IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 1

Une introduction

Tome 1

à la logique

M. Durand
M. Van Den Bossche

1977

UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M. de NANTES

UNE INTRODUCTION

A LA LOGIQUE

PAR

MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE

Animateurs de l'I.R.E.M. de NANTES

NANTA IREMICA

Volume I

NANTA IREMICA

NANTA IREMICA

Le présent ouvrage est le premier de la série "Nanta Iremica". Cette série a pour but d'offrir aux Stagiaires de l'I.R.E.M., et plus généralement aux Enseignants, un choix de textes élaborés pour eux et déjà utilisés, avant publication, dans le cadre des groupes I.R.E.M. ou des groupes analogues d'Enseignants.

Ces textes, munis d'exercices gradués et variés, ont donc été critiqués par des collègues et ne représentent pas les seules lubies de leurs auteurs. Ce sont souvent des gloses sur des cours mathématiques magistraux nettement plus élaborés et exhaustifs. Ce sont aussi des textes destinés aux Enseignants.

Qu'on ne se méprenne surtout pas en imaginant que cette phase critique fasse des ouvrages à paraître des ouvrages de référence définitifs. La critique collective, si elle élimine des erreurs, organise plus rationnellement le plan d'un texte et l'adapte finalement mieux aux besoins des lecteurs, ne peut fournir un brevet de valeur assurée.

Que le lecteur garde tout son esprit critique, l'aiguise même. Les textes de la "Nanta Iremica" n'ont aucun caractère contraignant et ne sont imposés par aucune hiérarchie. Tels qu'ils sont, ils représentent une étape, figée par le texte, de l'activité mathématique et pédagogique d'une Académie. Mais les modes, les goûts et les connaissances évoluent et les étapes se succèdent.

Octobre 1975

PREFACE

Depuis quelques décennies, la logique mathématique ne cesse d'étonner le monde mathématique par les résultats qu'elle obtient et ce quelquefois dans des domaines qui ne semblaient pas devoir être le sien.

On connaît, au moins par on-dit, les succès de GÖDEL et peut-être ceux de P.J. COHEN. Le premier, vers 1939, démontrait que l'hypothèse du continu (et l'axiome du choix) étaient compatibles avec les axiomes de la théorie des ensembles. Le deuxième, vers 1963, établissait que l'hypothèse du continu ne peut être obtenue à partir de l'axiome du choix et réciproquement que l'axiome du choix ne peut être déduit de l'hypothèse du continu. En outre, l'axiome du choix est logiquement indépendant des axiomes de la théorie des ensembles. On obtenait ainsi la première relation mathématique indécidable.

D'autres résultats encore plus récents concernent la non possibilité de trouver un algorithme universel pour résoudre les équations diophantiennes. A n'en pas douter, la logique mathématique est une des branches les plus actives de la recherche mathématique actuelle. Il ne peut être question d'aborder l'état de ces recherches dans ce texte.

Cependant, on s'est aussi rendu compte, par ce souci d'épuration des concepts qui caractérise notre siècle mathématique, que l'on avait avantage, dès le niveau de l'enseignement secondaire, à fournir des connaissances de logique aux futurs Enseignants. Malheureusement, la plupart des livres disponibles exigent une attention soutenue et on est vite perdu, par manque d'exercices préparés, dans le dédale des propositions.

Les auteurs du présent ouvrage l'ont rédigé pour faire face à une demande provenant d'Enseignants du Secondaire et ont pu tester leur texte auprès de nombreux collègues stagiaires. Le texte se veut élémentaire et naïf, mais prend lentement le lecteur en lui faisant parcourir un petit bout de chemin en logique et en lui donnant tout le temps nécessaire pour se frotter à des exemples variés.

C'est une invite à lire ensuite des ouvrages plus étoffés de logique pour lesquels il sera préparé. En un mot, c'est un peu l'échauffement qui précède la course. Nous souhaitons que ce texte puisse être utile aux Enseignants et remercions vivement les deux auteurs, tous deux Animateurs à l'I.R.E.M. de Nantes, pour leur travail patient et minutieux.

J. DHOMBRES
Directeur de l'I.R.E.M. de Nantes

Octobre 1975

TABLE DES MATIERES

.../...

NOTIONS SUR LE CALCUL DES PREDICATS

P R E M I E R E   P A R T I E

L A   L O G I Q U E

G E N E R A L I T E S

1 - N O T I O N S   P R I M I T I V E S

Dans ce qui suit, nous précisons le sens que nous voulons donner à certains mots sans prétendre les définir.

1.1. Proposition.

Toute phrase, ou succession de phrases, ecrite en français ou en langage formalisé, qui exprime une affirmation ou une négation, objectivement, soit vraie soit fausse, est une proposition.

Exemples. 1) "Le nombre 7 est premier" est une proposition vraie.

2) " 13 est divisible par 3" est une proposition fausse.

3) " La musique dodécaphoniste est belle". Cette phrase n'exprime pas une proposition parce que le jugement vrai ou faux dépend du sujet qui le formule.

