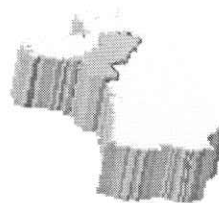


IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE



NANTA IREMICA N° 2

Une introduction

Tome 2

à la théorie des ensembles

M. Durand
M. Van Den Bossche

1977

NANTA IREMICA

Les volumes de la collection Nanta Iremica sont écrits pour les Enseignants à partir d'un travail critiqué et testé par des équipes organisées dans le cadre de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Académie de Nantes.

Qu'on ne se méprenne surtout pas en imaginant que cette phase critique fasse des ouvrages de Nanta Iremica des textes de référence définitifs. La critique collective, si elle élimine des erreurs, si elle organise plus rationnellement le plan d'un texte, si elle l'adapte mieux aux besoins des lecteurs en gommant les lubies et manies de l'auteur, ne saurait fournir un brevet de valeur assurée. Que le lecteur garde tout son esprit critique, l'aiguise même. Les textes de Nanta Iremica n'ont aucun caractère contraignant et ne sont imposés par aucune hiérarchie. Tels qu'ils sont, ils représentent une étape, certes figée par le texte, de l'activité pédagogique et mathématique d'une Académie. Mais les modes, les goûts et les connaissances évoluent et les étapes se succèdent.

Dans cette collection, il y a place pour des textes d'information mathématique, place pour des recueils commentés de problèmes et place pour des progressions analysées de telle ou telle classe de l'Enseignement, en particulier l'enseignement dans les classes littéraires ou les classes professionnelles qui sont défavorisées du point de vue mathématique.

Il y a aussi place pour des documents qui ne font pas partie de la panoplie usuelle des gadgets du mathématicien moyen. Par exemple des documents d'épistémologie mathématique, par exemple des documents de docimologie, par exemple des synthèses sur les différentes réformes des mathématiques dans le monde, par exemple puisque tout individu a échoué, échoue ou échouera sur un problème mathématique, des réflexions sur l'échec en mathématiques.

Le présent texte, deuxième volume de la collection, est la suite obligée du volume 1 (Introduction à la logique). Il est exactement rédigé dans le même esprit : le texte se veut élémentaire et naïf, fourmillant d'exemples, en prenant lentement le lecteur et lui donnant tout le temps nécessaire pour se frotter à des exercices variés.

MM. Durand et Van Den Bossche, animateurs à l'I.R.E.M. de Nantes ont eu le courage de rédiger cet ouvrage avec minutie en soignant la gradation, répondant ainsi à une attente. Je les en remercie vivement au nom de toute l'équipe d'animateurs de l'I.R.E.M. de Nantes

Jean DHOMBRES.

Directeur de l'I.R.E.M.
de NANTES

AUTRES PUBLICATIONS DE LA COLLECTION

NANTA - IREMICA

(Parues ou à paraître)

Volume N° 1	Introduction à la logique	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 2	Introduction à la Théorie des Ensembles	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 3	Etude épistémologique et historique de la notion de nombre réel et de mesure des grandeurs	Jean DHOMBRES
Volume N° 4	Documents relatifs au Volume N° 3	Jean DHOMBRES
Volume N° 5	Le langage BASIC	M. BELHACHE
Volume N° 6	Echec en Mathématiques	A. BIGARD
Volume N° 7	Eléments d'Analyse Fonctionnelle	Jean DHOMBRES
Volume N° 8	Algèbre linéaire et Géométrie vectorielle	R. SEROUX
Volume N° 9	Méthode Mathématiques Modernes utilisées en Théorie de l'approximation	Jean DHOMBRES
Volume N° 10	Analyse	Melle VENARD Jean DHOMBRES
Volume N° 11	Le langage PL/I	M. BELHACHE

Pour se procurer ces livres s'adresser à :

I.R.E.M de NANTES

Université de Nantes

38, boulevard Michelet

BP 1044 44037 NANTES-CEDEX

T A B L E D E S M A T I E R E S

Première partie : LA LOGIQUE

A - Généralités

1. Notions primitives.
2. Les propositions composées.

B - Le calcul des propositions

3. Méthode des tables de vérité.
4. Les opérateurs logiques unaires.
5. Les opérateurs logiques binaires.
6. Notions sur les lois logiques.
7. Utilisation des lois logiques.
8. Le calcul des propositions: tableau synoptique.

C - Aperçu sur la méthode axiomatique

9. Principe de la méthode axiomatique.
10. Esquisse d'une construction axiomatique.
11. Axiomatique: tableau synoptique.

D - Les opérateurs de Sheffer

12. L'incompatibilité et le rejet.

E - L'égalité

13. L'égalité

F - Notions sur le calcul des prédicats

14. Introduction.
15. Analyse des fonctions propositionnelles.
16. Quelques résultats du calcul des prédicats.
17. Calcul des prédicats: tableau synoptique.

Deuxième partie : LES ENSEMBLES

18. Introduction.
19. Ensembles. Eléments. Appartenance.
20. Quantificateurs et ensembles.
21. Inclusion. Parties d'un ensemble.
22. Complémentaire. Ensemble vide.
23. Réunion, intersection d'ensembles.
24. Différences d'ensembles.
25. Les ensembles: tableau synoptique.

Dans la première partie de cet ouvrage, nous nous sommes initiés à la construction des assemblages, des propositions et fonctions propositionnelles. Nous n'avons pas précisé les relations et les objets utilisés, en dehors de la relation égalité.

En mathématique, on introduit d'abord un type particulier de relation qui est à la base de la théorie des ensembles: la relation d'appartenance.

La seconde partie est consacrée aux ensembles. Dès le début, la relation d'appartenance y apparaît en tant que notion primitive. A l'aide de l'appartenance, nous introduisons les relations et objets élémentaires et usuels concernant les ensembles.

Nous n'avons pas voulu présenter une axiomatique de la théorie des ensembles: ces axiomatiques, bien connues, relèvent d'ouvrages spécialisés. Nous avons seulement voulu:

1) présenter, d'une manière assez "naïve" d'ailleurs, un certain nombre de résultats classiques;

2) montrer comment les règles et lois de la première partie pouvaient être utilisées pour justifier certains de ces résultats. Il nous a semblé utile de mettre en évidence quelques énoncés habituellement considérés comme des axiomes dans les enseignements du premier degré et du second degré. Ces énoncés sont signalés par le sigle AX. Bien entendu, le choix de ces énoncés a été dicté par l'usage et, de ce fait, ne présuppose pas le choix d'une axiomatique.

Dans les premiers chapitres de cette seconde partie, nous avons cru devoir indiquer, dans chaque démonstration, les règles et lois logiques utilisées. L'étude de ces chapitres éclaire considérablement la logique et permet au lecteur d'acquérir une certaine aisance dans la manipulation des concepts et des symboles logiques, et une plus grande sûreté dans l'application des règles. En contrepartie, l'accumulation des références alourdit le texte, bien que le signe $\vdash$ indicatif des lois logiques dans la première partie n'ait pas été maintenu dans la seconde, aucune ambiguïté n'étant à craindre.

Nous supposons, du lecteur, une connaissance intuitive des notions d'ensemble fini, d'ensemble infini, et de nombre d'élé-

ments" d'un ensemble, ces notions étant utilisées dans les exemples et exercices.

Afin de faciliter la compréhension, il nous a semblé indispensable d'émailler le texte de nombreux exemples clairement illustrés.

19 - E N S E M B L E S . E L E M E N T S . A P P A R T E N A N C E

19.1. Élément et ensemble.

La notion d'ensemble, ainsi que celle d'élément, sont des notions primitives en mathématiques. De ce fait, elles ne peuvent être définies. Les éléments et les ensembles doivent être considérés comme des objets.

Afin de donner un support aux considérations qui vont suivre, nous devons poser:

AX1: Il existe au moins un ensemble.

19.2. Appartenance.

Etant donnés deux objets désignés par a , E , pour exprimer que E est un ensemble dont a est un élément, nous énonçons la relation d'appartenance:

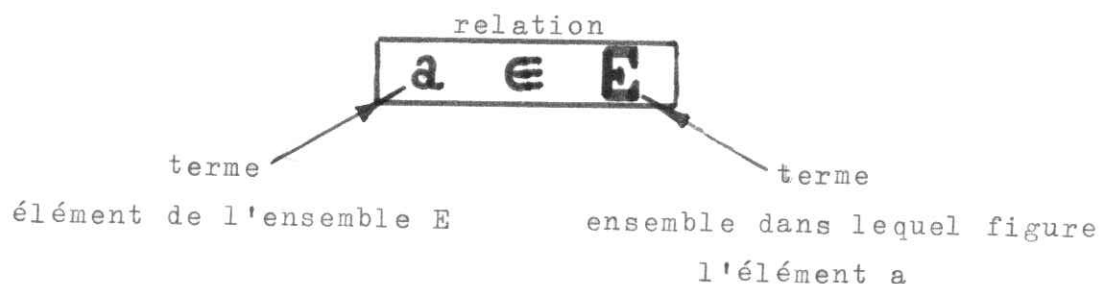
" a appartient à E "

ou " a est élément de E "

et nous notons: $a \in E$

La relation d'appartenance est une relation logique qui doit être considérée comme une notion primitive.

Considérons la notation: $a \in E$; elle représente une relation; a , E , désignent des termes; $\in$ est le symbole d'appartenance. Ce qui précède est résumé dans le schéma suivant:



E étant un terme, il peut, à son tour, être élément d'un autre ensemble F ; dans ce cas, nous écrirons: $E \in F$.

Exemple.

Désignons par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels:

$$3 \in \mathbb{N}$$

19.3. Egalité de deux ensembles. Notation.

Il importe d'établir un lien entre les deux relations fon-

damentales des mathématiques: l'appartenance et l'égalité. Pour cette raison, nous posons:

AX2: Quels que soient les ensembles E , F , E égale F si et seulement si, pour tout x , l'appartenance de x à E est logiquement équivalente à l'appartenance de x à F .

AX2 nous permet d'exprimer l'égalité de deux ensembles E , F , sous la forme suivante:

$$19.3.1. \quad E = F \iff \forall x (x \in E \iff x \in F)$$

Exemple.

Désignons par $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels multiples de 2 et par E l'ensemble des entiers naturels pairs;

$$2\mathbb{N} = E$$

Conséquence.

Il résulte de AX2 qu'un ensemble est parfaitement déterminé lorsqu'il est possible de donner la liste exhaustive de ses éléments.

Dans ce cas, nous désignons cet ensemble en écrivant successivement les symboles représentant les éléments de l'ensemble, séparés par des points virgules et en encadrant tout cela par des accolades. L'ordre dans lequel sont écrits ces symboles est sans importance. Par exemple, l'ensemble ayant pour seuls éléments 1, 3, 5, 7 sera noté:

$$\{ 1; 3; 5; 7 \}$$

soit encore:

$$\{ 3; 1; 7; 5 \}$$

ou:

$$\{ 7; 3; 5; 1 \}$$

Nous avons alors:

$$\{ 1; 3; 5; 7 \} = \{ 3; 1; 7; 5 \}$$

ou:

$$\{ 1; 3; 5; 7 \} = \{ 7; 3; 5; 1 \}$$

La notation qui vient d'être introduite ne s'utilise en fait que dans le cas où l'ensemble envisagé comporte un "petit nombre" d'éléments.

Le plus souvent, les symboles représentant des éléments sont des lettres; il est alors nécessaire de ne pas utiliser la même lettre pour désigner des éléments distincts et de ne pas écrire deux fois une même lettre, c'est à dire de ne pas nommer deux fois le même objet. Par exemple, si a , b , c , désignent les éléments d'un cer-

tain ensemble, nous noterons cet ensemble $\{a, b, c\}$ ou encore $\{c, a, b\}$ mais nous ne le noterons pas $\{a, b, a, c\}$. Cette dernière notation n'est pas correcte puisqu'un même élément s'y trouve désigné deux fois par la lettre a.

Pour indiquer que E désigne l'ensemble dont les éléments sont notés a, b, c, nous écrirons:

$$E = \{a, b, c\}$$

Si dans E, les lettres a, b, désignent le même objet, E devra être noté:

$$\{a, c\}$$

ou encore:

$$\{b, c\}$$

19.4. Négation de l'appartenance. Négation de l'égalité de deux ensembles.

A) Négation de l'appartenance

E étant un ensemble donné et a étant un élément donné de E,

$$a \in E$$

est une proposition. Sa négation est une autre proposition:

$$\text{non}(a \in E)$$

qui se note:

$$a \notin E$$

et qui se lit: "a n'appartient pas à E"

ou: "a n'est pas élément de E"

D'après 4.3, nous avons la table de vérité:

$a \in E$	$a \notin E$
V	F
F	V

Exemples.

En utilisant les notations précédentes, nous pouvons écrire:

$$7 \in \mathbb{N}$$

$$7 \notin 2\mathbb{N}$$

$$b \in \{a, b, c\}$$

$$d \notin \{b, c, a\}$$

B) Négation de l'égalité de deux ensembles.

E, F , désignant deux ensembles donnés, considérons la proposition vraie:

$$E = F \iff \forall x(x \in E \iff x \in F)$$

d'après 6.37.2, cette proposition est logiquement équivalente à:

$$19.4.1. \quad E \neq F \iff \text{non}(\forall x(x \in E \iff x \in F))$$

R3 et 16.8.10 nous permettent d'écrire:

$$E \neq F \iff \exists x(\text{non}(x \in E \iff x \in F))$$

En appliquant R3 et 8.41.8, nous obtenons:

$$19.4.2. \quad E \neq F \iff \exists x((x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E))$$

Exemple.

Soit les ensembles $E = \{a; b; c; d\}$, $F = \{a; c; d; e; f\}$. Nous avons $E \neq F$: en effet, l'élément b appartient à E et n'appartient pas à F . On peut aussi considérer l'élément f qui appartient à F et n'appartient pas à E . Dans ce cas, le second membre de l'équivalence logique 15.4.2 est vrai.

19.5. Règles concernant l'appartenance.

La relation d'appartenance obéit aux restrictions suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{Il ne faut pas écrire:} & x \in x \\ & x \notin x \end{array}$$

La notion d'ensemble de tous les ensembles est exclue à priori.

Ces interdictions sont motivées par la nécessité d'éviter les contradictions qui sont apparues à la naissance de la théorie des ensembles.

19.6. Le singleton. La paire.

Nous avons supposé l'existence d'un ensemble au moins. Afin de permettre la construction de nouveaux ensembles à partir d'ensembles donnés, il faut poser:

AX3 : Quels que soient les termes a, b , il existe un ensemble E (unique d'après AX2) qui a pour seuls éléments a, b .

Nous en déduisons:

1°) lorsque a et b sont égaux, l'existence d'un ensemble noté

$\{a\}$; il est parfois appelé singleton ou ensemble à un élément.

2°) lorsque a et b sont différents, l'existence d'un ensemble noté $\{a; b\}$; il est appelé paire ou ensemble à deux éléments.

Il est important de rappeler qu'un ensemble E est un terme et peut, de ce fait, être à son tour élément d'un autre ensemble, ne serait-ce que de l'ensemble noté $\{E\}$.

Les restrictions du paragraphe 19.5 nous interdisent d'écrire $a \in a$; mais il est toujours possible d'écrire : $a \in \{a\}$.

Ceci met en lumière l'obligation de ne pas confondre l'objet mathématique a et l'objet mathématique $\{a\}$ qui est l'ensemble ayant pour unique élément a .

En tenant compte de tout ce qui précède, nous pouvons donner de nouveaux exemples.

Soit deux ensembles : $\{a\}$, $\{a; b\}$. Nous avons les relations :

$$a \in \{a\}$$

$$a \in \{a; b\}$$

$$b \notin \{a\}$$

$$b \in \{a; b\}$$

En posant $E = \{\{a\} ; \{a; b\}\}$, nous pouvons écrire :

$$\{a\} \in E$$

$$\{a; b\} \in E$$

Notons également la relation :

$$\{a\} \in \{\{a\}\}$$

19.7. Ensembles et fonctions propositionnelles.

Un ensemble E peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. Ce procédé est difficilement utilisable lorsque l'ensemble envisagé contient "un très grand nombre" d'éléments ; il n'est plus utilisable si "le nombre des éléments est infini". Il est donc nécessaire d'introduire un nouveau procédé permettant de définir un ensemble.

Nous sommes alors conduits à admettre :

AX4 : Pour tout ensemble E , quelle que soit la fonction propositionnelle $A(x)$ à une seule variable, il existe un ensemble (unique d'après AX2) dont les éléments sont les éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans $A(x)$, et ceux-là seulement.

Lorsque un ensemble est défini de cette manière, on dit souvent qu'il est l'ensemble des éléments de E qui "vérifient" $A(x)$ ou qui possèdent la propriété "exprimée par $A(x)$ ". Dans ce cas, l'ensemble est désigné par un symbole abrégiateur, B par exemple, et, pour exprimer ce fait, nous écrivons:

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } A(x)\}$$

et nous lisons: "B est l'ensemble des x tels que x appartient à E et $A(x)$ ".

En conséquence, lorsque nous emploierons l'expression: "soit un ensemble B tel que $B = \{x \mid x \in E \text{ et } A(x)\}$ ", il faudra comprendre: "B est un symbole abrégiateur de $\{x \mid x \in E \text{ et } A(x)\}$ " ou "B désigne l'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } A(x)\}$ ".

En définitive, nous disposons maintenant de deux procédés pour définir un ensemble:

1^o) Nous pouvons dresser la liste de ses éléments; nous dirons que l'ensemble est défini en extension.

2^o) Nous pouvons nous donner un ensemble E et une fonction propositionnelle $A(x)$ à une seule variable; nous dirons que l'ensemble est défini en compréhension.

Exemples.

1^o) Prenons pour E l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et considérons la fonction propositionnelle :

$$A(x) : 3 \text{ divise } x$$

que nous noterons symboliquement: $3 \mid x$

L'ensemble $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 3 \mid x\}$, défini en compréhension, est l'ensemble des entiers naturels divisibles par 3. De ce fait:

$$0 \in B, 3 \in B, 12 \in B, 5 \notin B,$$

sont des propositions vraies.

2^o) Prenons pour E l'ensemble $\mathbb{N}$ et pour $A(x) : x < 7$.
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 7\}$ est un ensemble défini en compréhension; il peut être également défini en extension; en effet:

$$B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

3^o) Soit l'ensemble $E = \{12; 1; 6; 3; 8; 5; 10\}$

Nous nous donnons les fonctions propositionnelles:

$$A(x) : 2 \mid x; \quad A'(x) : x \geq 6$$

Envisageons alors les ensembles:

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } 2 \mid x\}$$

$$C = \{x \mid x \in E \text{ et } x \geq 6\}$$

Nous pouvons encore écrire:

$$B = \{ 6; 8; 10; 12 \}$$

$$C = \{ 6; 8; 10; 12 \}$$

Il en résulte: $B = C$

Il est bon de remarquer que, un ensemble E étant donné, deux fonctions propositionnelles différentes peuvent conduire à un même ensemble B .

4^e) Soit l'ensemble $E = \{ 1; 10; 4; 6; 20; 3; 15 \}$ et la fonction propositionnelle: $5 \mid x$ et $x \leq 7$;
L'ensemble $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } (5 \mid x \text{ et } x \leq 7) \}$ existe d'après AX4: il n'a aucun élément.

Considérons l'ensemble E de l'exemple précédent et la fonction propositionnelle: $5 \mid x$ ou $x \leq 7$.

L'ensemble $C = \{ x \mid x \in E \text{ et } (5 \mid x \text{ ou } x \leq 7) \}$ peut être défini en extension; $C = \{ 1; 3; 4; 6; 10; 15; 20 \}$.

Il en résulte l'égalité: $C = E$.

Remarques

1^o) Pour toute fonction propositionnelle $A(x)$ à une seule variable, il n'existe pas nécessairement un ensemble dont les éléments sont tous les objets qui donnent une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans $A(x)$.

Quelle que soit la fonction propositionnelle $A(x)$, pour que nous soyons assurés de l'existence de l'ensemble B , nous devons nécessairement nous donner, au préalable, un ensemble E dans lequel seront pris les objets x ; E s'appelle le référentiel.

2^o) Le référentiel E étant donné une fois pour toutes, et aucune ambiguïté n'étant à craindre, $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } A(x) \}$ pourra être noté plus simplement $B = \{ x \mid A(x) \}$; il ne faut pas oublier, cependant, que ceci est un abus d'écriture.

19.8. Diagrammes.

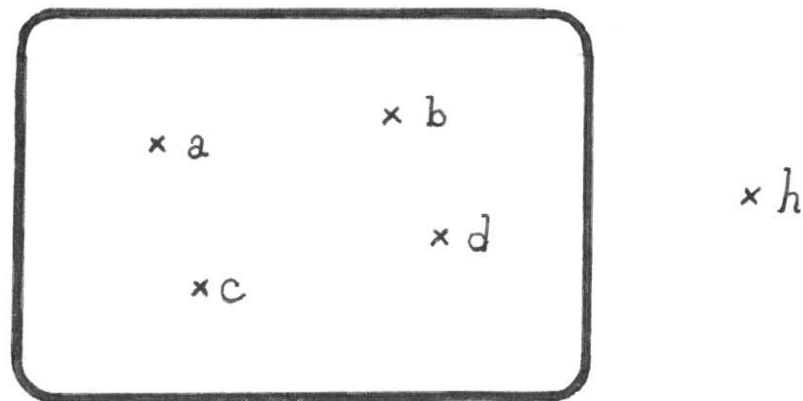
Une représentation schématique des ensembles permet d'illustrer et de comprendre avec plus de facilité les définitions, les raisonnements, les théorèmes, dans lesquels ces ensembles interviennent.

Nous utiliserons souvent les diagrammes suivants appelés quelquefois diagrammes de VENN ou diagrammes d'EULER.

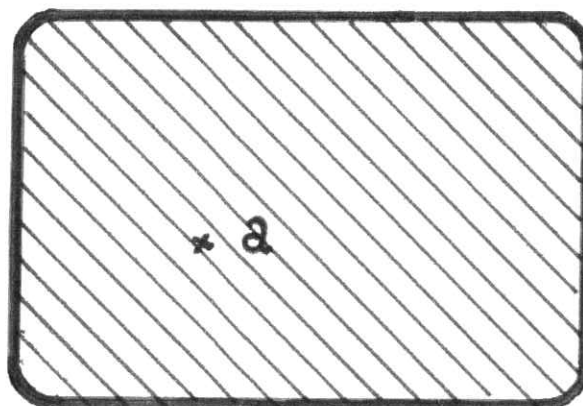
1^o) Les éléments d'un ensemble fini sont représentés par des

croix, par exemple, situées sur une portion de plan intérieure à une ligne courbe, fermée, simple.

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$. Le diagramme ci-dessous représente l'ensemble E et montre que l'objet h n'est pas élément de E .



2°) Un ensemble infini F sera représenté par une portion de plan intérieure à une ligne courbe, fermée, simple. Cette portion de plan pourra être hachurée ou coloriée. Nous matérialiserons un élément a de F par une croix, par exemple.



Remarque.

Les diagrammes précédents sont des illustrations facilitant la compréhension, mais ils ne peuvent, en aucun cas, être considérés comme les éléments d'une démonstration.

E X E R C I C E S

E.19.1.

Soit les ensembles:

$$A = \{ 3; 5; 0; 7 + 3; \sqrt{4} \}$$

$$B = \{ 5 \times 2; 5; 2; 3; 2 \}$$

$$C = \{ 2 \times 5; 2+1; 2-2; 5; 2 \times 1 \}$$

$$D = \{ 6; 2; 3+2; 0; 10; 6 \}$$

$$E = \{ 1 \times 5; 4; 2; \sqrt{9}; 4+1 \}$$

$$F = \{ 0; \sqrt{100}; 4+1; 3; 2 \}$$

Ecrire toutes les égalités vraies entre ces ensembles.

Représenter ces ensembles au moyen de schémas.

E.19.2.

Soit les ensembles:

$$A = \left\{ \frac{-63645}{12729}; \frac{7504\sqrt{4489}}{71824}; \frac{462}{\sqrt{71148}}; \frac{3887}{2197} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{216}{12}; \frac{1146}{\sqrt{328329}}; \frac{1384}{1730} - 2; \frac{5166}{1353} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{6819}{2643} - \frac{3577}{6167}; -\frac{10194}{8495}; \frac{3 + \sqrt{3(7 - 4\sqrt{3})}}{2}; 3,8 + \frac{1}{55} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{42}{11}; \frac{23}{13}; 7; \sqrt{3} \right\}$$

$$E = \left\{ \frac{921}{\sqrt{282747}}; \frac{391}{221}; (2+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}; \frac{76}{24} - \frac{49}{6} \right\}$$

Ecrire toutes les égalités vraies liant ces ensembles.

E.19.3.

E désignant l'ensemble: $\{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 \}$,
définir en extension les ensembles suivants/

$$A = \{ x | x \in E \text{ et } x \mid 12 \}$$

$$B = \{ x | x \in E \text{ et } (5 < x \leq 10) \}$$

$$C = \{ x | x \in E \text{ et } (x^2 \in E \text{ ou } 3 \mid x) \}$$

$$D = \{ x | x \in E \text{ et } (x^2 \in E \text{ et non}(2 \mid x)) \}$$

$$D' = \{ x | x \in E \text{ et } (x > 3 \text{ et } x \text{ premier}) \}$$

$$F = \{ x | x \in E \text{ et } (\sqrt{x} \in E \text{ et } (5+x) \in E) \}$$

$$G = \{ x | x \in E \text{ et } (2 \mid (x+1) \text{ et } x < 4) \}$$

$$H = \{ x | x \in E \text{ et } (x^3 < 1010 \iff 2 \mid \sqrt{x}) \}$$

E.19.4.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. Définir en extension les ensembles suivants:

$$A = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } ((x \leq 25) \vee (x | 36)) \}$$

$$B = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (x > 5 \Rightarrow x | 40) \}$$

$$C = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } [x^2 - 12x + 27 \leq 0 \text{ et } (2 | x \text{ ou } \sqrt{x} \in \mathbb{N})] \}$$

$$D = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } [(x \geq 17 \text{ ou } x \leq 9) \Rightarrow (x \leq 28)] \}$$

$$E = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (x | 40 \text{ ou } x \leq 5) \}$$

$$F = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } [(x \geq 17 \text{ ou } x \leq 9) \Rightarrow ((x \leq 28) \vee (x^2 < 230))] \}$$

$$G = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } [(4 | x \Rightarrow 2 | x) \Rightarrow (x^2 \leq 1111)] \}$$

$$H = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et non } (x > 5 \text{ et non}(x | 40)) \}$$

E.19.5.

E désigne l'ensemble : $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Donner au moins une définition en compréhension des ensembles suivants:

$$\{3;6;7;8\}$$

$$\{4;5;6;7\}$$

$$\{0;4;8\}$$

$$\{0;1;2;8;9;10\}$$

$$\{4;7\}$$

E.19.6.

Déterminer en extension l'ensemble des entiers naturels x tels que:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

E.19.7.

Déterminer en extension l'ensemble des nombres réels x tels que:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

E.19.8.

Déterminer en extension l'ensemble des nombres réels x tels que

$$2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

E.19.9.

Déterminer, en extension, l'ensemble des nombres réels x tels que:

$$3x^2 + (3\sqrt{2} - 11)x - 11\sqrt{2} \leq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \in \mathbb{N}$$

E.19.10.

Déterminer, en extension, l'ensemble des entiers rationnels tels que:

$$3x^2 + (3\sqrt{2} - 11)x - 11\sqrt{2} \leq 0 \quad \text{et} \quad x^2 \in \mathbb{N}$$

E.19.11.

Déterminer, en extension, l'ensemble des entiers naturels x tels que:

$$\frac{x+4}{x+2} \geq \frac{2x+3}{x+5}$$

E.19.12.

Déterminer, en extension, l'ensemble des entiers naturels x tels que:

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

E.19.13.

On donne les termes: a , b , c , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a;b\}$, $\{\{a\};b\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\{a\};\{b\}\}$.
Ecrire toutes les relations d'appartenance vraies faisant intervenir ces termes.

E.19.14.

$\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, quels sont, parmi les ensembles suivants, ceux qui sont égaux.

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x^2 - 6x + 5 = 0\}$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x \mid 25 \text{ et } x < 17)\}$$

$$G = \{2; \sqrt{25}\}$$

$$H = \{2; 3; 4; 5\}$$

$$I = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x^2 - 7x + 6 < 0\}$$

$$J = \{1; 5\}$$

E.19.15.

Démontrer que les ensembles:

$\{\{x\}, \{x;y\}\}$, et $\{\{x'\}, \{x';y'\}\}$
sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

20 - Q U A N T I F I C A T E U R S E T E N S E M B L E S

20.1. Quantificateur existentiel et ensembles.

Compte tenu de AX4 et des remarques du paragraphe 19.7, nous nous donnons d'abord un référentiel E , puis une fonction propositionnelle $A(x)$ à une variable. Pour exprimer qu'il existe au moins un objet a qui est élément de E et tel que la proposition $A(a)$ soit vraie, nous écrivons:

$$\exists x(x \in E \text{ et } A(x))$$

Afin d'abréger l'écriture, nous notons cette proposition de la façon suivante:

$$\exists x \in E, A(x)$$

et nous lisons: "il existe au moins un x de E , $A(x)$ ".

En résumé:

20.1.1. Le symbole $\exists x \in E, A(x)$ désigne la proposition
 $\exists x(x \in E \text{ et } A(x))$

Le symbole $\exists x \in E$ obéit à la règle suivante:

20.1.2. $(y \in E \text{ et } A(y)) \Rightarrow (\exists x \in E, A(x))$

Exemples.

1^o) Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. La proposition:

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$$

exprime que l'équation $x^2 + 1 = 0$ a au moins une solution réelle, ce qui est faux.

2^o) Soit l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. La proposition:

$$\exists x \in \mathbb{N}, x > 5$$

exprime que parmi les entiers naturels, l'un d'eux, au moins, est plus grand que 5. Cette proposition est vraie puisque 6 est un entier naturel plus grand que 5.

Remarquons que:

$$(6 \in \mathbb{N} \text{ et } 6 > 5) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, x > 5)$$

est une proposition vraie.

3^o) Soit $E = \{ 8; 21; 11; 18; 3; 6; 5; 14 \}$. La proposition:

$$\exists x \in E, (7 \mid x \text{ et } x < 10)$$

est fausse.

4°) En considérant le même ensemble E, la proposition:

$$\exists x \in E, (7 \mid x \text{ ou } x < 10)$$

est vraie.

20.2. Quantificateur universel et ensembles.

A) Soit un référentiel E et une fonction propositionnelle A(x) à une seule variable.

nonA(x) est une nouvelle fonction propositionnelle. Considérons alors la proposition:

$$\exists x \in E, \text{ nonA}(x)$$

et sa négation:

$$\text{non}(\exists x \in E, \text{ nonA}(x))$$

Cette dernière proposition se note:

$$\forall x \in E, A(x)$$

et se lit: "pour tout x de E, A(x)" ou encore "quel que soit x de E, A(x)".

En résumé:

20.2.1. $\forall x \in E, A(x)$ désigne la proposition

$$\text{non}(\exists x \in E, \text{ nonA}(x))$$

En conséquence:

$$20.2.2. (\forall x \in E, A(x)) \iff (\text{non}(\exists x \in E, \text{ nonA}(x)))$$

B) R₂ et 16.8.11 nous permettent d'écrire:

$$\text{non } \exists x(x \in E \text{ et } \text{nonA}(x)) \iff \forall x \text{ non}(x \in E \text{ et } \text{nonA}(x))$$

soit encore en utilisant R₃, 6.12.2 et 6.11.1,

$$\text{non } \exists x(x \in E \text{ et } \text{nonA}(x)) \iff \forall x(x \notin E \text{ ou } A(x))$$

D'après R₃ et 6.13.1, nous obtenons:

$$\text{non } \exists x(x \in E \text{ et } \text{nonA}(x)) \iff \forall x(x \in E \Rightarrow A(x))$$

puis d'après 20.1.1,

$$\text{non}(\exists x \in E, \text{ nonA}(x)) \iff \forall x(x \in E \Rightarrow A(x))$$

En définitive, en tenant compte de 20.2.1, il vient:

$$20.2.3. (\forall x \in E, A(x)) \iff \forall x(x \in E \Rightarrow A(x))$$

C) D'après L2 et 8.41.4, nous pouvons écrire:

$$\forall x [A(x) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow A(x))]$$

et affirmer que cette proposition est vraie.

D'après R2 et 16.8.24, la proposition:

$$\forall x [A(x) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow A(x))] \Rightarrow [\forall x A(x) \Rightarrow \forall x (B(x) \Rightarrow A(x))]$$

est aussi une proposition vraie.

En appliquant R1 aux deux propositions précédentes, nous obtenons la proposition vraie:

$$20.2.4. \quad \forall x A(x) \Rightarrow \forall x (B(x) \Rightarrow A(x))$$

En désignant par $B(x)$ la fonction propositionnelle $x \in E$, 20.2.4 nous permet d'écrire:

$$\forall x A(x) \Rightarrow \forall x (x \in E \Rightarrow A(x))$$

et en tenant compte de R3 et 20.2.3, il vient:

$$20.2.5. \quad \forall x A(x) \Rightarrow \forall x \in E, A(x)$$

D) Exemples.

1^o) Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels et $A(x)$ la fonction propositionnelle: $x > 3$.

non $A(x)$ est la fonction propositionnelle $x \leq 3$.

D'après 20.2.1, $(\forall x \in \mathbb{Z}, x > 3)$ désigne la proposition:

$$\text{non } (\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 3)$$

Dans ce cas, $(\forall x \in \mathbb{Z}, x > 3)$ exprime que tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont supérieurs à 3, ce qui est faux;

non $(\exists x \in \mathbb{Z}, x > 3)$ exprime qu'il n'existe aucun élément de $\mathbb{Z}$ inférieur ou égal à 3, ce qui est faux.

2^o) Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et la fonction propositionnelle $A(x): x \neq x + 1$.

$(\forall x \in \mathbb{N}, x \neq x + 1)$ signifie que tout entier naturel est différent de son suivant, ce qui est vrai.

$(\forall x \in \mathbb{N}, x \neq x + 1)$ désigne la proposition vraie:

$$\text{non } (\exists x \in \mathbb{N}, x = x + 1)$$

Elle signifie, en effet, qu'il n'existe aucun entier naturel égal à son suivant.

3^o) Soit $E = \{8; 21; 11; 18; 3; 6; 5; 14\}$. La proposition:

$\forall x \in E, (7 \mid x \text{ et } x < 10)$
est fausse.

4°) En prenant le même ensemble E,
 $\forall x \in E, (7 \mid x \text{ ou } x < 10)$ est une proposition fausse;
 $\forall x \in E, (7 \mid x \text{ ou } x \leq 18)$ est une proposition vraie.

20.3. Négation et quantificateurs.

A) En tenant compte de 6.6.1, 20.2.1 peut encore s'écrire:
 $\text{non}(\exists x \in E, \text{non } A(x)) \iff \forall x \in E, A(x)$
 En remplaçant $A(x)$ par $\text{non}A(x)$, d'après R_2 , R_3 et 6.11.1, nous obtenons:

$$20.3.1. \quad \text{non}(\exists x \in E, A(x)) \iff \forall x \in E, \text{non } A(x)$$

Exemple.

Soit E l'ensemble des entiers naturels impairs. Considérons la fonction propositionnelle $A(x)$: "x est divisible par 4".
 $\text{non } A(x)$ est alors la fonction propositionnelle: "x n'est pas divisible par 4".
 Dans ce cas particulier, la traduction littérale de l'équivalence logique 20.3.1 est:
 "non(il existe au moins un entier naturel impair x divisible par 4) est logiquement équivalent à (quel que soit l'entier naturel impair x, il n'est pas divisible par 4)".
 Notons que les deux membres de cette équivalence logique sont des propositions vraies.

B) D'après L_2 et 6.37.2, la proposition 20.2.2 et la proposition :

$$20.3.2. \quad \text{non}(\forall x \in E, A(x)) \iff \text{non}[\text{non}(\exists x \in E, \text{non } A(x))]$$

sont logiquement équivalentes.

La proposition 20.2.2 étant vraie, 20.3.2 est une proposition vraie d'après R_1 . En tenant compte de R_3 et 6.11.1, nous déduisons de 20.3.2 la proposition vraie:

$$20.3.3. \quad \text{non}(\forall x \in E, A(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non } A(x))$$

Exemple.

Soit $E = \mathbb{N}$ et $A(x)$ la fonction propositionnelle:

"x est un multiple de 5"

Dans ce cas particulier, 20.3.3 exprime l'équivalence logique des propositions:

"les entiers naturels x ne sont pas tous des multiples de 5"

"il existe au moins un entier naturel x qui n'est pas un multiple de 5".

Ces deux propositions sont vraies.

20.4. Règles concernant les symboles: $\exists x \in E, \forall x \in E$.

Les symboles $\exists x \in E, \forall x \in E$, obéissent à des règles analogues à celles qui régissent l'utilisation des symboles $\exists x, \forall x$. (cf. chapitre 16).

De la même manière, les lois logiques du calcul des prédicats peuvent être étendues à des expressions contenant $\exists x \in E, \forall x \in E$. En particulier nous noterons les propositions vraies suivantes:

$$20.4.1. (\forall x \in E, A(x) \text{ et } B(x)) \iff [(\forall x \in E, A(x)) \text{ et } (\forall x \in E, B(x))]$$

$$20.4.2. [(\forall x \in E, A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, B(x))] \Rightarrow (\forall x \in E, A(x) \text{ ou } B(x))$$

$$20.4.3. (\exists x \in E, A(x) \text{ ou } B(x)) \iff [(\exists x \in E, A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, B(x))]$$

$$20.4.4. (\exists x \in E, A(x) \text{ et } B(x)) \Rightarrow [(\exists x \in E, A(x)) \text{ et } (\exists x \in E, B(x))]$$

Exemples.

1^o) Considérons l'ensemble: $E = \{2; 4; 8\}$ et les fonctions propositionnelles:

$$A(x) : 2 \mid x$$

$$B(x) : x^3 \geq 8$$

Il est clair que la proposition:

$(\forall x \in E, 2 \mid x \text{ et } x^3 \geq 8) \iff (\forall x \in E, 2 \mid x \text{ et } \forall x \in E, x^3 \geq 8)$
est vraie, les deux membres de cette équivalence logique étant des propositions vraies.

2^o) Soit E l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et les fonctions propositionnelles:

$$A(x) : 3 \mid x$$

$$B(x) : 6 \mid x$$

La proposition:

$[(\forall x \in E, 3 \mid x) \text{ ou } (\forall x \in E, 6 \mid x)] \Rightarrow (\forall x \in E, 3 \mid x \text{ ou } 6 \mid x)$
est vraie, les deux membres de cette implication étant des propo-

sitions vraies.

Dans ce cas, l'implication réciproque:

$(\forall x \in E, 3 \mid x \text{ ou } 6 \mid x) \Rightarrow [(\forall x \in E, 3 \mid x) \text{ ou } (\forall x \in E, 6 \mid x)]$
est elle aussi vraie.

Dans cet exemple, l'implication réciproque de 20.4.2 est une proposition vraie.

3°) $\mathbb{N}$ est notre référentiel.

Soit les fonctions propositionnelles: $A(x) : 2 \mid x$

$B(x) : 2 \mid (x + 1)$

La proposition:

$[(\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid (x+1))] \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid x \text{ ou } 2 \mid (x+1))$
est vraie, le premier membre de cette implication étant une proposition fausse. En effet, puisque 2 ne divise pas 3, $(\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid x)$ est une proposition fausse; de même, puisque 2 ne divise pas $(6+1)$, $(\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid (x+1))$ est une proposition fausse. Notons que le second membre de notre implication est une proposition vraie, puisque l'un des deux nombres x , $(x+1)$, est nécessairement pair.

Dans ce cas, l'implication réciproque:

$(\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid x \text{ ou } 2 \mid (x+1)) \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{N}, 2 \mid (x+1))]$
est une proposition fausse, son premier membre étant vrai et le second faux.

Nous avons ici un exemple pour lequel l'implication réciproque de 20.4.2 est fausse.

4°) Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ et les fonctions propositionnelles:

$A(x) : 5 \mid x$

$B(x) : x < 3$

La proposition:

$(\exists x \in \mathbb{N}, 5 \mid x \text{ ou } x < 3) \Leftrightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, 5 \mid x) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{N}, x < 3)]$
est vraie, les deux membres de cette équivalence logique étant des propositions vraies.

5°) Étant donné l'ensemble $\mathbb{N}$ et les fonctions propositionnelles:

$A(x) : 4 \mid x$

$B(x) : 5 \mid x$

La proposition:

$(\exists x \in \mathbb{N}, 4 \mid x \text{ et } 5 \mid x) \Rightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, 4 \mid x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, 5 \mid x)]$
est vraie. Il en est de même de l'implication réciproque:

$(\exists x \in \mathbb{N}, 4 \mid x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, 5 \mid x) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, 4 \mid x \text{ et } 5 \mid x)$

Il suffit de donner à x la valeur 20 pour s'assurer de la vérité

des deux membres de cette dernière implication.

6°) Soit $\mathbb{N}$ le référentiel et les deux fonctions propositionnelles:

$$A(x) : 2 \mid x$$

$$B(x) : 2 \mid (x+1)$$

La proposition:

$$(\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid x \text{ et } 2 \mid (x+1)) \Rightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid (x+1))]$$

est vraie puisque le premier membre de l'implication est faux.

En effet, un entier naturel ne peut pas être à la fois pair et impair.

Par contre, la proposition:

$$[(\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid (x+1))] \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, 2 \mid x \text{ et } 2 \mid (x+1))$$

est fausse; le second membre est faux mais le premier est vrai puisqu'il exprime, en fait, l'existence dans $\mathbb{N}$ d'un nombre pair et l'existence dans $\mathbb{N}$ d'un nombre impair, sans exiger, pour autant que ce soit le même.

E X E R C I C E S

E.20.1.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, ((x \leq 25) \vee (x \mid 36))]$

E.20.2.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, (x > 5 \Rightarrow x \mid 40)]$

E.20.3.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, (x^2 - 12x + 27 \leq 0 \text{ et } (2 \mid x \text{ ou } \forall x \in \mathbb{N}))]$

E.20.4.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, ((x \geq 17 \text{ ou } x \leq 9) \Rightarrow x \leq 28)]$

E.20.5.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, (x \mid 40 \text{ ou } x \leq 5)]$

E.20.6.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, (x \geq 17 \text{ ou } x \leq 9) \Rightarrow ((x \leq 28) \vee (x^2 < 230))]$

E.20.7.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, ((4 \mid x \Rightarrow 2 \mid x) \Rightarrow x^2 \leq 1111)]$

E.20.8.

Ecrire, en utilisant le symbole $\forall x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\exists x \in \mathbb{N}, \text{non}(x > 5 \text{ et } \text{non}(x \mid 40))]$

E.20.9.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} [\forall x \in \mathbb{N}, (3(x + 1) < 2x \Rightarrow 6 \mid x)]$

E.20.10.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, (\text{non}(\sqrt{x} < 1729 \text{ et } 3|x) \text{ ou } x^2 + x + 8 < 0) \right]$

E.20.11.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, ((x^4 + 5x^2 - 3x - 3 \Rightarrow x^3 \leq 1000) \text{ ou } x < (x + 1)) \right]$

E.20.12.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, ((x^2 - 5x + 6 \leq 0) \text{ W } (x^3 > 86 \text{ et } 7|(x + 1))) \right]$

E.20.13.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, (x^2 - 5x + 6 \leq 0 \text{ ou } (x^3 > 86 \text{ W } 7|(x + 1))) \right]$

E.20.14.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, (x + 4 \leq 3x \Leftrightarrow (2x + 1) | 14) \right]$

E.20.15.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, (x \leq 41 \text{ et } \text{non}(x | 186 \text{ ou } 3|x^2)) \right]$

E.20.16.

