IREM
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 24

À propos

1. De l'analyse
2. De l'utilisation de calculatrices programmables en classe

Jean-Pierre LESSENE

1980

ISBN 2-86300-009-8

UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M. DE NANTES

I – A PROPOS DE L'ANALYSE

II – DE L'UTILISATION DE CALCULATRICES PROGRAMMABLES EN CLASSE

Par

LESSENE Jean-Pierre

Animateur à l'I.R.E.M. de NANTES

Professeur au Lycée Polyvalent de LUÇON

NANTA-IREMICA N° 24

N° ISBN 2-86300-009-8

1980

Ce document est constitué de deux parties bien distinctes :

La première est le compte rendu du travail d'un groupe d'analyse Second Cycle constitué de cinq articles :

La seconde rapporte en détail le déroulement d'une expérience portant sur

À propos
de l’analyse

CONTINUITE ET LIMITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE DE VARIABLE REELLE.

Voici un essai de présentation des notions de continuité et de limite s'inspirant d'un travail théorique réalisé sur les bases de filtres. Il ne prétend en aucune façon être un modèle, ou un cours achevé de Première ou de Terminale. Son seul but est d'aider ou de susciter une réflexion pédagogique personnelle.

Cette présentation peut paraître simplificatrice au professeur qui connaît déjà la question ; mais elle suppose connues d'autres considérations élémentaires -majorations, minorations, raisonnements par conditions suffisantes- qui aident considérablement par ailleurs l'élève à concevoir, puis assimiler ces notions.

Certains éléments nous ont cependant paru pédagogiquement interessants : les différents types d'intervalles utilisés, les manipulations sur ces intervalles (qui aident en particulier à mieux saisir la continuité de $\mathbb{R}$) et l'apport fondamental des représentations graphiques (paraboles, hyperboles) connues des élèves sortant de la classe de Seconde.

I - INTERVALLES PARTICULIERS DE $\mathbb{R}$.

DEFINITION.

Soit x_0 un réel quelconque.
Soit α un réel positif quelconque

$$\boxed{I_{x_0}^{\alpha} =]x_0 - \alpha\ ,\ x_0 + \alpha[}$$

$I_{x_0}^{\alpha}$ est appelé *intervalle ouvert centré en* x_0 , *de rayon* α .

QUELQUES EXERCICES POUR SE FAMILIARISER AVEC CE TYPE D'INTERVALLES.

a) Pour tout réel x_0 et pour tout réel α positif, démontrer :

- $I_{x_0}^{\alpha} \neq \emptyset$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \ (x \in I_{x_0}^{\alpha} \iff |x - x_0| < \alpha)$

b) Pour tout réel x_0 et pour tout couple (α , β) de réels positifs tels que $\alpha \leqslant \beta$, vérifier :

$\cdot\ I^{\alpha}_{x_0} \subset I^{\beta}_{x_0}$

c) Pour tout réel x_0 et pour tout couple (α , β) de réels positifs, déterminer :

$\cdot\ I^{\alpha}_{x_0} \cap I^{\beta}_{x_0}$

d) Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 < y_0$.

•Pour tout α positif, déterminer : $I^{\alpha}_{x_0} \cap I^{\alpha}_{y_0}$

•Pour tout couple (α , β) de réels positifs, déterminer : $I^{\alpha}_{x_0} \cap I^{\beta}_{y_0}$

e) Déterminer $I^{\alpha}_{x_0} \cap D$ dans chacun des cas suivants :

- $D =]-\infty , -2[\cup]0 , 1]$ et $x_0 = -3$
- $D =]-\infty , -2[\cup]0 , 1]$ et $x_0 = 0$
- $D = \{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \} \cup \{0\}$ et $x_0 = 0$

II - DISCONTINUITE.

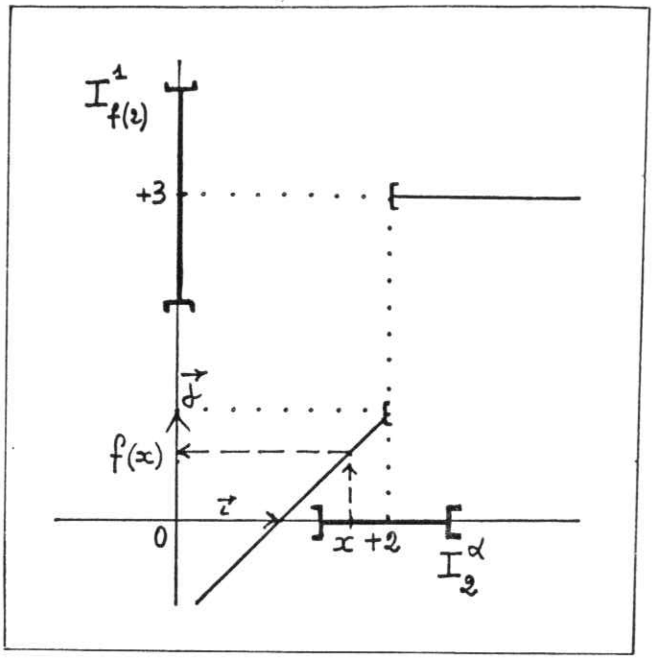
REMARQUES SUR DES EXEMPLES.

a) Soit la fonction numérique f telle que :

$$f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < +2 \\ +3 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$+2$ appartient au domaine de définition de f. $f(+2) = 3$.
Considérons l'intrevalle $I^{1}_{f(2)}$
Démontrer : $\forall I^{\alpha}_{2} \quad f(I^{\alpha}_{2}) \not\subset I^{1}_{f(2)}$

Il s'agit, pour tout α positif, de rechercher un élément de I^{α}_{2} tel que son image par f n'appartienne pas à $I^{1}_{f(2)}$.



Il suffit de prendre $x = 2 - \frac{\alpha}{2}$. Un calcul rapide permet de vérifier que, pour tout α positif, $f(x)$ n'appartient pas à $I^1_{f(2)}$.

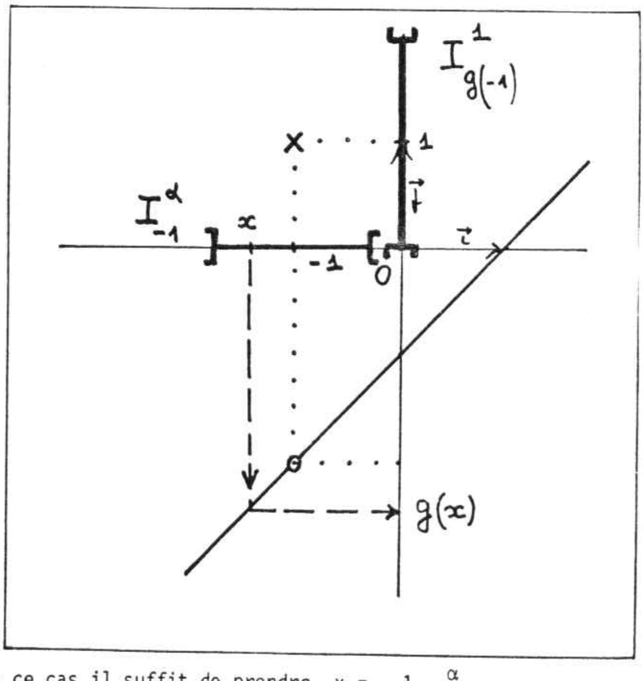
b) Soit g la fonction numérique telle que :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ +1 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$$

-1 appartient au domaine de définition de g . $g(-1) = +1$.

Considérons l'intervalle $I^1_{g(-1)}$

Démontrer : $\forall I^\alpha_{-1} \quad g(I^\alpha_{-1}) \not\subset I^1_{g(-1)}$



Dans ce cas il suffit de prendre $x = -1 - \frac{\alpha}{2}$.

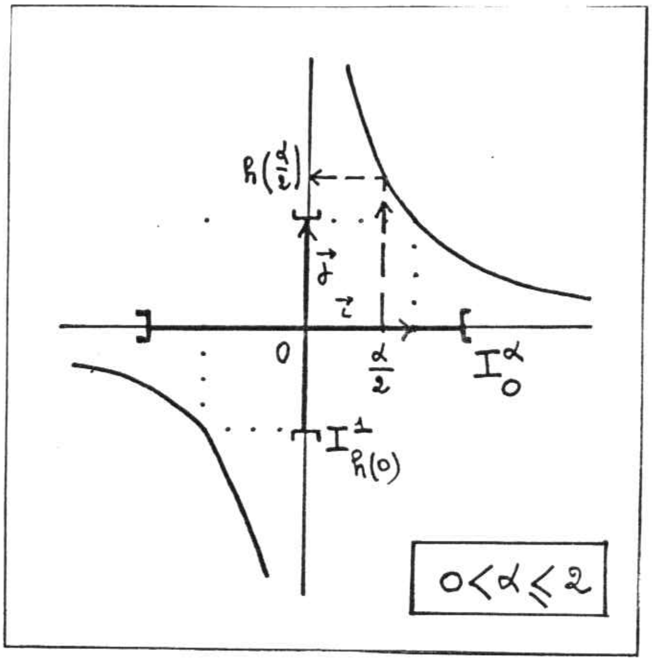
c) Soit h la fonction numérique telle que :

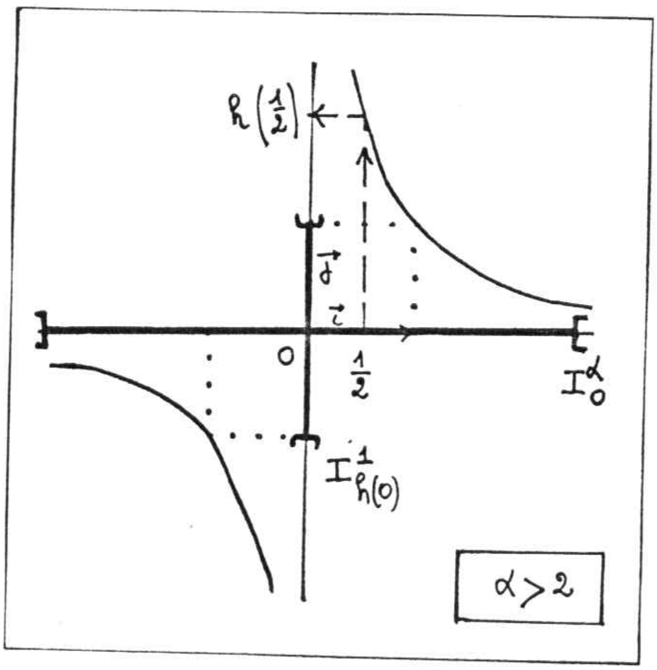
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

0 appartient au domaine de définition de h . h(0) = 0 .

Considérons l'intervalle $I^{1}_{h(0)}$.

Démontrer : $\forall I^{\alpha}_{0} \quad h(I^{\alpha}_{0}) \not\subset I^{1}_{h(0)}$





Il suffit de prendre
$x = \inf(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2})$

DEFINITION.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un élément de I .

f est *discontinue en* x_0 lorsque :

$$\boxed{\exists I^{\varepsilon}_{f(x_0)} \ \forall I^{\alpha}_{x_0} \qquad f(I^{\alpha}_{x_0}) \not\subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}}$$

REMARQUES.

a) La définition ci-dessus sous-entend que les $I^{\alpha}_{x_0}$ qui interviennent sont ceux qui sont contenus dans I.

I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, pour tout x_0 de I il existe une infinité de $I^{\alpha}_{x_0}$ contenus dans I :

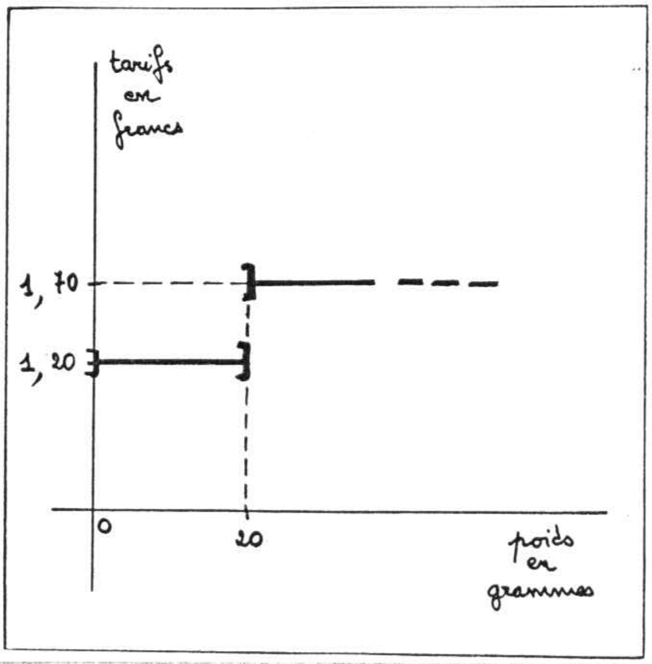
Pour $I =]a , b[$, il s'agit de tous les $I^{\alpha}_{x_0}$ avec : $0 < \alpha \leq \inf(x_0 - a , b - x_0)$
Pour $I =]-\infty , a[$, il s'agit de tous les $I^{\alpha}_{x_0}$ avec : $0 < \alpha \leq a - x_0$
Pour $I =]a , +\infty[$, il s'agit de tous les $I^{\alpha}_{x_0}$ avec : $0 < \alpha \leq x_0 - a$

b) Pour établir : $f(I^{\alpha}_{x_0}) \not\subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$, il suffit de démontrer : $\exists\, x \in I^{\alpha}_{x_0} \quad f(x) \notin I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$.

c) Les fonctions numériques f, g et h qui interviennent dans les exemples précédents sont discontinues respectivement en $+2$, -1, 0.

d) Les élèves possèdent déjà intuitivement cette notion qu'ils énoncent de la façon suivante : *"Si l'on donne à* x *des valeurs très proches de* x_0 *, il n'est pas certain que* $f(x)$ *soit très proche de* $f(x_0)$*".*

Comme exemple concret, prenons une lettre pesant 20 grammes à la lecture sur une balance dont la précision est ε gramme. Cette lettre pèse-t-elle en réalité plus ou moins de 20 grammes ? Doit-on l'affranchir à 1 F 20 ou bien à 1 F 70 ? Il n'est pas possible de répondre à cette question (Discontinuité de la fonction affranchissement).



III - CONTINUITE.

DEFINITION.

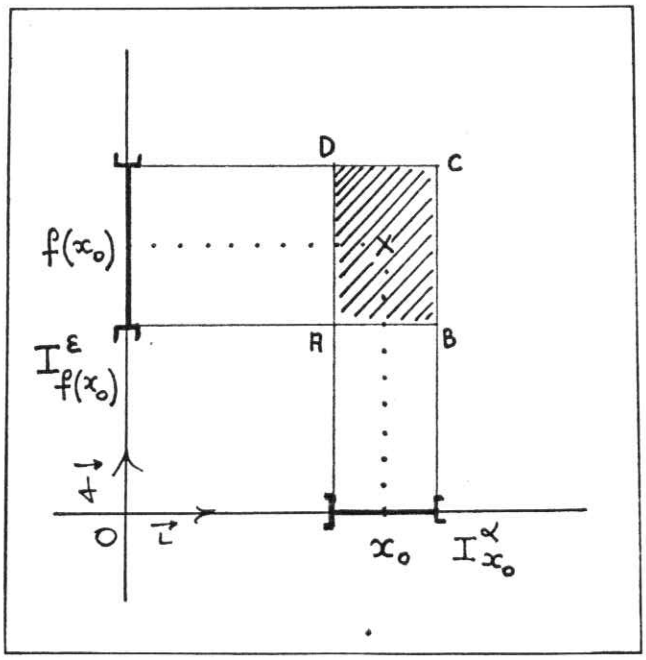
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .

f est continue en x_0 lorsque :

$$\boxed{\forall I^{\varepsilon}_{f(x_0)} \quad \exists I^{\alpha}_{x_0} \quad f(I^{\alpha}_{x_0}) \subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}}$$

c'est à dire lorsque f n'est pas discontinue en x_0 .

INTERPRETATION GRAPHIQUE.



Lorsque f est continue en x_0 , il est certain que pour tout ε donné et pour l'un des α qui lui correspond, la représentation graphique de f est contenue dans le rectangle (ABCD). On s'aperçoit graphiquement que cette propriété est d'autant plus intéressante que ε est petit.

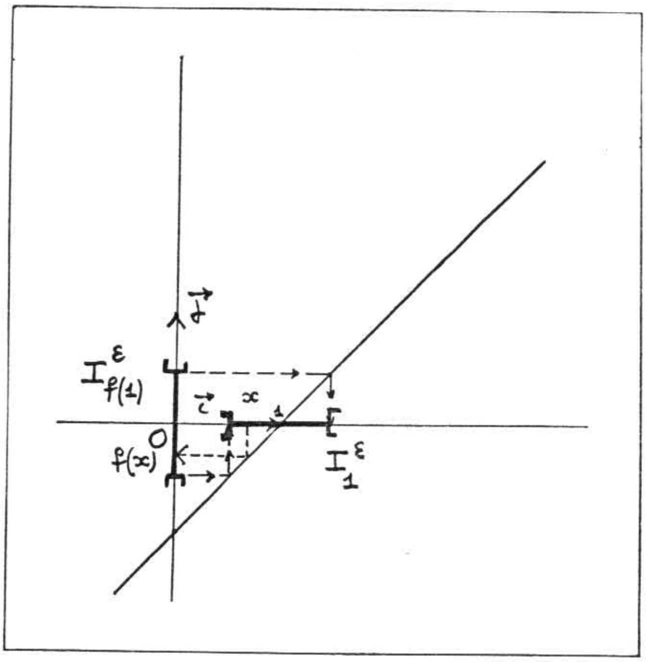
QUELQUES EXERCICES UTILISANT DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES.

Méthode : la recherche de $I^{\alpha}_{x_0}$ s'effectue graphiquement. On peut vérifier par le calcul ultérieurement.

a) Soit f la fonction numérique telle que :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x - 1$$

Etude de la continuité en + 1 .

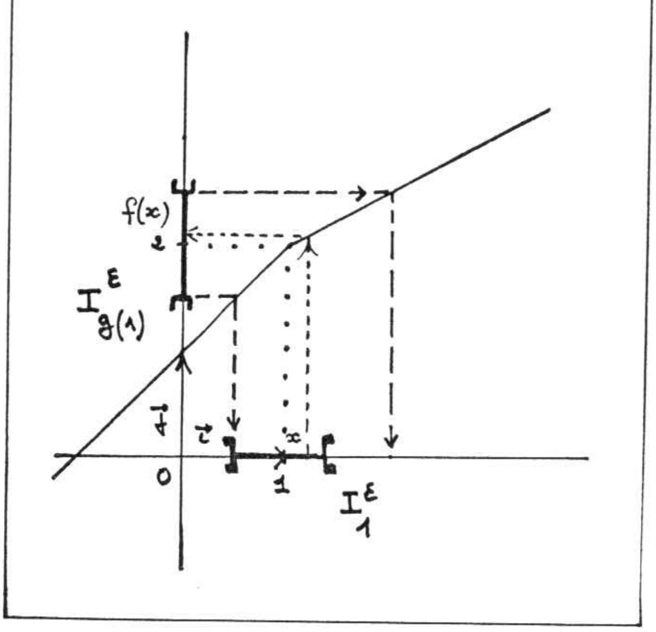


Il est évident que : $\forall I^{\varepsilon}_{f(1)} \quad f(I^{\varepsilon}_{1}) \subset I^{\varepsilon}_{f(1)}$

b) Soit g la fonction numérique telle que :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Etude de la continuité en + 1 .

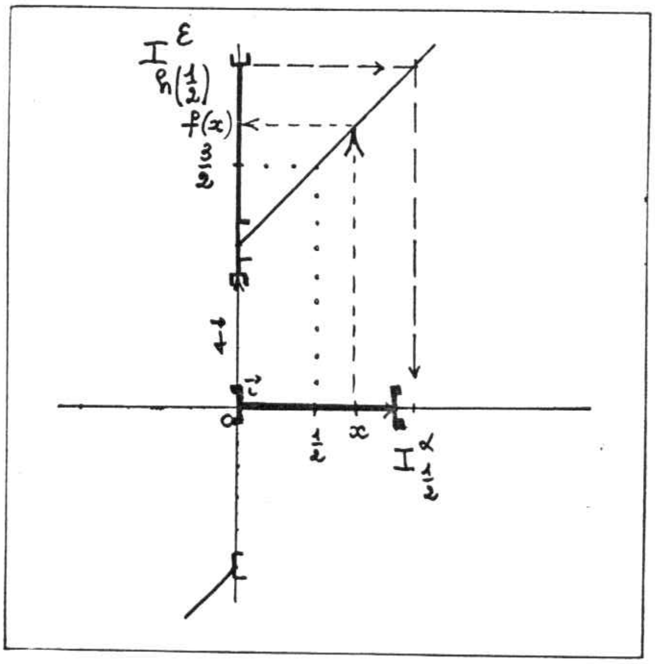


Il est évident que $\forall I^{\varepsilon}_{g(1)} \quad g(I^{\varepsilon}_{1}) \subset I^{\varepsilon}_{g(1)}$

c) Soit h la fonction numérique telle que :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{si} \geqslant 0 \\ x - 1 & \text{si} < 0 \end{cases}$$

Etude **de** la continuité en $+\frac{1}{2}$



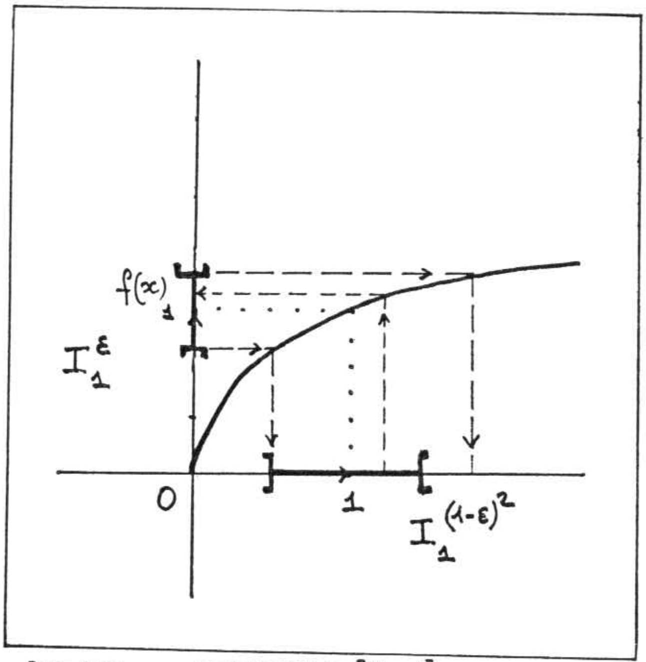
Pour tout ε appartenant à $]0 , \frac{5}{2}]$, on a :

$$\{x/h(x) \in I^{\varepsilon}_{h(\frac{1}{2})}\} =]\sup(0 , \tfrac{1}{2} - \varepsilon) , \tfrac{1}{2} + \varepsilon[$$

Il s'agit de trouver un $I^{\alpha}_{\frac{1}{2}}$ inclus dans cet intervalle.

d) Considérons enfin la fonction racine carrée.

Etude de la continuité en + 1 .



Pour tout ε appartenant à $]0 , 1]$, on a :

$$\{x / x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sqrt{x} \in I_1^{\varepsilon}\} =](1 - \varepsilon)^2 , (1 + \varepsilon)^2[$$

Il s'agit de trouver un I_1^{α} inclus dans cet intervalle.

<u>QUELQUES EXERCICES N'UTILISANT PAS LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES.</u>

a) Soit f la fonction numérique telle que :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 3x + 2$$

Etude de la continuité de f en + 1 .

