites pinulles, afin de mirer par le dedans d'iceluy.

Aussi sur le dos d'iceluy quarré y aura vne autre pertuis en l'endroit du milieu de la ligne diagonelle, pour y entrer vne cheuille de la grosseur d'un petit poinçon, qui seruira pour tenir ledit quarré à plomb sur un baston de la hauteur du mesureur, aucuns y ont adiousté un quart de cercle composé de 90 degrez pour scauoir l'eualuation du Soleil, & faut aussi qu'à l'un des costez du quarré y ait un plomb battant pour tenir ledit quarré à equarré droite lors que l'on s'en seruira.

Dans lequel y aura vne regle de la largeur de demy doigt, diuisee en 90 parties égales 45. à dextre & 45. à senestre, au moyen de laquelle est fait vn triangle dans ledit quarré, pour s'en seruir comme cy apres est déclaré.



Suit une série de calculs, à titre d'exemple, épuisant toutes les possibilités. Il est possible d'en avoir une idée simple, avec le second problème :



"Par la même raison ci-dessus déclarée, l'on peut savoir la hauteur d'une tour ou d'autre édifice assis sur une autre hauteur. L'on veut savoir la hauteur de l'aiguille d'un clocher à commencer depuis son siège où se commence la rondeur de celle-ci, jusqu'en haut (...) de l'aiguille. Pour se faire, il faut, premièrement, viser le siège de l'aiguille, et noter les parties touchées, fait 12. (Il) faut sans bouger ni remuer le carré de son plomb hausser la règle, et viser la hauteur de la croix, et aussi noter les parties touchées, fait 50, desquelles la différence à 12 fait 38 de hauteur, que donnent les 60 parties du carré, à la même raison que donneront les 27 qui sont entre le pied du clocher, à l'endroit de la croix, et le mesureur, fait 17 1/10...", c'est à dire :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{38}{60} \\ \frac{17 \frac{1}{10}}{27} \end{array} \right)$$

Il existe cependant des instruments plus élaborés, tels l'astrolabe ; cet instrument sert à décrire et déterminer l'état du ciel, la position des planètes et des étoiles. Il semble qu'il était connu des grecs, mais on doit sa diffusion au monde islamique. En l'occurrence, il ne sera utilisé que pour estimer des proportions et non des angles. De nombreux ouvrages de la fin du XVIème siècle décrivent cet appareil et en expliquent l'usage, ainsi le Traité de l'astrolabe (Des Bordes 1560). On pourra voir que l'utilisation en demeure encore moins précise que celle du carré géométrique :

MOYEN D'ENTENDRE ET DE PRATIQUER LA PLANIMETRIE (...) PAR L'ASTROLABE

"(...) Quand donc vous voudrez mesurer quelque plaine ou champ selon sa longueur, supposez que (vous) en voyez le bout, soit accessible ou non, avec l'astrolabe : premièrement disposez et préparez une verge à mesurer qui soit droite et justement de la grandeur de votre stature depuis votre oeil (jusqu') en bas : laquelle doit être divisée par certaines mesures égales, à votre plaisir, qui vous soient connues, bien que à mon jugement il la vaudrait mieux diviser en douze parties égales. Et ayant accourée votre verge arrêtez-vous à l'un des bouts de la plaine que (vous) voulez mesurer selon sa longueur. Et après avoir élevé et disposé votre astrolabe, haussez ou abaissez l'alidade jusqu'à ce que (vous) voyez l'autre bout de la plaine, par les pertuis des deux pinnules. Après cela comptez diligemment les points, tranchés par la ligne de foi, lesquels communément sont points d'ombre verse

(...). Divisez donc douze par les points tranchés que vous aurez trouvés, et le nombre quotient vous montrera de quantième portion ~~est votre verge au regard de la longueur de la plaine que vous voulez~~ mesurer.

Car si la ligne de foi tombe précisément et justement sur la ligne de l'ombre moyenne, c'est à dire sur le diamètre du quadrant : la longueur de la plaine sera égale à la verge du mesureur.

Mais si la ligne de foi choit sur l'onzième point de l'ombre verse, la longueur de la verge une fois avec l'onzième partie d'icelle, sera la longueur de la plaine.

Et si la ligne de foi choit sur le dixième point de l'ombre renversée : la longueur de la verge prise une fois, avec deux dixièmes parties de cette verge, sera la largeur de l'espace de la plaine. (...) Et s'il advient que la ligne de foi tombe sur cinq points d'ombre verse : divisez douze par cinq et vous aurez deux au quotient, avec deux quintes. Par quoi, si vous prenez deux fois la longueur de votre verge et deux cinquièmes parties de celle-ci, ce sera la mesure de la longitude que (vous) cherchez.