Ecrire, en utilisant le symbole $\exists x \in \mathbb{N}$, la proposition:
 $\text{non} \left[\forall x \in \mathbb{N}, (x^2 + 2x + 41 > 0 \Rightarrow x - 27 - x^2 > 0) \right]$

E.20.17.

Soit l'implication:

$$\left[(\forall x \in \mathbb{N}, x^2 - 9x + 14 \geq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 6) \right] \\ \Rightarrow \left[\forall x \in \mathbb{N}, (x^2 - 9x + 14 \geq 0 \text{ ou } 3 \leq x \leq 6) \right]$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

E.20.18.

Soit l'implication:

$$\begin{aligned} & [(\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + x + 13 > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{N}, x \mid 21)] \\ & \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{N}, (x^2 + x + 13 > 0 \text{ ou } x \mid 21)] \end{aligned}$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

E.20.19.

Soit l'implication:

$$\begin{aligned} & [(\forall x \in \mathbb{N}, x^2 - 5x + 6 < 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{N}, x \mid 8)] \\ & \Rightarrow [\forall x \in \mathbb{N}, (x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ ou } x \mid 8)] \end{aligned}$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

E.20.20.

Soit l'implication:

$$\begin{aligned} & [\exists x \in \mathbb{N}, (x^2 < 100 \text{ et } x > 5)] \\ & \Rightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 100) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, x > 5)] \end{aligned}$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

E.20.21.

Soit l'implication:

$$\begin{aligned} & [\exists x \in \mathbb{N}, (4 \mid x \text{ et } x \text{ premier})] \\ & \Rightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, 4 \mid x) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, x \text{ premier})] \end{aligned}$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

E.20.22.

Soit l'implication:

$$\begin{aligned} & [\exists x \in \mathbb{N}, (x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ et } x^2 \geq 31)] \\ & \Rightarrow [(\exists x \in \mathbb{N}, x^2 + 4x + 3 = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 31)] \end{aligned}$$

Est-elle une proposition vraie?

L'implication réciproque de cette implication est-elle une proposition vraie?

21 - INCLUSION . PARTIES D ' UN ENSEMBLE

21.1. Relation d'inclusion.

A) E, A, étant deux ensembles donnés, en utilisant la relation d'appartenance et l'implication, nous pouvons écrire la proposition:

$$21.1.1. \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$$

Nous la désignerons par $A \subset E$ que nous lirons: "A est inclus dans E".

En résumé:

$$21.1.2. \quad A \subset E \text{ désigne la proposition } \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$$

De ce fait, l'équivalence logique

$$21.1.3. \quad A \subset E \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$$

est une proposition vraie.

$A \subset E$ est une relation appelée relation d'inclusion.

Intuitivement, la proposition 21.1.1 signifie que tout élément de l'ensemble A est aussi un élément de l'ensemble E, c'est à dire que l'ensemble A est, en quelque sorte, "contenu" dans l'ensemble E. C'est cette dernière idée qui est exprimée par la relation $A \subset E$.

Exemple.

$$\begin{aligned} \text{Soit les ensembles:} \quad E &= \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \} \\ A &= \{ 5; 6; 2 \} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la proposition 21.1.1 est vraie. De ce fait, d'après 21.1.2, nous pouvons dire:

$A \subset E$ est une proposition vraie
soit encore:

$$\{ 5; 6; 2 \} \subset \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$$

est une proposition vraie.

B) Soit E un ensemble quelconque.

En remplaçant P par $x \in E$ dans 6.27.1, nous obtenons, d'après L₂, l'expression vraie:

$$21.1.4. \quad \forall x(x \in E \Rightarrow x \in E)$$

c'est à dire: $E \subset E$

En définitive, nous pouvons affirmer que tout ensemble est inclus dans lui-même, ce qui peut être noté symboliquement:

21.1.5. $\forall E, E \subset E$

Cette proposition exprime une propriété de l'inclusion communément appelée réflexivité.

C) E, A, étant deux ensembles donnés, lorsque la proposition 21.1.1 est vraie, il peut se faire que la proposition:

21.1.6. $\forall x(x \in E \Rightarrow x \in A)$

soit vraie elle aussi. Dans ce cas, nous avons la proposition vraie:

21.1.7. $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$ et $\forall x(x \in E \Rightarrow x \in A)$

D'après 16.7.14, R2 puis R1,

21.1.8. $\forall x[(x \in A \Rightarrow x \in E) \text{ et } (x \in E \Rightarrow x \in A)]$

est encore une proposition vraie.

En utilisant 6.23.1 et L2, puis en tenant compte de R3, nous déduisons de 21.1.8 la proposition vraie:

21.1.9. $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in E)$

D'après 19.3.1, 21.1.9 exprime l'égalité des deux ensembles A, E.
Exemple.

Considérons les ensembles:

$$E = \{a; c; d; e; b\}$$

$$A = \{b; d; c; a; e\}$$

Dans ce cas, la proposition 21.1.1 est vraie et nous pouvons écrire: $A \subset E$; or, la proposition 21.1.6 est vraie; il en résulte, d'après ce qui précède que nous pouvons écrire:

$$\{a; c; d; e; b\} = \{b; d; c; a; e\}$$

D) E, A, étant des ensembles donnés, lorsque la proposition 21.1.1 est vraie, il est possible que la proposition 21.1.6 soit fausse. Sa négation est alors vraie et en tenant compte de 21.1.2, nous pouvons écrire la proposition vraie suivante

21.1.10. $A \subset E$ et non $(E \subset A)$

Nous exprimons ce fait en énonçant: "A est strictement inclus dans E".

Remarque.

Certains auteurs notent l'inclusion en utilisant le symbole $\subseteq$

et réservent le symbole $\subset$ pour traduire l'inclusion au sens strict.

Exemple.

Soit les ensembles: $E = \{s; u; v; t; w\}$, $A = \{t; s; w\}$

Dans ce cas, nous pouvons écrire:

$$A \subset E \text{ et non}(E \subset A)$$

E) Soit A, E, deux ensembles donnés.

En remplaçant P par $(x \in A)$ et Q par $(x \in E)$ dans 8.41.11, nous obtenons, d'après L2, la proposition vraie:

$$21.1.11. \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in E))$$

En remplaçant dans 16.8.31,

$$Ax \text{ par } (x \in A \Rightarrow x \in E)$$

$$Bx \text{ par } (x \in A \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in E))$$

nous obtenons, d'après R2, une implication vraie dont le premier membre est 21.1.11 et dont le second membre est:

$$21.1.12. \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E) \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in E))$$

La proposition 21.1.11 étant vraie, 21.1.12 est aussi une proposition vraie qui, d'après R1, et compte tenu de 21.1.2, s'écrit:

$$21.1.13. \quad A \subset E \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in E))$$

21.2. Inclusion et ensembles définis en compréhension.

A) Donnons nous un ensemble E et une fonction propositionnelle B(x). D'après AX4, l'ensemble $\{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$ existe et est unique.

$$21.2.1. \quad (x \in E \text{ et } B(x)) \Leftrightarrow x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$$

L'expression 21.2.1 est ^{une} expression vraie; d'après 6.28.2 et L2, la proposition:

$$\forall x(x \in E \text{ et } B(x)) \Rightarrow x \in E$$

est une proposition vraie.

En tenant compte de 21.2.1, d'après R3, nous obtenons:

$$21.2.2. \quad \forall x(x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\} \Rightarrow x \in E$$

Si nous appelons A l'ensemble $\{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$, 21.2.2 s'écrit $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$ soit encore $A \subset E$.

En résumé:

21.2.3. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } B(x)\}$ alors $A \subset E$

Exemple.

Soit $E = \mathbb{N}$ et la fonction propositionnelle $B(x): x < 7$.

L'ensemble $A = \{x \mid x \in E \text{ et } x < 7\}$ n'est autre que l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Nous avons effectivement $A \subset \mathbb{N}$.

B) Conservons les données du paragraphe 21.2, A.

D'après L2, 8.41.3 nous permet d'écrire la proposition vraie:

21.2.4. $\forall x [x \in E \Rightarrow [(x \in E \text{ et } B(x)) \Leftrightarrow B(x)]]$

En tenant compte de 20.2.3 et de R2, 21.2.4 est logiquement équivalente à:

21.2.5. $\forall x \in E, [(x \in E \text{ et } B(x)) \Leftrightarrow B(x)]$

qui est une proposition vraie d'après R1.

Nous en déduisons, en utilisant 21.2.1 et R3, la proposition vraie:

21.2.6. $\forall x \in E, [x \in \{x \mid x \in E \text{ et } B(x)\} \Leftrightarrow B(x)]$

En appelant ensuite A l'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } B(x)\}$, 21.2.6 s'écrit: $\forall x \in E, (x \in A \Leftrightarrow B(x))$.

En résumé:

21.2.7. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } B(x)\}$ alors $\forall x \in E, (x \in A \Leftrightarrow B(x))$

21.3. Sous-ensembles. Parties.

Soit deux ensembles E, A.

Nous dirons que A est un sous-ensemble de E ou est une partie de E si et seulement si A est inclus dans E.

Remarquons que d'après 21.1.5, E est un sous-ensemble de E, ou encore, que E est une partie de E.

Exemple.

Les ensembles: $\{1; 3; 5\}$, $\{2; 7\}$, $\{3\}$,
 $\{1; 4; 3; 2; 5; 7; 6\}$

sont des sous-ensembles ou des parties de l'ensemble:

$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

21.4. Inclusion et diagrammes.

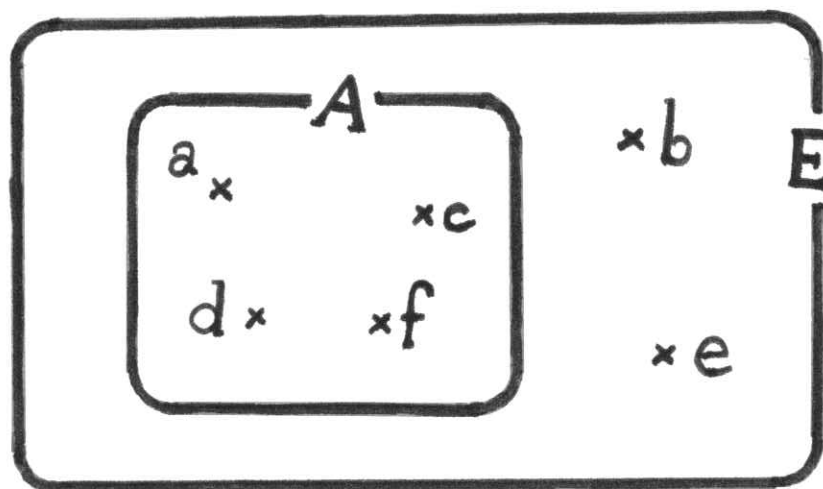
E, A, étant des ensembles donnés tels que A soit inclus dans

E, pour représenter schématiquement cette relation d'inclusion nous pouvons utiliser les diagrammes de VENN.

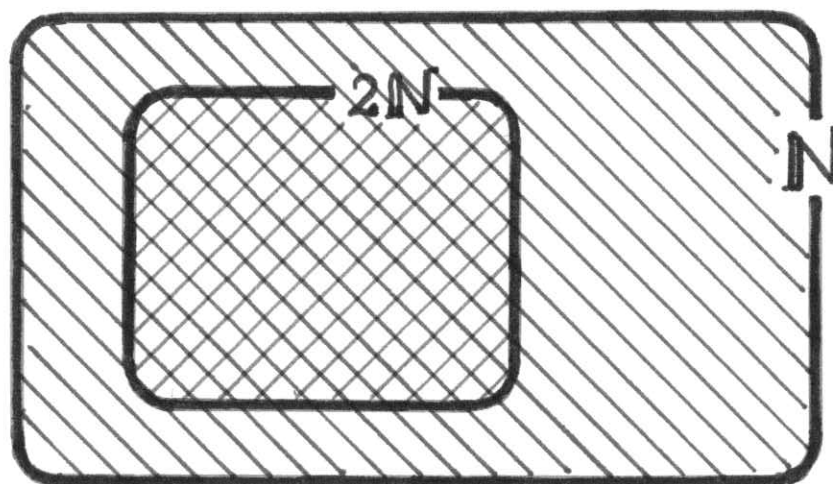
Exemples.

1^o) Soit les ensembles $A = \{ a; c; d; f \}$,
 $E = \{ a; b; c; d; e; f \}$.

La relation : $\{ a; c; d; f \} \subset \{ a; b; c; d; e; f \}$
 peut être représentée par le schéma suivant:



2^o) En désignant par $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs, la relation $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ peut-être représentée par le diagramme suivant:



21.5. Lien entre inclusion et implication.

Donnons nous un ensemble et deux fonctions propositionnelles $C(x)$, $D(x)$.

D'après 21.1.3, nous pouvons écrire l'équivalence logique vraie ayant pour premier membre:

$$(\alpha) \quad \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\} \subset \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$$

et pour second membre:

$$(\beta) \quad \forall x [x \in \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\} \Rightarrow x \in \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}]$$

En tenant compte de 21.2.1 et R_3 , nous pouvons, dans cette équivalence logique, remplacer (β) par:

$$\forall x [(x \in E \text{ et } C(x)) \Rightarrow (x \in E \text{ et } D(x))]$$

Désignons par A l'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et par B l'ensemble $\{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$; le premier membre (α) prend alors la forme $A \subset B$.

En résumé:

$$\begin{aligned} 21.5.1. \quad & \text{Si } A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\} \text{ et } B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\} \\ & \text{alors } A \subset B \iff \forall x [(x \in E \text{ et } C(x)) \Rightarrow (x \in E \text{ et } D(x))] \end{aligned}$$

La loi logique 8.41.5 et la règle L_2 nous permettent d'écrire l'équivalence logique vraie:

$$21.5.2. \quad [(x \in E \text{ et } C(x)) \Rightarrow (x \in E \text{ et } D(x))] \iff [x \in E \Rightarrow (C(x) \Rightarrow D(x))]$$

En tenant compte de 21.5.2 et de R_3 , nous pouvons remplacer le second membre de l'équivalence logique figurant dans 21.5.1 par le second membre de 21.5.2; nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} 21.5.3. \quad & \text{Si } A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\} \text{ et } B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\} \\ & \text{alors } A \subset B \iff \forall x [x \in E \Rightarrow (C(x) \Rightarrow D(x))] \end{aligned}$$

Soit encore, d'après 20.2.3 et R_3 :

$$\begin{aligned} 21.5.4. \quad & \text{Si } A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\} \text{ et } B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\} \\ & \text{alors } A \subset B \iff \forall x \in E, (C(x) \Rightarrow D(x)) \end{aligned}$$

Par abus de langage, on dit quelquefois que "l'implication $(C(x) \Rightarrow D(x))$ est vraie sur E ".

Exemples.

1°) Soit $E = \mathbb{N}$ et les parties de $\mathbb{N}$ suivantes:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 6 \mid x\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 3 \mid x\}$$

Dans ce cas, 21.5.4 s'écrit:

$$A \subset B \iff \forall x \in \mathbb{N} (6 \mid x \Rightarrow 3 \mid x)$$

Comme la proposition: $\forall x \in \mathbb{N} (6 \mid x \Rightarrow 3 \mid x)$ est vraie, nous pouvons affirmer que A est inclus dans B.

2°) Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 6\}$ et les sous-ensembles de E:

$$A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \geq 4\}$$

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } 2 \mid x\}$$

Dans ce cas, $A = \{4; 6\}$ et $B = \{2; 4; 6\}$ et de ce fait, nous avons $A \subset B$.

D'après 21.5.4, $A \subset B \iff \forall x \in E (x \geq 4 \Rightarrow 2 \mid x)$

Il en résulte que: $\forall x \in E (x \geq 4 \Rightarrow 2 \mid x)$ est une proposition vraie.

21.6. Négation de l'inclusion.

Soit E, A, deux ensembles donnés.

La négation de $A \subset E$ se note $A \not\subset E$ et se lit: "A n'est pas inclus dans E". En tenant compte de 21.1.2, nous énonçons:

21.6.1. $A \not\subset E$ désigne la proposition $\text{non}[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)]$

De ce fait, l'équivalence logique suivante est vraie;

21.6.2. $A \not\subset E \iff \text{non}[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)]$

A) D'après 16.8.10 et R_2 ,

21.6.3. $\text{non}[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)] \iff \exists x, \text{non}(x \in A \Rightarrow x \in E)$
est une proposition vraie.

D'autre part, en appliquant L_2 et 6.13.1, nous pouvons écrire:

$$\text{non}(x \in A \Rightarrow x \in E) \iff [\text{non}(x \in E) \text{ et } x \in A]$$

soit encore:

21.6.4. $\text{non}(x \in A \Rightarrow x \in E) \iff (x \notin E \text{ et } x \in A)$

En appliquant R_3 à 21.6.3 et 21.6.4, nous en déduisons la proposition vraie:

21.6.5. $\text{non}[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)] \iff \exists x(x \notin E \text{ et } x \in A)$

qui d'après 21.6.1 peut s'écrire:

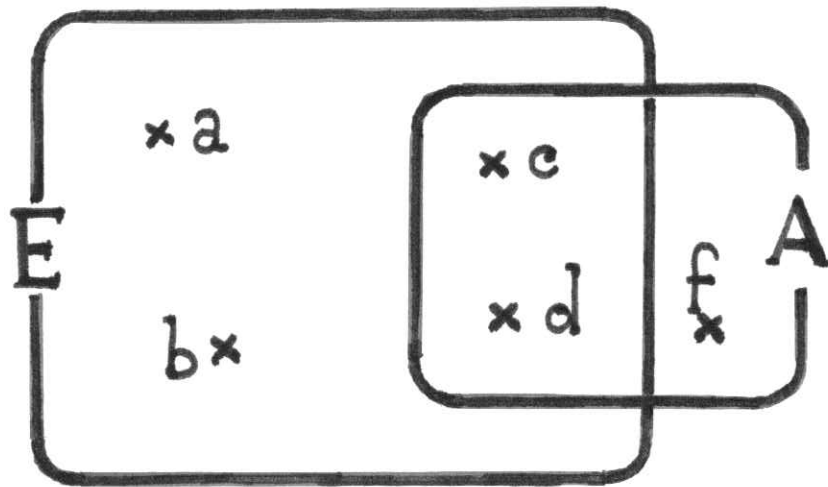
$$21.6.6. \quad A \not\subset E \iff \exists x (x \notin E \text{ et } x \in A)$$

Cette proposition exprime le fait que A n'est pas inclus dans E si et seulement si il existe au moins un élément de A qui n'est pas élément de E.

Exemple.

Soit les ensembles $E = \{a; b; c; d\}$, $A = \{c; d; f\}$
 Nous notons que $(f \in A \text{ et } f \notin E)$ est une proposition vraie. Il en résulte que A n'est pas inclus dans E.

Il est possible de schématiser cette situation de la manière suivante:



B) Supposons maintenant que:

$$A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$$

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$$

$C(x)$, $D(x)$, étant des fonctions propositionnelles données. D'après la loi, logique 6.37.2 et L_2 , 21.5.4 est logiquement équivalente à la proposition:

$$A \not\subset B \iff \text{non}[\forall x \in E (C(x) \Rightarrow D(x))]$$

soit encore en utilisant 20.3.3, R_2 , puis R_3 :

$$21.6.7 \quad A \not\subset B \iff \exists x \in E, \text{non}(C(x) \Rightarrow D(x))$$

L_2 et 6.13.1 nous permettent d'écrire:

$$21.6.8. \quad \text{non}(C(x) \Rightarrow D(x)) \iff (\text{non } D(x) \text{ et } C(x))$$

En appliquant R_3 à 21.6.7 et 21.6.8, nous en déduisons que:

21.6.9. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors $A \not\subset B \iff \exists x \in E, (C(x) \text{ et non } D(x))$

Exemple.

Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et les parties de E suivantes:

$$A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \geq 4\}$$

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } 2 \mid x\}$$

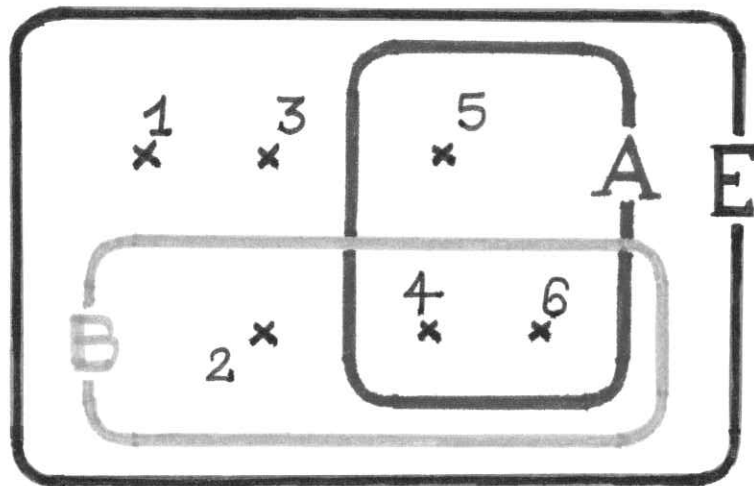
Nous avons alors: $A = \{4; 5; 6\}$, $B = \{2; 4; 6\}$; A n'est donc pas inclus dans B .

Dans ce cas, 21.6.9 s'écrit:

$$A \not\subset B \iff \exists x \in E, (x \geq 4 \text{ et non } (2 \mid x))$$

Effectivement, 5 est un élément de A puisque $5 \geq 4$, mais il n'est pas un élément de B puisque 2 ne divise pas 5.

Nous pouvons illustrer ce cas par le schéma suivant:



21.7. Retour sur l'égalité de deux ensembles.

A) Soit A, B , deux ensembles donnés.

D'après 19.3.1, nous avons:

$$A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$$

Soit encore, en appliquant 6.23.1, L_2 puis R_3 :

$$21.7.1. \quad A = B \iff \forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

La proposition 16.7.14 et R_2 nous permettent d'écrire que la proposition:

$$\forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

est logiquement équivalente à la proposition:

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

D'après R_3 , cette dernière proposition peut être substituée au second membre de 21.7.1 et nous obtenons:

$$A = B \iff [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

c'est à dire en tenant compte de 21.1.2 :

$$21.7.2. \quad A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Remarque.

Cette équivalence logique nous permet d'exprimer AX2 (chapitre 19, paragraphe 3) de la façon suivante:

$$\forall E, \forall F, (E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E))$$

B) D'après 6.37.2, L2 et R1, nous pouvons prendre la négation des deux membres de 21.7.2 et nous obtenons:

$$21.7.3. \quad A \neq B \iff \text{non}(A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

En appliquant 6.12.2, L2 et R3, nous pouvons remplacer le second membre de 21.7.3 par:

$$(\text{non}(A \subset B)) \text{ ou } (\text{non}(B \subset A))$$

c'est à dire par:

$$(A \not\subset B) \text{ ou } (B \not\subset A)$$

En définitive, nous obtenons:

$$21.7.4. \quad A \neq B \iff (A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A)$$

C) Soit A, E, deux ensembles donnés.

La loi logique 6.31.1 et L2 nous permettent d'écrire une équivalence logique vraie ayant

$$\text{pour premier membre: } A \neq E \iff (A \not\subset E \text{ ou } E \not\subset A)$$

$$\text{pour second membre: } (A \subset E \text{ et } A \neq E) \iff (A \subset E \text{ et } (A \not\subset E \text{ ou } E \not\subset A))$$

Le premier membre étant vrai d'après 21.7.4, en utilisant R1, nous obtenons la proposition vraie:

$$21.7.5. \quad (A \subset E \text{ et } A \neq E) \iff (A \subset E \text{ et } (A \not\subset E \text{ ou } E \not\subset A))$$

En remplaçant P par $(A \subset E)$, Q par $(E \not\subset A)$ dans 8.41.6, nous obtenons, d'après L2, la proposition:

$$21.7.6. \quad (A \subset E \text{ et } (A \not\subset E \text{ ou } E \not\subset A)) \iff (A \subset E \text{ et } E \not\subset A)$$

En appliquant R3 à 21.7.5 et 21.7.6, nous en déduisons la proposition vraie

$$21.7.7. \quad (A \subset E \text{ et } A \neq E) \iff (A \subset E \text{ et } E \not\subset A)$$

D'après 6.28.2 et L2, nous avons:

$$21.7.8. \quad (E \not\subset A \text{ et } A \subset E) \implies E \not\subset A$$

Appliquons R3 à 21.7.7 et 21.7.8; il en résulte:

$$21.7.9. \quad (A \subset E \text{ et } A \neq E) \implies E \not\subset A$$

Remarque.

Nous avons vu au paragraphe 21.1. D, que la proposition 21.1.10:

$$A \subset E \text{ et non}(E \subset A)$$

soit encore: $A \subset E \text{ et } E \not\subset A$

exprimait le fait suivant:

"A est strictement inclus dans E".

En tenant compte de 21.7.7, nous pouvons dire:

$$21.7.10. \quad A \text{ est strictement inclus dans E si et seulement si} \\ A \subset E \text{ et } A \neq E$$

D) Donnons nous trois ensembles E, A, B, et deux fonctions propositionnelles C(x), D(x). Selon 21.5.4, si

$$A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\} \text{ et } B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$$

alors,

$$A \subset B \iff \forall x \in E, (C(x) \implies D(x))$$

$$B \subset A \iff \forall x \in E, (D(x) \implies C(x))$$

En considérant ces deux équivalences logiques, nous pouvons appliquer R3 à 21.7.2 pour obtenir:

$$21.7.11. \quad A = B \iff [\forall x \in E (C(x) \implies D(x)) \text{ et } \forall x \in E (D(x) \implies C(x))]$$

D'autre part, 20.4.1 et R2 nous permettent d'écrire une équivalence logique dont le second membre est celui de 21.7.11 et dont le premier membre est:

$$\forall x \in E [(C(x) \implies D(x)) \text{ et } (D(x) \implies C(x))]$$

En appliquant alors R3, nous déduisons de 21.7.11, la proposition:

$$21.7.12. \quad A = B \iff \forall x \in E [(C(x) \implies D(x)) \text{ et } (D(x) \implies C(x))]$$

En tenant compte de 6.23.1 et L2, puis en appliquant à nouveau R3, nous pouvons énoncer:

$$21.7.13. \quad \text{Si } A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\} \text{ et } B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}, \text{ alors} \\ A = B \iff \forall x \in E, (C(x) \iff D(x))$$

Exemple.

Soit $E = \{2; 14; 8; 5; 12; 3\}$ et les deux fonctions propositionnelles:

$$C(x) : x \mid 30$$

$$D(x) : x \text{ est un nombre premier}$$

Les ensembles: $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$$

sont deux parties de E , à savoir:

$$A = \{2; 3; 5\}$$

$$B = \{2; 3; 5\}$$

Ayant $A = B$, nous en déduisons que la proposition:

$$\forall x \in E (x \mid 30 \iff x \text{ est un nombre premier})$$

est vraie.

Notons que la proposition:

$$\forall x (x \mid 30 \iff x \text{ est un nombre premier})$$

est fausse. Il suffit en effet de remplacer x par 11; le premier membre est faux alors que le second membre est vrai.

Pour cette raison, et par abus de langage, on dit quelquefois que " $(x \text{ divise } 30)$ et $(x \text{ est un nombre premier})$ sont logiquement équivalentes sur E ".

E) Soit E un ensemble.

$(x = x)$ est une expression vraie d'après 13.2.a.

Remplaçons P par $(x \in E)$ et Av par $(x = x)$ dans 6.39.1; d'après L2, nous obtenons la proposition vraie:

$$21.7.14. \quad \forall x [x \in E \iff (x \in E \text{ et } x = x)]$$

En appliquant R2 à 21.2.1, nous pouvons écrire l'expression vraie:

$$21.7.15. \quad (x \in E \text{ et } x = x) \iff x \in \{x \mid x \in E \text{ et } x = x\}$$

En tenant compte de 21.7.15, nous pouvons appliquer R3 à 21.7.14; il en résulte la proposition vraie:

$$\forall x [x \in E \iff x \in \{x \mid x \in E \text{ et } x = x\}]$$

qui, d'après 19.3.1, est logiquement équivalente à:

$$E = \{x \mid x \in E \text{ et } x = x\}$$

D'après R1, nous en déduisons:

$$21.7.16. \quad E = \{x \mid x \in E \text{ et } x = x\}$$

21.8. Transitivité de l'inclusion.

Donnons nous trois ensembles A, B, C . D'après 21.1.2, $(A \subset B \text{ et } B \subset C)$ désigne la proposition:

$$21.8.1. \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } \forall x(x \in B \Rightarrow x \in C)$$

En appliquant R2 à 16.7.14, nous obtenons une équivalence logique vraie dont le premier membre est 21.8.1 et dont le second membre est:

$$\forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in C)]$$

Il en résulte que:

$$21.8.2. \quad (A \subset B \text{ et } B \subset C) \Leftrightarrow \forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in C)]$$

est une proposition vraie.

En appliquant L2 à 6.19.1, nous obtenons la proposition vraie:

$$21.8.3. \quad \forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in C)] \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

En appliquant R2 à 16.8.24, nous obtenons une implication vraie dont le premier membre est 21.8.3 et dont le second membre est:

$$21.8.4. \quad [\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in C))] \Rightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)]$$

Puisque 21.8.3 est vraie, d'après R1, 21.8.4 est aussi une proposition vraie.

En tenant compte de 21.8.2 et de 21.8.4, R3 nous permet d'écrire:

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)]$$

soit encore, d'après 21.1.3:

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

En résumé:

$$21.8.5. \quad \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ (A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

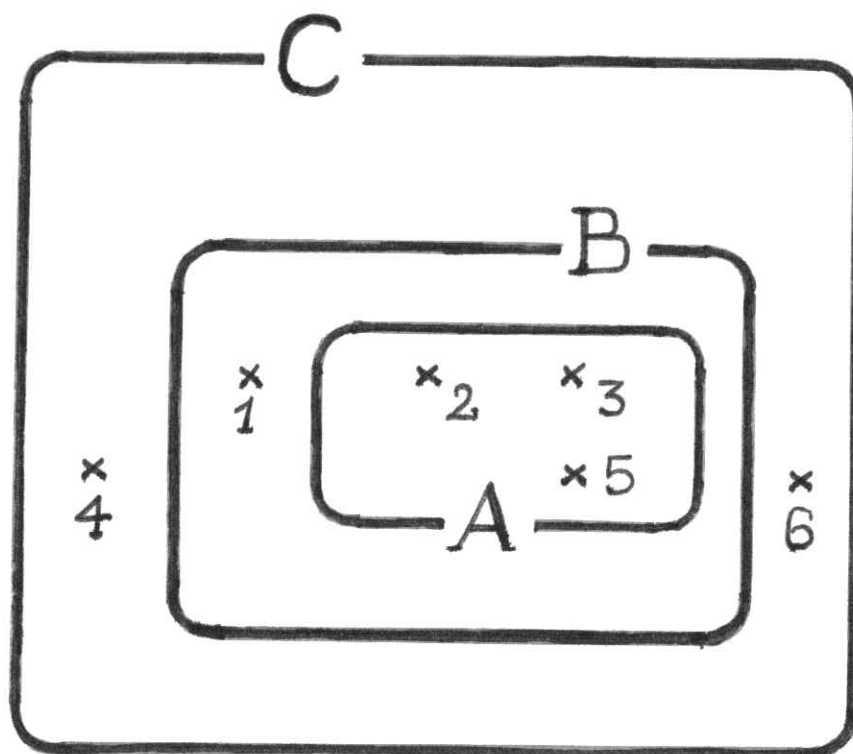
Ceci exprime une propriété de l'inclusion habituellement appelée transitivité.

Exemple.

$$\begin{aligned} \text{Soit les ensembles : } A &= \{ 2; 5; 3 \} \\ B &= \{ 1; 5; 3; 2 \} \\ C &= \{ 2; 4; 3; 5; 1; 6 \} \end{aligned}$$

$A \subset B, B \subset C, A \subset C$, sont des propositions vraies et nous vérifions que 21.8.5 est une proposition vraie.

Dans ce cas, nous pouvons illustrer la situation par le diagramme suivant.



21.9. Fonctions propositionnelles et ensembles.

A) Etant donnée une fonction propositionnelle $A(x)$ à une seule variable, nous avons noté (19.7 remarque 1°) que, en général, nous ne sommes pas assurés de l'existence d'un ensemble F dont les éléments sont tous les objets qui donnent une proposition vraie quand ils remplacent x dans $A(x)$.

Cependant, il peut se faire qu'un axiome ou un théorème affirme l'existence et l'unicité d'un tel ensemble. Dans ce cas, F sera noté:

$$\{x | A(x)\}$$

Il est clair que:

$$21.9.1. \quad x \in \{x | A(x)\} \iff A(x)$$

est une expression vraie, et que:

$$21.9.2. \quad \forall x [x \in \{x | A(x)\} \iff A(x)]$$

En particulier, E étant un ensemble donné,

$$\forall x [x \in \{x | x \in E\} \iff x \in E]$$

et d'après 19.3.1, nous en déduisons la proposition vraie:

$$21.9.3. \quad \text{Quel que soit l'ensemble } E \\ \{x | x \in E\} = E$$

B) Soit $A(x)$, $B(x)$, deux fonctions propositionnelles telles que:

$$1^\circ) A(x) \iff B(x)$$

2°) L'ensemble $\{x | A(x)\}$ existe et est unique.

3°) L'ensemble $\{x | B(x)\}$ existe et est unique.

D'après 21.9.1, nous avons:

$$A(x) \iff x \in \{x | A(x)\}$$

$$B(x) \iff x \in \{x | B(x)\}$$

En appliquant 8.41.14 aux trois équivalences logiques précédentes, L2 et R1 nous permettent d'écrire l'expression vraie:

$$21.9.4. \quad [A(x) \iff B(x)] \iff [x \in \{x | A(x)\} \iff x \in \{x | B(x)\}]$$

et la proposition vraie:

$$\forall x [(A(x) \iff B(x)) \iff (x \in \{x | A(x)\} \iff x \in \{x | B(x)\})]$$

En lui appliquant 16.8.31 et R1, nous obtenons:

$$21.9.5. \quad \forall x [A(x) \iff B(x)] \iff \forall x [x \in \{x | A(x)\} \iff x \in \{x | B(x)\}]$$

D'autre part, en tenant compte de 19.3.1 et de R2, il vient:

$$21.9.6. \quad [\forall x (x \in \{x | A(x)\} \iff x \in \{x | B(x)\})] \iff [\{x | A(x)\} = \{x | B(x)\}]$$

En appliquant R3 à 21.9.5 et 21.9.6, nous en déduisons:

21.9.7. Si $\{x | A(x)\}$ et $\{x | B(x)\}$ existent, alors:

$$[\forall x (A(x) \iff B(x))] \iff \{x | A(x)\} = \{x | B(x)\}$$

Nous en déduisons la règle suivante:

R8 / Si les ensembles $\{x | A(x)\}$ et $\{x | B(x)\}$ existent,
 si $\forall (x) [A(x) \iff B(x)]$ est une proposition vraie,
 si E désigne l'ensemble $\{x | A(x)\}$,
 alors, en remplaçant $A(x)$ par $B(x)$ dans $E = \{x | A(x)\}$ on obtient la
 proposition vraie : $E = \{x | B(x)\}$.

C) En utilisant 20.2.5 et R2, nous obtenons la proposition vraie:

$$21.9.8. \quad \forall x [A(x) \iff B(x)] \implies \forall x \in E, [A(x) \iff B(x)]$$

Nous pouvons alors écrire, grâce à R2 et 21.7.13,

$$21.9.9. \quad [\{x | x \in E \text{ et } A(x)\} = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}] \iff \forall x \in E [A(x) \iff B(x)]$$

En appliquant R3 à 21.9.8 et 21.9.9, nous en déduisons:

$$21.9.10. \quad [\forall x (A(x) \iff B(x))] \implies [\{x | x \in E \text{ et } A(x)\} = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}]$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante:

R9 : Si $\forall x [A(x) \iff B(x)]$ est une proposition vraie,
 si C désigne l'ensemble $\{x | x \in E \text{ et } A(x)\}$,
 alors, en remplaçant A(x) par B(x) dans $C = \{x | x \in E \text{ et } A(x)\}$ on
 obtient la proposition vraie : $C = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$.

E X E R C I C E S

E.21.1.

On donne les ensembles

$$A = \{ 3; 7; 1; 2; 8; 5 \}$$

$$B = \{ 7; 4; 2; \sqrt{9}; 6 \}$$

$$C = \{ 5; 6 \}$$

$$D = \{ 3; \sqrt{4}; 2^3 \}$$

$$E = \{ \sqrt{36}; 13; \sqrt[3]{125} \}$$

$$F = \{ 3; 2^2; 2 \times 3; 4 + 3 \}$$

Ecrire toutes les relations d'inclusion vraies concernant ces ensembles.

E.21.2.

$\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, on considère les ensembles:

$$A = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 12 \}$$

$$B = \{ x | x \in A \text{ et } x | 12 \}$$

$$C = \{ 3; 6; 12 \}$$

$$D = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x | 12 \}$$

$$E = \{ x | x \in D \text{ et } x^2 \in B \}$$

$$F = \{ x | x \in A \text{ et } 6x^2 - 5x + 1 = 0 \}$$

Ecrire toutes les relations d'inclusion vraies concernant ces ensembles.

E.21.3.

Représenter schématiquement les relations d'inclusion de l'exercice E.21.2, en utilisant des diagrammes de Venn.

E.21.4.

Soit les ensembles:

$$E = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \}$$

$$A = \{ x | x \in E \text{ et } x \geq 3 \}$$

$$B = \{ x | x \in E \text{ et } x^2 \in E \}$$

$$C = \{ x | x \in E \text{ et } (x | 10 \text{ et } x | 6) \}$$

$$D = \{ x | x \in E \text{ et } (x^2 - 16)(x^2 - 10x + 21) = 0 \}$$

Ecrire toutes les relations d'inclusion vraies concernant ces ensembles.

E.21.5.

Schématiser les relations trouvées à l'exercice E.21.4, à l'aide de diagrammes.

E.21.6.

En considérant les fonctions propositionnelles servant à définir les ensembles A, B, C, D, de l'exercice E.21.4, écrire toutes les implications "vraies sur E".

E.21.7.

Soit les ensembles:

$$A = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \}$$

$$B = \{ x | x \in A \text{ et } x | 12 \}$$

$$C = \{ 1; 2; 3 \}$$

$$D = \{ 2; 4; 6; 8; 10; 12 \}$$

$$E = \{ 3; 6; 9; 12 \}$$

$$F = \{ x | x \in A \text{ et } x \geq 4 \}$$

$$G = \{ 3; 6; 12 \}$$

$$H = \{ 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 \}$$

$$I = \{ 1; 2; 3; 6; 9; 12 \}$$

$$J = \{ x | x \in B \text{ et } x < 4 \}$$

$$K = \{ x | x \in E \text{ et } x | 12 \}$$

Quelles sont, parmi les propositions suivantes, celles qui sont vraies?

$$\forall x \in A, (x \in B \iff x | 12)$$

$$\forall x \in A, (x \in C \iff x^2 \in A)$$

$$\forall x \in A, (x \in D \iff (4 | x \text{ ou } (x + 1) | 9))$$

$$\forall x \in A, (x \in E \iff 3 | (x + 1))$$

$$\forall x \in A, (x \in F \iff x^2 \notin A)$$

$$\forall x \in A, (x \in G \iff (x | 12 \text{ et } 3 | x))$$

$$\forall x \in A, (x \in H \iff x > 4)$$

$$\forall x \in A, (x \in I \iff (x^2 \in A \text{ ou } 3 | x))$$

$$\forall x \in B, (x \in J \iff x \leq 4)$$

$$\forall x \in E, (x \in K \iff x | 12)$$

$$\forall x \in C, (x \in J \iff x^2 \in C)$$

$$\forall x \in I, (x \in C \iff x | 6)$$

E.21.8.

On considère les ensembles A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, définis à l'exercice E.21.7. Représenter, sur une même figure, chacun de ces ensembles par un diagramme de Venn.

E.21.9.

Les ensembles considérés sont ceux de l'exercice E.21.7. Quelles sont les propositions vraies parmi les propositions suivantes:

$$\begin{aligned} G \subset I &\Leftrightarrow \forall x [(x \in A \text{ et } 3|x) \Rightarrow (x \in A \text{ et } (x^2 \in A \text{ ou } 3|x))] \\ \forall x [(x \in A \text{ et } x^2 \in A) &\Rightarrow (x \in A \text{ et } x|12)] \\ \forall x [x \in A &\Rightarrow (x^2 \in A \Rightarrow x < 4)] \\ \forall x \in A, [(x|12 \text{ et } 3|x) &\Rightarrow (x^2 \in A \text{ ou } 3|x)] \\ \forall x \in B, (x < 4 &\Rightarrow x^2 \in B) \end{aligned}$$

E.21.10.

Soit les ensembles:

$$A = \left\{ \frac{249}{83}; \frac{\sqrt{32,5} \times \sqrt{130}}{50}; \frac{221501}{31643}; \frac{47722}{23861} \right\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ et } (143x)^2 - 81796x = 122694 - 102245x\}$$

$$C = \left\{ \frac{13}{13 - \frac{13 \times 3}{13}}; \frac{\sqrt{8978}}{67} \times \frac{\sqrt{2738}}{37}; \frac{68694}{11449} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{1617}{3\sqrt{5929}} - 10; 1,3; \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{65530}}}}; \frac{\frac{72}{4}}{\frac{7}{15}}; 7; \sqrt[3]{729^2} \right\}$$

Ecrire toutes les relations d'inclusion vraies concernant ces ensembles.

E.21.11.

On donne les fonctions propositionnelles suivantes:

$(x < 23 \text{ et } 3|x)$ notée A(x)

$(x|8 \text{ ou } x^3 = 9x^2)$ notée B(x)

$(6 < x < 13 \Rightarrow x^2 | 576)$ notée C(x)

$(36|x^2 \text{ et } x^2 \leq 400)$ notée D(x)

$(2|x \text{ W } x|12)$ notée $E(x)$

F désigne l'ensemble $\{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$

En utilisant les fonctions propositionnelles précédentes,

a) écrire toutes les implications "vraies sur F".

b) écrire toutes les équivalences logiques "vraies sur F".

E.21.12.

Résoudre l'exercice précédent en remplaçant l'ensemble F par l'ensemble $G = \{1; 6; 12; 18; 24; 30; 36\}$

E.21.13.

Résoudre l'exercice précédent en remplaçant l'ensemble F par l'ensemble $H = \{1; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

Dans les chapitres 19, 20, 21, nous nous sommes efforcés de montrer au lecteur comment les résultats du calcul des propositions et du calcul des prédicats pouvaient être utilisés dans les raisonnements. Cela nous a semblé indispensable.

De ce fait, nous avons cru devoir indiquer, à chaque fois, les règles et les lois logiques utilisées. La rédaction des raisonnements s'en est trouvée alourdie. Le lecteur aura constaté de lui-même que l'accumulation des références rend la lecture pénible.

Nous estimons cependant que ces trois chapitres auront suffi au lecteur pour acquérir les "mécanismes" mis en jeu. Afin d'alléger la rédaction des chapitres suivants et de permettre au lecteur de suivre plus aisément la pensée exprimée, nous avons supprimé (sauf dans des cas exceptionnels) toutes les références concernant les règles pour ne conserver que celles relatives aux lois logiques.

22.1. Complémentaire.

A) Soit un ensemble E et A une partie donnée de E .
D'après AX4, E étant donné, il existe un ensemble unique dont les éléments sont les éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans la fonction propositionnelle $x \notin A$, et ceux-là seulement. Cet ensemble s'appelle complémentaire de A par rapport à E et nous le noterons: $\bigcup_E A$.
En résumé:

22.1.1. Si $A \subset E$, alors $\bigcup_E A = \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$

Notons que A étant une partie de E , $\bigcup_E A$ existe et est unique.