Précisons dès maintenant qu'une proposition a nécessairement une valeur de vérité et une seule, c'est à dire est:

soit vraie et seulement vraie;

soit fausse et seulement fausse.

Nous ne reconnaissons pas comme propositions les phrases conduisant à un jugement qui soit "ni vrai ni faux" (indécidable), à un jugement qui soit "à la fois vrai et faux" (contradictoire). On exprime ce qui précède en disant que la logique considérée est bivalente.

1.2. Propositions indéterminées.

Les lettres P, Q, R, S,..., désignent des propositions indéterminées. Lorsque nous remplaçons la lettre P, par exemple, par une proposition vraie, nous dirons que "P est vraie". De la même manière lorsque nous remplacerons P par une proposition fausse, nous dirons que "P est fausse".

Exemple. Si nous remplaçons P par la proposition "2 divise 6", P est vraie. Dans le cas où nous remplaçons P par "$5 > 11$", P est fausse.

1.3. Fonctions propositionnelles.

A) Une phrase ou une succession de phrases dans lesquelles figure, une ou plusieurs fois la lettre x, appelée variable, est une <u>fonction propositionnelle</u> à une variable dès qu'il est possible d'obtenir une proposition en remplaçant x, en chacune de ses occurrences, par un objet déterminé.

Exemples.

1) Considérons la phrase:"le nombre entier x divise 36." En remplaçant x par le nombre 4, nous obtenons la proposition vraie "le nombre 4 divise 36". La phrase:"le nombre entier x divise 36" est une fonction propositionnelle.

2) La phrase:"le nombre x est un nombre bénéfique", n'est pas une fonction propositionnelle. En remplaçant x par un nombre déterminé, nous n'obtenons pas une proposition puisqu'alors le jugement exprimé est subjectif.

3) La phrase:"le nombre entier x divise le nombre entier x" est une fonction propositionnelle. En substituant à x le nombre 41, nous obtenons une proposition vraie:"le nombre entier 41 divise le nombre entier 41".

B) Une phrase ou une succession de phrases dans lesquelles figurent, une ou plusieurs fois les lettres x, y, z,..., appelées variables, est une <u>fonction propositionnelle</u> à plusieurs variables dès qu'il est possible d'obtenir une proposition en remplaçant x, y, z,..., en chacune de leurs occurrences, par des objets déterminés. Précisons que toutes les lettres x doivent être remplacées par un même objet, que toutes les lettres y doivent être remplacées par un même objet qui peut être différent du précédent, etc...

Exemples.

1) Etant donnée la phrase:"les nombres x et y sont tels que $x + y > 7$", nous obtenons une proposition fausse en remplaçant x par le nombre 2 et y par le nombre 3. La phrase donnée est donc une fonction propositionnelle à deux variables.

2) "Le nombre x divise la somme des nombres y, z", est une fonction propositionnelle puisque en substituant le nombre 4 à x, le nombre 3 à y, le nombre 9 à z, nous obtenons la proposition vraie:"le nombre 4 divise la somme des nombres 3, 9.".

C) Les fonctions propositionnelles à une variable x, seront représentées par les symboles $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$, $\mathcal{C}(x)$, etc...
Dans le cas de fonctions propositionnelles à plusieurs variables x, y, z,..., on notera, par exemple, $\mathcal{A}(x,y)$, $\mathcal{B}(x,y)$,...
Lorsque nous remplacerons, dans $\mathcal{A}(x)$, la variable x par l'objet déterminé a, la proposition obtenue sera notée $\mathcal{A}(a)$, ou mieux A.

1.4. Description d'objets.

Il existe des phrases ou des succession de phrases, contenant une ou plusieurs variables, qui, dès que l'on y remplace les variables par des objets déterminés, deviennent des descriptions d'autres objets. Ces phrases ne sont pas des fonctions propositionnelles.

Exemple.

"Le carré de x", n'est pas une fonction propositionnelle, mais, en remplaçant x par le nombre 3, on a une description du nombre 9.

1.5. Les assemblages.

En mathématique, une expression totalement formalisée, c'est à dire écrite uniquement à l'aide des signes logiques définis dans les pages suivantes, de lettres, et de signes mathématiques (= , + ,...) est appelée, selon Bourbaki, un assemblage. En fait, ce genre d'expression devrait permettre d'écrire tout ce qui constitue la mathématique; mais Bourbaki lui-même y renonce étant donné la lourdeur et la complexité d'un tel exposé.
Les assemblages sont donc également représentés par des symboles abréviateurs. Les uns désignent des termes ou objets mathématiques (par exemple $E \cap F$, $\mathbb{N}$, etc...), les autres désignent des relations qui représentent des fonctions propositionnelles ou des propositions (par exemple $x + 4 = 0$, $E \subset (E \cup F)$, etc...). Les relations qui contiennent une lettre x représentant une variable à laquelle on s'intéresse particulièrement seront notées $\mathcal{R}(x)$.