(...) Mais si la ligne de foi tombe sur deux points d'ombre verse, divisez douze par deux vous aurez six au quotient. Par quoi l'espace de la plaine est six fois plus grand que la verge.

Finalement, si la ligne choit sur un point parceque l'unité ne se divise pas, retenez que votre plaine sera douze fois plus grande que la verge (...)"

Les mesures étant faites, arrive l'obstacle des calculs. Le texte suivant, sur un cas très simple, montre la difficulté qu'il y a, à cette époque, à maîtriser les calculs, en particulier la division, dont Barrême(1) écrivait "que de dix personnes qui (la) sçavent... il s'en trouvera pas six qui la sçavent bien". On remarquera au passage l'approximation de π par $3 \frac{1}{7}$.

PROPOSITION ET DEMANDE SUR LA VIDANGE D'UN PUISET EN FORME RONDE ET
CYLINDRIQUE.

(Guibert Traitté familier pour toiser... 1619)

~~"Un quidam a entrepris de creuser et faire la vidange de terre
d'un puiset en forme de cylindre ayant 5 pieds de diamètre en son~~

(1) BARREME Le libre pratique a toutes sortes de conditions (1671).

ouverture et 5 toises de profondeur. L'on demande quantes toises cubes et massives il y a en ladite vidange (...).

Pour soudre cette proposition il faut en premier lieu chercher la circonférence dudit puiset par la reigle du cercle, laquelle circonférence se trouvera par le moyen qui sensuit, à savoir en multipliant ledit diamètre par $3 \frac{1}{7}$, en viendra $15 \frac{1}{7}$ pieds pour la dite circonférence, ayant laquelle convient trouver la superficie du cercle ou ouverture dudit puiset, qui se trouvera par le moyen ci-dessous déclaré, c'est à savoir en multipliant la circonférence par le diamètre et du produit en prendre le quart, lequel quart (...) montre $19 \frac{9}{14}$ pieds qu'il faut multiplier par la profondeur (30 pieds) valeur des 5 toises, en vient $589 \frac{2}{7}$ pieds cubes, qu'il faut diviser par 216 (que la toise contient de pieds cubes) en vient au quotient 2 toises $\frac{2}{3}$ de toises $13 \frac{4}{9}$ pieds cubes comme la démontre le calcul cy dessous :

5 pieds diamètre $\frac{3 \frac{1}{7}}{15 \frac{5}{7}}$ pieds circonférence	$\begin{array}{r} 15 \frac{5}{7} \\ \times 3 \frac{1}{7} \\ \hline 75 \\ 34 \frac{4}{7} \\ \hline 78 \frac{4}{7} \end{array}$	$\frac{78 \frac{4}{7}}{44}$ $19 \frac{9}{14}$ Superficie du cercle ou ouverture du puiset (1)
$\frac{19 \frac{9}{14}}{57}$ $589 \frac{4}{7}$ pieds cubes	$\begin{array}{r} 5 \\ \times 16 \frac{4}{7} \\ \hline 80 \\ 216 \\ \hline 589 \frac{4}{7} \end{array}$	2 toises $157 \frac{4}{9}$ pieds cubes pour le contenu dudit puiset, lequel (...) valent $\frac{2}{3}$ de toises cubes $13 \frac{4}{9}$ pieds cubes.

Tout ceci ne va pas sans erreur de calcul, évidemment, mais aussi sans faute de méthode et de raisonnement. Si les premières peuvent être évitées par le recours aux tables(2), les secondes donnent quelquefois des résultats assez éloignés de ce qu'ils devraient être.

(1) Pour diviser $78 \frac{4}{7}$ par 4, il faudra donc placer le diviseur sous le dividende : $78 \frac{4}{7}$, on déterminera alors le premier chiffre du quotient : 1. Le reste sera placé au-dessus et les chiffres utilisés du diviseur comme du dividende seront barrés $78 \frac{4}{7}$. Puis on recommencera, en considérant un nouveau dividende $38 \frac{4}{7}$.

(2) Ainsi celles de BARREME (ouvrage cité).

Surtout, la multiplicité des unités complique encore la tâche de l'arpenteur, l'unité de même nom variant suivant la province et même le village concerné. Là encore les tables sont d'un grand secours, mais les pièges sont évidents : ainsi la toise "qui est ordinairement et presque partout de six pieds de roy ; car elle change de longueur aussi bien que le pied en quelques endroits du royaume selon la différence des coutumes et les différentes juridictions et seigneureries". Cependant, peut avant, l'auteur de cet extrait, Ozanam(1), cite le pied de roy "qui est comme le fondement de toutes les autres (mesures), ayant été ainsi appelé parce qu'il est partout le royaume d'une même longueur déterminée par l'autorité du roy"(2).