- $+ 1 \in D_f$
- $f(+ 1) = + 5$

• Soit ε positif quelconque.

$f(x) \in I_5^{\varepsilon} \iff |f(x) - 5| < \varepsilon$

$f(x) \in I_5^{\varepsilon} \iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f(x) \in I_5^{\varepsilon} \iff x \in I_1^{\frac{\varepsilon}{3}}$

• Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$ pour que :

$\forall I_{f(1)}^{\varepsilon} \quad f(I_1^{\alpha}) \subset I_{f(1)}^{\varepsilon}$

b) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow 2x^2 + 1$$

Etude de la continuité de g en $+1$.

• $+1 \in D_g$

• $g(+1) = 3$

• Soit ε positif quelconque.:

$g(x) \in I_3^{\varepsilon} \iff |g(x) - 3| < \varepsilon$

$g(x) \in I_3^{\varepsilon} \iff 2|x - 1|\ |x + 1| < \varepsilon$

$x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $g(x) \in I_3^{\varepsilon} \iff x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2|x + 1|}$

. Par ailleurs : $x \in I_1^{\frac{1}{2}} \implies \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{2|x + 1|} < \frac{\varepsilon}{3}$

D'où $x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \implies x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2|x + 1|}$

C'est-à-dire : $x \in I_1^{\frac{1}{2}} \cap I_1^{\frac{\varepsilon}{5}} \implies g(x) \in I_3^{\varepsilon}$

Or $I_1^{\frac{1}{2}} \cap I_1^{\frac{\varepsilon}{5}} = I_1^{\inf(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{5})}$

• Il suffit donc de prendre $d = \inf(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{5})$ pour que :

$\forall I_{g(1)}^{\varepsilon} \quad g(I_1^{\alpha}) \subset I_{g(1)}^{\varepsilon}$

c) Soit h la fonction numérique telle que :

$$h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$$

Etude de la continuité en $+1$.

- $+1 \in D_h$

- $h(+1) = +1$

- Soit ε positif quelconque et x réel non nul quelconque.

$h(x) \in I_1^{\varepsilon} \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 1\right| < \varepsilon$

$h(x) \in I_1^{\varepsilon} \Longleftrightarrow |x - 1|\ |x + 1| < \varepsilon\, x^2$

$x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $h(x) \in I_1^{\varepsilon} \Longleftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon x^2}{|x + 1|}$ et $x \in I_1^{\frac{1}{2}}$

Par ailleurs : $x \in I_1^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{10} < \frac{\varepsilon x^2}{|x + 1|} < \frac{3\varepsilon}{2}$

D'où $x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{10} \Longrightarrow x \in I_1^{\frac{1}{2}}$ et $|x - 1| < \frac{\varepsilon x^2}{|x + 1|}$

C'est-à-dire : $x \in I_1^{\frac{1}{2}} \cap I_1^{\frac{\varepsilon}{10}} \Longrightarrow h(x) \in I_1^{\varepsilon}$

Or $I_1^{\frac{1}{2}} \cap I_1^{\frac{\varepsilon}{10}} = I_1^{\inf(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10})}$

- Il suffit donc de prendre $\alpha = \inf(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10})$ pour que :

$\forall I_{h(1)}^{\varepsilon} \qquad h(I_1^{\alpha}) \subset I_{h(1)}^{\varepsilon}$

<u>CONTINUITE A DROITE, A GAUCHE.</u>

a) Les définitions découlent naturellement de la définition de la continuité (III - 1°) en posant :

$$\boxed{I_{x_0+}^{\alpha} = [x_0\ ,\ x_0 + \alpha[}$$

et

$$\boxed{I_{x_0-}^{\alpha} =]x_0 - \alpha\ ,\ x_0]}$$

b) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .

α) f est continue à droite en x_0 lorsque :

$$\boxed{\forall I^{\varepsilon}_{f(x_0)} \quad \exists I^{\alpha}_{x_0+} \qquad f(I^{\alpha}_{x_0}+) \subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}}$$

La définition peut s'étendre aux applications f définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ du type

$[a , b[$ et $[a , +\infty[$.

β) f est continue à gauche en x_0 lorsque :

$$\boxed{\forall I^{\varepsilon}_{f(x_0)} \quad \exists I^{\alpha}_{x_0}- \qquad f(I^{\alpha}_{x_0}-) \subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}}$$

La définition peut s'étendre aux applications f définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$ du type

$]a , b]$ et $]-\infty , a]$.

c) Théorème.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .

f continue en x_0 si, et seulement si, f continue à droite et à gauche en x_0 .

Pour la démonstration on utilise les deux propriétés :

$$I^{\alpha}_{x_0} = I^{\alpha}_{x_0^-} \cup I^{\alpha}_{x_0^+} \qquad \text{et} \qquad I_{x_0}^{\inf(\alpha , \beta)} \subset I^{\alpha}_{x_0^-} \cup I^{\beta}_{x_0^+}$$

IV - INTERETS DIDACTIQUES DE CETTE PRESENTATION.

1° Le choix des intervalles centrés a été fixé dans le but évident d'une meilleure visualisation graphique. Il permet, par ailleurs, de retrouver facilement la définition classique.

2° A l'intervalle $I^{\alpha}_{x_0}$ est associé une représentation graphique sur l'axe des réels ; ainsi l'élève voit bien de quel ensemble il s'agit. Ce n'est malheureusement pas le cas -tout au moins actuellement au sortir de la classe de Seconde- lorsqu'on lui parle de l'ensemble des x tels que : $|x - x_0| < \varepsilon$

3° Les représentations graphiques connues des élèves venant de la classe de Seconde constituent un support fondamental à l'introduction proposée.

Etant donnée la représentation graphique d'une fonction numérique f , l'élève peut, à partir d'un $I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$ donné, construire effectivement un $I^{\alpha}_{x_0}$ tel que $f(I^{\alpha}_{x_0})$ soit inclus dans $I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$.

Une telle démarche permet de mieux faire comprendre :

α) que α doit être choisi dépendant uniquement de ε .

β) que la propriété établie pour un ε choisi devient vraiment interessante si l'on peut diminuer autant que l'on veut le rayon de $I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$; c'est-à-dire si l'on peut donner à ε des valeurs positives arbitrairement petites.

4° La notion de discontinuité est abordée avant celle de continuité (les exemples mettent en évidence les trois types de discontinuité rencontrés en classe de Première).

Démontrer que f est discontinue en x_0 , c'est <u>vérifier</u> que, pour une certaine valeur de ε , une propriété est vraie pour tout α .

Démontrer que f est continue en x_0 , c'est <u>rechercher</u> un α tel qu'une propriété dépendant de α soit vraie pour tout ε .

Il est clair que la seconde démarche est plus délicate à suivre.

V - <u>LIMITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE.</u>

<u>INTERVALLES OUVERTS POINTES DE $\mathbb{R}$</u> .

Soit x_0 un réel quelconque.
Soit α un réel positif quelconque.

$$\boxed{\dot{I}^{\alpha}_{x_0} =]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 , x_0 + \alpha[}$$

$\dot{I}^{\alpha}_{x_0}$ est appelé <u>intervalle ouvert centré pointé en</u> x_0 <u>de rayon α</u> .

En réalité $\dot{I}^{\alpha}_{x_0}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ mais la réunion de deux intervalles ouverts adjacents de $\mathbb{R}$.

On utilisera aussi par la suite les notations :

$$\boxed{\dot{I}^{\alpha}_{x_0^+} = \left]x_0 \,,\, x_0 + \alpha\right[}$$

$$\boxed{\dot{I}^{\alpha}_{x_0^-} = \left]x_0 - \alpha \,,\, x_0\right[}$$

$$\boxed{\dot{I}^{\alpha}_{+\infty} = \left]\alpha, +\infty\right[= I^{\alpha}_{+\infty}}$$

$$\boxed{\dot{I}^{\alpha}_{-\infty} = \left]-\infty \,,\, -\alpha\right[= I^{\alpha}_{-\infty}}$$

REMARQUES SUR DES EXEMPLES.

Soit f, g et h les fonctions numériques telles que :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x + 2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ +3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = g(x) = h(x)$

f continue en + 2 donc : $\forall\, I^{\varepsilon}_4 \;\exists\, I^{\alpha}_2 \quad f(I^{\alpha}_2) \subset I^{\varepsilon}_4$

g et h ne vérifient pas cette propriété car g est discontinue en + 2 et, pour h , + 2 n'est pas élément de son domaine de définition.

Pourtant ces trois fonctions numériques vérifient en commun la propriété suivante :

$$\forall I_4^{\varepsilon} \quad \exists \dot{I}_2^{\alpha} \quad \begin{matrix} f \\ g \\ h \end{matrix} (\dot{I}_2^{\alpha}) \subset I_4^{\varepsilon}$$

On dit alors que f, g et h admettent + 4 pour limite en + 2 .

DEFINITION.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit x_0 appartenant à I .

Soit f fonction numérique définie sur I sauf peut-être en x_0 .

Soit ℓ un réel.

f admet ℓ pour limite en x_0 lorsque :

$$\boxed{\forall I_{\ell}^{\varepsilon} \quad \exists \dot{I}_{x_0}^{\alpha} \quad f(\dot{I}_{x_0}^{\alpha}) \subset I_{\ell}^{\varepsilon}}$$

REMARQUES.

a) x_0 n'appartient pas nécessairement à I .

b) La définition ci-dessus sous-entend : $\dot{I}_{x_0}^{\alpha} \subset I$.

c) L'unicité de la limite, lorsqu'elle existe, permet l'utilisation des notations :

$$\lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x_0} (x \longmapsto f(x)) = \ell$$

EXEMPLE.

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \frac{2}{x}$

Démontrer : $\lim_{+2} f = +1$

• Soit ε positif quelconque. Soit x réel non nul quelconque.

$$x \neq 2 \text{ et } f(x) \in I_1^{\varepsilon} \iff x \neq 2 \text{ et } \left|\frac{2}{x} - 1\right| < \varepsilon$$
$$\iff x \neq 2 \text{ et } |x - 2| < \varepsilon\,|x|$$

$$x \in \dot{I}_2^1 \text{ et } f(x) \in I_1^{\varepsilon} \iff x \in \dot{I}_2^1 \text{ et } |x - 2| < \varepsilon x$$

Par ailleurs : $x \in \dot{I}_2^1 \implies \varepsilon < \varepsilon x < 3\varepsilon$

D'où $x \in \dot{I}_2^1$ et $|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow x \in \dot{I}_2^1$ et $|x - 2| < \varepsilon x$

C'est à dire : $x \in \dot{I}_2^1 \cap I_2^{\varepsilon} \implies f(x) \in I_1^{\varepsilon}$

Or : $\dot{I}_2^1 \cap I_2^{\varepsilon} = \dot{I}_2^{\inf(1\,,\,\varepsilon)}$

• Il suffit donc de prendre $\alpha = \inf(1\,,\,\varepsilon)$ pour que : $\forall I_1^{\varepsilon} \quad f(\dot{I}_2^{\alpha}) \subset I_1^{\varepsilon}$.

THEOREME.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .
Soit f fonction numérique définie sur I .

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x_0} f = f(x_0)$$

LIMITE A DROITE, A GAUCHE.

a) Définitions.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .
Soit f définie sur I sauf peut-être en x_0 .
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

α) f admet ℓ pour limite à droite en x_0 . Lorsque :

$$\boxed{\forall I_{\ell}^{\varepsilon} \quad \exists \dot{I}_{x_0+}^{\alpha} \quad f(\dot{I}_{x_0+}^{\alpha}) \subset I_{\ell}^{\varepsilon}}$$

Notation : $\lim\limits_{x_0+} f = \ell$

La définition s'étend à $I = [a\,,\,b[$ et $I = [a\,,\,+\infty[$

α) <u>f admet ℓ pour limite à gauche en</u> x_0 lorsque :

$$\boxed{\forall I_\ell^\varepsilon \quad \exists I_{x_0^-}^\alpha \qquad f(I_{x_0^-}^\alpha) \subset I_\ell^\varepsilon}$$

<u>Notation</u> : $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$

La définition s'étend à $I =]a\ ,\ b]$ et $I =]-\infty, a]$.

b) Théorème.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit x_0 appartenant à I .
Soit f définie sur I sauf peut-être en x_0 .
Soit ℓ un réel.

$$\lim_{x_0} f = \ell \iff \lim_{x_0+} f = \ell \text{ et } \lim_{x_0-} f = \ell .$$

EXTENSIONS DE LA NOTION DE LIMITE.

Nous ne détaillons pas ce paragraphe. Disons seulement que toutes les définitions se résument dans les trois formes suivantes :

$$\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \left(\lim_{x_0} f = \ell \iff \forall I_\ell^\varepsilon \quad \exists \dot{I}_{x_0}^\alpha \quad f(\dot{I}_{x_0}^\alpha) \subset I_\ell^\varepsilon\right)$$

$$\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{x_0+} f = \ell \iff \forall I_\ell^\varepsilon \quad \exists \dot{I}_{x_0^+}^\alpha \quad f(\dot{I}_{x_0^+}^\alpha) \subset I_\ell^\varepsilon\right)$$

$$\forall \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{x_0-} f = \ell \iff \forall I_\ell^\varepsilon \quad \exists \dot{I}_{x_0^-}^\alpha \quad f(\dot{I}_{x_0^-}^\alpha) \subset I_\ell^\varepsilon\right)$$

avec $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ droite numérique achevée.

QUELQUES REMARQUES COMPLEMENTAIRES SUR LA NOTION DE LIMITE.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit x_0 et ℓ deux réels quelconques.
On suppose $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

• Combien de fois avons nous entendu (et peut-être employé ?) la phrase (1) suivante : "Plus x est proche de x_0 , plus $f(x)$ est proche de ℓ".

Cette phrase traduit sans aucun doute une formulation très intuitive de la notion de limite. Il est important de savoir qu'il est dangereux de l'utiliser.

• Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \cos(2\Pi\frac{1}{|x|} + x) \end{aligned}$$

Considérons maintenant la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0 et est strictement décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(\frac{1}{n}) = \cos(2\Pi\, n + \frac{1}{n}) = \cos(\frac{1}{n})$.

La suite $(f(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et convergente vers + 1.

Si on considère x comme élément de $\{\frac{1}{n}\ /\ n \in \mathbb{N}^*\}$ la phrase (1) est vraie pour $x_0 = 0$ et $\ell = +1$: "Plus x est proche de 0 , plus $f(x)$ est proche de $+1$".

De là à conclure que $\lim\limits_{0} f = +1$ ....

• Considérons la suite $(\frac{2}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est convergente vers 0 et strictement décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(\frac{2}{2n+1}) = \cos\left[(2n+1)\Pi + \frac{2}{2n+1}\right] = -\cos(\frac{2}{2n+1})$

La suite $(f\frac{2}{2n+1}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et convergente vers - 1 .

Si on considère x comme élément de $\{\frac{2}{2n+1}\ /\ n \in \mathbb{N}^*\}$ la phrase (1) est vraie pour $x_0 = 0$ et $\ell = -1$.

• Il ne suffit donc pas de se contenter d'une "approche" de x_0 pour en déduire la limite de f en x_0 .

La remarque ci-dessus prend tout sens sens mathématique dans le théorème :

Soit f une application de $[a^*, b]$ vers $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in [a , b]$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. f admet ℓ pour limite en x_0 si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[a , b] - \{x_0\}$ convergeant vers x_0 , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

• On peut penser qu'il serait intéressant d'introduire la notion de limite à partir de la notion de suite convergente puisque ce concept correspond exactement à l'idée intuitive que l'on a de la notion de limite.

On peut poser le théorème ci-dessus comme une définition ; il faut alors démontrer l'équivalence avec la définition traditionnelle.

L'utilisation des machines à calculer ne nous invite-t-elle pas à aller dans ce sens ?

Deux remarques cependant :

- la notion de suite (convergente) est plus difficile à assimiler par les élèves qu'il n'y paraît et son utilisation systématique demanderait son intégration dans les programmes dès le premier cycle.

- Les machines peuvent être d'un emploi dangereux en donnant de $\mathbb{R}$ une vision discrète et, pour l'étude de certaines suites, des résultats faux en ce qui concerne leur convergence. Ces machines constituent cependant un outil pédagogique fondamental en analyse. Leur utilisation dans les classes aurait le mérite de remettre en honneur le calcul numérique et de permettre une nouvelle approche de nombreux problèmes délicats ; la notion de limite en est un.

QUELQUES APPLICATIONS DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES.

I - THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES.

- Soit f une application continue sur $[a , b]$.

$$(\exists\ (m , M) \in \mathbb{R}^2)\ (f([a , b]) = [m , M])$$

- C'est la propriété : $(\forall y \in [m , M])\ (\exists x \in [a , b])\ (y = f(x))$, déduite de l'énoncé ci-dessus, qui sera utilisée par la suite.

II - APPLICATION 1.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :	$f(0) = 0$
	$\lim_{+\infty} f = +\infty$
	f continue sur $\mathbb{R}^+$
Alors : $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$	

- 0 possède au moins un antécédent : 0 .

- Soit y_0 un réel positif quelconque.

Puisque $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on a pour y positif : $(\exists A > 0)\ (\forall x \in]A , +\infty[)\ (f(x) > y_0)$

Soit $x_0 = A + 1$; $x_0 > 0$ et $f(x_0) > y_0 > 0$.

f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, la restriction de f à $[0 , x_0]$ est continue sur $[0 , x_0]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([0 , x_0]) = [0 , M]$; $f(x_0)$ appartient évidemment à $[0 , M]$.

$(\forall y \in [0 , f(x_0)])\ (y \in [0 , M])$ donc $(\exists x \in [0 , x_0])\ (y = f(x))$

Cette dernière propriété est vérifiée par y_0 puisque $y_0 \in]0 , f(x_0)[$.

• On a démontré que tout réel y_0 positif ou nul possède au moins un antécédent par f $\mathbb{R}^+$. f est surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Ce théorème permet d'établir que tout réel positif ou nul admet une unique racine $2n^{\text{ième}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_{2n} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est telle que : $f_{2n}(0) = 0$, $\lim\limits_{+\infty} f_{2n} = +\infty$

$x \longrightarrow x^{2n}$

f_{2n} continue sur $\mathbb{R}^+$.

f_{2n} est donc surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle est aussi injective car strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

III - APPLICATION 2.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
f continue sur $\mathbb{R}$.
Alors : $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

• Soit y_0 un réel quelconque.

$(\exists (\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2)$ $(\alpha < 0$ et $\beta > 0$ et $\alpha < y_0 < \beta)$.

(Il suffit de prendre : $\alpha = -|y_0| - 1$ et $\beta = |y_0| + 1$ car $-|y_0| \leq y_0 \leq |y_0|$)

Puisque $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, pour α négatif on a : $(\exists A > 0)$ $(\forall x < -A)$ $(f(x) < \alpha)$

Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, pour β positif on a : $(\exists B > 0)$ $(\forall x > B)$ $(f(x) > \beta)$

Soit $x_0 = -A - 1$ et $x_1 = B + 1$.

$x_0 < 0$ et $x_1 > 0$ et $f(x_0) < \alpha < y_0 < \beta < f(x_1)$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, sa restriction à $[x_0 , x_1]$ est continue sur $[x_0 , x_1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([x_0 , x_1]) = [m ; M]$.

L'intervalle $[f(x_0) , f(x_1)]$ est évidemment inclus dans $[m , M]$.

$(\forall y \in [f(x_0) , f(x_1)])$ $(y \in [m , M])$ donc $(\exists x \in [x_0 , x_1])$ $(y = f(x))$.

Cette dernière propriété est vérifiée par y_0 puisque $y_0 \in \,]f(x_0) , f(x_1)[$

Tout réel admet donc un antécédent par f dans $\mathbb{R}$. f est donc surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- <u>Ce théorème permet d'établir que tout réel admet une unique racine $(2n+1)^{\text{ième}}$</u> .

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f_{2n+1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie : $\lim\limits_{-\infty} f_{2n+1} = -\infty$

$\qquad x \longrightarrow x^{2n+1}$ $\qquad \lim\limits_{+\infty} f_{2n+1} = +\infty$

f_{2n+1} continue sur $\mathbb{R}$.

f_{2n+1} est donc surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi injective car strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

IV - APPLICATION 3.

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
Alors : $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$

- Soit y_0 un réel quelconque.

$(\exists(\alpha , \beta) \in \mathbb{R}^2)$ $(\alpha < 0$ et $\beta > 0$ et $\alpha < y_0 < \beta)$ (cf. III)

Puisque $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, pour β positif on a :

$$(\exists \delta > 0) \ (\forall x > \delta) \ (f(x) > \beta)$$

Soit $x_1 = \delta + 1$.
$x_1 > \delta > 0$ et $f(x_1) > \beta > y_0$.

Puisque $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$, pour α négatif on a :

$$(\exists a > 0) \ (\forall x \in]0 , a[\ ) \ (f(x) < \alpha)$$

(Remarquons tout de suite que : $a \leqslant \delta$; sinon il existerait un x tel que : $f(x) > \beta$ et $f(x) < \alpha$ ce qui n'est pas possible puisque $\alpha < \beta$).

Soit $x_0 = \frac{a}{2}$.

$0 < x_0 < a$ et $f(x_0) < \alpha < y_0$

a étant inférieur ou égal à δ , il est évident que x_0 est inférieur à x_1 . D'où :

$$f(x_0) < \alpha < y_0 < \beta < f(x_1) .$$

f étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, sa restriction à $[x_0 , x_1]$ est continue sur $[x_0 , x_1]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $f([x_0 , x_1]) = [m , M]$.

$(\forall y \in [f(x_0) , f(x_1)]) \ (y \in [m , M])$ donc : $(\exists x \in [x_0 , x_1]) \ (y = f(x))$.

Cette dernière propriété est vérifiée par y_0 puisque y_0 appartient à $]f(x_0) , f(x_1)[$.
Tout réel admet donc un antécédent par f dans $\mathbb{R}^{+*}$. f est donc surjective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$.

Ce théorème permet d'établir en particulier que la fonction logarithme népérien est surjective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. (Elle est aussi injective car strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$).

DERIVATION.

I - DERIVABILITE ET LIMITE DE FONCTION DERIVEE.

Souvent nos élèves de terminales, pour déterminer $f'(x_0)$, utilisent $\lim\limits_{x_0} f'$ sans connaître de propriété leur permettant de le faire.

Le théorème des accroissements finis n'est plus au programme depuis longtemps ; c'est dommage. Il permettait d'être précis à ce sujet. Ce n'est d'ailleurs pas le seul cas où ce théorème présente une application intéressante (voir II).

THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS.

Soit f *une fonction numérique continue sur* $[a\,,\,b]$ *et dérivable sur* $]a\,,\,b[$.
Il existe au moins un réel c *, élément de* $]a\,,\,b[$ *, tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

REMARQUE 1.

f peut être dérivable en x_0 et $\lim\limits_{x_0} f'$ ne pas exister.

Il suffit de considérer

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\forall x\,,\ x \neq 0\,,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\frac{1}{x} = r(x)$ et $\lim\limits_{0} r = 0$

f est donc dérivable en 0 .

Mais on constate aisément que $\lim\limits_{0} f'$ n'existe pas. (f' est discontinue en 0).

REMARQUE 2.

f peut être non dérivable en x_0 et $\lim\limits_{x_0} f'$ exister.

Il suffit de considérer : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow \begin{cases} x + 1 & \text{pour } x \geqslant 0 \\ x - 1 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = +1$.

$\lim\limits_{0} f' = +1$ et f non dérivable en 0 car discontinue en 0 .

THEOREME.

