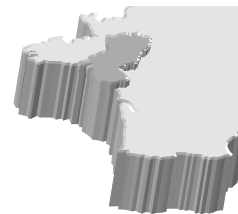


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



Quelques difficultés pédagogiques dans l'enseignement de l'analyse

M. Foulques
M. Seroux

1978

QUELQUES DIFFICULTES PEDAGOGIQUES
DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

(Second cycle des lycées)

par

Monsieur FOUQUES

Professeur à l'U.E.R. de Mathématiques
Faculté des Sciences de Nantes

et

Monsieur SEROUX

Professeur au Lycée Jean-Perrin
Rezé-les-Nantes

—

QUELQUES DIFFICULTES PEDAGOGIQUES

DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

(second cycle des lycées)

Par Monsieur FOUQUES
Professeur à l'UER de Mathématiques
Faculté des Sciences de Nantes

et Monsieur SEROUX
Professeur au Lycée Jean-Perrin
REZE LES NANTES

INTRODUCTION

Dans les réunions de professeurs de mathématiques, les difficultés rencontrées dans l'enseignement de la géométrie sont constamment évoquées mais il est rare que soient soulevés des problèmes concernant l'enseignement de l'analyse. Peut-être n'en existe-t-il aucun ?

Toutefois, la lecture des sujets de baccalauréat (toutes séries) semble indiquer que, dans ce domaine, comme dans beaucoup d'autres, tout est loin d'être résolu du point de vue pédagogique. C'est un festival de confusions de langage et d'imprécisions...

Pour notre part, persuadés que la maxime affirmant que "dans un lycée, le professeur de mathématique doit être le meilleur professeur de français" est une règle d'or, nous allons essayer de commenter certaines difficultés rencontrées dans cet enseignement.

Donnons, tout d'abord, pour justifier nos affirmations quelques exemples précis extraits de nos lectures.

Enoncé 1

Référence : GRENOBLE - Juin 1972 - Série A

On considère la fonction f , de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)}$$

1°) Préciser son ensemble de définition

2°) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

où A et B sont deux réels, que l'on calculera.

3°) Trouver les limites de la fonction f :

- a) quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$
- b) quand x tend vers $+1$
- c) quand x tend vers $+2$

4°) Calculer la fonction dérivée de f . On étudiera son signe après avoir factorisé le numérateur.

5°) Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe représentative dans un repère orthonormé.

Critique de l'énoncé 1

Le mot "définie" prête à confusion car la fonction f n'est précisément pas définie pour $x = 1$ et $x = 2$. Il serait plus correct de dire : "Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à x , associe, lorsqu'il existe, le nombre

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)} "$$

2ème question

La formulation donnée omet deux quantificateurs, dont l'un est indispensable pour l'identification.

Grave semble également le fait que l'unicité du couple (A, B) soit complètement passée sous silence.

On pourrait dire :

"E f désignant l'ensemble de définition de f , démontrer qu'il existe un couple unique de réels (A, B) que l'on calculera, tels que pour tout x élément de E_f :

$$f(x) = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} "$$

3ème question

Le mot "trouver" préjuge l'existence des limites mais n'impose nullement l'impératif d'une justification des calculs. La question aurait pu être :

"La fonction f admet-elle une limite, finie ou non, lorsque :

x tend vers 1 ? x tend vers 2 ? x tend vers $+\infty$? x tend vers $-\infty$?

Dans chaque cas où la limite existe, la calculer".

4ème question

La formulation proposée appelle plusieurs remarques

- il faudrait tout d'abord, étudier la dérivabilité de f
- une fonction n'étant pas un nombre, il n'est pas possible de la "calculer". Il s'agit de :

"déterminer la fonction dérivée de f "

- la notion de "signe d'une fonction" semble curieuse, de même que celle de "numérateur" d'une fonction. Il s'agit "d'étudier le signe de $f'(x)$."

5ème question

Compte tenu de la nature mathématique d'un repère, il semble difficile de construire quoi que ce soit dans un repère. Il s'agit de :

"Construire la courbe dans un plan muni d'un repère orthonormé"

Enoncé 2

Référence : LILLE - Juin 1972 - Série D (partiel)

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+5)^2}$$

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (c) , dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

2°) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-\frac{5}{2}$?

3°) Soit (Δ_m) , la droite d'équation $y = m$. Dans le cas où elle coupe (c) en deux points P et P' , montrer que l'ensemble des milieux I des segments $[PP']$ est une partie, que l'on précisera sans la construire, de la courbe d'équation

$$y = \frac{x}{x+5}$$

4°) On considère la fonction g de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \frac{-5(2x+5)}{(x+5)^2}$$

Soit (C') sa courbe représentative (qu'on ne demande pas de construire dans cette question).

La droite d'équation $x = \alpha$ coupe (C) en A et (C') en A' .

Calculer AA'

5°) Dédurre de ce qui précède, sans calculer $g'(x)$, les variations de g et le tracé de sa courbe représentative (C') , dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

6°) Démontrer que l'on peut trouver deux nombres a et b tels que, pour tout x du domaine de définition de g on ait :

$$g(x) = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{(x+5)^2}$$

Critique de l'énoncé 2

Remarquons que f n'est précisément pas "définie" pour $x = -5$.

1ère question

La courbe (c) doit être tracée dans un plan muni d'un repère orthonormé $(o, (\vec{i}, \vec{j}))$

2ème question

Pourquoi affirmer l'existence de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-\frac{5}{2}$?

On aurait pu utiliser la formulation :

"Démontrer qu'il existe une tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $-\frac{5}{2}$. En déterminer l'équation relativement au repère $(o, (\vec{i}, \vec{j}))$ "

3ème question

Cette question envisage la droite (Δ_m) d'équation $y = m$, sans préciser ce que représente m . S'il n'y a qu'une seule droite, le reste de la question est incompréhensible. Le problème pourrait être posé de la façon suivante : " m étant un réel donné, soit (Δ_m) la droite d'équation $y = m$. Si (Δ_m) coupe (C) en deux points, P_m et P'_m , soit I_m le milieu du segment $[P_m P'_m]$. Démontrer que, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points I_m est un sous-ensemble des points de la courbe dont une équation relativement au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, est : $y = \frac{x}{x+5}$ "

4è et 5ème question

Ici encore on ne sait absolument rien de α et l'utilisation d'une seule droite ne mène à rien. Le problème posé est le suivant :

"On considère la famille des droites (D_α) d'équations $x = \alpha$ où α est un réel. Démontrer que, quel que soit α différent de (-5) , les droites (D_α) coupent (C) et (C') respectivement en A et A' tels que $d(A, A')$ soit constante. En déduire une construction de (C') à partir de la courbe (C)"

6ème question

Le couple (a, b) est-il unique ? L'énoncé n'en dit rien ! Une formulation possible est la suivante :

"Démontrer qu'il existe un couple unique de réels (a, b) tel que, pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de g , on ait :

$$g(x) = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{(x+5)^2}$$

Le mot "domaine" n'apporte rien par rapport au terme "ensemble de définition". Le mot "domaine" a un sens précis en topologie, il semble inutile (pour perpétuer une vieille habitude) de le faire intervenir ici.

Enoncé 3

Référence - DAKAR - Juin 1972 - Série E

Le plan étant rapporté au repère orthonormé $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$, d'axes $\vec{x'Ox}$ et $\vec{y'Oy}$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -2 - \cos 2t \end{cases}$$

1°) Déterminer la relation indépendante de t liant x et y.

2°) Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lorsque $t \in [0, 2\pi]$

On donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

3°) Calculer, à la date $t = \frac{3\pi}{4}$, les coordonnées

a) du vecteur espace $\vec{OM}$

b) du vecteur vitesse $\vec{V}$

c) du vecteur-accelération $\vec{\Gamma}$

4°) Tracer les vecteurs $\vec{OM}$, $\vec{V}$, $\vec{\Gamma}$

Critique de l'énoncé 3

1ère question

La formulation proposée affirme l'existence d'une telle relation et son unicité. C'est pour le moins abusif... Que pensez-vous de la relation : $0x + 0y = 0$? On aurait pu dire :

"Démontrer que, lorsque t varie, M appartient à une courbe (C) , dont on écrira une équation cartésienne relativement au repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ "

2ème question

Le mot "caractériser" semble par trop vague. Nous proposons :

"Préciser la trajectoire du point M lorsque t appartient à $[0, 2\pi]$ "

Le graphe d'une fonction f étant l'ensemble des couples $[x, f(x)]$ pour tout x élément de l'ensemble de définition E_f de la fonction f , il semble difficile de le tracer ! Et qui plus est, dans un repère... Nous proposons :

"Tracer cette trajectoire dans le plan muni du repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ "

Le repère $(O, (\vec{i}, \vec{j}))$ étant orthonormé, on aurait naïvement pu croire que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Que 2cm représentent la longueur du segment choisi comme unité sur chaque axe est une autre histoire...

4ème question

Quant à tracer les vecteurs $\vec{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{T}$ c'est une entreprise hasardeuse : il ne peut être question que d'en tracer des représentants à l'instant $t = \frac{3\pi}{4}$, d'origine O pour $\vec{OM}$, d'origine M pour $\vec{V}$ et $\vec{T}$.

Enoncé 4

Référence : SUD-CAMEROUN -Juin 1973- Série B

On considère la fonction f , de la variable réelle x , telle que

$$f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x}$$

- 1°) a/ Quel est le domaine de définition de f ?
b/ f est-elle continue sur son domaine de définition ?
c/ Calculer la dérivée de f en un point différent de 1 du domaine de définition
d/ h étant un réel non nul, calculer le taux d'accroissement

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{de } f \text{ entre } 1 \text{ et } 1+h$$

La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?

Enoncé 5

Référence : BESANCON -Juin 1974- Série D

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- 1°) Etudier les variations de la fonction f . Montrer que la courbe représentative (C) admet un point d'inflexion dont m donnera les coordonnées. (On rappelle que l'abscisse x_0 d'un point d'inflexion satisfait à $f''(x_0) = 0$).

Critique de l'énoncé 4

Ne revenons pas sur l'emploi du mot "domaine" (voir énoncé 2)

La question b/ compte tenu du fait que les programmes n'envisagent pas la notion de continuité sur un ensemble mais sur un intervalle devrait être rédigée de la façon suivante : "*f* est-elle continue sur chaque intervalle où elle est définie ?"

Dans la question c/ l'emploi de "un" semble discutable. S'agit-il pour le candidat de choisir une valeur particulière, par exemple 2, et de calculer $f'(2)$? ou plutôt de :

"Démontrer que la fonction f est dérivable pour toute valeur x_0 , différente de 1, de son ensemble de définition.

Calculer, alors, le nombre dérivé $f'(x_0)$ "

Dans la question d/ la condition imposée à h paraît fort insuffisante : que se passe-t-il lorsque $h = -1$? ou plus généralement, lorsque zéro appartient à l'intervalle $[1+h, 1]$?

Critique de l'énoncé 5

Notons d'abord que la notion de point d'inflexion est hors programme. Quand elle est abordée dans l'enseignement secondaire, elle est liée à l'idée de "courbe traversant sa tangente" ou de "changement de concavité". En tout état de cause, on peut faire la remarque suivante : certes l'abscisse x_0 d'un point d'inflexion peut satisfaire à $f''(x_0) = 0$ mais cette condition n'est ni nécessaire ni suffisante...

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à x , associe x^4 est telle que $f''(0) = 0$ mais le point 0 n'est pas point d'inflexion.

La fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^*, \forall x \quad g(x) = \frac{|x| \sqrt{|x|}}{x} \\ g(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{n'est pas dérivable en zéro}$$

mais 0 est point d'inflexion !

Enoncé 6

Référence : BORDEAUX -Juin 1973- Série B

1°) soit (Γ) la courbe représentative de la fonction définie par :

$$x \xrightarrow{x \in \mathbb{R}} y = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

Déterminer a , b et c pour que la courbe :

- passe par le point A de coordonnées $(0, -\frac{3}{4})$
- admette au point B d'abscisse 3 un minimum
- passe par le point C de coordonnées $(1, 2)$.

Enoncé 7

Référence : CAEN -Juin 1974- Série B

"on considère la fonction numérique

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{\quad} & \frac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} \end{array}$$

Montrer que la restriction h de f à l'intervalle $]2, +\infty[$ est une bijection de $]2, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$

Critique de l'énoncé 6

C'est la fonction qui admet un minimum et non la courbe... On pouvait dire :

"Déterminer les réels a , b et c pour que les points $A(0, -\frac{3}{4})$ et $C(1, 2)$ appartiennent à (Γ) et que la fonction f admette un minimum pour $x = 3$. On désignera par B le point de la courbe (Γ) d'abscisse 3".

La notation correcte pour la fonction serait :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} - \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b + \frac{c}{(x-2)^2} \end{array}$$

Il est dommage de trouver dans un texte d'examen une notation qui ne soit pas connue de tous les élèves.

Critique de l'énoncé 7

Si h est la restriction de f à l'intervalle $]2, +\infty[$, h est une application de $]2, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ mais pas une bijection.

$$\begin{array}{ccc} \text{L'application } h : &]2, +\infty[& \longrightarrow]1, +\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{x^2 - 4x + 6}{(x-2)^2} \end{array}$$

est une bijection, mais ce n'est pas la restriction de f à $]2, +\infty[$

CHAPITRE 0

UN PEU DE LOGIQUE ...

Un des gros reproches faits aux mathématiques enseignées actuellement est l'utilisation du langage formalisé. Donnons notre position à ce sujet.

0.1 Remarque générale

Les quantificateurs, les connecteurs, et de façon générale, les symboles, ne doivent être utilisés que dans la mesure où ils apportent clarté et simplification dans l'esprit des élèves.

Il va de soi que lorsqu'ils sont introduits, leurs règles d'application sont données de façon très précise. Ils ne doivent en aucun cas être assimilés à des signes de sténographie.

Donnons quelques exemples illustrant ces propos...

0.2 Un très mauvais exemple

Nous avons découvert dans les annales du baccalauréat, session de Juin 1974, série C, Académie d'AIX-MARSEILLE, le petit chef d'oeuvre suivant qui, du point de vue qui nous occupe, se passe de tout commentaire...

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$, des fonctions continues au point 0.

On désigne par $\mathcal{G}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$, des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2, à des coefficients réels.

On définit dans $\mathcal{E}$ une addition et une multiplication par un nombre réel notées $+$ et $\cdot$ respectivement, par

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{E}, \forall g \in \mathcal{E}, \forall x \in \mathbb{R} & \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall f \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} & \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

On rappelle que $\mathcal{E}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A) 1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$

Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$

2) Dans tout le problème on considère les deux applications

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{définie par} & \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sigma(x) = 2x \\ \phi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} & \text{définie par} & \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad \phi(f) = f + f \circ \sigma \end{aligned}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ calculer $[\phi(f)](x)$
- Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$
- Montrer l'inclusion $\phi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$
- Montrer l'égalité $\phi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$

B) Soit $f \in \mathcal{E}$ définie de la manière suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n, \quad f(x) = (-1)^n$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il n'existe aucun n appartenant à $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$x = 2^n, \quad f(x) = 0$$

- Déterminer $\phi(f)$
- Est-ce que ϕ est injective ?

C) On note $\bar{0}$ la fonction nulle définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \bar{0}(x) = 0$

Soit $\ker \phi$ le noyau de ϕ : $\ker \phi = \{f \in \mathcal{E} \mid \phi(f) = \bar{0}\}$

- Etablir que $\forall f \in \ker \phi \quad f(0) = 0$
- Etablir par récurrence sur n entier naturel que :

$$\forall f \in \ker \phi, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = (-1)^n f\left(-\frac{x}{2^n}\right)$$

On désigne par $\phi_{\mathcal{F}}$ la restriction ϕ à $\mathcal{F}$

- Montrer que $\ker \phi_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap \ker \phi$
- Déterminer $\ker \phi_{\mathcal{F}}$

D) Soit $g \in \varepsilon$ définie de la manière suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n}, \quad g(x) = \frac{1}{n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$x = \frac{1}{4^n}, \quad g(x) = 0$$

a) Montrer que $g \in \mathcal{F}$

b) S'il existe $f \in \varepsilon$ telle que $\Phi(f) = g$ établir une relation entre

$$f\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

c) Soit la suite numérique de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

En déduire que $u_n \longrightarrow +\infty$ quand n tend vers $+\infty$

d) Montrer que g n'est l'image par Φ d'aucun élément de $\mathcal{F}$

Est-ce que Φ est surjective ?