1.6. Transformation des fonctions propositionnelles en propositions

, Nous avons précisé le sens que nous donnions aux mots propositions, fonctions propositionnelles, variables. Nous allons envisager des procédés permettant de transformer une fonction propositionnelle $A(x, y, ...)$ en une proposition.

A) Remplacement des variables par des objets déterminés.

Une fonction propositionnelle $A(x, y, ...)$, dans laquelle chaque variable a été remplacée par un objet déterminé, devient une proposition. Ce cas a déjà été considéré au paragraphe 1.3. (revoir,à ce sujet, les exemples du paragraphe 1.3.). Précisons que si $A(x, y, z, ...)$ comporte plusieurs variables $x, y, z, ...,$ et que si l'une d'elle au moins n'a pas été remplacée par un objet précis, nous n'obtenons pas de proposition associée, mais nous sommes encore en présence d'une fonction propositionnelle.

B) Examinons maintenant quelques cas particuliers.

a) Considérons la fonction propositionnelle $A(x)$:" le nombre entier naturel x est pair ". A cette fonction propositionnelle, nous pouvons associer la phrase suivante:

" il existe au moins un nombre entier naturel x tel que x est un nombre pair "

Point n'est besoin de remplacer la variable x par un nombre entier naturel déterminé, pour affirmer objectivement que ce jugement est vrai . Ce jugement est donc une proposition.

b) Considérons la fonction propositionnelle:" le bloc logique L.O.G. (1) [redacted]. x est sphérique ". Associons à cette fonction propositionnelle la phrase:" il existe au moins un bloc logique L.O.G. [redacted]. x tel que: ce bloc x est sphérique ". Nous pouvons affirmer objectivement que ce jugement est faux sans remplacer x par un bloc logique L.O.G. [redacted]. déterminé. Ce jugement est une proposition.

c) Considérons la fonction propositionnelle:" le nombre entier naturel x est tel que x est supérieur à x^2". Associons lui la phrase suivante:" Quel que soit le nombre entier naturel x, x^2 est supérieur à x ". Cette affirmation est une proposition fausse. En effet, en remplaçant x par certains entiers naturels: 2, 3, ..., dans $A(x)$, nous obtenons une proposition vraie, mais la proposition obtenue est fausse lorsque nous remplaçons x par 0 ou 1. En conséquence, nous n'obtenons pas une proposition vraie quel que soit le

(1) VOIR NOTE A LA FIN DE L'OUVRAGE (page 293)

nombre entier naturel remplaçant x dans $A(x)$.

C) Ces trois cas particuliers nous montrent qu'il existe des procédés permettant de transformer une fonction propositionnelle donnée en une proposition, autres que celui qui consiste à remplacer une variable par un objet déterminé.

D) La présence, dans un jugement, de l'expression " pour tout... ..." ou de l'expression " il existe au moins un ..." ne nous permet pas d'affirmer que ce jugement est une proposition. Considérons par exemple la fonction propositionnelle $A(x, y)$:
" le nombre entier naturel x est inférieur à l'entier naturel y"
Associons à $A(x, y)$ la phrase suivante:
" il existe au moins un nombre entier naturel x inférieur à l'entier naturel y "
Cette phrase n'est pas une proposition. En y remplaçant y par un entier naturel déterminé, elle devient une proposition. On obtient une proposition fausse en remplaçant y par 0 et une proposition vraie en remplaçant y par 3.

E) Remarque.

Les notions abordées dans ce paragraphe seront reprises et précisées aux paragraphes 15.3, 15.4, ...

E X E R C I C E S

E.1.1.

Parmi les expressions suivantes, quelles sont les "fonctions propositionnelles" et quelles sont les"descriptions d'objets"?

1º) Le produit des nombres entiers naturels x, 3, y.

2º) Le nombre entier naturel x est un multiple de 5.

3º) Le carré du nombre entier naturel x est 4.

4º) $x^2 + 3x - 4$.

5º) La somme des deux nombres entiers naturels x, y, est inférieure à 11.

6º) $x^2 + 3x - 4 = 0$.

7º) La somme des carrés des entiers naturels x, y.

8º) Le plus grand diviseur de l'entier naturel x.

9º) Les entiers naturels x, y, ont un diviseur commun pair.

10º) Un diviseur pair commun aux entiers naturels x, y.

E.1.2.

Reprendre l'exercice E.1.1, et remplacer x par 2, y par 6, Il est alors possible d'obtenir:

dans certains cas, une proposition vraie; laquelle?

dans d'autres cas, une proposition fausse; laquelle?

dans d'autres cas, un nombre; lequel?

E.1.3.

Reprendre l'exercice E.1.1, et remplacer x par 1, y par 11. Il est alors possible d'obtenir:

dans certains cas, une proposition vraie; laquelle?

dans d'autres cas, une proposition fausse; laquelle?

dans d'autres cas, un nombre; lequel?

E.1.4.