Mesures imprécises, calculs complexes, unités multiples ne facilitaient certes pas la tâche des géomètres de 1600. Sans doute ne leur demandait-on pas non plus une efficience comparable à celle d'aujourd'hui. Cependant le siècle verra s'améliorer la qualité des appareils utilisés dans la construction, et l'avènement de nouvelles méthodes théoriques, telles celles engendrées par les logarithmes.

—

(1) OZANAM fut dans la seconde moitié du XVIIème un vulgarisateur de grande renommée. Son dictionnaire mathématique de 1691 est un ouvrage reconnu.

(2) Le pied fait 12 pouces, le pouce 12 lignes.

II. Les logarithmes de Napier

Il n'est pas question d'exposer ici le pourquoi et le comment de l'invention des logarithmes(1), mais de déceler l'apport des mathématiques appliquées dans leur conception et surtout le bénéfice qu'elles en ont tirées. Nous avons pu voir les difficultés inhérentes aux techniques de calcul de l'époque ; par intérêt tant pour les mathématiques que pour la population écossaise dont il était le seigneur, John Napier s'est attaché à mettre au point méthodes et techniques scientifiques simplifiant les opérations habituelles. On lui doit ainsi la conception d'un système de bâtons destiné à effectuer la multiplication. Mais, plus encore, c'est l'astronomie et ses calculs trigonométriques qui ont été au départ même des travaux de Napier.

Si les découvertes de Kepler ont aujourd'hui une grande notoriété, on oublie les difficultés immenses qu'il a rencontrées dans la conduite de ses calculs. Après avoir travaillé avec lui, un suisse allemand, Bürgi, met au point en 1620(2) un système de logarithmes très proche de celui de Napier. De toute façon, le principe même de leur construction, c'est-à-dire la relation entre la suite géométrique des puissances d'un nombre et la suite arithmétique des exposants se trouve chez Archimède(3), donc appartient vraisemblablement au savoir mathématique de 1600. Cependant, jusqu'à cette époque, les calculs ne semblent pas avoir eu besoin de cet outil puissant.

Le premier ouvrage de Napier date de 1614, son titre débute par Mirifi logarithmorum canonis descriptio...(4). Il contient la théorie conceptuelle des logarithmes, et décrit les tables. Dans un second temps, et on note la préoccupation issue des calculs astrono-

- (1) Il existe beaucoup d'ouvrages traitant partiellement ou globalement de ce sujet, en particulier Histoire des logarithmes de Ch NAUX, ouvrage cité.
- (2) BURGI est né dans le canton de Saint Gallen, horloger, il travaille en Allemagne à partir de 1580 (cf. Histoire des logarithmes Ch NAUX, ouvrage cité.
- (3) Dans l'Arenaire, ARCHIMEDE remarque que si a^n et a^m occupent les rangs n et m de la première suite, leur produit occupe le rang $n+m$.
- (4) Mirifi logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus, in utraque trigonometria, jacillimi et espedissimi explicatio soit Description des merveilleuses règles des logarithmes et leur usage dans l'une et l'autre trigonométrie, aussi bien que dans tout calcul mathématique, avec l'explication la plus large, la plus facile, la plus dégagée des complications.

miques, donc trigonométriques, l'auteur traite de l'adaptation aux sinus des angles. Le second ouvrage date de 1619(1). Il est posthume, ~~Napier étant décédé en 1617, et répond à la volonté de divulguer~~ la méthode qui lui a permis de dresser les tables. On notera au passage que ce livre commence à utiliser la notation décimale des rationnels en lieu et place de la notation fractionnaire.

C'est surtout à Briggs(2) que Napier doit sa notoriété. Si le second n'était en fait qu'un noble de province, amateur de mathématiques, le premier était universitaire de renom. Dès la publication du premier des deux "Mirifico..." le contact s'est établi entre les deux hommes, et c'est Briggs qui publiera en 1624(3) des tables de logarithmes de 1 à 20000, précédées d'un traité explicatif. Elles seront reprises et complétées dans l'année par Ulacq, et publiées cette fois en français(4). A partir de ce moment, elles se répandront assez vite dans la communauté scientifique européenne.