0.3 Du "camouflage" des quantificateurs

Certaines phrases du type "la fonction f est définie sur l'ensemble A " ou "la fonction f n'est pas définie sur l'ensemble A " donnent lieu à confusions de la part des élèves du fait que les quantificateurs sont sous-entendus.

* Dans l'usage courant, la première phrase signifie "la fonction f est définie pour tout élément x de A " mais elle peut l'être pour d'autres éléments n'appartenant pas à E . On dira, par exemple, que "la fonction f :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\frac{x^2}{x-1}} \end{array}$$

est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$... mais elle est

également définie en 0.

* La seconde phrase, qui est sa négation, signifie "il existe au moins un élément x de A pour lequel f n'est pas définie"

* Toutefois, il n'est pas rare de dire que : "la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas

$$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4}$$

définie sur $]-2, 2[$ " Et alors, cette phrase signifie "il n'existe aucun élément x de $]-2, 2[$ pour lequel f est définie".

0.4 De l'utilité des quantificateurs

Exemple 1

Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $*$, x et y étant deux éléments de E , considérons les trois propositions suivantes que nous supposons vraies :

$$(P_1) \quad x * y = y * x$$

$$(P_2) \quad (\forall x) (x * y = y * x)$$

$$(P_3) \quad (\forall x) (\forall y) (x * y = y * x)$$

Ces trois propositions ont des sens très différents :

* (P_1) signifie : "les deux éléments de E notés x et y commutent". Les lettres x et y sont des lettres parlantes

- Nous mettons en évidence une propriété de deux éléments parfaitement "identifiés", x et y , de E .

* (P_2) signifie : "l'élément y de E commute avec tout élément de E ". La lettre y est parlante tandis que la lettre x est muetifiée par le quantificateur universel $(\forall)$. Nous mettons en évidence une propriété du seul élément y de E .

* (P_3) signifie : "la loi notée $*$ est commutative dans E ". Les deux lettres x et y sont muettes. Nous mettons en évidence une propriété de la loi notée $*$ dans E .

Exemple 2

Plus subtile est la nuance apportée par les quantificateurs dans l'exemple suivant.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $*$. Soit e et x deux éléments de E . Considérons les deux propositions suivantes :

$$(Q_1) \quad (\forall x) (x * e = e * x = x)$$

$$(Q_2) \quad (\exists e) (\forall x) (x * e = e * x = x)$$

Ces deux propositions, souvent confondues par les élèves, ont, en réalité des sens distinctes.

* (Q_1) signifie : " e est élément neutre de $(E, *)$ ". La lettre x est muette, la lettre e parlante. Nous mettons en évidence la propriété pour l'élément e , parfaitement identifié de E , d'être neutre pour la loi notée $*$ dans E

* (Q_2) signifie "il existe dans E au moins un élément neutre pour la loi notée $*$ ". Les deux lettres x et e sont muettes. Nous mettons en évidence une propriété de la loi notée $*$ dans E .

(Q_2) pourrait tout aussi bien s'écrire :

$$(\exists e) (\forall x) (x * e = e * x = x)$$

où e représente un élément de E .

Ceci montre donc que si (Q_1) est vraie alors (Q_2) est vraie, mais si (Q_2) est vraie, on ne peut rien dire sur (Q_1) car (Q_2) ne fournit aucun renseignement sur e .

0.5 De l'utilité des connecteurs

Soit à résoudre l'équation (E) :

$$(x \in \mathbb{R} ; x^2 + x + 1 = 0)$$

* Très souvent les élèves n'utilisent, pour résoudre une telle équation, aucun lien logique entre leurs calculs et ceci peut, par exemple, conduire au "raisonnement" suivant :

$$x(x+1) = -1$$

$$x+1 = -x^2$$

$$x(-x^2) = -1$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

De là à conclure que 1 est racine de (E)...

* L'utilisation des connecteurs met immédiatement en évidence l'erreur de raisonnement.

Appelons S l'ensemble des solutions de (E)

$$(x \in S) \iff [x(x+1) = -1]$$

$$(x \in S) \iff (x+1 = -x^2)$$

On en déduit que :

$$(x \in S) \iff ([x(x+1) = -1] \wedge [x+1 = -x^2])$$

Mais, on a seulement l'implication :

$$[x(x+1) = -1] \wedge [x+1 = -x^2] \implies x^3 = 1$$

et non l'équivalence.

CHAPITRE 1

LE CORPS DES REELS

CHAPITRE 1

LE CORPS DES REELS

La construction du corps $\mathbb{R}$ des réels à partir du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ne figure pas dans les programmes du second degré car elle dépasse, et de loin, le niveau des élèves. Mais il est bon de faire comprendre à ceux-ci pourquoi on a été amené à cette construction. Quelques rappels sur les ensembles ordonnés et sur les suites seront utiles.

1-1 Rappels sur les ensembles ordonnés

1-1-1 Définitions.

- a. Une relation binaire α définie sur un ensemble E est une relation d'ordre, sur E si, et seulement si, elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
(α se lira "inférieur ou égal")
- b. α est une relation d'ordre total si α est une relation d'ordre vérifiant la condition supplémentaire
($\forall (x, y) \in E^2$) ($x \alpha y$ ou $y \alpha x$)
- c. α est une relation d'ordre partiel si α est une relation d'ordre qui ne vérifie pas la condition supplémentaire précédente.
[Une des relations d'ordre partiel les plus importantes est la relation d'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble]

1-1-2 Définitions.

Soit (E, α) un ensemble ordonné (totalement ou partiellement) P une partie non vide de E , e un élément de E . Alors :

- a. Si, pour tout $x \in P$, on a $x \alpha e$ (resp. $e \alpha x$) on dit que e est un majorant (resp. un minorant) de P .
- b. Si $e \in P$ et si, pour tout $x \in P$ $e \alpha x$ (resp. $x \alpha e$) implique $x = e$, on dit que e est un élément maximal (resp. minimal) de P

- c. Si dans P , il existe un, et un seul, élément e tel que, pour tout $x \in P$, on ait $x \leq e$ (resp. $e \leq x$), on dit que e est le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de P .
- d. Si l'ensemble des majorants de P admet un plus petit élément e (nécessairement unique), on dit que e est la borne supérieure de P . On notera $e = \text{Sup}(P)$.
- e. Si l'ensemble des minorants de P admet un plus grand élément e (nécessairement unique) on dit que e est la borne inférieure de P . On notera $e = \text{Inf}(P)$.

1-1-3

Remarques

a) Un élément maximal de P n'est pas nécessairement un majorant de P . C'est un élément de P tel qu'il n'existe, dans P , aucun élément strictement plus grand que lui.

b) Si $\text{Sup}(P)$ existe, $\text{Sup}(P)$ est le plus grand élément de P si, et seulement si, $\text{Sup}(P)$ appartient à P . Si $\text{Sup}(P) \notin P$, P n'a pas de plus grand élément.

c) Si P admet un plus grand élément, alors e est la borne supérieure de P et c'est le seul élément maximal de P .

d) Si P admet un seul élément maximal, P n'admet pas nécessairement un plus grand élément.

e) Un majorant de P appartient à P , si, et seulement si, c'est le plus grand élément de P .

f) Si E est totalement ordonné, les notions d'élément maximal de P et de plus grand élément de P sont les mêmes.

1-1-4- Exemple

(qui ne devrait intervenir qu'après avoir parlé de $\mathbb{R}$)

$\mathbb{R}^2$ étant ordonné (partiellement) en posant $(x, y) \prec (x', y') \iff (x \leq x') \text{ et } (y \leq y')$, désignons par P l'ensemble des points appartenant aux "côtés" du polygone, ou "inférieurs" au polygone de sommets successifs :

$a(-2, 2), b(2, -1), c(1, 2), d(5, 1), e(1, 3),$

$f(3, 3), g(0, 4)$ et a . Alors :

a) $((x, y) \text{ majorant de } P) \iff (x \geq 5) \text{ et } (y \geq 4)$

b) $((x, y) \text{ minorant de } P) \iff (x \leq -2) \text{ et } (y \leq -2)$

c) $((x, y) \text{ élément maximal de } P) \iff [(x \in [0, 3] \text{ et } x + 3y - 12 = 0) \text{ ou } (x \in]3, 5] \text{ et } x + 2y - 7 = 0)]$

d) $(x, y) \text{ élément minimal de } P \iff (x = -2) \text{ et } (y = -2)$

e) P n'admet pas le plus grand élément mais admet une borne supérieure égale à $(5, 4)$. P admet un plus petit élément égal à $(-2, -2)$.

1-2 Rappels sur les suites dans $\mathbb{Q}$

1-2-1 Définitions

a. Une suite dans $\mathbb{Q}$ est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$.

[On peut définir une suite comme étant une application de $\mathbb{N} + k$ (où k est un entier fixé dans $\mathbb{Z}$, et où $\mathbb{N} + k$ est l'ensemble $\{x + k / x \in \mathbb{N}\}$. Habituellement on prend k égal à 0, ou à 1. Ici nous avons pris k égal à 1].

Si l'image de n (où $n \in \mathbb{N}^*$) est notée U_n , on dit que U_n est le terme général de la suite. Celle-ci sera notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou plus brièvement (U_n) .

b. Dans $\mathbb{Q}$, la suite (U_n) est convergente s'il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$) il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $n > n_0$ implique $|U_n - a| < \varepsilon$

[Dire que "dans $\mathbb{Q}$ la suite, (U_n) converge" implique que les U_n appartiennent à $\mathbb{Q}$ et qu'il en est de même de la limite de la suite.]

c. Dans $\mathbb{Q}$, la suite (U_n) est majorée s'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $U_n \leq q$.

d. Dans $\mathbb{Q}$ la suite (U_n) est croissante si $m \leq n$ (où $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$) implique $U_m \leq U_n$.

1-3 "Insuffisances" de $\mathbb{Q}$

1-3-1 Remarques

a) $\mathbb{Q}$ ordonné par l'ordre usuel est totalement ordonné.

b) Notons aussi que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$, il y a équivalence entre

b1) a est la borne supérieure de A

b2) a est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$) il existe $x \in A$ tel que $a - \varepsilon < x$.

Par exemple 2 est la borne supérieure de $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$

1-3-2 Proposition

Dans $\mathbb{Q}$ les 4 énoncés suivants sont faux

(E1) Toute suite majorée et croissante est convergente

(E2) Toute suite minorée et décroissante est convergente

(E3) Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure

(E4) Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure

(E1) et (E2) sont faux

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad V_n = 1 + \frac{2}{n!}$$

La suite (U_n) est croissante. La suite (V_n) est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$V_n - V_{n+1} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{n-1}{(n+1)!}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $U_p \leq V_q$
 (En effet si $p \leq q$, alors $U_p \leq U_q \leq V_q$ et si $p \geq q$, $U_p \leq V_p \leq V_q$)
 Ceci montre que la suite (U_n) est majorée par V_1 et que la suite (V_n) est
 minorée par U_1 .

Si (U_n) avait une limite dans $\mathbb{Q}$, égale à $\frac{p}{q}$, la suite (V_n) aurait aussi
 comme limite $\frac{p}{q}$ puisque $V_n - U_n$ tend vers 0. La suite (U_n) étant crois-
 sante et la suite (V_n) décroissante, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < \frac{p}{q} < V_n$
 et en particulier

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \leq \frac{p}{q} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!}$$

D'où en multipliant par $q!$, et en désignant par m l'entier

$$(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}) q!$$

$$m < (q-1)! \cdot \frac{p}{q} < m + 1$$

Ce qui est impossible : $(q-1)! \cdot \frac{p}{q}$ étant un entier ne peut être stricte-
 ment compris entre deux entiers consécutifs. Par suite (U_n) et (V_n) ne
 sont pas convergentes dans $\mathbb{Q}$ (Parcontre elles convergent dans $\mathbb{R}$ vers le
 nombre e).

(E3) et (E4) sont faux

En utilisant la remarque b) et le fait que la suite (U_n) précédente est
 croissante, on peut montrer que l'ensemble non vide et majoré

$$U = \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ et que l'ensemble non vide et minoré

$$V = \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.

Donnons un autre exemple :

$$\text{Soit } A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid (x \geq 0) \text{ et } (x^2 \leq 2) \right\}$$

Si l'ensemble A , non vide et majoré, admet une borne supérieure a dans $\mathbb{Q}$, cette borne est strictement positive. Si $a^2 < 2$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, tel que $(a + \varepsilon)^2 \leq 2$, d'où $(a + \varepsilon) \in A$, en contradiction avec l'hypothèse sur a .

Si $a^2 > 2$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \varepsilon < a$ et $(a - \varepsilon)^2 > 2$, alors $a - \varepsilon$ est un majorant de A strictement inférieur à a , d'où contradiction.

Comme de plus, il n'existe aucun rationnel de carré égal à 2, A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (Par contre A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ égale à $\sqrt{2}$).

De cette démonstration on déduit aussi que l'ensemble non vide et minoré

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid (x \leq 0) \text{ et } (x^2 \leq 2) \right\}$$

n'a pas de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$.

1-3-3 Problème

Les quatre énoncés (E1), (E2), (E3), (E4), étant faux dans $\mathbb{Q}$ les mathématiciens se sont posé le problème :

"Peut-on construire un corps K satisfaisant aux conditions suivantes :

a) K est un corps commutatif totalement ordonné :

[ce qui signifie :

- K est un corps commutatif
- K est un ensemble totalement ordonné
- La relation d'ordre sur K est compatible avec la structure de corps de K , autrement dit

$$(CO_1) \quad (\forall (a, b, c) \in K^3) \quad [(a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c)]$$

$$(CO_2) \quad (\forall (a, b, c) \in K^3) \quad [(a \leq b) \text{ et } (0 < c) \Rightarrow (ac \leq bc)]$$

b) K est une extension du corps $\mathbb{Q}$ et l'ordre usuel sur $\mathbb{Q}$ est l'ordre induit par celui de K (autrement dit $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ordonné de K)

c) Toute partie non vide de K majoré admet une borne supérieure."

Ce problème admet une solution unique, à une isomorphie près (si K et K' sont deux solutions il existe une bijection φ de K sur K' telle que

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in K^2 \quad \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \\ a \leq b &\Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b) \end{aligned}$$

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad \varphi(q) = q$$

($\mathbb{Q}$ étant considéré comme sous-corps de K et de K'). Cette solution est le corps $\mathbb{R}$ des réels

1-3-4 Propositions

On démontre que

- a) Les quatre énoncés (E1), (E2), (E3), (E4), sont vrais dans $\mathbb{R}$.
- b) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: si $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x < y$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.
- c) $\mathbb{R}$ est archimédien : pour tout x réel strictement positif et pour tout y réel strictement positif il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n y$.
- d) $\mathbb{R}$ est complet : dans $\mathbb{R}$ il y a équivalence entre
 - d1) La suite (U_n) est convergente
 - d2) La suite (U_n) est une suite de Cauchy
 Une suite de Cauchy est une suite vérifiant la condition suivante :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall p \in \mathbb{N})$$

$$[(n > n_0) \text{ et } (p > n_0) \Rightarrow |U_n - U_p| < \varepsilon]$$

$$[\text{Dans } \mathbb{Q}, d_1 \Rightarrow d_2 \text{ mais la réciproque est fausse.}]$$

1-3-5 Remarque L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être muni d'une relation d'ordre total : par exemple

$$(x + iy) \prec (x' + iy') \iff \begin{cases} (x < x') \\ \text{ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \end{cases}$$

mais il n'existe pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec la structure de corps de $\mathbb{C}$

Supposons en effet qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une relation d'ordre total notée $\prec$ vérifiant les axiomes (CO_1) et (CO_2) de 1-3-3 Alors :

a) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a $0 \prec z^2$

Ceci est trivial si $z = 0$ puisque $\prec$ est réflexive

Si $0 \prec z$ et $z \neq 0$, alors (CO_2) donne $(0, z) \prec z^2$ soit $0 \prec z^2$

Si $z \prec 0$ et $z \neq 0$, alors (CO_1) donne $[z + (-z)] \prec [0 + (-z)]$ soit $0 \prec (-z)$ et (CO_2) donne $[0, (-z)] \prec (-z)^2$ soit encore $0 \prec z^2$

b) Puisque $1 = (1)^2$ et $-1 = (i)^2$ alors $0 \prec 1$ et $0 \prec (-1)$ mais $0 \prec (-1)$ donne, compte tenu de CO_1 , $[1 + 0] \prec [1 + (-1)]$, soit $1 \prec 0$. Enfin, $0 \prec 1$ et $-1 \prec 0$ donnent $1 = 0$ ce qui est impossible.