Soit f *une fonction numérique continue sur* $[a , b]$ *et dérivable sur* $]a , b[$ ***sauf*** *peut-être en* x_0 *;*   *Si* $\lim\limits_{x_0} f'$ *existe et a pour valeur le réel* A *, alors* f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) = A.$

- Soit : $\dot{I}^{\alpha}_{x_0} =]x_0 - \alpha , x_0 + \alpha[- \{x_0\}$ (α réel positif)

  Il s'agit de démontrer :

  $\forall \varepsilon > 0 , \exists \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \forall x \in \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon$

- Soit donc ε positif quelconque.

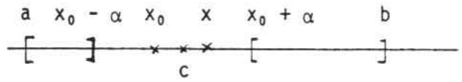
  Puisque $\lim\limits_{x_0} f' = A$, on a : $\exists \dot{I}^{\alpha}_{x_0} \subset]a , b[, \forall x \in \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , |f'(x) - A| < \varepsilon$

- f est continue sur $[a\ ,\ b]$, donc f est continue en tout point de $\mathring{I}^{\alpha}_{x_0}$.

  Par ailleurs, f est dérivable en tout point de $]a\ ,\ b[\ -\ \{x_0\}$, donc en tout point de $\mathring{I}^{\alpha}_{x_0}$. On peut donc appliquer à f le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $J =]\inf(x,x_0)\ ,\ \sup(x,x_0)[$ pour tout x élément de $\mathring{I}^{\alpha}_{x_0}$.

  D'où : $\forall x \in \mathring{I}^{\alpha}_{x_0}\ ,\ \exists c \in J\ ,\ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$

  c appartient nécessairement à $\mathring{I}^{\alpha}_{x_0}$



  On a donc : $|f'(c) - A| < \varepsilon$

- On a établi : $\forall x \in \mathring{I}^{\alpha}_{x_0}\ ,\exists c \in \mathring{I}^{\alpha}_{x_0}\ ,\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| = |f'(c) - A|$

  avec : $|f'(c) - A| < \varepsilon$.

- En conclusion : $\forall \varepsilon > 0\ ,\exists\, \mathring{I}^{\alpha}_{x_0}\ ,\forall x \in \mathring{I}^{\alpha}_{x_0}\ ,\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A\right| < \varepsilon$; c'est-à-dire : f dérivable en x_0 et $f'(x_0) = A$.

REMARQUE 2'.

Pour que la remarque 2 soit vérifiée, il est nécessaire que f soit discontinue en x_0 .

EXEMPLE 1.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x^3 - x + 1 & \text{si } x < +1 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant +1 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

La restriction de f à $]-\infty\ ,\ +1[$ est dérivable sur $]-\infty\ ,\ +1[$ et $f'(x) = 3x^2 - 1$.
La restriction de f à $]+1\ ,\ +\infty[$ est dérivable sur $]+1\ ,\ +\infty[$ et $f'(x) = 2x$.

$$\lim_{+1^+} f' = \lim_{+1^-} f' = +2 \quad \text{donc} \quad \lim_{+1} f' = +2$$

D'après le théorème précédent f est dérivable en $+1$ et $f'(+1) = +2$.

En terminale, on peut procéder de la façon suivante :
Puisque f est continue en + 1 , la restriction de f à $]-\infty, +1]$ est :
$(x \longmapsto x^3 - x + 1)$ application dérivable sur $]-\infty, +1[$ et à gauche en + 1 avec
$f'_g(+1) = +2$.

Par hypothèse, la restriction de f à $[+1, +\infty[$ est : $(x \longmapsto x^2)$. Cette application est dérivable sur $]+1, +\infty[$ et à droite en + 1 avec : $f'_d(+1) = +2$.

f est donc dérivable à droite et à gauche en + 1 et les nombres dérivés à droite et à gauche sont égaux. f est donc dérivable en + 1 et $f'(+1) = +2$.

EXERCICE 2.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \begin{cases} x^2 \mathrm{Log}|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2x\mathrm{Log}|x| + x$ et $\lim\limits_{0} f' = 0$
f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

En terminale, on est obligé de déterminer la limite de $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 . Le résultat est évident.

CONCLUSION.

On voit bien que le théorème n'est pas indispensable au niveau d'une Terminale. Mais comme on se place pratiquement toujours dans les hypothèses du théorème, il est bien difficile d'expliquer à nos élèves qu'ils ne doivent pas utiliser une propriété (vraie) qui leur paraît évidente. Peut-être la remarque 1 suffit-elle à leur montrer qu'il y a lieu de faire attention.

II - DERIVABILITE ET FONCTION DERIVEE BORNEE.

REMARQUE.

> Soit f une fonction numérique continue et dérivable sur $[a , b]$.
> La fonction dérivée de f n'est pas nécessairement bornée sur $[a , b]$.

Il suffit de considérer :

$$f : \left[0 , \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est continue sur $[0 , \frac{\pi}{2}]$

f est dérivable sur $]0 , \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}$

f est aussi dérivable (à droite) en 0 :

$$r(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{0+} r = 0$$

f' n'est pas bornée sur $[0 , \frac{\pi}{2}]$:

Considérons la suite $\left(\frac{1}{2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0 .

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f'(\frac{1}{2\pi n}) = -\sqrt{2\pi n}$

la suite $f'(\frac{1}{2\pi n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

THEOREME.

> *Soit* f *une fonction numérique continue et dérivable sur* $[a ; b]$ *et telle que* f' *soit bornée sur* $[a , b]$ *par un réel positif* M . *(c'est-à-dire :* $\forall x \in [a , b] \quad |f'(x)| \leq M$.)
>
> *Alors :* $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$

D'après le théorème des accroissements finis :

$\exists c \in [a , b] \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Or, par hypothèse, $|f'(c)| \leqslant M$.

$|f(b) - f(a)| \leqslant (b - a) \; |f'(c)| \leqslant (b - a)M.$

REMARQUES.

Ce théorème ne figure plus aux programmes des classes du Second Cycle. Il traduit pourtant une notion que tous nos élèves possèdent intuitivement : si un véhicule a roulé pendant 30 minutes à plus de 40 km/h et à moins de 90 km/h, il a parcouru entre 20 et 45 km. S'il consomme entre 8 et 10 litres aux cent kilomètres, un parcours de 25 km nécessite au moins 2 et au plus 2,5 litres d'essence.

Interprétation graphique : soit x_0 un élément quelconque de $[a , b]$. D'après le théorème précédent on a, pour toute fonction numérique f continue sur $[a , b]$:

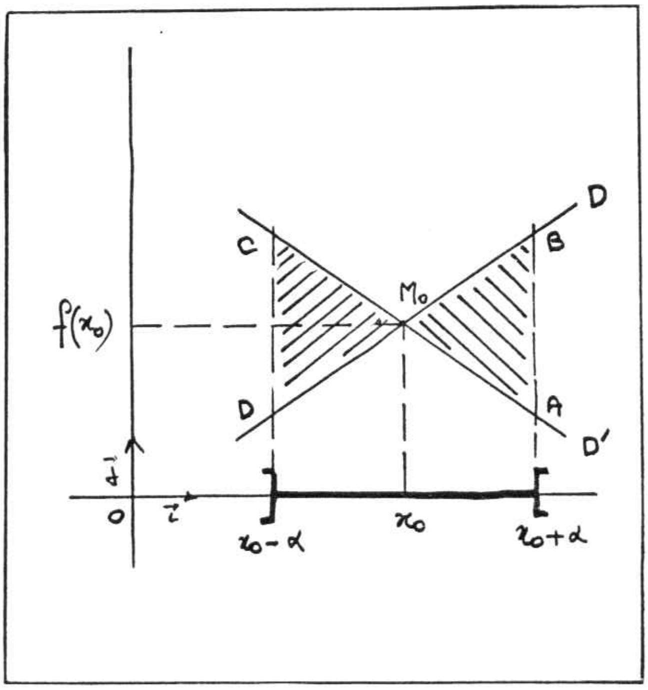
$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant M \; |x - x_0| \; .$$

D'où : $\forall x \in [a, b] \quad f(x_0) - M \; |x - x_0| \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + M \; |x - x_0|$

Soit D la droite d'équation : $y = M(x - x_0) + f(x_0)$

Soit D' la droite d'équation : $y = -M(x - x_0) + f(x_0)$

Pour tout intervalle $]x_0 - \alpha , x_0 + \alpha[$ contenu dans $[a , b]$, la représentation graphique de f est située entre les deux droites D et D' (dans le "papillon" ABCD du dessin ci-dessous).



III - DERIVABILITE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE $[a , b]$

THEOREME.

> *Soit* $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *, continue sur* $[a , b]$.
>
> *Soit* $P : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}$
>
> $$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$
>
> P *est dérivable sur* $[a , b]$ *et la fonction dérivée de* P *est* f .

• Démontrons que P est dérivable à droite en tout point de $[a , b[$ et que $P'_d(x_0) = f(x_0)$.
La dérivabilité à gauche se démontre par une méthode analogue.

• Soit x un élément quelconque de $]x_0 , b]$.

$$\left|\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0)dt\right|$$

$$'' \quad = \frac{1}{x - x_0} \left|\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] \, dt\right|$$

$$'' \quad \leqslant \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| \, dt$$

• Soit ε un réel positif quelconque.
f étant continue sur $[a , b]$, donc en x_0, il existe un réel positif η tel que :

$$\forall y \in]x_0 - \eta , x_0 + \eta[\quad , \quad |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Soit x un élément quelconque de $]x_0 , x_0 + \eta[$.
Pour tout t compris entre x_0 et x , c'est-à-dire élément de $[x_0 , x_0 + \eta[$,
$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. On a donc :

$$\left|\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \varepsilon \, dt \quad (= \varepsilon).$$

• En conclusion : P est dérivable à droite en x_0 et $P'_d(x_0) = f(x_0)$ puisque :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left| \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = 0$$

AUTRE DEMONSTRATION DE CE THEOREME.

En utilisant le théorème de la valeur moyenne suivant :

Soit $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur* $[a , b]$.
$\exists c \in [a , b] \quad , \int_a^b f(t)dt = (b - a) f(c)$.

Soit $x_0 \in [a , b[$.

$$\forall x \in [a , b] - \{x_0\} , \quad \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Soit ε positif quelconque.
f est continue en x_0 , donc : $\exists \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \forall y \in \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \quad |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Pour tout x élément de $]x_0 , x_0 + \alpha[$, il existe c élément de $[x_0 , x]$ tel que :

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = f(c)$$

c , élément de $[x_0 , x]$, est donc aussi élément de $\dot{I}^{\alpha}_{x_0}$. D'où :

$$|f(c) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \forall x \in \dot{I}^{\alpha}_{x_0} , \quad \left| \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

P est donc dérivable à droite en x_0 et $P'_d(x_0) = f(x_0)$.

REMARQUE 1.

D'après le théorème de la valeur moyenne, pour tout x élément de $[a , b] - \{x_0\}$, il existe c élément de $[\inf(x , x_0) ; \sup(x , x_0)]$ tel que :

$$\frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c) .$$

c dépend de x et, comme $\inf(x , x_0) \leqslant c \leqslant \sup(x , x_0)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \inf(x , x_0) = x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \sup(x , x_0) = x_0$, il est tentant d'en déduire $\lim\limits_{x_0} c = x_0$; d'où $\lim\limits_{x \to x_0} f(c) = f(x_0)$ puisque f est continue en x_0 .

Si l'on n'envisage pas d'utiliser l'axiome du choix, cette démonstration n'est pas correcte ; l'expression "c a pour limite x_0 en x_0 " n'a aucun sens. La relation qui, à tout x de $[a , b] - \{x_0\}$ fait correspondre le réel c , n'est pas une application puisque, pour un même x , il peut exister plusieurs réels c tels que :

$$\int_a^b f(t)dt = f(c) .$$

Le théorème de la valeur moyenne est un théorème d'existence, non d'unicité.

Pourtant cette démonstration devient correcte si l'on fait l'hypothèse supplémentaire : f strictement monotone sur $[a , b]$.

Si f est strictement monotone et continue sur $[a , b]$, alors f est une bijection de $[a , b]$ sur $[\inf (f(a) , f(b)); \sup (f(a) , f(b))]$. Il ne peut exister deux réels c distincts vérifiant le théorème de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned}(b - a) f(c) = (b \quad a) f(c') &\Longrightarrow f(c) = f(c') \\ f(c) = f(c') &\Longrightarrow c = c'\end{aligned}$$

On a alors la propriété suivante :

> Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur $[a , b]$.
> Il existe un <u>unique</u> réel c , élément de $[a , b]$, tel que :
>
> $$\int_a^b f(t)\, dt = f(c) . (b - a)$$

Dans ce cas la relation qui, à tout x de $[a , b] - \{x_0\}$ associe c , est une application et on peut parler de limite de c en x_0 .

<u>REMARQUE 2</u>.

- L'application P est dérivable sur $[a , b]$. Elle est donc continue sur $[a , b]$.

• La fonction dérivée de P est f . P est, par définition, une primitive de f . D'après le théorème, pour qu'une fonction numérique admette une primitive sur $[a , b]$, il suffit qu'elle soit continue sur $[a , b]$. Cette condition n'est pas nécessaire :

La fonction numérique

$$f : [-1 , +1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est discontinue en 0 et admet cependant pour primitive sur $[-1 , +1]$:

$$f : [-1 , +1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

INTEGRATION AU SENS DE RIEMANN.

Cet article est constitué de deux parties bien distinctes :

I - INTEGRALE ET PRODUIT SCALAIRE.

Dans plusieurs épreuves de baccalauréat (série C) le problème portait sur un espace vectoriel fonctionnel E dans lequel était défini un produit scalaire à l'aide d'une application φ du type :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Nous établissons ici que φ est un produit scalaire lorsque E est l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle $[a , b]$ et que cette propriété est fausse lorsque E est l'espace vectoriel des fonctions numériques intégrables sur $[a , b]$.

II - EVALUATION NUMERIQUE DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR LA METHODE DES TRAPEZES.

Après avoir présenté cette méthode et donner un majorant de l'erreur commise, nous proposons deux applications :

- La première (niveau Terminale) permet d'utiliser le théorème sur les fonctions réciproques et d'effectuer quelques manipulations sur une mini-calculatrice.

- La seconde (niveau Première) est mise en évidence à travers deux exercices de cinématique. Application intéressante (peut-être) pour nos collègues des groupes Maths-Physique.

I - <u>INTEGRALE ET PRODUIT SCALAIRE</u>.

1° Soit $C_{[a\,,\,b]}$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[a\,,\,b]$.

$(C_{[a\,,\,b]}, +\,,\,.)$ est un espace vectoriel réel.

$(C_{[a\,,\,b]}, +\,,\,x)$ est un anneau commutatif unitaire et non intègre.

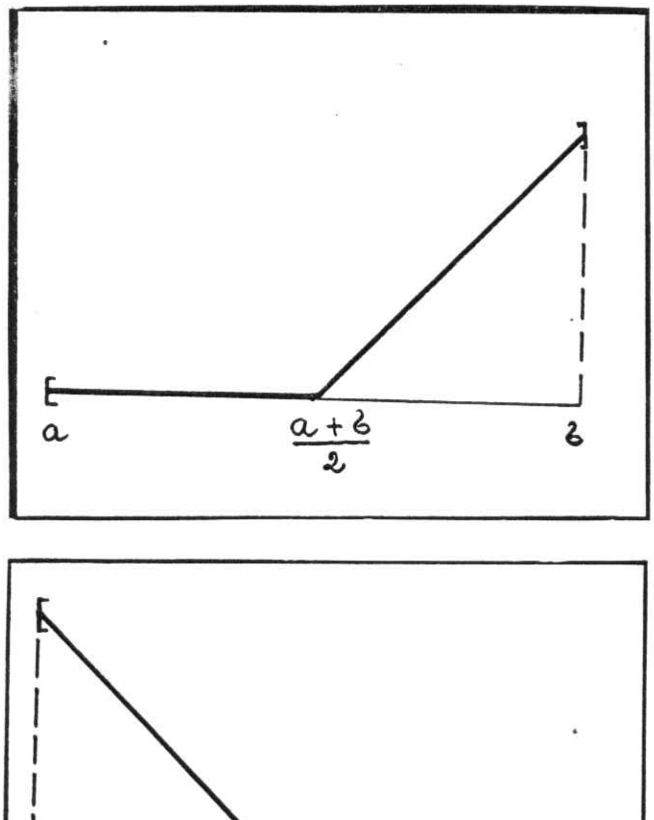
<u>Unitaire</u> : $f_1 : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_1 \in C_{[a\,,\,b]}$

$\qquad x \longmapsto 1$

<u>Non intègre</u> : : $\exists (f\,,\,g) \in (C_{[a\,,\,b]})^2$, $f \neq f_0$ et $g \neq f_0$ et $f x g = f_0$

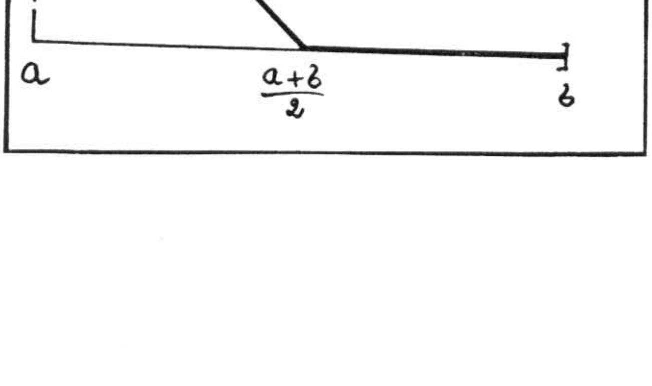
(f_0 représente la fonction nulle sur $[a\,,\,b]$).

Il suffit de considérer les fonctions f et g :



$$f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[a\,,\,\frac{a+b}{2}\right] \\ x - \frac{a+b}{2} & \text{si } x \in \left]\frac{a+b}{2}\,,\,b\right] \end{cases}$$



$$g : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\longmapsto \begin{cases} - x + \frac{a+b}{2} & \text{si } x \in \left[a\,,\,\frac{a+b}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{a+b}{2}\,,\,b\right] \end{cases}$$

2° Soit φ l'application suivante :

$$\varphi : C_{[a\ ,\ b]} \times C_{[a\ ,\ b]} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$$

φ est-elle un produit scalaire dans l'espace vectoriel $C_{[a\ ,\ b]}$?

a) D'après les propriétés de $C_{[a\ ,\ b]}$ muni des lois $+$, $\times$, $.$ rappelées en 1° et d'après les propriétés de l'intégrale, on a immédiatement :

- $\forall (f\ ,\ g) \in (C_{[a\ ,\ b]})^2 \quad \varphi(f\ ,\ g) = \varphi(g\ ,\ f)$
- $\forall (f\ ,\ g,\ h) \in (C_{[a\ ,\ b]})^3 \quad \varphi(f + g\ ,\ h) = \varphi(f\ ,\ h) + \varphi(g\ ,\ h)$
- $\forall (f\ ,\ g) \in (C_{[a\ ,\ b]})^2\ ,\ \forall r \in \mathbb{R} \quad \varphi(r.f\ ,\ g) = r\,\varphi(f\ ,\ g)$

  (propriété de laquelle on déduit : $\varphi(f_0\ ,\ f_0) = 0$ pour $r = 0$ et $f = g = f_0$)
- $\forall f \in C_{[a\ ,\ b]} \quad \varphi(f\ ,\ f) \geq 0 \qquad$ (i.e. : $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$)

b) Il reste à établir : $\forall f \in C_{[a\ ,\ b]} - \{f_0\} \quad \varphi(f\ ,\ f) > 0$.

α) Propriété.

$$\boxed{\text{Si } f \in C_{[a\ ,\ b]} - \{f_0\} \quad \text{et} \quad f([a\ ,\ b]) \subset \mathbb{R}^+\ , \ \text{alors} \int_a^b f(x)dx > 0}$$

D'après les hypothèses, il existe x_0 , élément de $[a\ ,\ b]$, tel que $f(x_0)$ soit positif (non nul).

f continue en $x_0 \iff \forall I^{\varepsilon}_{f(x_0)}\ ,\ \exists\, I^{\alpha}_{x_0}\ ,\ f(I^{\alpha}_{x_0} \cap [a\ ,\ b]) \subset I^{\varepsilon}_{f(x_0)}$

Soit $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ (ε positif)

$$\exists I_{x_0}^{\alpha_0} \ , \ \forall x \in I_{x_0}^{\alpha_0} \cap [a \ , \ b] \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

Pour tout élément x de $I_x^{\alpha_0} \cap [a \ , \ b]$ on a donc : $\frac{f(x_0)}{2} < f(x)$

Soit $[c \ , \ d] \subset I_{x_0}^{\alpha_0} \cap [a \ , \ b]$ avec $c < d$.

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx > \int_c^d \frac{f(x_0)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\ f(x_0)(d - c) > 0 \ .$$

β) Application de cette propriété à $\varphi\ (f \ , \ f)$.

$$\forall f \in C_{[a \ , \ b]} - \{f_0\} \quad f^2 \in C_{[a \ , \ b]} - \{f_0\} \quad \text{et} \quad f^2([a \ , \ b]) \subset \mathbb{R}^+$$

donc, d'après α) , $\varphi(f \ , \ f) = \int_a^b f^2(x)dx > 0$.

3° Extension à $I_{[a \ , \ b]}$, l'ensemble des fonctions numériques intégrables au sens de Riemann sur $[a \ , \ b]$.

a) $(I_{[a \ , \ b]} \ , + \ , \ .)$ est un espace vectoriel réel contenant $C_{[a \ , \ b]}$.

b) Le produit de fonctions intégrables sur $[a \ , \ b]$ est une fonction intégrable sur $[a \ , \ b]$.

- $(f \ , \ g) \in (I_{[a \ , \ b]})^2 \Longrightarrow$ f et g bornées sur $[a \ , \ b]$.
  $\Longrightarrow$ $f\times g$ bornée sur $[a \ , \ b]$.

- Supposons f et g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

  f et g étant bornées sur $[a \ , \ b]$, il existe des fonctions en escalier sur $[a \ , \ b]$ $\varphi_1 \ , \varphi_2 \ , \ \psi_1 \ , \ \psi_2$ telles que :

  $$f_0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \qquad \text{et} \qquad f_0 \leq \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$$

  d'où $\quad f_0 \leq \varphi_1\,\varphi_2 \leq f\times g \leq \psi_1\,\psi_2$

Démontrons que, pour tout ε positif, on peut trouver des fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\int_a^b \psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2 < \varepsilon$$

$$\int_a^b \psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2 = \int_a^b \psi_1(\psi_2 - \varphi_2) + \int_a^b {}_2(\psi_1 - \varphi_1)$$

$$\leqslant M_1\int_a^b \psi_2 - \varphi_2 + M_2\int_a^b \psi_1 - \varphi_1$$

avec $M_1 = \sup\limits_{[a,b]} \psi_1$ et $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} \varphi_2$

Soit ε positif quelconque.

Soit M_1 tel que : $M_1 > \sup\limits_{[a,b]} f$ $(M_1 \neq 0)$; puisque f est intégrable sur $[a , b]$ on peut choisir des fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 telles que :

$$f_0 \leqslant \varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_1 - \varphi_1 < \frac{\varepsilon}{2M_1} \qquad (1)$$

de même, soit M_2 tel que : $M_2 > \sup\limits_{[a,b]} g$; g étant intégrable sur $[a , b]$ on peut choisir des fonctions en escalier sur $[a , b]$ telles que :

$$f_0 \leqslant \varphi_2 \leqslant g \leqslant \varphi_2 \quad \text{avec} \int_a^b \psi_2 - \varphi_2 < \frac{\varepsilon}{2M_2} \qquad (2)$$

(dans ce cas : $\varphi_2 \leqslant g \implies \varphi_2 \leqslant M_2$)

(1) et (2) $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b \psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2 < \varepsilon$

fxg est donc bien intégrable sur $[a , b]$.