Cependant, leur utilisation s'est heurtée à un obstacle aujourd'hui surprenant. Sans doute le premier frein a-t-il été celui de la lenteur des communications de l'époque, mais, de plus, la rigidité de la conception des mathématiques a en fait jeté sur les logarithmes de Napier un soupçon "d'impureté". En particulier, certains astronomes, dont on aurait pu imaginer qu'ils soient enthousiastes, ont considéré cette nouveauté avec plus que l'indifférence : les définitions théoriques de Napier s'appuyaient en fait sur la comparaison de deux mouvements, un mouvement uniforme et un mouvement accéléré, en dehors de toute tradition euclidienne.

Après une période de doute, Kepler prit ostensiblement le parti d'utiliser les logarithmes, son autorité et son ouvrage de 1624 Chiliades logarithmorum contribuent alors à donner plus d'ampleur à l'expansion de l'oeuvre de Napier.

Un autre obstacle, inévitable et bien connu, a pourtant ralenti l'utilisation concrète des logarithmes. Si le monde scientifique peut être rapidement accessible à la nouveauté, le monde des techniques a ses habitudes et la pesanteur de ses traditions. Ce n'est que

(1) Mirifi logarithmorum canonis constructio...

(2) Briggs (1556-1630)

(3) Sous le titre Arithmetica logarithmetica

(4) Adrien ULACQ était éditeur à Goudeau, ville flamande.

petit à petit que se trouveront dans les ouvrages techniques la description des nouvelles méthodes de calcul. On ne trouvera pas avant 1650 des exposés, tel celui-ci de Philippe de Lahire, dans l'Ecole des arpenteurs (1679)(1) :

"Soit dans le triangle ABC l'angle ABC donné de 85 degrez et la cote AC opposé à cet angle soit aussi donné de 345 toises ; enfin soit donné l'angle BAC de 30 degrez, on demande la cote BC. Ayant disposé les termes de cette proportion dans l'ordre qui leur convient, comme on voit ici,

l'angle ABC donné 85 degrez
la cote AC donné 345 toises
l'angle BAC donné 30 degrez
la cote demandée ou cherchée BC

Soit donc

le nombre logarithme de 345	2 53782
le sinus logarithme de 30 degrez	9 69897
Somme des logarithmes des termes	
du milieu de la règle	12 23679
Sinus logarithme de 85 degrez	9 99834
Reste logarithmique	2 23845

qu'il faut chercher dans les logarithmes des nombres naturels, et l'on trouve qu'il répond au nombre naturel 173 et $\frac{3}{20}$ a peu près; on aura donc pour ce coste cherché 173 toises et $\frac{3}{20}$ de toise, qui valent a peu près 10 pouces".

On remarquera que le calcul revêt une forme très moderne, et qui restera longtemps usitée. Cependant, la notation décimale n'est utilisée que pour les logarithmes et on retrouve la notation fractionnelle pour le résultat. Faut-il en déduire qu'à cette époque Napier eut plus de succès que Stévin ?

(1) Dans le même ordre d'idée, Philippe de LAHIRE, de l'Académie des Sciences, n'avait pas voulu signer l'ouvrage. Ce n'est qu'à la suite d'une querelle sur un point particulier que, conduit à défendre le livre, il en a revendiqué la paternité.

III. L'arpentage dans la seconde moitié du XVII^{ème} siècle

Les logarithmes n'ont pas été les seuls à favoriser l'exercice de la profession d'arpenteur au XVII^{ème}. Sur le terrain, les méthodes ont été facilitées par l'apparition des matériels fiables et précis. Si la mesure des longueurs reste soumise au handicap de la multiplicité des unités d'une part et au défaut de précision des chaînes, la mesure des angles, nouveauté en soi, se fait avec un "graphomètre" appelé aussi "pantographe"(1). Cet appareil, qui n'est qu'un rapporteur muni de règles de visées bénéficie d'une horizontalité parfaite grâce à l'adjonction d'un niveau à bulle, dont l'invention remonte justement aux années 1660-1670. Il existe d'ailleurs à cette époque d'excellents artisans parisiens, produisant des "instruments mathématiques" de grande précision. Quant aux unités, les angles sont comptés en degrés conformément à la pratique mathématique et la mise en place dans les calculs des sinus de ces angles ne pose plus de problèmes, puisque les tables donnent directement leurs logarithmes.

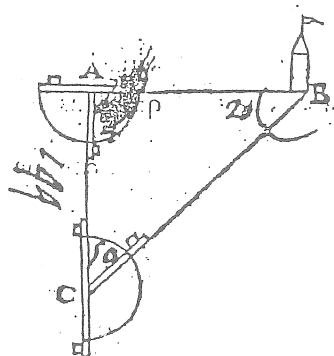
On trouve dans la seconde moitié du XVII^{ème} des ouvrages donnant à la fois l'énoncé et les démonstrations des méthodes géométriques et les tables des logarithmes des nombres et des sinus. La Géométrie pratique(2) d'Ozanam est un bon exemple d'autant que son auteur, sans être un illustre mathématicien est un excellent vulgarisateur. Le texte suivant montre de plus, et malgré tout, que si la théorie fournit des méthodes de calcul faciles et fiables, la tentation est grande d'avoir recours à certaines astuces de procédé, permettant d'éviter tout recours au calcul.