Reprendre l'exercice E.1.1, et remplacer x par 10, y par 0. Il est alors possible d'obtenir:

dans certains cas, une proposition vraie; laquelle?

dans d'autres cas, une proposition fausse; laquelle?

dans d'autres cas, un nombre; lequel?

E.1.5.

Considérons les énoncés suivants:

1º) quel que soit l'entier naturel x, x est un multiple de x.

2º) Il existe au moins un entier naturel x dont le carré est 8.

3º) Le nombre entier natuel x est le carré de 8.

4º) Il existe au moins un entier naturel x supérieur au carré du nombre entier naturel y.

5º) Quel que soit l'entier naturel x, le double de x est supérieur à l'entier naturel y.

6º) Quel que soit l'entier naturel x, il existe au moins un entier naturel y tel que le double de x soit supérieur à $x + y$.

7º) Quel que soit l'entier naturel x, le double de x est supérieur à $x + 1$.

8º) Quels que soient les entiers naturels x, y, $x^2 + y > 0$.

9º) Il existe au moins un entier naturel x dont le carré est inférieur à l'entier naturel y.

10º) Il existe au moins un entier naturel x et il existe au moins un entier naturel y tels que $(x - y)^2 = 0$.

Parmi ces énoncés, quelles sont les "fonctions propositionnelles" et quelles sont les"propositions"?

E.1.6.

Parmi les dix énoncés envisagés au numéro E.1.5, quelles sont les "propositions vraies"; quelles sont les"propositions fausses".

E.1.7.

Considérons les fonctions propositionnelles suivantes:

1º) L'entier naturel x est divisible par 7 et par 9.

2º) $x^3 + x = 0$.

3º) $x^4 + x^2 + 1 \geq 0$

4º) Le double de x est supérieur au carré de x.

5º) $2x^2 - 7 > 5x^2 - 3$.

6º) Il existe un entier naturel y tel que $x^2 + y = 1$.

7º) Il existe au moins un entier naturel y telque $(x + 1)^2 + y = 0$.

8º) Quel que soit l'entier naturel y, $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$.
Parmi ces fonctions propositionnelles quelles sont celles qui permettent d'obtenir une proposition vraie en remplaçant x par un entier naturel quelconque?

E.1.8.

Parmi les huit fonctions propositionnelles envisagées à l'exercice E.1.7, quelles sont celles qui permettent d'obtenir une proposition fausse en remplaçant x par un entier naturel quelconque?

E.1.9.

Parmi les huit fonctions propositionnelles envisagées à l'exercice E.1.7, quelles sont celles qui permettent d'obtenir une proposition vraie en remplaçant x par certains entiers naturels, et une proposition fausse en remplaçant x par d'autres entiers naturels?

2 - LES PROPOSITIONS COMPOSEES

2.1. Introduction

Considérons les deux propositions:

" 5 est supérieur à 2 "

" 7 est plus petit que 9 "

Chacune d'elles est vraie.

Envisageons la phrase suivante:" le nombre 5 est supérieur à 2 et le nombre 7 est plus petit que 9 ". Chacun reconnait comme vrai le jugement qu'elle exprime: c'est une proposition. Elle est composée des propositions précédentes reliées par la conjonction "et". A partir des deux propositions, en utilisant le mot "et", nous venons de construire une nouvelle proposition appelée proposition composée.

P, Q, désignant les propositions composantes initiales, la proposition composée peut être notée symboliquement:

P et Q

Notons qu'il n'y a pas, ici, ambiguïté sur le sens du mot "et".

Soit, maintenant,la phrase:" le nombre 5 est supérieur à 2 ou le nombre 7 est plus petit que 9 ". Dans ce cas, la vérité du jugement émis dépend du sens donné au mot "ou". Si nous lui attribuons un sens inclusif, la phrase considérée est une proposition vraie. Par contre, en donnant au mot "ou" un sens exclusif, cette phrase devient une proposition fausse.

Dès que le sens du mot "ou" est précisé, nous obtenons une proposition composée à partir des deux propositions P, Q, reliées cette fois par "ou". Dans ce cas, nous noterons:

P ou Q

Nous obtenons des propositions composées en utilisant des propositions initiales et des mots tels que "et", "ou",... Il est toutefois indispensable de préciser la signification de ces mots et les règles de construction.

2.2. Construction des propositions composées.

a) Dans les paragraphes suivants nous définirons des opérateurs logiques. Ils se répartissent en deux catégories:

- les opérateurs logiques unaires; un seul sera pratiquement utilisé: l'opérateur "non", représenté par le signe logique $\neg$.