$\mathbb{C}$ n'est donc, d'aucune façon, un corps ordonné.

CHAPITRE 2

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathbb{R}$

CHAPITRE 2.

§ 1 FONCTIONS ET APPLICATIONS

2-1-1 Remarque préliminaire.

Selon l'instruction ministérielle n° IV 70-70 du 6/2/70 (classe de 2^e C I-langage des ensembles. Applications)

" Le mot d'application a, en mathématique, un sens très précis :
 " dans une application de l'ensemble de départ A vers l'ensemble
 " d'arrivée B tout élément de A a une image et une seule
 " dans B. Le sens du mot fonction est moins assuré : pour certains,
 " fonction et application sont synonymes ; pour d'autres, la
 " correspondance f de l'ensemble A vers l'ensemble B est telle
 " que tout élément de A a au plus une image dans B ;
 " l'ensemble des éléments de A qui ont une image est l'ensemble
 " de définition de la fonction, noté parfois déf f ; par f
 " est ainsi définie une application de déf f vers B ; c'est
 " assurément l'étude de cette dernière application qui présente,
 " en définitive, un intérêt majeur".

En fait, il semble bien que :

- pour l'immense majorité (pour ne pas dire la totalité) des mathématiciens les mots "fonction." et "application" soient synonymes,

- pour les professeurs du second degré seulement, ces mots n'ont pas la même signification. Pour eux une fonction de E dans F est une correspondance dans laquelle tout élément de E a au plus une image dans F. Avec cette définition on peut dire qu'une application de E dans F est une fonction dont l'ensemble de départ est un ensemble quelconque contenant E, dont l'ensemble de définition est E et dont l'ensemble d'arrivée est F.

Les mathématiciens utilisent les définitions suivantes :

2-1-2 Définitions.

E et F désignant deux ensembles

a. Une correspondance entre E et F est un triplet $\Gamma = (G, E, F)$, où G est un sous-ensemble de $E \times F$. G est alors appelé le graphe de Γ , E l'ensemble de départ de Γ , F l'ensemble d'arrivée de Γ .
 L'ensemble $\{x \in E \mid (\exists y \in F) ((x, y) \in G)\}$ est appelé ensemble de définition de Γ .
 L'ensemble $\{y \in F \mid (\exists x \in E) ((x, y) \in G)\}$ est appelé ensemble des valeurs de Γ .

- b. Une correspondance dont le graphe est fonctionnel est une correspondance $\Gamma = (G, E, F)$ dont le graphe possède la propriété suivante : pour tout élément x de E il existe au plus un élément y de F tel que (x, y) est élément de G .
- c. Une correspondance $f = (G, E, F)$ est une fonction si, pour tout élément x de E , il existe un, et un seul, élément y de F tel que (x, y) est élément de G .

Par exemple :

$(G, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, où $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \text{Log } x\}$ est une correspondance dont le graphe est fonctionnel.

$(G, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, où $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid y = \text{Log } x\}$ est une fonction (ou une application) de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

2-1-3

Remarque.

On paraît tenir, dans le second degré, à la distinction entre "fonction" et "application" (les manuels la font, les textes de problèmes de baccalauréat portant sur des études de fonctions la respectent) pour la raison suivante :

Lorsqu'on demande l'étude d'une application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est donnée par une "formule" permettant au moyen de calculs plus ou moins compliqués d'obtenir $f(x)$ connaissant x (supposé appartenir à E). Mais E n'est pas précisé et il est sous-entendu que E est l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul (théorique) de $f(x)$ est possible. D'où la première question du problème : quel est l'ensemble E de définition de la fonction f ? Comme E n'est pas donné on ne peut parler d'application, comme E doit être une partie de $\mathbb{R}$ on s'en tire (?) en disant que f est une "fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (définie sur E)."

Certes, comme le précise l'instruction citée plus haut,
 " il n'est pas sans intérêt, dans un sens scolaire, de mettre
 " a priori les élèves en présence d'expressions comportant des
 " symboles (fractions, radicaux, ...) et de leur faire rappeler
 " avec précision les conditions de validité des symboles utilisés".

Néanmoins il semble qu'une rédaction convenable permettrait

- de conserver la synonymie des mots "fonction" et "application"
- de "faire rappeler (aux élèves) avec précision les conditions de validité des symboles utilisés".

Par exemple, au lieu d'écrire :

" On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)}$$

1°) Préciser son ensemble de définition"

on pourrait écrire :

" Quel est l'ensemble E des réels x pour lesquels $\frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)}$

est un nombre réel ?

On considère la fonction (ou l'application)

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x-2)} \end{array} \quad "$$

Dans la suite nous utiliserons seulement des fonctions dont l'ensemble de définition coïncide avec l'ensemble de départ.

En d'autres termes, nous optons pour la synonymie des mots " fonction " et " application ".

2-1-4 REMARQUES

a) L'application $f = (G, E, F)$ est aussi notée

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \longrightarrow F \\ & x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

Si l'application f a déjà été précisée on écrit par la suite

$$f : E \longrightarrow F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

Par exemple $f : \mathbb{R}_* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

est le triplet $(G, \mathbb{R}_*, \mathbb{R})$, où G est l'ensemble $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}_*\}$

- Si aucune confusion n'est à craindre, ni sur E , ni sur F , l'application f est notée plus simplement

$$x \longmapsto f(x)$$

Par exemple on écrira "étudier la dérivabilité des applications

$$x \longmapsto e^x, \quad x \longmapsto \log x, \quad x \longmapsto \sin 3x, \quad x \longmapsto \frac{1}{x} \quad "$$

Il est sous-entendu que F est égal à $\mathbb{R}$ et que E est respectivement égal à $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_*^+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_*$

Si l'on veut appeler f l'application $x \longmapsto \sin 3x$ (où sous-entendu $E = F = \mathbb{R}$) on pourra écrire : "on considère l'application

$$f : x \longmapsto \sin 3x$$

b) Il importe de ne pas confondre l'application elle-même et la valeur qu'elle prend en un point de son ensemble de définition. L'application est f , et non $f(x)$, ni $y = f(x)$

Néanmoins, par abus de langage, on rencontre des expressions du genre "la fonction $f(x)$ ". Ainsi dans le programme de Terminale C figurent les phrases :

- Limite, quand x tend vers 0, de $x \text{ Log } x$,
- Limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Dans le premier cas, $x \text{ Log } x$ représente l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \text{ Log } x \end{array} \quad (1)$$

ou une restriction $f|_E$ de cette application, E étant une partie de $\mathbb{R}_+^+$ contenant un intervalle de la forme $]0, a[$, où $a > 0$

Il n'y a aucun inconvénient à parler de la fonction $x \text{ Log } x$ si l'on sait qu'il s'agit de l'application (1). Les abus de langage sont fréquents en mathématiques : ceci en est un exemple.

c) Les applications $f = (G, E, F)$ et $f_1 = (G_1, E_1, F_1)$ sont égales si, et seulement si, $E = E_1$, $F = F_1$, $G = G_1$ (égalité de deux triplets) ; autrement dit les applications f et f_1 sont égales si, et seulement si, on a : $E = E_1$, $F = F_1$ et, pour tout $x \in E$, $f(x) = f_1(x)$

d) f étant une application d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne pas confondre le graphe (qui est l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$) et la courbe représentative de f dans un plan affine P rapporté à un repère $\mathcal{R}$. Cette courbe représentative étant l'ensemble des points de P de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in E$

e) Dans toute la suite E et F seront des ensembles supposés non vides.

[Si E est vide et si F est non vide, il existe une application et une seule de E dans F . Son graphe est vide.

Si E est non vide et si F est vide, il n'existe aucune application de E dans F .

Si E et F sont vides il existe une application et une seule de E dans F . Son graphe est vide et elle est appelée la fonction vide]

2-1-5 Définition.

f étant une application de E dans F , A une partie de E , on appelle restriction de f à A (et l'on note $f|_A$, ou f_A) l'application de A dans F qui à tout $x \in A$ associe $f(x)$. De façon précise,

$$f|_A = (H, A, F)$$

où le graphe H est l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

Notons que, souvent, l'expression " f est une fonction définie dans E " exprime que E est contenu dans l'ensemble de définition de la fonction et que l'on considère la restriction de f à E .

2-1-6 Définitions.

On appelle :

- a) fonction de variable réelle toute application d'une partie E de dans un ensemble F (quelconque).
- b) fonction numérique toute application d'un ensemble E (quelconque) dans $\mathbb{R}$.
- c) fonction numérique de variable réelle toute application d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

a) Si P est un plan affine euclidien, (C) le cercle de centre O et de rayon ρ de ce plan, la fonction :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & OM^2 - \rho^2 \end{array}$$

est une fonction numérique ($f(M)$ est appelé "puissance du point M par rapport au cercle (C)).

b) Soit F l'ensemble des cercles de centre O dans un plan affine euclidien, soit C_ρ le cercle de rayon ρ appartenant à F , l'application

est une fonction (non numérique) de la variable réelle.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & F \\ \rho & \longrightarrow & C_\rho \end{array}$$

§2

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES APPLICATIONS de E dans $\mathbb{R}$

Dans tout ce qui suit $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. (Cet ensemble est aussi noté $\mathbb{R}^E$)

EGALITE DE DEUX APPLICATIONS

2-2-1 DEFINITION

Deux applications f et g appartenant à $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ sont égales si et seulement si, pour tout $x \in E$, f(x) est égal à g(x).

$$(f = g) \iff (\forall x \in E) (f(x) = g(x))$$

2-2-2 REMARQUE

La notion d'égalité de deux fonctions numériques n'a de sens que si ces deux fonctions ont le même ensemble de définition.

Les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f : x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g : x & \longmapsto & \sqrt{1-x} \sqrt{1+x} \end{array}$$

sont égales : pour tout x élément de $[-1, 1]$ $f(x) = g(x)$. Par contre, les fonctions

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f : x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g : x & \longmapsto & \sqrt{x-1} \sqrt{x+1} \end{array}$$

ne sont pas égales, mais leurs restrictions à $[1, +\infty[$ le sont.

STRUCTURE DE GROUPE SUR $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$

2-2-3 PROPOSITION

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}(E, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \mathbb{R}) \\ (f, g) & \longmapsto & s \end{array}$$

où s est l'application de E dans $\mathbb{R}$

$$s : x \longmapsto f(x) + g(x)$$

est une loi de composition interne dans $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ qui définit sur $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ une structure de groupe abélien.

Cette loi, appelée addition, est notée +, et l'on écrit $s = f+g$.

L'élément neutre de ce groupe est appelé fonction nulle. C'est l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Elle est notée ordinairement 0 (ou 0_E si l'on craint des confusions). Le symétrique de f (où $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ pour cette loi de groupe est noté -f, c'est l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -f(x) \end{array}$$

[Quand un groupe est abélien on note généralement $+$ la loi de groupe, 0 l'élément neutre, $-f$ le symétrique d'un élément f du groupe. C'est ce que l'on fait dans un espace vectoriel par exemple]

Il convient de noter que si $E \neq F$, la fonction nulle de $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et la fonction nulle de $\mathcal{A}(F, \mathbb{R})$ ne sont pas égales puisqu'elles n'ont pas le même ensemble de définition.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL SUR $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$

2-2-4 PROPOSITION

L'application

$$\mathbb{R} \times \mathcal{A}(E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$$

$$(\lambda, f) \longmapsto \lambda f$$

où λf est l'application de E dans $\mathbb{R}$:

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda \cdot f(x)$$

est une loi de composition externe sur $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ dont le corps $\mathbb{R}$ est le domaine d'opérateurs. Cette loi externe, jointe à l'addition définie précédemment, munit $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

STRUCTURE D'ANNEAU SUR $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$

2-2-5 PROPOSITION L'application

$$\mathcal{A}(E, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}(E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$$

$$(f, g) \longmapsto p$$

où p est l'application de E dans $\mathbb{R}$

$$p : x \longmapsto f(x) g(x)$$

est une loi de composition interne sur $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$. Cette loi, jointe à l'addition, définit sur $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ une structure d'anneau commutatif unitaire.

Cette loi, appelée multiplication, est notée $\times$ et l'on écrit

$$p = f \times g$$

ou plus brièvement $p = fg$.

L'élément neutre pour cette opération est appelé fonction unité.

C'est l'application

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1$$

Cet élément neutre est noté ordinairement 1 , ou 1_E si l'on craint des confusions.

[Comme précédemment les éléments 1_E et 1_F de $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}(F, \mathbb{R})$ ne sauraient être confondus si $E \neq F$]

2-2-6 REMARQUE L'anneau $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ n'est pas, en général, un anneau intègre. Par exemple si $E = \mathbb{R}$ les applications

$$f : x \longmapsto x + |x| \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x - |x|$$

sont non nulles, bien que leur produit fg soit la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

On a là un exemple simple montrant que dans un anneau unitaire quelconque le produit de deux éléments non nuls peut être nul.

[Si E est un ensemble réduit à un seul élément, $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ est un anneau intègre : c'est en fait un corps isomorphe à $\mathbb{R}$. Si E a au moins 2 éléments $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ n'est pas un anneau intègre]

2-2-7 REMARQUE Si f est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E$, $f(x)$ ne soit pas nul, on peut définir une application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\frac{1}{f}$, par

$$\frac{1}{f} : x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

Alors $f \cdot \frac{1}{f} = 1_E$. $\frac{1}{f}$ est appelée "l'inverse de la fonction f ". Il est incorrect de dire que $\frac{1}{f}$ est la fonction inverse de f .

L'ensemble $\mathcal{A}'(E, \mathbb{R})$ des applications de E dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent en aucun point de E est un groupe pour la multiplication (c'est un sous-groupe du demi-groupe multiplicatif de $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$). Mais $\mathcal{A}'(E, \mathbb{R})$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ (et a fortiori n'est pas un corps).

2-2-8 REMARQUE Si $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et si $g \in \mathcal{A}'(E, \mathbb{R})$ alors $\frac{1}{g} \in \mathcal{A}'(E, \mathbb{R})$, de sorte que $f \cdot \frac{1}{g}$ appartient à $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$. Cette fonction sera notée $\frac{f}{g}$. C'est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

2-2-9 REMARQUE $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ contient un sous-anneau K isomorphe à $\mathbb{R}$ (K est donc un corps). En effet :

si $a \in \mathbb{R}$, notons a_E l'application constante de E dans $\mathbb{R}$

$$a_E : x \longmapsto a$$

Il est immédiat que $K = \{a_E \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow K \\ a &\longrightarrow a_E \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ sur K telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad , \quad \varphi(0) = 0_E \quad , \quad \varphi(-a) = -\varphi(a) \\ \varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b) \quad , \quad \varphi(1) = 1_E$$

d'où, φ est un isomorphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ sur K et K est un corps.