MESURER UNE LIGNE HORIZONTALE ACCESSIBLE SEULEMENT D'UN COTE

"On suppose que la ligne horizontale AB est seulement accessible vers A, ou par conséquent, vous pourrez faire avec un demi-cercle l'angle BAC de telle grandeur qu'il vous plaira, selon la commodité du terrain, comme de 30 degrés, par la ligne AC qui pourra aussi être de telle grandeur que l'on voudra comme de 144 pieds. Après quoi, faisant une seconde station en C, on pourra encore mesurer

(1) Ou bien encore "équerre" ou "instrument géométrique"... On attribue le premier graphomètre à Philippe DANFRIE, un parisien en 1597.

(2) Cette géométrie pratique date de 1689 et a été fréquemment rééditée. Cette sorte d'ouvrage peut être rééditée longtemps après sa première parution, les méthodes exposées étant toujours d'actualité.



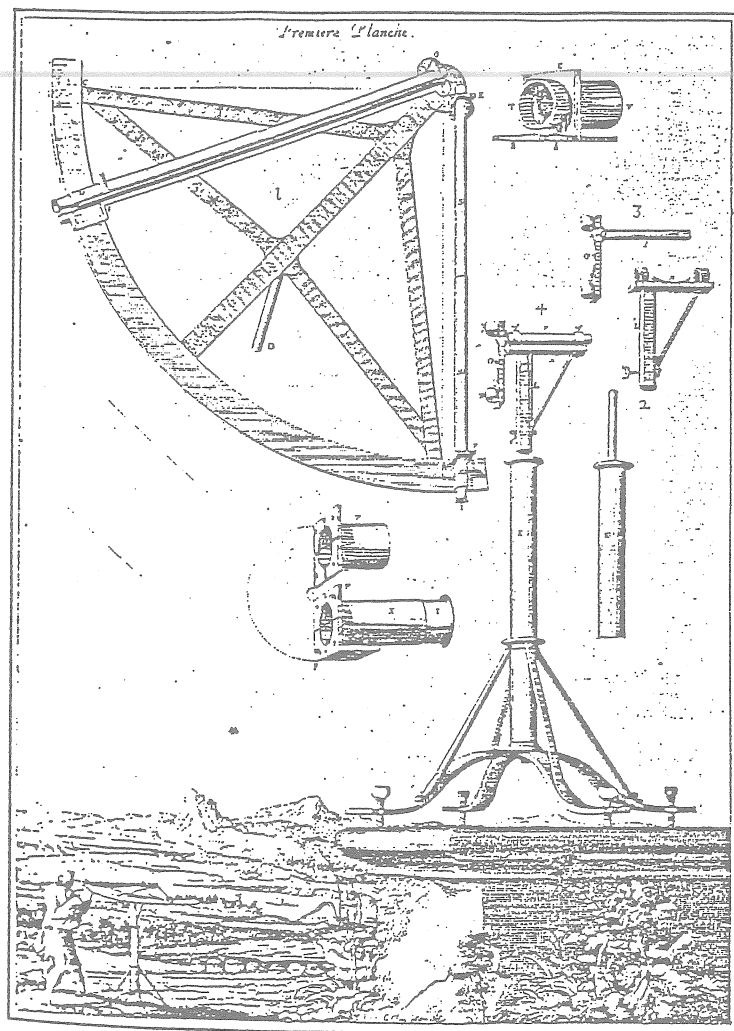
avec le demi-cercle l'angle ACB que nous supposerons de 130 degrés, alors le troisième angle B inaccessible se trouvera de 20 degrés, parce qu'il est le reste des deux précédents à 180 degrés (...). Ainsi, dans le triangle ABC, connaissant les angles et le côté AC on pourra trouver le côté, ou la ligne AB qu'on cherche par cette analogie.

Comme le sinus de l'angle B	34101
a son côté opposé AC	144
Ainsi le sinus de l'angle C	76604
a son côté opposé AB	

Cette méthode ne m'a jamais manquée sensiblement et elle réussira toujours bien, pourvu que dans le triangle ABC, il n'y ait point d'angle trop aigu, ni trop obtus ; et comme il est libre de faire l'angle BAC tel que l'on voudra, on le pourra faire droit, pour avoir un calcul plus aisé".