- Le cas général où f et g sont de signe quelconque se ramène au cas précédent puisqu'en posant :

$$m_1 = \inf_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad m_2 = \inf_{[a,b]} g$$

on peut écrire :

$$f \times g = (f - m_1)\times(f - m_2) + m_1.g + m_2.f - m_1 m_2.$$

$f - m_1$ et $g - m_2$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et intégrables sur $[a , b]$, il en est de même de leur produit d'après le point précédent. fxg est intégrable sur $[a , b]$ car somme de fonctions intégrables sur $[a , b]$.

c) On peut définir l'extension à $(I_{[a , b]})^2$ de l'application définie en 2° :

$$\begin{aligned} \varphi' : I_{[a , b]} \times I_{[a , b]} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_a^b (fxg)(x)dx \end{aligned}$$

CETTE APPLICATION NE DEFINIT PLUS UN PRODUIT SCALAIRE.

Soit $f : [a , b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{pour } x = a \\ 0 & \text{pour } x \neq a \end{cases}$$

$f \in I_{[a , b]} - \{f_0\}$ et $\int_a^b f^2(x)dx = 0$

donc : $\exists f \in I_{[a , b]} - \{f_0\}$, $\varphi'(f , f) = 0$.

φ' n'est donc pas un produit scalaire défini sur $I_{[a , b]}$.

4° Etude complémentaire.

a) Propriété.

$$\boxed{\forall f \in I_{[a , b]} \quad \left(\int_a^b |f(x)|\, dx = 0 \iff \int_a^b f^2(x)dx = 0\right)}$$

$(\Longleftarrow)$ D'après l'inégalité de SCHWARZ :

$$\forall (f , g) \in (I^{\bullet}_{[a , b]})^2 \left| \int_a^b (fxg)(x)dx \right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

on a :

$$0 \leqslant \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b 1x|f(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b 1dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où :

$$0 \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \leqslant (b - a)^{\frac{1}{2}} \times 0 = 0$$

$(\Longrightarrow)$

• $f \in I_{[a\ ,\ b]} \Longrightarrow$ f bornée sur $[a\ ,\ b]$.

$\Longrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^{+*}\ ,\ M \geqslant \sup_{[a,b]} f$

$$\int_a^b |f(x)|dx = 0 \Longrightarrow \int_a^b \frac{|f(x)|}{M}\, dx = 0$$

$\forall x \in [a\ ,\ b] \quad 0 \leqslant \frac{f(x)}{M} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{f^2(x)}{M} \leqslant \frac{|f(x)|}{M}$

d'où : $0 \leqslant \int_a^b \frac{f^2(x)}{M}\, dx \leqslant \int_a^b \frac{|f(x)|}{M} = 0$

b) Soit $N_{[a\ ,\ b]} = \{f\ /\ f \in I_{[a\ ,\ b]}$ et $\int_a^b |f(x)|dx = 0\}$

$(N_{[a\ ,\ b]}\ ,\ +\ ,\ .)$ est un sous espace vectoriel de $I_{[a\ ,\ b]}$.

La relation R définie sur $I_{[a\ ,\ b]}$ par : $(fRg \Longleftrightarrow (f - g) \in N_{[a\ ,\ b]})$ est une relation d'équivalence.

Transitivité :

$$\int_a^b |f - h| = \int_a^b |f - g + g - h| \leqslant \int_a^b |f - g| + \int_a^b |g - h| = 0\ )$$

Soit : I/N l'ensemble des classes d'équivalence ou ensemble quotient.

c) Construction d'un produit scalaire sur I/N.

• $(X,Y) \in (I/N)^2$
$f \in X$
$g \in Y$

La relation : $\emptyset\,(X,Y) = \varphi(f,g)$ définit-elle une application de $(I/N)^2$ vers $\mathbb{R}$?

(rappelons ici que : $\varphi(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$)

Soit $f' \in X$ et $g' \in Y$.

$$\varphi(f,g) = \varphi(f',g') \iff |\varphi(f,g) - \varphi(f',g')| = 0$$

$$\begin{aligned}|\varphi(f,g) - \varphi(f',g')| &= |\varphi(f - f',g) - \varphi(f',g' - g)| \\ &= \left|\int_a^b (f - f')g - \int_a^b f'(g' - g)\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f - f'|\,|g| + \int_a^b |f'|\,|g' - g|\end{aligned}$$

$$\leqslant \left[\int_a^b (f - f')^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b (f')^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (g' - g)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(f \in X \text{ et } f' \in X) \Rightarrow \int_a^b |f - f'| = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f - f')^2 = 0$$

de même : $(g \in Y$ et $g' \in Y) \Rightarrow \int_a^b (g' - g)^2 = 0$.

d'où : $|\varphi(f,g) - \varphi(f',g')| = 0$ c.q.f.d.

• I/N est un espace vectoriel pour les lois :

<u>addition</u> : $\forall (X,Y) \in (I/N)^2 \quad X + Y = \dot{\widehat{f + g}}$ où $f \in X$ et $g \in Y$.

multiplication externe : $\forall X \in I/N$, $\forall r \in \mathbb{R}$ $r.X = \dot{\widehat{r.f}}$ où $f \in X$.

Ces définitions sont indépendantes du (ou des) représentant (s) choisi(s) :

$$\int_a^b |(f + g) - (f' + g')| = \int_a^b |(f - f') + (g - g')| \leqslant \int_a^b |f - f'| + \int_a^b |g - g'| =$$

$$\int_a^b |r.f - r.f'| \leqslant \int_a^b |r|\ |f - f'| \quad = \quad |r| \int_a^b |f - f'| = 0$$

• • $\emptyset$ est un produit scalaire défini sur I/N.

$-\forall (X,Y) \in (I/N)^2 \quad \emptyset\ (X,Y) = \varphi(f,g) = \varphi(g,f) = \emptyset\ (Y,X)$

$$-\forall (X,X',Y) \in (I/N)^3 \quad \emptyset\ (X + X',Y) = \varphi(f + f',g) = \varphi(f,g) + \varphi(f',g) = \emptyset\ (X,Y) + \emptyset\ (X',Y)$$

$$-\forall (X,Y) \in (I/N)^2,\ \forall r \in \mathbb{R} \quad \emptyset\ (r.X,Y) = \varphi(r.f,g) = r\,\varphi(f,g) = r\,\emptyset(X,Y)$$

propriété de laquelle on déduit : $\emptyset\ (N,N) = o$:

$$\emptyset\ (o.N,N) = o\ \emptyset\ (N,N) = o = \varphi(o.f_0,f_0) = \varphi(f_0,f_0) = \emptyset\ (N,N)$$

(où f_0 représente la fonction nulle, qui est un élément de N).

- Il reste à établir : $\forall X \in (I/N)-N$, $\emptyset\ (X,X) > o$

$\forall X \in I/N \quad \emptyset\ (X,X) = \varphi(f,f) = \int_a^b f^2(x)dx \geqslant o$

Démontrons : $(\emptyset\ (X,X) = o \iff X = N)$

$$\begin{aligned} \emptyset\ (X,X) = o &\iff \forall f \in X \quad \varphi(f,f) = o \\ &\iff \forall f \in X \quad \int_a^b f^2(x)dx = o \\ &\iff \forall f \in X \quad \int_a^b |f(x)|dx = o \\ &\iff \forall f \in X,\ f \in N \\ &\iff X = N \end{aligned}$$

(puisque deux classes sont soit disjointes soit confondues).

II - EVALUATION NUMERIQUE DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR LA METHODE DES TRAPEZES.

1° PRESENTATION DE LA METHODE.

a) Soit f continue sur $[a , b]$.

● Pour définir les sommes de Riemann associées à f , on est amené à utiliser des subdivisions de $[a , b]$ $(x_i)_{i \in [0 , n]}$ telles que :

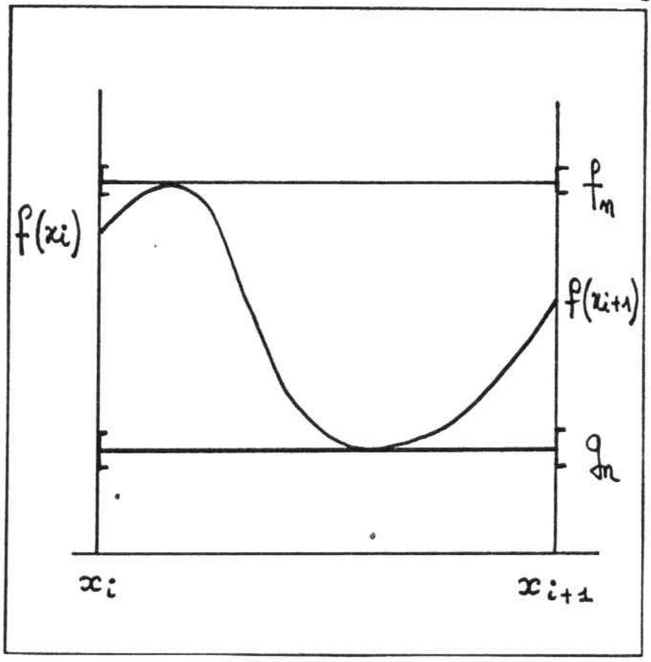
$$x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \sup(x_{i+1} - x_i) = 0$$

et des fonctions en escalier sur $[a , b]$ f_n et g_n qui encadrent f (qui existent pour toute fonction bornée sur $[a , b]$).

Définissons f_n et g_n par :

$$\forall i \in [0, n-1] \quad , \forall x \in [x_i, x_{i+1}[\quad , \quad f_n(x) = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad \text{et} \quad f_n(b) = f(b).$$

$$\forall i \in [0, n-1] \quad , \forall x \in [x_i, x_{i+1}[\quad , \quad g_n(x) = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad \text{et} \quad g_n(b) = f(b).$$



Posons :

$$F_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} f_n(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$G_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} g_n(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad G_n \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant F_n} \qquad (1)$$

- Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, posons :

$$\varphi_n = \sum_{i=o}^{i=n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\psi_n = \sum_{i=o}^{i=n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

$$\forall i \in [o,n-1] \qquad \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x) \leqslant f(x_i) \leqslant \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x)$$

et aussi :

$$\forall i \in [o,n-1] \qquad \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x) \leqslant f(x_{i+1}) \leqslant \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} f(x)$$

puisque f est continue sur $[a , b]$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad G_n \leqslant \varphi_n \leqslant F_n \quad$ et $\quad G_n \leqslant \psi_n \leqslant F_n$

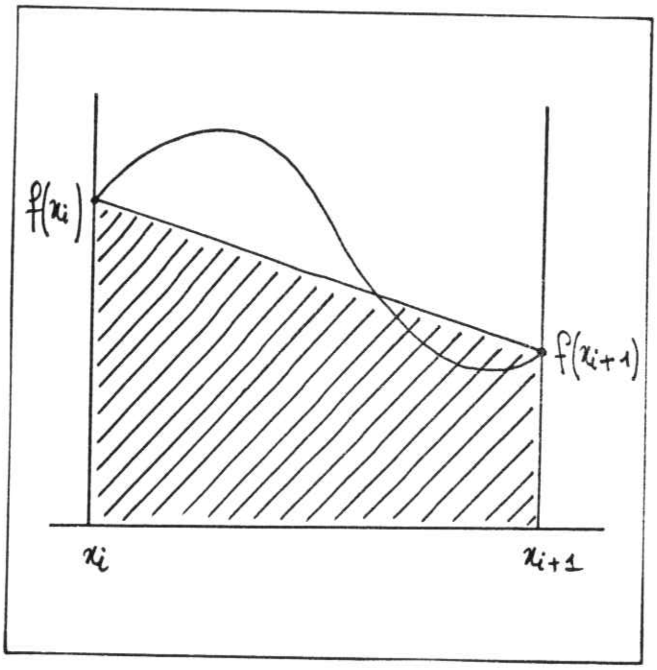
et aussi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad G_n \leqslant \frac{\varphi_n + \psi_n}{2} \leqslant F_n}$ (2)

- D'après (1) et (2) on peut considérer $\frac{\varphi_n + \psi_n}{2}$ comme une valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$.

Soit $T_n = \frac{\varphi_n + \psi_n}{2}$:

$$T_n = \sum_{i=o}^{i=n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

Chaque terme $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ $(x_{i+1} - x_i)$ représente, lorsque f prend des valeurs positives, l'aire d'un trapèze ; d'où le nom de la méthode.



b) Cas où la subdivision de $[a , b]$ est régulière :

$$\forall i \in [0 , n] \qquad x_i = a + \frac{i(b - a)}{n}$$

On obtient :

$$T_n = \frac{b - a}{n} \sum_{i = 0}^{n - 1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

Ou encore :

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i = 0}^{n - 1} f(x_i) \right)$$

c) Etude de l'erreur dans l'hypothèse où la subdivision de $[a\ ,\ b]$ est régulière et où f est supposée deux fois continuement dérivable sur $[a\ ,\ b]$.

(bibliographie : Analyse COUTY-EZRA (Colin) et documents I.R.E.M. de Marseille).

Soit $I = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=o}^{n-1} I_i$ avec $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$

$$|I - T_n| = \left|\sum_{i=o}^{n-1} \left(I_i - \frac{b-a}{n} \ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=o}^{n-1} \left| I_i - \frac{b-a}{n} \ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right|$$

Pour tout i de $[o,n-1]$, on peut calculer I_i par intégration par parties en supposant f dérivable sur $[a\ ,\ b]$:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = \Big[(t + K)f(t)\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t + K)f'(t)dt$$

On peut choisir K tel que : $\Big[(t + K)f(t)\Big]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{b-a}{n} \ \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$

$K = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ convient et on a alors :

$$|I - T_n| \leqslant \sum_{i=o}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) f'(t)dt \right|$$

On peut calculer cette nouvelle intégrale par intégration par parties en supposant f' dérivable sur $[a\ ,\ b]$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})\ f'(t)dt =$$

$$\left[\left[\frac{1}{2}(t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})^2 + K'\right] f'(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{2}(t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})^2 + K'\right] f''(t)dt$$

On peut choisir K' tel que : $\left[\left[\frac{1}{2}(t - \frac{x_i + x_{i+1}}{2})^2 + K'\right] f'(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} = o$

$K' = -\frac{1}{2}(\frac{x_i - x_{i+1}}{2})^2 = \frac{1}{8}(\frac{b-a}{n})^2$ convient et on a alors :

$$|I - T_n| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i)(t - x_{i+1})f''(t)dt \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(t - x_i)(t - x_{i+1})||f''(t)|dt$$

$\forall t \in [x_i\ ,\ x_{i+1}]$, $(t - x_i)(t - x_{i+1}) \leqslant 0$

D'autre part, supposons f" continue sur $[a\ ,\ b]$; alors f" est bornée sur $[a\ ,\ b]$ par le réel positif non nul $M = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$. (le cas $f'' = f_0$ n'a évidemment aucun intérêt ici).

On a dans ces conditions :

$$|I - T_n| \leqslant \frac{M}{2} \sum_{i=o}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i)(x_{i+1} - t)dt$$

Le calcul donne :

$$|I - T_n| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

En conclusion, lorsque l'on prend T_n comme valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ on commet une erreur inférieure ou égale à $\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ avec $M = \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

2° APPLICATION DE LA METHODE DES TRAPEZES AU CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHEE DE $\frac{\pi}{4}$

- La rédaction de cette application est telle qu'un élève de Terminale puisse la comprendre.

- $\frac{\pi}{4}$ = 0,785398 (résultat machine).

- Démontrons : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$:

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ est continue, dérivable et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $tg'(x) \neq 0$ pour tout x élément de $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $tg\,[0, \frac{\pi}{4}] = [0,1]$.

On a donc affaire à un bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$. Soit φ sa bijection réciproque.

φ est une application de $[0,1]$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ continue, dérivable et strictement croissante sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1] \quad \varphi'(x) = \frac{1}{(tg' \circ \varphi)(x)} = \frac{1}{1 + tg^2\,[tg^{-1}(x)]} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\varphi(x)\Big]_0^1 = \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4}$

- Utilisons la méthode des trapèzes pour calculer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Pour $n = 10$ et la subdivision de $[0,1]$ de pas $\frac{1}{n}$ on a :

$$T_{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{\varphi'(0) + \varphi'(1)}{2} + \sum_{i=1}^{9} \varphi'\left(\frac{i}{10}\right)\right)$$

On peut alors dresser un tableau de valeurs rapidement rempli si les calculs sont effectués à l'aide d'une machine. On obtient :

$$T_{10} = 0,784981$$

(erreur 0,000417 par rapport au résultat précédent).

• Cherchons maintenant à évaluer un majorant de l'erreur commise :

$$\forall x \in [0,1] \qquad (\varphi')''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$$\forall x \in [0,1] \qquad (\varphi')'''(x) = \frac{24x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^4}$$

x	0		1
$(\varphi')'''(x)$	0	+	0
$(\varphi')''(x)$	-2	$\nearrow$	$+\frac{1}{2}$

$$\sup |(\varphi')''(t)| = +2 \qquad t \in [0,1]$$

$$\frac{M(b - a)^3}{12n^2} = \frac{1}{600} < 0{,}0017$$

3° APPLICATION A LA CINEMATIQUE (Niveau Première).

a) Propriété d'un mouvement rectiligne uniformément varié.

Un tel mouvement rectiligne peut être caractérisé par sa vitesse qui est une fonction affine du temps. Soit $v(t) = at + b$. La loi horaire du mouvement est alors :

$$f(t) = \frac{1}{2} at^2 + bt + c \quad (\text{avec } a \neq 0)$$

Soit t_0 et t_1 deux temps distincts. La vitesse moyenne sur $[t_0 , t_1]$, notée $v(t_0 , t_1)$ est par définition :

$$v(t_0 , t_1) = \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1}$$

Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément varié on a :

$$v(t_0 , t_1) = \frac{1}{2} [v(t_0) + v(t_1)]$$

b) Exercice 1.

Un véhicule parcourt 1 000 mètres et parvient alors au bas d'une côte à la vitesse de 25m/s à l'instant $t = 0$. Le véhicule est alors animé d'un mouvement rectiligne tel que sa vitesse varie en fonction du temps suivant la loi :

$$v(t) = -\frac{1}{30}\ t + 25$$

Le véhicule atteint le sommet de la côte au bout de 120 secondes.

1) Déterminer la loi du mouvement pour t appartenant à $[0\ ,\ 120]$.

2) Essayons de retrouver le résultat par une autre méthode :

a) Représenter graphiquement v dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

b) Quelle est la vitesse moyenne sur $[0\ ,\ 60]$, sur $[0\ ,\ x]$ pour tout x élément de $[0\ ,\ 120]$.

c) Quelle est la distance parcourue pendant l'intervalle de temps $[0\ ,\ 60]$, puis $[0\ ,\ x]$

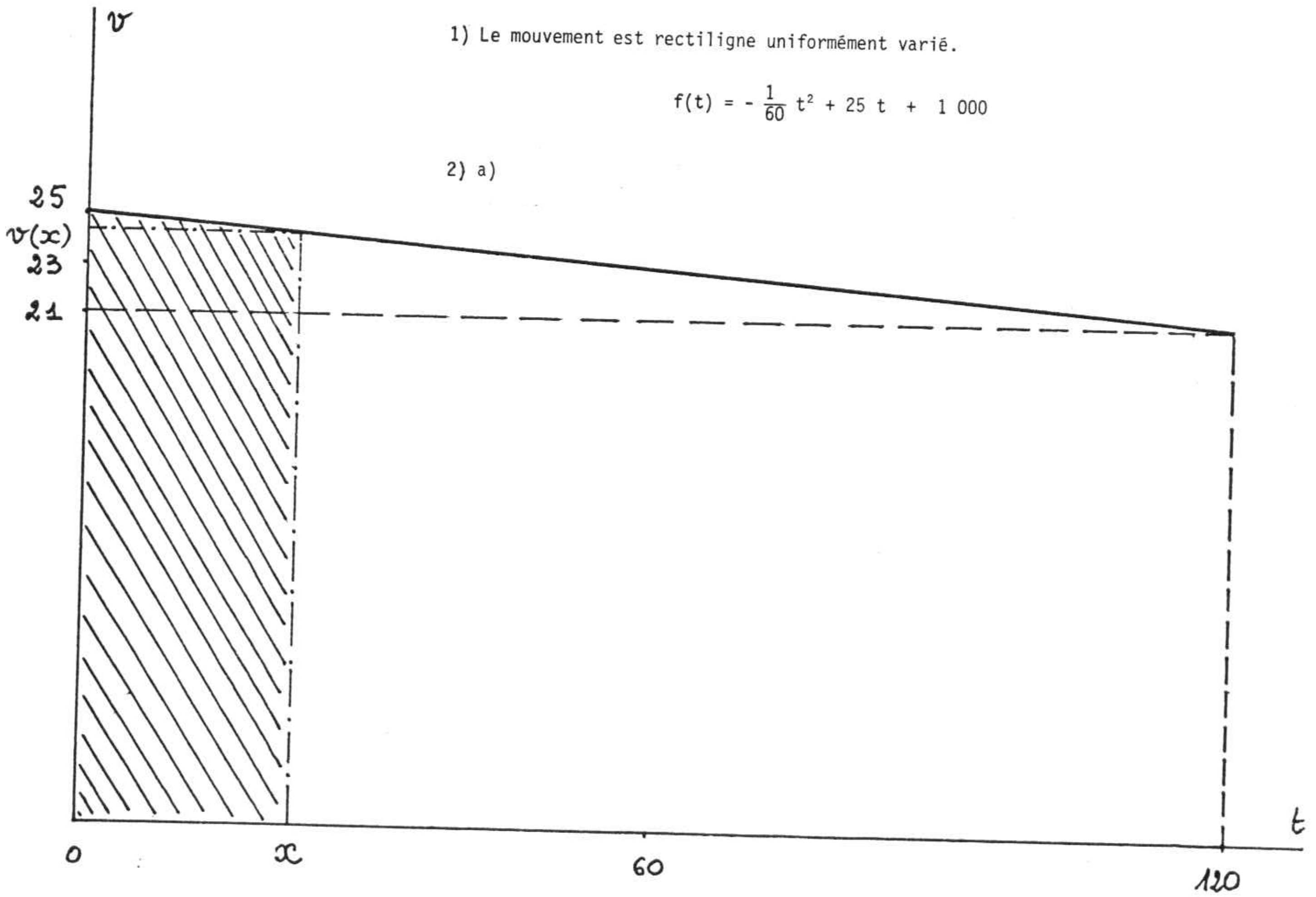
d) Déterminer l'aire du domaine délimité par la représentation graphique de v , l'axe des temps, l'axe des vitesses et la droite d'équation $t = 60$, puis $t = x$.

e) Quelles remarques peut-on tirer de l'étude précédente ?