2-2-10 REMARQUE Noter que la composition des applications n'est pas, en général, une loi interne dans $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$. Si f et g sont des applications de E dans $\mathbb{R}$, $g \circ f$ n'a, en général, aucun sens.

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES BIJECTIONS D'UN ENSEMBLE E SUR LUI-MÊME

2-2-11 REMARQUE L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des bijections d'un ensemble E sur lui-même est un groupe non commutatif si E contient plus d'un élément pour la loi $\circ$ (composition des applications).

L'élément neutre de ce groupe, noté Id_E , est l'application de E dans E

$$\text{Id}_E : x \longrightarrow x .$$

Le symétrique de $f \in \mathcal{B}(E)$ pour cette loi est la bijection réciproque de f . Il est noté ordinairement $\bar{f}^1$. Et l'on a

$$f \circ \bar{f}^1 = \bar{f}^1 \cdot f = \text{Id}_E$$

[Ne pas confondre Id_E et 1_E . Si $E \subset \mathbb{R}$ et si $E \neq \{1\}$, 1_E n'appartient pas à $\mathcal{B}(E)$. Ne pas confondre $\bar{f}^1$ et $\frac{1}{f}$. si $f \in \mathcal{B}(E)$ avec $E \subset \mathbb{R}$ il est possible que $\frac{1}{f}$ ne soit pas défini, ou s'il est défini ne soit pas un élément de $\mathcal{B}(E)$].

Plus généralement dans l'ensemble $\mathcal{A}(E, E)$ des applications (non nécessairement bijectives) de E dans lui-même, la loi $\circ$ est une loi interne associative, non commutative (si E contient plus d'un élément), pour laquelle Id_E est élément neutre, mais ce n'est pas une loi de groupe.

[Notons : a/ si $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$, la composition des applications est telle que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Mais on ne peut parler d'associativité car la composition des applications n'est pas une loi interne (dans quel ensemble serait-elle une loi interne ?).

b/ si f est une bijection de E sur F il existe une bijection et une seule, g , de F sur E telle que

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E$$

Cette bijection g est aussi notée $\bar{f}^1$.
C'est l'application réciproque de f].

§ 3 FONCTIONS MONOTONES

2-3-1 DEFINITION

Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite fonction constante si, et seulement si, pour tout $x \in E$ et pour tout $x' \in E$, $f(x)$ est égal à $f(x')$.

Autrement dit

$$(f \text{ fonction constante}) \iff (\forall (x, x') \in E^2) (f(x) = f(x')).$$

D'où

$$(f \text{ fonction non constante}) \iff (\exists (x, x') \in E^2) (f(x) \neq f(x')).$$

Par exemple la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \sqrt{-1} + \cos 2n\pi \end{array}$$

est une fonction constante.

2-3-2 DEFINITION

E et F étant deux ensembles ordonnés (partiellement ou totalement), une application f de E dans F est dite croissante (resp. décroissante) si, et seulement si, pour tout $x \in E$ et pour tout $x' \in E$, $x \leq x'$ implique $f(x) \leq f(x')$ (resp. $f(x) \geq f(x')$).

Par exemple si $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ est un espace probabilisé l'application

$$\begin{array}{ccc} p : \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & p(A) \end{array}$$

est une application croissante de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$.

2-3-3 REMARQUES

- a/ Au lieu de "fonction croissante" on rencontre quelquefois l'expression "application isotone".
- b/ Dans le second degré on se limite au cas où E est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et où F est égal à $\mathbb{R}$, de sorte que :

f étant une application d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle contenu dans E , on dit que f est une fonction croissante sur I si et seulement si la restriction de f à I est une application croissante au sens de 2-3-2, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $x \in I$ et tout $x' \in I$, $x \leq x'$ implique $f(x) \leq f(x')$

Dans toute la suite quand il sera question d'une fonction f constante, ou croissante, ou décroissante sur un intervalle I on supposera toujours (au moins implicitement) que I est non vide et non réduit à un point et que f est une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant I .

c/ Une fonction f est monotone sur l'intervalle I , si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I .

d/ Exemples :

$$\begin{array}{ccc} * & f : \mathbb{R}_* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto x + \frac{|x|}{x} \end{array}$$

est une application croissante de $\mathbb{R}_*$ dans $\mathbb{R}$. (au sens de 2-3-2). Mais ce qui est intéressant en analyse c'est qu'elle soit croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{ccc} * & f : \mathbb{R}_* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$$

est une fonction décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Mais ce n'est pas une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_*$ (au sens de 2-3-2).

$$\begin{array}{ccc} * & f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq -1 \\ 0, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

2-3-4 REMARQUE

f étant une application numérique d'une partie E de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle I il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- a/ f est croissante sur I
- b/ $(\forall (x, x') \in I^2) (x \leq x' \implies f(x) \leq f(x'))$,
- c/ $(\forall (x, x') \in I^2) (x < x' \implies f(x) < f(x'))$,
- d/ $(\forall (x, x') \in I^2) (x \neq x' \implies \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \geq 0)$.

D'où l'équivalence de leurs négations :

- $\alpha/$ f n'est pas croissante sur I ,
- $\beta/$ $(\exists (x, x') \in I^2) (x \leq x' \text{ et } f(x) > f(x'))$,
- $\gamma/$ $(\exists (x, x') \in I^2) (x < x' \text{ et } f(x) > f(x'))$,
- $\delta/$ $(\exists (x, x') \in I^2) (x \neq x' \text{ et } \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} < 0)$.

2-3-5 REMARQUE

f étant une fonction numérique définie sur l'intervalle I , il y a équivalence entre :

- a/ f est constante sur I
- b/ f est à la fois croissante sur I et décroissante sur I

2-3-6 REMARQUE

a/ Une fonction f croissante sur l'intervalle I est croissante sur tout intervalle contenu dans I

b/ a, b, c étant trois nombres réels tels que $a < b < c$, si f est croissante sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, f est croissante sur $[a, c]$.

Par contre si f est croissante sur $[a, b]$ et sur $]b, c]$, f n'est pas nécessairement croissante sur $[a, c]$. Par exemple

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x + \frac{|x|}{x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est croissante sur $]^{-\infty}, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, mais f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

c/ Une fonction f croissante sur l'intervalle I peut être constante sur un intervalle contenu dans I (cf 2-3-3 3^e exemple). Si l'on veut exclure cette possibilité on utilise la notion de fonction strictement croissante : de façon précise il y a équivalence entre :

- f est strictement croissante sur I
- $(\forall (x, x') \in I^2) (x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$
- $(\forall (x, x') \in I^2) (x \neq x' \Rightarrow \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} > 0)$

C'est pourquoi une fonction croissante sur I , au sens de 2-3-2, est dite "fonction croissante sur I , au sens large".

d/ Une fonction croissante (au sens large) sur l'intervalle I est ce que certains (voir par exemple Valiron - théorie des fonctions) appellent "fonction non décroissante sur I ". Nous rejetterons cette dernière appellation (au sens mentionné ici) : pour nous une fonction f non décroissante sur l'intervalle I est une fonction qui n'est pas décroissante sur I , autrement dit une fonction (numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant I) possédant la propriété suivante : il existe x et x' dans I tels que l'on ait à la fois $x < x'$ et $f(x) < f(x')$.

Pour nous les notions de "fonction croissante" et de "fonction non décroissante" ne sont pas synonymes.

2-3-7 REMARQUE

f et g étant deux applications numériques définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle I , α étant une constante non nulle, si f et g sont croissantes sur I , alors

- a/ $f+g$ est croissante sur I ,
- b/ αf est croissante (resp décroissante) sur I si α est positif (resp. négatif)

En particulier $(-f)$ est décroissante sur I .

On ne peut rien dire a priori ni sur $f-g$, ni sur fg .

Par exemple :

$$\begin{array}{ll} - \text{ si } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x^2 \qquad \qquad x \longmapsto 2x \end{array}$$

f et g sont croissantes sur $I = [0, +\infty[$, mais $f-g$ n'est pas monotone sur I .

$$\begin{array}{ll} - \text{ si } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto x \qquad \qquad x \longmapsto x \end{array}$$

f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, mais fg n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Toutefois si f et g sont des fonctions croissantes sur I , si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$, alors fg est croissante sur I .

[Les applications d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur intervalle I contenu dans E , ne forment donc pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De même en remplaçant "croissantes" par "décroissantes" ou par "monotones"].

2-3-8 REMARQUE

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$, J contenant $f(I)$, si f est monotone sur I et g monotone sur J , alors $g \circ f$ est monotone sur I . De plus $g \circ f$ est croissante si f et g sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes, sinon $g \circ f$ est décroissante.

§ 4 EXTREMUMS

2-4-1 DEFINITIONS

On dit qu'une application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a/ est majorée si et seulement si $f(E)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, autrement dit si et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait : $f(x) \leq m$

b/ est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée, autrement dit si et seulement si $|f|$ est une fonction majorée.

c/ admet un maximum absolu égal à M si et seulement les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = M$,
- pour tout $x \in E$, on a $f(x) \leq M$

S'il en est ainsi on dit que le maximum absolu est atteint en x_0 .

REMARQUE [Si E est un intervalle borné, fermé, si f est continue, f admet alors un maximum absolu et un minimum absolu]

2-4-2 DEFINITION

f étant une fonction numérique définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, x_0 appartenant à un intervalle ouvert contenu dans E , on dit que f admet en x_0 un maximum relatif (égal à $f(x_0)$) si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 , tel que pour tout $x \in E \cap I$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x de $E \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$

2-4-3 REMARQUES

a/ L'expression "f présente en x_0 un maximum relatif" n'a de sens que si l'on suppose f définie (au moins) sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

b/ Un maximum absolu n'est pas nécessairement un maximum relatif. De même un maximum relatif n'est pas nécessairement un maximum absolu.

c/ Le terme "maximum" sans autre précision signifie ordinairement "maximum relatif".

2-4-4 EXEMPLES

a/ L'ensemble E des réels x pour lesquels $\sqrt{x^2 - |x|}$ a un sens étant $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$, on peut considérer l'application

$$\begin{array}{ccc} f : & E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \sqrt{x^2 - |x|} \end{array}$$

Cette application possède un minimum absolu égal à 0, atteint pour $x = -1$, ou pour $x = 0$, ou pour $x = 1$. Mais f ne possède pas de minimum relatif.

b/ L'application

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto |x^2 - 1| \end{array}$$

n'a pas de maximum absolu, mais elle a en 0 un maximum relatif (égal à 1).

Cette fonction a un minimum absolu égal à 0 atteint pour $x = -1$ ou pour $x = 1$. Elle a au point $x = -1$ (ou au point $x = 1$) un minimum relatif (égal à 0).

c/ L'application

$$\begin{array}{ccc} f : & [0, 2[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases} \end{array}$$

n'a ni maximum absolu, ni maximum relatif. Elle a un minimum absolu égal à 0 atteint pour toute valeur de x appartenant à $[0, 1]$. Elle a un minimum relatif (égal à 0) en tout point x de $]0, 1]$.

§ 5

PARITE D'UNE FONCTION

"Dans tout ce paragraphe, E désignant une partie non vide de $\mathbb{R}$ on note $(-E)$ l'ensemble des éléments $(-x)$ où x est élément de E "

2-5-1

DEFINITION

E étant une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-E = E$, une application f de E dans $\mathbb{R}$ est dite fonction paire si, et seulement si, pour tout élément x de E , $f(-x)$ est égal à $f(x)$.

Pour quantifier cet énoncé on écrira

$$(f \text{ paire}) \iff [(\forall x \in E) (f(-x) = f(x))]$$

d'où la négation

$$(f \text{ non paire}) \iff [(\exists x \in E) (f(-x) \neq f(x))]$$

2-5-2

REMARQUE

Certains collègues proposent de définir une fonction paire de la manière suivante :

Une application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction paire si, et seulement si, pour tout élément x de E $(-x)$ appartient à E et $f(-x)$ est égal à $f(x)$.

Si on désigne par G le graphe de f , on peut quantifier cet énoncé comme suit :

$$(f \text{ paire}) \iff (\forall x \in E) (\exists y \in \mathbb{R}) [(x, y) \in G \wedge (-x, y) \in G]$$

D'où la négation :

$$(f \text{ non paire}) \iff (\exists x \in E) (\forall y \in \mathbb{R}) [(x, y) \notin G \vee (-x, y) \notin G]$$

La différence avec la définition (2.3.1) tient dans le fait suivant : l'ensemble de définition E n'est plus supposé, à priori, symétrique par rapport à zéro. (c'est-à-dire tel que $-E = E$).

En fait, les mathématiciens choisissent 2-3-1. La question de savoir si une application de E ($E \subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ est une fonction paire ne se pose que si $-E = E$,

2-5-3 FONCTION IMPAIRE

E étant une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-E = E$, une application f de E dans $\mathbb{R}$ est dite une fonction impaire, si, et seulement si, pour tout élément x de E $f(-x)$ est égal à $-f(x)$

Pour quantifier cet énoncé on écrira :

$$(f \text{ impaire}) \iff [(\forall x \in E) (f(-x) = -f(x))]$$

Les remarques faites en 2-5-2 concernant les fonctions paires peuvent être reprise pour les fonctions impaires.

2-5-4 REMARQUES

a) E étant une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-E = E$, l'ensemble des fonctions paires (respectivement impaires) définies sur E

est un sous espace vectoriel, noté $\mathcal{P}$, (respectivement $\mathcal{I}$) du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ des applications de E dans $\mathbb{R}$.

b) Toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être considérée, d'une façon unique, comme la somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_I . f_p et f_I sont respectivement les applications :

$$x \longmapsto \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

f_p est appelée la partie paire et f_I la partie impaire de f . Ainsi les applications $x \longmapsto \cosh x$ et $x \longmapsto \sinh x$ sont les parties paire et impaire de l'application $x \longmapsto e^x$

Cette remarque peut s'étendre aux applications d'une partie E de $\mathbb{R}$ (telle que $-E = E$) dans $\mathbb{R}$. En particulier si f est paire, sa partie impaire est la fonction nulle définie sur E.

c) Il résulte des deux remarques a/ et b/ précédentes que l'espace vectoriel des applications de E dans $\mathbb{R}$ est somme directe des sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

2-5-5

INTERET DE L'ETUDE DE LA PARITE

a) Du point de vue "sens de variation"

Soit f une fonction paire définie sur E (on suppose toujours que $-E = E$). Soit $[a, b] \subset E$ tel que $0 \leq a < b$. Alors $[-b, -a] \subset E$

Etant donnés deux réels distincts x_1, x_2 appartenant à $[-b, -a]$

$$\text{la relation } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = - \frac{f(-x_1) - f(-x_2)}{(-x_1) - (-x_2)}$$

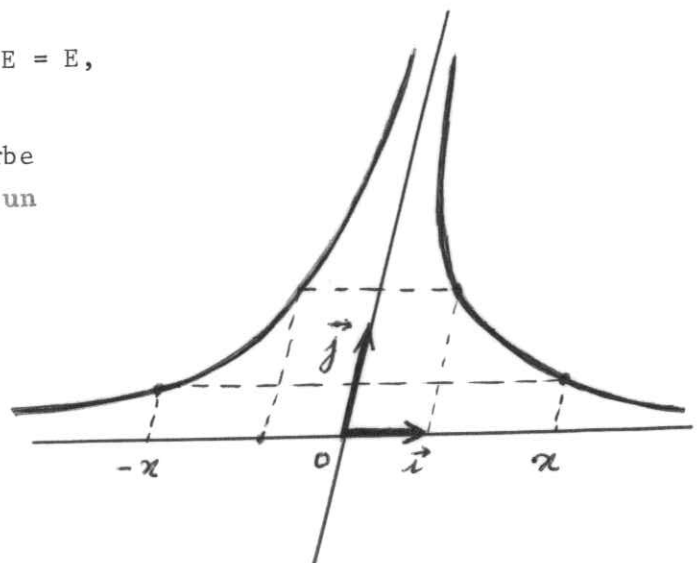
montre que si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est strictement décroissante sur $[-b, -a]$, si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors f est strictement croissante sur $[-b, -a]$, et si f est constante sur $[a, b]$, alors f est constante sur $[-b, -a]$.