Il semble enfin que le niveau de connaissance augmente, puisque les ouvrages techniques utilisent de plus en plus le langage et les procédés d'exposés des ouvrages spéculatifs : la "géométrie pratique de l'ingénieur"(1) de Clermont se présente sous forme de deux premiers livres théoriques comprenant définitions puis

(1) ou l'Art de mesurer (1693). Il semble que CLERMONT ait été un des exécutants des travaux de VAUBAN. La dédicace de son ouvrage fait référence à ce grand personnage comme étant en rapport direct avec l'auteur.



Première planche du livre de Picard La Mesure de la Terre (1671), dans lequel l'auteur décrit le matériel et les méthodes utilisées pour calculer la longueur du méridien, à partir de la mesure, effectuée en 1669, de la distance entre deux localités, dont les latitudes diffèrent d'un degré. La planche représente un graphomètre, soit un quart de cercle gradué muni de deux lunettes d'approche, l'une immobile, l'autre mobile ; la lecture de la graduation au travers du chassiss I accolée à la seconde lunette permet la mesure de l'angle.

théorèmes de géométrie, suivis de six livres techniques exposant les méthodes, chacune se référant à un théorème ou un corollaire du second livre. L'extrait suivant montre en outre, en avertissement, que la pratique des logarithmes devient courante.

AVERTISSEMENT:

Je me suis servi dans les deux Corollaires précédans. Des Sinus, Logarithmiques & des Tangentes Logarithmiques pour les Angles. De même que des Nombres Logarithmiques. Pour les Côtés, afin d'Eviter la Longueur qui est nécessairement attachée aux Calculs ordinaires. Parce qu'icy au lieu de multiplier & diviser dans les Regles de trois, On ne fait qu'ajouter & soustraire. J'en useray de même aux Corollaires qui suivront les trois Theoremes que je vais expliquer. Ainsi, quand je diray Si le Sinus droit d'un Angle me donne le nombre connu à son Côté opposé, je sous entendray toujours le Sinus Logarithmique de cet Angle & le nombre Logarithmique de ce Côté.

Je me serviray dans la suite en disposant mes Regles de trois, d'une maniere de parler qui pour être son d'usage chez les Geometres ne laisse pas d'embarrasser les commençans, parce qu'ils n'y sont pas accoutumés Cette maniere de parler est de dire par exemple,

Comme le Sinus d'un Angle est à son Côté opposé ainsi le Sinus d'un autre Angle sera à son Côté aussi opposé.

Cela signifie la même chose que de dire. Si le Sinus d'un Angle donne la Valeur de son Côté opposé Que donnera le Sinus d'un autre Angle?

Theoreme 2.

En quel Triangle que ce soit, par exemple $A. B. C.$ Il y a même rapport du Sinus droit d'un des Angles $B.$ à son Côté opposé $A. C.$ Que du Sinus droit d'un autre Angle $C.$ à son Côté opposé $A. B.$ Et enfin que du Sinus droit de l'Angle $A.$ à son Côté opposé $B. C.$

Pour *demontrer* ce qui est avancé icy : Faites du Point $B.$ comme Centre & de l'Intervale $B. A.$ un Arc d'un Cercle $A. D.$ & baissez la Perpendiculaire $A. E.$ qui sera par la 10. Definition de la Trigonometrie Sinus droit de l'Arc $A. D.$ ou de son Angle opposé $B.$ Cela fait prolongez $C. A.$ Et déterminés $C. G.$ égale à la Ligne $A. B.$ Puis du Point $G.$ comme Centre & de l'Intervale $C. G.$ faites l'Arc de Cercle $G. I.$ Et baissez la Perpendiculaire $G. H.$ laquelle sera par la même 10. Definition. Sinus droit de l'Arc $G. I.$ ou de son Angle opposé $C.$ Tout cela bien exécuté, je dis que le rapport de $A. E.$ Sinus droit de l'Angle $B.$ est au Côté $A. C.$ opposé au même Angle, comme $G. H.$ Sinus droit de l'Angle $C.$ est au Côté $A. B.$ opposé au même Angle $C.$

Car les Triangles $A. E. C.$ & $G. H. C.$ étant Equianglés. Il y aura par la 4. du 6. même rapport de $A. E.$ Sinus droit de l'Angle $B.$ à la Ligne $A. C.$ qui lui est opposée, que de $G. H.$ Sinus droit de l'Angle $C.$ à la Ligne $G. C.$ Ou bien $A. B.$ son égale, & qui est le Côté opposé à l'Angle $C.$ L'on peut prouver de la même façon. Que le Sinus droit de l'Angle $B.$ est à son Côté opposé $A. C.$ Comme le Sinus de l'Angle $B. A. C.$ est à son Côté opposé $B. C.$

Corollaire 1.