B) D'après 21.2.2, nous avons la proposition:

$$\forall x (x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\} \Rightarrow x \in E)$$

et en tenant compte de 22.1.1, puisque A est une partie de E , nous obtenons la proposition:

$$\forall x (x \in \bigcup_E A \Rightarrow x \in E)$$

qui s'écrit encore, en tenant compte de 21.1.2:

$$\bigcup_E A \subset E$$

En résumé:

$$22.1.2. \quad A \subset E \Rightarrow \bigcup_E A \subset E$$

Ceci exprime que, A étant une partie de E , son complémentaire par rapport à E est encore une partie de E .

C) En utilisant 21.2.1, nous obtenons la proposition vraie:

$$\forall x [x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)]$$

Si d'autre part nous avons $A \subset E$, dans ce cas, $\{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$ se note $\bigcup_E A$. En conclusion:

$$22.1.3. \quad A \subset E \Rightarrow \forall x [x \in \bigcup_E A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)]$$

D) D'après 22.1.1,

$$\text{si } A \subset E, \text{ alors } \bigcup_E A = \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

et d'après 21.2.7,

$$\text{si } \bigcup_E A = \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\} \text{ alors } \forall x \in E, (x \in \bigcup_E A \Leftrightarrow x \notin A)$$

En conséquence:

$$22.1.4. \quad \text{Si } A \subset E, \text{ alors } \forall x \in E, (x \in \bigcup_E A \Leftrightarrow x \notin A)$$

E) Pour exprimer qu'un ensemble B est le complémentaire de A par rapport à E , nous utiliserons la notation suivante:

$$B = \bigcup_E A$$

On rencontre chez certains auteurs les notations suivantes:

$$B = E \setminus A \quad (\text{KUROSH})$$

$$B = E - A \quad (\text{voir chapitre 24})$$

$$B = \overline{A} \quad (\text{notation utilisée en calcul des probabilités lorsque } E \text{ est donné une fois pour toutes.})$$

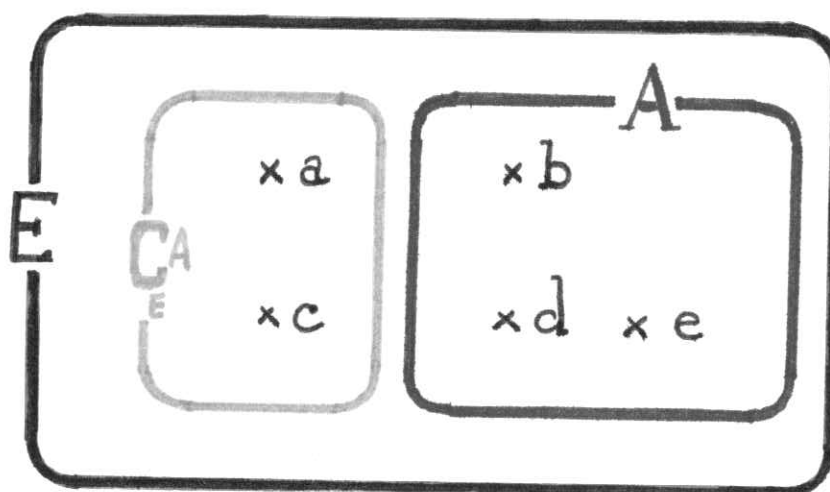
F) Exemples.

$$1^{\circ}) \text{ Soit } E = \{a, b, c, d, e\} \text{ et } A = \{b, d, e\}$$

Dans ce cas,

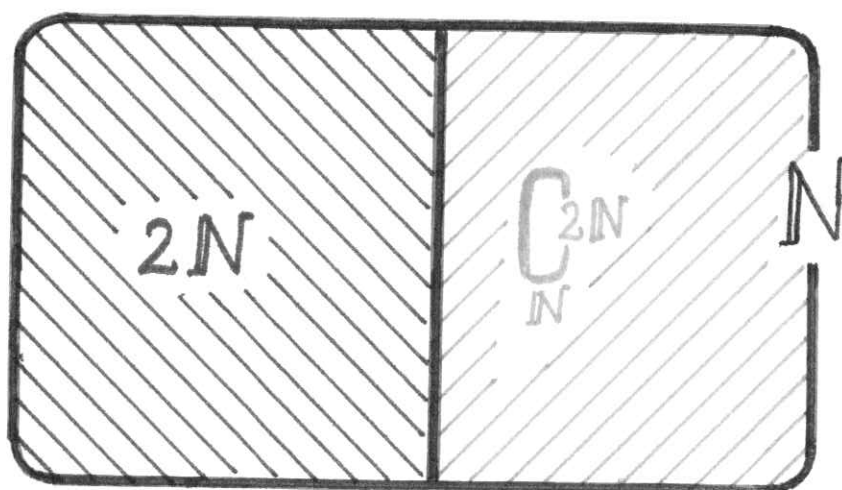
$$\bigcup_E A = \{a, c\}$$

Nous pouvons représenter ceci à l'aide du diagramme suivant.



2°) Soit $E = \mathbb{N}$ et $A = 2\mathbb{N}$.

Le complémentaire de A par rapport à E est l'ensemble des entiers naturels impairs. Dans ce cas, nous avons le diagramme suivant:



22.2. Complémentaires d'ensembles définis en compréhension.

Donnons nous un ensemble E et une fonction propositionnelle $B(x)$. L'ensemble $A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$ est une partie de E (voir le résultat numéroté 21.2.3).

En utilisant la loi logique 8.41.7, nous obtenons:

$$22.2.1. \quad [x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } B(x))] \Leftrightarrow [x \in E \text{ et non } B(x)]$$

En considérant 21.2.1, nous avons:

$$22.2.2. \quad x \in \{x | x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } B(x))\} \Leftrightarrow [x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } B(x))]$$

D'après la transitivité de l'équivalence logique, 22.2.2 et 22.2.1, nous

permettent d'écrire:

$$22.2.3. \quad x \in \{x | x \in E \text{ et } \text{non}(x \in E \text{ et } B(x))\} \iff (x \in E \text{ et } \text{non } B(x))$$

D'autre part en tenant compte de 6.37.2, 21.2.1, nous conduit à l'équivalence logique suivante:

$$\text{non}(x \in E \text{ et } B(x)) \iff \text{non}(x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\})$$

soit encore, (voir 19.4.A):

$$\text{non}(x \in E \text{ et } B(x)) \iff x \notin \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$$

Dans 22.2.3, nous pouvons remplacer " $\text{non}(x \in E \text{ et } B(x))$ " par:

$$"x \notin \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}" \quad (\text{d'après R 9})$$

et nous en déduisons la proposition vraie:

$$22.2.4. \quad \forall x [x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}\} \iff (x \in E \text{ et } \text{non } B(x))]$$

Puisque $A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$, 22.2.4 peut s'écrire:

$$\forall x [x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\} \iff (x \in E \text{ et } \text{non } B(x))]$$

et A étant de ce fait une partie de E, nous pouvons tenir compte de 22.1.1 et

$$22.2.5. \quad \text{Si } A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\} \text{ alors} \\ \forall x [x \in \bigcup_E^A \iff (x \in E \text{ et } \text{non } B(x))]$$

Exemple.

$$\text{Soit } E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$A = \{x | x \in E \text{ et } x < 5\}$$

Nous avons $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et par conséquent, $\bigcup_E^A = \{5; 6; 7\}$.

Dans ce cas, 22.2.5 s'écrit:

$$\forall x [x \in \bigcup_E^A \iff (x \in E \text{ et } x \geq 5)]$$

Effectivement, $\bigcup_E^A = \{x | x \in E \text{ et } x \geq 5\}$

22.3. Propriétés du complémentaire.

A) Soit un ensemble E et A une partie de E.

Nous savons, (voir paragraphe 22.1.B), que A étant une partie de E, $\bigcup_E^A$ est une partie de E. Nous pouvons alors envisager le complémentaire de $\bigcup_E^A$, par rapport à E, que nous noterons $\bigcap_E \bigcup_E^A$.

En remplaçant A par $\bigcup_E^A$ dans 22.1.2, nous avons:

$$\bigcup_E^A \subset E \implies \bigcap_E \bigcup_E^A \subset E$$

$\bigcap_E \bigcup_E^A$ est donc une partie de E que nous allons préciser.

En utilisant la commutativité de l'équivalence logique et de la conjonction logique, 21.1.13 permet d'écrire:

$$A \subset E \iff \forall x [x \in E \text{ et } x \in A] \iff x \in A]$$

soit encore, en considérant la négation de l'appartenance:

$$22.3.1. \quad A \subset E \iff \forall x [(x \in E \text{ et non } x \notin A) \iff x \in A]$$

En appliquant 8.41.7 puis 21.2.1, nous obtenons deux équivalences logiques:

$$[x \in E \text{ et non } x \notin A] \iff [x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } x \notin A)]$$

$$[x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } x \notin A)] \iff x \in \{x | x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } x \notin A)\}$$

qui nous donnent par transitivité:

$$22.3.2. \quad (x \in E \text{ et non } x \notin A) \iff x \in \{x | x \in E \text{ et non}(x \in E \text{ et } x \notin A)\}$$

En tenant compte de 6.37.2, 21.2.1 nous permet d'écrire:

$$\text{non}(x \in E \text{ et } x \notin A) \iff x \notin \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$$

En remplaçant dans le second membre de 22.3.2, nous obtenons, d'après R 9

$$22.3.3. \quad (x \in E \text{ et non } x \notin A) \iff x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}\}$$

Dans 22.3.1, remplaçons maintenant " $x \in E \text{ et non } x \notin A$ " par le second membre de 22.3.3; nous en déduisons la proposition:

$$22.3.4. \quad A \subset E \iff \forall x [x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}\} \iff x \in A]$$

Or, A et C_E^A étant des parties de E , $\{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$ se note C_E^A , puis $\{x | x \in E \text{ et } x \notin C_E^A\}$ se note $C_E C_E^A$. Il en résulte:

$$22.3.5. \quad A \subset E \iff \forall x [x \in C_E C_E^A \iff x \in A]$$

D'après 19.3.1, le second membre peut s'écrire: $C_E C_E^A = A$.

En résumé:

$$22.3.6. \quad \begin{array}{l} \text{Si } A \text{ est une partie de } E, \\ A \subset E \iff C_E C_E^A = A \end{array}$$

Exemple.

Soit $E = \mathbb{N}$ et $A = 2\mathbb{N}$.

Nous avons vu (deuxième exemple du paragraphe 22.1.F) que $C_{\mathbb{N}}^A$ est l'ensemble des entiers naturels impairs. Il est clair que $C_{\mathbb{N}} C_{\mathbb{N}}^A$ est alors l'ensemble des entiers naturels pairs, c'est à dire $2\mathbb{N}$.

Nous avons bien: $C_{\mathbb{N}} C_{\mathbb{N}}^A = 2\mathbb{N}$.

B) Soit E, A, B , trois ensembles donnés. En appliquant 8.41.12, nous pouvons écrire:

$$22.3.7. \quad (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow ((x \in E \text{ et } x \notin B) \Rightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A))$$

et en tenant compte de 21.2.1, nous obtenons la proposition vraie:

$$\forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin B\} \Rightarrow x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\})]$$

de ce fait, en appliquant 16.8.24, nous en déduisons, grâce à R1,

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow [\forall x (x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin B\} \Rightarrow x \in \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\})]$$

D'après 21.1.2,

le premier membre se note: $A \subset B$

le second membre se note: $\{x | x \in E \text{ et } x \notin B\} \subset \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$

En conséquence, nous avons la proposition vraie:

$$22.3.8. \quad A \subset B \Rightarrow \left[\{x | x \in E \text{ et } x \notin B\} \subset \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\} \right]$$

Considérons maintenant le cas où A, B , sont deux parties données de E , c'est à dire telles que:

$$A \subset E \text{ et } B \subset E$$

1°) Si nous avons $A \subset B$, nous pouvons appliquer 22.3.8 et simplifier l'écriture du second membre d'après 22.1.1. Nous obtenons, A, B , étant des parties de E :

$$22.3.9. \quad A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$$

2°) Réciproquement, supposons que les parties A, B , de E sont telles que $C_E^B \subset C_E^A$.

Nous pouvons affirmer, grâce à 22.1.B, que C_E^A, C_E^B , sont deux parties de E

En remplaçant A, B , dans 22.3.9, respectivement par C_E^B, C_E^A , nous obtenons:

$$22.3.10. \quad C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow C_E C_E^A \subset C_E C_E^B$$

Nous pouvons tenir compte de 22.3.6 puisque, par hypothèse, nous avons $A \subset E$ et $B \subset E$; alors, 22.3.10 peut s'écrire:

$$22.3.11. \quad C_E^B \subset C_E^A \Rightarrow A \subset B$$

En appliquant 6.23.1 aux implications 22.3.9 et 22.3.11, nous obtenons en définitive:

$$22.3.12. \quad \begin{aligned} &\text{Si } A \subset E \text{ et } B \subset E, \text{ alors} \\ &A \subset B \iff C_E^B \subset C_E^A \end{aligned}$$

Exemple

Soit les ensembles:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, d, b\}$$

A, B , sont des parties de E et :

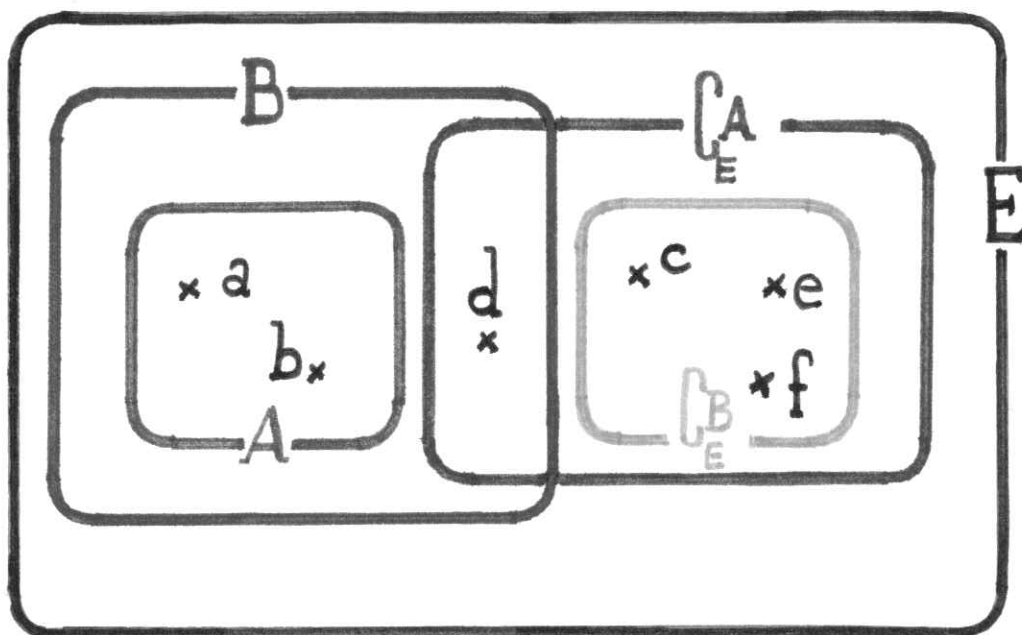
$$C_E^A = \{c, d, e, f\}$$

$$C_E^B = \{c, e, f\}$$

Nous constatons, d'une part que $A \subset B$

d'autre part que $C_E^B \subset C_E^A$.

Nous pouvons illustrer ce cas par un diagramme.



C) Soit un ensemble E et A, B , deux parties données de E , c'est à dire telles que:

$$A \subset E \text{ et } B \subset E$$

Nous pouvons alors appliquer 22.3.12 et écrire:

$$A \subset B \iff C_E B \subset C_E A$$

$$B \subset A \iff C_E A \subset C_E B$$

En remplaçant dans 21.7.2, nous obtenons:

$$22.3.13. \quad A = B \iff [C_E B \subset C_E A \text{ et } C_E A \subset C_E B]$$

Mais toujours d'après 21.7.2, $[C_E B \subset C_E A \text{ et } C_E A \subset C_E B]$ est logiquement équivalent à $[C_E B = C_E A]$ soit encore: $[C_E A = C_E B]$.

En définitive, nous pouvons énoncer:

22.3.14. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors,

$$A = B \iff C_E A = C_E B$$

Exemple.

$$\text{Soit } E = \{17; 2; 13; 8; 4; 9\}$$

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ et } x < 9\}$$

$$C_E B = \{x | x \in E \text{ et } 2 \nmid x\}$$

En appliquant 22.2.5, nous avons:

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ et } x \geq 9\} = \{17; 13; 9\}$$

$$C_E B = \{x | x \in E \text{ et } \text{non}(2 \mid x)\} = \{17; 13; 9\}$$

et par conséquent: $C_E A = C_E B$

Remarquons que $A = B$ puisque effectivement:

$$\begin{aligned} A &= \{ 2; 4; 8 \} \\ B &= \{ 2; 8; 4 \} \end{aligned}$$

22.4. Partie vide d'un ensemble E.

A) Soit E un ensemble donné et la fonction propositionnelle $x \neq x$
D'après AX4, l'ensemble:

$$\{ x \mid x \in E \text{ et } x \neq x \}$$

existe et est unique. Il est d'ailleurs inclus dans E(21.2.3).

22.4.1. $\{ x \mid x \in E \text{ et } x \neq x \}$ est appelé partie vide de E

Remarquons que la partie vide de E est un ensemble ne contenant aucun élément.

B) Nous savons que E est inclus dans E (21.1.5). De ce fait, le symbole $C_E E$ a un sens et en tenant compte de 21.7.16 et de 22.2.5, nous pouvons écrire:

$$22.4.2. \quad \forall x [x \in C_E E \iff (x \in E \text{ et } x \neq x)]$$

soit encore, d'après 21.2.1,

$$\forall x [x \in C_E E \iff x \in \{ x \mid x \in E \text{ et } x \neq x \}]$$

enfin 19.3.1 nous donne:

$$22.4.3. \quad C_E E = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \neq x \}$$

En résumé, la partie vide de E, n'est autre que l'ensemble noté: $C_E E$.

22.5. L'ensemble vide.

A) Soit E un ensemble donné. E étant inclus dans E, 22.1.1 nous permet d'écrire:

$$22.5.1. \quad C_E E = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin E \}$$

En tenant compte de 21.2.1, nous obtenons l'expression vraie:

$$22.5.2. \quad x \in C_E E \iff (x \in E \text{ et } x \notin E)$$

Soit A(x) une fonction propositionnelle. D'après 8.41.13, nous avons la proposition vraie:

$$22.5.3. \quad \forall x [(x \in E \text{ et } x \notin E) \Rightarrow A(x)]$$

Il résulte de 22.5.2 et 22.5.3, la proposition vraie:

$$22.5.4. \quad \forall x [x \in C_E E \Rightarrow A(x)]$$

De la même manière, quel que soit l'ensemble F ,

$$22.5.5. \quad \forall x (x \in C_F F \Rightarrow A(x))$$

Dans 22.5.4, remplaçons $A(x)$ par $x \in C_F F$; nous obtenons:

$$\forall x (x \in C_E E \Rightarrow x \in C_F F)$$

c'est à dire:

$$22.5.6. \quad C_E E \subset C_F F$$

De même en remplaçant $A(x)$ par $C_E E$ dans 22.5.5, il vient:

$$22.5.7. \quad C_F F \subset C_E E$$

En tenant compte de 21.7.2, 22.5.6 et 22.5.7, nous permettent d'écrire:

22.5.8. Quel que soit l'ensemble F ,

$$C_E E = C_F F$$

Cette égalité exprime qu'il existe un ensemble unique qui est la partie vide de tout ensemble; il est appelé ensemble vide et noté: $\emptyset$

En conclusion:

22.5.9. Quel que soit l'ensemble F ,

$$C_F F = \emptyset$$

De ce fait, d'après 22.1.2, nous constatons que:

22.5.10. Quel que soit l'ensemble F ,

$$\emptyset \subset F$$

B) En utilisant 22.5.2, 6.12.2, 6.31.1, nous pouvons écrire la proposition vraie:

$$\forall x [(x \notin E \text{ ou } x \in E) \Leftrightarrow x \in C_E E]$$

En appliquant 16.8.31, nous obtenons la proposition vraie:

$$\forall x (x \notin E \text{ ou } x \in E) \Leftrightarrow \forall x (x \in C_E E)$$

Or, $\forall x (x \notin E \text{ ou } x \in E)$ est une proposition vraie d'après 6.25.3. Il en résulte:

22.5.11. $\forall x (x \in C_E E)$ est une proposition vraie

Soit en tenant compte de 22.5.9:

22.5.12. $\forall x (x \in \emptyset)$ est une proposition vraie.

d'où nous déduisons, grâce à 16.8.5,

22.5.13. $\exists x(x \notin \emptyset)$ est une proposition vraie.

C) Soit F un ensemble. Nous savons que:

- a) $\emptyset$ est une partie de toute ensemble F (22.5.10);
- b) tout ensemble F est une partie de lui-même (21.1.5);
- c) quel que soit l'ensemble F , $C_F F = \emptyset$ (22.5.9)
- d) si A est une partie de F , alors $C_F C_F A = A$.

Nous en déduisons:

$$C_F C_F F = F \quad \text{c'est à dire:}$$

22.5.14. Quel que soit l'ensemble F ,

$$C_F \emptyset = F$$

D) En considérant 21.7.2, nous pouvons écrire:

$$F = \emptyset \iff (F \subset \emptyset \text{ et } \emptyset \subset F)$$

Nous avons établi que, pour tout ensemble F , $\emptyset \subset F$ est une expression vraie (voir à ce propos 22.5.10). En tenant compte de 6.35.1, nous en déduisons:

$$F = \emptyset \iff F \subset \emptyset$$

En résumé:

22.5.15. Quel que soit l'ensemble F ,

$$F \subset \emptyset \iff F = \emptyset$$

c'est à dire, en appliquant 6.37.1,

$$22.5.16. \quad F \neq \emptyset \iff F \not\subset \emptyset$$

22.6. Ensemble des parties d'un ensemble.

Nous admettons:

AX5 : Quel que soit l'ensemble E , il existe un ensemble (unique d'après AX2), noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les parties de E et seulement ces parties.

D'après 21.1.5:

$$22.6.1. \quad E \in \mathcal{P}(E)$$

En tenant compte de 22.5.10,

$$22.6.2. \quad \emptyset \in \mathcal{P}(E)$$

Il est logiquement équivalent de dire que A est inclus dans E et de dire que A est un élément de $\mathcal{P}(E)$.

E étant un ensemble donné, nous avons donc:

$$22.6.3. \quad \begin{array}{l} \text{Quelle que soit la partie A de E,} \\ A \subset E \iff A \in \mathcal{P}(E) \end{array}$$

Exemples.

$$1^\circ) \text{ Soit l'ensemble } E = \{a, b, c\}$$

$$\text{alors } \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, E\}$$

$$2^\circ) \text{ Soit l'ensemble } F = \{1\}$$

$$\text{alors } \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, F\}$$

$$3^\circ) \text{ Si } H = \emptyset, \text{ alors } \mathcal{P}(H) = \{\emptyset\}$$

Notons que:

a) Si E est un ensemble donné et a un élément de E, alors, $a \in E$, $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ et $\{a\} \subset E$.

Si un ensemble E contient n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments. Ce résultat sera démontré ultérieurement.

E X E R C I C E S

E.22.1.

Soit l'ensemble E:

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

et les parties suivantes de E:

$$A = \{a, c, d, f\}$$

$$B = \{b, d, e, f, g\}$$

$$C = \{c\}$$

$$D = \{d, f, g\}$$

Déterminer les ensembles suivants:

$$C_E^A, C_E^B, C_E^C, C_E^D, C_A^C, C_B^D$$

Représenter ces ensembles par des diagrammes.

E.22.2.

Les ensembles E, A, B, C, D, étant ceux définis à l'exercice E.22.1, déterminer les ensembles:

$$C_B(C_E^A), C_A(C_E^B), C_B(C_A C_E^B), C_D(C_B C_E^A)$$

E.22.3.

Les ensembles E, A, B, C, D, étant ceux définis à l'exercice E.22.1, déterminer les ensembles:

$$C_C(C_E^D), C_D(C_E^C), C(C_E^A), C(C_E^B)$$

E.22.4.

Soit l'ensemble $\mathbb{N}$ et les parties de $\mathbb{N}$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 9\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x^2 \leq 100\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x \mid 84 \text{ et } 2 \mid x)\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x \leq 8 \text{ ou } (x+1)x < 135)\}$$

a) Donner une définition en extension des ensembles A, B, C, D.

b) Donner une définition en compréhension des ensembles

$$C_{\mathbb{N}}^A, C_{\mathbb{N}}^B, C_{\mathbb{N}}^C, C_{\mathbb{N}}^D.$$

E.22.5.

A, B, C, D, étant les ensembles définis à l'exercice précédent, déterminer en extension, puis en compréhension, les ensembles:

$$C_B^A, C_D^A, C_D^B, C_D(C_B^A).$$

E.22.6.

A, B, C, désignent les parties de $\mathbb{N}$ telles que:

$$C_{\mathbb{N}}^A \subset C_{\mathbb{N}}^B \text{ et } C_{\mathbb{N}}^A \subset C_{\mathbb{N}}^C \text{ et } C_{\mathbb{N}} C_{\mathbb{N}}^B = C_{\mathbb{N}}^C$$

Quelle propriété en résulte-t-il pour l'ensemble A?

E.22.7.

Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(E)$ lorsque:

- 1) $E = \{a\}$
- 2) $E = \{a, b\}$
- 3) $E = \{a, b, c, d\}$

E.22.8.

Quels sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\emptyset)$?

Quels sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?

Quels sont les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

E.22.9.

A, B, désignant deux ensembles, démontrer l'équivalence logique:

$$A \subset B \iff [\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)]$$

E.22.10.

Sachant que $E = \{a, b\}$, déterminer, en extension, les ensembles:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)); \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)));$$

E.22.11.

Démontrer que:

$$\text{non}(\{x\} = \emptyset)$$

est une expression vraie.

En déduire que $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

23 - R E U N I O N , I N T E R S E C T I O N D ' E N S E M B L E S

23.1. Réunion d'ensembles.

Nous admettrons ce qui suit:

AX6 : Quel que soit l'ensemble E, dont les éléments sont des ensembles A, B, C, ..., il existe un ensemble F, unique d'après AX2, ayant pour éléments ceux de A, B, C, ..., et ceux-là seulement.

Autrement dit, pour qu'un objet noté x soit un élément de F, il faut et il suffit qu'il existe, dans E, au moins un ensemble X de façon que: $x \in X$.

Si $E = \emptyset$, alors $F = \emptyset$.

Quel que soit l'ensemble A, si $E = \{A\}$ alors $F = A$.

Quels que soient les ensembles A, B, distincts, si $E = \{A, B\}$ alors F est l'ensemble des objets x tels que: $x \in A$ ou $x \in B$, c'est à dire:

$$23.1.1. \quad F = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

F est appelé réunion des ensembles A, B, et se note:

$$A \cup B \quad \text{lire: "A union B"}$$

En conséquence:

$$23.1.2. \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

et il en résulte l'expression vraie:

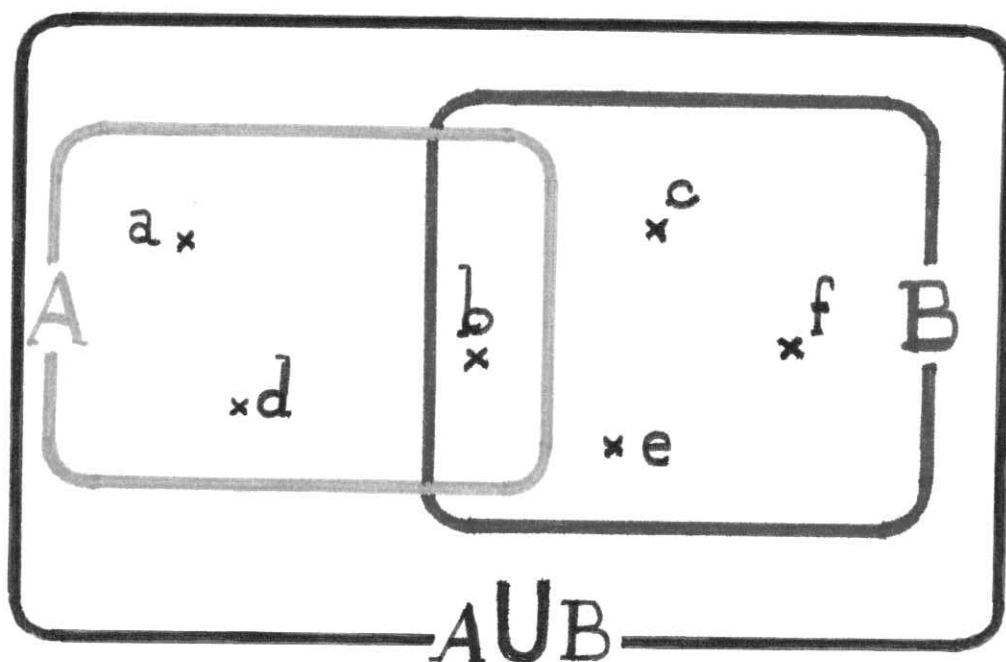
$$23.1.3. \quad (x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

23.2. Diagrammes et exemples.

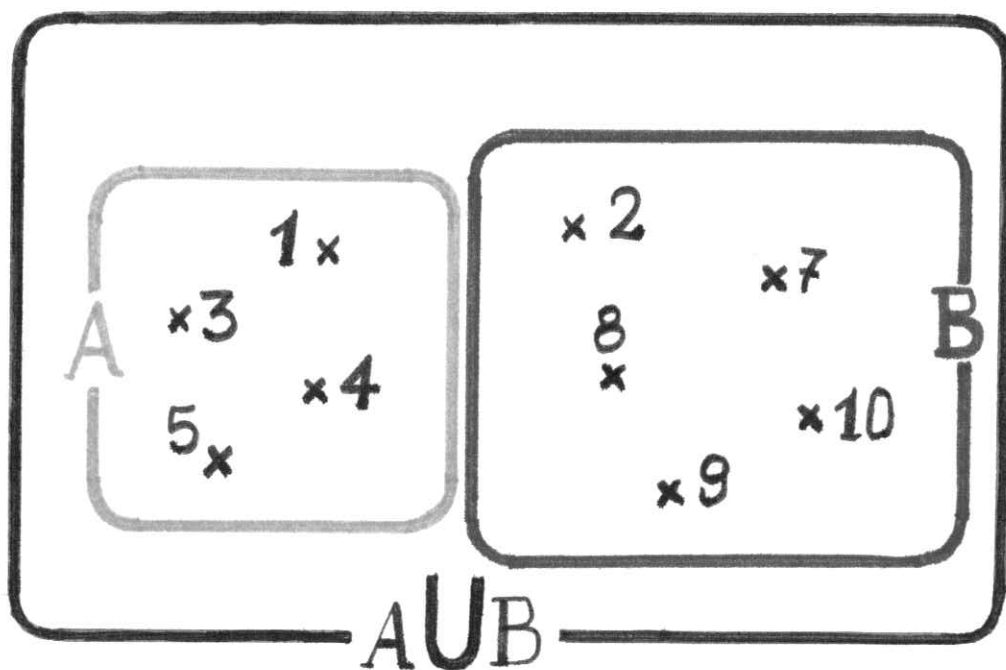
1°) Soit les ensembles $A = \{a, b, d\}$ et $B = \{b, c, e, f\}$
 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

Notons que l'élément désigné par b figure dans A, dans B, mais ne figure qu'une seule fois dans $A \cup B$.

Nous pouvons utiliser les indications données au paragraphe 15.8 pour représenter par un schéma la réunion de ces deux ensembles:



2^o) Soit les ensembles: $A = \{1; 4; 5; 3\}$
 $B = \{2; 7; 8; 9; 10\}$
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$



23.3. Commutativité de la réunion.

Soit A, B , deux ensembles donnés arbitrairement.

D'après le paragraphe 23.1, l'ensemble $\{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$ existe et est unique: il se note $A \cup B$.

l'ensemble $\{x | x \in B \text{ ou } x \in A\}$ existe et est unique: il se note: $B \cup A$.

$$\forall x [(x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \in B \text{ ou } x \in A)]$$

est une proposition vraie d'après 6.4.2.

Appliquons maintenant R8, nous obtenons la proposition vraie:

$$23.3.1. \quad \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x | x \in B \text{ ou } x \in A\}$$

En résumé:

23.3.2. Quels que soient les ensembles A, B ,

$$A \cup B = B \cup A$$

On exprime parfois cette propriété en disant que la réunion de deux ensembles est commutative.

23.4. Associativité de la réunion.

Soit A, B, C , trois ensembles donnés arbitrairement. D'après le paragraphe 23.1, les ensembles $A \cup B, B \cup C$, existent et sont uniques.

La réunion des ensembles $A \cup B, C$, existe et est unique; c'est l'ensemble que nous notons: $(A \cup B) \cup C$.

De même la réunion des ensembles $A, B \cup C$, existe et est unique; c'est l'ensemble noté: $A \cup (B \cup C)$.

D'après 23.1.2,

$$23.4.1. \quad (A \cup B) \cup C = \{x | x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C\}.$$

$$23.4.2. \quad A \cup (B \cup C) = \{x | x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C)\}$$

En tenant compte de 23.1.3,

$$(x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C) \iff ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C)$$

c'est à dire d'après 6.9.1:

$$(x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C) \iff (x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C))$$

et, en appliquant à nouveau 23.1.3, on obtient:

$$(x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C) \iff (x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C))$$

La proposition:

$$\forall x [(x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C) \iff (x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C))]$$

étant vraie, d'après R8, nous en déduisons:

23.4.3. Quels que soient les ensembles A, B, C,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Cette égalité exprime que les notations $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) \cup C$, désignent un même ensemble que l'on convient de noter plus simplement $A \cup B \cup C$. Notons à ce propos que l'ensemble $A \cup B \cup C$, n'est autre que l'ensemble F introduit dans AX6 lorsque $E = \{A, B, C\}$.

Cet ensemble noté $A \cup B \cup C$ sera dorénavant appelé réunion des ensembles A, B, C. En résumé:

23.4.4. Quels que soient les ensembles A, B, C,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Ce résultat exprime une propriété de la réunion appelée associativité

Exemple.

Soit l'ensemble $E = \{\{a, b, c, d\}, \{c, e, f\}, \{g\}\}$

Posons: $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, e, f\}$

$C = \{g\}$

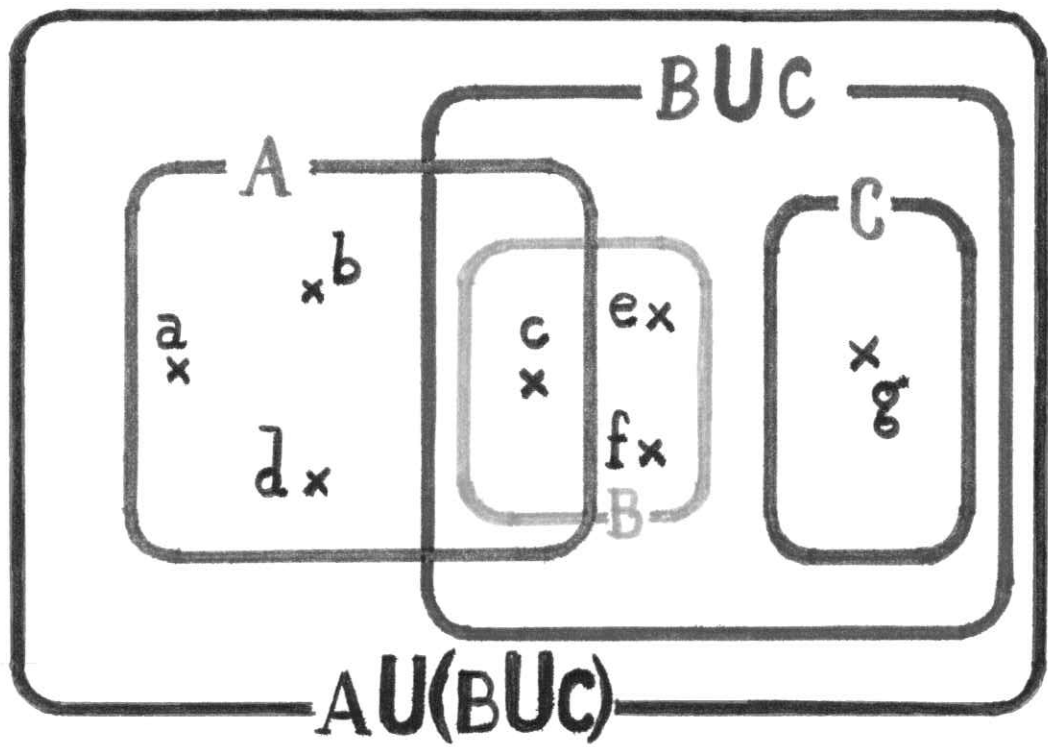
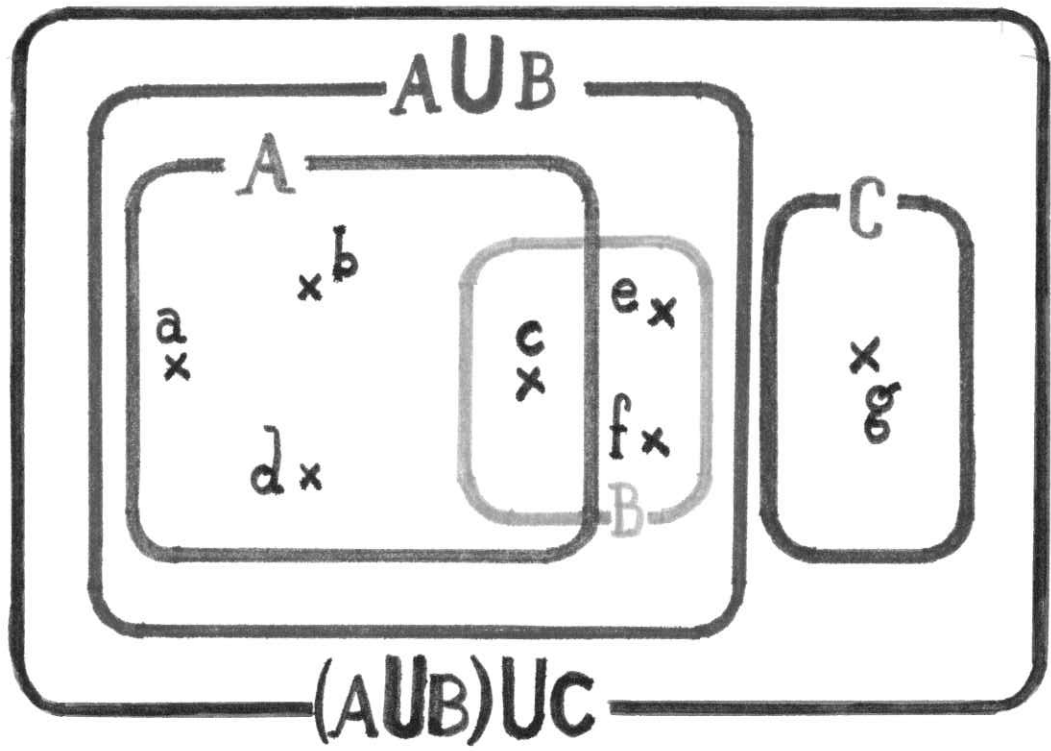
Nous avons:

$$A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$B \cup C = \{c, e, f\} \cup \{g\} = \{c, e, f, g\}$$

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f\} \cup \{g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Représentons par des schémas distincts les ensembles $(A \cup B) \cup C$, $A \cup (B \cup C)$.



Remarques.

1^e) La réunion des ensembles A_1, A_2, A_3 , peut encore être notée:

$$\bigcup_i A_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

2^e) Ce qui précède peut-être généralisé au cas d'un nombre quelconque d'ensembles. On notera dans ce cas,

$$\bigcup_i A_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

23.5. Quelques propriétés de la réunion.

A) Quels que soient les objets distincts a, b , d'après AX6, nous avons:

$$23.5.1. \quad \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

B) Dans le paragraphe 23.1, nous avons vu que si $E = \{A\}$, alors $F = A$. De ce fait:

$$F = \{x | x \in A\}$$

soit encore, en utilisant 6.25.2 et R8,

$$F = \{x | x \in A \text{ ou } x \in A\}$$

La comparaison de cette égalité avec 23.1.2 nous conduit à considérer F comme la réunion de l'ensemble A avec lui-même et à donner un sens au symbole $A \cup A$. Dans ce cas:

$$23.5.2. \quad A \cup A = A$$

En particulier:

$$23.5.3. \quad \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Remarquons qu'il n'était pas possible, à priori, de remplacer B par A dans 23.1.2 puisque nous nous étions donné, au départ, la paire $\{A, B\}$, ce qui supposait $A \neq B$.

C) En utilisant 6.28.1, nous pouvons écrire:

$$\forall x [x \in A \Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)]$$

soit, en tenant compte de 23.1.3:

$$\forall x [x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$$

En conséquence, d'après 21.1.2,

23.5.4. Quels que soient les ensembles A, B ,

$$A \subset A \cup B$$

et puisque $A \cup B = B \cup A$,

23.5.5. Quels que soient les ensembles A, B ,

$$A \subset B \cup A$$

De la même manière, nous démontrerions que:

23.5.6. Quels que soient les ensembles A, B ,

$$B \subset A \cup B$$

$$B \subset B \cup A$$

D) Soient A, B , deux ensembles tels que A soit inclus dans B . Nous avons:

$$A \subset B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

D'après 8.41.15, nous avons la proposition vraie:

$$23.5.7. \quad \forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff ((x \in A \text{ ou } x \in B) \iff x \in B)]$$

soit encore, en appliquant 16.8.31:

$$23.5.8. \quad [\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)] \iff \forall x [(x \in A \text{ ou } x \in B) \iff x \in B]$$

Le premier membre peut être remplacé par $A \subset B$ et le second membre, d'après 23.1.3, peut être remplacé par :

$$\forall x (x \in A \cup B \iff x \in B)$$

soit encore par $A \cup B = B$ (voir 19.3.1)

En résumé:

23.5.9. Quels que soient les ensembles A, B ,

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

Remarque

La commutativité de la réunion et ce qui précède, conduisent au résultat suivant:

23.5.10. E étant un ensemble, si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$
alors:
$$A \cup E = E \cup A = E$$

Exemple.

Soit les ensembles: $A = \{1; 2; 4; 6\}$
 $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Nous avons, d'une part: $A \subset B$

d'autre part: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

c'est à dire $A \cup B = B$

E) D'après 22.5.10, nous savons que, pour tout ensemble A, $\emptyset \subset A$ est une proposition vraie.

En utilisant 23.5.9, il vient:

$$\emptyset \subset A \iff \emptyset \cup A = A$$

et en tenant compte de la commutativité de la réunion, nous pouvons affirmer:

23.5.11. Quel que soit l'ensemble A,

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

F) E étant un ensemble donné, considérons les deux parties de E désignées par:

$$A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$$

$$B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$$

La réunion de ces deux parties se note $A \cup B$ et d'après 23.1.3,

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

est une expression vraie; il en résulte, d'après 21.2.1:

$$23.5.12. \quad x \in A \cup B \iff [(x \in E \text{ et } C(x)) \text{ ou } (x \in E \text{ et } D(x))]$$

soit encore, en tenant compte de 6.16.1,

$$x \in A \cup B \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \text{ ou } D(x))]$$

En appliquant 21.2.1, nous obtenons:

$$\forall x [x \in A \cup B \iff x \in \{x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ ou } D(x))\}]$$

et d'après 19.3.1, nous pouvons énoncer:

23.5.13. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors : $A \cup B = \{x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ ou } D(x))\}$

D'après 21.2.7, nous en déduisons:

23.5.14. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors : $(\forall x \in E) [x \in A \cup B \iff (C(x) \text{ ou } D(x))]$

Exemples.