- les opérateurs logiques binaires tels que: "ou", "et", "implique", etc..., également représentés par des signes logiques.

b) Soit P une proposition indéterminée. $\neg P$ est un assemblage qui représente une nouvelle proposition indéterminée P'.

c) Soit P, Q, deux propositions indéterminées. En plaçant, entre P et Q, un des signes logiques suivants: $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\mathbb{W}$, symbolisant un opérateur logique binaire, on obtient un assemblage représentant une nouvelle proposition indéterminée R. Ainsi, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, sont des assemblages représentant de nouvelles propositions indéterminées.
P', R, sont des propositions composées alors que P, Q, sont des propositions composantes.
A l'aide des propositions P', R, P, Q, et des opérateurs logiques, on peut construire de nouvelles propositions. Les assemblages qui les représentent pourront être notés plus simplement en utilisant de nouveaux symboles, chacun d'eux étant défini par la proposition qu'il représente. Il ne sera pas envisagé de propositions composées autres que celles obtenues par les méthodes précédentes.

Remarque.

Les assemblages comportent également des parenthèses qui permettent de préciser la partie de l'assemblage sur laquelle l'opérateur agit.

2.3. Notation polonaise.

Il existe plusieurs notations pour chacun des opérateurs logiques. La constitution des assemblages représentant les propositions composées dépend de la symbolique choisie. La notation dite "polonaise", fréquemment utilisée, donne lieu aux règles suivantes:

- soit P une proposition; NP est un assemblage qui représente une nouvelle proposition P'.

- soit P, Q, deux propositions; en plaçant devant PQ un des signes logiques suivants: A, K, C, E, J, symbolisant un opérateur logique binaire, on obtient un assemblage représentant une nouvelle proposition R.

Exemples:

APQ, CPQ, sont des assemblages représentant de nouvelles propositions.

Remarques.

L'ordre des lettres intervenant dans les assemblages est déterminant.

La notation polonaise évite l'utilisation des parenthèses. L'opérateur, quelle que soit sa nature, étant <u>toujours</u> placé immédiatement avant la proposition (qui peut-être composée) sur laquelle il agit, la règle concernant la place de l'opérateur se trouve simplifiée.

Toutefois la lecture des assemblages devant se faire de la droite vers la gauche, celle-ci présente quelques difficultés pour le débutant.

E X E R C I C E S

E.2.1.

On considère les assemblages suivants:

1º) $(\neg p) \wedge q$

2º) $\neg(\neg p)$

3º) $\vee (p \wedge q)$

4º) $p(\neg q)$

5º) $p \Longrightarrow (\neg q)$

6º) $\neg(p \Longrightarrow q)$

7º) $(q \neg) \wedge p$

8º) $(\neg p) \Longrightarrow (\neg q)$

9º) $((\neg p) \Longrightarrow q) \Longrightarrow (\neg r)$

10º) $(p \vee q) \Longleftrightarrow (p \neg r)$

11º) $\neg(p \; W \; q)$

12º) $(p \; W \; r) \Longrightarrow (\neg \vee)$

13º) $p \vee (\neg q)$

14º) $p \neg (\vee q)$

15º) $(p \wedge (\neg q)) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow (r \vee s))$

Les lettres p, q, r, s, désignent des propositions. Parmi les assemblages précédents, déterminer, en donnant les justifications, ceux qui ne sont pas des propositions composées.

E.2.2.

On considère les assemblages suivants écrits en utilisant la notation polonaise:

1º) CEp

2º) CpNq

3º) NCpq

4º) CNpq

5º) NpCq

6º) CNprq

7º) ApKNqr

8º) NKNrNqNr

9º) NANrNq

10º) ENKpqANpNq

Les lettres p,q,r, désignent des propositions in déterminées. Les lettres A,C,E,K,N, désignent des opérateurs logiques. Déterminer, en donnant des justifications, les assemblages qui ne représentent pas des propositions composées, parmi les assemblages considérés.

E.2.3.

Les lettres p,q, r, désignent des propositions indéterminées. Les assemblages suivants représentent des propositions composées:

1º) $\neg(p \vee q)$

2º) $(\neg p) \vee q$

3º) $(p \Longrightarrow q) \wedge r$

4º) $p \Longrightarrow (q \wedge r)$

5º) $(\neg(p \vee q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$

Ecrire les assemblages désignant ces même propositions, à l'aide de la notation polonaise.

E.2.4.

Les lettres p, q, r, désignent des propositions indéterminées. Les assemblages suivants représentent des propositions composées, dans la notation polonaise:

1º) CNpq

2º) NCpq

3º) CKpqApq

4º) ENCpqKpNq

5º) EKApqrAKprKpq

Ecrire les assemblages désignant ces même propositions en utilisant les symboles définis au paragraphe 2.2.

L E   C A L C U L   D E S   P R O P O S I T I O N S

3 - METHODE DES TABLES DE VERITE

Dans ce qui suit nous ne considérerons que les valeurs de vérité des propositions indépendamment de leur signification concréte.

3.1. Cas d'une proposition indéterminée.

Etant donnée une proposition indéterminée, P par exemple, du fait du caractère bivalent de la logique mathématique, en remplaçant P par une proposition déterminée, nous ne pouvons rencontrer que l'un des deux cas suivants (cf. § 1.2.):

P est vraie: ce cas sera désigné symboliquement par la lettre V (certains auteurs utilisent + ou 1)

P est fausse: ce cas sera désigné symboliquement par la lettre F (certains auteurs utilisent - ou 0)

Pour représenter schématiquement cette situation nous utiliserons un tableau appelé"table de vérité".Ce tableau comporte une colonne unique. En haut de la colonne, le nom P de la proposition est indiqué. En dessous nous marquerons les deux valeurs de vérité possibles en commençant par V.