On démontre, de même, que si f est une fonction impaire et si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur $[a, b]$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur $[-b, -a]$.

Ainsi, dans le cas d'une fonction f paire ou impaire, il suffit d'étudier le sens de variation de celle-ci sur $E \cap \mathbb{R}^+$.

b) Du point de vue "graphique".

E étant une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-E = E$, une application f de E dans $\mathbb{R}$ est paire si, et seulement si, sa courbe représentative, dans un plan muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans la direction de $\vec{i}$.



De même, E étant une partie de $\mathbb{R}$ telle que $-E = E$, une application f de E dans $\mathbb{R}$ est impaire si, et seulement si, sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère $(0, (\vec{i}, \vec{j}))$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2-5-6 ETUDE DES SYMETRIES D'UNE COURBE

* symétrie-droite

Soit (Δ) la droite d'équation $x = a$ (a , réel fixé) relativement au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan. Soit Ω le point de coordonnées (a, o) relativement au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe (C) est symétrique par rapport à (Δ) dans la direction de $\vec{i}$ si, et seulement si, la fonction numérique g , dont (C) est la courbe représentative relative au repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est paire. g est la fonction numérique qui, à x , associe s'il existe, $f(x+a)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à x , associe, s'il existe, $\sqrt{x^2 + 6x + 5}$. Son ensemble de définition est : $E_f =]-\infty, -5] \cup [-1, +\infty[$. Avec les notations ci-dessus, démontrons que sa courbe représentative (C) est symétrique, dans la direction de $\vec{i}$, par rapport à la droite d'équation $x = -3$

g est la fonction qui, à x , associe $f(x+3)$ s'il existe. Son ensemble de définition est :

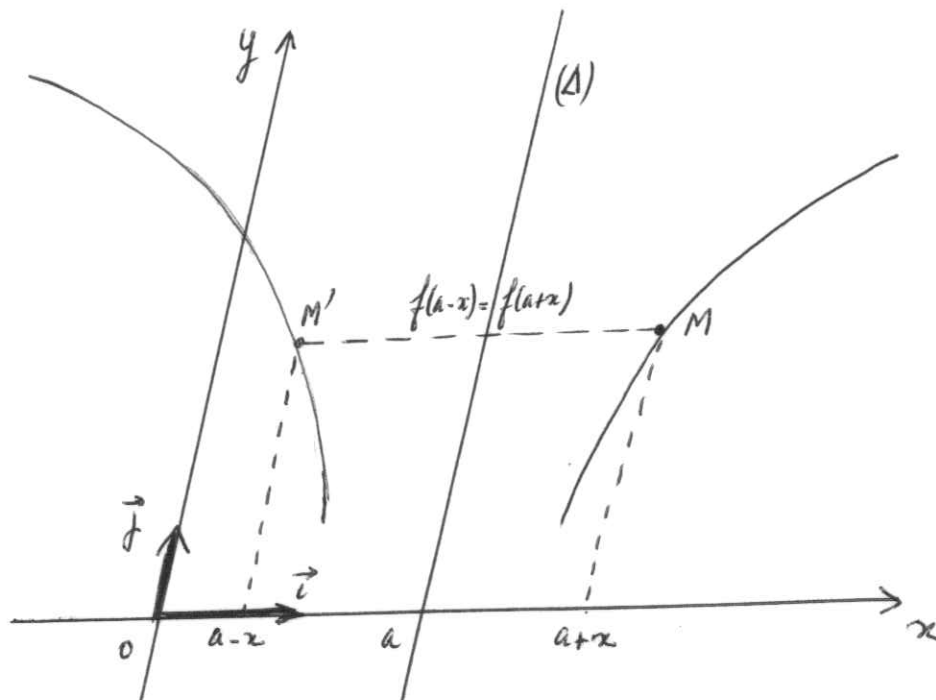
$$E_g =]-\infty, -2] \cup [+2, +\infty[. \text{ On peut aussi écrire : }$$

$$x \in E_g, \forall x \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

On vérifie aisément que g est paire et on en déduit que (C) est symétrique dans la direction de $\vec{i}$, par rapport à la droite d'équation $x = -3$

REMARQUE

On peut aussi démontrer que (C) admet la droite (Δ) d'équation $x = a$ comme "axe" de symétrie en vérifiant que pour tout x tel que $(a+x) \in E$ on ait : $(a-x) \in E$ et $f(a+x) = f(a-x)$



* Symétrie centrale

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction numérique f dans un plan (P) rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(C) admet un centre de symétrie Ω si, et seulement si, la fonction numérique g , dont la courbe représentative dans (P), relative au repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est (C), est impaire.

Soit (a, b) le couple de coordonnées du point Ω relativement au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Un point M de (C), dont les coordonnées relatives au repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ sont x et $f(x)$, a , relativement au repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ pour coordonnées x' et $g(x')$ avec :

$$x' = x - a \quad \text{et} \quad g(x') = f(x) - b$$

Il en résulte que g est la fonction numérique qui, à x , associe $f(x+a) - b$, s'il existe.

EXEMPLE

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $x^3 - 3x^2 + 4$.

Avec les notations ci-dessus, démontrons que (C) admet $\Omega(1, 2)$ pour centre de symétrie, g est la fonction qui, à x , associe : $f(x+1) - 2$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et on peut écrire :

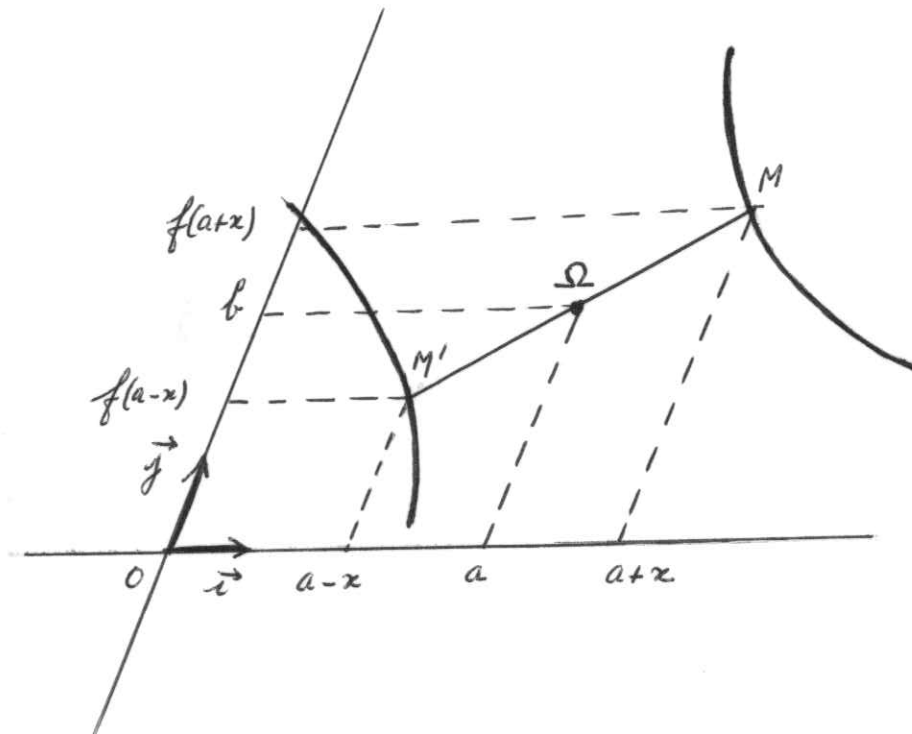
$$x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \quad g(x) = x^3 - 3x$$

On vérifie aisément que g est impaire et on en déduit que (C) admet Ω pour centre de symétrie.

REMARQUE

On peut aussi démontrer que (C) admet le point $\Omega(a, b)$ pour centre de symétrie en vérifiant que pour tout x tel que $(a+x) \in E$ on ait :

$$(a-x) \in E \quad \text{et} \quad f(a+x) + f(a-x) = 2b$$



§6 FONCTIONS PERIODIQUES

Dans tout ce chapitre, E désignant un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, p un réel, on notera $(E+p)$ l'ensemble des éléments de la forme $(x+p)$ où $x \in E$:

$$E+p = \{x+p \mid x \in E\}$$

2-6-1 DEFINITION

p étant un réel non nul, E une partie de $\mathbb{R}$ telle que $E+p = E$, une application f de E dans $\mathbb{R}$ est dite périodique de période p (ou p -périodique) si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x+p)$ est égal à $f(x)$.

En quantifiant

$$(f \text{ } p\text{-périodique}) \iff (\forall x \in E) (f(x+p) = f(x))$$

d'où la négation

$$(f \text{ non } p\text{-périodique}) \iff (\exists x \in E) (f(x+p) \neq f(x)).$$

2-6-2 REMARQUES

a/ Si f est p -périodique tous les réels de la forme kp , où $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, sont des périodes de f . Si f est une fonction périodique, on pourra parler d'"une période" de f , mais non de "la période" de f .

b/ Si f est une fonction périodique, si P est l'ensemble des périodes de f , $P \cup \{0\}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

c/ Si f est p -périodique, l'ensemble des périodes positives peut admettre un plus petit élément ou n'en pas admettre.

Par exemple l'application $x \longmapsto \sin x$ est périodique, elle admet 2π comme plus petite période positive (mais 4π , -6π , ... sont aussi des périodes).

Par contre la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

est périodique : tout rationnel non nul est une période de f . Il n'y a pas de plus petite période positive.

d/ f étant une fonction périodique admettant une plus petite période positive, p , certains proposent d'appeler p la période fondamentale. La période fondamentale est celle qui intéresse les physiciens. Les mathématiciens s'intéressent eux à la notion de période définie en 3.1 (voir par exemple : séries de Fourier).

2-6-3 REMARQUE

Comme pour les fonctions paires certains proposent de définir une fonction périodique de la manière suivante :

Une application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est p -périodique si, et seulement si, pour tout $x \in E$ on a :

$$(x+p) \in E, (x-p) \in E \quad \text{et} \quad f(x+p) = f(x-p) = f(x).$$

En quantifiant (G désignant le graphe de f) :

$$(f \text{ } p\text{-périodique}) \iff (\forall x \in E) (\exists y \in \mathbb{R}) [(x+p, y) \in G \text{ et } (x-p, y) \in G \text{ et } (x, y) \in G]$$

D'où la négation :

$$(f \text{ non } p\text{-périodique}) \iff \exists x \in E (\forall y \in \mathbb{R}) [(x+p, y) \notin G \text{ ou } (x-p, y) \notin G \text{ ou } (x, y) \notin G]$$

Les mathématiciens adoptent la définition 2-6-1.

EXEMPLES

$$\begin{array}{lcl} f : & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \longmapsto x - E(x) & \text{n'est pas périodique} \end{array}$$

mais

$$\begin{array}{lcl} g : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x \longmapsto x - E(x) & \text{est périodique et de période fondamentale 1.} \end{array}$$

2-6-4 INTERET DE L'ETUDE DE LA PERIODICITE

a/ Du point de vue "sens de variation"

Soit f une fonction périodique définie sur E , de période p strictement positive. (On peut se limiter à ce cas car si p est une période, $-p$ en est également une).

Soit $[a, b]$ un intervalle inclus dans E tel que :

$0 < b - a < p$. Alors f est définie sur tout intervalle du type $[a + kp, b + kp]$ où k est un entier relatif quelconque, puisque $E+p = E$.

Quels que soient les réels x_1 et x_2 appartenant à $[a + kp, b + kp]$ on a :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1 - kp) - f(x_2 - kp)}{(x_1 - kp) - (x_2 - kp)}$$

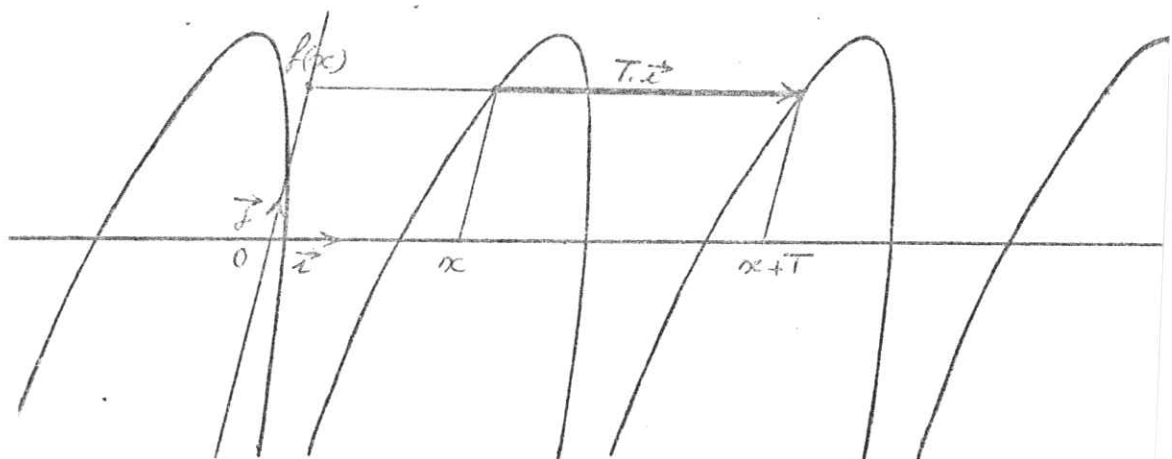
Les nombres $(x_1 - kp)$ et $(x_2 - kp)$ appartiennent à l'intervalle $[a, b]$

Il en résulte que si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur $[a, b]$, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante, resp. constante) sur tout intervalle du type $[a+kp, b+kp]$

Ainsi, dans le cas d'une fonction périodique de période strictement positive p (et, en particulier, si elle existe, de période fondamentale p) il suffit d'étudier son sens de variation sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ du type $[a, a+p[\cap E$ où a est un réel quelconque.

b/ Du point de vue graphique

Une fonction de E vers $\mathbb{R}$ admet une période p si, et seulement si, sa courbe représentative, relative à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est globalement invariante par la translation de vecteur $p\vec{i}$ où $p \neq 0$



Si T est un réel non nul, si f_1, f_2 , sont deux fonctions périodiques définies sur $\mathbb{R}$ de périodes $n_1 T, n_2 T$, où n_1, n_2 sont deux entiers relatifs non nuls, et si λ, μ , sont deux nombres réels, alors :

1/ $(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$

n/ Pour tout multiple commun k de n_1 et de n_2 , soit $k = k_1 n_1 = k_2 n_2$ on a :

$$(\forall x, x \in \mathbb{R}) (\lambda f_1 + \mu f_2)(x + kT) = \lambda f_1(x + k_1(n_1 T)) + \mu f_2(x + k_2(n_2 T))$$

$$\text{soit : } (\forall x, x \in \mathbb{R}) (\lambda f_1 + \mu f_2)(x + kT) = (\lambda f_1 + \mu f_2)(x)$$

Alors : $(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$, de période kT où k peut être choisi non nul (p.p.c.m. de n_1 et de n_2)

Ainsi l'ensemble des fonctions périodiques, définies sur $\mathbb{R}$, et admettant pour périodes des multiples d'un réel non nul T , constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}^k, +, \cdot)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si $n_1 = n_2$, on peut choisir $k = n_1 = n_2$. On démontre alors que l'ensemble des fonctions périodiques, définies sur $\mathbb{R}$, et admettant une même période non nulle constitue aussi un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}^1, +, \cdot)$ inclus dans le précédent. En particulier, la somme de deux fonctions périodiques, définies sur $\mathbb{R}$, et admettant une même période principale T est une fonction périodique admettant T pour période mais il se peut que T ne soit pas la période principale de cette fonction-somme.

EXEMPLE :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin 3x + \sin x$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin 3x - \sin x$$

f et g sont périodiques et admettent pour période principale 2π

$(f+g)$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $2\sin 3x$: elle est périodique et admet pour période fondamentale $\frac{2\pi}{3}$. Certes, 2π est aussi une période de cette fonction-somme.