1°) Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

et les parties de E suivantes:

$$A = \{ x | x \in E \text{ et } x^2 \in E \}$$

$$B = \{ x | x \in E \text{ et } 2|x \}$$

Nous avons alors:

$$A = \{ 1; 2; 3 \}$$

$$B = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$$

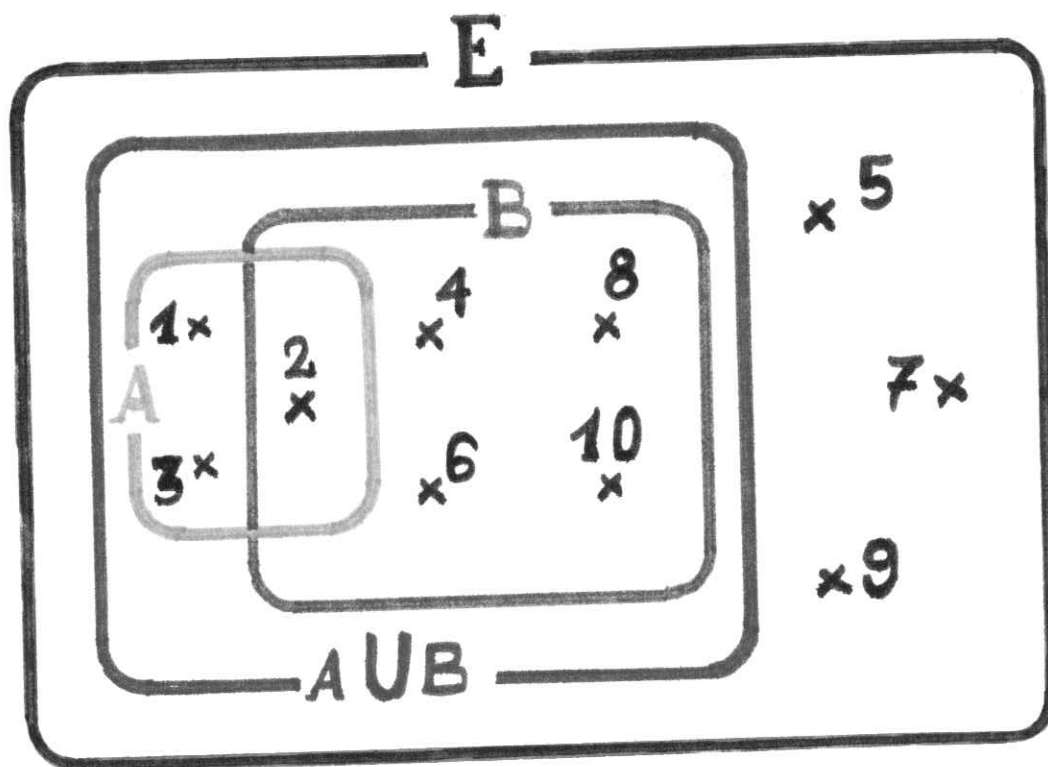
$$A \cup B = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10 \}$$

En considérant l'ensemble $R = \{ x | x \in E \text{ et } (x^2 \in E \text{ ou } 2|x) \}$, nous constatons que 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10, sont les seuls éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans la fonction propositionnelle $(x^2 \in E \text{ ou } 2|x)$. De ce fait:

$$R = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 8; 10 \}$$

$$\text{et } A \cup B = \{ x | x \in E \text{ et } (x^2 \in E \text{ ou } 2|x) \}$$

Cet exemple est illustré par le schéma suivant:



2°) Prenons pour E l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et considérons les parties de $\mathbb{N}$ suivantes:

$$A' = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x|10 \}$$

$$B' = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 5 \}$$

Nous en déduisons:

$$A' = \{ 1; 2; 5; 10 \}$$

$$B' = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5 \}$$

$$A' \cup B' = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 10 \}$$

et, de ce fait:

$$A' \cup B' = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x \mid 10 \text{ ou } x \leq 5)\}$$

G) Soit A une partie d'un ensemble donné E. De ce fait:

$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E)$ est une proposition vraie notée $A \subset E$

$\{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$ est un ensemble noté $\bigcup_E A$.

D'après 8.41.16, nous avons la proposition vraie:

$$\forall x [(x \in A \Rightarrow x \in E) \Leftrightarrow [(x \in A \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin A)) \Leftrightarrow x \in E]]$$

c'est à dire, en tenant compte de 18.8.31,

$$23.5.15. \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in E) \Leftrightarrow \forall x[(x \in A \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin A)) \Leftrightarrow x \in E]$$

qui peut encore s'écrire:

$$23.5.16. \quad A \subset E \Leftrightarrow \forall x[(x \in A \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin A)) \Leftrightarrow x \in E]$$

En particulier, nous avons la proposition vraie:

$$A \subset E \Rightarrow \forall x[(x \in A \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin A)) \Leftrightarrow x \in E]$$

De ce fait, nous pouvons utiliser la notation rappelée ci-dessus et nous obtenons(21.2.1):

$$A \subset E \Rightarrow \forall x[(x \in A \text{ ou } x \in \bigcup_E A) \Leftrightarrow x \in E]$$

c'est à dire, en appliquant 23.1.3:

$$A \subset E \Rightarrow \forall x[(x \in A \cup \bigcup_E A) \Leftrightarrow x \in E]$$

puis, en appliquant 19.3.1:

$$23.5.17. \quad A \subset E \Rightarrow (A \cup \bigcup_E A = E)$$

En définitive:

23.5.18. Si A est inclus dans E, alors,

$$A \cup \bigcup_E A = E$$

H) Soit A, B, E, trois ensembles.

La loi logique 8.41.20 nous permet d'écrire la proposition vraie:

$$23.5.19. \quad \forall x [((x \in A \Rightarrow x \in E) \text{ et } (x \in B \Rightarrow x \in E)) \Rightarrow ((x \in A \text{ ou } x \in B) \Rightarrow x \in E)]$$

En appliquant successivement 16.8.24 puis 16.7.14, nous obtenons:

$$23.5.20. \quad [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E) \text{ et } \forall x(x \in B \Rightarrow x \in E)] \Rightarrow \forall x((x \in A \text{ ou } x \in B) \Rightarrow x \in E)$$

En tenant compte de 21.1.2 pour le premier membre et de 23.1.3

pour le second membre, il vient:

$$(A \subset E \text{ et } B \subset E) \Rightarrow \forall x(x \in A \cup B \Rightarrow x \in E)$$

c'est à dire, d'après 21.1.2:

23.5.21. quels que soient les ensembles A, B, E,

$$A \subset E \text{ et } B \subset E \Rightarrow A \cup B \subset E$$

23.6. Intersection d'ensembles.

Soit E un ensemble non vide dont les éléments sont des ensembles: A, B, C, ..., et l'ensemble F, réunion des ensembles A, B, C, ... D'après AX4, il existe un ensemble I, unique, dont les éléments sont ceux de F qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans la fonction propositionnelle P(x):

"pour tout X, si X appartient à E, alors x appartient à X"
 Cet ensemble I est appelé intersection des ensembles A, B, C, ..., éléments de E.

Exemple.

Soit les ensembles:

$$\begin{aligned} A &= \{1; 2; 3\} \\ B &= \{2; 3; 4; 5\} \\ C &= \{2; 3; 5; 6\} \\ E &= \{A, B, C\} \end{aligned}$$

La réunion des ensembles éléments de E est:

$$F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Considérons par exemple l'élément 2; la proposition:

$$2 \in F \text{ et } [(A \in E \Rightarrow 2 \in A) \text{ et } (B \in E \Rightarrow 2 \in B) \text{ et } (C \in E \Rightarrow 2 \in C)]$$

est vraie. Puisque 2 rend vraie P(x), alors 2 est élément de I. On établirait de même que 3 est élément de I. Il n'y a pas d'autres éléments de F qui soient éléments de I. Par exemple, 5 n'est pas élément de I car la proposition:

$$5 \in F \text{ et } [(A \in E \Rightarrow 5 \in A) \text{ et } (B \in E \Rightarrow 5 \in B) \text{ et } (C \in E \Rightarrow 5 \in C)]$$

est fausse du fait que $(A \in E \Rightarrow 5 \in A)$ est une proposition fausse.

En résumé, $I = \{1; 2\}$ est l'intersection des ensembles A, B, C.

23.7. Intersection de deux ensembles.

Soit $E = \{A, B\}$ une paire d'ensembles.

Dans ce cas, $F = A \cup B$, et la fonction propositionnelle P(x) du paragraphe précédent peut se noter:

$$(A \in \{A, B\} \Rightarrow x \in A) \text{ et } (B \in \{A, B\} \Rightarrow x \in B)$$

D'après 6.22.1, nous pouvons écrire:

$$P(x) \Leftrightarrow [(x \in A \text{ ou } A \notin \{A, B\}) \text{ et } (x \in B \text{ ou } B \notin \{A, B\})]$$

En tenant compte de 6.40.1, il vient:

$$P(x) \iff [x \in A \text{ et } x \in B]$$

En conséquence, l'ensemble désigné par I au paragraphe 23.6, est ici l'ensemble:

$$23.7.1. \quad \{x \mid x \in A \cup B \text{ et } (x \in A \text{ et } x \in B)\}$$

En appliquant 23.1.3 et R8, nous pouvons écrire:

$$I = \{x \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \in B)\}$$

D'après 8.41.17, nous avons la proposition vraie:

$$23.7.2. \quad \forall x [(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B)]$$

Nous en déduisons (R8):

$$I = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Cet ensemble est appelé intersection des ensembles A, B, et noté $A \cap B$ (lire: A inter B).

En résumé:

23.7.3. Quels que soient les ensembles A, B,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Soit encore:

$$23.7.4. \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$$

23.8. Exemples et diagrammes.

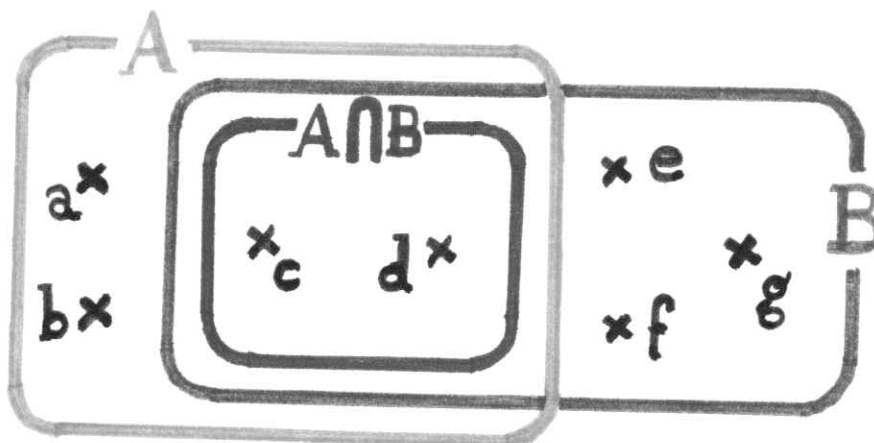
1^o) Considérons les ensembles:

$$A = \{a; b; c; d\}$$

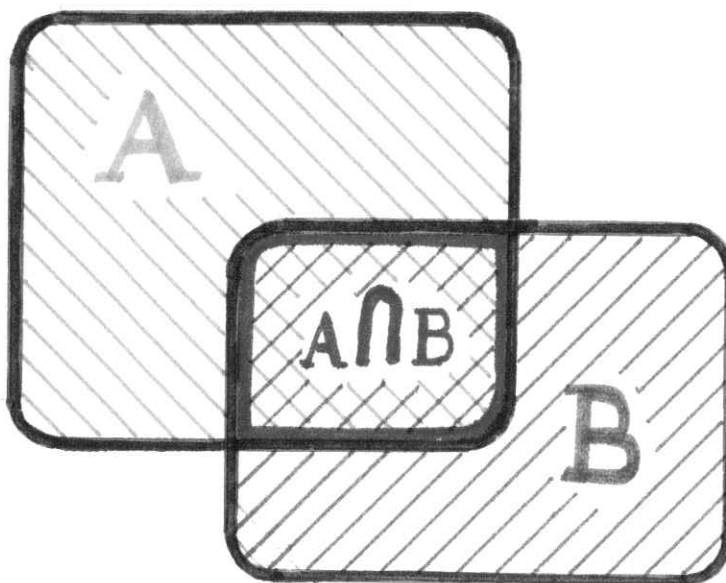
$$B = \{c; d; e; f; g\}$$

$$A \cap B = \{c; d\}$$

Nous pouvons utiliser un diagramme pour représenter l'intersection de ces deux ensembles.



2) Lorsque les deux ensembles A , B , sont infinis nous pouvons illustrer la situation à l'aide d'un diagramme analogue au suivant.



23.9. Commutativité de l'intersection.

Soit A , B , deux ensembles.

D'après le paragraphe 23.6 et le résultat 23.7.3, l'ensemble

$$\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

existe, est unique et se note $A \cap B$.

De même, l'ensemble

$$\{x \mid x \in B \text{ et } x \in A\}$$

existe, est unique, et se note $B \cap A$.

$$\forall x \left[(x \in A \text{ et } x \in B) \iff (x \in B \text{ et } x \in A) \right]$$

est une proposition vraie d'après 6.5.1. En appliquant R8, nous obtenons la proposition vraie:

$$23.9.1. \quad \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ et } x \in A\}$$

En résumé:

23.9.2. Quels que soient les ensembles A , B ,

$$A \cap B = B \cap A$$

On exprime parfois ce fait en disant que l'intersection de deux ensembles est commutative.

23.10. Associativité de l'intersection.

Soient A, B, C , trois ensembles. Nous savons que:

$A \cap B$, $B \cap C$, existent et sont uniques.

L'intersection des ensembles $A \cap B$, C , est l'ensemble noté $(A \cap B) \cap C$;

L'intersection des ensembles A , $B \cap C$, est l'ensemble noté $A \cap (B \cap C)$.

D'après 23.7.3,

$$23.10.1. \quad (A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C\}$$

$$23.10.2. \quad A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in (B \cap C)\}$$

En tenant compte de 23.7.4:

$$(x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C) \iff ((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C)$$

C'est à dire d'après 6.10.1:

$$(x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C) \iff (x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C))$$

Soit, en appliquant à nouveau 23.7.4:

$$(x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C) \iff (x \in A \text{ et } x \in (B \cap C))$$

La proposition:

$$\forall x [(x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C) \iff (x \in A \text{ et } x \in (B \cap C))]$$

étant vraie, d'après R8, nous en déduisons:

$$23.10.3. \quad \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Cette égalité exprime que les notations $(A \cap B) \cap C$, $A \cap (B \cap C)$, désignent un même ensemble que l'on convient de noter plus simplement $A \cap B \cap C$.

Notons en outre que $A \cap B \cap C$ n'est autre que l'ensemble I introduit au paragraphe 23.6 lorsque $E = \{A, B, C\}$ et $F = A \cup B \cup C$. Cet ensemble noté $A \cap B \cap C$ sera appelé dorénavant intersection des ensembles A, B, C . En définitive:

$$23.10.4. \quad \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Ce résultat exprime une propriété de l'intersection appelée associativité.

Exemple.

1°) Soit les ensembles:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$$

$$C = \{6; 7; 8; 10; 11; 12\}$$

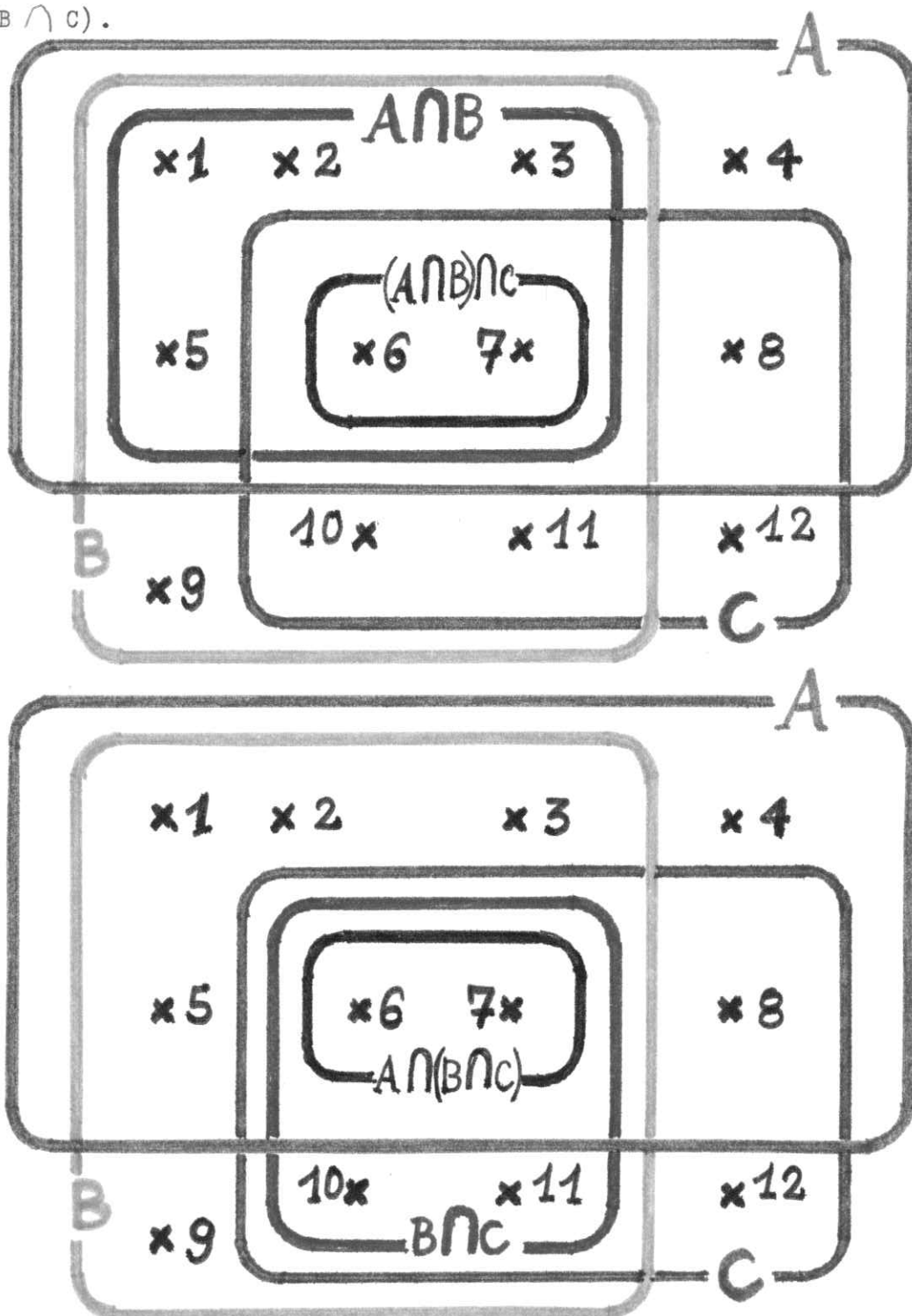
Nous avons:

$$A \cap B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\}$$

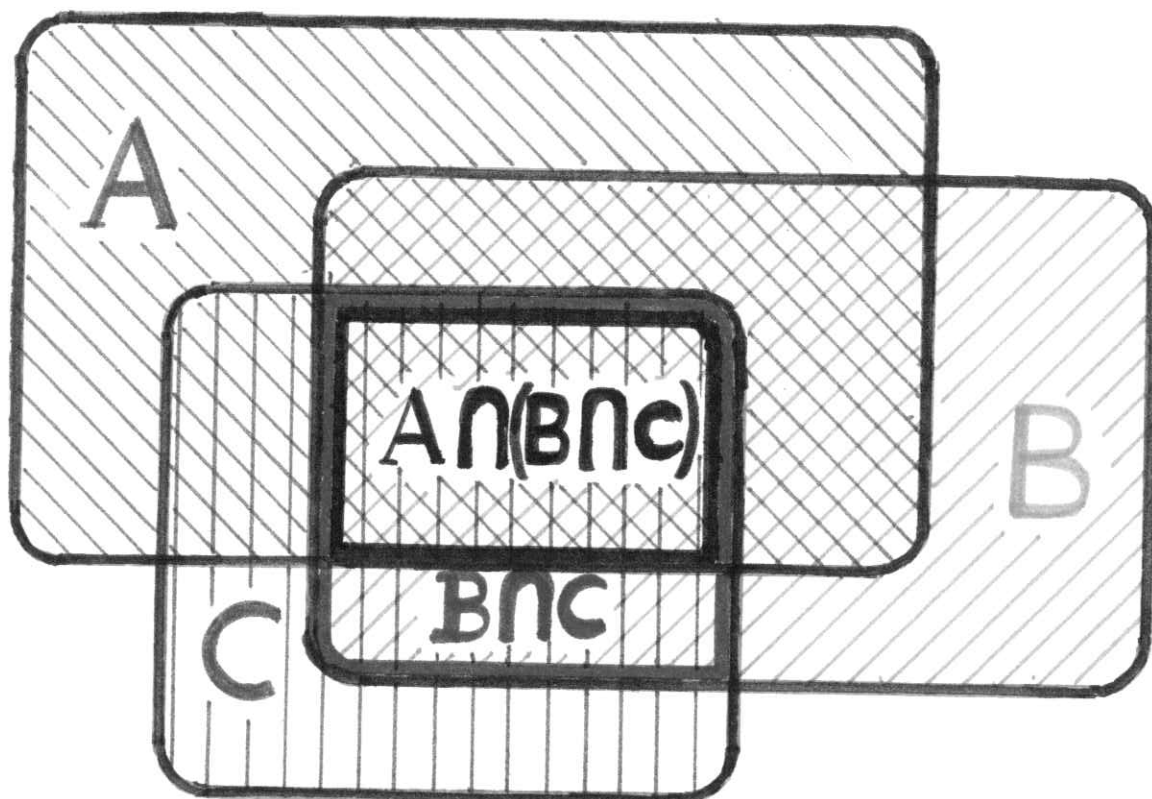
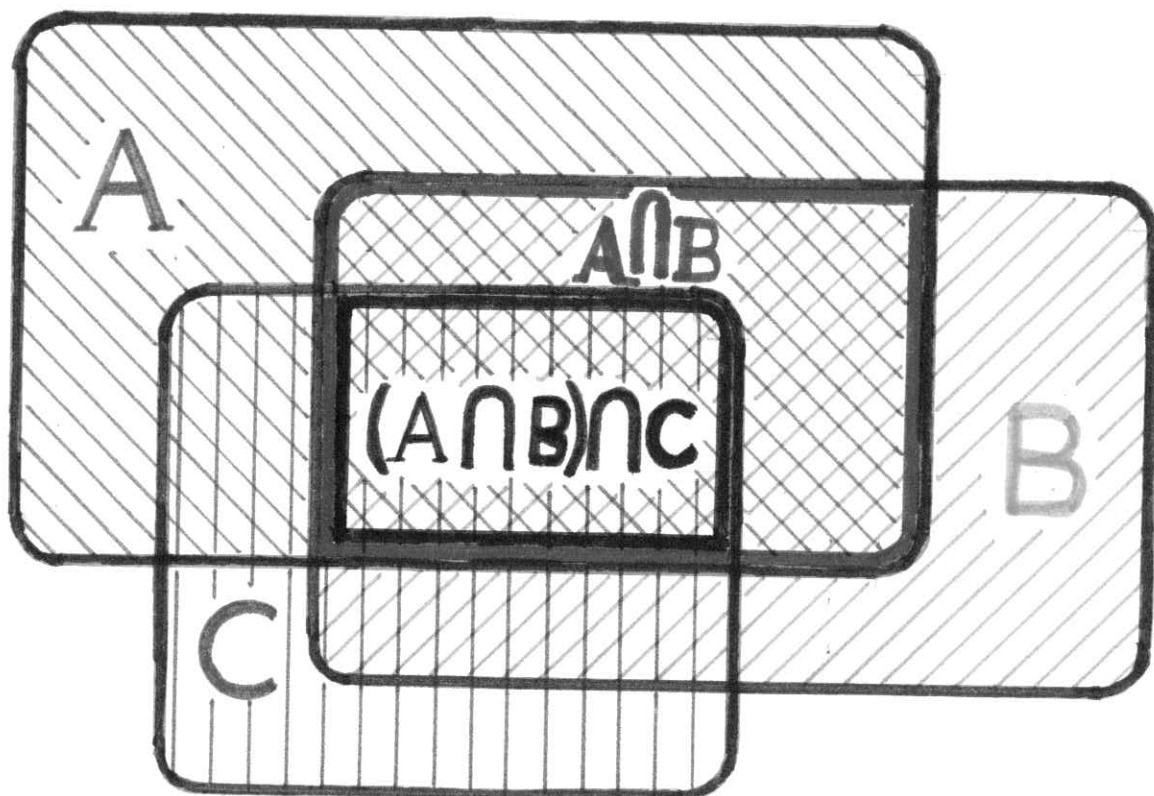
$$B \cap C = \{6; 7; 10; 11\}$$

$$A \cap B \cap C = \{6; 7\}$$

Représentons par des schémas distincts les ensembles $(A \cap B) \cap C$, $A \cap (B \cap C)$.



2°) Supposons les trois ensembles envisagés infinis. Nous pouvons représenter les intersections à l'aide des schémas suivants:



Remarques

1^o) L'intersection des ensembles A_1, A_2, A_3 , peut-être notée:

$$\bigcap_i A_i, \quad i \in \{1; 2; 3\}$$

2^o) Ce qui précède peut-être généralisé au cas où le nombre des ensembles serait n , avec cependant $n \neq 0$. Nous noterons alors l'intersection:

$$\bigcap_i A_i, \quad i \in \{1; 2; \dots; n\}$$

23.11. Quelques propriétés de l'intersection.

A) Quels que soient les ensembles A, B , ces ensembles sont dits disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple.

Considérons les ensembles:

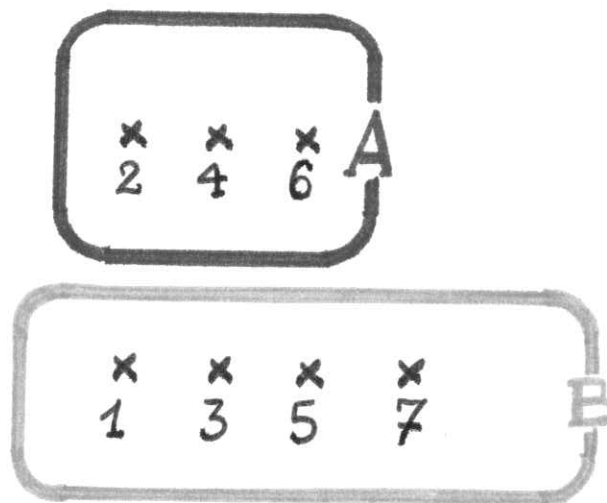
$$A = \{2; 4; 6\}$$

$$B = \{3; 5; 1; 7\}$$

Nous avons: $A \cap B = \emptyset$

A, B , sont des ensembles disjoints.

Nous pouvons schématiser la situation de la façon suivante:



B) Dans le cas où l'ensemble $E = \{A\}$, le paragraphe 23.6, nous indique que $F = A$ et que $P(x)$ est la fonction propositionnelle

$$A \in \{A\} \Rightarrow x \in A$$

De ce fait,

$$I = \{x \mid A \in \{A\} \Rightarrow x \in A\}$$

Or nous avons:

$$P(x) \iff (x \in A \text{ ou } A \notin \{A\}) \quad (\text{d'après 6.22.1})$$

$$P(x) \iff x \in A \quad (\text{d'après 6.40.1})$$

$$P(x) \iff (x \in A \text{ et } x \in A) \quad (\text{d'après 6.26.1})$$

En conséquence, (R8):

$$23.11.1. \quad I = \{x | x \in A\} = \{x | x \in A \text{ et } x \in A\} = A$$

en tenant compte de 21.9.3.

Considérons maintenant 23.7.3, et remplaçons B par A dans cette relation. Nous obtenons:

$$23.11.2 \quad A \cap A = \{x | x \in A \text{ et } x \in A\}$$

La comparaison des égalités 23.11.1 et 23.11.2 nous conduit à donner un sens au symbole $A \cap A$ et à le considérer comme désignant l'intersection de A avec lui-même.

Nous posons:

23.11.3. Quel que soit l'ensemble A,

$$A \cap A = A$$

En particulier:

$$23.11.4. \quad \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

La remarque du paragraphe 23.5.B, reste valable dans ce cas.

C) En utilisant 6.28.2, nous pouvons écrire:

$$\forall x [(x \in A \text{ et } x \in B) \implies x \in A]$$

soit en tenant compte de 23.7.4:

$$\forall x (x \in A \cap B \implies x \in A)$$

En conséquence, d'après 21.1.2:

23.11.5. Quels que soient les ensembles A, B,

$$A \cap B \subset A$$

et, puisque $A \cap B = B \cap A$,

23.11.6. Quels que soient les ensembles A, B,

$$B \cap A \subset A$$

De façon analogue, nous démontrerions que:

23.11.7. Quels que soient les ensembles A, B,

$$A \cap B \subset B$$

$$B \cap A \subset B$$

D) Soient A, B, deux ensembles tels que A soit inclus dans B. Nous avons:

$$A \subset B \iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$$

En utilisant 8.41.11, nous pouvons écrire la proposition vraie:

$$23.11.8. \quad \forall x [(x \in A \implies x \in B) \iff ((x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \in A)]$$

Soit, en appliquant 16.8.31:

$$23.11.9. \quad (\forall x (x \in A \implies x \in B)) \iff \forall x ((x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \in A)$$

Le premier membre peut-être remplacé par $A \subset B$ et le second par

$$\forall x (x \in A \cap B \iff x \in A) \quad (\text{d'après 23.7.4})$$

En appliquant 19.3.1 au second membre, on obtient alors:

23.11.10. Quels que soient les ensembles A, B,

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$

Remarque.

Ce qui précède et la commutativité de l'intersection conduisent au résultat suivant: E étant un ensemble,

23.11.11. Si A est élément de $\mathcal{P}(E)$, alors,

$$A \cap E = E \cap A = A$$

E) Nous savons, par 22.5.10, que, quel que soit l'ensemble A, $\emptyset \subset A$ est une proposition vraie.

En appliquant 23.11.11, nous pouvons affirmer, puisque $\emptyset$ est élément de $\mathcal{P}(A)$:

23.11.12. Quel que soit l'ensemble A

$$\emptyset \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset$$

F) E étant un ensemble donné, considérons les deux parties de E désignées par:

$$A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$$

$$B = \{ x | x \in E \text{ et } D(x) \}$$

L'intersection de ces deux parties se note $A \cap B$; d'après 23.7.4, nous pouvons écrire l'expression vraie:

$$x \in A \cap B \iff [x \in A \text{ et } x \in B]$$

Nous en déduisons, (21.2.1):

$$23.11.13. \quad x \in A \cap B \iff [(x \in E \text{ et } C(x)) \text{ et } (x \in E \text{ et } D(x))]$$

soit encore, en tenant compte de 6.18.1,

$$x \in A \cap B \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et } D(x))]$$

Appliquons alors 21.2.1; il vient:

$$\forall x [x \in A \cap B \iff x \in \{ x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et } D(x)) \}]$$

Nous pouvons enfin énoncer, grâce à 19.3.1:

$$23.11.14. \quad \begin{array}{l} \text{Si } A = \{ x | x \in E \text{ et } C(x) \} \quad \text{et } B = \{ x | x \in E \text{ et } D(x) \} \\ \text{alors,} \quad A \cap B = \{ x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et } D(x)) \} \end{array}$$

Nous en déduisons:

$$23.11.15. \quad \begin{array}{l} \text{Si } A = \{ x | x \in E \text{ et } C(x) \} \quad \text{et } B = \{ x | x \in E \text{ et } D(x) \} \\ \text{alors} \quad \forall x \in E [x \in A \cap B \iff (C(x) \text{ et } D(x))] \end{array}$$

Exemples.

$$1^o) \text{ Soit l'ensemble } E = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \}$$

et les parties de E suivantes:

$$A = \{ x | x \in E \text{ et } 2 | x \}$$

$$B = \{ x | x \in E \text{ et } x > 6 \}$$

$$\text{De ce fait,} \quad A = \{ 2; 4; 6; 8; 10 \}$$

$$B = \{ 7; 8; 9; 10 \}$$

$$A \cap B = \{ 8; 10 \}$$

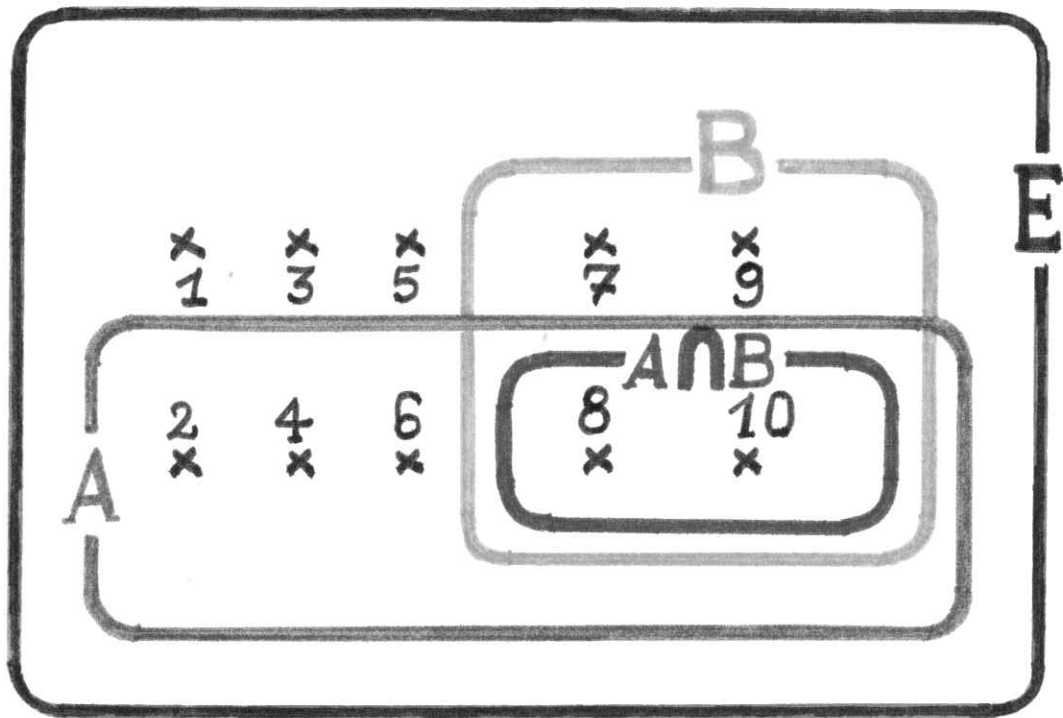
En considérant l'ensemble:

$$I = \{ x | x \in E \text{ et } (2 | x \text{ et } x > 6) \}$$

nous constatons que 8, 10, sont les seuls éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans la fonction propositionnelle $(2 | x \text{ et } x > 6)$. En conséquence,

$$I = \{ 8; 10 \} \quad \text{et} \quad A \cap B = I$$

Nous pouvons représenter ces divers ensembles à l'aide du schéma suivant:



2°) $\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, considérons les ensembles:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \mid (x + 1)\}$$

Nous ne pouvons pas, dans ce cas, énumérer tous les éléments de A et de B. Notons cependant, à titre d'exemples, que 0; 1; 4; 9; 25; sont des éléments de A, et que 1; 3; 5; 7; 9; sont des éléments de B.

Nous ne pouvons pas davantage énumérer tous les éléments de l'ensemble $A \cap B$. Signalons que 1; 9; 25; 49; sont des éléments de $A \cap B$; ce sont aussi les éléments de l'ensemble:

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (\sqrt{x} \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \mid (x + 1))\}$$

Remarquons que $A \cap B$ est en définitive l'ensemble des entiers naturels impairs qui sont des "carrés parfaits".

G) Soit A, B, E, trois ensembles.

a) D'après 23.11.5, nous avons $A \cap B \subset A$. Si, en outre,

A est une partie de E, alors, en appliquant 21.8.5, on obtient:

$$A \cap B \subset E$$

En résumé:

$$23.11.16. \quad A \subset E \Rightarrow A \cap B \subset E$$

b) D'après 23.11.7, nous avons $A \cap B \subset B$. Si, de plus, B est une partie de E, 21.8.5 permet d'écrire:

$$A \cap B \subset E$$

En résumé:

$$23.11.17. \quad B \subset E \Rightarrow A \cap B \subset E$$

c) Considérons 23.11.16 et 23.11.17, et appliquons 8.8.41.20. Nous en déduisons:

$$23.11.18. \quad \begin{array}{l} \text{Quels que soient les ensembles } A, B, E, \\ (A \subset E \text{ ou } B \subset E) \Rightarrow A \cap B \subset E \end{array}$$

En particulier, puisque (6.28.3):

$$(A \subset E \text{ et } B \subset E) \Rightarrow (A \subset E \text{ ou } B \subset E)$$

il en résulte:

$$23.11.19. \quad \begin{array}{l} \text{Quels que soient les ensembles } A, B, E, \\ (A \subset E \text{ et } B \subset E) \Rightarrow A \cap B \subset E \end{array}$$

H) Soit un ensemble E et A une partie de E.

Afin d'étudier l'ensemble noté $\bigcap_E A \cap A$, considérons la fonction propositionnelle:

$$(x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } x \in A$$

En tenant compte de 6.10.1 et 6.5.1, nous pouvons écrire la proposition vraie:

$$23.11.20. \quad \forall x [(x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } x \in A] \Leftrightarrow [x \in E \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin A)]$$

Puisque nous avons $A \subset E$ par hypothèse et $A \subset A$ pour tout ensemble A, nous pouvons appliquer 22.1.3 et nous obtenons:

$$23.11.21. \quad \forall x [(x \in \bigcap_E A \text{ et } x \in A) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in \bigcap_A A)]$$

D'après 23.7.4, nous obtenons:

$$23.11.22. \quad \forall x [x \in \bigcap_A A \cap A \Leftrightarrow x \in E \cap \bigcap_A A]$$

Mais $\bigcap_A A = \emptyset$ (22.5.9) et $E \cap \emptyset = \emptyset$ (23.11.12). En tenant compte de 19.3.1, nous énonçons:

23.11.23. Quelle que soit la partie A de E,

$$C_E A \cap A = \emptyset$$

23.12. Formules de Morgan.

A) Soit A, B, deux parties d'un ensemble donné E. Nous pouvons écrire $A \cap B \subset E$ (23.11.19). De ce fait, A, B, étant deux parties de E, nous pouvons envisager les complémentaires de A, B, $A \cap B$, par rapport à E. En utilisant 8.41.18, nous obtenons la proposition:

$$23.12.1. \quad \forall x [(x \in E \text{ et non}(x \in A \text{ et } x \in B)) \iff ((x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \in B))]$$

D'après 23.7.4 et 6.37.2, nous en déduisons:

$$23.12.2. \quad \forall x [(x \in E \text{ et } x \notin A \cap B) \iff ((x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin B))]$$

L'hypothèse faite au début de ce paragraphe sur A, B, E, nous permet d'appliquer 22.1.3, ce qui nous donne:

$$23.12.3. \quad \forall x [x \in C_E(A \cap B) \iff (x \in C_E A \text{ ou } x \in C_E B)]$$

Nous pouvons alors écrire (23.1.3):

$$23.12.4. \quad \forall x [x \in C_E(A \cap B) \iff x \in (C_E A \cup C_E B)]$$

soit encore, d'après 19.3.1,

23.12.5. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors,

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Exemples et schémas.