P
V
F

3.2. Valeurs de vérité des propositions composées.

Nous admettrons que la valeur de vérité d'une proposition composée ne peut dépendre que des valeurs de vérité des propositions composantes et des définitions des opérateurs logiques qui y figurent. Remarquons,dès maintenant, qu'il existe des propositions composées dont la valeur de vérité ne dépend pas des valeurs de vérité des propositions composantes.

Un procédé pratique permettant de déterminer la valeur de vérité d'une proposition composée, connaissant les valeurs de vérité des propositions composantes, consiste à utiliser des tables de vérité.

3.3. Présentation des tables de vérité.

Envisageons simultanément plusieurs propositions indéterminées. En considérant les deux valeurs de vérité possibles pour chacune d'elles, le nombre des situations que l'on peut rencontrer, quant aux valeurs de vérité, dépend du nombre de ces propositions. Toutes ces situations, sans exception, devant apparaître dans les tables de vérité, nous sommes conduits à adopter la présentation suivante.

a) Cas de deux propositions.

La table comporte deux colonnes. Quatre éventualités peuvent se présenter: à P vraie, on peut associer, soit Q vraie, soit Q fausse, puis à P fausse, on peut, à nouveau, associer, soit Q vraie, soit Q fausse. On convient de présenter la table sous la forme ci-dessous.

P	Q	
V	V	1
V	F	2
F	V	3
F	F	4

Exemple.

Considérons les fonctions propositionnelles:

A(x): " la plaque L.O.G. x est carré "

B(x): " la plaque L.O.G. x est rouge ".

Si nous remplaçons x, dans A(x) et B(x), par la grande plaque carrée rouge trouée, nous obtenons deux propositions A_1 , B_1 , vraies. Nous sommes dans le cas de la première ligne.
Si nous remplaçons x par la petite plaque carrée jaune pleine, nous obtenons deux propositions; l'une A_2 est vraie, l'autre B_2 est fausse. Nous sommes dans le cas de la deuxième ligne.
Si nous remplaçons x par le grand triangle rouge plein, nous avons A_3 fausse, B_3 vraie; nous sommes dans le cas de la troisième ligne.

Si nous remplaçons x par le petit rond bleu troué, nous avons A fausse, B fausse; nous sommes dans le cas de la quatrième ligne.

b) Cas de trois propositions.

La table comporte trois colonnes et huit lignes puisqu'il existe huit éventualités. On convient de la présenter sous le modèle suivant:

P	Q	R	
V	V	V	1
V	V	F	2
V	F	V	3
V	F	F	4
F	V	V	5
F	V	F	6
F	F	V	7
F	F	F	8

Exemp~~l~~e.

Considérons les fonctions propositionnelles:

A(x): " la plaque L.O.G. x est grande "

B(x): " la plaque L.O.G. x est carrée "

C(x): " la plaque L.O.G. x est bleue "

Si, dans A(x), B(x), C(x), nous remplaçons x par la grande plaque carrée bleue trouée, nous obtenons trois propositions A_1, B_1, C_1, vraies; nous sommes dans le cas de la ligne 1.

En remplaçant x par la grande plaque carrée rouge pleine, nous obtenons trois propositions, A_2, B_2 vraies, C_2 fausse; nous sommes dans le cas de la deuxième ligne.

x étant remplacé par la petite plaque ronde bleue trouée, nous obtenons trois propositions: A_7, B_7 fausses, C_7 vraie; nous sommes dans le cas de la ligne numéro 7.

Nous laissons au lecteur le soin de rechercher les plaques qui cnduisent aux autres cas.

c) Cas de n propositions. (n fini)

La généralisation au cas de n propositions est immédiate. Par exemple, pour n = 4, nous obtenons la table suivante:

P	Q	R	S	
V	V	V	V	1
V	V	V	F	2
V	V	F	V	3
V	V	F	F	4
V	F	V	V	5
V	F	V	F	6
V	F	F	V	7
V	F	F	F	8
F	V	V	V	9
F	V	V	F	10
F	V	F	V	11
F	V	F	F	12
F	F	V	V	13
F	F	V	F	14
F	F	F	V	15
F	F	F	F	16

Exemple.

Considérons les fonctions propositionnelles:

A(x): " la plaque L.O.G. x est petite "

B(x): " la plaque L.O.G. x est ronde "

C(x): " la plaque L.O.G. x est jaune "

D(x): " la plaque L.O.G. x est trouée ".

Si, dans A(x), B(x), C(x), D(x), nous remplaçons x par la petite

plaque carrée jaune pleine, nous obtenons quatre propositions: A_6, C_6, B_6, D_6. Les deux premières sont vraies et les deux dernières fausses. Nous sommes dans le cas de la ligne numéro 6.
Le lecteur déterminera aisément les plaques qui conduisent aux autres cas.