CHAPITRE 3

CONTINUITE - LIMITES

En lisant les différents "Cours de mathématiques" on trouve pour les notions de limite d'une fonction des définitions différentes (non équivalentes entre elles). Nous allons les énoncer, sans faire appel aux notions de filtres, de voisinages, ou d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}$, notions explicitement hors programme (Cf circulaire 71-244 du 26 JUILLET 1971) et sans utiliser la notion d'"intervalle centré pointé" (un intervalle pointé n'est d'ailleurs pas un intervalle !) notion non utilisée en dehors du second degré !

Nous examinerons les liens unissant ces diverses définitions à la notion de continuité.

§1 LIMITE D'UNE SUITE NUMERIQUE

3-1-1 Définition

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant une suite de points de $\mathbb{R}$ et a un point de $\mathbb{R}$, on dit que la suite (x_n) converge vers a , ou que la suite (x_n) a pour limite a si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les x_n à partir d'un certain rang, ou, ce qui revient au même, si tout intervalle ouvert contenant a contient tous les x_n sauf un nombre fini d'entre eux.

3-1-2 Remarque

a) Unicité de la limite

Si la suite (x_n) converge vers a et vers a' , où $a < a'$ les intervalles ouverts $I =]a - 1, \frac{a + a'}{2}[$ et $I' =]\frac{a + a'}{2}, a' + 1[$ contiennent tous les x_n à partir d'un certain rang, d'où contradiction car $I \cap I' = \emptyset$. Si la suite a une limite cette limite est unique. Si (x_n) est une suite convergente dont a est la limite, on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

b) La remarque suivante :

"tout intervalle ouvert contenant a contient un intervalle de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ "
montre que :

La suite (x_n) converge vers a si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ (dépendant éventuellement de ε) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_0$ implique $|x_n - a| < \varepsilon$
Autrement dit il y a équivalence entre

b1) La suite (x_n) converge vers a

b2) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) (\forall n \in \mathbb{N}^*) [(n > n_0) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)]$

§ 2 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$, où E est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

3-2-1 Définition

Soit $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et soit $a \in E$.

On dit que f est continue au point a si, et seulement si, pour tout intervalle ouvert W contenant $f(a)$ il existe un intervalle ouvert V (dépendant éventuellement de W) contenant a et tel que $f(V \cap E) \subset W$.

Intuitivement : f est dite continue au point a si, et seulement si, $f(x)$ est aussi "voisin" qu'on veut de $f(a)$ pourvu qu'on ait pris x dans E "suffisamment voisin" de a .

En utilisant la remarque de 3-1-2 on démontre que :

f appartenant à $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, a étant un point de E , f est continue au point a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ (α dépendant éventuellement de ε) tel que, pour tout $x \in E$, $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Soit :

f est continue au point $a \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in E) [(|x - a| < \alpha) \implies (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)]$

D'où la négation :

(f n'est pas continue au point a) si, et seulement si :

($\forall \varepsilon > 0) (\forall \alpha > 0) (\exists x \in E) (|x - a| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$

3-2-2 Remarques

a) La définition ci-dessus ou une définition équivalente est celle utilisée dans le supérieur c'est également celle proposée par les commentaires officiels du programme de terminale C (Cf circulaire 71-244 du 26 JUILLET 1971).

D'après la définition 3-2-1 chacune des applications

$$\begin{aligned} f : \begin{array}{ccc} \{3\} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{\quad} & \sqrt{-(x-3)^2} \end{array} \\ \\ g : \begin{array}{ccc}]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[& & \\ x & \xrightarrow{\quad} & \sqrt{x^2 - |x|} \end{array} \\ \\ h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{\quad} & \sqrt{-1 + \cos(\pi x)} \end{array} \end{aligned}$$

est continue en tout point où elle est définie.

b) Dans la plupart des manuels de terminale C on ne définit la continuité en un point a que pour des fonctions dont l'ensemble de définition contient un intervalle ouvert auquel appartient a . Dans ces conditions en reprenant les exemples précédents, le problème de la continuité de f au point 3, celui de la continuité de g en l'un des points $-1, 0, 1$, celui de la continuité de h au point n avec $n \in \mathbb{Z}$ ne se posent pas. Mais il est incorrect de dire que f n'est pas continue au point 3, ou que g n'est pas continue en l'un des points $-1, 0, 1$; ou que h n'est pas continue au point n de $\mathbb{Z}$.

c) Il n'y a pas d'équivalence entre :

Enoncé 1 si f est une application de E dans $\mathbb{R}$, telle que E contient un intervalle ouvert auquel appartient a , f est dite continue au point a si, et seulement si, pour tout intervalle ouvert W contenant $f(a)$ il existe un intervalle ouvert V contenant a tel que $f(V) \subset W$ et :

Enoncé 2 si f est une application de E dans $\mathbb{R}$, si $a \in E$, f est dite continue au point a si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- E contient un intervalle ouvert auquel appartient a ;
- pour tout intervalle ouvert W contenant $f(a)$ il existe un intervalle ouvert V contenant a tel que $f(V) \subset W$.

d) Dans la suite nous prendrons la définition 3-2-1 sans la restriction figurant habituellement dans les manuels du second degré. Bien entendu en première ou en terminale on peut se contenter de l'énoncé 1 ci-dessus, mais en précisant bien que la continuité d'une fonction f en un point a de son ensemble de définition E peut se définir même s'il n'existe pas d'intervalle ouvert I tel que $I \subset E$ et $a \in I$, mais que à ce niveau cette possibilité ne sera pas envisagée. Par contre en première ou en terminale l'énoncé 2 doit être rejeté : en l'adoptant on aurait une définition en désaccord avec celle donnée en 3-2-1.

3-2-3 Remarque

Pour comprendre pourquoi la fonction f (resp g, h) donnée en exemple dans 3-2-2 doit être considérée comme continue en tout point où elle est définie quelques rappels de topologie sont utiles.

a) On définit une topologie sur un ensemble E en se donnant un ensemble $\mathcal{O}$ de partie de E possédant les propriétés suivantes :

- toute réunion d'une famille non vide d'ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$
- p et E appartiennent à $\mathcal{O}$
- l'intersection de deux ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$

E est alors appelé un espace topologique et ses éléments sont appelés points. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les ouverts de E (ou les ensembles ouverts de E) pour la topologie considérée. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé. Un voisinage d'un point a de E (resp. d'une partie A de E) est une partie de E qui contient un ouvert auquel appartient a (resp. contenant A). Sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle est celle définie en prenant comme ouverts la partie vide et l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui sont réunions d'une famille quelconque non vide d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

b) Si E_1 est une partie non vide d'un espace topologique E , on peut définir une topologie sur E_1 , appelée topologie induite en prenant comme ouverts de E_1 les traces sur E_1 des ouverts de E (une partie U_1 de E_1 si et seulement si l'on a $U_1 = U \cap E_1$ où U est un ouvert de E). est un ouvert de E_1 si, et seulement si, l'on a $U_1 = U \cap E_1$ ou U est un ouvert de E).

Par exemple, si E est l'espace topologique $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle), si $E_1 = \mathbb{Z}$ toute partie de E_1 est un ouvert (et un fermé) de E_1 pour la topologie induite sur E_1 par celle de E .

Si $E = \mathbb{R}$ et si $E_1 =] - \infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, + \infty[$, $\{0\}$ est à la fois un ouvert et un fermé de E_1 pour la topologie induite, $] -2, -1]$ est un voisinage de -1 pour la topologie induite sur E_1 (mais $] -2, 0[$ n'est pas voisinage de -1 pour la topologie induite car $] -2, 0[$ n'est pas contenu dans E_1).

Bien entendu $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ et $] -2, -1]$ n'est pas un voisinage de -1 dans $\mathbb{R}$.

c) Une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est dite continue au point a de E si, et seulement si, pour tout voisinage W de $f(a)$ (dans F) il existe un voisinage V de a (dans E) tel que $f(V) \subset W$.

Si $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, pour définir la continuité en un point a de E il faut considérer E comme espace topologique. Pour cela on prend la topologie induite sur E par celle de $\mathbb{R}$ et la définition qu'on vient de donner de la continuité au point a est équivalente à celle donnée en 3-2-1.

3-2-4 Proposition Si $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et si $a \in E$ il y a équivalence entre:

α) f est continue au point a ,

β) Pour toute suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Ceci serait faux si l'on définissait la continuité au point $a \in E$ au moyen de l'énoncé 2 de 3-2-2-C. Avec cet énoncé la fonction f de 3-2-2-a n'est pas continue car $E = \{a\}$. Mais si (x_n) est une suite de points de E , on a nécessairement $x_n = a$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a) = f(3)$$

La propriété β de 3-2-4 est satisfaite mais non la propriété α .

Une fonction f appartenant à $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ est dite continue si elle est continue en tout point de E .

L'ensemble $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ des applications continues de E dans $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. L'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$ continues au point a (où $a \in E$) est un sous-anneau de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

3-2-6 Remarque

Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in E$. Alors $\varepsilon > 0$ étant donné il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in E \cap]a - \alpha, a + \alpha[\text{ entraîne } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Il convient de noter que

- α n'est pas unique (si α convient, tout réel appartenant à $]0, \alpha[$ convient aussi)
- α dépend en général de a et de ε . Si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut choisir le α indépendant de a on dit que f est uniformément continue. De façon précise :

(f est uniformément continue) si, et seulement si,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) [(\forall a \in E) (\forall x \in E) (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)]$$

tandis que

(f est continue) si, et seulement si,

$$(\forall a \in E) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) [(\forall x \in E) (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)]$$

La différence tient dans les positions respectives des $(\forall a \in E)$ et $(\exists \alpha > 0)$.

[La notion de continuité uniforme est explicitement hors programme des classes de première et de terminale)

3-2-7 Remarque

Soient $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, $F \subset E$ ($F \neq \emptyset$, $F \neq E$), $a \in F$

a) Si f est continue au point a , il en est de même de sa restriction à F
notée $f|_F$

b) Si $f|_F$ est continue au point a , f n'est pas nécessairement continue au point a .

[Par exemple, si

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{|x|}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$$

et si $F = [0, +\infty[$, $f|_F$ est continue au point 0 ($f|_F$ est une fonction constante) mais f n'est pas continue au point 0.

3-2-8 Définitions

a) Soient f une application de E dans $\mathbb{R}$, I un intervalle contenu dans E . Si $f|_I$ est continue on dit que f est continue sur I .

b) Soient $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, $a \in E$. Posons $F = E \cap [a, +\infty[$ (alors $a \in F$). Si $f|_F$ est continue au point a , on dit que f est continue à droite au point a . On définit de même la continuité à gauche au point a :

f est continue à gauche au point a si $f|_G$ (où $G = E \cap]-\infty, a)$ est continue au point a .

Dans la plupart des manuels on ne définit la continuité à droite au point a que pour les fonctions dont l'ensemble de définitions contient un intervalle de la forme $[a, a + h[$, avec $h > 0$. Nous ne nous restreindrons pas à ce cas et nous admettons que F peut ne contenir aucun intervalle de la forme $[a, a + h[$, avec $h > 0$. Pour nous la fonction g , définie en 3-2-1, est continue à droite au point -1].

Dans le second degré, on n'utilise généralement que la notion de fonctions continue sur un intervalle I (et non celle de fonction continue sur tout son ensemble de définition). Plaçons-nous dans le cas où $I = [a, b]$.

On dit alors :

Si $f \in \mathcal{K}(E, \mathbb{R})$, si $[a, b] \subset E$, f est continue sur $[a, b]$ si, et seulement si f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a , continue à gauche en b .

Cette définition est la même que celle que nous avons donnée : f est continue sur $[a, b]$ si, et seulement si, la restriction de f à $[a, b]$ est continue (au sens de 3-2-8 c'est-à-dire au sens de 3-2-5 et de 3-2-1).

3-2-9 Remarque

- a) Soient $f \in \mathcal{K}(E, \mathbb{R})$ et I un intervalle contenu dans E . Si f est continue sur I , $f(I)$ est un intervalle.
- b) Soient $f \in \mathcal{K}(E, \mathbb{R})$ et I un intervalle borné fermé contenu dans E , si f est continue sur I , $f(I)$ est un intervalle borné fermé.

[Conformément aux instructions officielles il n'est pas question de démontrer ces théorèmes, mais "il convient de les illustrer par des figures convenables"] .

3 § NOTION DE LIMITE D'UNE FONCTION

Pour aborder la notion de limite précisons quelques termes (hors programme) qui nous seront utiles, mais dont nous ne proposons pas l'emploi.

3-3-1 Définitions

E étant une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- a. Un point $a \in \mathbb{R}$ est dit point d'accumulation de E si, et seulement si tout intervalle ouvert contenant a contient une infinité de points de E .
- b. Un point $a \in \mathbb{R}$ est dit adhérent à E si, et seulement si tout intervalle ouvert contenant a contient au moins un point de E .

3-3-2 Remarques

a) Nous noterons $\bar{E}$ l'ensemble des points adhérents à E . On a $E \subset \bar{E}$ mais l'égalité n'a pas nécessairement lieu (Cf e) ci-dessous).
Un point d'accumulation de E est adhérent à E .

b) Un point d'accumulation de E , (ou un point adhérent à E) n'appartient pas nécessairement à E .

c) Intuitivement dire que a est adhérent à E signifie que E contient des points aussi "voisins" qu'on veut de a .

d) Pour que a soit un point d'accumulation de E il faut et il suffit que a soit adhérent à $E - \{a\}$.

e) Si E est l'un des intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ alors $\bar{E} = [a, b]$.

Si $E = [a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, alors $\bar{E} = [a, +\infty[$

Si $E =]-\infty, a]$ ou $] -\infty, a[$, alors $\bar{E} =]-\infty, a]$

Ceci étant dit, examinons les définitions de la notion de limite :

3-3-3 Définition I La circulaire ministérielle citée au début du chapitre 3 précise :

Une définition de " f admet une limite ℓ quand la variable tend vers a " est "il existe un nombre ℓ tel que soit réalisée la propriété suivante : pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un intervalle ouvert J (dépendant de I) contenant a , tel que pour tout $x \in (\text{déf } f) \cap J$ et $x \neq a$, l'on ait $f(x) \in I$ ".

Il est équivalent de dire "quel que soit ε strictement positif, il existe α strictement positif tel que $0 < d(a, x) < \alpha$ entraîne $d[\ell, f(x)] < \varepsilon$ ".

3-3-4 Remarque :

On peut noter que la circulaire ne précise rien sur a , si ce n'est que $a \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une relation entre a et $\text{déf } f$ (ensemble de définition de f) ? En fait chacun sait (ou croit savoir) comment prendre a : dans les manuels du second degré on impose à a la condition suivante (ou une condition "équivalente") "il existe $h > 0$ tel que $]a - h, a[\cup]a, a + h[\subset E$ ". Cette condition implique (sans lui être équivalente) la condition " a est un point adhérent à $E - \{a\}$ " ou (Cf 3-3-2 d) " a est un point d'accumulation de E ".

Plaçons-nous dans le cas général où E , ensemble de définition de f , est une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

1er cas Supposons que a ne soit pas adhérent à $E - \{a\}$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant a et tel que $J \cap E$ soit $\{a\}$ ou $\emptyset$. Soient $b \in \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert contenant b . J est un intervalle ouvert contenant a tel que $J \cap E - \{a\} = \emptyset$ et comme $f(\emptyset) = \emptyset$, la condition pour que " f admette une limite b quand la variable tend vers a " de la définition I est remplie.

Conclusion : si l'on admet que a puisse être un point non adhérent à $E - \{a\}$ tout réel peut être considéré comme limite de f quand la variable tend vers a , ce qui est sans intérêt.

2ème cas Supposons que a soit adhérent à $E - \{a\}$. Alors tout intervalle ouvert contenant a contient des points de E autres que a .