1°) Soit les ensembles:

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$A = \{f, g, h, i, j\}$$

$$B = \{d, e, i, j\}$$

A, B, sont des parties de E et nous avons:

$$A \cap B = \{i, j\}$$

$$C_E A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$C_E B = \{a, b, c, f, g, h\}$$

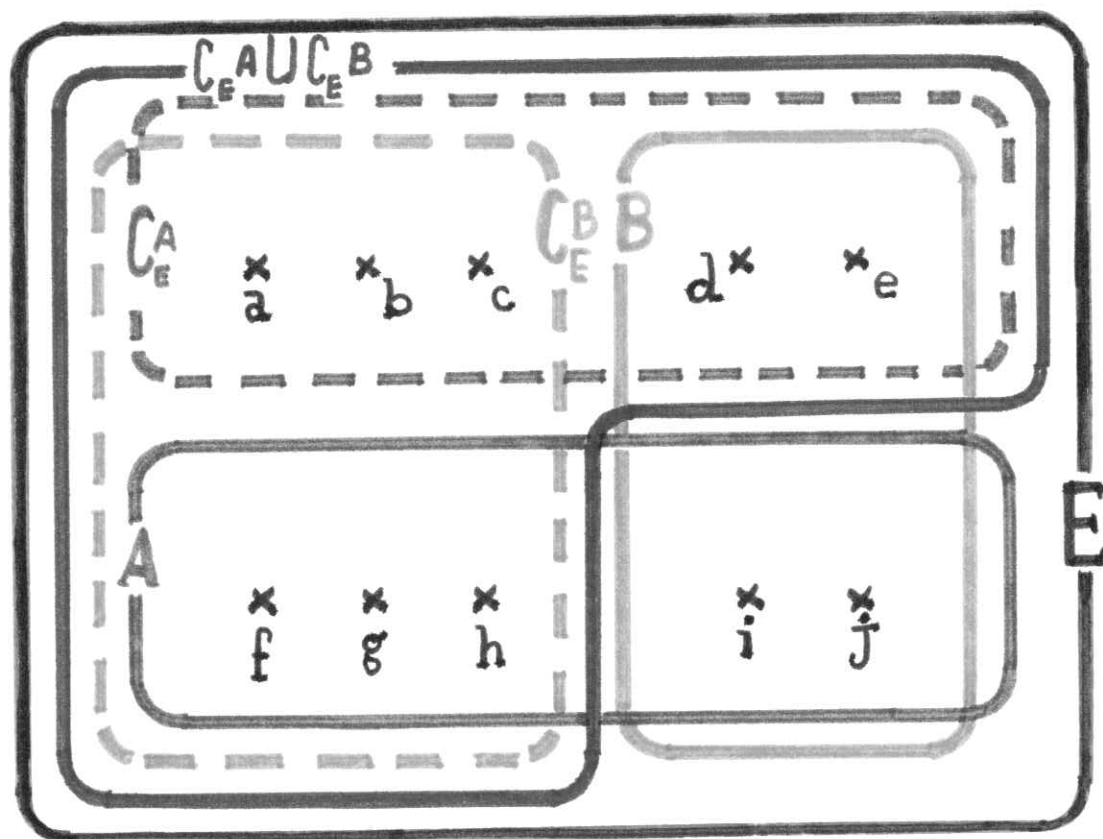
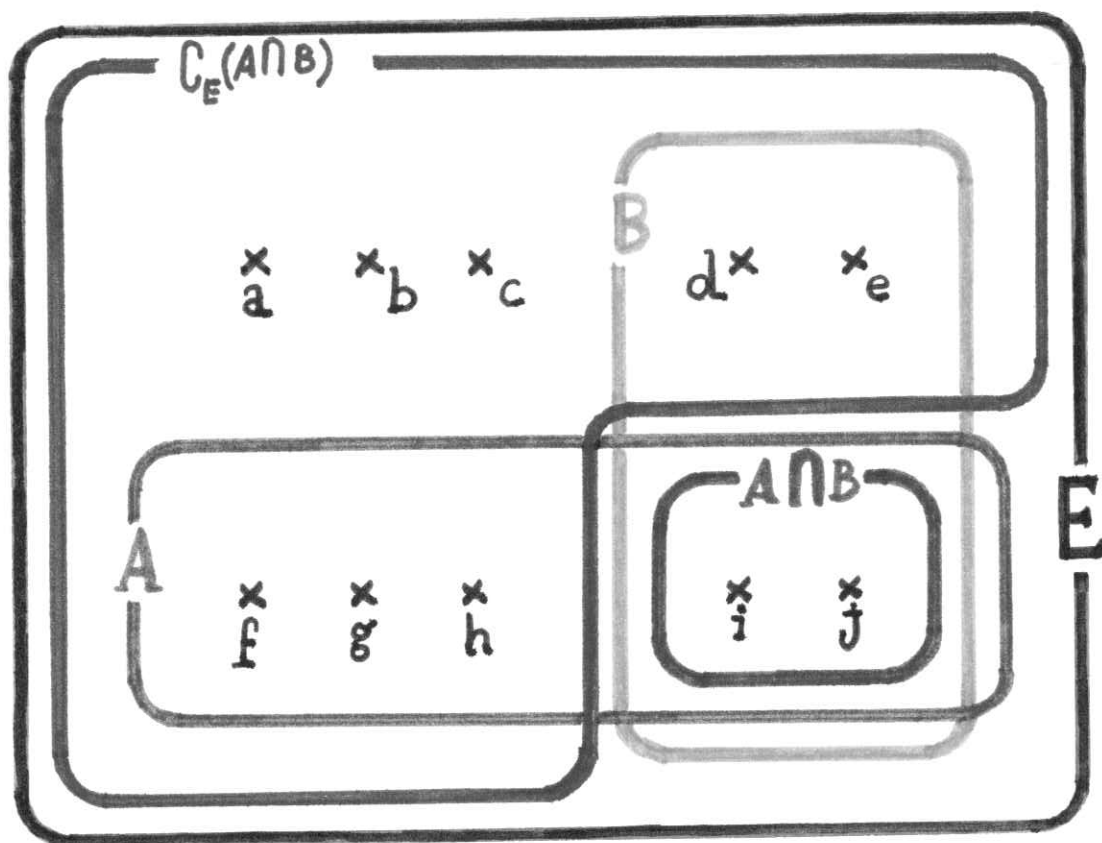
$$C_E(A \cap B) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$C_E A \cup C_E B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

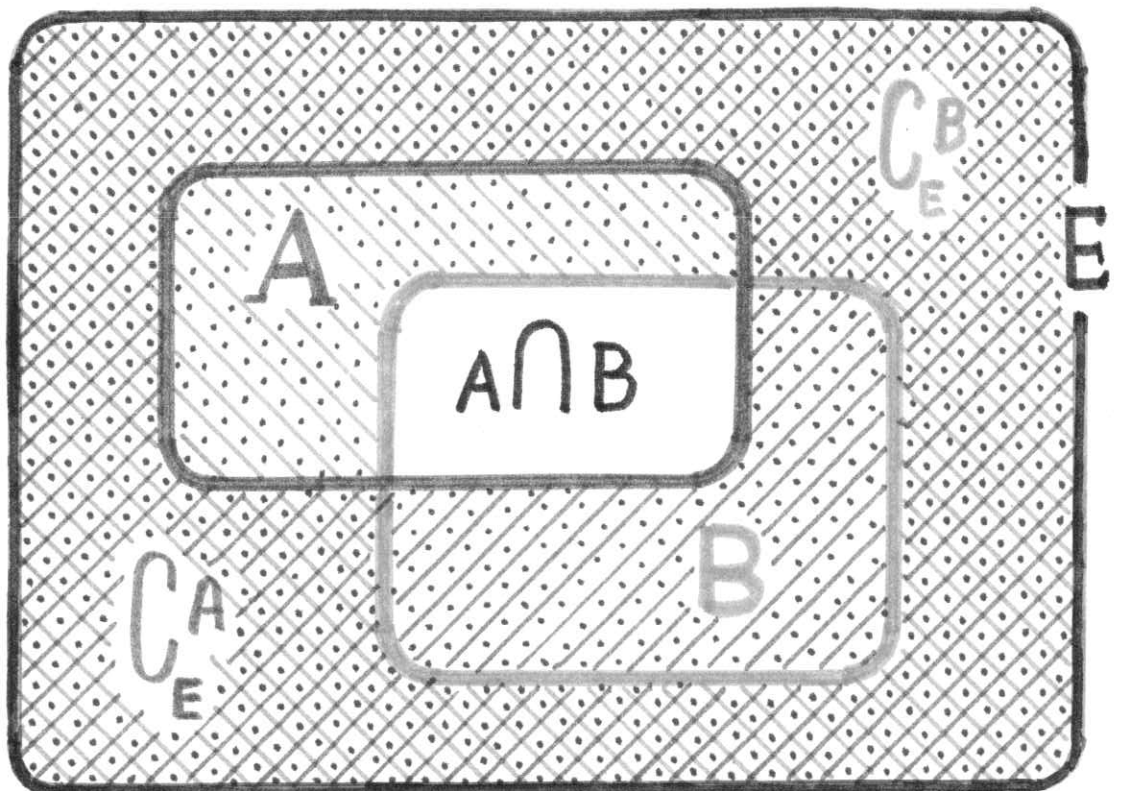
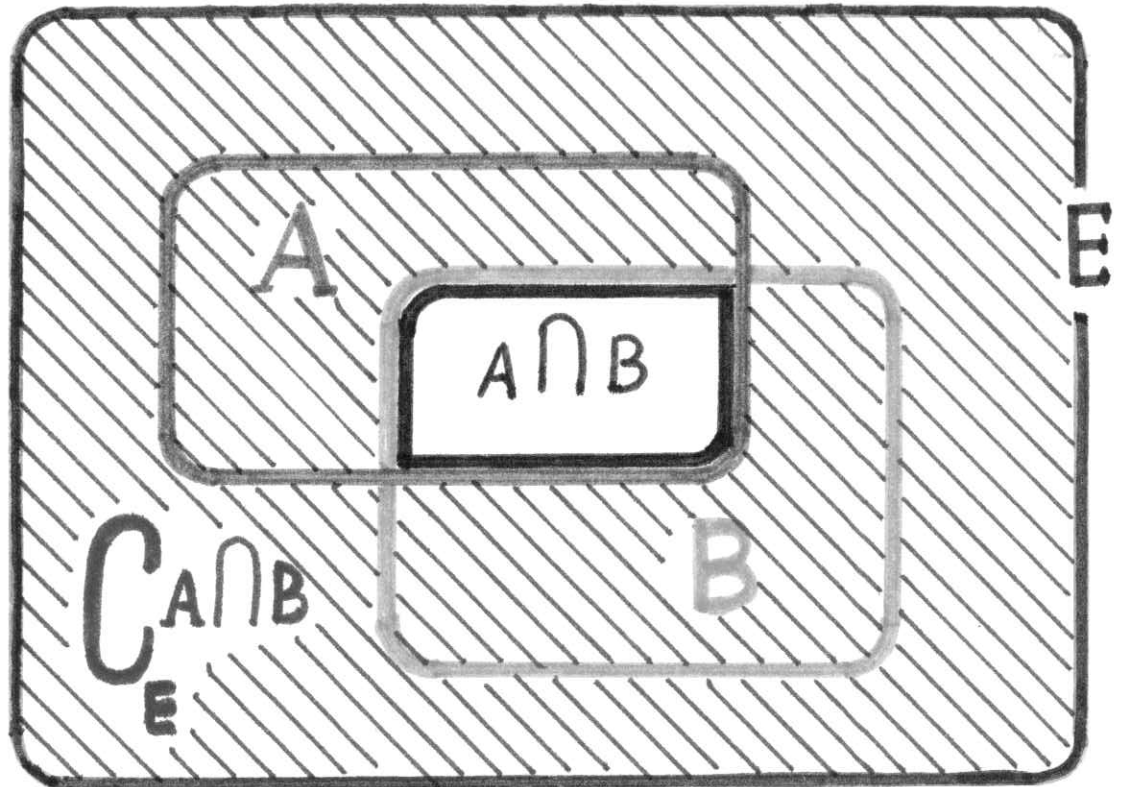
Nous constatons que:

$$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

Représentons par des schémas distincts les ensembles $C_E(A \cap B)$,
 $C_E^A \cup C_E^B$;



2°) On suppose les ensembles E , A , B , infinis. Nous pouvons illustrer la relation 23.12.5 à l'aide des diagrammes suivants.



B) Soit A, B , deux parties d'un ensemble donné E . Nous avons $A \cup B \subset E$ d'après 23.5.11. Puisque $A, B, A \cup B$, sont des parties de E , nous pouvons considérer les complémentaires de $A, B, A \cup B$, par rapport à E .

En utilisant 8.41.19, nous obtenons la proposition:

$$23.12.6. \quad \forall x \left[(x \in E \text{ et } \text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B)) \iff ((x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B)) \right]$$

Nous en déduisons, d'après 23.1.3 et 6.37.2,

$$23.12.7. \quad \forall x \left[(x \in E \text{ et } x \notin A \cup B) \iff ((x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B)) \right]$$

Par hypothèse, A, B , sont des parties de E et de ce fait, nous pouvons appliquer 22.1.3; nous obtenons:

$$23.12.8. \quad \forall x \left[x \in C_E(A \cup B) \iff (x \in C_E A \text{ et } x \in C_E B) \right]$$

Il nous est donc possible d'écrire, en tenant compte de 23.7.4:

$$23.12.9. \quad \forall x \left[x \in C_E(A \cup B) \iff x \in (C_E A \cap C_E B) \right]$$

Pour conclure, nous appliquerons 19.3.1, ce qui nous donne:

$$23.12.10. \quad \text{Si } A \subset E \text{ et } B \subset E, \text{ alors,} \\ C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

Exemples et schémas.

1°) Considérons les ensembles:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$A = \{1; 2; 5; 6\}$$

$$B = \{6; 7; 8\}$$

A, B , étant des parties de E , nous avons:

$$A \cup B = \{1; 2; 5; 6; 7; 8\}$$

$$C_E A = \{3; 4; 7; 8\}$$

$$C_E B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

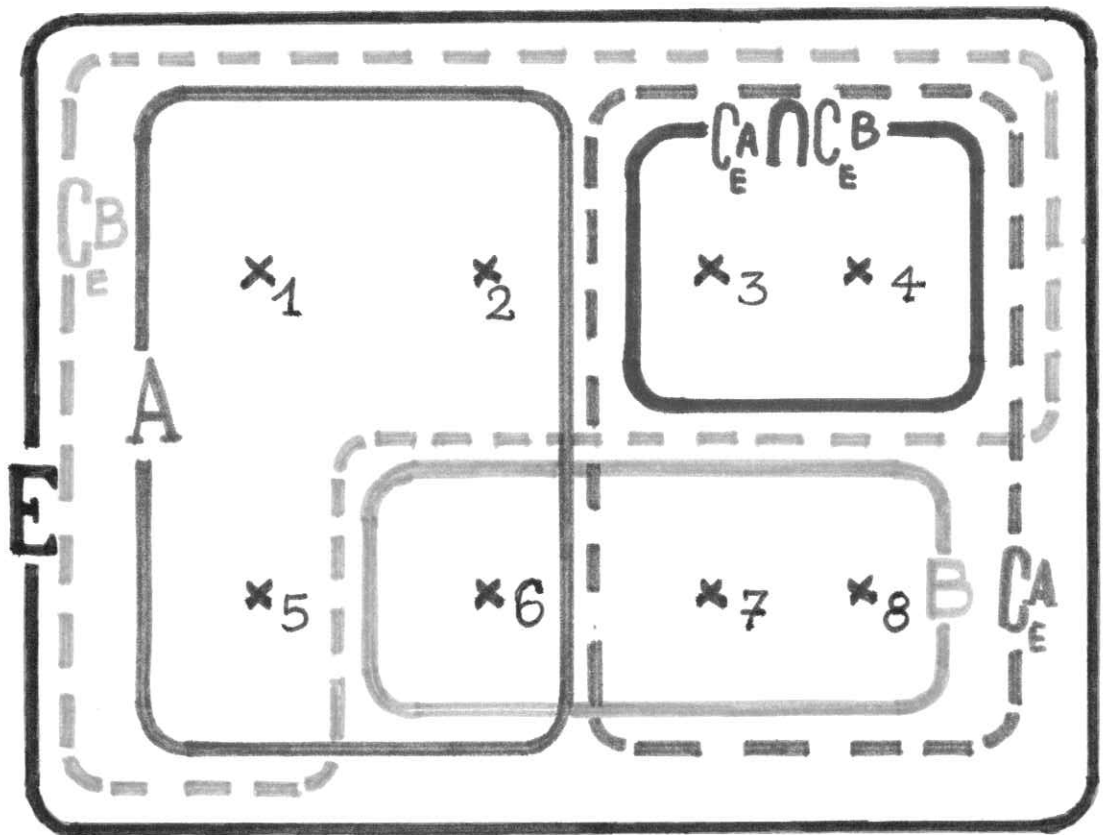
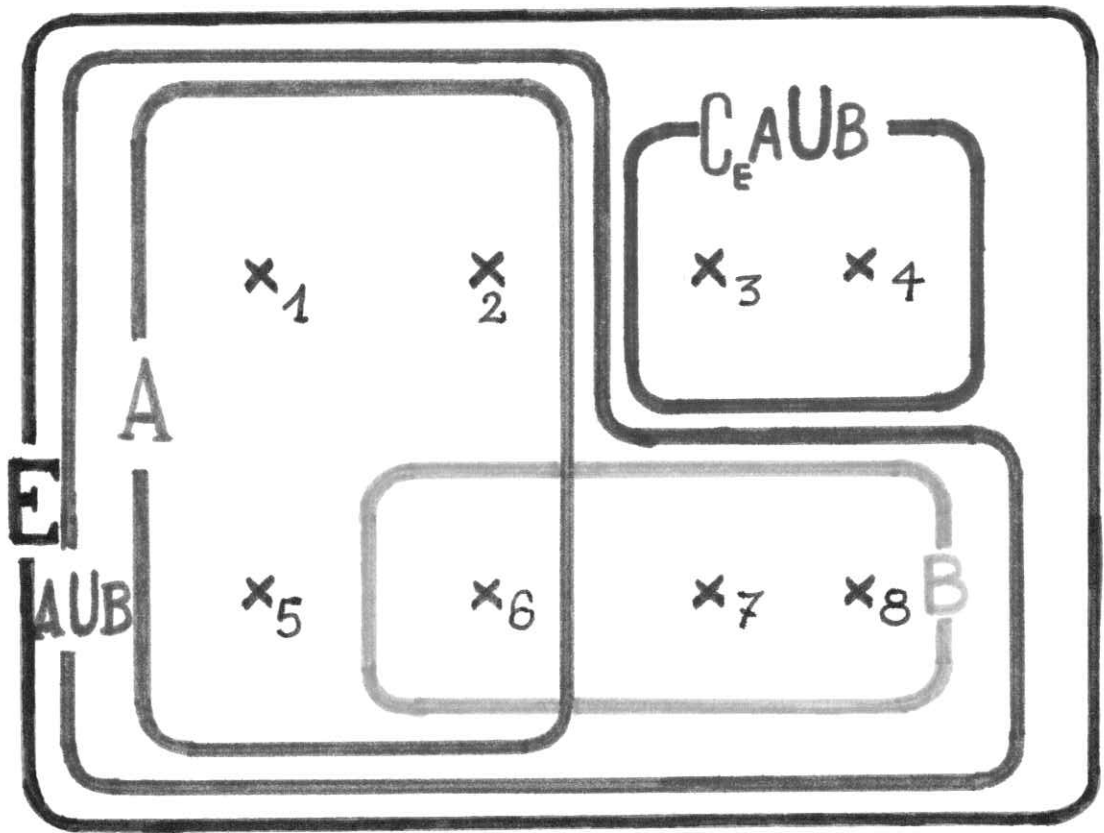
$$C_E(A \cup B) = \{3; 4\}$$

$$C_E A \cap C_E B = \{3; 4\}$$

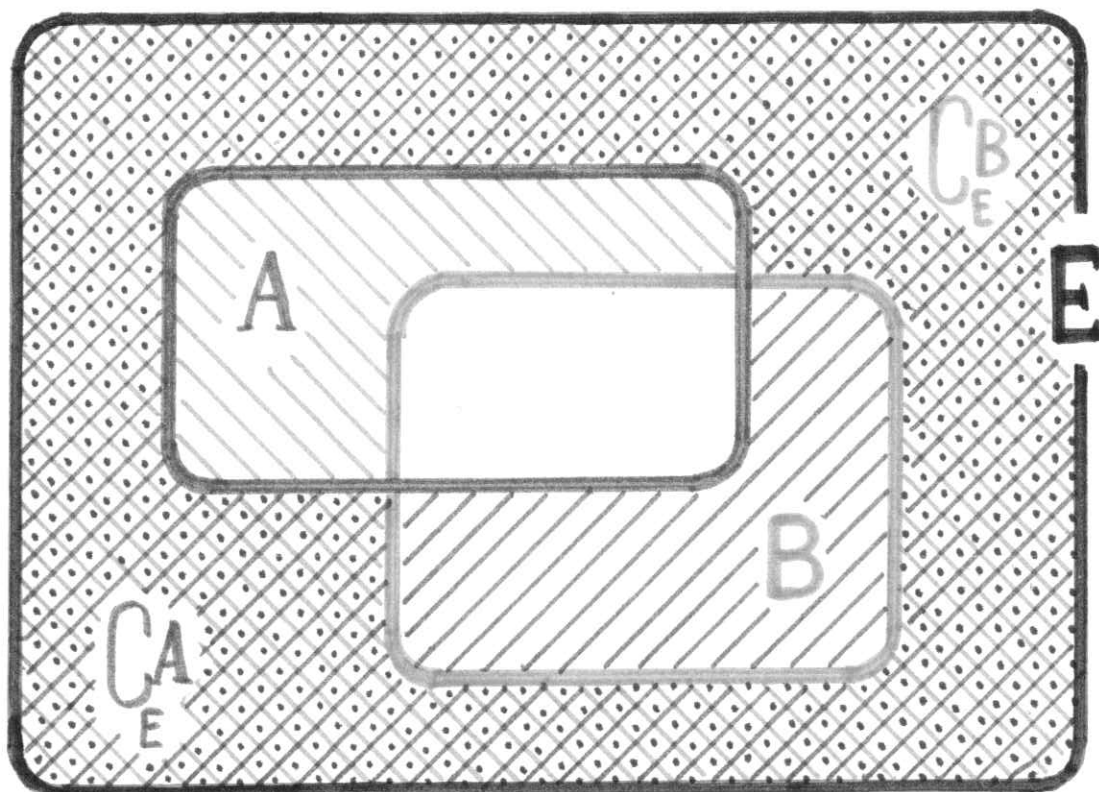
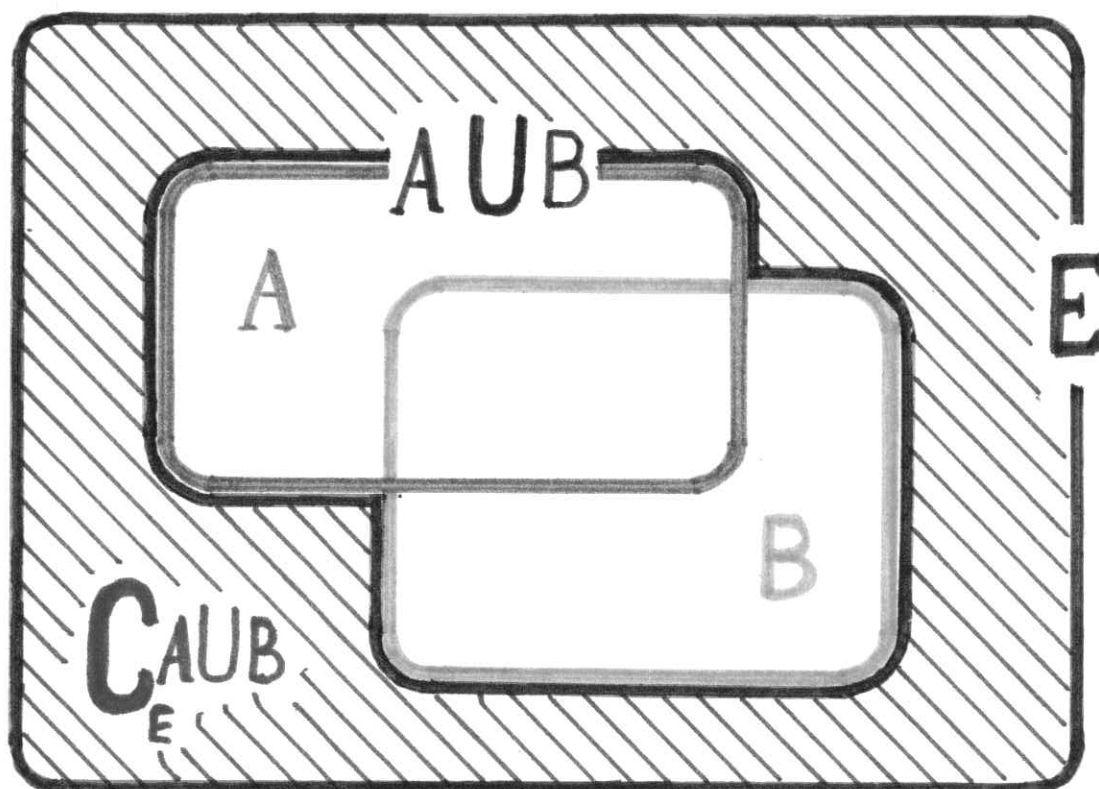
Nous obtenons:

$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B.$$

Représentons les ensembles $C_E(A \cup B), C_E A \cap C_E B$, à l'aide de schémas distincts.



2°) En supposant les ensembles E , A , B , infinis, les diagrammes suivants permettent d'illustrer la relation 23.12.10.



23.13. Distributivités.

Dans ce paragraphe, nous considérons trois ensembles A , B , C , donnés arbitrairement.

A) La réunion des ensembles A , $B \cap C$, est un ensemble qui se note $A \cup (B \cap C)$. L'intersection des ensembles $A \cup B$, $A \cup C$, est un ensemble qui se note $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. D'après 6.15.1, nous avons la proposition vraie:

$$23.13.1. \quad \forall x \left[(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C)) \right. \\ \left. \iff ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in C)) \right]$$

En tenant compte de 23.1.3 et de 23.7.4, nous obtenons d'abord

$$\forall x \left[(x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C)) \iff (x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C) \right]$$

puis,

$$\forall x \left[x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \right]$$

D'après 15.3.1, nous énonçons:

$$23.13.2. \quad \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Cette relation exprime une Propriété généralement appelée "distributivité" de la réunion par rapport à l'intersection.

Exemples et schémas.

1^a) Soit les ensembles:

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$B = \{a, b, e, f, i, j\}$$

$$C = \{f, g, h, j, k, l\}$$

Nous en déduisons:

$$B \cap C = \{f, j\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, j\}$$

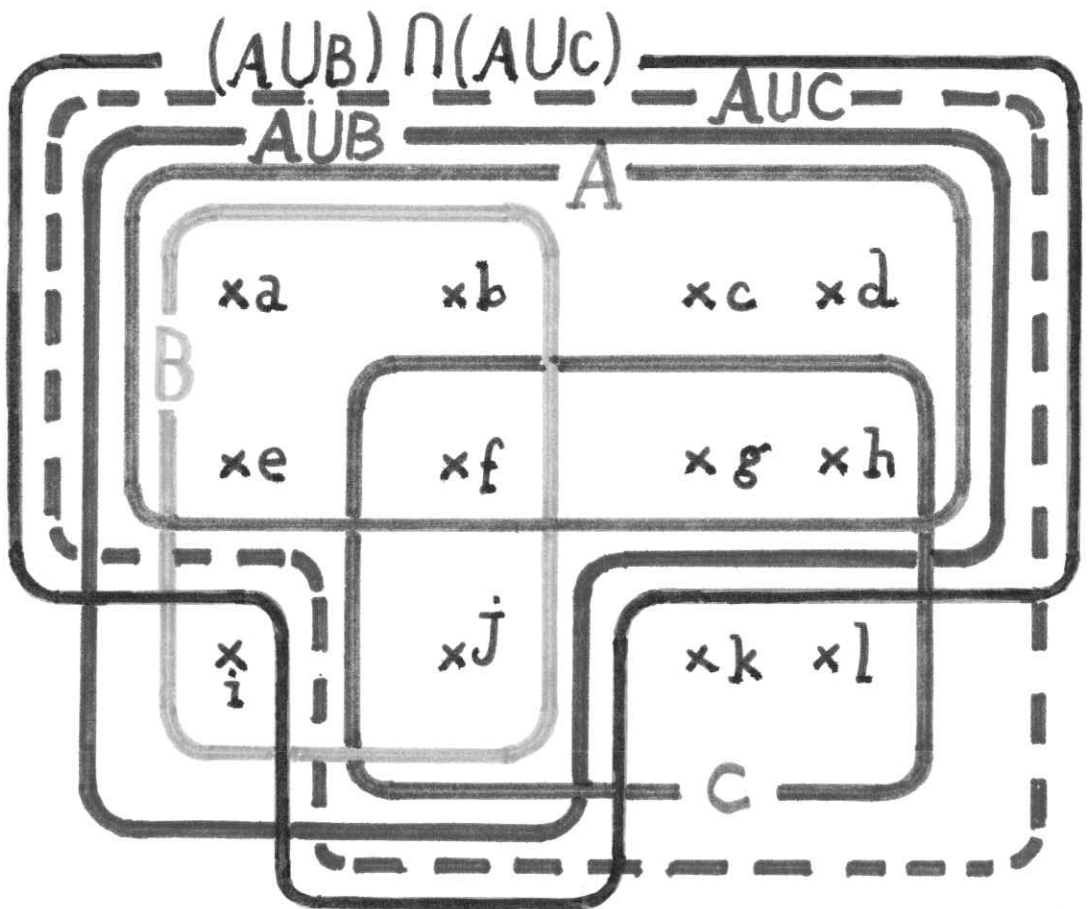
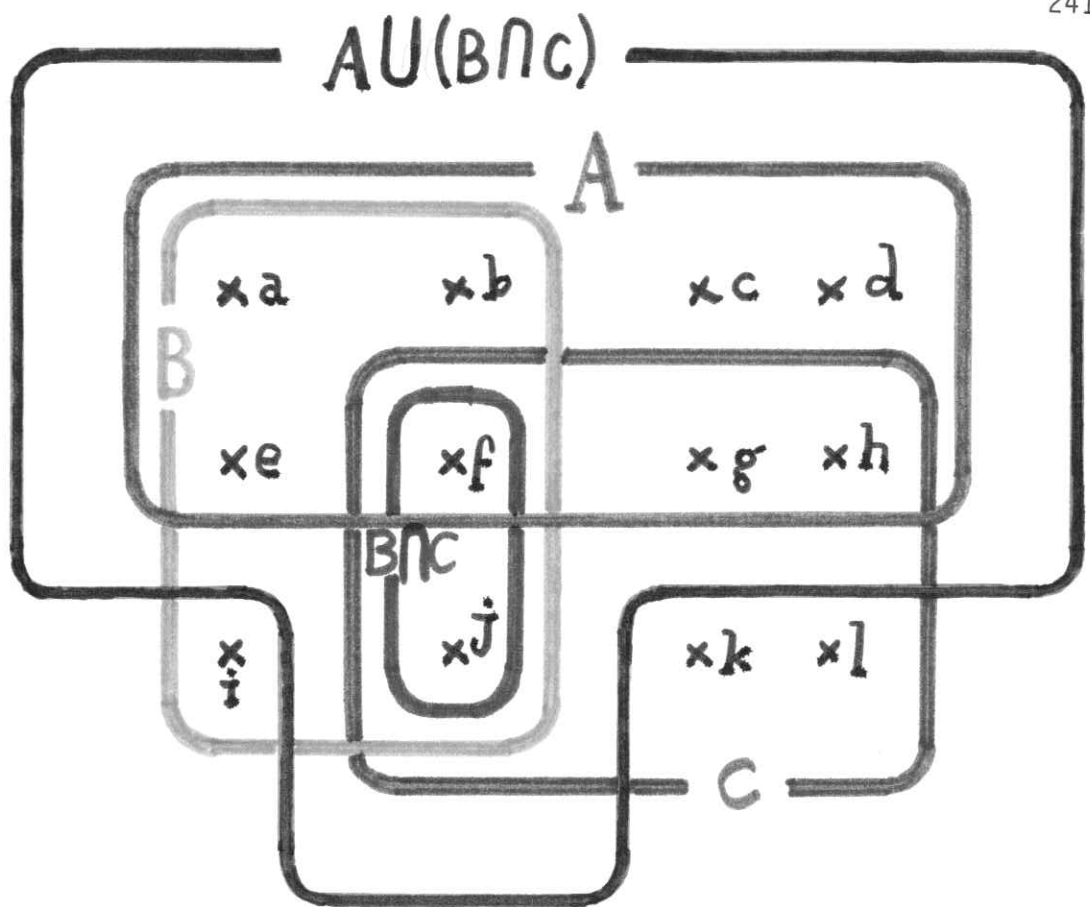
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l\}$$

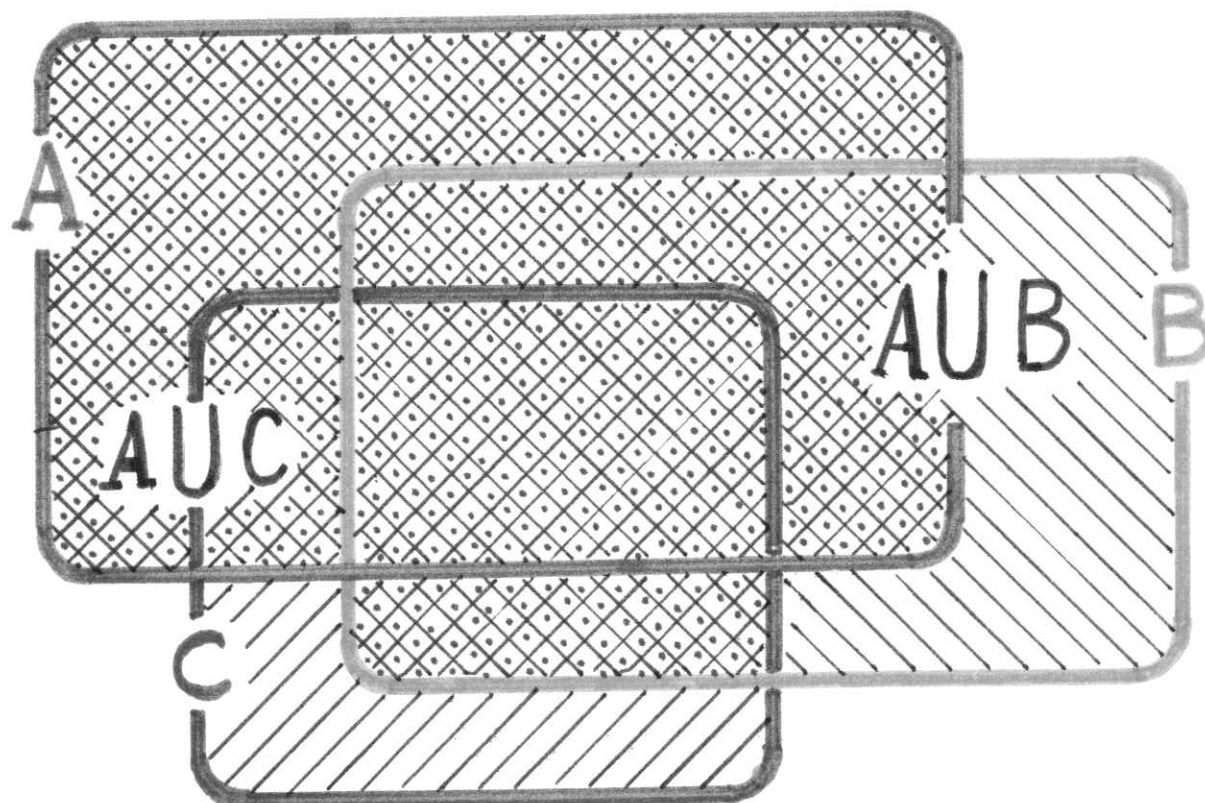
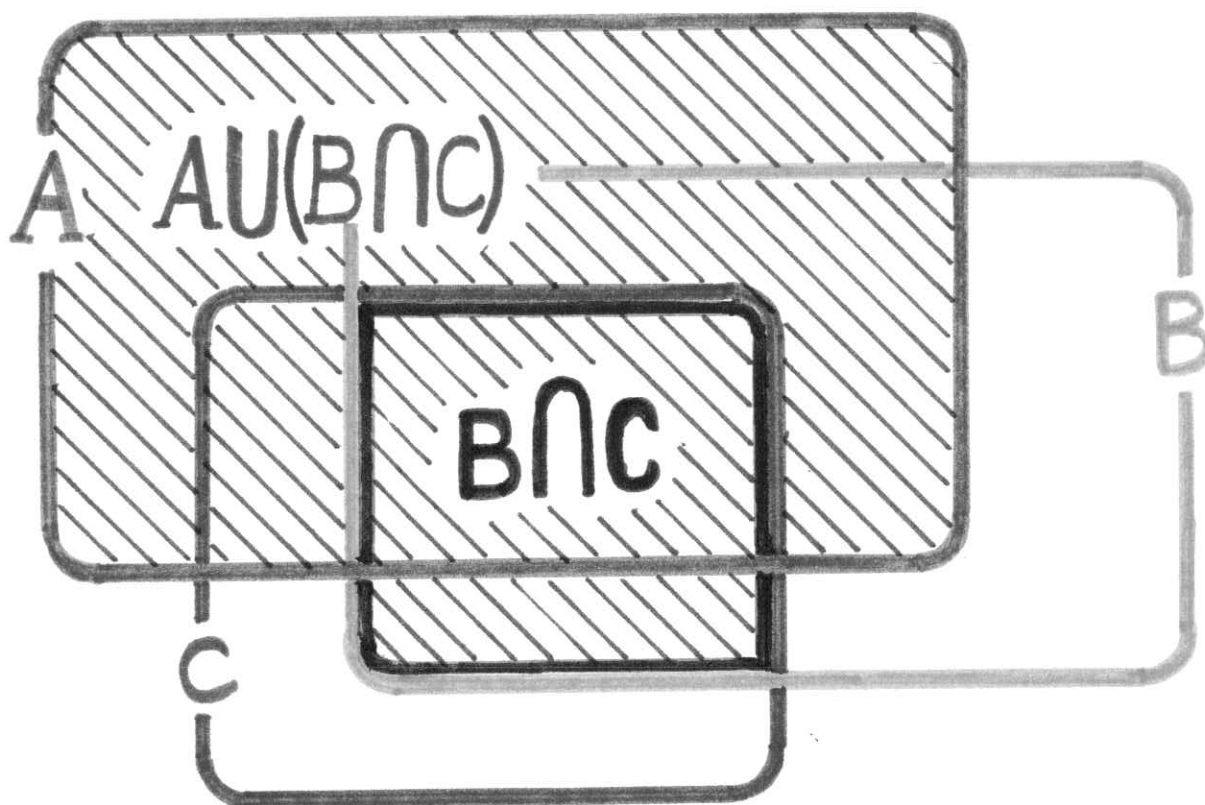
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, j\}$$

Nous constatons que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Nous symbolisons les deux membres de cette égalité à l'aide des schémas suivants.



2°) Dans le cas où les ensembles A , B , C , sont infinis, la relation 23.13.2 peut-être illustrée à l'aide des schémas suivants.



B) L'intersection des ensembles A , $B \cup C$, est un ensemble noté $A \cap (B \cup C)$. La réunion des ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, est un ensemble noté $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

En utilisant 6.16.1, nous pouvons écrire la proposition vraie:

$$23.13.3. \quad \forall x \left[(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)) \iff ((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C)) \right]$$

Nous en déduisons (23.1.3 et 23.7.4):

$$\forall x \left[(x \in A \text{ et } x \in B \cup C) \iff (x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C) \right]$$

soit encore:

$$\forall x \left[(x \in A \cap (B \cup C)) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \right]$$

Nous pouvons alors énoncer (19.3.1):

$$23.13.4. \quad \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Cette relation exprime une propriété souvent désignée par "distributivité" de l'intersection par rapport à la réunion.

Exemples et schémas.

1°) Considérons les ensembles:

$$\begin{aligned} A &= \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \} \\ B &= \{ 5; 6; 7; 9; 10; 11 \} \\ C &= \{ 7; 8; 11; 12 \} \end{aligned}$$

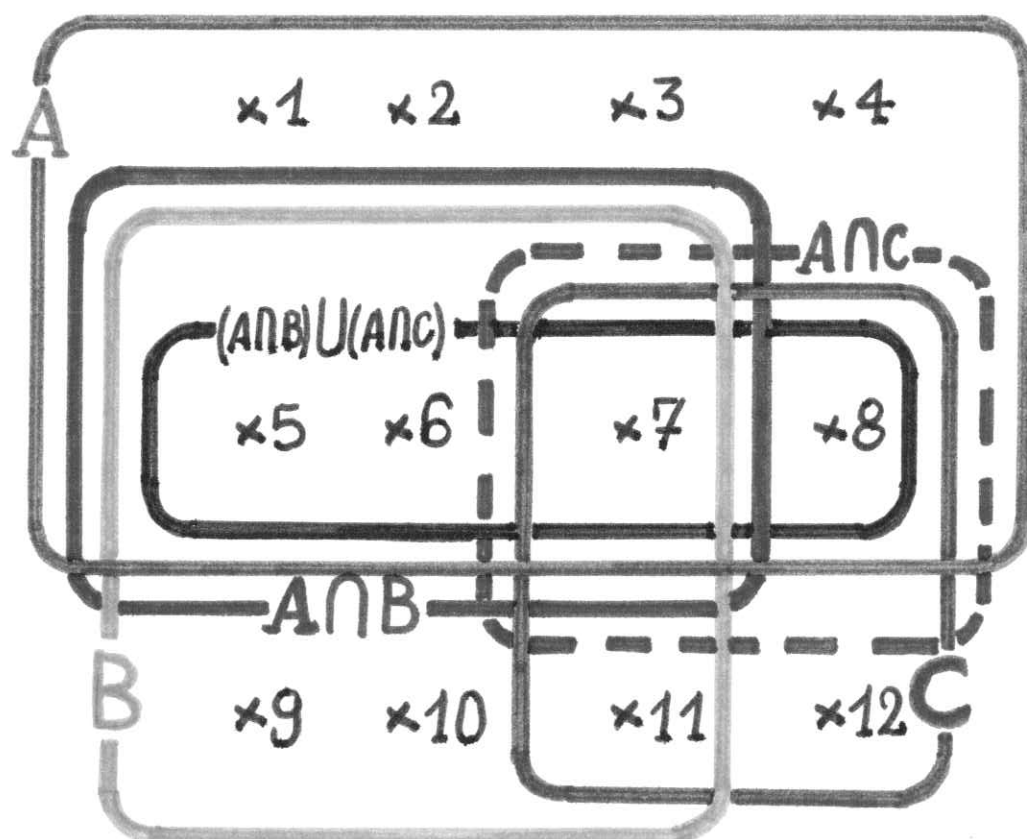
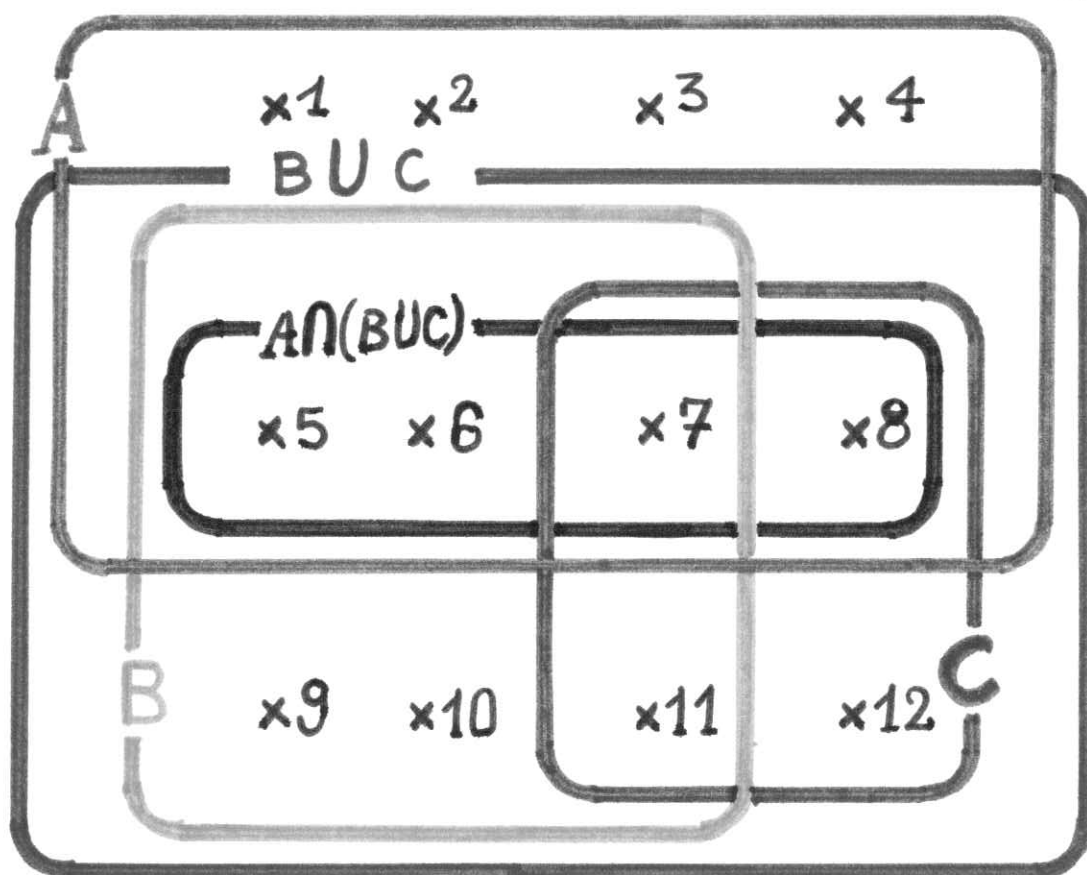
Il en résulte:

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{ 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 \} \\ A \cap (B \cup C) &= \{ 5; 6; 7; 8 \} \\ A \cap B &= \{ 5; 6; 7 \} \\ A \cap C &= \{ 7; 8 \} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{ 5; 6; 7; 8 \} \end{aligned}$$

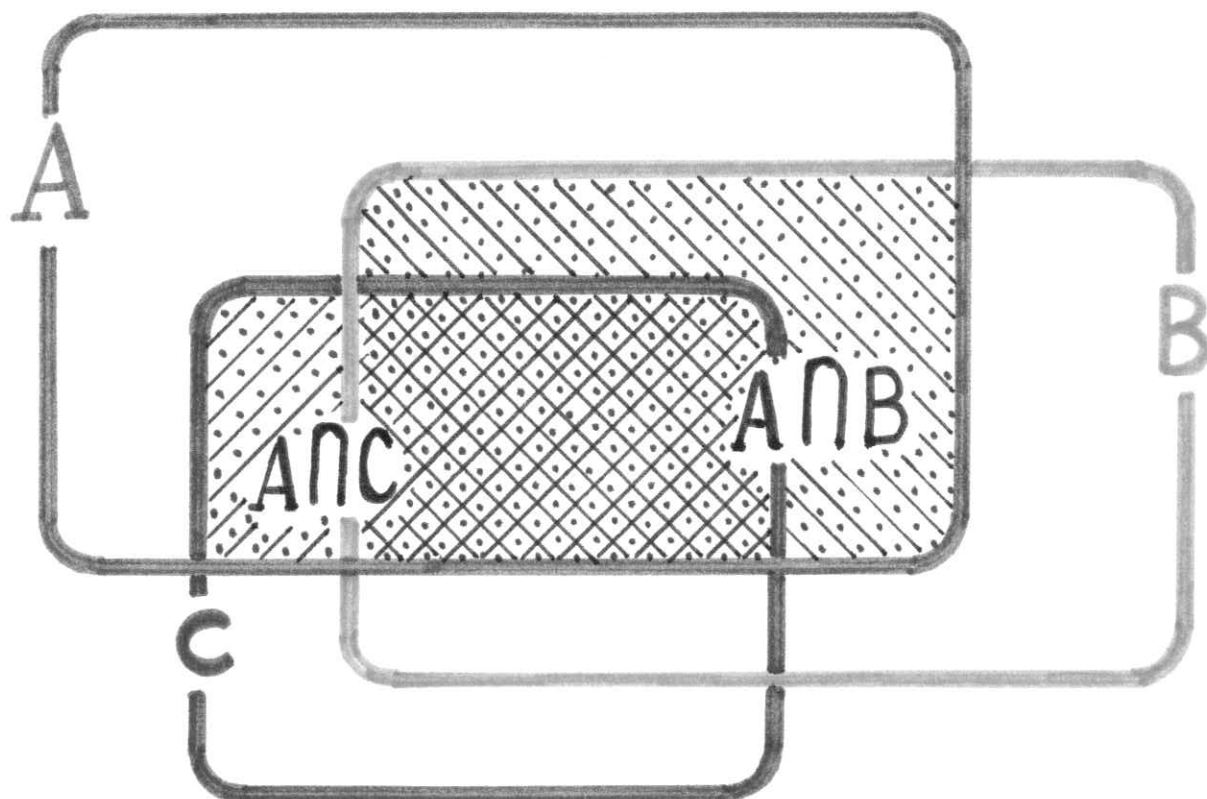
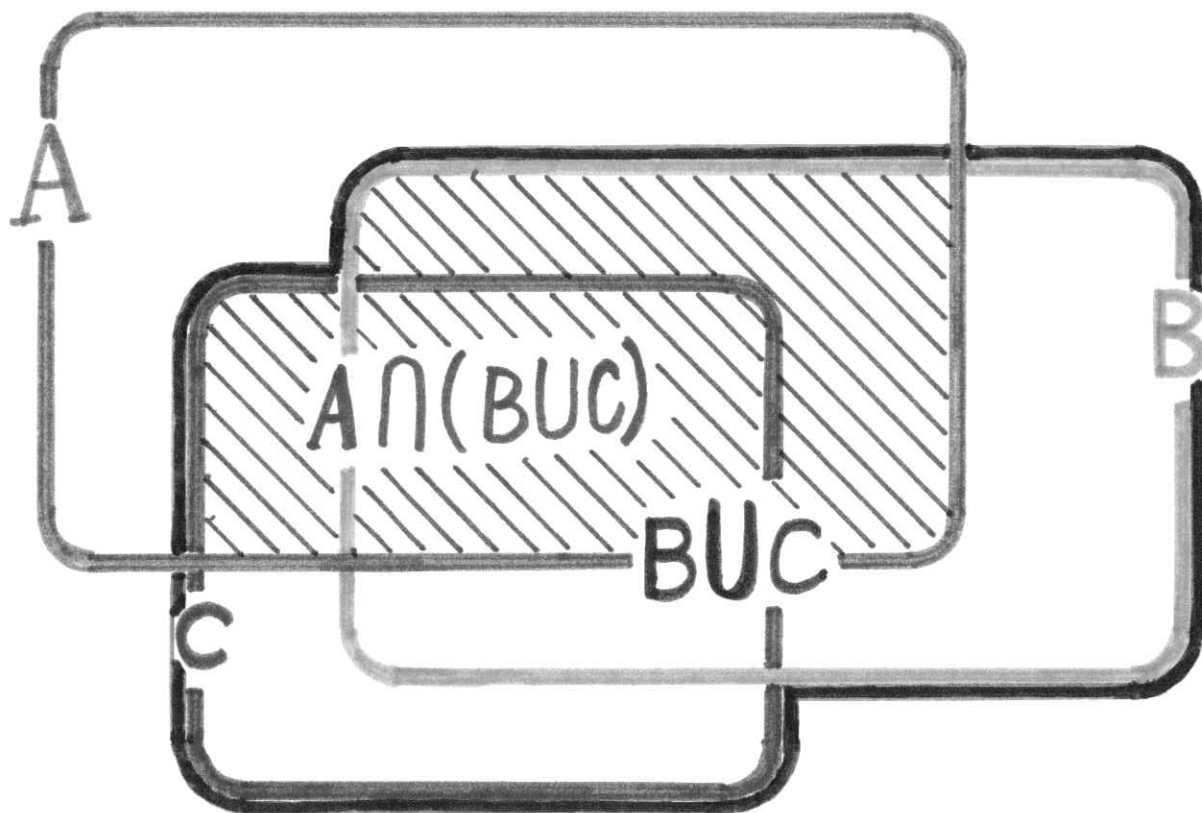
De ce fait:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Les deux membres de cette égalité sont représentés par les schémas suivants:



2°) Lorsque les ensembles A , B , C , envisagés sont infinis, les schémas suivants permettent d'illustrer la relation 23.13.4.