1) Le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$f(t) = -\frac{1}{60}\ t^2 + 25\ t\ +\ 1\ 000$$

2) a)



b) $v(0\ ,\ 60) = \frac{1}{2}\left[v(0) + v(60)\right] = 24$

$v(0\ ,\ x) = \frac{1}{2}\left[v(0) + v(x)\right] = -\frac{1}{60}x + 25$

c) $d_{60} = v(0\ ,\ 60) \times (60 - 0) = 1440$

$d_x = v(0\ ,\ x) \times (x - 0) = -\frac{1}{60}x^2 + 25x$

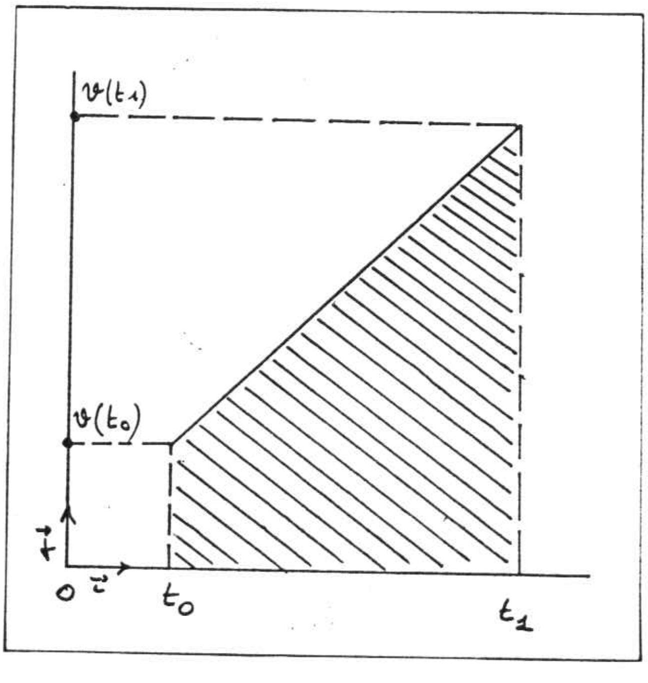
d) $a_{60} = \frac{1}{2}\left[v(0) + v(60)\right] \times 60 = 1440$

$a_x = \frac{1}{2}\left[v(0) + v(x)\right] \times x = -\frac{1}{60}x^2 + 25x$

e) La distance parcourue depuis le début est donc : $-\frac{1}{60}x^2 + 25x + 1\,000$ ($d_x + 1\,000$).

L'aire du trapèze représente la distance parcourue à partir du bas de la côte pendant les x premières secondes.

On peut donc conclure de l'étude précédente que, lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié sur l'intervalle de temps $[t_0\ ,\ t_1]$, la distance $d_{t_1 - t_0}$ est représentée par l'aire du trapèze ci-dessous :

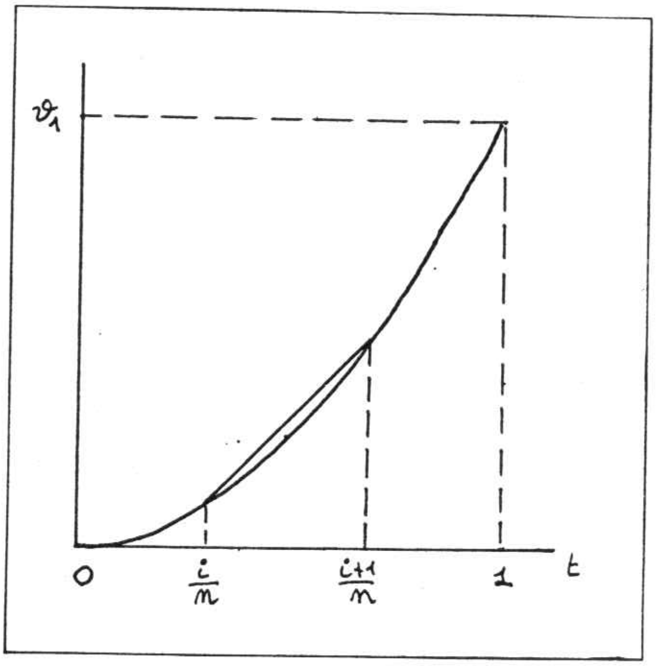


c) Exercice 2.

- Un véhicule tombe en panne de freins et dévale une pente d'un mouvement rectiligne à une vitesse v telle que $v = t^2$. On suppose que la vitesse initiale est nulle.

- Peut-on, en s'inspirant de l'exercice 1, déterminer la distance parcourue par la véhicule au bout de la première seconde, puis au bout de x secondes ?

- Représentation graphique de v sur l'intervalle $[0,1]$.



On sait, d'après l'exercice 1, retrouver la distance parcourue lorsque v est une fonction affine du temps. Ce n'est pas le cas ici. Cependant si l'on partage l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$, sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ on peut, pourvu que n soit assez grand, assimiler l'arc de la courbe représentative de v à un segment de droite. Certes on commet un erreur ; mais celle-ci semble d'autant plus négligeable que n est grand.

Sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{n} , \frac{i+1}{n}\right]$, moyennant cette approximation, la distance parcourue $d_1^i(n)$ est représentée par l'aire d'un trapèze.

$$d_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} d_1^i(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v(\frac{i}{n}) + v(\frac{i+1}{n})}{2} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{v(0) + v(1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} v(\frac{i}{n})\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$$

$$d_1 = \lim_{n \to +\infty} d_1(n) = \frac{1}{3}$$

- Un raisonnement analogue sur l'intervalle $[0 , x]$ donne les résultats :

$$d_x(n) = x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}\right) \quad \text{et} \quad d_x = \frac{x^3}{3}$$

- On vient donc de calculer, sans jamais l'avoir défini, $\int_0^1 t^2dt$ et $\int_0^x t^2dt$ (en utilisant la méthode des trapèzes).

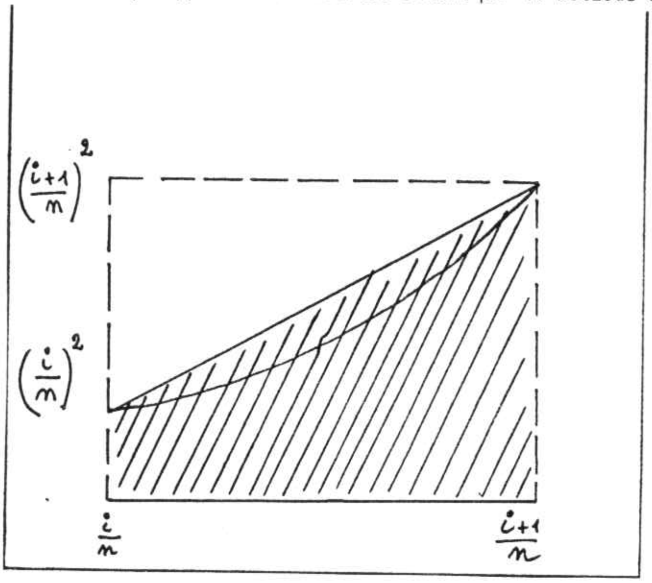
- On connait dans ce cas l'erreur exacte commise sur le résultat : $\frac{x^3}{6n^2}$; c'est la valeur de :

$$\frac{M(b - a)^3}{12\, n^2} \quad (M = 2 , b = x , a = 0)$$

d) Remarques complémentaires.

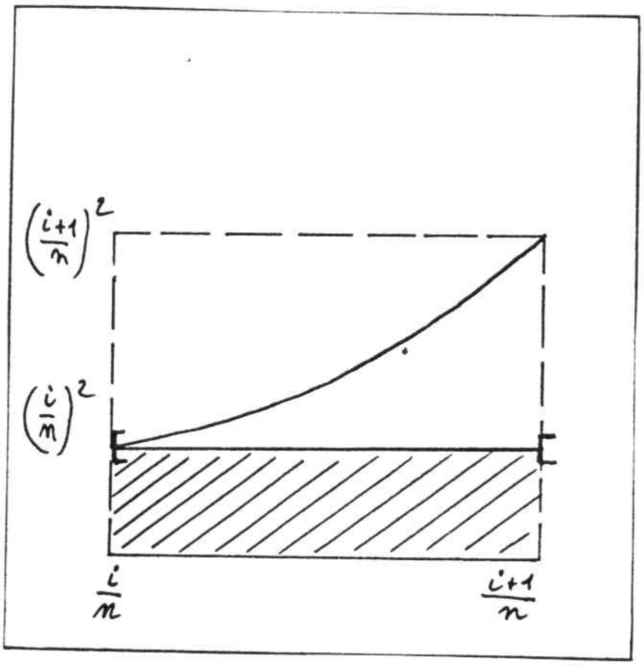
α) On peut utiliser d'autres méthodes pour calculer $\int_0^1 t^2dt$:

a) Rappelons le résultat obtenu par la méthode des trapèzes :



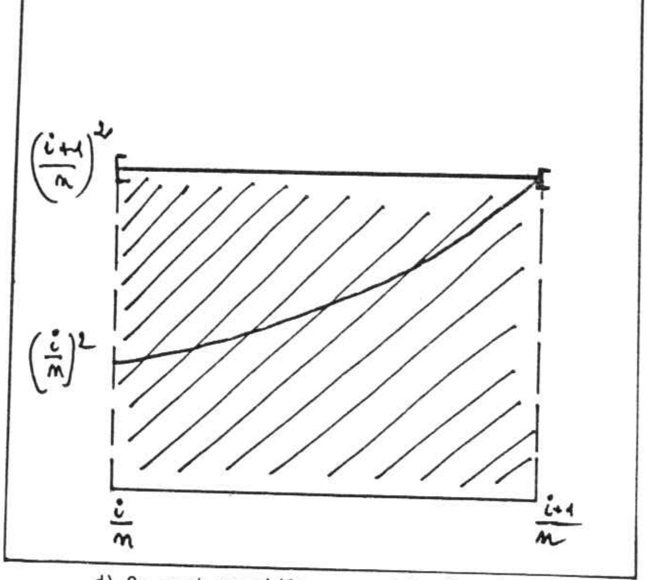
$T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2}$

b) En utilisant la fonction g_n en escalier sur $[0\ ,\ 1]$ qui minore $(t \mapsto t^2)$ définie en II 1° a), on obtient :
(méthode des rectangles)



$G_n = \frac{1}{3} - \frac{3n - 1}{6n^2}$

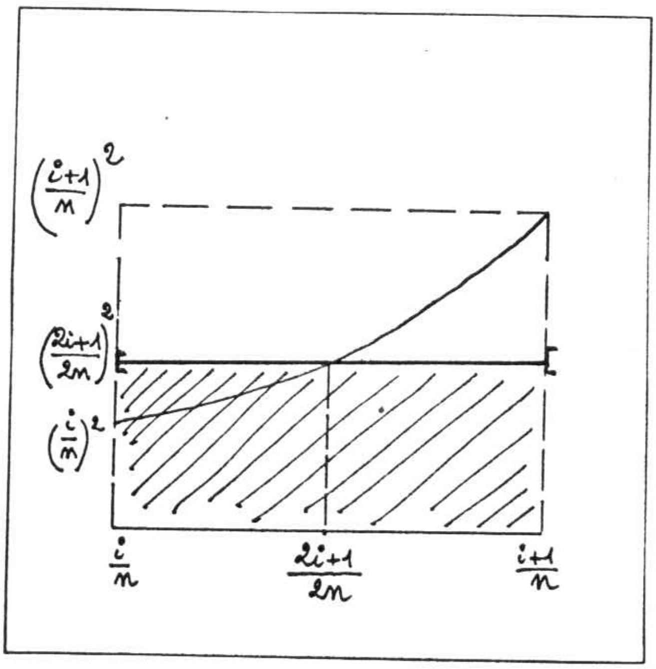
c) En utilisant la fonction f_n en escalier sur $[0 , 1]$ qui majore $(t \to t^2)$ définie en II 1° a), on obtient :



$$F_n = \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2}$$

d) On peut considérer aussi la fonction en escalier Ψ sur $[0 , 1]$ définie par :

$$\left(\forall i \in [0 , n-1] \quad , \forall x \in \left[\frac{i}{n} , \frac{i+1}{n}\right[\quad , \quad \Psi(x) = \left(\frac{2i+1}{2n}\right)^2\right) \quad \text{et} \quad \Psi(1) = 1$$

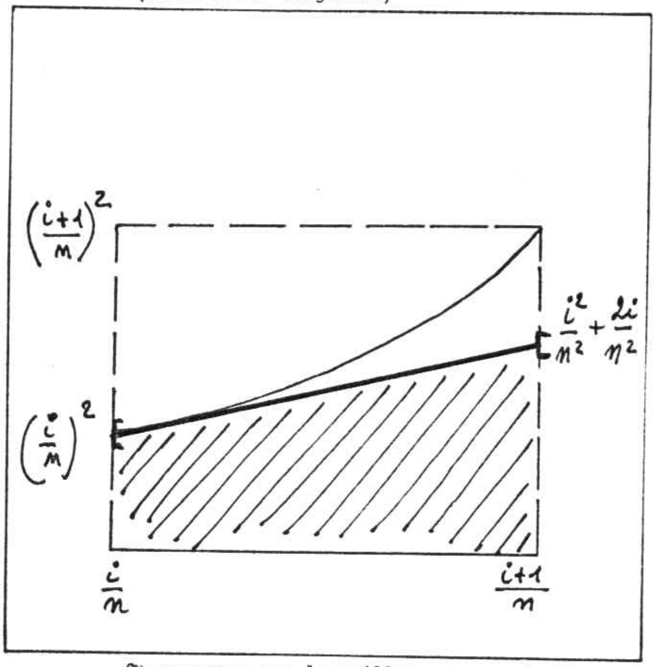


$$H_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2i+1}{2n}\right)^2 \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

e) On peut considérer aussi la fonction affine par morceaux dont la représentation graphique est, sur chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, la tangente à $(t \mapsto t^2)$ au point d'abscisse $\frac{i}{n}$.

(méthode des tangentes)



$$K_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\frac{i}{n})^2 + \frac{i^2+2i}{n^2}}{2} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^2}$$

On remarque que la meilleure approximation est obtenue dans le cas d) ; l'erreur étant : $\frac{1}{12\, n^2}$.

Pour $n = 10$, l'erreur commise sur le résultat est alors inférieure à 9.10^{-4}

Pour obtenir une erreur aussi faible dans les autres cas, il est nécessaire de choisir n tel que :

cas a) : $n \geqslant 15$

cas b) : $n \geqslant 600$

cas c) : $n \geqslant 601$

cas e) : $n \geqslant 21$

Dans les cas b) et c) il est donc nécessaire de choisir une subdivision de $[0, 1]$ au moins 60 fois plus fine que dans le cas d) !

À propos de l'utilisation de calculatrices programmables en classe

UTILISATION D'UNE MACHINE A CALCULER PROGRAMMABLE EN CLASSE

-DEROULEMENT D'UNE EXPERIENCE-

PRESENTATION DU MATERIEL

Texas Instruments 51 III : 32 pas de programme, sans test. Il s'agit donc d'une machine très simple et peu performante ; mais pour une première initiation et compte tenu du peu de temps disponible, elle s'avère suffisante.

Certains de mes élèves ont acheté début 1980 des Hewlett-Packard 33 E (49 pas de programme, 8 mémoires adressables, 3 niveaux de sous-programmes, 6 tests conditionnels). Vous trouverez page 91 quelques améliorations et compléments apportés aux T.P. réalisés avec les TI 51 III.

OBJECTIFS

Faire découvrir l'Informatique et la programmation (à un niveau très élémentaire).

Pour nos élèves, une sensibilisation aux méthodes informatiques est un élément culturel important. Ils auront probablement à utiliser (ou au moins besoin de) l'informatique dans leurs activités scolaires ou professionnelles futures.

Provoquer une réflexion sur le raisonnement mathématique.

Apprendre à être rigoureux (dans la préparation des programmes).

Apprendre à être concis et efficace (le petit nombre de pas de programme de la machine oblige à être économe, à éviter toute démarche inutile. On est alors amené à comparer les divers programmes proposés par les élèves pour traiter une question donnée).

Apprendre à décomposer un calcul afin d'en mettre en évidence toutes les étapes dans le but de les enseigner à la machine. Tout calcul assez compliqué nécessite une planification préalable par écrit.

Montrer que, comme en sciences physiques par exemple, une étude expérimentale peut être, aussi en mathématiques, source de réflexion théorique.

Utiliser les machines pour présenter des notions du cours, notamment en analyse.

L'étude expérimentale jour un rôle pré-théorique, générateur d'idées intuitives, brisant souvent le blocage des élèves par le simple fait qu'à une situation statique se substitue une situation dynamique. Les idées intuitives seront confirmées ou infirmées par une étude mathématique rigoureuse ultérieure.

Remettre en honneur le calcul numérique.

CADRE

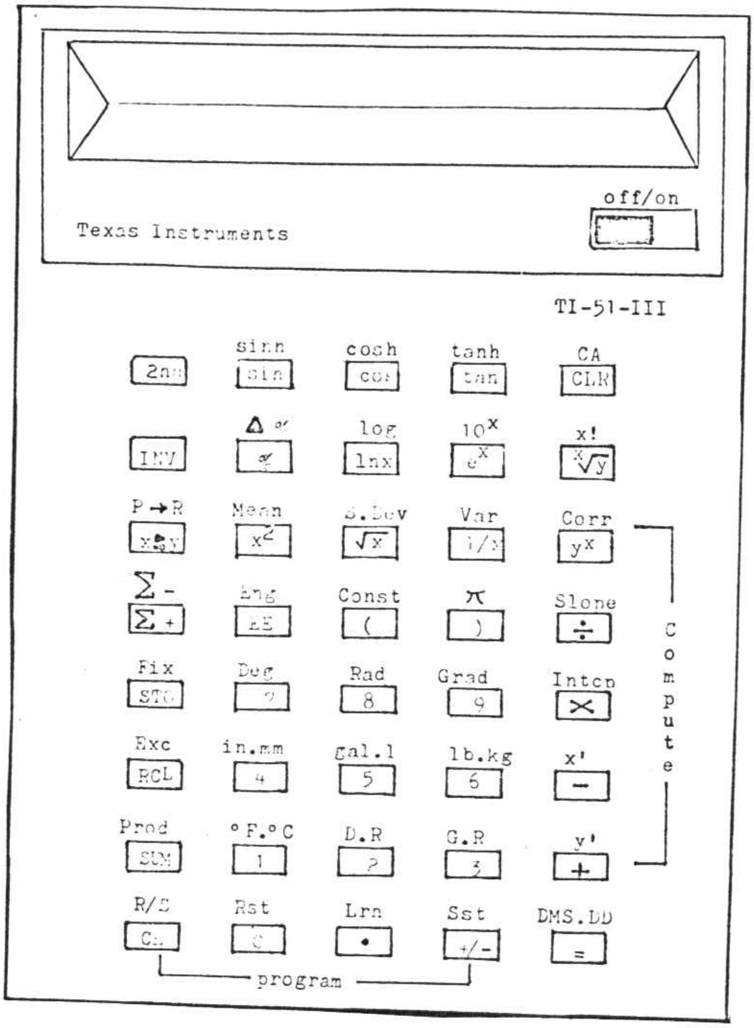
Cette expérience a été réalisée au Lycée Polyvalent de Luçon en Première et Terminale C. Les séances d'initiation ont été données hors emploi du temps normal de chaque classe à raison d'une heure par semaine au cours du premier trimestre.

REMARQUES

Je tiens à préciser que je ne suis pas un propagandiste acharné de l'utilisation des calculatrices en classe. Je crois simplement que l'on aurait tort, d'une part, de nier leur existence alors que la plupart de nos élèves en possèdent une et, d'autre part, de les considérer seulement comme réunion d'une table de calcul numérique et d'une règle à calcul alors qu'elles constituent un outil pédagogique intéressant.

Je voudrais signaler enfin que je ne suis pas informaticien. Cela suffira peut-être à excuser certaines maladresses qui pourraient vous apparaître à la lecture de cette brochure.

LA MACHINE



QUELQUES EXPLICATIONS SUR SON FONCTIONNEMENT

La plupart des touches de la calculatrice ont une double fonction.

La première est imprimée sur la touche elle-même et la seconde au-dessus de celle-ci. Pour exécuter la seconde fonction, il faut d'abord appuyer sur la touche [2nd] .

La touche d'inversion [INV] , quand elle précède l'utilisation d'une autre touche, inverse la fonction de celle-ci.

[2nd] [Fix] permet de choisir le nombre de décimales désirées à l'affichage (de 0 à 8).

[STO] [n] permet de stocker le nombre affiché dans la mémoire n $(0 \leqslant n \leqslant 9)$.

[Exc] [n] permet d'échanger le nombre affiché et le nombre stocké dans la mémoire n.

[RCL] [n] permet l'affichage du nombre stocké dans la mémoire n.

[2nd] [Prod] [n] permet de multiplier le contenu de la mémoire n par la valeur affichée et de conserver le résultat dans la mémoire n.

SUM n même remarque que ci-contre, mais avec l'addition.

INV SUM n même remarque que ci-contre, mais avec la soustraction.

INV 2nd Prod n même remarque que ci-contre, mais avec la division.

2nd CA touche d'effacement général (y compris mémoires et programmes).

La calculatrice utilise la notation algébrique directe. Les règles classiques de la hiérarchie algébrique ont été programmées en machine. La liste complète et ordonnée des priorités dans l'interprétation des expressions est la suivante :

- fonctions spéciales (trigonométriques, logarithmes, carré, racine carrée, inverse, factorielle, exponentielle, 10^x et réciproques).
- fonctions (y^x) et $(\sqrt[x]{y})$.
- multiplications et divisions (qui sont exécutées après les fonctions précédentes et autres multiplications et divisions les précédant).
- additions et soustractions (qui sont exécutées en dernier après toutes les autres fonctions, y compris les autres additions et soustractions les précédant).
- "égale" achève toutes les opérations.

COMMENT NOUS AVONS ABORDE LA PROGRAMMATION

1°) Ecrire une séquence permettant de calculer $f(x) = -5x^2 + 7x - 2$ en ne tapant x qu'une seule fois.

STO 0 x^2 x 5 +/- + 7 x RCL 0 - 2 =

2°) Remplir le tableau suivant :

x	0.4	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.9612345	0.9999999	1
f(x)						

3°) On peut faire des économies d'énergie !

Vous avez été obligés de taper 6 fois la même séquence définie en 1°). Ce n'est pas drôle ! On peut éviter cet inconvénient en apprenant à la machine comment effectuer ce calcul elle-même ; en le programmant.

4°) Touches de programmation

2nd R/S arrêt/départ

2nd Rst retour au point de départ

2nd Lrn indicateur de début ou bien de fin de programme.

5°) Cela donne avec l'exemple précédant :

2nd CA efface tout !

2nd Lrn apprends la séquence suivante !

Séquence définie en 1°)

2nd R/S arrête toi !

2nd Rst revientau point de départ afin d'effectuer le premier calcul !

2nd Lrn c'est fini, tu n'as plus rien à apprendre !

2nd Rst reviens au point de départ afin d'effectuer le premier calcul !

N.B. : le programme proprement dit est compris entre les deux instructions 2nd Lrn . Toutes les instructions (sauf 2nd) comptent pour un pas.

6°) Autres exemples

$$g(x) = -x^4 + 3x^2 - x + 3$$

$$h(x) = \frac{x+7}{-2x+4}$$

$$k(x) = \sqrt{\frac{x^2+8}{x^2+x+3}}$$

Programme pour g :

2nd CA 2nd Lrn STO 0 x^2 x^2 +/- + 3 x RCL 0 x^2

\- RCL 0 + 3 = 2nd R/S 2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

Programme pour h :

2nd CA 2nd Lrn STO 0 + 7 = ÷ (RCL 0 x 2 +/-

\+ 4) = 2nd R/S 2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

Programme pour k :

2nd CA 2nd Lrn STO 0 x^2 + 8 = ÷ (RCL 0 x^2

\+ RCL 0 + 3) = $\sqrt{x}$ 2nd R/S 2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

DEROULEMENT DE LA SEANCE

Chaque élève cherche sa propre solution, vérifie si elle est correcte en remplissant, par exemple, un tableau de valeurs, puis en le comparant avec le tableau de référence établi à l'avance par le professeur.

Dans un deuxième temps, a lieu la comparaison des différents programmes, leur critique et la recherche en commun de celui qui utilise le moins de pas de programme.