3.4. Utilisation des tables de vérité.

Après avoir défini un opérateur logique, nous donnerons une table de vérité pour résumer la définition. Dans la pratique, l'utilisation de cette table de vérité se révèle souvent plus commode que celle de la définition.

D'autre part, nous utiliserons les tables de vérité pour déterminer les valeurs de vérité d'une proposition composée connaissant les valeurs de vérité des propositions composantes et les définitions des opérateurs logiques concernés.

E X E R C I C E S

E.3.1.

On se donne les fonctions propositionnelles suivantes:

A(x) : "La carte x extraite d'un jeu de 32 cartes est une figure".

B(x) : "La carte x extraite d'un jeu de 32 cartes est rouge".

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.a qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par la dame de pique dans A(x) et dans B(x).
Même question lorsque l'on remplace x par le dix de Pique.
Même question lorsque l'on remplace x par le valet de coeur.
Même question lorsque l'on remplace x par le neuf de carreau.
Même question lorsque l'on remplace x par le roi de trèfle.

E.3.2.

On se donne les fonctions propositionnelles suivantes:

A(x) : "La carte x extraite d'un jeu de 32 cartes est un trèfle".

B(x) : " La carte x extraite d'un jeu de 32 cartes est noire".

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.a qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par l'as de pique dans A(x) et dans B(x).
Même question si nous remplaçons x par le roi de coeur.
Même question si nous remplaçons x par le dix de trèfle.
Même question si nous remplaçons x par le valet de carreau.
Même question si nous remplaçons x par la dame de trèfle.

En considérant d'autres objets, est-il possible d'obtenir les quatre situations représentées par les quatre lignes de la table du paragraphe 3.3.a?

E.3.3.

On se donne les fonctions propositionnelles suivantes:

A(x) : " Le nombre entier naturel x est pair".

B(x) : " Le nombre entier naturel x divise 6".

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.a qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par 1 dans A(x) et dans B(x).

Même question dans le cas où x est remplacé par 6.
Même question dans le cas où x est remplacé par 4.
Même question dans le cas où x est remplacé par 5.
Même question dans le cas où x est remplacé par 0.

E.3.4.

On se donne les fonctions propositionnelles suivantes:

A(x) : "Le nombre entier naturel x est impair".

B(x) : " Le carré du nombre entier naturel x est impair".

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.a qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par 1 dans A(x) et dans B(x).
Même question dans le cas où x est remplacé par2.
Même question dans le cas où x est remplacé par 4.
Même question dans le cas où x est remplacé par 7.

En considérant d'autres objets, est-il possible d'obtenir les quatre situations représentées par les quatre lignes de la table du paragraphe 3.3.a?

E.3.5.

On se donne les fonctions propositionnelles suivantes:

A(x) : "Le nombre entier naturel x est pair".

B(x) : "Le nombre entier naturel x divise 18".

C(x) : "Le nombre entier naturel x divise 20".

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.b qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par 1 dans A(x) et dans B(x) et dans C(x).
Même question si nous remplaçons x par 2.
Même question si nous remplaçons x par 3.
Même question si nous remplaçons x par 4.
Même question si nous remplaçons x par 5.
Même question si nous remplaçons x par 6.
Même question si nous remplaçons x par 7.
Même question si nous remplaçons x par 8.

En considérant d'autres objets, est-il possible d'obtenir les huit situations représentées par les huit lignes de la table du paragraphe 3.3.b?

E.3.6.

Les fonctions propositionnelles suivantes sont données:

A(x) : " Le nombre entier naturel x est pair."

B(x) : " Le nombre entier naturel x divise 12."

C(x) : " Le nombre entier naturel x divise 30."

Indiquer la ligne de la table de vérité du paragraphe 3.3.b qui représente la situation dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous remplaçons x par 1 dans A(x) et dans B(x) et dans C(x). Même question si nous remplaçons x par 2, puis par 3, puis par 4, puis par 5, puis par 6, puis par 7, puis par 8, puis par 9.

En considérant d'autres objets, est-il possible d'obtenir les huit situations représentées par les huit lignes de la table du paragraphe 3.3.b?

E.3.7.

Les fonctions propositionnelles suivantes sont données:

A(x) : " L'entier naturel x est pair."

B(x) : " L'entier naturel x est un multiple de 6."

C(x) : " L'entier naturel x est inférieur à 5."

D(x) : " L'entier naturel x est un multiple de 3."

En remplaçant x, dans A(x), B(x), C(x), D(x), successivement par les entiers naturels 1, 2, 3,;.., nous rencontrons des situations qui peuvent être représentées par certaines lignes de la table de vérité du paragraphe 3.3.c. Quelles sont les lignes de la table qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière? Proposez des objets permettant de les obtenir.

4 - LES OPERATEURS LOGIQUES UNAIRES

LA NEGATION

4.1. Définition.

La négation d'une proposition A déterminée est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A est vraie et qui est vraie lorsque A est fausse.