Supposons en outre que $f(x)$ tende vers b et vers c ($b \leq c$) quand x tend vers a . Si $b < c$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(x \in E \text{ et } 0 < |x - a| < \alpha) \Rightarrow (|f(x) - b| < \frac{c - b}{2})$$

et il existe $\beta > 0$ tel que

$$(x \in E \text{ et } 0 < |x - a| < \beta) \Rightarrow (|f(x) - c| < \frac{c - b}{2})$$

Alors $(x \in E \text{ et } 0 < |x - a| < \inf(\alpha, \beta))$ entraîne

$$f(x) < b + \frac{c - b}{2} = c - \frac{c - b}{2} < f(x)$$

ce qui est impossible. D'où $b = c$. Ainsi quand a est adhérent à $E - \{a\}$, si f a une limite quand la variable tend vers a cette limite est unique. C'est le cas intéressant.

Il résulte de cela que la définition I doit être complétée en précisant que a est un point adhérent à $E - \{a\}$ (ou ce qui revient au même, que a est un point d'accumulation de E). C'est ce que nous ferons. Si a n'est pas adhérent à $E - \{a\}$, la question de savoir si f a une limite au point a n'a pas de sens. La définition I ainsi complétée a un domaine d'application plus vaste que celle des manuels, mais quand les deux définitions sont applicables elles coïncident.

Dans le second degré pour ne pas utiliser les termes "point d'accumulation de E " ou "point adhérent à $E - \{a\}$ " on peut dire que " a est un point de $\mathbb{R}$ tel que tout intervalle ouvert contenant a contienne au moins un point de E , autre que a si $a \in E$ ".

3-3-5 Définition II Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, $a \in \bar{E}$, $b \in \mathbb{R}$.

1er cas Si $a \in E$ on dit que " $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a " ou que " f a pour limite b au point a " si, et seulement si pour tout intervalle ouvert W contenant b il existe un intervalle ouvert V (dépendant de W) contenant a tel que $f(V \cap E) \subseteq W$.

2ème cas Si $a \notin E$, on dit que " $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a ", ou que " f a pour limite b au point a " si et seulement si la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} E \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E \\ b, & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

a pour limite b au point a , au sens du premier cas.

3-3-6 Remarque Avec la définition II dire que f a pour limite b au point a équivaut à dire :

si $a \in E$, f est continue au point a et $b = f(a)$,

si $a \notin E$, f est continue au point a

En effet, en utilisant la remarque (R) de 3-1-2 on voit que, si $a \in E$, le fait que b soit limite de f au point a (au sens 3-3-5 équivaut à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$|x - a| < \alpha \text{ entraîne } |f(x) - b| < \varepsilon$$

Comme $a \in E$ et comme $\alpha > 0$, on a $|f(a) - b| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $b = f(a)$ et f est continue au point a (Cf 3-2-1). Inversement si f est continue au point a et si $b = f(a)$, f a pour limite b au point a .

3-3-7 Comparaison entre les définitions I et II

a) Soit $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, $a \in \overline{E - \{a\}}$, $b \in \mathbb{R}$.

Si l'on prend la définition I il y a équivalence entre

" f a pour limite b au point a " et

$$"(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) [(\forall x \in E) (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)]"$$

Si l'on prend la définition II il y a équivalence entre

" f a pour limite b au point a " et

$$"(\forall \varepsilon > 0) (\exists \alpha > 0) [(\forall x \in E) (|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)]"$$

Par suite, si $f(x)$ a pour limite b au point a , au sens I, alors $f(a)$ a pour limite b au point a , au sens II.

b) Soit $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, $a \in \bar{E}$ (mais $a \notin E - \{a\}$)
ce qui implique $a \in E$). La question de savoir si f a une limite au point a
n'a pas de sens, avec la définition I (cf 3-3-4) mais f a une limite égale
à $f(a)$ au point a si l'on adopte la définition II.

c) Par exemple, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f: & & \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

a pour limite 1 au point 0, au sens I, mais n'a pas de limite en ce point 0,
au sens II.

[Par contre l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f: & & \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

a pour limite 1 au point 0, au sens I ou au sens II].

Autre exemple : l'application :

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f: & & \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 - |x|} \end{array}$$

a pour limite 0 au point 0 d'après la définition II, mais le problème de
savoir si f a une limite au point 0, au sens de la définition I, n'a pas
de sens.

d) En conclusion, des deux définitions I et II on ne peut pas dire
que l'une soit plus générale que l'autre.

3-3-8 Définition III

f appartenant à $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, F étant une partie de E , a un point adhérent
à F , si la restriction de f à F a pour limite b au point a (au sens de la
définition II), on dit que " $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a sur F ".

3-3-9 Remarque Soit $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, soit $a \in \bar{E}$ et soit $b \in \mathbb{R}$.

1er cas si a est adhérent à $E - \{a\}$ (en particulier si a n'appartient pas à E) il y a équivalence entre :

- $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens I,
- en posant $g = f|_{E - \{a\}}$, $g(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens II
- $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a , sur $E - \{a\}$, au sens III.

2ème cas si a n'est pas adhérent à $E - \{a\}$ (alors a appartient nécessairement à E) les expressions

- $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens I
 - $f(x)$ tend vers b , quand x tend vers a , sur $E - \{a\}$, au sens III
- n'ont aucun sens.

Par contre, si $b = f(a)$, $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens II. Les définitions I et III (où $F = E - \{a\}$) sont donc équivalentes.

3-3-10 Définition Soit $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ et soit a un point adhérent à $F = E \cap]a, +\infty[$ (ceci suppose en particulier F non vide), soit $g = f/F$, il y a équivalence entre

- $g(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens I
- $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a sur F , au sens III

On dit alors que " $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a par valeurs (strictement) supérieures à a ", et b (qui est unique) est la limite à droite de f au point a .

3-3-11 Théorème . Soient $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{A}(F, \mathbb{R})$, (où $f(E) \subset F \subset \mathbb{R}$), a un point adhérent à E . Si $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a , au sens II, alors b est adhérent à F . Si de plus $g(y)$ tend vers c quand y tend vers b , au sens II, alors l'application composée $g \circ f$ a pour limite c au point a , au sens II.

a) Soit V un intervalle ouvert contenant b . En montrant que $V \cap F$ est non vide ou aura montré que b est adhérent à F . Par hypothèse il existe un intervalle ouvert U contenant a tel que $f(E \cap U) \subset V$. Comme $U \cap E \neq \emptyset$ (car $a \in \bar{E}$) il existe $x \in E \cap U$ et $f(x)$ appartient à V et à $f(E)$ donc à $V \cap F$. Ainsi $b \in \bar{F}$.

b) Si W est un intervalle ouvert contenant C , il existe un intervalle ouvert V contenant b tel que $g(V \cap F) \subset W$. Il existe aussi un intervalle ouvert U contenant a tel que $f(U \cap E) \subset V$, donc tel que $f(U \cap E) \subset V \cap F$. Alors U est un intervalle ouvert contenant a tel que $g \circ f(U \cap E) \subset W$, d'où $g \circ f$ a pour limite C au point a , au sens II.

3-3-12 Remarque Le théorème ci-dessus est faux si l'on remplace dans les hypothèses la définition II par la définition I.

Par exemple, soient

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 0 \quad y \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin y}{y} & , \text{ si } y \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } y = 0 \end{cases}$$

Alors $g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 0$$

En prenant la définition I :

$f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0,
 $g(y)$ tend vers 1 quand y tend vers 0,
 $g \circ f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

3-3-13 Notations Si l'on adopte la définition I (qui est celle des commentaires du programme et celle utilisée ordinairement), et si $f(x)$ tend vers a , on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \text{ ou } \lim_a f = b$$

Si l'on adopte la définition II (a qui a tendance à se faire en mathématiques le théorème 3-3-11 et la remarque 3-3-12 justifiant cette tendance), si f a pour limite b au point a , on note généralement

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

[ou $\lim_{x \rightarrow a, x \in E} f(x) = b$, si l'on considère que f est une application d'une

partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a sur F (au sens III), on note

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in F} f(x) = b$$

[Dans le cas particulier où $F = E - \{a\}$, on note

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = b] .$$

3-3-14. Remarque Que l'on adopte la définition I, la définition II, il convient de noter que l'on n'a pas défini des expressions telles que "x tend vers a", ou " $f(x)$ tend vers b" prises isolément mais seulement " $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a". La subordonnée ne doit pas être dissociée de la principale.

3-3-15 Remarques Soient $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $a \in E$.

α) avec les définitions 3-2-1 et 3-3-5 il y a équivalence entre

a) f est continue au point a

b) f a pour limite $f(a)$ au point a

β) avec les définitions 3-2-1 et 3-3-3 les propriétés a) et b) ne sont équivalentes que si a est en outre un point d'accumulation de E. Sinon b) n'a pas de sens et a) peut être vérifiée ou non, mais a un sens.

γ) avec les restrictions des manuels (Cf 3-2-2 et 3-3-4 les propriétés a) et b) sont équivalentes, mais on s'est placé dans un cas particulier.

CHAPITRE 4

EQUATIONS

§ 4 - 1 GENERALITES

Définir le mot "équation" ne nous a pas paru simple. Nous avons adopté la définition suivante (que nous ^{ne} proposons pas de donner aux élèves). Il en fallait bien une !

4-1-1 Définitions

On appelle "équation" un couple (E, p) , où E est un ensemble (appelé référentiel) et p une fonction propositionnelle (ou prédicat) définie dans E .

Pour des raisons de commodité et par abus, l'équation (E, p) sera aussi notée :

$$(x \in E ; p(x))$$

On appelle solution de l'équation (E, p) tout élément $\mathcal{A}$ de E tel que $p(\mathcal{A})$ soit une proposition vraie.

On appelle ensemble des solutions de l'équation $(E ; p)$ l'ensemble S des éléments $\mathcal{A}$ de E pour lesquels $p(\mathcal{A})$ est une proposition vraie.

Par exemple les équations $(x \in \mathbb{R}, x - 1 = 0)$ et $(x \in \mathbb{R}, (x - 1)^3 = 0)$ ont le même ensemble de solutions $\{1\}$

Résoudre l'équation $(E ; p)$ c'est trouver l'ensemble des solutions de cette équation.

4-1-2 Exemples

La définition d'une équation adoptée ici est très générale (peut être trop...) Les exemples qui suivent montrent que ce que l'on considère ordinairement comme "équation" n'en est qu'un cas très particulier.

1 - $(x \in \mathbb{R} ; |2x + 1| - |x - 1| = 3)$

2 - $(z \in \mathbb{C} ; z^2 = i |z|)$

3 - $(x \in \mathbb{R} ; 2x^2 - 3x + 1 > 0)$

$$4 - \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad 2x^2 - y + 7 = 0 \right)$$

$$5 - \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad (x + y - 3 = 0) \text{ et } (2x - y - 9 = 0) \right)$$

$$6 - \left((x \in \mathbb{R} ; \quad (\sqrt{x+1} = x-3) \implies (x^2 - 4x - 5 = 0) \right)$$

$$7 - P \text{ étant un plan affine réel, } A, B, C \text{ trois points de } P : \\ (M \in P ; \quad \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = \vec{0})$$

$$8 - E \text{ étant l'ensemble } \{+, -, x, :\} \\ (T \in E ; \quad 8 \text{ T } 4 \neq 12)$$

$$9 - E \text{ étant l'ensemble } \{=, <, >\} \\ (T \in E ; \quad 5\sqrt{2} - 7) \text{ T } (7 - 4\sqrt{3})$$

$$10- P \text{ étant un plan affine euclidien réel, } A, B \text{ deux points fixés de } P \\ \text{et } a \text{ un réel positif ou nul :} \\ (M \in P ; \quad MA^2 + MB^2 = 2a)$$

$$11- \left((x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x - 2y + 1 \geq 0) \text{ et } (2x - y + 3 = 0) \right)$$

$$12- \quad (x \in E ; \quad x \in E)$$

Ce que l'on nomme ordinairement "inéquation" ou "système d'équations" rentre dans la définition générale 4-1-1.

4-1-3 Remarques

a) Il importe de noter que le programme de seconde **C** place la définition du mot "équation" dans l'alinéa 3 de la partie intitulée "langage des ensembles", alinéa consacré à la notion d'application.

D'autre part, les commentaires de ce programme (Instruction n° IV 70-70 du 6/2/1970) précisent que :

"Le mot équation n'est pas nouveau dans le langage mathématique ; mais le programme a eu surtout en vue ici le problème que pose la résolution d'une équation : soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles d'un ensemble A , f et g deux applications de A_1 et A_2 respectivement vers un ensemble B , résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à rechercher l'ensemble des valeurs de x , appartenant évidemment à $A_1 \cap A_2$, qui ont par f et g la même image dans B . Cette recherche consiste, dans la pratique, à énumérer les éléments de cet ensemble, fût-ce au moyen d'un paramétrage, et s'il s'agit d'équations numériques, à donner éventuellement ces éléments avec la meilleure approximation possible".

b) C'est pourquoi dans la suite nous nous limiterons à la définition suivante :

Définition Une équation est un couple $(E ; p)$ où E est un ensemble appelé référentiel et où p est une fonction propositionnelle définie dans E de la forme $f(x) = g(x)$, f (resp g) désignant une application d'une partie A (resp. B) dans un ensemble F .

Une solution de l'équation est un élément x de E pour lequel la relation

$$f(x) = g(x) \text{ est vraie (une solution est donc un élément de } A \cap B).$$

On pourrait être tenté dans cette dernière définition de remplacer la forme propositionnelle " $f(x) = g(x)$ " par une forme propositionnelle de la forme " $h(x) = 0$ " mais que représente 0 dans l'ensemble F ?

4-1-4 Remarque Certains estiment utile d'employer la notion d'équations équivalentes (notion explicitement hors programme de seconde C)

Deux équations $(E ; p_1)$ et $(E ; p_2)$, ayant même référentiel, sont dites équivalentes si elles ont même ensemble de solutions.

Par exemple les équations

$(x \in \mathbb{R} ; x - 1 = 0)$ et $(x \in \mathbb{R}, (x - 1)^3 = 0)$ sont équivalentes : l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

Les équations :

$(x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x-1} = x-3)$ et $(x \in \mathbb{R} ; \frac{2x-1}{x-2} = 3)$ sont équivalentes :

l'ensemble des solutions est $\{5\}$

Les équations $(x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+1} = -1)$ et $(x \in \mathbb{R} ; x^2 + 1 = 0)$ sont équivalentes : l'ensemble des solutions est vide.

4-1-5 Méthode de résolution d'une équation

L'instruction n° 71-17 du 14 JANVIER 1971 (classe de première) indique que :

"Le nouveau programme n'énumère pas de types d'équations et d'inéquations à traiter, car il veut éviter toute présentation dogmatique à leur sujet, mais il offre matière à autant d'exercices que l'ancien et il demande aux élèves de mettre en oeuvre, sur chacun des exemples à leur portée, les idées générales concernant la conduite logique :

- d'un raisonnement (analyse puis synthèse, emploi de conditions suffisantes transformation d'un problème en un problème équivalent) ;
- d'un algorithme (substitutions et combinaisons linéaires)".

4-1-6 Exemples :

[1] - Résoudre l'équation

$$(x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x-1} = -4)$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la relation $\sqrt{x_0 - 1} = -4$ est fausse, car le premier membre est positif ou nul quand il a un sens.

L'équation n'a donc pas de solution.

[2] - Résoudre l'équation

$$(x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x-1} = x-3)$$

1ère Méthode : s'il existe une solution x_0 de l'équation, la relation $\sqrt{x_0 - 1} = x_0 - 3$ est vraie ainsi que les propositions suivantes :

$$x_0 - 1 = (x_0 - 3)^2$$

$$x_0^2 - 7x_0 + 10 = 0$$

$$(x_0 - 2)(x_0 - 5) = 0$$

Par suite, si x_0 est solution x_0 est égal à 2 ou à 5.