Classes : 1C et TC

Chapitres : Applications (1C), corps des réels (TC)

Thème : FONCTION PARTIE ENTIERE

La machine ne possède pas la touche "fonction partie entière". On peut cependant trouver une séquence très simple, permettant de trouver E(x) pour tout x réel non entier relatif négatif ou nul.

La touche [2nd] [Fix] permet de choisir le nombre de décimales -de 0 à 8- désirées à l'affichage. Retenons l'arrondi [2nd] [Fix] [0] qui affiche un entier relatif.

Soit x un élément quelconque de l'intervalle : $[-1, +1]$

	-1 [2nd] [Fix] [0]	donne	-1 à l'affichage
$\forall x \in]-1 ; -0,5]$	x [2nd] [Fix] [0]	donne	-1 à l'affichage
$\forall x \in]-0,5 ; 0[$	x [2nd] [Fix] [0]	donne	0 à l'affichage
$\forall x \in [0 ; 0,5[$	x [2nd] [Fix] [0]	donne	0 à l'affichage
$\forall x \in [0,5 ; +1]$	x [2nd] [Fix] [0]	donne	1 à l'affichage

On en déduit que la séquence :

[-] 0,5 [=] [2nd] [Fix] [0]

donne E(x), la partie entière de x, pour tout x de $]-1 ; +1] - \{0\}$

Cette séquence n'est donc valable que pour les réels non entiers relatifs négatifs ou nuls.

EXERCICE D'APPLICATION

Soit h l'application :

$$h : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$n \longmapsto \sqrt{n^2 + n + 1}$$

a) Ecrire un programme permettant de calculer $E[h(n)]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. Dresser un tableau de valeurs. Que remarque-t-on ?

A-t-on la même propriété avec l'extension de h à $\mathbb{R}^{+*}$?

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leqslant \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1$

En déduire la valeur de $E[h(n)]$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Solution [2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [STO] [0] [x^2] [+] [RCL] [0] [+] 1 [=] [$\sqrt{x}$] [-] 0,5 [=] [2nd] [Fix] [0] [2nd] [R/S] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

Classe : 1C

Chapitre : Equations

Thème : RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE A UNE INCONNUE

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Sans chercher à économiser les pas de programme, on obtient en appliquant les formules :

$$\Delta = b^2 - 4ac \ , \quad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et sachant que a sera stocké ultérieurement dans la mémoire 0, b en 1 et c en 2 :

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [1] [x^2] [-] 4 [x] [RCL] [0] [x] [RCL] [2] [=]

[$\sqrt{x}$] * [STO] [3] [-] [RCL] [1] [=] [÷] 2 [÷] [RCL] [0] [=] [2nd] [R/S] **

[RCL] [3] [+/-] [-] [RCL] [1] [=] [÷] 2 [÷] [RCL] [0] [=] [2nd] [R/S] [2nd]

[Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

* Si $\Delta < 0$ la machine clignote après le pas [$\sqrt{x}$] et le programme est stoppé. En cas de clignotement, on en déduit qu'il n'y a pas de racine.

** permet de lire la racine affichée et de la noter éventuellement. Pour relancer le programme, il suffit de taper : [2nd] [R/S]

Le programme ci-dessus utilise 41 pas de programme. Or la machine n'en contient que 32.

ESSAYONS D'ECONOMISER LES PAS DE PROGRAMME

Pour le calcul de la seconde racine, on peut utiliser la somme $-\frac{b}{a}$ ou le produit $\frac{c}{a}$. Il s'avère que la somme est plus économique.

En stockant b en dernier, on peut bénéficier de son écriture à l'affichage et supprimer le [RCL] [1] de début de programme ; on gagne ainsi deux pas.

On obtient finalement :

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [x^2] [-] 4 [x] [RCL] [0] [x] [RCL] [2] [=] [$\sqrt{x}$] [-]

[RCL] [1] [=] [÷] 2 [÷] [RCL] [0] [=] [2nd] [R/S] [+/-] [-] [RCL] [1] [÷]

[RCL] [0] [=] [2nd] [R/S] [2nd] [Rst] ([2nd] [Lrn] *) [2nd] [Rst]

* Le premier [2nd] [Rst] étant le 32ème pas, l'instruction [2nd] [Lrn] est inutile ; la machine quitte d'elle-même le mode programme.

Pour obtenir les solutions de l'équation, si elles existent, il faut procéder comme suit :

a) taper le programme

b) taper la séquance : a [STO] [0] c [STO] [2] b [STO] [1] [2nd] [R/S]

On a alors deux éventualités :

1 - la machine clignote : le discriminant est négatif et il n'y a pas de racine.

2 - Un réel s'inscrit à l'affichage ; c'est l'une des racines. Pour obtenir l'autre, taper $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ qui relance le programme jusqu'à ce que l'autre racine apparaisse à l'affichage.

Il est bien évident que dans la plupart des cas, les racines obtenues ne sont que des valeurs approchées. Il est intéressant de faire constater l'importance de l'erreur lorsque tel est le cas.

Exercices

équations	racines exactes ou approchées
$x^2 - 4x + 3 = 0$	+3 ; +1
$7x^2 + 2x + 1 = 0$	pas de racine
$-x^2 + 6x - 9 = 0$	+ 3 ; + 3
$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$	pas de racine
$4x^2 + \sqrt{3}x - \pi = 0$	+ 0, 6957837 ; - 1,12879

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 4x^2 + \sqrt{3}x - \pi$

Calculer : $f(0{,}6957837)$ et $f(0{,}6957838)$

$f(-1{,}12879)$ et $f(-1{,}12880)$

Que peut-on en conclure en ce qui concerne l'erreur commise sur les racines de l'équation :

$$4x^2 + \sqrt{3}x - \pi = 0 \quad ?$$

Classe : 1C

Chapitre : Equations

Thème : RESOLUTION D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS LINEAIRES A DEUX INCONNUES

Soit le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

REMARQUES

- On se place dans le cas où le système admet un couple unique solution ; c'est-à-dire, lorsque son déterminant, que nous noterons D, est non nul.
- Le nombre de pas de programme de la calculatrice étant trop faible pour résoudre entièrement un tel système, nous décidons de calculer D hors programme.
- Il reste deux déterminants à calculer. Avec cette machine, il est impératif d'utiliser le même schéma de calcul pour les deux déterminants. On découvre à l'occasion de cet exercice, l'intérêt de la touche : Exc (Exc n permet d'échanger le nombre affiché et le nombre stocké dans la mémoire n).
- Essayer de trouver un programme convenable sans regarder la solution.

STOCKAGE

Après avoir tapé le programme, stockons par exemple : a en 0, b en 1, c en 2, a' en 3, b' en 4, c' en 5 et D en 6.

Il est évidemment indispensable de savoir à l'avance dans quelle mémoire sera stockée telle ou telle donnée numérique.

PROGRAMME

2nd CA 2nd Lrn RCL 0 Exc 2 STO 7 x RCL 5 Exc 4
- RCL 3 Exc 5 x RCL 7 Exc 1 = x RCL 6 $\frac{1}{x}$ =
2nd R/S 2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

EVOLUTION DU STOCKAGE AU COURS DU PROGRAMME

mémoires	0	1	2	3	4	5	6	7
stockage au départ	a	b	c	a'	b'	c'	D	/
stockage après l'affichage de x	/	c	a	/	c'	a'	/	c

Les deux déterminants sont obtenus de la façon suivante :

$$M_2 \times M_4 - M_5 \times M_1$$

M_i désignant le contenu de la mémoire i.

DEROULEMENT DE LA SEANCE

J'ai proposé ce programme aux élèves. Ils ont essayé de le comprendre en suivant, pas à pas, les instructions et en construisant le tableau de la page précédente.

Ce genre d'exercice -donner un programme et comprendre à quoi il correspond- est également très enrichissant et complète bien la démarche habituelle qui consiste à trouver un programme convenable pour traiter telle ou telle question.

Classe : TC

Chapitre : Ensemble des entiers naturels

Thème : RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Exercice 1

a) Construire un programme permettant de calculer la somme S_n des n premiers entiers naturels non nuls.

b) Remplir le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n										

c) En déduire une formule exprimant S_n en fonction de n.

d) Démontrer, par récurrence, que cette propriété est vraie pour tout entier naturel non nul.

Exercice 2

Mêmes questions qu'en 1 avec

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} i^3$$

Exercice 3

Mêmes questions qu'en 1 avec

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)$$

Remarque

On aborde avec cette série d'exercices la notion de boucle dans un programme. Les boucles sont d'un usage très fréquent. On les utilise en particulier lorsque le programme contient une suite d'instructions qui doivent être répétées un certain nombre de fois.

PROGRAMME POUR L'EXERCICE 1

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [SUM] [1] [RCL] [1] [2nd] [R/S] 1 [SUM] [0] [2nd] [Rst] * [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

1 [STO] [0] [2nd] [R/S] permet d'obtenir S_1 à l'affichage.

[2nd] [R/S] permet d'obtenir les sommes suivantes.

* Avec [2nd] [Rst] la boucle est bouclée ! Si l'on supprime du programme la touche [2nd] [R/S] , la machine calcule toutes les sommes S_n sans s'arrêter.

Par ailleurs, on peut également éviter toute intervention du manipulateur en laissant S_n à l'affichage pendant un moment suffisant pour noter le résultat. Pour cela, il faut, à la place de [2nd] [R/S] , taper [=] plusieurs fois de suite.

PROGRAMME POUR L'EXERCICE 2

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [y^x] 3 [=] [SUM] [1] [RCL] [1] [2nd]
[R/S] (ou bien [=] [=] ... [=]) 1 [SUM] [0] [2nd] [Rst] [2nd]
[Lrn] [2nd] [Rst]

1 [STO] [0] [2nd] [R/S] permet d'obtenir la suite des valeurs de S_n .

PROGRAMME POUR L'EXERCICE 3

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [(] [RCL] [0] [+] 1 [)] [x] [RCL] [0] [=] [SUM]
[1] [RCL] [1] [2nd] [R/S] (ou bien [=] [=] ... [=]) 1 [SUM] [0]
[2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

[1] [STO] [0] [2nd] [R/S] permet d'obtenir la suite des valeurs de S_n .

Remarque complémentaire

Pour calculer S_{50} en utilisant les programmes précédents, on est obligé du surveiller la machine et d'arrêter le déroulement des calculs au bon moment ; ce qui n'est pas toujours facile.

On peut éviter cet inconvénient au moyen d'un "truc" de programmation, permettant d'arrêter automatiquement le calcul à l'ordre 50. Pour cela, il suffit d'introduire une opération illégale à l'intérieur du programme

(0 [$\frac{1}{x}$] , 0 [Log] , 90 [tg]) .

Pour arrêter la machine au 50ème calcul, stocker 50 dans un mémoire et utiliser celle-ci comme compteur en retranchant 1 à chaque boucle. Calculer ensuite l'inverse du nombre stocké dans cette mémoire. Quand la machine essaye de calculer l'inverse de zéro, le programme s'arrête. Voici comment peut se présenter ce programme (pour l'exemple 1) :

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [SUM] [1] 1 [INV] [SUM] [2] [RCL] [2]
[$\frac{1}{x}$] 1 [SUM] [0] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

1 [STO] [0] 50 [STO] [2] [2nd] [R/S] lance le programme.

Lorsque le programme s'arrête (affichage clignotant), on obtient le résultat par la séquence : [CLR] [RCL] [1] qui arrête d'abord le clignotement, puis affiche S_{50} stockée en mémoire 1.

Classe : TC

Chapitre : Suites

Thème : SUITES CONVERGENTES

Après avoir défini les notions de suites numériques, de suites bornées et de suites monotones, on aborde la notion de suites convergentes.

La définition peut être introduite à l'aide d'une série de calculs numériques qui font progressivement prendre conscience aux élèves de sa nécessité et de son utilité. Quelques cas particuliers mettront en évidence les erreurs à ne pas commettre.

Dans ce T.P., on utilise donc les machines à calculer pour introduire une notion théorique.

a) Considérons la suite : $u_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in N^*$ $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$

Démontrer que la suite est strictement croissante (par récurrence).

Démontrer que la suite est bornée strictement par +2 (par récurrence).

Trouver un programme permettant de calculer les termes de la suite.

Construire un tableau de valeurs.

Quelles constatations pouvez-vous tirer de cette étude ?

PROGRAMME

2nd CA 2nd Lrn + 2 = $\sqrt{x}$ 2nd R/S

2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

2 $\sqrt{x}$ 2nd R/S lance le programme

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
0	1.4142136
1	1.8477591
2	1.9615706
3	1.9903695
4	1.9975909
5	1.9993976
6	1.9998494
7	1.9999624
8	1.9999906
9	1.9999976
10	1.9999994
11	1.9999999
12	2.0000000
13	2.0000000
14	2.0000000

CONSTATATIONS

- On obtient toujours 2 pour n supérieur ou égal à 12 puisque : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Pourtant, on a démontré que 2 est un majorant strict de la suite. Les élèves pensent immédiatement qu'il s'agit d'une valeur approchée obtenue par l'arrondi de la machine.
- L'impression générale est que les termes "se rapprochent" de 2 lorsque n augmente ou plutôt, pour certains, de 1,9999999999999... (ce qui permet d'aborder éventuellement le problème des réels possédant une suite périodique de décimales. Cf Additif n° 3 à la fin du T.P.)
- La suite est rapidement convergente mais on ne peut pas trouver sa limite sans effectuer de calculs.

b) autre exemple du même type que le précédent :

> Considérons la suite définie par :
>
> $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$
>
> Déterminer un programme permettant de calculer les termes de la suite.
>
> Construire un tableau de valeurs.
>
> Que constatez-vous ?

PROGRAMME

$\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{x}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$

$\boxed{x}$ 0,5 $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

1 $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ lance le programme

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
0	1
1	1.5
2	1.4166667
3	1.4142157
4	1.4142136
5	1.4142136
etc	

Là encore la suite converge rapidement et l'élève est capable d'identifier facilement sa limite.

c) Prenons maintenant un exemple dans lequel la suite converge lentement vers un irrationnel encore inconnu au moment où on aborde les suites.

> Considérons la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
>
> 1°) Calculer les vingt premiers termes de la suite, puis le 50ème, puis le 100ème. Que constatez-vous ?
>
> 2°) Construire un programme permettant de calculer seulement les termes u_n de la suite avec n puissance de 10.
>
> Que constatez-vous ? Essayez de trouver une explication.

1°) Programme :

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [1/x] [+] 1 [=] [y^x] [RCL] [0]

[=] [2nd] [R/S] 1 [SUM] [0] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

1 [STO] [0] [2nd] [R/S] lance le programme

49 [STO] [0] [2nd] [R/S] permet le calcul de 50ème terme.

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
1	2
2	2.95
3	2.3703704
etc	

n	u_n
18	2.6464258
19	2.6500343
20	2.6532977
50	2.691588
100	2.6921022

Contrairement aux deux exemples précédents, les constatations sont beaucoup moins catégoriques : la suite semble croissante et ses termes semblent inférieurs à +3. En tout cas, la machine n'apporte pas d'éléments suffisants pour faire des hypothèses sur sa convergence.

2°) Essayons de préciser davantage : en calculant des termes de rang élevé.

Programme

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [1/x] [+] 1 [=] [y^x] [RCL] [0] [=]

[2nd] [R/S] 10 [2nd] [Prod] [0] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

1 [STO] [0] [2nd] [R/S] lance le programme.

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
1	2
10	2.5937425
100	2.7048138
1000	2.716924
10^4	2.7181463
10^5	2.7182723

n	u_n
10^6	2.7182818
10^7	2.7182818
10^8	2.7182818
10^9	2.7182818
10^{10}	2.7182818
10^{11}	1
10	1
etc	

La discussion s'engage sur la valeur de la limite : 2.7182818 ou bien 1. La machine ne se trompe-t-elle pas quand elle affiche 1 ?

Pour n suffisant grand 1/n est très petit et n'est plus pris en compte par la machine qui calcule alors : 1^n et affiche 1.

Il s'agit de faire prendre conscience aux élèves qu'il faut prendre du recul vis à vis des informations données par la machine. Ils doivent avoir progressivement l'idée qu'une définition théorique est indispensable. Pour les en persuader, voyons les exercices suivants.

c) Considérons la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{2^n}{n^8}$

Ecrire un programme permettant de calculer u_n.

Calculer les 12 premiers termes. Constatations ?

Calculer le 13ème. Ce calcul met en évidence une contradiction. Laquelle ?

Calculer le 50ème terme, puis le 100ème. Conclusions ?

Programme

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ 2 $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{y^x}$ 8 $\boxed{=}$

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ 1 $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

1 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
1	2
2	0.015625
3	0.0012193
4	0.0002441
5	0.0000819
6	0.0000381

n	u_n
7	0.0000222
8	0.0000153
9	0.0000119
10	0.0000102
11	0.0000096
12	0.0000095

la suite semble décroissante et avoir pour limite 0.

$$u_{13} = 0.00001$$

la suite n'est donc pas décroissante ; il ne suffit donc pas de considérer les premiers termes d'une suite pour en tirer une conclusion quant à sa monotonie.

$$u_{50} = 28.823038 \qquad u_{100} = 1.2676506\ 10^{14}$$

la suite n'est pas convergente vers 0 ! Il semble bien, au contraire, que l'on puisse trouver un entier n tel que u_n soit supérieur à tout réel positif fixé à l'avance.

d) Considérons la suite définie par : $\forall n \in N^*$ $u_n = \frac{1}{n^{10}} + \frac{n}{10^{20}} + 2$

Calculer les 15 premiers termes. Que constatez-vous ?

Calculer u_{50}, puis u_{100}, puis u_{1000}

Programme

2nd CA 2nd Lrn RCL 0 y^x 10 = 1/x + (RCL 0

y^x 10 ÷ 10 y^x 20) + 2 = 2nd R/S 1 SUM 0

2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

1 STO 0 2nd R/S lance le programme

TABLEAU DE VALEURS

n	u_n
1	3
2	2.0009766
3	2.0000169
4	2.000001
5	2.0000001

n	u_n
6	2
7	2
etc	
14	2
15	2

La suite converge-t-elle vers 2 ?

$u_{50} = 2.0009766$

$u_{100} = 3$

$u_{1000} = 10^{10}$

Il ne suffit donc pas de considérer les premiers termes d'une suite pour en tirer une conclusion quant à sa convergence.

e) Passage à la définition théorique

Il est facilité par les remarques faites dans les exercices précédents. En effet, dans certains cas, un réel ℓ possède une propriété particulière: à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont "proches" de ℓ. C'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite sont éléments d'un intervalle ouvert centré en ℓ et de rayon ε ($]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$). Pour que ℓ se présente comme une limite, il est indispensable que la propriété précédente soit vérifiée pour ε aussi petit que l'on veut.

f) Additif n° 1

On suppose maintenant posée la définition de suite convergente et démontrées les propriétés :

- toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente.
- si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers le même réel ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ.

Exercice

Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1.2.5.\ \ldots\ldots\ (2n-1)}{2.4.6.\ \ldots\ldots\ (2n}$$

a) La suite est-elle strictement monotone ?

b) La suite est-elle bornée ?

c) La suite est-elle convergente ?

d) Construire un programme permettant de calculer les termes de la suite sans intervention du manipulateur. Faire une boucle dans le programme et taper plusieurs fois la touche $\boxed{=}$ afin que les valeurs des u_n restent inscrites quelques secondes au tableau d'affichage. Constater que la machine ne permet pas d'évaluer ℓ -si ℓ existe- en un temps raisonnable.

e) Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

f) En déduire que la suite est convergente vers 0.

Programme

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Prod}}$ $\boxed{2}$

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ 2 $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$

$\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

1 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{2}$ 2 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

TABLEAU DE VALEURS

$n \in$	u_n
[29 ; 35]	0.10
[36 ; 43]	0.09
[44 ; 56]	0.08
[57 ; 75]	0.07
[76 ; 75]	0.06
[105 ; 156]	0.05
[157 ; 259]	0.04
[260 ; 509]	0.03
[509 ; 1414]	0.02
[1415 ; ?	0.01

La suite a une convergence très lente. Pour remplir le tableau ci-dessus, la machine a mis près d'une heure !

g) Additif n° 2

Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

a) Démontrer que la suite est strictement croissante.

b) - Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

- En déduire que la suite est majorée.

c) La suite est-elle convergente ?

d) Construire un programme comme dans l'additif n° 1 et constater que la machine n'est d'aucune utilité, car elle ne permet pas d'évaluer ℓ (si ℓ existe) en un temps raisonnable.

Programme

2nd CA 2nd Lrn RCL 0 1/x x^2 SUM 1 RCL 1 = = ...

= 1 SUM 0 2nd Rst 2nd Lrn 2nd Rst

1 STO 0 2nd R/S lance le programme

Dans cet exemple, on a une suite à convergence extrêmement lente et sa limite ($\frac{\pi^2}{6} \simeq$ 1,6449341) n'est pas identifiable en un temps raisonnable.

h) Additif n° 3

Soit x un réel élément de l'intervalle $]0, 1[$ tel que x comporte p décimales ($p \in \mathbb{N}^*$). $x = 0, a_1 a_2 \dots a_p$

On considère la suite définie par :

$$u_1 = x \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_{n+1} = 10^{-p}\ u_n$$

1°) Ecrire u_1, u_2 et u_3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

2°) Ecrire u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$.

Déterminer $\lim\limits_{+\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Comment peut s'énoncer la propriété générale ainsi démontrée ?

3°) Application à :

$x = 0,273$; $x = 0,9$

Classe : TC

Chapitre : Continuité

Thème : APPLICATION DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3 + x + 1$

a) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une racine réelle comprise entre 0 et -1.

b) Déterminer une valeur approchée de cette racine par dichotomie.

c) Déterminer une valeur approchée de cette racine par une méthode d'itération (si elle peut s'appliquer dans le cas de l'exercice.)

a)
$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 \\ f(0) = +1 \\ f|_{[-1\,;\,0]} \text{ continue sur } [-1\,;\,0] \\ \text{théorème des valeurs intermédiaires} \\ \text{appliqué à } f|_{[-1\,;\,0]} \end{array}\right\} \quad \exists x_0 \in]-1\,;\,0[\;,\; f(x_0) = 0$$

b) Recherche d'une valeur approchée de x_0 par dichotomie

Principe général de la dichotomie

Il s'agit de calculer un réel x_0 dont on connaît un encadrement $]a, b[$

Soit c un réel strictement compris entre a et b. Supposons que l'on puisse déterminer dans quel intervalle I ($]a, c[$ ou bien $]c, b[$ se trouve x_0. On peut recommencer le raisonnement en remplaçant $]a, b[$ par I, etc. On obtient ainsi une suite d'encadrements de x_0 de plus en plus fins. On arrête le découpage lorsqu'on a obtenu une précision suffisante.