C) La réunion des ensembles $A, B \cup C$, est un ensemble qui se note $A \cup (B \cup C)$. La réunion des ensembles $A \cup B, A \cup C$, est un ensemble qui se note $(A \cup B) \cup (A \cup C)$.

En utilisant 6.17.1, nous obtenons la proposition vraie:

$$23.13.5. \quad \forall x \left[(x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)) \iff ((x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ ou } x \in C)) \right]$$

La relation 23.1.3 nous permet d'écrire:

$$\forall x \left[(x \in A \text{ ou } x \in B \cup C) \iff (x \in A \cup B \text{ ou } x \in A \cup C) \right]$$

C'est à dire

$$\forall x \left[x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cup (A \cup C) \right]$$

D'après 19.3.1, nous pouvons énoncer:

$$23.13.6. \quad \begin{array}{l} \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C) \end{array}$$

Exemple.

Soit les ensembles:

$$\begin{array}{l} A = \{ a, b, d \} \\ B = \{ c, d, e \} \\ C = \{ d, e, f \} \end{array}$$

De ce fait,

$$\begin{array}{l} B \cup C = \{ c, d, e, f \} \\ A \cup (B \cup C) = \{ a, b, c, d, e, f \} \\ A \cup B = \{ a, b, c, d, e \} \\ A \cup C = \{ a, b, d, e, f \} \\ (A \cup B) \cup (A \cup C) = \{ a, b, c, d, e, f \} \end{array}$$

Nous avons effectivement:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

D) En utilisant la loi logique 6.18.1, nous démontrerions de la même manière le résultat suivant:

$$23.13.7. \quad \begin{array}{l} \text{Quels que soient les ensembles } A, B, C, \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C) \end{array}$$

Exemple et schéma..

Considérons les ensembles:

$$\begin{array}{l} A = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11 \} \\ B = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \} \end{array}$$

$$C = \{ 5; 6; 8; 9; 11; 12 \}$$

Nous en déduisons:

$$B \cap C = \{ 5; 6; 8; 9 \}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{ 5; 8 \}$$

$$A \cap B = \{ 1; 2; 4; 5; 7; 8 \}$$

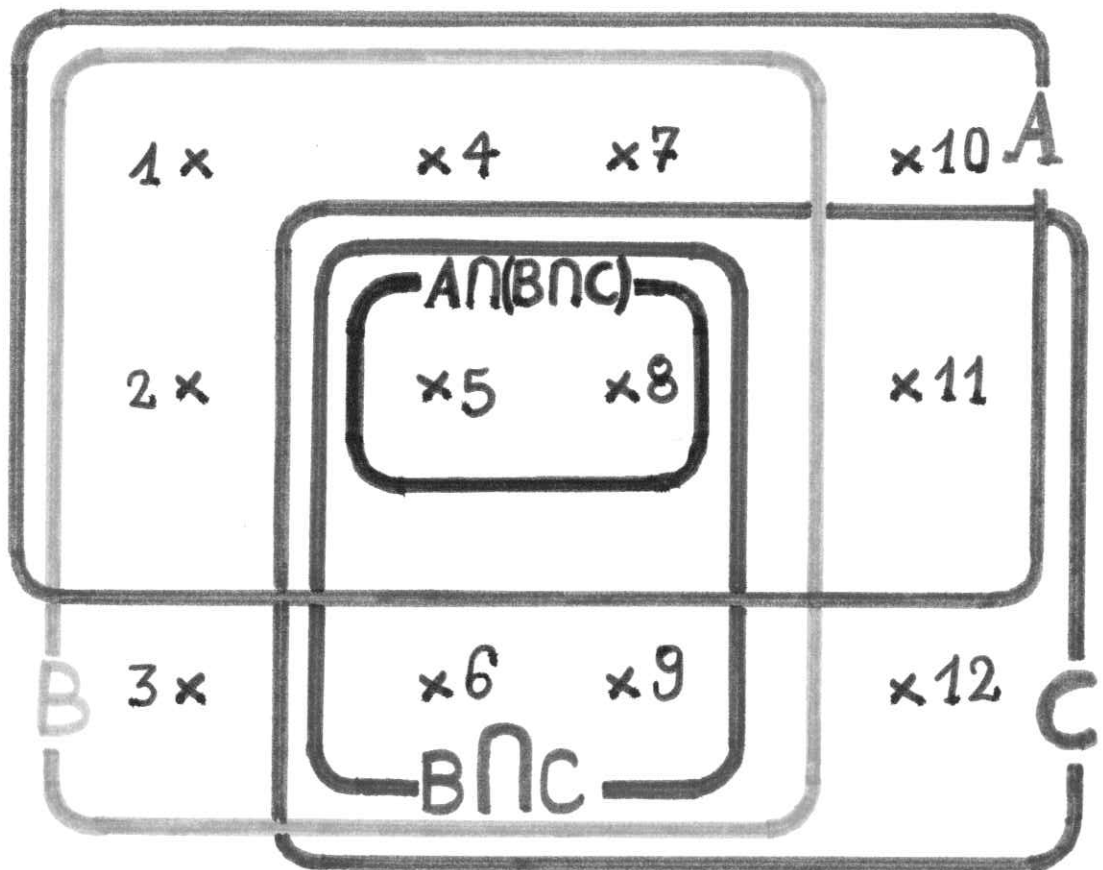
$$A \cap C = \{ 5; 8; 11 \}$$

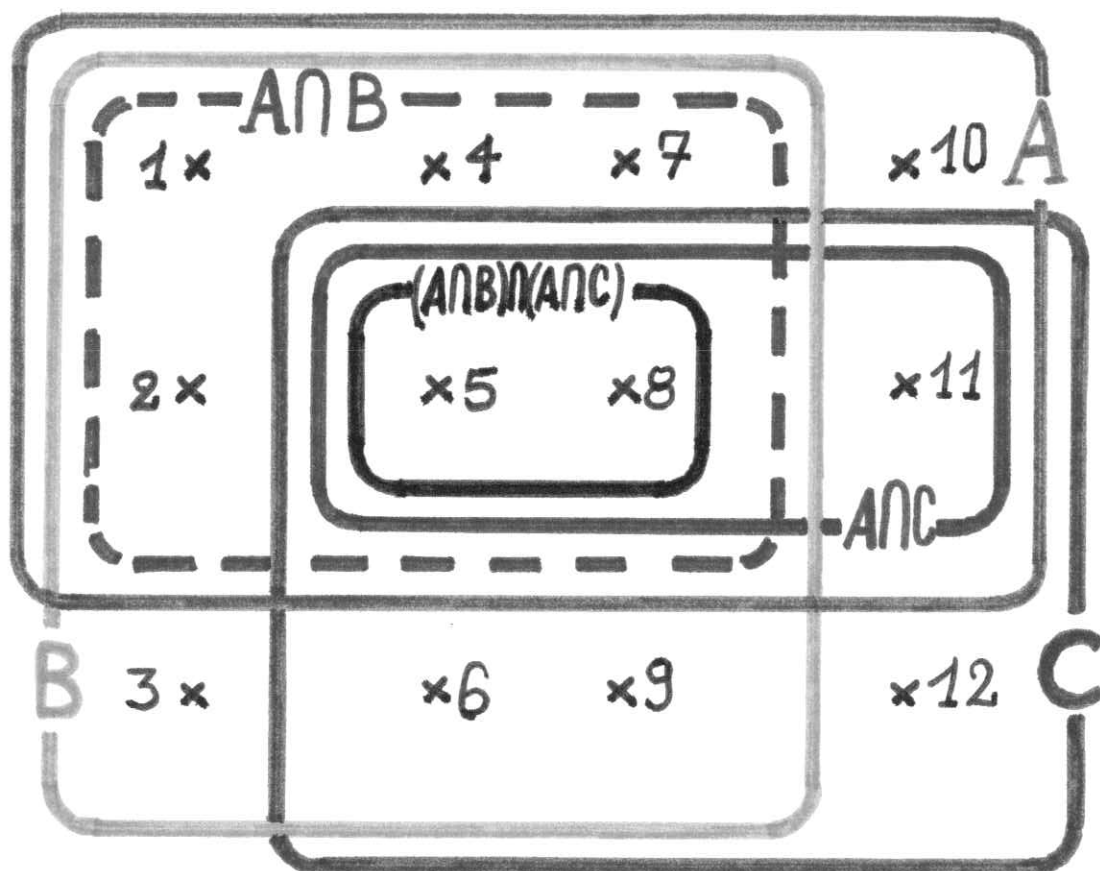
$$(A \cap B) \cap (A \cap C) = \{ 5; 8 \}$$

et par conséquent:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

Cet exemple peut être illustré à l'aide des diagrammes suivants:





23.14. Remarques

Soit A, B, C , trois ensembles donnés arbitrairement. Il est clair que les implications:

$$23.14.1. \quad A = B \Rightarrow A \cap C = B \cap C$$

$$23.14.2. \quad A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$$

sont vraies quels que soient les ensembles A, B, C .

Par contre, les implications réciproques de 23.14.1 et 23.14.2, sont fausses. Il suffit pour s'en convaincre d'examiner les exemples suivants.

1^o) Considérons les ensembles:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{b, c, e, f\}$$

$$C = \{c, d\}$$

Dans ce cas, nous avons,

d'une part:

$$A \cap C = \{c\}$$

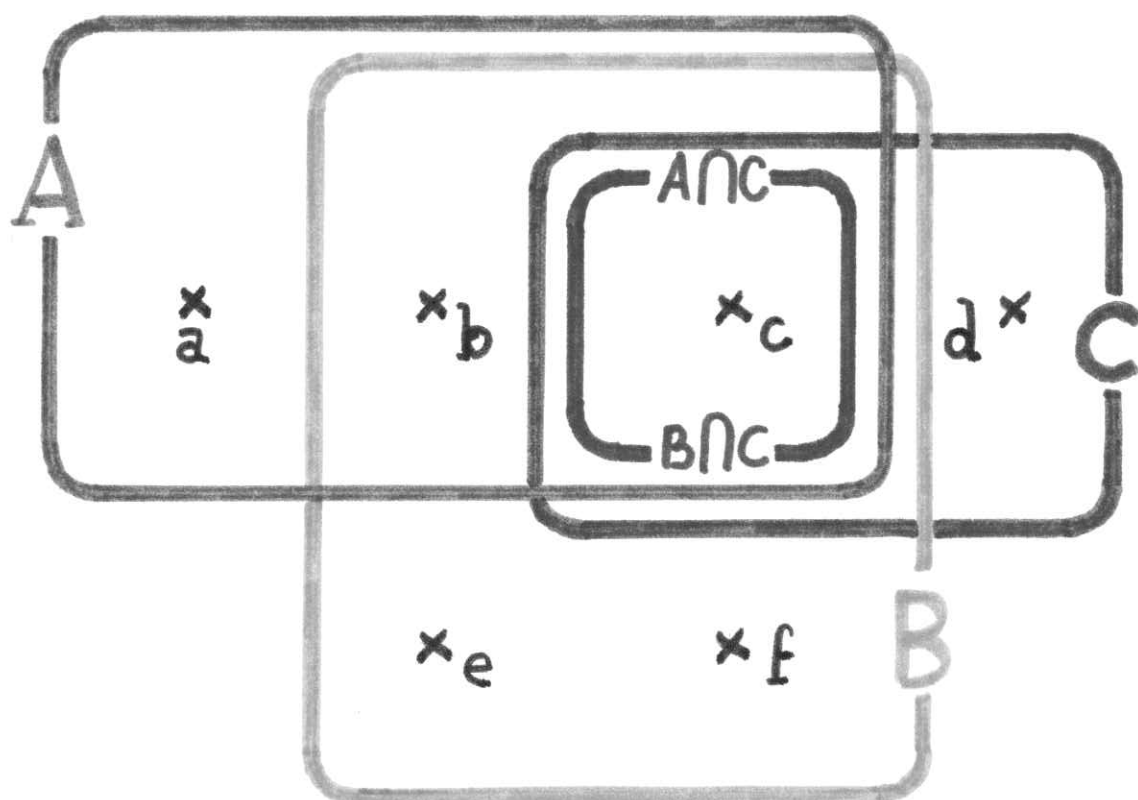
$$B \cap C = \{c\}$$

$$\text{c'est à dire } A \cap C = B \cap C$$

d'autre part:

$$A \neq B$$

Cette situation peut être représentée à l'aide du schéma suivant.



2°) Soit les ensembles:

$$A = \{1; 2; 3; 5; 6\}$$

$$B = \{1; 5; 6; 7\}$$

$$C = \{2; 3; 4; 6; 7; 8\}$$

Nous en déduisons;

d'une part:

$$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

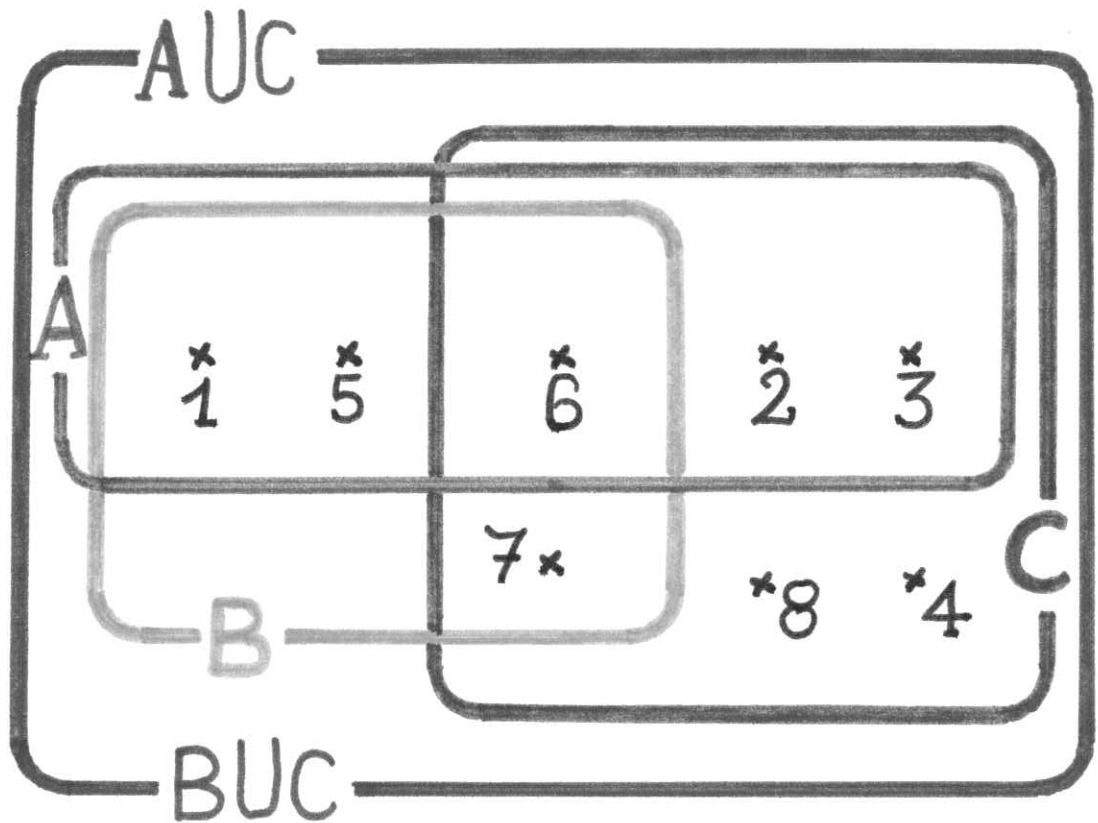
$$B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$\text{c'est à dire } A \cup C = B \cup C$$

d'autre part:

$$A \neq B$$

Ce cas peut être représenté par le schéma suivant.



Par contre, l'équivalence logique suivante est vraie (23.5.11).

23.14.3.

Quels que soient les ensembles A, B,

$$A \cup \emptyset = B \cup \emptyset \iff A = B$$

D'autre part, quelles que soient les parties A, B, d'un ensemble E, (23.11.11):

23.14.4.

$$A \cap E = B \cap E \iff A = B$$

est vraie.

23.15. Recouvrement.

Soit $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$, des ensembles dont la réunion est notée:

$$\bigcup_i A_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Si un ensemble E est tel que:

$$E \subset \bigcup_i A_i$$

nous dirons que l'ensemble ayant pour éléments les $A_i, i \in \{1, \dots, n\}$ constitue un recouvrement de E .

Exemple et diagramme.

$$\begin{aligned} \text{Soit les ensembles: } A_1 &= \{a, b, f, g\} \\ A_2 &= \{a, b, c, d, e\} \\ A_3 &= \{b, c, d, g, h, i\} \end{aligned}$$

Considérons maintenant les ensembles:

$$\begin{aligned} E &= \{a, b, c, f, g, h\} \\ F &= \{c, d, e, h, i, j\} \end{aligned}$$

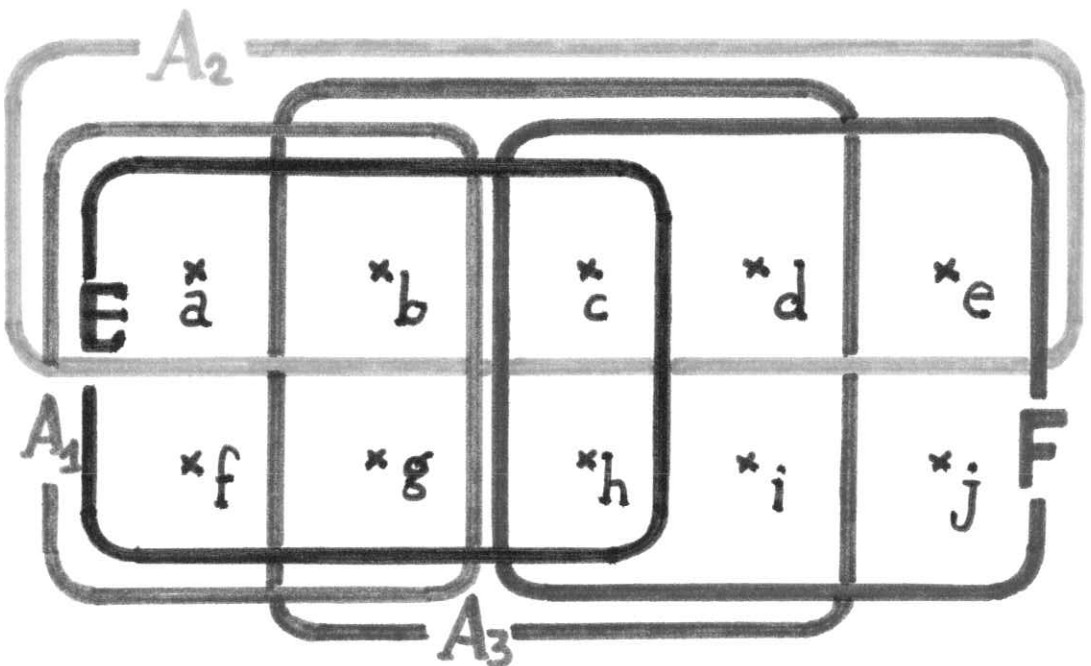
Nous avons:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

De ce fait, $E \subset (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ est une relation vraie. L'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ est donc un recouvrement de E .

Par contre, puisque j n'est pas un élément de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, l'ensemble F n'est pas inclus dans cette réunion et $\{A_1, A_2, A_3\}$ n'est pas un recouvrement de F .

Cet exemple peut être illustré de la manière suivante:



23.16. Partition.

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

Nous dirons que des éléments A_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ de $\mathcal{P}(E)$, c'est à dire des parties de E , constituent un ensemble appelé partition de E , si et seulement si ces éléments vérifient les trois conditions suivantes:

$$1^\circ) \quad \forall i (i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A_i \neq \emptyset)$$

$$2^\circ) \quad (\forall i) (\forall j) \left[(i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{1, \dots, n\} \text{ et } i \neq j) \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \right]$$

$$3^\circ) \quad \bigcup_i A_i = E, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Ce qui précède signifie que les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, ne sont pas vides, n'ont aucun élément commun, et ont pour réunion l'ensemble E lui-même. De ce fait, a étant un élément donné de E , il est nécessairement élément d'une des parties de la partition et d'une seule.

Remarque.

Une partition de E est un recouvrement de E , mais un recouvrement de E n'est pas nécessairement une partition de E .

Exemples et schémas.

A°) Soit l'ensemble E :

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

Les ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = \{a, b, c\}$$

$$A_2 = \{d, e\}$$

$$A_3 = \{f\}$$

$$A_4 = \{g, h, i, j\}$$

sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$. Nous avons:

$$1^\circ) \quad A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset, A_3 \neq \emptyset, A_4 \neq \emptyset.$$

$$2^\circ) \quad A_1 \cap A_4 = \emptyset, A_2 \cap A_4 = \emptyset.$$

$$3^\circ) \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$$

En conséquence, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une partition de E .

En considérant $A' = \{a, f\}$

$$B' = \{b, g\}$$

$$C' = \{c, h\}$$

$$D' = \{d, i\}$$

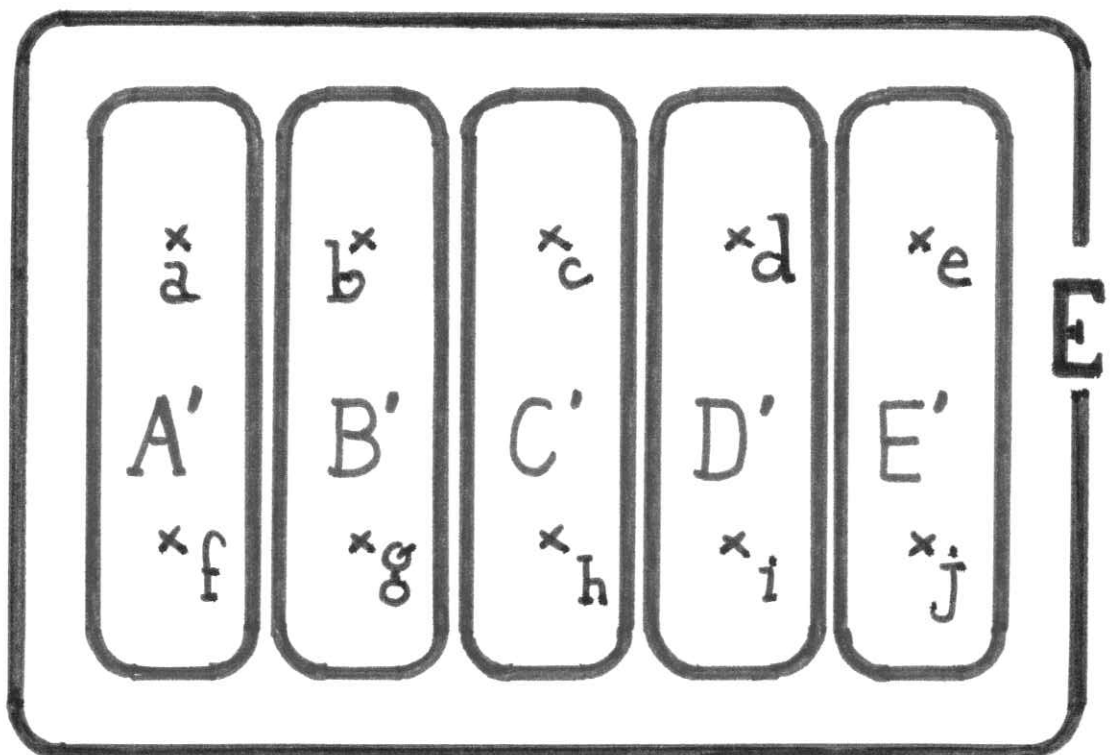
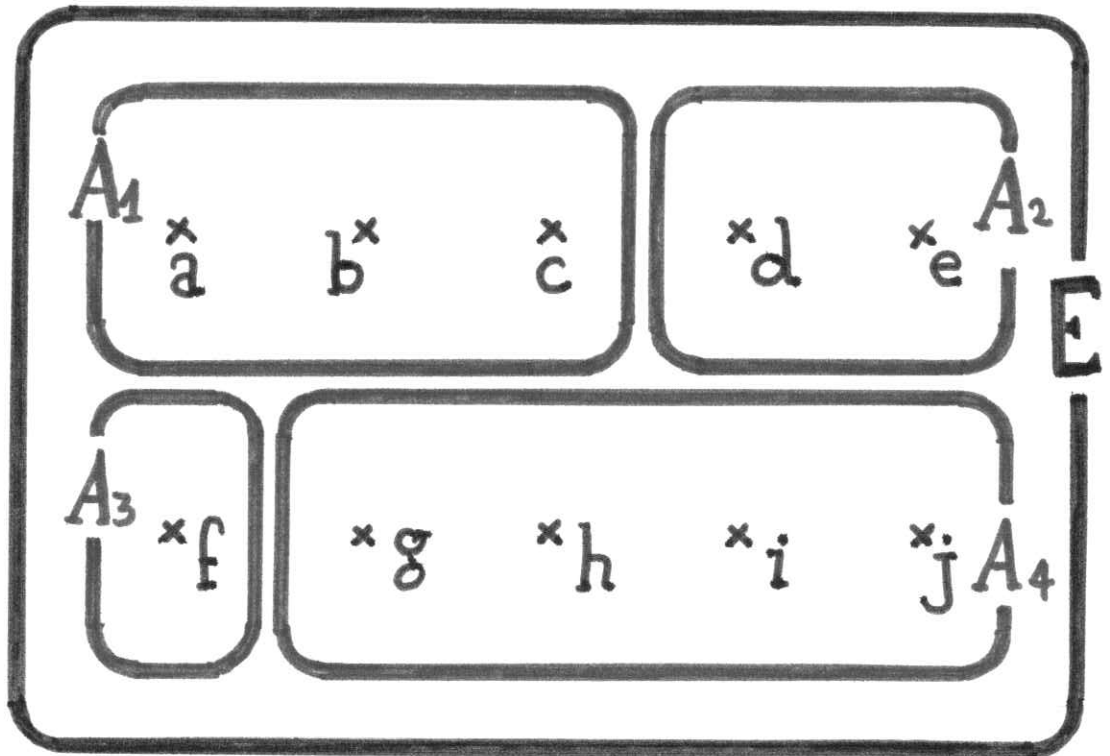
$$E' = \{e, j\}$$

Nous pouvons encore affirmer que $\{A', B', C', D', E'\}$ est une

partition de E .

Par contre, $\{A_1, A', A_3, A_4\}$ n'est pas une partition de E puisque $A_1 \cap A' = \{a\}$.

Nous pouvons représenter cet exemple à l'aide des schémas suivants:



B) Soit l'ensemble $\mathbb{N}$ et les parties de $\mathbb{N}$ suivantes:

$$A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 2 \mid (x + 1)\}$$

$$A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (2 \mid x \text{ et } x < 111)\}$$

$$A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (2 \mid x \text{ et } x > 111)\}$$

Le lecteur établira aisément que:

A_1, A_2, A_3 sont non vides,

A_1, A_2, A_3 sont disjoints deux à deux,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{N}$$

De ce fait, $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de $\mathbb{N}$.

E X E R C I C E S

E.23.1.

Soit les ensembles:

$$A = \{a, b, d, e, f\}$$

$$B = \{a, c, g, e\}$$

$$C = \{b, g, e, f\}$$

Déterminer toutes les réunions et toutes les intersections de ces ensembles pris deux à deux.

Construire les diagrammes correspondants.

E.23.2.

On désigne par:

A l'ensemble des diviseurs de 72.

B l'ensemble des diviseurs de 315.

C l'ensemble des diviseurs de 99.

Déterminer toutes les réunions et toutes les intersections de ces ensembles pris deux à deux.

Construire les diagrammes correspondants.

E.23.3.

Les ensembles A, B, C, sont ceux de l'exercice E.23.2.

Déterminer les ensembles suivants;

$$A \cap B \cap C ; A \cup B \cup C ; A \cap (B \cup C) ; A \cup (B \cap C)$$

E.23.4.

Soit A, B, C, D, quatre ensembles tels que:

$$A \subset B \text{ et } C \subset D \text{ et } B \subset C \text{ et } D \subset A$$

Que peut-on dire de ces quatre ensembles?

E.23.5.

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et les ensembles:

$$A = \{b, c, f\}$$

$$B = \{b, c, d, e, f, g\}$$

1°) Trouver toutes les parties X de E telles que $A = B \cup X$.

2°) Trouver toutes les parties X de E telles que $B = X \cup A$.

3°) Trouver toutes les parties X de E telles que $A = B \cap X$.

4°) Trouver toutes les parties X de E telles que $B = X \cap A$.

E.23.6.

A, B, E, sont les ensembles définis à l'exercice E.23.5.

Déterminer les ensembles:

$$B \cap C_E A ; A \cup C_E B ; C_E (A \cup B) ; C_E A \cup C_E B ; A \cap (B \cup A) ; B \cup (A \cap C_E B)$$

Construire les diagrammes correspondants.

E.23.7.

On considère trois ensembles A, B, C, tels que:

$$A = \{ a, b, d, e, f \}$$

$$B = \{ a, b, c, g \}$$

$$C = \{ a, c, h \}$$

D'autre part, on pose:

$$E = A \cup B$$

$$F = A \cup C$$

$$G = B \cup C$$

$$A' = A \cap B$$

$$B' = A \cap C$$

$$C' = B \cap C$$

$$A'' = E \cap F$$

$$B'' = A \cup C'$$

1°) Vérifier que $B'' \subset A''$ et que $A'' \subset B''$; quelle conséquence peut-on en tirer?

2°) Trouver toutes les relations d'inclusion liant ces ensembles pris deux à deux.

E.23.8.

A, B, C, sont les ensembles définis à l'exercice E.23.7.

Soit:

$$A' = A \cap B \text{ et } B' = A \cap C ; \text{ et } G = B \cup C \text{ et } H = A' \cup B' \text{ et } K = A \cap G.$$

Vérifier que $K \subset H$ et que $H \subset K$; que peut-on en déduire?

E.23.9.

Quels que soient les ensembles X, Y, Z, démontrer que, si $U = X \cup Y$ et $V = X \cup Z$ et $W = U \cap V$ et $W' = X \cup (Y \cap Z)$, alors $W = W'$.

E.23.10.

Quels que soient les ensembles X, Y, Z , démontrer que si $U = X \cap Y$ et $V = X \cap Z$ et $W = U \cup V$ et $W' = X \cap (Y \cup Z)$ alors, $W = W'$.

E.23.11.

A, B, C, D , désignant des ensembles quelconques, utiliser les propriétés de la réunion, de l'intersection, pour simplifier la notation des ensembles suivants:

$$\begin{aligned} & (B \cap C) \cup (C \cap A) \\ & (C \cup A) \cap (D \cap \emptyset) \\ & B \cap (A \cap (A \cup B)) \\ & C \cup (D \cup (C \cap D)) \\ & [(B \cap C) \cup (A \cap D)] \cap [(C \cup B) \cap B) \cap C] \end{aligned}$$

E.23.12.

A, B, C, D , désignant des ensembles quelconques, utiliser les propriétés de la réunion, de l'intersection, pour simplifier la notation des ensembles suivants:

$$\begin{aligned} & [(A \cap (B \cup C)) \cap B] \cap [B \cup ((C \cap B) \cup A)] \\ & (A \cap (B \cup C)) \cap [(C \cup (B \cup D)) \cap \emptyset] \cap (A \cup (B \cap C)) \\ & A \cap (B \cap (A \cup B) \cap B) \cap A \end{aligned}$$

E.23.13.

Reprendre l'exercice E.23.11, en supposant, en outre, que l'on a $B \subset A$.

E.23.14.

Reprendre l'exercice E.23.12 dans les deux cas suivants:

- 1°) Lorsque $A \subset B$ et $D = \bigcup_E A$.
- 2°) Lorsque $A \subset B \subset C \subset D$.

E.23.15.

Soit quatre ensembles A, B, C, D , tels que $A \subset D$ et $B \subset D$ et $C \subset D$.

- 1°) Démontrer que: $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$
- 2°) Démontrer que: $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$

3^e) Démontrer que:

$$[A \subset B] \implies [(A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ et } (A \cap C) \subset (B \cap C)]$$

4^e) Démontrer que:

$$[A \subset B] \iff [(A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ et } (A \cap C) \subset (B \cap C)]$$

E.23.16.

Soit quatre ensembles A, B, C, D, tels que $A \subset D$ et $B \subset D$ et $C \subset D$.

1^e) Démontrer que:

$$[(A \cup C) \subset (B \cup C) \text{ et } A \cap C = \emptyset] \implies [A \subset B]$$

2^e) Démontrer que si: $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ et $(x \in A \text{ et } x \notin B)$ alors x est un élément de C.

E.23.17.

Quelles conditions doivent vérifier les ensembles E, F, G, pour que:

1^e) $E \cap F \cap G = \emptyset$?

2^e) $E \cap F \cap G = E$?

3^e) $E \cap F \cap G = E \cap G$?

E.23.18.

Quelles conditions doivent vérifier les ensembles E, F, G, pour que:

1^e) $E \cup F \cup G = \emptyset$?

2^e) $E \cup F \cup G = E$?

3^e) $E \cup F \cup G = E \cup G$?

E.23.19.

Quelles conditions doivent vérifier les ensembles E, F, G, pour que:

1^e) $E \cup (F \cap G) = \emptyset$?

2^e) $(E \cup F) \cap G = \emptyset$?

3^e) $E \cup (F \cap G) = E$?

4^e) $(E \cup F) \cap G = E$?

E.23.20.

Démontrer que, quels que soient les ensembles E, F,

$$E \cup (E \cap F) = E \cap (E \cup F)$$

E.23.21.

Démontrer que, quels que soient les ensembles E, F, G ,

$$[(E \cup G) \subset (E \cup F) \text{ et } (E \cap G) \subset (E \cap F)] \Rightarrow [G \subset F]$$

E.23.22.

Démontrer que quelles que soient les parties A, B , d'un ensemble E :

$$1^\circ) (\bigcap_E A \cup B) \cap A = B \cap A$$

$$2^\circ) (\bigcap_E A \cap B) \cup A = B \cup A$$

E.23.23.

Quelles que soient les parties A, B, C , d'un ensemble E , démontrer que:

$$1^\circ) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \\ = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$2^\circ) (C \cup B) \cap (C \cap A) = A \cap C$$

$$3^\circ) (C \cup B) \cup (C \cap A) = C \cup B$$

E.23.24.

Quelles que soient les parties A, B, C , de l'ensemble E , démontrer que:

$$1^\circ) (B \cup C) \cap (A \cup \bigcap_E C) = (B \cap \bigcap_E C) \cup (C \cap A)$$

$$2^\circ) \bigcap_E (A \cap B \cap C) = (\bigcap_E A) \cap (\bigcap_E B) \cap (\bigcap_E C)$$

$$3^\circ) \bigcap_E (A \cup B \cup C) = (\bigcap_E A) \cap (\bigcap_E B) \cap (\bigcap_E C)$$

E.23.25.

On donne les ensembles:

$$E = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$F = \{2; 3; 5\}$$

Déterminer:

$$\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$$

$$\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$$

$$E \cup \mathcal{P}(E)$$

$$F \cup \mathcal{P}(F)$$

$$(E \cup \mathcal{P}(E)) \cap (F \cup \mathcal{P}(F))$$

E.23.26.

E désigne l'ensemble:

$$\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$$

On considère les ensembles:

$$A = \{1; 3; 5; 15\}$$

$$B = \{x | x \in E \text{ et } x^2 \in E\}$$

$$C = \{x | x \in E \text{ et } \text{non}(2|x)\}$$

$$D = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$$

$$A' = \{x | x \in E \text{ et } \sqrt{x} \in E\}$$

$$B' = \{x | x \in E \text{ et } (2|x \Rightarrow x|4)\}$$

$$C' = \{x | x \in E \text{ et } \frac{x^2(x-5)^2 - 16}{x^2 - 5x - 4} = 0\}$$

$$D' = \{x | x \in E \text{ et } [(x < 8 \Rightarrow 2|(x-1)) \text{ et } x^2 - 11x + 28 \neq 0]\}$$

Définir en extension les ensembles suivants:

$$1^\circ) A \cup C; B \cap D; A' \cap B'; C' \cup D';$$

$$2^\circ) A \cap D \cap C'; B \cup C \cup D'; C \cap (A' \cup B); (D \cap C) \cup (B' \cup D)$$

E.23.27.

Les ensembles intervenant dans cet exercice sont ceux définis au numéro E.23.26.

Rechercher une définition en compréhension des ensembles suivants:

$$1^\circ) A, D, B \cup C, C \cap D.$$

$$2^\circ) A \cap B \cap C, (A' \cup B) \cap A, (C \cup B') \cap (C' \cap D).$$

E.23.28.

Les ensembles intervenant dans cet exercice sont ceux définis au numéro E.23.26.

Etablir la vérité des propositions suivantes:

$$\forall x \in E [(2|x \Rightarrow x|4) \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in C)]$$

$$\forall x \in E \left[\frac{x^2(x-5)^2 - 16}{x^2 - 5x - 4} = 0 \Leftrightarrow (x \in B \text{ et } \sqrt{x} \in E) \right]$$

$$\forall x \in E [(x \in D') \Leftrightarrow (x|15 \text{ ou } x > 7)]$$

E.23.29.

Les ensembles intervenant dans cet exercice sont ceux définis au numéro E.23.26.

Etablir la vérité des propositions suivantes:

$$\forall x \in E [(x|15 \text{ et } x^2 \in E \text{ et } \sqrt{x} \in E) \iff x \in C' \cap C]$$

$$\forall x \in E [P(x) \iff Q(x)] \text{ où,}$$

$$P(x) \text{ désigne } [x|15 \text{ ou } (\text{non } 2|x \text{ et } x > 7)]$$

$$Q(x) \text{ désigne } [x|15 \text{ ou } x > 7) \text{ et } (2|x \Rightarrow x|4)]$$

E.23.30.

$\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, on considère les ensembles:

$$E = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (x < 30 \text{ et } 3|x)\}$$

$$F = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (2|(x+1) \Rightarrow x > 14)\}$$

$$G = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } x|462\}$$

$$H = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (x^2 - 8x - 33 = 0 \text{ ou } \text{non}(x|154))\}$$

Définir en extension les ensembles suivants:

$$1^\circ) E, G, C_{\mathbb{N}}F, C_{\mathbb{N}}H.$$

$$2^\circ) E \cap G, E \cup G.$$

E.23.31.

E, F, G, H, sont les ensembles définis à l'exercice E.23.30.

Définir en extension les ensembles suivants:

$$1^\circ) E \cap C_{\mathbb{N}}F, E \cup C_{\mathbb{N}}F, E \cap C_{\mathbb{N}}H, E \cup C_{\mathbb{N}}H.$$

$$2^\circ) G \cap C_{\mathbb{N}}F, G \cap C_{\mathbb{N}}H, G \cup C_{\mathbb{N}}F, G \cup C_{\mathbb{N}}H, \\ C_{\mathbb{N}}[(C_{\mathbb{N}}E) \cup H].$$

E.23.32.