Le "si" montre que le problème n'est pas encore résolu.

2 n'est pas solution car $\sqrt{x-1}$ n'est pas défini pour $x = 2$.

5 est solution car $\sqrt{5-1} = 5-3$.

L'équation admet une solution et une seule égale à 2.

2ème Méthode : Pour tout x_0 réel il y a équivalence entre les propositions suivantes (il s'agit de propositions équivalentes, mais non d'équations équivalentes) :

(x_0 est solution de l'équation ($x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x-1} = x-3$))

($\sqrt{x_0-1} = x_0-3$)

($x_0-1 = (x_0-3)^2$) et ($x_0 \geq 3$)

($x_0^2 - 7x_0 + 10 = 0$) et ($x_0 \geq 3$)

((x_0-2) (x_0-5) = 0) et ($x_0 \geq 3$)

($x_0 \in \{2, 5\}$) et ($x_0 \geq 3$)

($x_0 = 5$)

D'où l'équation a une solution et une seule égale à 5.

3 - Résoudre l'équation

$$(x \in \mathbb{R} ; \sqrt{2x^5 - x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + x - 1)$$

Pour tout x_0 réel il y a équivalence entre les propositions suivantes (x_0 est solution de (E)),

$$\left[2x_0^5 - x_0^4 + 6x_0^3 - 3x_0^2 - 2x_0 + 1 = (2x_0^2 + x_0 - 1)^2 \right] \text{ et } (2x_0^2 + x_0 - 1 \geq 0)$$

$$\left[x_0^3 (2x_0^2 - 5x_0 + 2) = 0 \right] \text{ et } (2x_0^2 + x_0 - 1 \geq 0)$$

$$\left(x_0 = 0, \text{ ou } x_0 = 2, \text{ ou } x_0 = \frac{1}{2} \right) \text{ et } (2x_0^2 + x_0 - 1 \geq 0)$$

$$(x_0 = 2 \text{ ou } x_0 = \frac{1}{2})$$

L'équation (E) admet donc deux solutions : les nombres $\frac{1}{2}$ et 2.

4 - Résoudre l'équation

$$(x \in \mathbb{R} ; \text{Log } (x - 2) + \text{Log } (x + 1) = \text{Log } (3x - 5))$$

1ère Méthode : S'il existe une solution x_0 de l'équation les propositions suivantes sont vraies.

$$\text{Log } (x_0 - 2) + \text{Log } (x_0 + 1) = \text{Log } (3x_0 - 5)$$

$$\text{Log } [x_0^2 - x_0 - 2] = \text{Log } (3x_0 - 5)$$

$$x_0^2 - x_0 - 2 = 3x_0 - 5$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$$

$$(x_0 - 1)(x_0 - 3) = 0$$

$$(x_0 \in \{1, 3\})$$

Si l'équation admet des solutions elles appartiennent à $\{1, 3\}$
1 n'est pas solution car $\text{Log } (3x - 5)$ n'est pas défini pour $x = 1$.
3 est solution car $\text{Log } 1 + \text{Log } 4 = \text{Log } 4$.

2ème Méthode : On pourrait dire aussi : pour tout x_0 réel il y a équivalence entre les propositions suivantes :

$$[\text{Log } (x_0 - 2) + \text{Log } (x_0 + 1) = \text{Log } (3x_0 - 5)] \wedge (x_0 > 2) \wedge (x_0 > -1) \wedge (x_0 > \frac{5}{3}),$$

$$[\text{Log } (x_0^2 - x_0 - 2) = \text{Log } (3x_0 - 5)] \wedge (x_0 > 2),$$

$$(x_0^2 - x_0 - 2 = 3x_0 - 5) \wedge (x_0 > 2)$$

$$(x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0) \wedge (x_0 > 2)$$

$$[(x_0 - 1)(x_0 - 3) = 0] \wedge (x_0 > 2)$$

$$(x_0 \in \{1, 3\}) \wedge (x_0 > 2)$$

$$x_0 = 3$$

d'où l'équation a une solution et une seule égale à 3.

4-1-7 - Remarque : Les exemples donnés en 4-1-6 font intervenir la conduite logique d'un raisonnement.

L'équation du second degré fournit un exemple d'équation résoluble au moyen d'un algorithme.

§ 4 - 2 EQUATIONS DU SECOND DEGRE
DANS $\mathbb{R}$ OU DANS $\mathbb{C}$

La résolution d'une équation du second degré paraît quelque chose de bien classique et pourtant elle appelle quelques remarques.

4-2-1 Existence des solutions (dans $\mathbb{R}$)

Résoudre l'équation (E)

$$(x \in \mathbb{R} ; ax^2 + bx + c = 0, (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

x_0 étant un réel il y a équivalence entre les propositions

(x_0 est solution de (E))

$$(ax_0^2 + bx_0 + c = 0)$$

$$(4a^2 x_0^2 + 4abx_0 + 4ac = 0)$$

$$((2ax_0 + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0)$$

Désignons par Δ le nombre $(b^2 - 4ac)$

1er cas : si $\Delta > 0$ il existe deux nombres réels opposés de carré $b^2 - 4ac$ et l'on note $\sqrt{\Delta}$ celui qui est positif. Il y a alors équivalence entre

(x_0 est solution de (E))

$$\text{et } ((2ax_0 + b + \sqrt{\Delta})(2ax_0 + b - \sqrt{\Delta}) = 0)$$

d'où (E) admet deux solutions, et deux seulement : les nombres

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : si $\Delta = 0$ (x_0 est solution de (E)) est une proposition équivalente à :

$$(2ax_0 + b)^2 = 0$$

et (E) a une seule solution au sens de 4-1-1 : le nombre : $-\frac{b}{2a}$

3ème cas : si $\Delta < 0$ (x_0 est solution de (E)) est une proposition équivalente à :

$$(2ax_0 + b)^2 - \Delta = 0$$

Cette dernière étant fausse pour tout x_0 réel l'équation (E) n'a pas de solution.

Comme l'existence de solutions dépend de Δ on dit que Δ est le discriminant de l'équation.

4-2-2 Existence de solutions (dans $\mathbb{C}$)

Résoudre l'équation :

$$(x \in \mathbb{C}; ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})$$

Comme précédemment, x_0 étant un complexe il y a équivalence entre les propositions :

(x_0 est solution de (E))

$$\text{et } ((2ax_0 + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0)$$

Désignons toujours $(b^2 - 4ac)$ par la notation Δ

si $\Delta \neq 0$ il existe deux nombres complexes δ et $(-\delta)$ distincts dont le carré est Δ

Il y a alors équivalence entre :

(x_0 est solution de (E))

$$\text{et } (x_0 \in \mathbb{C}, (2ax_0 + b + \delta)(2ax_0 + b - \delta) = 0)$$

Par suite l'équation (E) admet deux solutions et deux seulement, les nombres

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

si $\Delta = 0$, comme précédemment (E) a une solution, et une seule, au sens de 4-1-1) : le nombre : $-\frac{b}{2a}$

L'usage veut encore que Δ soit encore appelé discriminant de l'équation bien qu'il y ait toujours des solutions.

4-2-3 Remarque

Si a, b, c sont réels, (a non nul), si $\Delta < 0$ l'équation ($x \in \mathbb{C}; ax^2 + bx + c = 0$) admet deux racines distinctes qui sont des complexes conjugués (non réels).

Ceci pourrait laisser croire que les nombres complexes ont été introduits, historiquement, pour résoudre l'équation du second degré. Il n'en est rien. Ces nombres complexes ont été introduits pour résoudre l'équation :

$$(E) \quad (x \in \mathbb{R} ; x^3 + px + q = 0 \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2)$$

dans le cas où cette équation admet trois racines réelles.

Explicitons cela. L'étude des variations de la fonction.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + px + q \end{array}$$

montre que l'équation (E) a trois racines réelles distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2$ est strictement négatif.

Pour résoudre (E) la méthode était la suivante :

On pose $x = u + v$; alors $u + v$ est solution de (E) si et seulement si $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$

On impose à u et v la condition $uv = -\frac{p}{3}$, de sorte que $x = u + v$ est solution du système

$$(1) \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Si $x = u + v$ est solution de (E) alors u^3 et v^3 sont les racines de l'équation

$$(2) \quad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0,$$

équation qui n'a pas de racine réelle dans le cas qui nous intéresse (cas où $4p^3 + 27q^2$ est strictement négatif).

Si α est une racine complexe de (2) si u_1, u_2, u_3 sont les trois racines cubiques de α , si $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$, $v_2 = -\frac{p}{3u_2}$, $v_3 = -\frac{p}{3u_3}$, alors,

pour $i \in \{1, 2, 3\}$, (u_i, v_i) est solution de (1) et $u_i + v_i$ est solution de (E).

En utilisant les nombres complexes on obtient les trois racines réelles de E.

4-2-4 Remarques Plaçons nous dans le cas réel.

si $\Delta > 0$ on peut vérifier que, pour tout réel x
 $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$, que la somme des racines de l'équation est $-\frac{b}{a}$ et que leur produit est $\frac{c}{a}$

Si $\Delta = 0$ l'équation admet une racine égale à $-\frac{b}{a}$, et l'on peut vérifier

que

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad (1)$$

Si l'on fait la convention " l'équation admet deux racines égales à $-\frac{b}{2a}$ "

puisque figure deux fois le facteur $x + \frac{b}{2a}$ dans le second membre de (1)), la somme des racines est alors $-\frac{b}{a}$ et leur produit égal à $\frac{c}{a}$ (car $b^2 = 4ac$).

Ceci justifie la convention : l'équation (E) admet deux racines égales quand

$\Delta = 0$, on dit encore que (E) admet une racine double quand $\Delta = 0$.

Ceci s'applique au cas complexe et peut s'étendre à toute équation du type

$(x \in \mathbb{R} / P(x) = 0, P \text{ polynome})$ ou du type

$(x \in \mathbb{C} / P(x) = 0, P \text{ polynome})$

Par exemple :

$(x \in \mathbb{R} ; (x-1)^3 (x-2)^2 = 0)$ est une équation qui admet 1 comme racine triple et 2 comme racine double.

Cette notion de racine multiple présente de l'intérêt, étant données les relations entre les coefficients et les racines d'une équation de la forme

$(x \in \mathbb{C} ; P(x) = 0, P \text{ fonction polynome})$

4-2-5 Remarques

a) Si l'on pose $b = 2b'$ et si l'on pose $\Delta' = b'^2 - ac$, ou $\Delta' = \frac{\Delta}{4}$

on a, dans le cas réel par exemple,

si $\Delta' > 0$, (E) a deux racines $\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$

si $\Delta' = 0$, (E) a une racine double $-\frac{b'}{a}$

si $\Delta' < 0$, (E) n'a pas de racine.

Cette remarque ne doit être utilisée que si elle simplifie les calculs. Elle s'applique quand les coefficients sont numériques ou quand les coefficients dépendent de paramètres. Bien des élèves désirant l'utiliser commencent par dire "b est pair" alors que b est par exemple égal à $2m$ où m est un paramètre réel".

- b) Si l'on veut utiliser le procédé habituel de résolution, on est conduit à dire (dans le cas réel par exemple) : pour x_0 réel, il y a équivalence entre les propositions

(x_0 est solution de (E))

$$(x_0)^2 + \frac{b}{a} x_0 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Arrivé à ce stade, si $b^2 - 4ac > 0$, on trouve dans certains ouvrages les égalités

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

ce qui est bien entendu correct.

Malheureusement certains élèves en déduisent que $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ est égal à $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ce qui n'est vrai que si $a > 0$.

Pour être persuadé de cette difficulté proposez à vos élèves la résolution de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - (-1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

Il y a de forts risques qu'après avoir calculé

$$\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$$

si vous les obligez à écrire les formules, ils poursuivent sans hésiter :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$$

or $\sqrt{\Delta} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ et, bien qu'ils aient trouvé l'ensemble des solutions, l'emploi des formules est gravement entaché d'erreur.

c) Dans le cas complexe, si $b^2 - 4ac$ est un nombre complexe non nul, $b^2 - 4ac$ a deux racines complexes opposées et distinctes. La notation $\sqrt{b^2 - 4ac}$ est à déconseiller fortement (pour ne pas dire à proscrire). Laquelle des deux racines représenterait-elle ?

d) Il est important que les élèves sachent résoudre une équation du second degré à coefficients numériques simples sans faire intervenir l'algorithme de résolution.

Par exemple dans les cas suivants

$$x^2 - 11 = 0$$

$$2x^2 + 3x = 0$$

où les racines sont évidentes. Dans le cas

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

où le premier membre n'est autre que $(x + \frac{1}{2})^2$.

Dans le cas $x^2 - 3x + 2 = 0$, où les racines (s'il y en a) sont deux nombres dont la somme est 3 et le produit 2, ce qui montre que l'équation admet deux racines : les nombres 1 et 2.

§ 4 - 3 EQUATIONS DU SECOND DEGRE AVEC PARAMETRE

4-3-1 - Quelques remarques sur un problème classique

$\left\{ \begin{array}{l} m \text{ désignant un paramètre réel, discuter l'existence et le signe} \\ \text{des racines de l'équation :} \\ (E) (x \in \mathbb{R}, m x^2 + (m + 1) x + m + 1 = 0) \end{array} \right.$

Remarque 1 Dans de nombreux cas, les élèves débutent une telle étude par le calcul du discriminant mais ce calcul n'a de sens que si l'équation (E) est du second degré... et il est clair que pour $m = 0$ (E) s'écrit : $(x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et dans ce cas le problème posé à une résolution immédiate.

Remarque 2 Dans de nombreuses copies d'élèves et même dans certains manuels l'étude est la suivante :

si $m \neq 0$, l'équation (E) est du second degré. Calculons le discriminant Δ . On trouve :

$$\Delta = (m + 1) (1 - 3m)$$

Le tableau ci-contre donne le signe de Δ

m	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Δ	-	0 +	0 -	-

. Cette étude est incorrecte ! En effet, qu'est devenue, dans le tableau, l'hypothèse initiale $m \neq 0$?

Il est clair que Δ n'est pas défini pour $m = 0$ (remarque 1) et le tableau donnant le signe de Δ doit être

m	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Δ	-	0 +		+ 0 -	-

Remarque 3 Les élèves poursuivent l'étude en calculant la somme S et le produit P des racines, puis en étudiant le signe de ceux-ci. Ils indiquent, (et quelques manuels font de même) alors que

$$P = \frac{m + 1}{m} \text{ avec l'étude de son signe}$$

m	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
P	+	0 -		

et

$$S = -\frac{m+1}{m} \text{ avec l'étude de son signe}$$

m	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
S	-	0	+	-

Ceci est encore inexact ! On ne peut parler de S et de P que lorsque les racines existent et il n'est pas question d'étudier les signes de P et S lorsque ceux-ci ne sont pas définis...

Il faut écrire : Si $m \in [-1, 0 \cup 0, \frac{1}{3}]$ calculons le produit P et la somme S des racines.

$$P = \frac{m+1}{m} \text{ et son signe est donné ci-contre :}$$

m	-1	0	$\frac{1}{3}$
P	0	-	+

$$S = -\frac{m+1}{m} \text{ et son signe est donné ci-contre :}$$

m	-1	0	$\frac{1}{3}$
S	0	+	- (-4)

Remarque 4 Le tableau récapitulatif de cette étude peut être avantageusement disposé de la façon suivante :

m	Δ	P	S	conclusions
$+\infty$	-			(E) n'a aucune racine réelle
$\frac{1}{3}$	0			(E) a une racine double $x' = x'' = -2$
	+	+	-	(E) a deux racines négatives
0				(E) est du 1er degré et a pour racine $x = -1$
	+	-	+	(E) a deux racines de signes contraires ; la plus grande de ces racines, en valeur absolue, est positive.
-1	0	0	0	(E) a une racine double $x' = x'' = 0$
	-			(E) n'a aucune racine réelle
$-\infty$				

Cette disposition permet, grâce à la place disponible "à droite", d'écrire en français les conclusions.