Programme pour calculer f(x)

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [STO] [0] [x^2] [x] [RCL] [0] [+] [RCL] [0]

[+] [1] [=] [2nd] [R/S] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

TABLEAU DES VALEURS

x	$f(x)$
- 0.5	0.375
- 0.75	- 0.171875
- 0.65	0.075375
- 0.70	- 0.043
- 0.68	0.005568
- 0.69	- 0.018509
- 0.683	- 0.001612
- 0.682	0.0007854
etc	etc
On obtient finalement avec notre machine :	
- 0.6823278	$9.2 \quad 10^{-9}$
- 0.6823279	$- 2.0 \quad 10^{-7}$

x_0 est donc peu différent de $- 0.68232785$, l'erreur est inférieur à $5\ 10^{-8}$

c) Recherche de x_0 par une méthode d'itération

Méthode

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^3 + x + 1 = 0 \iff x = - \frac{1}{x^2 + 1})$$

Considérons la suite définie par :

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_{n+1} = - \frac{1}{x_n^2 + 1}$$

Supposons que cette suite soit convergente vers le réel ℓ :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leqslant x_n \leqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad -1 \leqslant \ell \leqslant 0$$

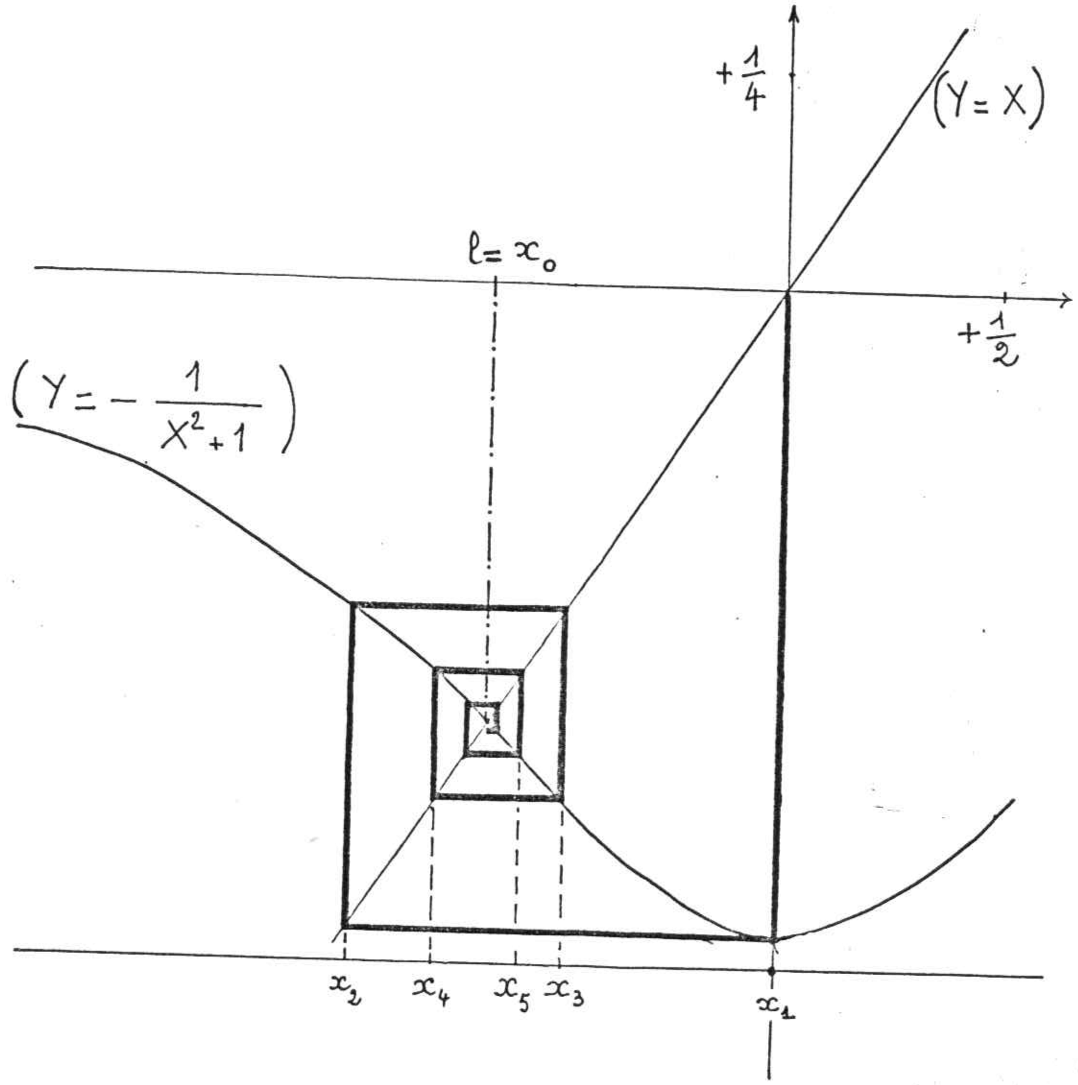
Par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty}(x_{n+1}) = \ell$

$$\lim_{n \to +\infty}(x_n) = \ell \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(- \frac{1}{x_n^2 + 1}\right) = - \frac{1}{\ell^2 + 1}$$

l'unicité de la limite, lorsqu'elle existe, entraîne : $\ell = - \frac{1}{\ell^2 + 1}$ d'où : $\ell^3 + \ell + 1 = 0$; ℓ est donc une racine de l'équation $f(x) = 0$ comprise entre -1 et 0.

On peut se rendre compte graphiquement que, dans le cas de l'exercice, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans $\mathbb{R}$.

Pour cela, il suffit de construire les courbes d'équation : $y = x$ et $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$



Utilisation de la machine pour déterminer la limite de la suite

Programme

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [x²] [+] 1 [=] [1/x] [+/-] [=]

[=] ... [=] [STO] [0] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

0 [STO] [0] [2nd] [R/S] permet d'afficher successivement tous les termes de la suite.

On obtient au bout d'une quinzaine de boucles : $\ell \simeq 0.6823278$.

Classe : TC

Chapitre : Etude de fonctions numériques de variable réelle

Thème : POINT D'INFLEXION

1°) Soit g la fonction polynôme définie par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 6x^3 - 2x^2 + 5x - 1$$

a) Démontrer qu'il existe un unique y_0 réel tel que $f(y_0) = 0$ et vérifier que y_0 est élément de l'intervalle $]0, +1[$

b) Déterminer une valeur approchée de y_0 par une méthode d'itération (cf. fiche précédente).

c) Démontrer qu'il existe un unique x_0 de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\text{tg}\, x_0 = y_0$. Donner une valeur approchée de x_0.

2°) Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\qquad f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$$

Etude complète de f. Soit R_f sa représentation graphique.

3°) a) Démontrer que R_f admet un unique point d'inflexion d'abscisse x_0 (utiliser 1°).

b) Ecrire un programme permettant de calculer $f''(x)$ et déterminer une valeur approchée de $f''(x_0)$.

c) Ecrire un programme permettant de calculer $f'(x_0)$ et déterminer une valeur approchée de $f'(x_0)$.

d) Ecrire un programme permettant de calculer $f(x)$ et déterminer une valeur approchée de $f(x_0)$.

4°) En tenant compte des résultats de la question 3°, préciser l'allure de la courbe R_f en plaçant le point d'inflexion. On représentera, également, avec soin, la tangente à R_f au point d'abscisse 0.

1°) a)

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) > 0 \\ g \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ g \text{ continue sur } \mathbb{R} \\ \lim\limits_{-\infty} g = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{+\infty} g = +\infty \\ \text{Théorème des valeurs intermédiaires} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \text{ bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}$$

0 possède donc un unique antécédent par g : y_0.

b) <u>Méthode</u>

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 6x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{6x^2 - 2x + 5}$$

On pose : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} & (y_0 \in]0, +1[\ ) \\ n \geqslant 0 & u_{n+1} = \dfrac{1}{6u_n^2 - 2u_n + 5} \end{cases}$

Si $\lim\limits_{+\infty} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe dans $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{+\infty} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = y_0$.

<u>Programme</u>

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 6 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$

$\boxed{0}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

0,5 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

On obtient : $y_0 \simeq 0{,}20649$

c) $\text{tg}\Big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, donc y_0 possède un unique antécédent par tg dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: x_0 .

La séquence : $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rad}}$ (*) 0,20649 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tan}}$ affiche :

$$x_0 \simeq 0{,}2036281$$

(*) A sa mise en marche, la machine travaille en degrés ; on choisit le mode radian en appuyant sur $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rad}}$

2°) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}(2\text{tg}^2 x - \text{tg}\, x + 1)$

<u>TABLEAU DE VARIATION DE f</u>

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
signe de f'(x)	‖	+	+1	+	‖
sens de variation de f	‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$ ‖

3°) a) $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ $\qquad f''(x) = \dfrac{1}{\cos x}(6tg^3 x - 2tg^2 x + 5\ tg\ x - 1)$

$$f''(x) = 0 \iff 6X^3 - 2X^2 + 5X - 1 = 0 \quad \text{et} \quad X = tg\ x$$

$$\iff X = y_0 \quad \text{et} \quad X = tg\ x$$

$$\iff x = X_0$$

$f''(x)$ change de signe comme $6x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ (= $g(x)$ avec g bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

b) Programme

$\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rad}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{tan}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$

5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 6 $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$

$\boxed{RCL}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$

$\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

(l'information $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ n'apparaît pas en fin de programme, car les 32 pas ont été utilisés).

Valeur approchée de $f''(x_0)$ (=0)

la séquence : 0,2036281 $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ donne :

$$f''(x_0) \simeq -9,25\ 10^{-8}$$

c) Programme

$\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rad}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{tan}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$

$\boxed{\times}$ 2 $\boxed{-}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$

$\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

Valeur approchée de $f'(x_0)$

La séquence : 0,2036281 $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ donne :

$$f'(x_0) \simeq 0,9$$

d) Programme

$\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rad}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{sin}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$

$\boxed{cos}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$

$\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

<u>Valeur approchée de $f(x_o)$</u>

La séquence : 0,2036281 $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ donne :

$$f(x_o) \simeq -0,8$$

4°) <u>Représentation graphique de f</u>

La tangente à R_f au point d'abscisse 0 est située au-dessus de R_f .

La tangente à R_f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ est située en-dessous de R_f .

6°) Pour tout entier positif, on pose :

$$c_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

a) Construire un programme permettant de calculer successivement les termes de la suite. Quelle indication fournit la calculatrice en ce qui concerne sa convergence ?

b) Démontrer, en utilisant 1° et 5°, que le résultat obtenu est bien la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1°) a) $(\forall n \geq 5 \quad 2^n > n^2) \Longrightarrow (\forall n \geq 5 \quad 0 < n(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{n})$

$(\forall n \geq 10 \quad 2^n > n^3) \Longrightarrow (\forall n \geq 10 \quad 0 < n^2(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{n})$

2°) b) Programme

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [0] [y^x] [RCL] [1] [=] [SUM] [2]

[RCL] [2] [=] [=] ... [=] 1 [SUM] [1] [2nd] [Rst] [2nd]

[Lrn] [2nd] [Rst]

$\frac{1}{2}$ [STO] [0] 1 [STO] [1] [2nd] [R/S] lance le programme.

Constatation : à partir de $n = 25$, la machine affiche $a_n = 1$.

c) propriété de la somme des termes d'une progression géométrique infinie de raison q avec $|q| < 1$.

3°) a) $\forall x \neq +1 \qquad S_n(x) = x\,\dfrac{1 - x^n}{1 - x}$

b) $S'_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

4°) a) Programme

[2nd] [CA] [2nd] [Lrn] [RCL] [1] [x] [RCL] [0] [y^x] [(] [RCL]

[1] [-] 1 [)] [=] [SUM] [2] [RCL] [2] [=] [=] ... [=]

1 [SUM] [1] [2nd] [Rst] [2nd] [Lrn] [2nd] [Rst]

$\frac{1}{2}$ [STO] [0] 1 [STO] [1] [2nd] [R/S] lance le programme.

b) Constatation : à partir de $n = 31$, la machine affiche $b_n = 4$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n(\frac{1}{2}) = 4$ puisque, d'après 1°, $\lim\limits_{+\infty} (n(\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$

5°) b) $\forall x \neq 1 \quad \sum'_n(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$

$$= \frac{-n^2x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2\, x^n + x + 1}{(1 - x)^3}$$

6°) a) <u>Programme</u>

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{(}$

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$

1 $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

$\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ 1 $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

b) <u>Constatation</u> : à partir de $n = 33$, la machine affiche $c_n = 12$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum'_n(\frac{1}{2}) = 12$ puisque, d'après 1° , $\lim\limits_{+\infty} (n(\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$

et $\lim\limits_{+\infty} (n^2(\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$

7°) <u>Remarques</u> :

a) En remplaçant $\frac{1}{2}$ par $\frac{5}{6}$ par exemple, on obtient :

- pour a_n, la machine affiche 5 à partir de $n = 101$
- pour b_n, la machine affiche 36 à partir de $n = 116$
- pour c_n, la machine affiche 396 à partir de $n = 131$.

b) Dans tous les calculs ci-dessus, on a laissé le maximum de décimales apparaître à l'affichage.

c) On pourrait enfin utiliser l'exercice en Probabilités. Les résultats ci-dessus interviennent dans le calcul de l'espérance et de la variance des variables aléatoires X et Y définies respectivement par :

- X : nombre de lancers d'une pièce nécessaire à l'apparition de "face.
- Y : nombre de lancers d'un dé ordinaire nécessaire à l'obtention du 6.

Classe : TC

Chapitre : Cinématique

Thème : NATURE D'UN MOUVEMENT, RESOLUTION GRAPHIQUE D'UNE EQUATION TRIGONOMETRIQUE ET RECHERCHE DE VALEURS APPROCHEES DES RACINES.

1°) Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) = (2x - 1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

a) Etude complète de f et construction de R_f, la représentation graphique de f, dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit (C) la courbe symétrique de R_f orthogonalement par rapport à l'axe des abscisses. Construire (C). On note $(T) = R_f \cup (C)$.

2°) On considère un point mobile M dont les coordonnées dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$x(t) = \cos 2t \qquad \text{et} \quad y(t) = \cos 3t$$

a) Déterminer la trajectoire de M lorsque t varie dans $[0, \pi]$

b) Préciser les valeurs de t correspondant :

- aux points où la trajectoire rencontre l'axe des abscisses.
- aux points d'abscisse +1.
- aux points où le vecteur vitesse est élément de la droite vectorielle dont une base est $(\vec{i})$ privée du vecteur nul.

c) Etudier les variations des fonctions numériques x et y sur $[0,\pi]$ et en déduire le sens du déplacement du point M sur sa trajectoire.

3°) a) Soit $\vec{v}(t)$ et $\vec{\gamma}(t)$ les vecteurs vitesse et accélération de M à l'instant t. Vérifier que :

$$\vec{v}(t) . \vec{\gamma}(t) = 4 \sin 4t + \frac{27}{2} \sin 6t$$

4°) Résoudre graphiquement l'équation :

$$\{t \ / \ t \in [0, \pi] \qquad \text{et } \sin 4t = - \frac{27}{8} \sin 6\, t\} \qquad (1)$$

Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$\{t \ / \ t \in [0, \pi] \qquad \text{et } \sin 4t \geq - \frac{27}{8} \sin 6t\} \ .$$

(N.B. On construira les courbes d'équations : $y = \sin 4t$ et $y = - \frac{27}{8} \sin 6t$).

5°) Construire un programme permettant de calculer : $\frac{1}{4} \vec{v}(t) . \vec{\gamma}(t)$.

Rechercher les valeurs approchées des racines de l'équation (1) par dichotomie.

6°) Déterminer la nature du mouvement du point mobile M sur sa trajectoire.

d'après Bac E PARIS 1978.

Classe : TC

Chapitre : Suites

Thème : PROGRESSIONS GEOMETRIQUES ET SUITES CONVERGENTES

Exercice

1°) a) Démontrer, par récurrence sur n, $\forall n \geqslant 5 \quad 2^n > n^2$ et $\forall n \geqslant 10 \quad 2^n > n^3$.

b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes vers 0 pour $u_n = n(\frac{1}{2})^n$ et $v_n = n^2(\frac{1}{2})^n$.

2°) a) Etudier la convergence de la suite $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) Pour tout entier positif, on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{k=n} (\frac{1}{2})^k$$

Construire un programme permettant de calculer successivement les termes de la suite. Quelle indication fournit la calculatrice en ce qui concerne sa convergence ?

c) Démontrer que le résultat obtenu en b) est bien la limite de la suite

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

3°) On pose : $\forall x \in \mathbb{R} - \{+1\} \quad S_n(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

a) Pour tout x différent de +1, écrire $S_n(x)$ sour une autre forme.

b) Calculer $S'_n(x)$ - le nombre dérivé de S_n en x- de deux façons différentes.

c) Ecrire $S'_n(\frac{1}{2})$ de deux façons différentes.

4°) Pour tout entier positif, on pose :

$$b_n = \sum_{k=1}^{k=n} k(\frac{1}{2})^{k-1}$$

a) Construire un programme permettant de calculer successivement les termes de la suite. Quelle indication fournit la calculatrice en ce qui concerne sa convergence ?

b) Démontrer, en utilisant 1° et 3°, que le résultat obtenu en a) est bien la limite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

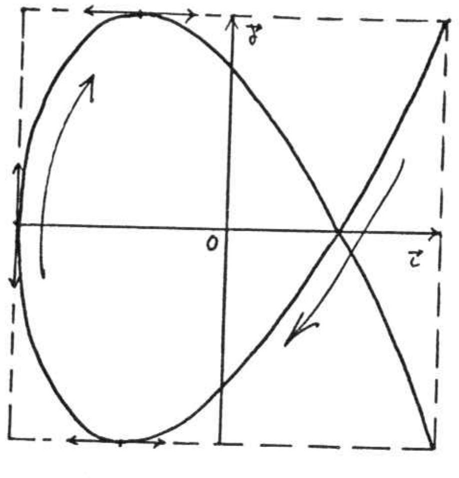
5°) On pose : $\forall x \in \mathbb{R} - \{+1\} \quad \Sigma_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$.

a) Vérifier que $\Sigma_n(x) = xS'_n(x)$.

b) Calculer $\Sigma'_n(x)$ - le nombre dérivé de Σ_n en x - de deux façons différentes.

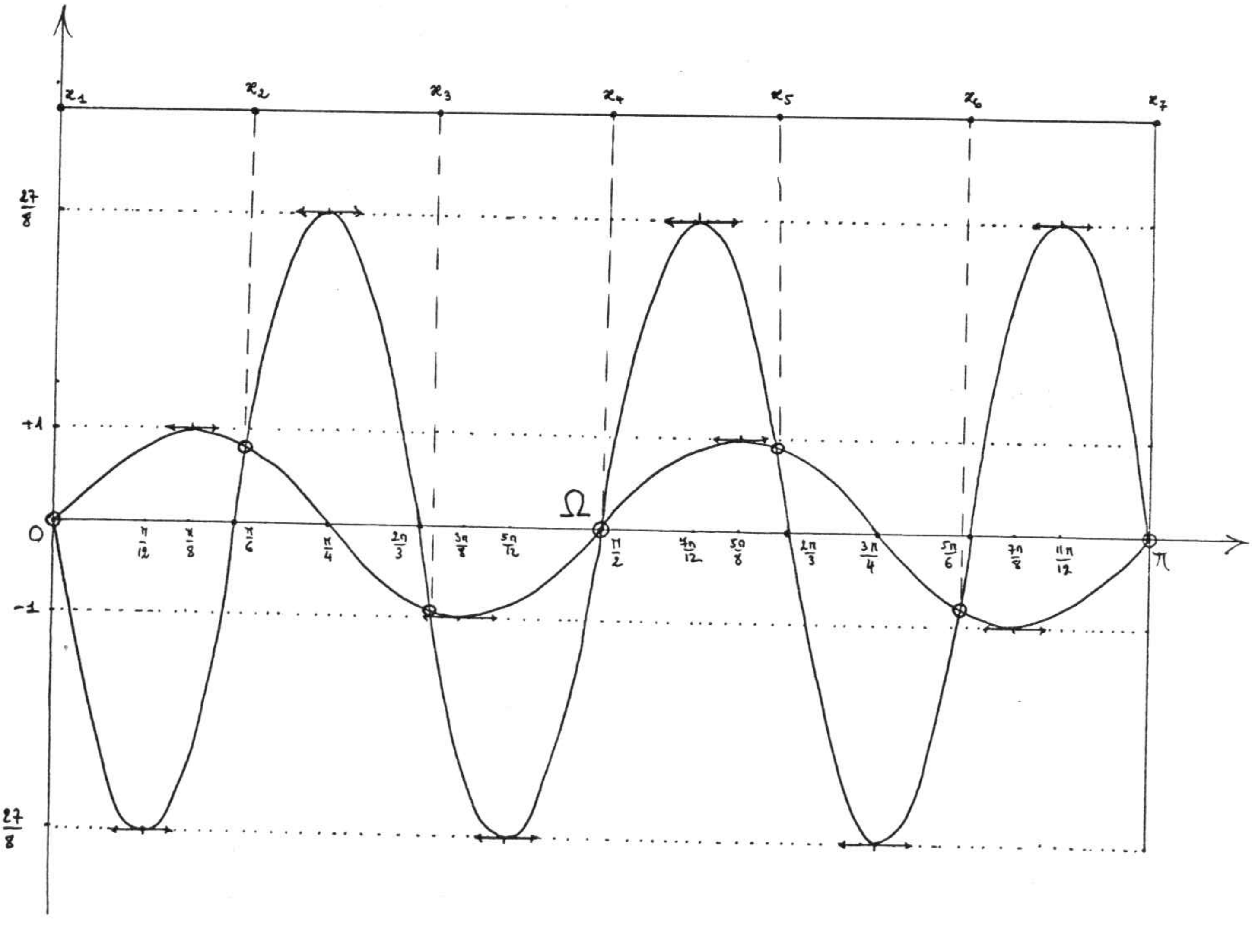
c) Ecrire $\Sigma'_n(\frac{1}{2})$ de deux façons différentes.

2°/ c)



$\vec{j}$
0
$\vec{i}$

4°)



x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
$\frac{27}{8}$
+1
O
Ω
-1
$-\frac{27}{8}$
$\frac{\pi}{12}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{5\pi}{12}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{12}$
$\frac{5\pi}{8}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{8}$
$\frac{11\pi}{12}$
π

4°) Le point $\Omega \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$ est centre de symétrie pour les deux courbes.

L'équation admet donc 7 racines : $x_1 (=0)$, x_2, x_3, $x_4 (=\frac{\pi}{2})$, x_5, x_6, $x_7 (=\pi)$.

De par la symétrie de centre Ω, on a : $x_5 = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - x_3)$

$$x_6 = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - x_2)$$

Il suffit donc de chercher les valeurs approchées de x_2 et x_3.

5°) Programme

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rad}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{sin}}$ $\boxed{\times}$ 27 $\boxed{-}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SUM}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

<u>On obtient</u> : (par dichotomie)

$x_2 \simeq 0.5623855$ $\quad \frac{1}{4} \vec{v}(x_2) . \vec{\gamma}(x_2) \simeq 10^{-7}$

$x_3 \simeq 1.0944749$ $\quad \frac{1}{4} \vec{v}(x_3) . \vec{\gamma}(x_3) \simeq 7.10^{-7}$

<u>D'où les valeurs de</u> x_5 et x_6

$x_5 \simeq 2.0471178$ $\quad \frac{1}{4} \vec{v}(x_5) . \vec{\gamma}(x_5) \simeq 2.10^{-7}$

$x_6 \simeq 2.5792072$ $\quad \frac{1}{4} \tilde{v}(x_6) . \tilde{\gamma}(x_6) \simeq -1,2.10^{-6}$

Classe : 1C

Chapitre : Dérivation

Thème : INTRODUCTION DE LA NOTION DE DERIVATION

1) Un point mobile M se déplace sur une règle graduée. On suppose que l'on puisse exprimer l'abscisse de M en fonction du temps à l'aide d'une fonction numérique f. Ainsi, à l'instant t, la position de M est définie par : $x = f(t)$.

Sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ la vitesse moyenne du mobile est :

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{notée } v(t_1, t_2).$$

Cette notion de vitesse moyenne est connue des élèves.

Ils utilisent aussi le mot vitesse dans un autre sens : Dans une agglomération, la vitesse ne doit pas dépasser 60 km/h, pendant une épreuve de descente le skieur a dévallé une pente à plus de 120 km/h... Il s'agit là de vitesse "instantanées".