En tout Triangle ou l'on connoît deux Angles $B.$ & $C.$ avec un Côté opposé à l'un de ces Angles, on celui qui est compris entre deux. On trouvera l'autre Angle $A.$ & les deux autres Côtés, de cette maniere.

Ajoutez les deux Angles connus $B.$ & $C.$ en une somme & ôtez en le produit 108. Degrez 50. Minutes de 180. Degrez valeur des trois Angles d'un Triangle. Le reste 71. Degrez 10. Minutes sera pour l'Angle $A.$ Puis ditez par Regle de trois. Si le Sinus droit de l'Angle $B.$ qui à 65. Degrez 30. Minutes donne le Côté opposé $A. C.$ de 486 Toises ou Piés. Que donnera le Sinus droit de l'Angle $A.$ La Règle étant faite, il viendra au quatrième Terme. La Valeur du Côté $B. C.$ Et si vous voulez trouver le Côté $A. B.$ Dites, par une autre Regle de trois. Si le Sinus de l'Angle $B.$ donne le Côté opposé $A. C.$ que donnera le Sinus de l'Angle $C.$ il viendra au quatrième terme la Valeur du Côté $A. B.$

Ce théorème (et son premier corollaire), se rapportant à la résolution des triangles sera la cheville ouvrière des calculs de longueurs dans la suite de l'ouvrage. Par exemple, le problème 53 du même livre.

PROBLEME 53

"D'un lieu élevé mesurer la longueur d'une ligne droite inaccessible dans son étendue ?

1. Supposons qu'il faille du sommet A d'une tour mesurer la longueur d'une ligne BC telle que pourrait être une allée venant finir au pied de la tour. Disposez un instrument géométrique au sommet A de manière que l'une des règles soit dirigée vers le point C et l'autre le long de la muraille AB, observant la valeur de l'angle A qui a ici 46 degrés 30 minutes. Mesurez ensuite exactement la hauteur AB (...) 89 pieds, vous aurez deux angles A et B avec le côté AB par le moyen de quoi vous connaîtrez BC ainsi que l'enseigne le premier corollaire de la page 77.

2. (que) si la longueur de la ligne ne venait pas jusqu'au pied de la tour, ainsi qu'on voit ici CD. Il faudrait en ce cas chercher toute la longueur BD qu'on trouvera de la manière qui est expliquée à l'article précédent et qui a ici 128 toises, de laquelle on otera BC de 44 toises, qu'on trouvera de la même façon, le reste 74 sera pour CD".

Les livres suivants de l'ouvrage de Clermont, couvrent alors toute la pratique du "géomètre expert" de l'époque : nivellement, c'est-à-dire mesure des différences de hauteur, toisé(1) soit mesure de toutes les dimensions d'un bâtiment, tant intérieures qu'extérieures, planimétrie (surfaces), stéréométrie (volumes), charpente. L'ouvrage constitue donc une somme des connaissances théoriques de l'Ingénieur (en bâtiment). Il reste cependant un peu éloigné de la pratique, et l'auteur, sans doute plus homme de plan que de terrain, marque une certaine méfiance vis à vis des mesures faites sur le terrain:

"REMARQUE :

Les théorèmes précédents ou du moins leurs corollaires (qui ne regardent précisément que la pratique) étant bien conçus, il

(1) aujourd'hui, le "métré" est une partie essentielle du travail du concepteur et du réalisateur d'un édifice.

sera aisé de résoudre toutes les questions de Trigonométrie qu'on pourra proposer. J'en explique plusieurs dans les problèmes suivants, et bien que je me sois un peu étendu sur cette matière, je ne laisse pas d'être court, eût égard à la quantité d'opérations que j'y donne. L'expérience m'a convaincu que le plus qu'on peut éviter les instruments géométriques sur le terrain est toujours le meilleur. Ce n'est pas que je prétende en blâmer l'usage, qui peut être bon quand on sait s'en servir à propos. Mais la plupart de ceux qui mesurent les savent si mal manier que tout ce qu'ils font est de travers. Les meilleurs sont le cercle, le demi-cercle et la planchette. A l'égard des mesures, comme la toise est la seule dont on se sert dans tous les mesurages qui se font pour les travaux du Roi et que les ouvriers et les entrepreneurs sont obligés de s'y conformer, tant pour éviter la confusion que les malversations, je n'en expliquerai point d'autres".