Soit E, F, G, H, les ensembles définis à l'exercice E.23.30.

Définir en extension les ensembles suivants:

$$C_{\mathbb{N}}(F \cup H); (C_{\mathbb{N}}F) \cap (C_{\mathbb{N}}E); (C_{\mathbb{N}}F) \cup (C_{\mathbb{N}}H); (C_{\mathbb{N}}G) \cap (C_{\mathbb{N}}H); \\ C_{\mathbb{N}}(F \cup E); (C_{\mathbb{N}}F) \cap (C_{\mathbb{N}}H); C_{\mathbb{N}}(G \cup H); C_{\mathbb{N}}(F \cap H).$$

E.23.33.

E, F, G, H, sont les ensembles définis au numéro E.23.30.

Définir en compréhension les ensembles:

$$C_{\mathbb{N}}E, C_{\mathbb{N}}F, C_{\mathbb{N}}G, (C_{\mathbb{N}}E) \cap (C_{\mathbb{N}}F), C_{\mathbb{N}}H, C_{\mathbb{N}}(E \cap F), C_{\mathbb{N}}(E \cup F).$$

E.23.34.

E, F, G, H, sont les ensembles définis au numéro E.23.30.

Définir en compréhension, les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} & E \cap C_{\mathbb{N}} F ; E \cap C_{\mathbb{N}} H ; E \cup G ; \\ & (C_{\mathbb{N}} F) \cap (C_{\mathbb{N}} H) ; C_{\mathbb{N}}(F \cup H) ; C_{\mathbb{N}}[(C_{\mathbb{N}} E) \cup H] ; \\ & C_{\mathbb{N}}[(C_{\mathbb{N}} G) \cap F] . \end{aligned}$$

E.23.35.

Soit F l'ensemble:

$$F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$$

Considérons les parties suivantes de F :

$$A = \{x \mid x \in F \text{ et } 3 \mid x\}$$

$$B = \{x \mid x \in F \text{ et } 4 \mid (x + 1)\}$$

$$C = \{x \mid x \in F \text{ et } 3 \mid (x + 1)\}$$

$$D = \{x \mid x \in F \text{ et } 3 \mid (x + 2)\}$$

$$E = \{x \mid x \in F \text{ et } 5 \mid (x + 2)\}$$

1°) L'ensemble $\{A, B, E\}$ est-il une partition de F ?

2°) L'ensemble $\{B, C, D\}$ est-il une partition de F ?

3°) L'ensemble $\{A, C, D\}$ est-il une partition de F ?

4°) Représenter les différentes situations par des diagrammes.

E.23.36.

$\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, on considère l'ensemble L :

$$L = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < x \leq 18\}$$

puis les ensembles:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \mid 18\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x = 0 \text{ ou } x \mid 24)\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x - 4)(x - 5)(x - 7) = 0\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \mid 315\}$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x - 10)(17 - x) \geq 0\}$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x^2 > x\}$$

$$G = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$$

1°) En envisageant les ensembles dont les éléments sont choisis parmi A, B, C, D, E, F , exclusivement, déterminer ceux qui sont des partitions de L .

2°) Déterminer ceux qui sont des recouvrements de L .

24 - DIFFERENCES D'ENSEMBLES

24.1. Différence de deux ensembles.

Soit E , F , deux ensembles donnés. En considérant la fonction propositionnelle $(x \notin F)$, nous savons, d'après AX4, qu'il existe un ensemble D , unique, tel que:

$$D = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin F \}$$

Cet ensemble est appelé différence des ensembles E , F , et se note: $E - F$.

24.1.1. Quels que soient les ensembles E , F ,

$$E - F = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \notin F \}$$

Il en résulte:

$$24.1.2. \quad x \in (E - F) \iff (x \in E \text{ et } x \notin F)$$

24.2. Exemples et diagrammes.

Soit les ensembles:

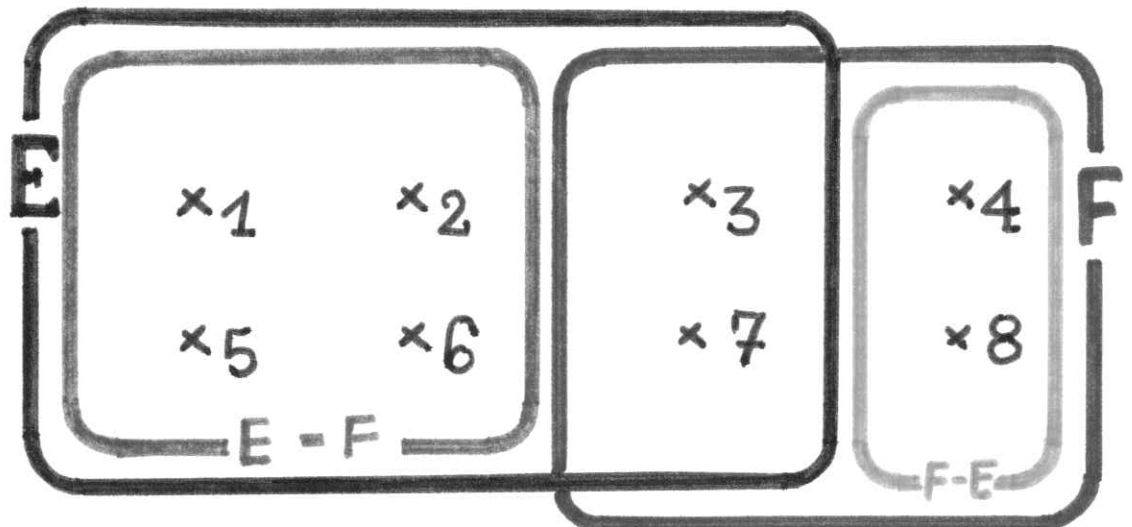
$$E = \{ 1; 2; 3; 5; 6; 7 \}$$

$$F = \{ 3; 4; 7; 8 \}$$

Nous en déduisons:

$$F - E = \{ 4; 8 \} \text{ et } E - F = \{ 1; 2; 5; 6 \}$$

Cette situation est résumée par les diagrammes suivants:



24.3. Etude de $E - F$, lorsque F est une partie de E .

A) Soit E, F , deux ensembles tels que F soit une partie de E .

D'après 24.1.1, nous pouvons écrire:

$$E - F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin F\}$$

La relation 22.1.1, nous indique que:

$$\text{si } F \subset E, \text{ alors, } \bigcup_E F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin F\}$$

Nous en déduisons:

$$24.3.1. \quad \text{Si } F \subset E, \text{ alors } E - F = \bigcup_E F$$

Ce résultat permet de noter plus simplement le complémentaire, lorsqu'il n'y a pas ambiguïté (cf; § 22.1.E).

B) En particulier, si F désigne l'ensemble vide, nous savons que, quel que soit l'ensemble E , $\emptyset$ est une partie de E (22.5.10). En conséquence:

$$E - \emptyset = \bigcup_E \emptyset = E \quad (\text{d'après 22.5.14})$$

$$24.3.2. \quad \text{Quel que soit l'ensemble } E, \quad E - \emptyset = E$$

C) Considérons maintenant le cas où E désigne l'ensemble vide. Nous pouvons considérer deux cas:

a) F est lui aussi l'ensemble vide. Alors, d'après la relation 24.3.2, nous avons:

$$24.3.3. \quad \emptyset - \emptyset = \emptyset$$

b) F n'est pas l'ensemble vide. Alors F n'est pas inclus dans E qui est supposé vide (22.5.16). Nous ne pouvons pas appliquer la relation 24.3.1. En tenant compte de 24.1.1 et de 21.9.1, nous pouvons écrire l'expression vraie:

$$x \in (\emptyset - F) \iff (x \in \emptyset \text{ et } x \notin F)$$

En considérant 22.5.9, 22.1.1 et 21.9.1, il vient:

$$24.3.4. \quad (x \in \emptyset) \iff (x \in F \text{ et } x \notin F)$$

Des deux équivalences logiques précédentes, il résulte:

$$24.3.5. \quad x \in (\emptyset - F) \iff [(x \in F \text{ et } x \notin F) \text{ et } x \notin F]$$

Soit, d'après 6.10.1 et 6.26.1,

$$24.3.6. \quad x \in (\emptyset - F) \iff (x \in F \text{ et } x \notin F)$$

En tenant compte de 24.3.4, nous avons:

$$\forall x [x \in (\emptyset - F) \iff x \in \emptyset]$$

et d'après 19.3.1, nous pouvons énoncer:

24.3.7. Quel que soit l'ensemble F , $\emptyset - F = \emptyset$

24.4. Différence de deux ensembles et fonctions propositionnelles.

Soit un ensemble E , et deux fonctions propositionnelles $C(x)$, $D(x)$.

Les ensembles: $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$
 $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$

sont deux parties de E (21.2.3).

L'ensemble $A - B$ est tel que:

24.4.1. $A - B = \{x | x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Il en résulte (21.2.1):

$$x \in (A - B) \iff (x \in A \text{ et } x \notin B)$$

et aussi, en tenant compte de 6.37.2,

24.4.2. $x \in (A - B) \iff [(x \in E \text{ et } C(x)) \text{ et non}(x \in E \text{ et } D(x))]$

Or, d'après 8.41.21, nous avons:

$$[(x \in E \text{ et } C(x)) \text{ et non}(x \in E \text{ et } D(x))] \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et non } D(x))]$$

En conséquence, nous obtenons:

$$x \in (A - B) \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et non } D(x))]$$

En résumé:

24.4.3. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors, $x \in (A - B) \iff [x \in E \text{ et } [C(x) \text{ et non } D(x)]]$

Soit encore, en tenant compte de 21.2.1 et 19.3.1,

24.4.4. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors, $A - B = \{x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et non } D(x))\}$

On peut également écrire, en utilisant 21.2.7:

24.4.5. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
 alors, $\forall x \in E [x \in (A - B) \iff (C(x) \text{ et non } D(x))]$

Exemple.

Etant donné l'ensemble E,

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

considérons les parties de E suivantes:

$$A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \leq 8\}$$

$$B = \{x \mid x \in E \text{ et } 4 \mid x\}$$

Nous en déduisons que:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{4, 8, 12\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

En considérant l'ensemble

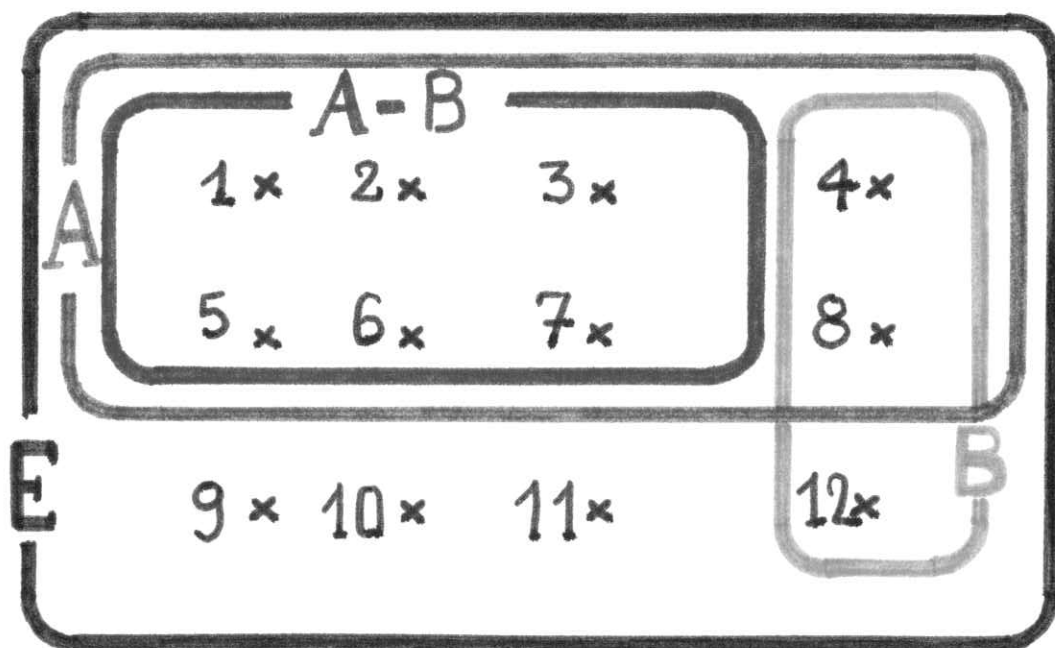
$$D = \{x \mid x \in E \text{ et } (x \leq 8 \text{ et non}(4 \mid x))\}$$

nous constatons que 1, 2, 3, 5, 6, 7, sont les seuls éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans la fonction propositionnelle $(x \leq 8 \text{ et non}(4 \mid x))$. De ce fait,

$$D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$\text{et } A - B = \{x \mid x \in E \text{ et } (x \leq 8 \text{ et non}(4 \mid x))\}$$

Le schéma suivant permet d'illustrer cet exemple.



24.5. Quelques propriétés de la différence.

A) Soit A, B , deux parties d'un ensemble E . Nous pouvons considérer les ensembles $A - B$ et $A \cap \bigcap_E B$. Afin d'étudier le lien qui existe entre ces deux ensembles, considérons la proposition:

$$\forall x \left[\begin{array}{l} x \in A \Rightarrow x \in E \\ \text{et} \\ x \in B \quad x \in E \end{array} \right] \Rightarrow [(x \in A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B))]$$

C'est une proposition vraie d'après 8.41.22.

En appliquant 16.8.24 à l'expression précédente, puis 16.7.14 à la conjonction logique, nous obtenons une implication dont le premier membre est:

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in E) \text{ et } \forall x(x \in B \Rightarrow x \in E)$$

que l'on peut noter:

$$A \subset E \text{ et } B \subset E \quad (21.1.2)$$

et dont le second membre est:

$$\forall x[(x \in A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B))]$$

Celui-ci peut encore s'écrire, d'après 24.1.2,

$$\forall x[(x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in E - B)]$$

Soit encore, en utilisant 23.7.4, puis 19.3.1,

$$A - B = A \cap (E - B)$$

En définitive, l'implication s'écrit:

$$24.5.1. \quad (A \subset E \text{ et } B \subset E) \Rightarrow (A - B = A \cap (E - B))$$

Or, B étant par hypothèse une partie de E , nous pouvons tenir compte de 24.3.1 et nous en déduisons:

24.5.2. Si $A \subset E$ et si $B \subset E$, alors,

$$A - B = A \cap \bigcap_E B$$

Exemple et schéma.

Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
et les parties de E :

$$A = \{a, b, d, e, g, h\}$$

$$B = \{d, e, f, g, h, i\}$$

Nous en déduisons:

$$A - B = \{a, b\}$$

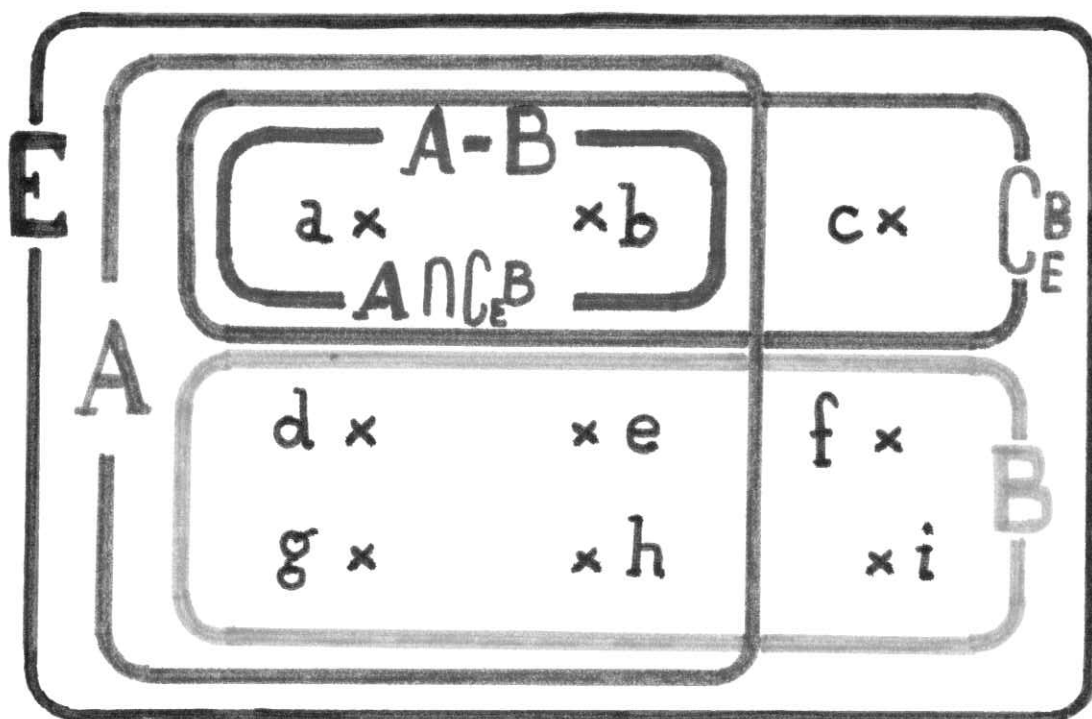
$$\bigcap_E B = \{a, b, c\}$$

$$A \cap \bigcap_E B = \{a, b\}$$

et par conséquent:

$$A - B = A \cap \bigcap_E B$$

Ce résultat est illustré par le schéma suivant:



B) Soit E, F , deux ensembles.

$E - (E - F)$ est l'ensemble des éléments x tels que:

$$x \in E \text{ et } \text{non}(x \in E \text{ et } x \notin F) \quad \text{d'après 24.1.1.}$$

En tenant compte de 8.41.7 et 6.11.1, nous avons la proposition vraie:

$$\forall x [(x \in E \text{ et } \text{non}(x \in E \text{ et } x \notin F)) \iff (x \in E \text{ et } x \in F)]$$

qui s'écrit encore, en considérant 23.7.4,

$$\forall x [(x \in E \text{ et } \text{non}(x \in E \text{ et } x \notin F)) \iff x \in E \cap F]$$

Le premier membre peut, d'après ce qui précède, être noté:

$$x \in (E - (E - F)) \quad (21.2.1)$$

En définitive:

$$\forall x [x \in (E - (E - F)) \iff x \in E \cap F]$$

et, en appliquant 19.3.1, nous pouvons énoncer:

24.5.3. Quels que soient les ensembles E, F ,

$$E - (E - F) = E \cap F$$

Exemple et schéma.

Soit les ensembles:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$$

$$F = \{4; 5; 9; 10\}$$

Il en résulte:

$$E - F = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$$

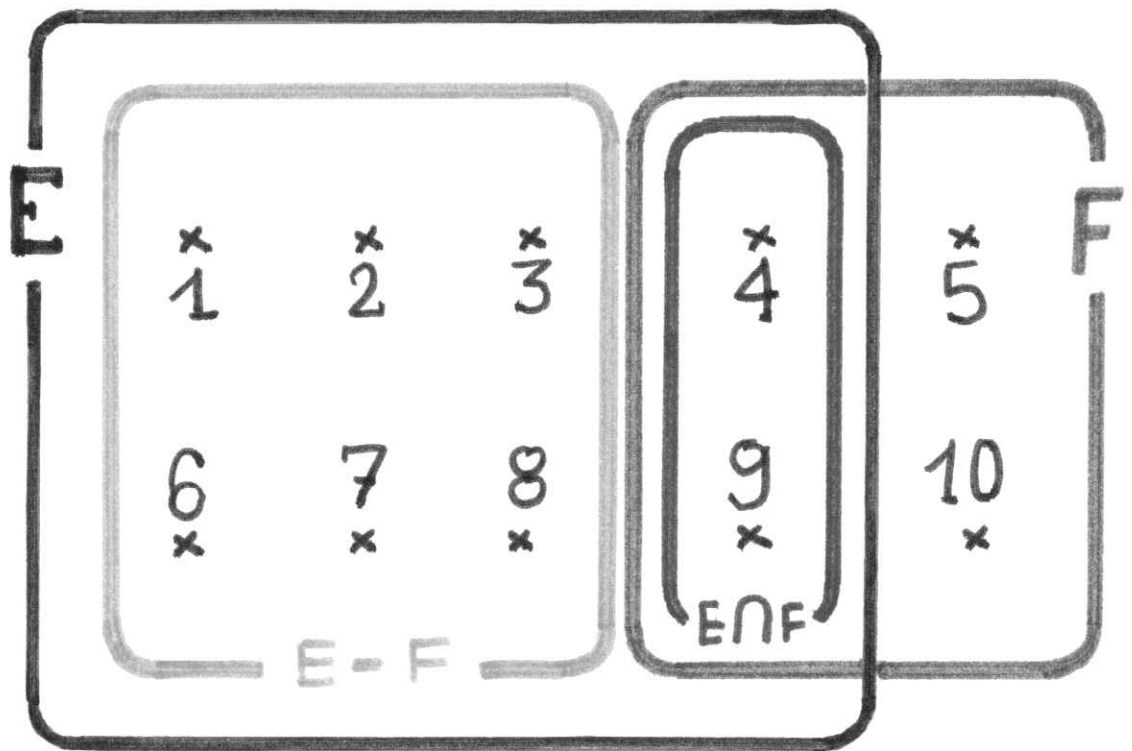
$$E - (E - F) = \{4; 9\}$$

$$E \cap F = \{4; 9\}$$

et en définitive,

$$E - (E - F) = E \cap F$$

Les diagrammes suivants représentent les différents ensembles figurant dans cette relation.



C) Soit A, B, C, trois ensembles.

Considérons les deux ensembles:

$$A \cap (B - C),$$

$$(A \cap B) - (A \cap C)$$

$$A \cap (B - C) = \{x \mid x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C)\} \quad (23.7.3 \text{ et } 24.1.1)$$

$$(A \cap B) - (A \cap C) = \{x \mid (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et non}(x \in A \text{ et } x \in C)\} \quad (23.7.3 \text{ et } 24.1.1)$$

Or d'après 8.41.23, nous avons la proposition vraie:

$$\forall x [(x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et non}(x \in A \text{ et } x \in C))]$$

En appliquant R8, il en résulte que:

24.5.4. Quels que soient les ensembles A, B, C,

$$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$$

Ce résultat exprime la "distributivité" de l'intersection par rapport à la différence.

Exemple et schéma.

Considérons les ensembles:

$$\begin{aligned} A &= \{ 6; 7; 8; 10; 11; 12 \} \\ B &= \{ 1; 2; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11 \} \\ C &= \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \} \end{aligned}$$

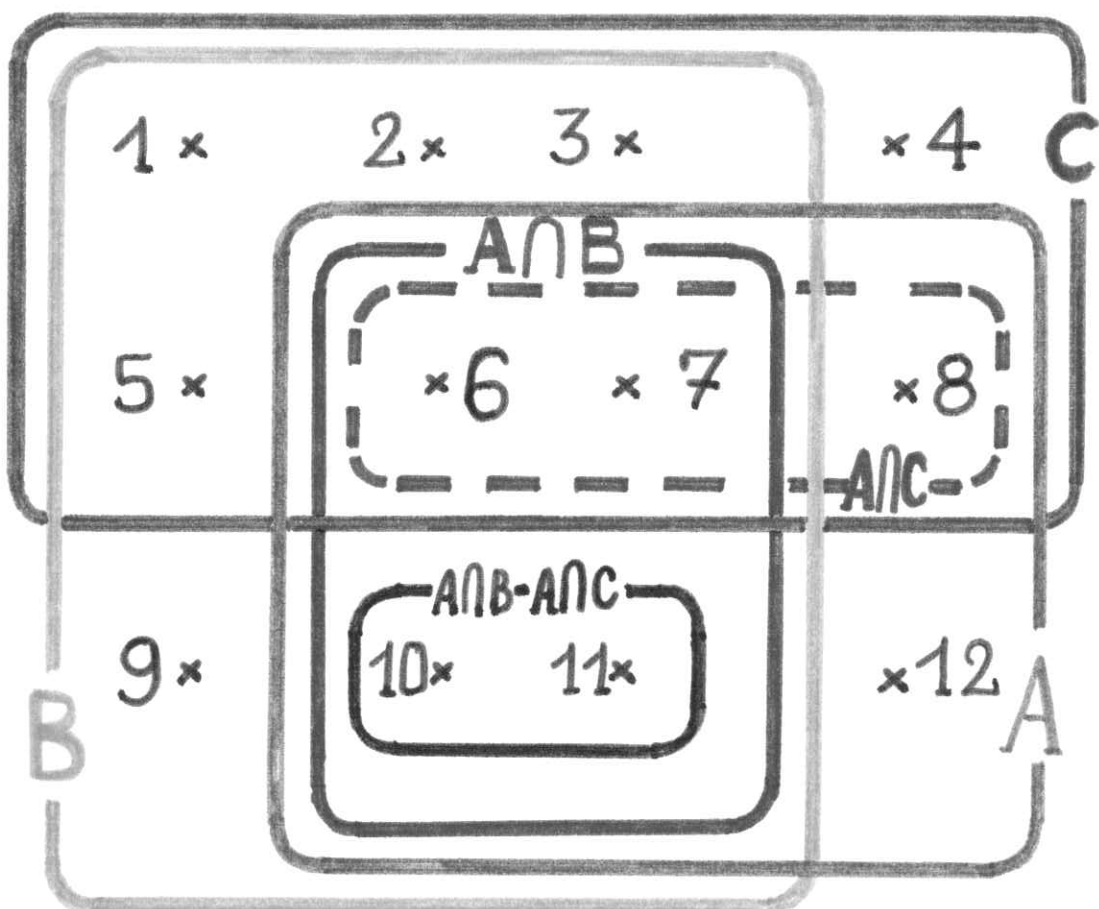
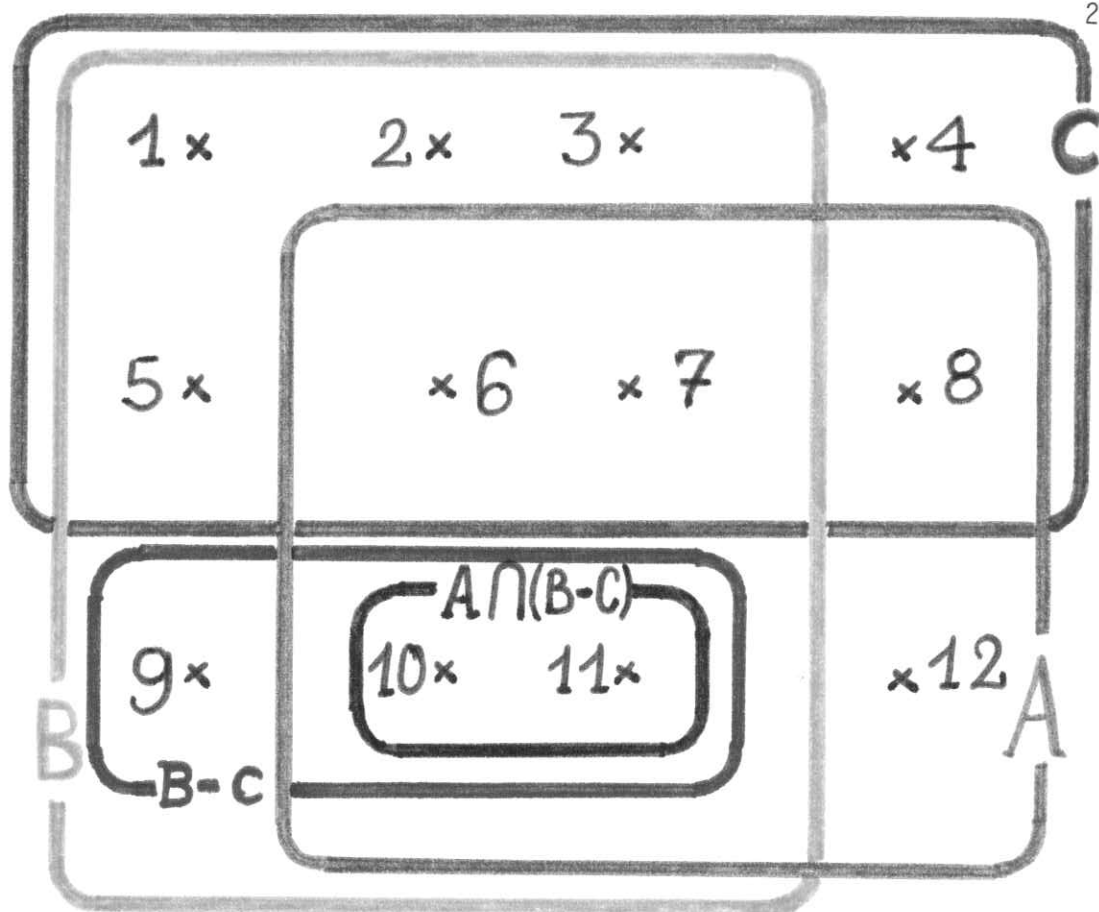
Nous avons:

$$\begin{aligned} B - C &= \{ 9; 10; 11 \} \\ A \cap (B - C) &= \{ 10; 11 \} \\ A \cap B &= \{ 6; 7; 10; 11 \} \\ A \cap C &= \{ 6; 7; 8 \} \\ A \cap B - A \cap C &= \{ 10; 11 \} \end{aligned}$$

Nous constatons que:

$$A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$$

Représentons par des schémas distincts les ensembles $A \cap (B - C)$ et $A \cap B - A \cap C$.



D) Soit E, F , deux ensembles.

Que pouvons nous dire de l'ensemble $E - F$ dans le cas où E est une partie de F ?

En considérant la loi logique 8.41.24, nous pouvons écrire la proposition vraie;

$$\forall x [(x \in E \Rightarrow x \in F) \Leftrightarrow ((x \in E \text{ et } x \notin F) \Leftrightarrow (x \in F \text{ et } x \notin F))]$$

soit, d'après 18.8.31:

$$[\forall x (x \in E \Rightarrow x \in F)] \Leftrightarrow \forall x ((x \in E \text{ et } x \in F) \Leftrightarrow (x \in F \text{ et } x \in F))$$

En tenant compte de 24.1.2 et de 22.1.3, puisque F est une partie de F , nous obtenons:

$$[\forall x (x \in E \Rightarrow x \in F)] \Leftrightarrow \forall x (x \in E - F \Leftrightarrow x \in \bigcap_F F)$$

En définitive, 21.1.2, 22.5.9 et 19.3.1 nous permettent d'écrire:

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (E - F = \emptyset)$$

En résumé:

24.5.5. Quels que soient les ensembles E, F ,

$$(E \subset F) \Leftrightarrow (E - F = \emptyset)$$

En particulier, pour tout ensemble E , nous avons $E \subset E$ et nous pouvons énoncer:

24.5.6. quel que soit l'ensemble E,

$$E - E = \emptyset$$

24.6. Différence symétrique de deux ensembles.

Soit E, F, deux ensembles.

La réunion des ensembles $E - F$, $F - E$, est un ensemble noté $E \Delta F$ et appelé différence symétrique des ensembles E, F.

24.6.1. Quels que soient les ensembles E, F,

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$$

Il en résulte, d'après 23.1.3, 24.1.2,

24.6.2.
$$x \in E \Delta F \iff [(x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E)]$$

Exemple.

Considérons les ensembles:

$$\begin{aligned} E &= \{ a, b, c, d \} \\ F &= \{ c, d, e, f, g, h \} \end{aligned}$$

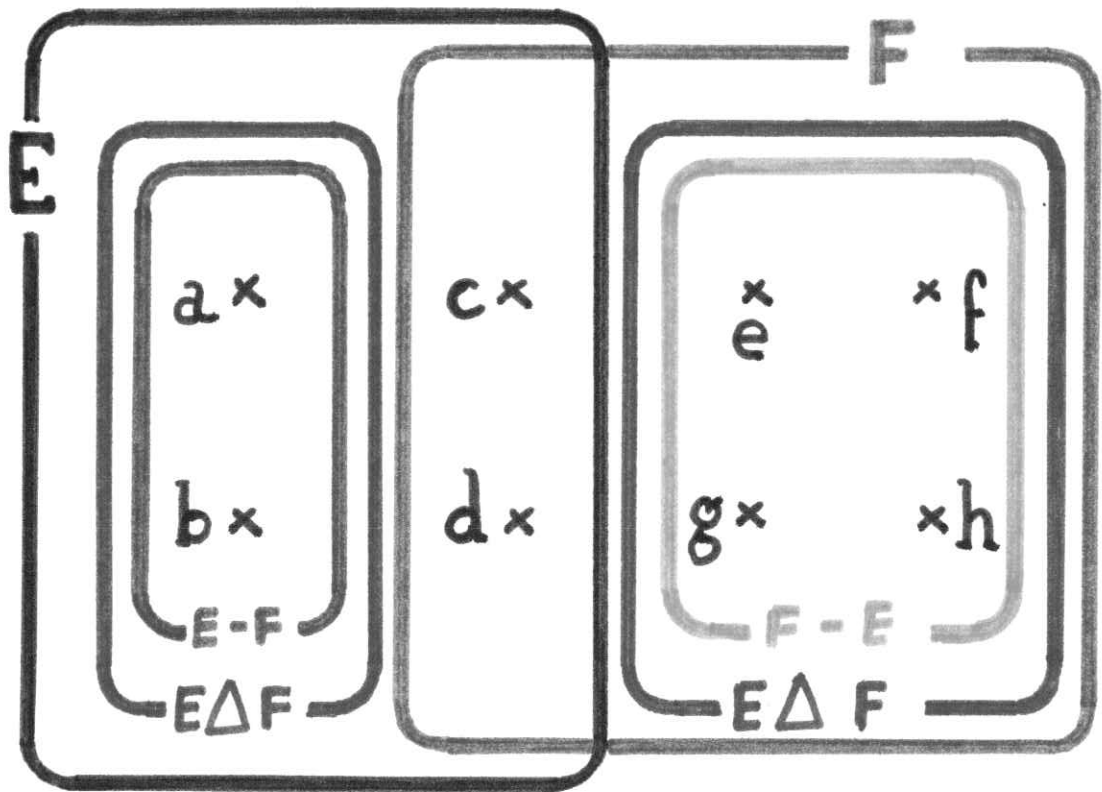
Nous avons:

$$\begin{aligned} E - F &= \{ a, b \} \\ F - E &= \{ e, f, g, h \} \end{aligned}$$

et, de ce fait,

$$E \Delta F = \{ a, b, e, f, g, h \}$$

Cet ensemble est représenté par le schéma suivant:



24.7. Deux autres aspects de la différence symétrique.

A) E, F, étant deux ensembles, en tenant compte de 8.41.8, nous pouvons écrire, grâce à 24.6.2,

$$x \in E \Delta F \iff \text{non}(x \in E \iff x \in F)$$

En utilisant 6.14.1, il vient alors:

$$24.7.1. \quad x \in E \Delta F \iff ((x \in E) \vee (x \in F))$$

D'après 21.9.3, nous en déduisons:

$$24.7.2. \quad E \Delta F = \{ x \mid (x \in E) \vee (x \in F) \}$$

B) Considérons la différence symétrique des ensembles E, F. Nous pouvons écrire, d'après 24.6.2, la proposition vraie:

$$24.7.3. \quad \forall x [x \in E \Delta F \iff ((x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E))]$$

D'autre part, en tenant compte de 8.41.2, nous avons l'expression vraie:

$$[(x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E)] \iff [(x \in E \text{ ou } x \in F) \text{ et } \text{non}(x \in E \text{ et } x \in F)]$$

Nous pouvons alors remplacer le second membre de 24.7.3 et nous

obtenons:

$$24.7.4. \quad \forall x [x \in E \triangle F \iff ((x \in E \text{ ou } x \in F) \text{ et non}(x \in E \text{ et } x \in F))]$$

En appliquant 23.1.3 et 23.7.4, il vient:

$$\forall x [x \in E \triangle F \iff (x \in E \cup F \text{ et non}(x \in E \cap F))]$$

soit encore:

$$\forall x [x \in E \triangle F \iff (x \in E \cup F \text{ et } x \notin E \cap F)]$$

Tenons compte maintenant de 24.1.2:

$$\forall x [x \in E \triangle F \iff x \in (E \cup F - E \cap F)]$$

En résumé, d'après 19.3.1,

$$24.7.5. \quad \begin{array}{l} \text{Quels que soient les ensembles } E, F, \\ E \triangle F = E \cup F - E \cap F \end{array}$$

Exemple et schéma.

Reprenons l'exemple du paragraphe 24.6.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$F = \{c, d, e, f, g, h\}$$

$$E \triangle F = \{a, b, e, f, g, h\}$$

D'autre part:

$$E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

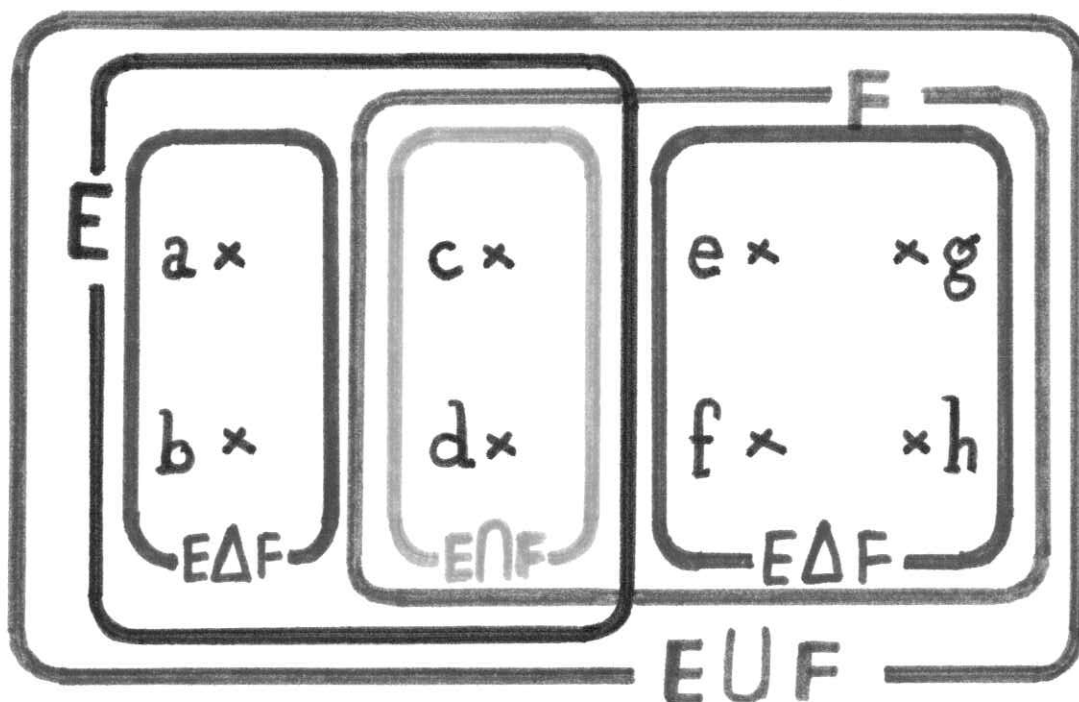
$$E \cap F = \{c, d\}$$

$$E \cup F - E \cap F = \{a, b, e, f, g, h\}$$

et de ce fait,

$$E \triangle F = E \cup F - E \cap F.$$

Nous pouvons comparer le schéma du paragraphe 24.6, au suivant.



24.8. Quelques propriétés de la différence symétrique.

A) E, F, étant deux ensembles donnés, d'après 24.6.1,

$$E \triangle F = (E - F) \cup (F - E)$$

$$F \triangle E = (F - E) \cup (E - F)$$

La commutativité de la réunion (23.3.2) nous permet d'écrire:

24.8.1. Quels que soient les ensembles E, F,

$$E \triangle F = F \triangle E$$

Cette égalité exprime la commutativité de la différence symétrique.

B) E étant un ensemble donné, considérons l'ensemble $E \triangle \emptyset$.
D'après 24.7.3,

$$E \triangle \emptyset = E \cup \emptyset - E \cap \emptyset$$

$$\text{Or} \quad E \cup \emptyset = E \quad (\text{d'après } 23.5.11)$$

$$E \cap \emptyset = \emptyset \quad (\text{d'après } 23.11.12)$$

En conséquence:

$$E \triangle \emptyset = E - \emptyset$$

C'est à dire, d'après 24.3.2:

24.8.2. Quel que soit l'ensemble E,

$$E \triangle \emptyset = E$$

C) Etant donné l'ensemble E, d'après 24.6.1,

$$E \triangle E = (E - E) \cup (E - E)$$

soit, en tenant compte de 24.5.6 et 23.5.3,

24.8.3 Quel que soit l'ensemble E,

$$E \triangle E = \emptyset$$

D) Soit les ensembles A, B, C. La différence symétrique des ensembles $A \triangle B$, C, sera notée: $(A \triangle B) \triangle C$. La différence symétrique des ensembles A, $B \triangle C$, sera notée: $A \triangle (B \triangle C)$.

D'après 6.9.2, nous pouvons écrire la proposition vraie:

$$24.8.4. \quad \forall x [((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (x \in C) \iff (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))]$$

soit, en tenant compte de 24.7.1,

$$\forall x [(x \in A \triangle B) \wedge (x \in C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B \triangle C)]$$

ou encore

$$\forall x [x \in (A \triangle B) \triangle C \iff x \in A \triangle (B \triangle C)]$$

En définitive, en utilisant 19.3.1, nous pouvons énoncer:

24.8.5. Quels que soient les ensembles A, B, C,

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

Cette égalité exprime "l'associativité" de la différence symétrique. Nous noterons: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) = A \triangle B \triangle C$.

Exemple et schéma.