Les manipulations suivantes ont pour but de faire apparaître le lien qui existe entre les notions de vitesse moyenne et de vitesse instantanée.

2) On suppose $f(t) = -t^3 + 9t + 4$

On s'intéresse à ce que pourrait être la vitesse instantanée à l'instant $t = 1$.

Nous allons commencer par calculer un certain nombre de vitesses moyennes $v(t_1, t_2)$. A votre avis, quels sont les intervalles de temps $[t_1, t_2]$ les plus intéressants à considérer dans le cas de l'exemple ?

Construire les porgrammes permettant de remplir le tableau ci-dessous dans lequel la seule variable est ε.

ε	$v(1-\varepsilon, 1)$	$v(1, 1+\varepsilon)$	$v(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
1			
0.5			
0.1			
0.05			
0.01			
0.001			
0.0001			
0.00001			

Que constatez-vous ?

Comment peut-on définir la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t = 1$?

3) Sur votre calculatrice, il y a la touche $\boxed{e^x}$. Elle permet d'afficher les valeurs approchées des valeurs prises par la fonction exponentielle (de base e) -fonction que vous ne connaissez pas encore-.

On suppose maintenant que le réel $f(t)$ qui permet de connaître la position du mobile M à l'instant t est égal à e^t.

Par une méthode analogue à celle du paragraphe 2, déterminer la vitesse instantanée du mobile M à l'instant t = 1.

4) REMARQUES SUR LE PARAGRAPHE 2

a) Programmes :

- $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ 9
$\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

ε $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

- $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{CA}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ 9 $\boxed{-}$
$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{-}$ 8 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Lrn}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Rst}}$

ε $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{R/S}}$ lance le programme

- Il n'est pas possible de programmer $v(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$. Cela nécessite plus de 32 pas de programme.
On complète le tableau en remarquant : $v(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon) = \dfrac{v(1,\ 1+\varepsilon) + v(1-\varepsilon,\ 1)}{2}$

b) On obtient :

ε	$v(1-\varepsilon,\ 1)$	$v(1,\ 1+\varepsilon)$	$v(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$
1	8	2	5
0.5	7.25	4.25	5.75
0.1	6.29	5.69	5.99
0.05	6.1475	5.8475	5.9975
0.01	6.0299	5.9699	5.9999
0.001	6.002999	5.996999	5.999999
0.0001	6.0003	5.9997	6
0.00001	6	6	6

- Les élèves constatent que les nombres figurant dans la première colonne sont en ordre décroissant. Certains d'entre eux pensent que si l'on continue, avec ε encore plus petit positif, $v(1-\varepsilon,\ 1)$ prendra nécessairement des valeurs inférieures à 6. Evidemment, le tableau ci-dessus ne suffit pas pour conclure ; deux remarques cependant les rendront moins catégoriques dans leur affirmation :

* Lorsque x augmente, $6 + \frac{1}{x}$ diminue sans pour autant prendre de valeurs inférieures à 6.

* Si on demande à la calculatrice de calculer $v(1-\varepsilon,\ 1)$ pour des valeurs de ε du type 10^{-n} inférieure à 10^{-5}, la machine continue à afficher imperturbablement 6.

- Une interprétation graphique des résultats du tableau peut aussi les aider à conclure.

5) REMARQUES SUR LE PARAGRAPHE 3

a) Programmes

- $\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

- $\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ e^x $\boxed{-}$ 1 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

- $\boxed{2nd}$ $\boxed{CA}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\boxed{(}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{-}$ $\boxed{(}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{RCL}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Lrn}$ $\boxed{2nd}$ $\boxed{Rst}$

b) On obtient :

ε	$v(1-\varepsilon, 1)$	$v(1,1+\varepsilon)$	$v(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
1	1.7183	4.6708	3.1945
0.5	2.1391	3.5268	2.8330
0.1	2.5868	2.8588	2.7228
0.05	2.6514	2.7874	2.7194
0.01	2.7047	2.7319	2.7183
0.001	2.7169	2.7196	2.7183
0.0001	2.7181	2.7184	2.7183
0.00001	2.7183	2.7183	

6) SUITE DU COURS

Lorsqu'on a constaté sur ces exemples que la vitesse instantanée du mobile en t_0 est la limite des vitesses moyennes, un grand pas est franchi vers la définition de la dérivabilité d'une fonction numérique en t_0.

Au début de l'année 1980, quelques uns de mes élèves ont acheté une calculatrice programmable H.P. 33 E (49 pas de programme, 8 mémoires adressables, 3 niveaux de sous-programmes, 6 tests conditionnels).
Voici quelques améliorations et compléments apportés aux T.P. précédents.

1°) REDUCTION DU NOMBRE DE PAS DE PROGRAMME

a) Calcul des valeurs prises par la fonction numérique définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^4 + 3x^2 - x + 3$$

$f(x) = x[x(-x^2 + 3)-1] + 3$ (méthode de Hörner)

	TI 51 III	HP 33 E
00		
01	STO	STO 0
02	0	g x^2
03	x^2	CHS
04	+/-	3
05	+	+
06	3	RCL 0
07	=	x
08	x	1
09	RCL	-
10	0	RCL 0
11	-	x
12	1	3
13	=	+
14	x	
15	RCL	
16	0	
17	+	
18	3	
19	=	

b) Calcul des valeurs prises par la fonction :

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2 + 8}{x^2 + x + 3}}$$

	TI 51 III	HP 33 E
00		
01	STO	STO 0
02	0	g x^2
03	x^2	8
04	+	+
05	8	RCL 0
06	=	g x^2
07	÷	RCL 0
08	(	+
09	RCL	3
10	0	+
11	x^2	÷
12	+	f $\sqrt{x}$
13	RCL	
14	0	
15	+	
16	3	
17	)	
18	=	
19	$\sqrt{x}$	

2°) FONCTION PARTIE ENTIERE (cf page 61)

a) Avec la TI 51 III

On a pu trouver un programme permettant d'afficher la partie entière de x : $E(x)$ pour tout x réel non entier relatif négatif ou nul, en utilisant l'arrondi $\boxed{2nd}$ $\boxed{Fix}$ $\boxed{0}$; en fait $E(x)$ apparaît à l'affichage mais sans être retenu en mémoire ; les décimales n'ont pas été effacées.

b) Avec la HP 33 E

On a la touche $\boxed{g}$ $\boxed{INT}$ qui permet d'afficher $E(x)$ pour tout x positif ou nul ou entier relatif. Par contre, pour x négatif non entier relatif $\boxed{g}$ $\boxed{INT}$ affiche $E(x) + 1$.

En utilisant le test $\boxed{f}$ $\boxed{x \leqslant y}$ on peut obtenir $E(x)$ pour tout x. On peut construire le programme suivant :

00	
01	enter
02	g INT
03	f $\leqslant y$
04	GTO 00
05	1
06	-

3°) COMPTEUR DE BOUCLES AVEC ARRET AUTOMATIQUE A LA $N^{ème}$ (cf page 66)

Calcul de $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} i^2$ pour un n fixé.

mode programme :

00		
01	STO 2	(stockage de n)
02	1	
03	STO 0	
04	RCL 0	
05	g x^2	
06	STO + 1	
07	RCL 0	(compteur)
08	RCL 2	
09	f x=y	
10	GTO 14	
11	1	
12	STO + 0	
13	GTO 04	
14	RCL 1	

mode run : $\boxed{g}$ $\boxed{RTN}$ n $\boxed{R/S}$

pour calculer $S_{n'}$ avec n' > n en utilisant la valeur trouvée pour $S_{n'}$ taper n' $\boxed{STO}$ $\boxed{2}$ $\boxed{GTO}$ $\boxed{11}$ $\boxed{R/S}$

pour calculer $S_{n'}$ avec n' < n, taper $\boxed{f}$ $\boxed{REG}$ n' $\boxed{R/S}$

$\boxed{f}$ $\boxed{REG}$ efface les registres mémoires.

4°) UTILISATION DE SOUS-PROGRAMMES

a) Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ à l'aide des formules $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ avec un sous-programme permettant de calculer -b et $\sqrt{\Delta}$. (cf page 62)

00		
01	STO 0	(stockage de a)
02	R/S	
03	STO 1	(stockage de b)
04	R/S	
05	STO 2	(stockage de c)
06	GSB 20	
07	+	
08	RCL 0	
09	2	
10	x	
11	÷	
12	R/S	
13	GSB 20	
14	-	
15	RCL 0	
16	2	
17	x	
18	÷	
19	GTO 00	

20	RCL 1	$-b$
21	CHS	
22	RCL 1	$\sqrt{\Delta}$
23	g x^2	
24	RCL 0	
25	RCL 2	
26	x	
27	4	
28	x	
29	-	
30	f $\sqrt{x}$	
31	g RTN	

sous-programme

b) Classe : TC

Chapitre : Intégration

Thème : $\boxed{\text{SOMMES DE RIEMANN ET CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE}}$

A) Soit f intégrale au sens de Riemann sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} A_n \quad \text{avec :} \quad A_n = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

le programme suivant permet de calculer les A_n.

```
00
01   STO 0      (stockage de n)
02   a
03   STO 1
04   b
05   STO 2
06   RCL 1
07   -
08   RCL 0
09   ÷
10   STO 4
11   RCL 4
12   STO + 1
13   RCL 1          →  28     sous-programme permettant
14   GSB 28             --    de calculer f(x)
15   STO + 5        ←  --     g RTN
16   1
17   STO + 6
18   RCL 6  \
19   RCL 0   }  (compteur)
20   f x=y  /
21   GTO 23
22   GTO 11
23   RCL 5
24   RCL 4
25   x
26   f REG
27   GTO 00
```

<u>mode run</u> : n $\boxed{R/S}$

B) <u>Exemples</u>

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x^2$$

28	g x^2
29	g RTN

$$g : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

28	g 1/x
29	g RTN

etc.

On obtient le tableau de valeurs approchées suivant :

n	$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$	$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \text{Log } 2$
10	0.3850	0.6688
20	0.3588	0.6808
30	0.3502	0.6849
40	0.3459	0.6869
50	0.3434	0.6882
60	0.3417	0.6890
70	0.3405	0.6896
80	0.3396	0.6900
90	0.3389	0.6904
100	0.3384	0.6907
500	0.3343	0.6926
1000	0.3338	0.6929

Les calculs pour $n = 500$ et $n = 1000$ sont assez longs. En attendant le résultat, on peut démontrer que :

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3} \quad \text{en calculant :}$$

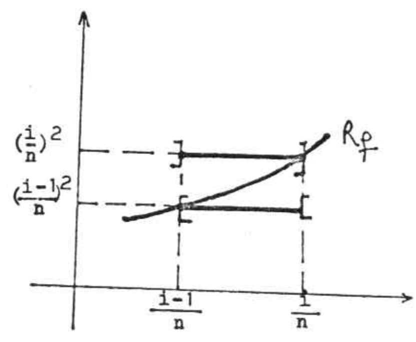
$$I_n = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

et

$$J_n = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n \leqslant \int_0^1 x^2dx \leqslant J_n$$

$$\text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{1}{3}$$



5°) <u>DEROULEMENT AUTOMATIQUE DE LA DICHOTOMIE DANS LA RECHERCHE D'UNE RACINE D'UNE EQUATION</u>

a) <u>1er exemple</u> (cf page 75)

RESOLUTION DE L'EQUATION : $x^3 + x + 1 = 0$

On sait qu'il y a une unique racine comprise entre a et b ($a = -1$ et $b = 0$)

Soit $f(x) = x^3 + x + 1$

$f(a) < 0$ et $f(b) > 0$

On calcule $\frac{a+b}{2}$ et $f(\frac{a+b}{2})$

<u>1er cas</u> : $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ remplacer a par $\frac{a+b}{2}$ et recommencer.

<u>2ème cas</u> : $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ remplacer b par $\frac{a+b}{2}$ et recommencer.

On obtient le programme suivant :

00	
01	RCL 0
02	RCL 1
03	+
04	2
05	÷
06	STO 2
07	f pause
08	3
09	f y^x
10	RCL 2
11	+
12	1
13	+
14	f pause
15	g x > 0
16	GTO 20
17	RCL 2
18	STO 0
19	GTO 01
20	RCL 2
21	STO 1
22	GTO 01

<u>Mode run</u> : a $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{0}$ b $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{R/S}}$

b) <u>2ème exemple</u> (cf page 85)

$\boxed{\text{RESOLUTION DE L'EQUATION : } \sin 4t + \frac{27}{8} \sin 6t = 0}$

Soit $f(t) = \sin 4t + \frac{27}{8} \sin 6t$

L'étude graphique montre qu'il existe un unique réel x de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ racine de l'équation $f(t) = 0$ avec $f(\frac{\pi}{6}) > 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Dans ce nouvel exemple, la dichotomie ne se développe pas de la même façon que dans le précédent. La racine cherchée est comprise entre a et b avec $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;

Le principe de la dichotomie est alors :

- calculer $f(\frac{a+b}{2})$
- si $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, remplacer a par $\frac{a+b}{2}$ et recommencer.
- si $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, remplacer b par $\frac{a+b}{2}$ et recommencer.

d'où le programme :

00			
01	RCL 0	16	7
02	RCL 1	17	x
03	+	18	8
04	2	19	÷
05	÷	20	+
06	STO 2	21	f pause
07	f pause	22	g x > 0
08	4	23	GTO 27
09	x	24	RCL 2
10	f SIN	25	STO 1
11	RCL 2	26	GTO 01
12	6	27	RCL 2
13	x	28	STO 0
14	f SIN	29	GTO 01
15	2		

<u>mode run</u> : $\frac{\pi}{6}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{0}$ $\frac{\pi}{4}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{1}$ $\boxed{g}$ $\boxed{RAD}$ $\boxed{R/S}$

REACTIONS DES ELEVES

Motivation considérable qui, inévitablement, se répercute sur le travail scolaire proprement dit (même pour des élèves peu passionnés par les mathématiques).

Prise de conscience progressive de leur responsabilité en face de la machine. Elle ne sait rien faire seule ; on doit lui apprendre quelque chose. Elle ne tolère aucune erreur.

Modification du comportement des élèves en face de l'erreur. Contrairement à une attitude démissionnaire, face à elle dans bien des cas, on constate ici, qu'ils ne sont satisfaits que lorsqu'ils ont trouvé un programme correct.

Modification de la relation professeur-élèves. L'élève est en position de demandeur et non de récepteur passif. L'élève est placé dans une situation dans laquelle il peut découvrir quelque chose de lui même ; le professeur lui apportant, éventuellement, le lien manquant pour poursuivre sa recherche.

Certains élèves ont acheté une HP 33 E. Ils n'ont eu, semble-t-il, aucune difficulté d'adaptation. Finalement peu importe le langage de la machine ; le fond du raisonnement reste le même.

SONDAGE

Questionnaire-élèves.

> Cette année, vous avez découvert l'Informatique en travaillant sur une calculatrice programmable. Cette expérience vous a plu, semble-t-il.
>
> Pourriez vous préciser ce qu'elle vous a apporté aux points de vue connaissances mathématiques, méthodes de raisonnement et méthodes de travail en classe ou hors classe ?
>
> Cette expérience a-t-elle modifié votre conception du calcul numérique ?
>
> Croyez-vous, enfin, que l'introduction des machines à calculer soit une bonne chose pour l'enseignement des mathématiques en général ? Votre comportement en classe s'en est-il trouvé modifié ?

QUELQUES REPONSES

Un élève de Terminale C

> "L'utilisation de la machine permet d'appliquer des résultats du cours, des connaissances théoriques. Mais, la mise au point d'un programme nécessite une compréhension parfaite du cours. La machine permet aussi de traiter des problèmes qui restaient insolubles sans elle.
>
> De plus, la programmation exige que l'on comprenne toutes les transformations de calculs que l'on a l'habitude de faire sans réfléchir.
>
> L'intérêt pratique, c'est de nous permettre de passer un temps minimum sur les questions de calculs (ex : calculs des coordonnées des points d'une courbe) ; on peut ainsi consacrer le temps maximum aux questions plus théoriques demandant souvent de la réflexion. Il nous reste aussi davantage d'énergie pour les effectuer.
>
> Cependant, il n'est possible de faire un tel gain, que si nous sommes parfaitement capables d'utiliser la machine. Donc, pour que la machine soit rentable, il faut consacrer un peu de temps à l'apprentissage.

L'utilisation de la machine enlève au calcul numérique son aspect négatif. En effet, souvent les calculs sont longs, fatigants et inintéressants.

Vue sous cet aspect, l'utilisation de la machine est une bonne chose pour l'enseignement des mathématiques. Mais elle risque a moyen terme d'enlever aux mathématiques leur caractère rigoureux et logique -ces deux caractéristiques étant leur essence même- pour les recouvrir de programmes et de résultats à nombreuses décimales (souvent inutiles).

L'utilisation courante des machines risque d'inciter à ne plus connaître les valeurs usuelles telles que : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... et aussi de faire disparaître le calcul mental.

Enfin, il ne faut pas oublier que savoir se servir d'une calculatrice programmable peut être un élément de culture générale. Il n'est pas inintéressant non plus de réaliser quelques "petites expériences" pendant les temps de loisir qui réunissent des connaissances mathématiques et un certain plaisir de redécouvrir quelque chose déjà connu ou appris."

Une élève de Terminale C.

"L'utilisation des calculatrices programmables n'a pas apporté grand chose au point de vue connaissances mathématiques, à proprement parlé : les connaissances sont vues généralement en cours auparavant. Cette expérience nous a donné un petit aperçu de l'Informatique, domaine auquel, les mathématiques peuvent mener.

L'intérêt pratique de cette manipulation d'une calculatrice programmable nous a permis une meilleure compréhension de certaines notions abstraites comme les limites (recherche d'une limite non évidente), ou les suites convergentes (recurrentes par exemple) : on laisse tourner la machine et lorsqu'elle affiche toujours le même nombre, on démontre que celui-ci est la limite cherchée, ou, du moins, on sait qu'il faut aboutir à ce résultat, d'où un raisonnement moins hasardeux et donc plus rapide.

On peut concevoir différement le calcul numérique : il n'a plus son côté rébarbatif, qui peut parfois être source d'erreurs bêtes. Mais l'aspect théorique du calcul numérique reste inchangé : les méthodes diverses de factorisation, de linéarisation, de recherche de p.p.c.m. ou de p.g.c.d. restent valables et même fondamentales (car plus scientifiques que le fait d'appuyer sur un bouton et d'attendre le résultat).

Mais je pense quand-même que l'introduction des machines est une bonne chose pour l'enseignement des mathématiques dans le Second Cycle (dans le Premier, les élèves sont trop jeunes pour comprendre la véritable utilité des calculatrices ; elles sont pour eux un moyen d'échapper aux calculs). La manipulation de telles machines montre que les mathématiques ne sont pas une science abstraite, totalement détachée de la réalité.

Ce n'est donc pas pour cela que notre comportement en classe peut s'en trouver modifié, si ce n'est le sentiment agréable de pouvoir manipuler une machine et le fait d'essayer de faire le lien avec ce que l'on peut voir en cours".

Un élève de Terminale C

"Les machines à calculer sont certes dignes d'intérêt.

Par exemple, la recherche d'un point de convergence lors de l'étude des suites m'a beaucoup surpris, ou le fait de retrouver des résultats déjà constatés en cours et qui semblent alors plus concrets et faciles à retenir.

Ces machines permettent de fournir un travail de recherche, tout en évitant des calculs fastidieux.

Cependant, il faudrait que l'introduction des machines apparaisse seulement dans les classes supérieures afin que les élèves ne soient pas totalement dépendants de leur machine et apprennent d'abord les mathématiques traditionnelles. Les calculateurs doivent rester complémentaires, bien qu'ils soient maintenant essentiels dans la vie professionnelle.

Leur familiarisation est nécessaire.

Quant au cours en lui-même, l'emploi des calculatrices a beaucoup détendu l'atmosphère, et constitue évidemment un exercice divertissant. Mais peut-être n'est-ce dû qu'à la nouveauté".

Un élève de Première C

"Il est indéniable que les calculatrices scientifiques et programmables utilisées à bon escient, sont d'un apport très profitable à l'élève.

Du point de vue connaissances mathématiques, je ne pense pas qu'elles puissent apporter beaucoup à l'élève. La calculatrice se contente de donner des résultats ; ce n'est pas elle qui nous apprend les connaissances mathématiques, mais le professeur.

Mais elles peuvent aider l'élève à mieux assimiler ces connaissances et à mieux les utiliser.

Quant aux méthodes de raisonnement et de travail, je pense que c'est dans ce domaine que les calculatrices sont le plus utiles. Elles contribuent à "l'épanouissement" intellectuel de l'élève. D'abord par ses programmes et sa rapidité de calcul, les machines permettent de gagner un temps appréciable. Mais, surtout, elles donnent une sûreté de jugement et de raisonnement bien supérieure. La machine est un moyen utile de vérification puisque, sans défaillance de sa part ou sans erreur du programmeur ou du calculateur, elle permet de corriger ou d'approuver un raisonnement.

Mais je pense que les machines ne doivent pas être utilisées à tort et à travers. Lorsque l'élève a un exercice à faire, il doit d'abord le faire intellectuellement, puis vérifier ensuite son résultat avec la calculatrice. (Bien que la tentation d'effectuer le mouvement inverse soit très grande).

Je pense que l'introduction des machines à calculer est bénéfique pour l'enseignement des mathématiques. Je crois qu'elle permet au professeur de gagner du temps car l'élève comprend plus vite ; elle est pour l'enseignant un complément du cours et lui permet de mieux faire assimiler ses leçons aux élèves (nous avons commencé avec l'étude des fonctions dérivées).

Je pense que mon comportement s'en trouve modifié puisqu'il y a le professeur pour enseigner et son adjoint, la machine, pour m'aider.

Une parenthèse : à mon avis, l'introduction des machines dans les examens pourrait être néfaste aux élèves car le niveau des épreuves, déjà très élevé dans certaines sections, pourrait l'être encore plus.

On peut donc dire que les machines programmables permettent à l'élève de se livrer à un travail plus créatif et de lui enlever de l'esprit la hantise de l'erreur.

Un élève de Première C

Après les premiers étonnements, j'ai en effet été très intéressé et très séduit par la calculatrice programmable.

Contrairement à ce que certaines personnes pensent, je crois que le raisonnement ne reçoit de ces machines aucune influence néfaste. Car l'action même de construire un programme fait travailler l'esprit.

Les méthodes de travail, tant en classe que hors classe, ont été modifiées. En classe les cours s'en sont trouvés par là- même décontractés. Hors classe, bien que n'ayant pas de calculatrice programmable, je pense que ceux qui en ont une l'ont adaptée à leur travail.

L'introduction des calculatrices programmables est, je crois, une bonne chose pour l'enseignement des mathématiques. Dans notre société, où de plus en plus on se tourne vers l'Informatique, cette introduction est nécessaire comme première initiation.

Enfin, je crois que mon comportement en classe s'est modifié ; ma participation a été plus active.

BIBLIOGRAPHIE

MATHEMATIQUE ET CALCULATRICE DE POCHE

Noël et Bastier — Technique et Vulgarisation

POUR UNE APPROCHE HEURISTIQUE DE
L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Reisz et Wasserer — I.R.E.M. de DIJON

ACTIVITES EN ANALYSE
MAJORER - MINORER - ENCADRER

Viallard — I.R.E.M. de RENNES

LA CALCULATRICE DE POCHE AU LYCEE

Vangeluwe — hachette

DERIVABILITE

Barra et Pensec — I.R.E.M. de POITIERS

HP 25 (7 FICHES POUR APPRENDRE A PROGRAMMER)

Quelfeter — I.R.E.M. de NANTES