On trouve nombre d'ouvrages plus concrets, utilisant des mesures propres à la région de l'auteur. Ainsi, la méthode de toiser les bastiments de 1700 par Touchaleaume est faite "suivant l'ancien usage d'Angers" et reprend en détail méthode et unité pour la maçonnerie, la couverture, les carrelages... et les héritages.

Le cercle et le demi-cercle cités dans le texte sont l'équivalent du graphomètre déjà nommé. La planchette mise à l'horizontale était couverte d'une feuille de papier sur laquelle on traçait par visée les directions des points remarquables d'un site. Une seconde station permettait un levé approximatif du site.

Malgré ces réticences, la précision des mesures était bien suffisante, et on sait que les forteresses de Vauban présentent des dimensions calculées avec beaucoup de minutie, en particulier en ce qui concerne le nivellement(1). Les problèmes à venir viendront de la réfraction de l'air lors des visées, et de l'introduction de la courbure de la terre lors de l'établissement de cartes, pour les grandes distances.

L'introduction des logarithmes dans les calculs pratiques a donc eu pour corollaire l'usage de la trigonométrie par l'arpenteur. Ainsi la triangulation(2) qui consiste à déterminer les côtes et

(1) Parfois moins d'un centimètre sur un hectare...

(2) les premières triangulations auraient été réalisées par ce flamand GEMMA FRISIUS au XVIème siècle.

les angles d'un triangle à partir de la donnée d'un côté et de deux angles sera systématiquement utilisé. Ce procédé en particulier permettra à l'Abbé Picard, en 1669, de réaliser une première mesure du méridien puis le siècle suivant verra la construction de la carte de France au moyen du repérage par triangulation(1). Le procédé est bien entendu toujours en vigueur.

Les progrès du XVIIIème et XIXème siècle concernent surtout les appareils. Si le premier théodolite(2) est dû à l'anglais Briggs (1571), cet appareil sera de plus en plus perfectionné, tant en ce qui concerne la visée que la mesure. On munira les graphomètres de verniers, du nom de leur inventeur, le géomètre franc-comtois Vernier (vers 1630). Enfin, la maîtrise des techniques relatives à la production des lentilles permettra d'équiper les appareils de viseurs de plus en plus précis. Quant à la mesure des longueurs elle progressera surtout lors de l'unification des unités.

La dernière mutation, toute récente, consiste bien sûr, par l'adoption des tachéomètres électroniques mesurant des distances par différence entre longueurs d'ondes, surtout s'ils sont montés sur des théodolites et couplés avec un calculateur. L'opérateur n'aura dans ce cas plus aucun calcul à faire, mais, au fond, la méthode mathématique est restée la même qu'au XVIIème siècle, le calculateur étant programmé pour déterminer angles et côtés de triangle avec les mêmes formules qu'il y a trois cents ans.

(1) Carte dite de CASSINI.

(2) Cet appareil permet de mesurer des angles dans un plan horizontal et dans un plan vertical.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES ANCIENS

- ARNAULD, Géométrie, Charles Savieux, Paris, 1667.
- BARREME, La géométrie servant à l'arpentage, 1673.
- BARREME, Le livre nécessaire à toute sorte de condition, 1671.
- CLERC, Pratique de la géométrie, 1668.
- CLERMONT, Géométrie pratique de l'ingénieur, Schmuck, Strasbourg, 1693.
- DE BOUELLES, La géométrie pratique composée par..., Denise Cavallat, Paris, 1556.
- DE LA HIRE, L'école des arpenteurs, 1692.
- DESBORDES, Traité de l'astrolabe, Guillaume Canellat, Paris, 1560.
- ERRARD, Géométrie et pratique générale d'icelle, Michel Daniel, Paris, 1619.
- FINE ORONCE, Pratique de la géométrie, 1570.
- GUYBERT, Traité familier pour toiser, Charles Massé, Paris, 1580.
- HIRSON, Arithmétique universelle démontrée, 1674.
- JACQUINOT, Usage de l'astrolabe, 1598.
- LAUNAY (Jean BARAHAM dit) L'arithmétique, arpentage universel, Coyselet, Rouen, 1624.
- OZANAM, Traité de l'arpentage et du toisé, 168..
- OZANAM, Méthode de lever les plans, 168..
- OZANAM, Tables des sinus et logarithmes, Michallet, Paris, 1685.
- OZANAM, La géométrie pratique, Michallet, Paris, 1689.

OUVRAGES D'HISTOIRE DES SCIENCES

- KISH, La carte image des civilisations, Seuil.
- NAUD, Histoire des logarithmes, Blanchard.
- TATON, Histoire générale des Sciences.