Considérons les ensembles:

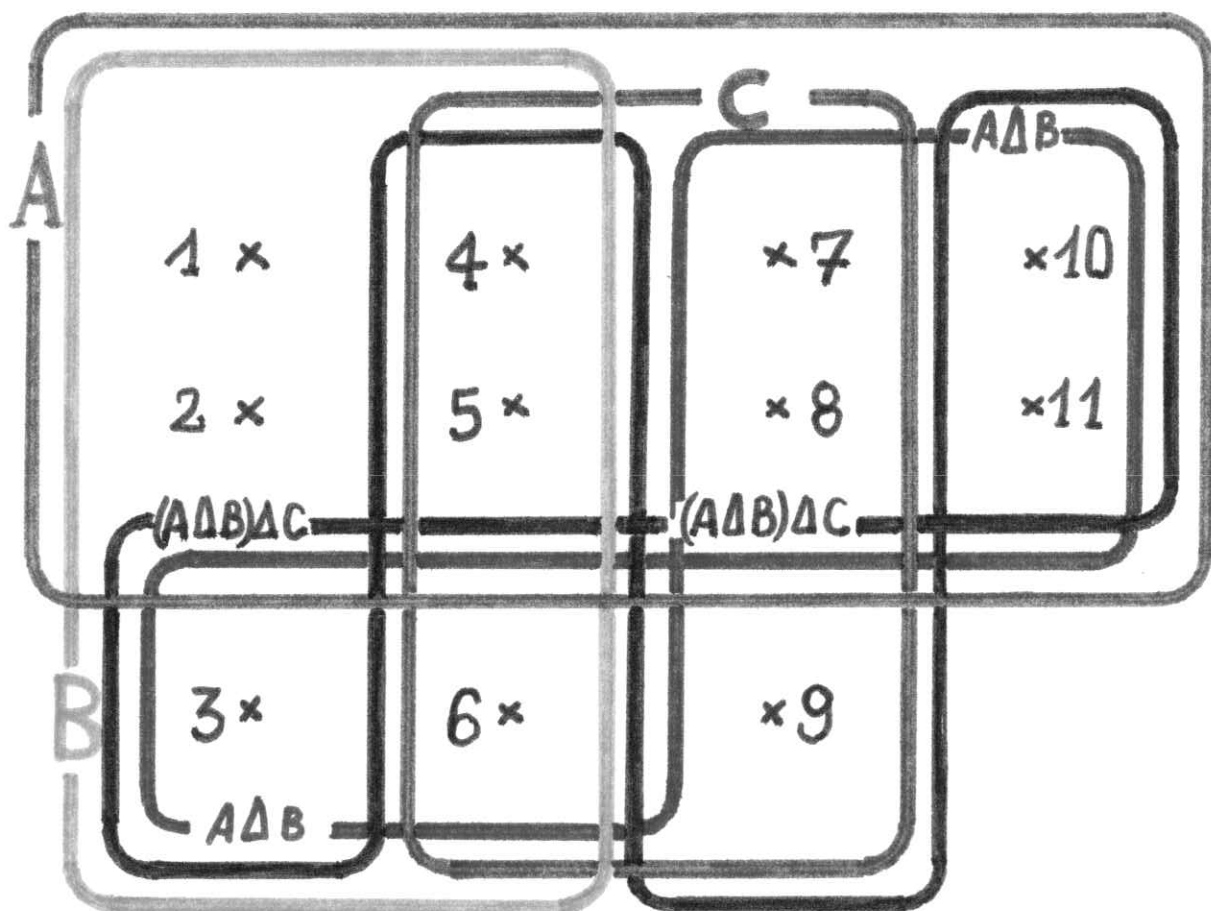
$$\begin{aligned} A &= \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\} \\ B &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \\ C &= \{4; 5; 6; 7; 8; 9\} \end{aligned}$$

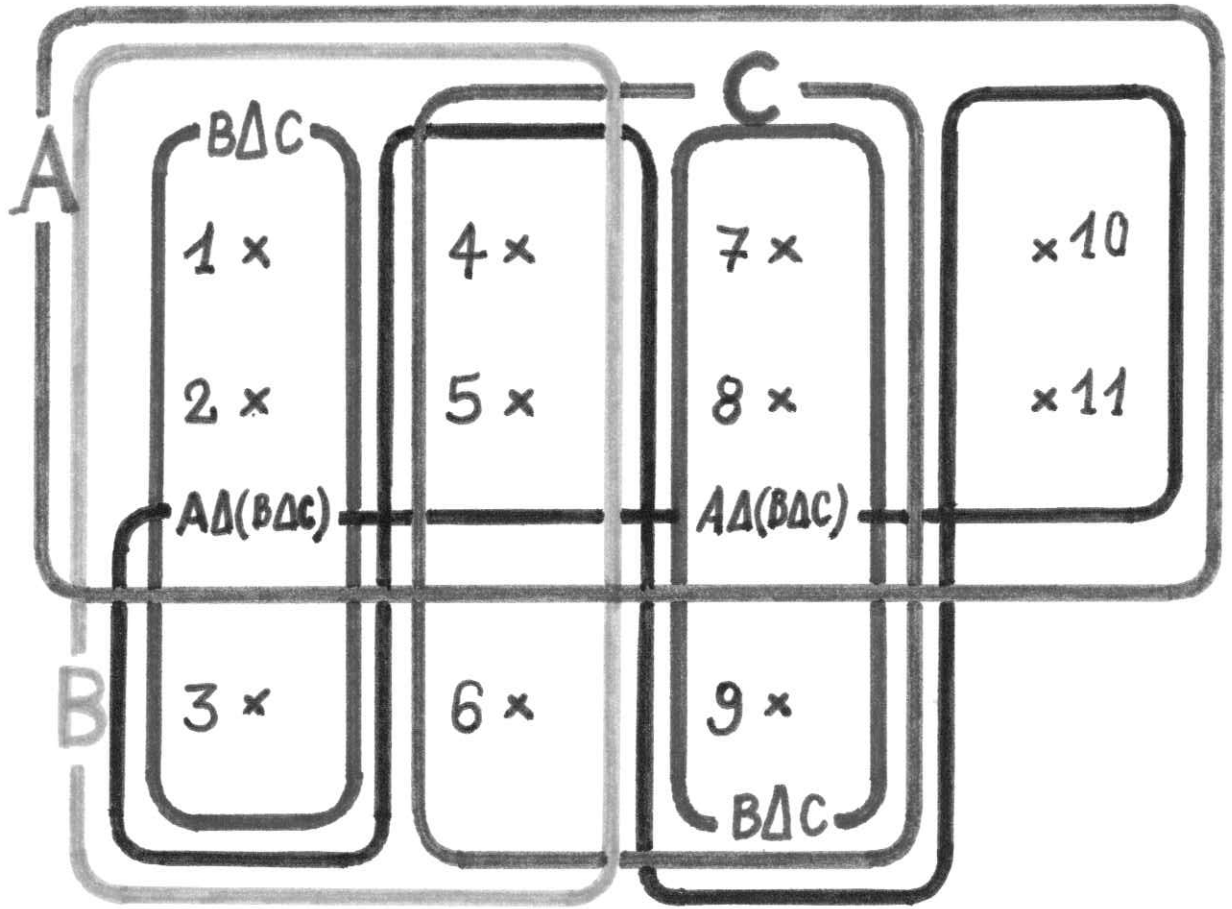
Il en résulte

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \{3; 6; 7; 8; 10; 11\} \\ (A \triangle B) \triangle C &= \{3; 4; 5; 9; 10; 11\} \\ B \triangle C &= \{1; 2; 3; 7; 8; 9\} \\ A \triangle (B \triangle C) &= \{3; 4; 5; 9; 10; 11\} \end{aligned}$$

De ce fait, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Les diagrammes suivants illustrent cette égalité.





E) Soit les ensembles A, B, C.

L'intersection des ensembles A, $B \Delta C$ est notée $A \Delta (B \Delta C)$. La différence symétrique des ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, est notée: $(A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

En considérant 6.16.3, nous obtenons la proposition vraie:

$$24.8.6. \forall x [(x \in A \text{ et } ((x \in B) \vee (x \in C))) \iff ((x \in A \text{ et } x \in B) \vee (x \in A \text{ et } x \in C))]$$

c'est à dire en utilisant 24.7.1 et 23.7.4,

$$\forall x [(x \in A \text{ et } x \in B \Delta C) \iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)]$$

soit encore,

$$\forall x [x \in A \cap (B \Delta C) \iff x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)]$$

En définitive, d'après 19.3.1, nous pouvons énoncer:

24.8.7. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Cette égalité exprime la "distributivité" de l'intersection par rapport à la différence symétrique.

Exemple et schéma.

Soit les ensembles:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$B = \{1; 2; 5; 6; 9; 10\}$$

$$C = \{2; 3; 4; 6; 7; 8; 10; 11; 12\}$$

Nous en déduisons

$$B \Delta C = \{1; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 11; 12\}$$

$$A \cap (B \Delta C) = \{1; 3; 4; 5; 7; 8\}$$

$$A \cap B = \{1; 2; 5; 6\}$$

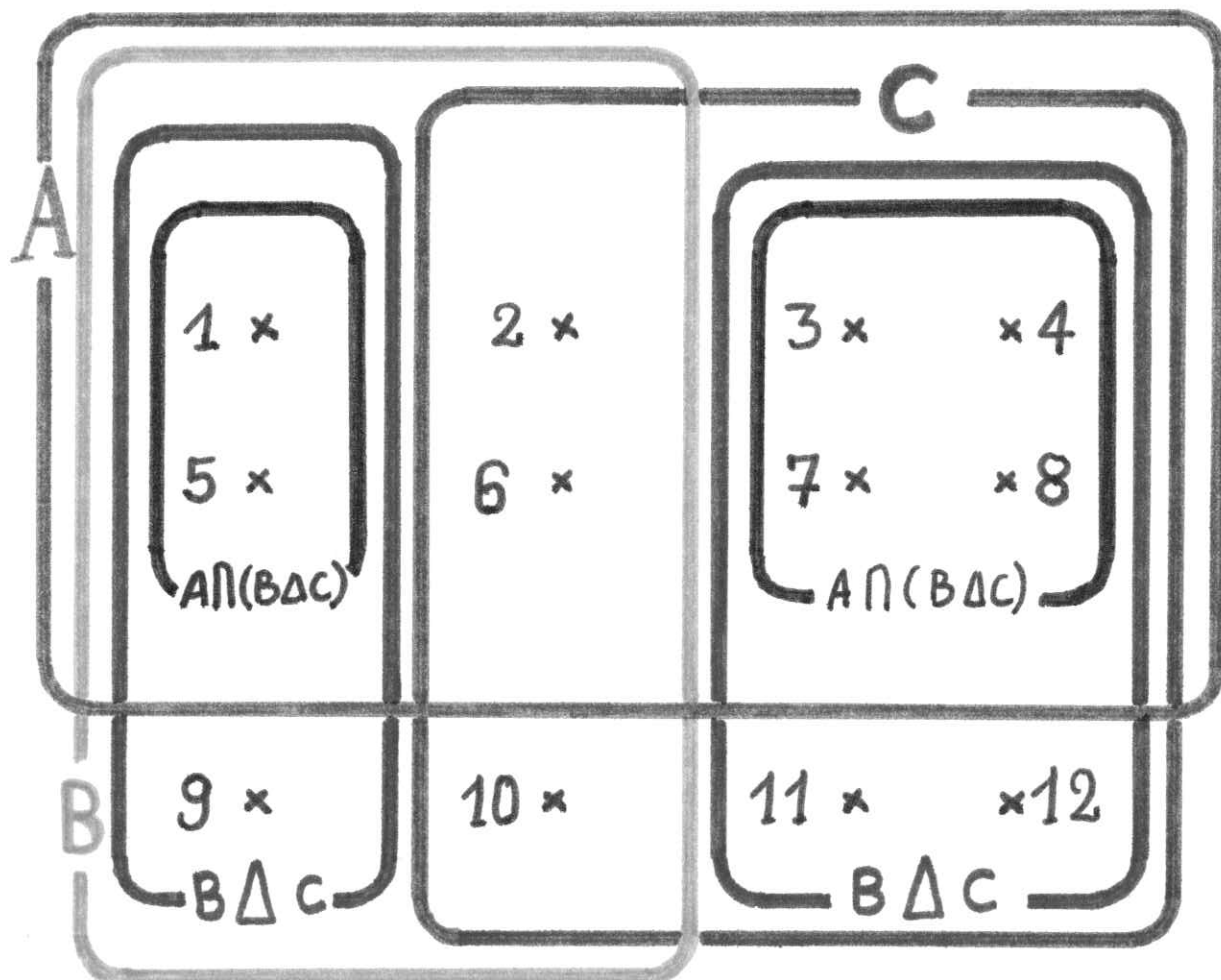
$$A \cap C = \{2; 3; 4; 6; 7; 8\}$$

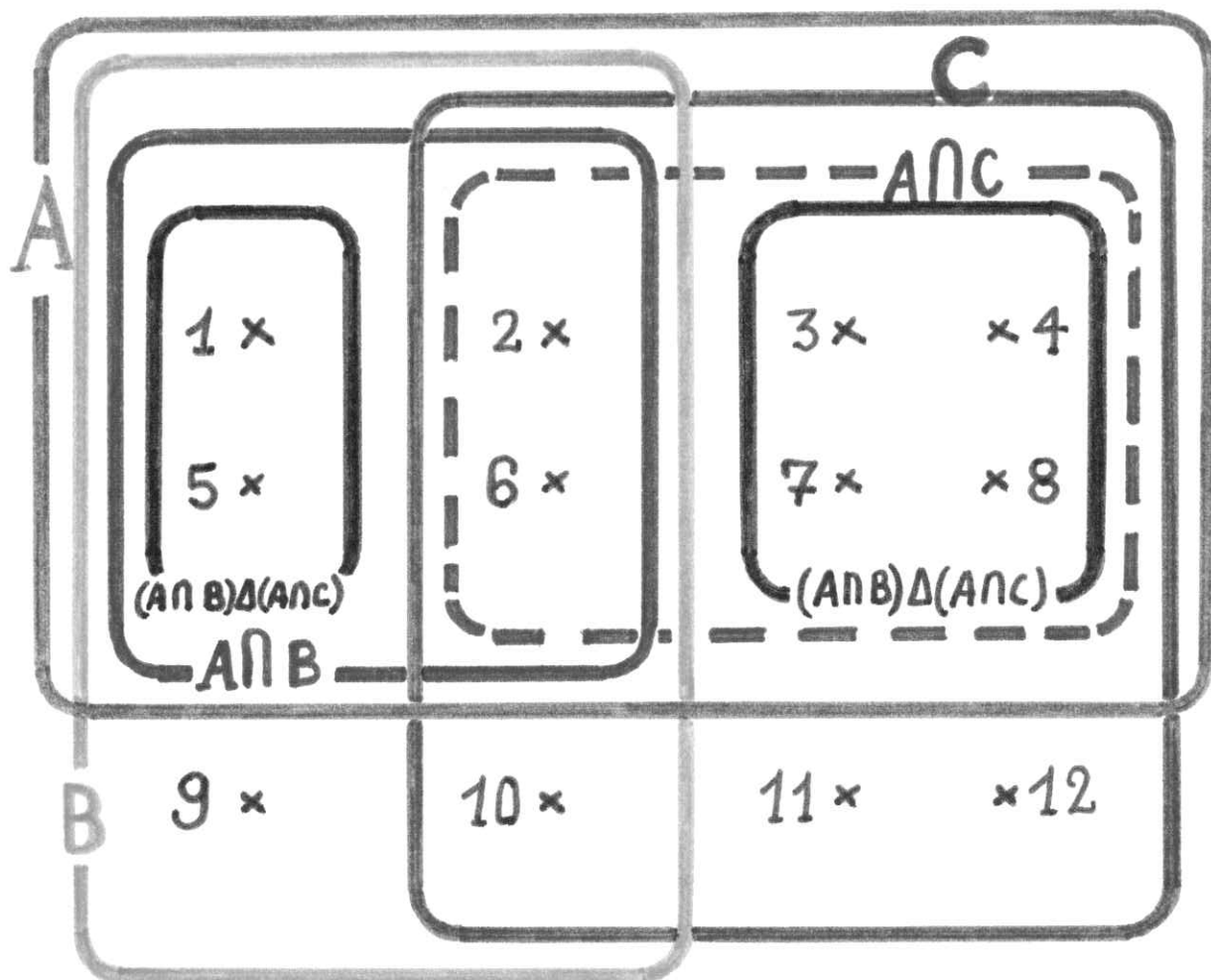
$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = \{1; 3; 4; 5; 7; 8\}$$

Il en résulte:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

Nous pouvons représenter cette situation par les schémas suivants:





F) E étant un ensemble donné, considérons les deux parties de E désignées par:

$$A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$$

$$B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \}$$

La différence symétrique de ces deux parties est, d'après 24.7.2, l'ensemble:

$$A \Delta B = \{ x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

et nous pouvons écrire (21.9.1):

$$x \in A \Delta B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$$

Utilisons maintenant 21.2.1:

$$x \in A \Delta B \iff (x \in E \text{ et } C(x)) \vee (x \in E \text{ et } D(x))$$

En appliquant 8.41.25, nous obtenons:

$$x \in A \Delta B \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \vee D(x))]$$

En résumé:

24.8.8. Si $A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$ et $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \}$
alors, $x \in A \Delta B \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \vee D(x))]$

soit encore, en tenant compte de 21.2.1 et 19.3.1,

$$24.8.9. \quad \text{Si } A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \} \quad \text{et } B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \} \\ \text{alors} \quad A \Delta B = \{ x \mid x \in E \text{ et } (C(x) \vee D(x)) \}$$

Nous pouvons également écrire, en utilisant 21.2.7:

$$24.8.10. \quad \text{Si } A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \} \quad \text{et } B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \} \\ \text{alors,} \quad \forall x \in E \quad [x \in A \Delta B \iff (C(x) \vee D(x))]$$

Exemple.

Etant donné l'ensemble $E = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 \}$,
considérons les parties de E suivantes:

$$A = \{ x \mid x \in E \text{ et } x \leq 8 \} \\ B = \{ x \mid x \in E \text{ et } 4 \mid x \}$$

Il en résulte:

$$A = \{ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 \} \\ B = \{ 4; 8; 12 \} \\ A \Delta B = \{ 1; 2; 3; 5; 6; 7; 12 \}$$

En considérant l'ensemble

$$S = \{ x \mid x \in E \text{ et } ((x \leq 8) \vee (4 \mid x)) \}$$

nous constatons que:

$$1; 2; 3; 5; 6; 7; 12$$

sont les seuls éléments de E

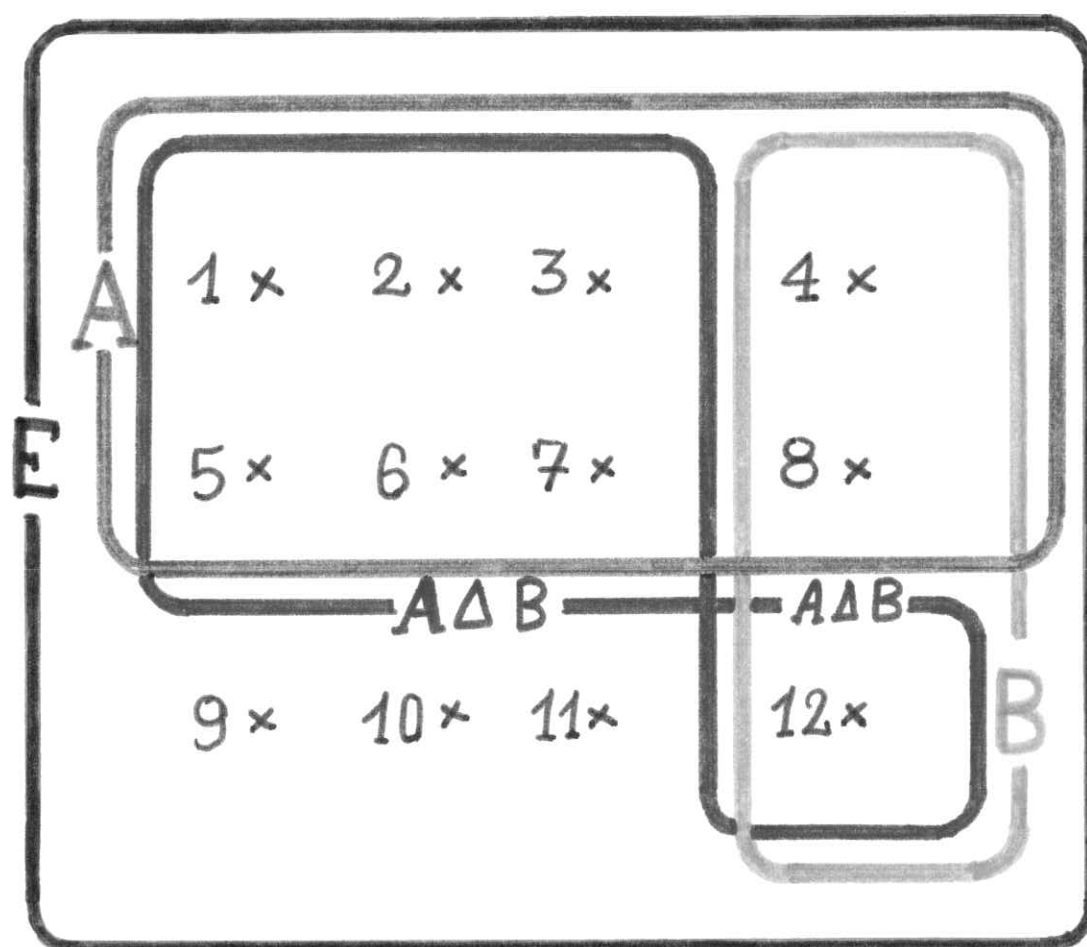
qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x
dans la fonction propositionnelle:

$$(x \leq 8) \vee (4 \mid x)$$

Par conséquent:

$$S = \{ 1; 2; 3; 5; 6; 7; 12 \} \\ \text{et} \quad A \Delta B = \{ x \mid x \in E \text{ et } ((x \leq 8) \vee (4 \mid x)) \}$$

Cet exemple est illustré à l'aide du schéma suivant:



E X E R C I C E S

E.24.1.

Soit les ensembles:

$$A = \{ a, b, h \}$$

$$B = \{ c, d, e, f \}$$

$$C = \{ a, d, e, g, h \}$$

$$D = \{ a, b, c, d, h \}$$

Déterminer toutes les différences de ces ensembles pris deux à deux.

Construire les diagrammes correspondants.

E.24.2.

A, B, C, D, sont les ensembles définis au numéro E.24.1.

Déterminer toutes les différences symétriques de ces ensembles pris deux à deux.

Construire les diagrammes correspondants.

E.24.3.

$\mathbb{N}$ désignant l'ensemble des entiers naturels, on considère les ensembles suivants:

$$A = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \mid 18 \}$$

$$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 27 \}$$

$$C = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \mid 45 \}$$

$$D = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } (x - 3)(x - 1)(x - 6) = 0 \}$$

1°) Déterminer, en extension, toutes les différences de ces ensembles pris deux à deux.

2°) Déterminer, en compréhension, toutes les différences de ces ensembles pris deux à deux.

E.24.4.

Les ensembles A, B, C, D, sont ceux définis au numéro E.24.3.

1°) Déterminer, en extension, toutes les différences symétriques de ces ensembles pris deux à deux.

2°) Déterminer, en compréhension, toutes les différences symétriques de ces ensembles pris deux à deux.

E.24.5.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. Considérons les ensembles suivants:

$$A = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (7|x \text{ ou } \sqrt{x} \in \mathbb{N}) \}$$

$$B = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (3|x \Rightarrow 5|x) \}$$

$$C = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (36|x^2 \Leftrightarrow x^2 < 400) \}$$

$$D = \{ x | x \in \mathbb{N} \text{ et } (2|x \vee x|12) \}$$

1°) déterminer, en compréhension, toutes les différences de ces ensembles pris deux à deux.

2°) Déterminer, en compréhension, toutes les différences symétriques de ces ensembles.

E.24.6.

Les ensembles A, B, C, D, sont ceux définis au E.24.1.

1°) Déterminer les ensembles:

$$A \cap (B - C) ; D \cap (C - B) ; B \cap (A - C) ;$$

2°) déterminer les ensembles:

$$(B \cap A) - (B \cap C) ; (A \cap B) - (C \cap A) ; (C \cap D) - (B \cap D).$$

E.24.7.

Les ensembles envisagés sont ceux de E.24.1.

Déterminer les ensembles:

$$1°) A - (B - C) ; A - (C - B) ; B - (A - C) ; B - (A - D).$$

$$2°) A - (A - B) ; C - (C - D) ; A - (A - D) ; A - (A - (C - D))$$

E.24.8.

Les ensembles envisagés sont ceux de E.24.1.

Déterminer les ensembles:

$$1°) (A \triangle B) \triangle C ; B \triangle (D \triangle A) ; A \triangle (C \triangle D) ; B \triangle (C \triangle A).$$

$$2°) (A \triangle C) \triangle D ; A \triangle (B \triangle C) ; (B \triangle D) \triangle A ; C \triangle (D \triangle C).$$

E.24.9.

Les ensembles envisagés sont ceux de E.24.1.

Déterminer les ensembles:

$$1°) A \cap (B \triangle C) ; B \cup (A \triangle D) ; C \cap (B \triangle A) ;$$

$$2°) (B \cup A) \triangle (B \cup D) ; (A \cap B) \triangle (A \cap D) ; (C \cap B) \triangle (C \cup A) ; \\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) ; (C \cap B) \triangle (C \cap A).$$

E.24.10.

A, B, C, D, sont les ensembles de l'exercice E.24.3.

Déterminer les ensembles suivants:

$$1^{\circ}) A \cap (B - C) ; D \cap (C - B) ; B \cap (A - C).$$

$$2^{\circ}) (B \cap A) - (B \cap C) ; (A \cap B) - (C \cap A) ; (C \cap D) - (B \cap D).$$

E.24.11.

A, B, C, D, sont les ensembles de l'exercice E.24.3.

Déterminer les ensembles suivants:

$$1^{\circ}) A - (B - C) ; A - (C - B) ; (B - (A - C)) ; B - (A - D).$$

$$2^{\circ}) A - (A - B) ; C - (C - D) ; A - (A - D) ; A - (A - (C - D)).$$

E.24.12.

A, B, C, D, sont les ensembles de l'exercice E.24.3.

Déterminer les ensembles suivants:

$$1^{\circ}) (A \triangle B) \triangle C ; B \triangle (D \triangle A) ; A \triangle (C \triangle D) ; B \triangle (C \triangle A).$$

$$2^{\circ}) (A \triangle C) \triangle D ; A \triangle (B \triangle C) ; (B \triangle D) \triangle A ; C \triangle (D \triangle C).$$

E.24.13.

A, B, C, D, sont les ensembles de l'exercice E.24.3.

Déterminer les ensembles suivants:

$$1^{\circ}) A \cap (B \triangle C) ; B \cup (A \triangle D) ; C \cap (B \triangle A).$$

$$2^{\circ}) (B \cup A) \triangle (B \cup D) ; (A \cap B) \triangle (A \cap D) ; (C \cap B) \triangle (C \cup A) ; \\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) ; (C \cap B) \triangle (C \cap A).$$

E.24.14.

Quels que soient les ensembles E, F, démontrer que:

$$\bigcap_{F \cup E} (F \cap E) = E \triangle F$$

E.24.15.

Quels que soient les ensembles E, F, démontrer que:

$$E \triangle F = [\bigcap_E (E \cap F)] \cup [\bigcap_F (F \cap E)]$$

E.24.16.

Quels que soient les ensembles E, F, démontrer que:

$$E \cap (E \triangle F) = \bigcap_E (E \cap F)$$

E.24.17.

Que peut-on dire de deux ensembles A , B , tels que:

$$A \Delta B = \emptyset \quad ?$$

E.24.18.

Démontrer que:

$$(A \in \mathcal{P}(E) \text{ et } B \in \mathcal{P}(E)) \Rightarrow [C_E(A \Delta B) = (A \cap B) \cup C_E(A \cup B)]$$

25 - L E S E N S E M B L E S
T A B L E A U S Y N O P T I Q U E

- AX1 : Il existe au moins un ensemble.
- AX2 : Quels que soient les ensembles E, F, E égale F si et seulement si, pour tout x, l'appartenance de x à E est logiquement équivalente à l'appartenance de x à F.
- AX3 : Quels que soient les termes a, b, il existe un ensemble E (unique d'après AX2), qui a pour seuls éléments a, b.
- AX4 : Pour tout ensemble E, quelle que soit la fonction propositionnelle A(x) à une seule variable, il existe un ensemble (unique d'après AX2) dont les éléments sont les éléments de E qui conduisent à une proposition vraie lorsqu'ils remplacent x dans A(x), et ceux-là seulement.
- AX5 : Quel que soit l'ensemble E, il existe un ensemble (unique d'après AX2), noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les parties de E et seulement ces parties.
- AX6 : Quel que soit l'ensemble E, dont les éléments sont des ensembles A, B, C, ..., il existe un ensemble F (unique d'après AX2), ayant pour éléments ceux de A, B, C, ..., et ceux-là seulement.
- R8 : Si les ensembles $\{x|A(x)\}$ et $\{x|B(x)\}$ existent, si $\forall (x) [A(x) \iff B(x)]$ est une proposition vraie, si E désigne l'ensemble $\{x|A(x)\}$, alors, en remplaçant A(x) par B(x) dans $E = \{x|A(x)\}$, on obtient la proposition vraie: $E = \{x|B(x)\}$.
- R9 : Si $\forall (x) [A(x) \iff B(x)]$ est une proposition vraie, si C désigne l'ensemble $\{x|x \in E \text{ et } A(x)\}$, alors, en remplaçant A(x) par B(x) dans $C = \{x|x \in E \text{ et } A(x)\}$, on obtient la proposition vraie: $C = \{x|x \in E \text{ et } B(x)\}$.
- 19.3.1. $E = F \iff \forall x(x \in E \iff x \in F)$
- 19.4.2. $E \neq F \iff \exists x((x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E))$
- 20.1.1. Le symbole $\exists x \in E, A(x)$ désigne la proposition $\exists x(x \in E \text{ et } A(x))$
- 20.1.2. $(\forall y \in E \text{ et } A(y)) \implies (\exists x \in E, A(x))$
- 20.2.1. $\forall x \in E, A(x)$ désigne la proposition non $(\exists x \in E, \text{non } A(x))$.

- 20.2.2. $(\forall x \in E, A(x)) \iff (\text{non}(\exists x \in E, \text{non} A(x)))$
- 20.2.3. $(\forall x \in E, A(x)) \iff \forall x(x \in E \implies A(x))$
- 20.2.4. $\forall x, A(x) \implies \forall x(B(x) \implies A(x))$
- 20.2.5. $\forall x, A(x) \implies \forall x \in E, A(x)$
- 20.3.1. $\text{non}(\exists x \in E, A(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non} A(x))$
- 20.3.3. $\text{non}(\forall x \in E, A(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non} A(x))$
- 20.4.1. $(\forall x \in E, A(x) \text{ et } B(x)) \iff (\forall x \in E, A(x) \text{ et } \forall x \in E, B(x))$
- 20.4.2. $(\forall x \in E, A(x) \text{ ou } \forall x \in E, B(x)) \implies (\forall x \in E, A(x) \text{ ou } B(x))$
- 20.4.3. $(\exists x \in E, A(x) \text{ ou } B(x)) \iff (\exists x \in E, A(x) \text{ ou } \exists x \in E, B(x))$
- 20.4.4. $(\exists x \in E, A(x) \text{ et } B(x)) \implies (\exists x \in E, A(x) \text{ et } \exists x \in E, B(x))$
- 21.1.2. $A \subset E$ désigne la proposition $\forall x(x \in A \implies x \in E)$
- 21.1.3. $A \subset E \iff \forall x(x \in A \implies x \in E)$
- 21.1.4. $\forall x(x \in E \implies x \in E)$
- 21.1.5. $\forall E, E \subset E$
- 21.1.13. $A \subset E \iff \forall x(x \in A \iff (x \in A \text{ et } x \in E))$
- 21.2.1. $(x \in E \text{ et } B(x)) \iff x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$
- 21.2.2. $\forall x(x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\} \implies x \in E)$
- 21.2.3. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$ alors $A \subset E$
- 21.2.6. $\forall x \in E, [x \in \{x | x \in E \text{ et } B(x)\} \iff B(x)]$
- 21.2.7. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$ alors $\forall x \in E, (x \in A \iff B(x))$
- 21.5.1. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$ alors
 $A \subset B \iff \forall x [(x \in E \text{ et } C(x)) \implies (x \in E \text{ et } D(x))]$
- 21.5.3. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$ alors
 $A \subset B \iff \forall x [x \in E \implies (C(x) \implies D(x))]$
- 21.5.4. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$ alors
 $A \subset B \iff \forall x \in E, (C(x) \implies D(x))$
- 21.6.1. $A \not\subset E$, désigne la proposition $\text{non}[\forall x(x \in A \implies x \in E)]$
- 21.6.2. $A \not\subset E \iff \text{non}[\forall x(x \in A \implies x \in E)]$
- 21.6.6. $A \not\subset E \iff \exists x(x \notin E \text{ et } x \in A)$
- 21.6.9. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$ alors
 $A \not\subset B \iff \exists x \in E, (C(x) \text{ et non } D(x))$
- 21.7.2. $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$
- 21.7.4. $A \neq B \iff (A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A)$
- 21.7.7. $(A \subset E \text{ et } A \neq E) \iff (A \subset E \text{ et } E \not\subset A)$
- 21.7.9. $(A \subset E \text{ et } A \neq E) \implies E \not\subset A$
- 21.7.10. A est strictement inclus dans E si et seulement si
 $A \subset E$ et $A \neq E$.

- 21.7.13. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$
alors, $A = B \iff \forall x \in E, (C(x) \iff D(x))$
- 21.7.16. $E = \{x | x \in E \text{ et } x = x\}$
- 21.8.5. Quels que soient les ensembles A, B, C ,
 $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies A \subset C$
- 21.9.1. Si $\{x | A(x)\}$ existe alors $x \in \{x | A(x)\} \iff A(x)$
- 21.9.3. $\{x | x \in E\} = E$
- 21.9.4. Si $\{x | A(x)\}$ et $\{x | B(x)\}$ existent alors
 $(A(x) \iff B(x)) \iff (x \in \{x | A(x)\} \iff x \in \{x | B(x)\})$
- 21.9.7. Si $\{x | A(x)\}$ et $\{x | B(x)\}$ existent, alors,
 $\forall x (A(x) \iff B(x)) \iff (\{x | A(x)\} = \{x | B(x)\})$
- 22.1.1. Si $A \subset E$, alors $\bigcup_E A = \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}$
- 22.1.2. $A \subset E \implies \bigcup_E A \subset E$
- 22.1.3. $A \subset E \implies \forall x [x \in \bigcup_E A \iff (x \in E \text{ et } x \notin A)]$
- 22.1.4. Si $A \subset E$, alors $\forall x \in E, (x \in \bigcup_E A \iff x \notin A)$
- 22.2.5. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } B(x)\}$, alors
 $\forall x [x \in \bigcup_E A \iff (x \in E \text{ et non } B(x))]$
- 22.3.6. Si A est une partie de E , $\bigcup_E \bigcup_E A = A$
- 22.3.8. $A \subset B \implies [\{x | x \in E \text{ et } x \notin B\} \subset \{x | x \in E \text{ et } x \notin A\}]$
- 22.3.12. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors $A \subset B \iff \bigcup_E B \subset \bigcup_E A$
- 22.3.14. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors, $A = B \iff \bigcup_E A = \bigcup_E B$
- 22.4.1. $\{x | x \in E \text{ et } x \neq x\}$ est appelée partie vide de E .
- 22.4.3. $\bigcup_E E = \{x | x \in E \text{ et } x \neq x\}$
- 22.5.8. Quel que soit l'ensemble F , $\bigcup_E E = \bigcup_F F$
- 22.5.9. Quel que soit l'ensemble F , $\bigcup_F F = \emptyset$
- 22.5.10. Quel que soit l'ensemble F , $\emptyset \subset F$.
- 22.5.11. $\forall x (x \notin \bigcup_E E)$ est une proposition vraie.
- 22.5.12. $\forall x (x \notin \emptyset)$ est une proposition vraie.
- 22.5.13. $\exists x (x \notin \emptyset)$ est une proposition vraie.
- 22.5.14. Quel que soit l'ensemble F , $\bigcup_F \emptyset = F$.
- 22.6.3. Quelle que soit la partie A de E ,
 $A \subset E \iff A \subset \mathcal{P}(E)$
- 23.1.2. $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- 23.1.3. $x \in (A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$
- 23.3.2. Quels que soient les ensembles A, B , $A \cup B = B \cup A$
- 23.4.4. Quels que soient les ensembles A, B, C ,
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

- 23.5.1. Quels que soient les objets distincts a, b ,
 $\{a\} \cup \{b\} = \{a; b\}$
- 23.5.2. Quel que soit l'ensemble A , $A \cup A = A$
- 23.5.3. $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- 23.5.4. Quels que soient les ensembles A, B , $A \subset A \cup B$.
- 23.5.5. Quels que soient les ensembles A, B , $A \subset B \cup A$.
- 23.5.6. Quels que soient les ensembles A, B , $B \subset A \cup B$
 et $B \subset B \cup A$
- 23.5.9. Quels que soient les ensembles A, B ,
 $A \subset B \iff A \cup B = B$
- 23.5.10. E étant un ensemble, si A est élément de $\mathcal{P}(E)$, alors
 $A \cup E = E \cup A = E$.
- 23.5.11. Quel que soit l'ensemble A , $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.
- 23.5.13. Si $A = \{x | x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x | x \in E \text{ et } D(x)\}$,
 alors, $A \cup B = \{x | x \in E \text{ et } (C(x) \text{ ou } D(x))\}$
- 23.5.16. $A \subset E \iff \forall x [(x \in A \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \notin A)) \iff x \in E]$
- 23.5.17. $A \subset E \implies (A \cup \bigcup_E A = E)$
- 23.5.18. Si $A \subset E$, alors $A \cup \bigcup_E A = E$
- 23.5.21. Quels que soient les ensembles A, B, E ,
 $(A \subset E \text{ et } B \subset E) \implies (A \cup B \subset E)$
- 23.7.3. Quels que soient les ensembles A, B ,
 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ et } x \in B\}$
- 23.7.4. $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$
- 23.9.2. Quels que soient les ensembles A, B , $A \cap B = B \cap A$
- 23.10.4. Quels que soient les ensembles A, B, C ,
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- 23.11.3. Quel que soit l'ensemble A , $A \cap A = A$
- 23.11.4. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$
- 23.11.5. Quels que soient les ensembles A, B , $A \cap B \subset A$
- 23.11.6. Quels que soient les ensembles A, B , $B \cap A \subset A$
- 23.11.7. Quels que soient les ensembles A, B , $A \cap B \subset B$
 et $B \cap A \subset B$
- 23.11.10. Quels que soient les ensembles, A, B ,
 $A \subset B \iff A \cap B = A$
- 23.11.11. Si A est un élément de $\mathcal{P}(E)$, alors,
 $A \cap E = E \cap A = A$

- 23.11.12. Quel que soit l'ensemble A, $\emptyset \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset$
- 23.11.14. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$,
alors, $A \cap B = \{x \mid x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et } D(x))\}$
- 23.11.15. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$,
alors, $\forall x \in E, [x \in A \cap B \iff (C(x) \text{ et } D(x))]$
- 23.11.18. Quels que soient les ensembles A, B, E,
 $(A \subset E \text{ ou } B \subset E) \implies (A \cap B \subset E)$
- 23.11.19. Quels que soient les ensembles A, B, E,
 $(A \subset E \text{ et } B \subset E) \implies (A \cap B \subset E)$
- 23.11.23. Quelle que soit la partie A de E, $(\bigcup_E A) \cap A = \emptyset$
- 23.12.5. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors, $\bigcup_E (A \cap B) = (\bigcup_E A) \cap (\bigcup_E B)$
- 23.12.10. Si $A \subset E$ et $B \subset E$, alors, $\bigcup_E (A \cup B) = (\bigcup_E A) \cap (\bigcup_E B)$
- 23.13.2. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 23.13.4. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 23.13.6. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$
- 23.13.7. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
- 24.1.1. Quels que soient les ensembles E, F,
 $E - F = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin F\}$
- 24.1.2. $x \in (E - F) \iff (x \in E \text{ et } x \notin F)$
- 24.3.1. Si $F \subset E$ alors, $E - F = \bigcup_E F$
- 24.3.2. Quel que soit l'ensemble E, $E - \emptyset = E$
- 24.3.3. $\emptyset - \emptyset = \emptyset$
- 24.3.7. Quel que soit l'ensemble F, $\emptyset - F = \emptyset$
- 24.4.3. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$
alors, $x \in (A - B) \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et non } D(x))]$
- 24.4.4. Si $A = \{x \mid x \in E \text{ et } C(x)\}$ et $B = \{x \mid x \in E \text{ et } D(x)\}$
alors, $A - B = \{x \mid x \in E \text{ et } (C(x) \text{ et non } D(x))\}$
- 24.5.2. Si $A \subset E$ et si $B \subset E$, alors, $A - B = A \cap \bigcup_E B$
- 24.5.3. Quels que soient les ensembles E, F,
 $E - (E - F) = E \cap F$
- 24.5.4. Quels que soient les ensembles A, B, C,
 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
- 24.5.5. Quels que soient les ensembles E, F,
 $E \subset F \iff E - F = \emptyset$

- 24.5.6. Quel que soit l'ensemble E , $E - E = \emptyset$
- 24.6.1. Quels que soient les ensembles E, F ,
 $E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$
- 24.6.2. $x \in (E \Delta F) \iff [(x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E)]$
- 24.7.1. $x \in (E \Delta F) \iff (x \in E) \vee (x \in F)$
- 24.7.2. $E \Delta F = \{ x \mid (x \in E) \vee (x \in F) \}$
- 24.7.5. Quels que soient les ensembles E, F ,
 $E \Delta F = E \cup F - E \cap F$
- 24.8.1. Quels que soient les ensembles E, F , $E \Delta F = F \Delta E$
- 24.8.2. Quel que soit l'ensemble E , $E \Delta \emptyset = E$
- 24.8.3. Quel que soit l'ensemble E ,
 $E \Delta E = \emptyset$
- 24.8.5. Quels que soient les ensembles A, B, C ,
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
- 24.8.7. Quels que soient les ensembles A, B, C ,
 $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- 24.8.8. Si $A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$ et $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \}$
alors, $x \in (A \Delta B) \iff [x \in E \text{ et } (C(x) \vee D(x))]$
- 24.8.9. Si $A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$ et $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \}$
alors, $A \Delta B = \{ x \mid x \in E \text{ et } (C(x) \vee D(x)) \}$
- 24.8.10. Si $A = \{ x \mid x \in E \text{ et } C(x) \}$ et $B = \{ x \mid x \in E \text{ et } D(x) \}$
alors, $\forall x \in E, [x \in (A \Delta B) \iff (C(x) \vee D(x))]$

N O T E

Pour concrétiser des concepts et des résultats concernant la logique et les ensembles, il est habituel d'utiliser une collection d'objets. Ces objets sont construits de telle sorte que:

tous possèdent des propriétés communes;

tous se différencient par au moins une propriété.

Les objets qui sont désignés dans cet ouvrage sous le vocable de bloc ou plaque L.O.G., doivent être considérés comme répartis de la façon suivante, si l'on veut comprendre les exemples où ils sont utilisés.

La collection comporte 48 objets tous distincts et possédant chacun quatre qualités:

la taille (2cas : grand, petit)

la couleur (3 cas : bleu, jaune, rouge)

la forme (4 cas : rond, carré, rectangle, triangle)

la texture (2 cas : plein, troué)

B I B L I O G R A P H I E

BASTIANI.A.

Théorie des ensembles

CDU Paris

BERNAYS - FRAENKEL

Axiomatic set theory

North Holland Amsterdam

BETH.E.W.

Les fondements logiques des mathématiques.

Gauthier Villars Paris

BLANCHE.R.

Introduction à la logique contemporaine.

Armand Colin Paris

BOURBAKI. N.

Théorie des ensembles chapitres I et II

Hermann Paris

BREUER.J.

Initiation à la théorie des ensembles.

Dunod Paris

CARNAP.R.

Introduction to symbolic logic and its applications.

New-York Dover publication

CARVALLO.M.

Monographie des treillis et algèbre de Boole.

Gauthier Villars Paris

CHAUVINEAU

La logique moderne

P.U.F. Paris

CHURCH.A.

Introduction to mathematical logic.

Princeton University Press

COHEN.P.J.

Set theory and the continuum hypothesis.

W.A.Benjamin Inc. New-York

DOPP.J.

Notions de logique formelle.

Editions Béatrice Nauwelaerts Paris

DUBARLE.

Initiation à la logique.

Gauthier Villars Paris

FRAISSE

Cours de logique mathématique; Tome I

Gauthier Villars Paris

HALMOS. P.R.

; Introduction à la théorie des ensembles.

Gauthier Villars Paris

HAO WANG et Mc NAUGHTON.

Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles.

Gauthier Villars Paris

HILBERT and ACKERMANN

Principle of mathematical logic

Chelsea Publishing Company New-York

KAMKE.E.

Théorie des ensembles

Dunod Paris

KREISEL et KRIVINE

Eléments de logique mathématique

Dunod Paris

KRIVINE.J.L.

Théorie axiomatique des ensembles.

PUF Paris

KURATOWSKI.K.

Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie

Institut mathématique de Genève.

NOVIKOV.P.S.

Introduction à la logique mathématique.

Dunod Paris

PONASSE.D.

Logique mathématique.

O.C.D.L. Paris

QUINE.W.V.

Set theory and its logic

Cambridge. The Belknap press of Harvard University Press

RUBIN.J.E.

Set theory

Holden-day San Francisco

SUPPES

1) Introduction to logic

2) Axiomatic set theory

Van Nostrand Princeton

TARSKI.A.

Introduction à la logique

Gauthier Villars Paris

WHITEHEAD et RUSSEL

Principia mathematica

Cambridge

Collection la pléiade

Logique et connaissance scientifique.

Gallimard Paris