4.2. Notations.

La négation de la proposition A sera notée "non A". P étant une proposition indéterminée, considérons le symbole "non P". En remplaçant P par la proposition déterminée A, on obtient "non A" qui symbolise la négation de A. Bien que P soit une proposition indéterminée, par abus de langage, nous dirons que "non P" est "la négation de P".

On rencontre également les notations suivantes:

- NP notation polonaise
- $\neg P$ dans les ouvrages de Fraïssé, de Kreisel et Krivine entre autres.
- $\sim P$ Kuratowski entre autres
- P' Kuratowski entre autres
- $\bar{P}$ notation très utilisée en probabilités

4.3. Table de vérité

La table de vérité suivante résume la définition 4.1.

P	non P
V	F
F	V

4.4. Exemples.

a) Considérons la fonction propositionnelle:

$A(x)$: " le nombre entier naturel x est pair ".

En remplaçant x par le nombre 4 nous obtenons la proposition vraie A_1 :" le nombre entier naturel 4 est pair ". La proposition "non A_1" s'énonce: " le nombre entier naturel 4 est impair ": elle est fausse. Nous sommes dans le cas de la ligne 1 de la table.
Si nous substituons 5 à x, nous obtenons la proposition fausse A_2 : " le nombre entier naturel 5 est pair ". "non A_2" s'énonce: " le nombre entier naturel 5 est impair ": c'est une proposition vraie. Nous sommes dans le cas de la ligne 2.
On remarquera que les propositions A_1 ,A_2 , font intervenir l'attribut " pair" et qu'il existe un autre attribut " impair " permettant d'exprimer les propositions "non A_1 ", "non A_2 ".

b) Soit la fonction propositionnelle:

$A(x)$: " la plaque L.O.G. x est rouge ".

En remplaçant x, dans $A(x)$, par la grande plaque carrée rouge trouée nous obtenons la proposition vraie A_1 . La proposition fausse "non A_1 " est alors: " la grande plaque carrée rouge trouée n'est pas rouge ". Dans ce cas, nous constatons que la proposition " non A_1 " peut encore s'exprimer, étant donnée la composition du matériel L.O.G., sous la forme affirmative: " la grande plaque carrée rouge trouée est bleue ou jaune ". Ici le mot "ou" a le sens défini au paragraphe 5.1

LES QUATRE OPERATEURS LOGIQUES UNAIRES

4.5. Tautologie.

a) Définition.

Désignons par P' une proposition composée d'une seule proposition indéterminée P et d'opérateurs logiques. Nous pouvons envisager le cas où P' est vraie quelles soient les valeurs de vérité des propositions substituées à P. Dans ce cas la valeur de vérité de P' est donc parfaitement déterminée: P' est appelée tautologie.

b) Notation.

Pour signaler que la valeur de vérité de P' est parfaitement déterminée et plus précisément que P' est vraie et seulement vraie, nous placerons devant P' le symbole $\vdash$. Cette tautologie sera notée: $\vdash$ P'.

c) Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 4.5.a).

P	P'
V	V
F	V

d) Exemple.

Nous rencontrerons un exemple de tautologie lors de l'étude de la proposition " P ou (non P) ", au numéro 5.7

4.6. Antilogie.

a) Définition.

Désignons par P" une proposition composée d'une seule proposition indéterminée P et d'opérateurs logiques. Nous pouvons envisager le cas où P" est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions substituées à P. Dans ce cas, la valeur de vérité de P" est parfaitement déterminée: P" est appelée antilogie.

b) Notation.

Pour signaler que la valeur de vérité de P" est parfaitement déterminée et plus précisément que P" est fausse et seulement fausse, nous placerons, après P", le symbole $\vdash$. Cette antilogie sera donc notée: P" $\vdash$.

c) Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 4.6.a).

P	P"
V	F
F	F

d) Exemple.

Nous rencontrerons un exemple d'antilogie en étudiant la proposition "P et (non P)", au numéro 5.14

4.7. Etude des quatre opérateurs logiques unaires.

Etant donné une proposition indéterminée P, nous pouvons lui substituer une proposition déterminée conduisant aux deux cas suivants:

P est fausse

P est vraie

Nous en déduisons la table de vérité introduite au paragraphe 3.1. A cette table nous pouvons en associer quatre autres et quatre seulement. Il en résulte le tableau suivant:

P	P'	P	non P	P"
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F
	I	II	III	IV

Nous reconnaissons en colonne I la table de vérité de la tautologie (§ 4.5.c), en colonne IV celle de l'antilogie (§ 4.6.c.), en colonne III celle de la négation de P (§ 4.3.). Quant à la colonne II, elle est la répétition de la table de P.

La colonne III schématise l'action de l'opérateur unaire "non" sur une proposition déterminée. Le résultat de cette action est la négation de cette proposition. De même, nous pouvons considérer les colonnes II, I, IV, comme schématisant l'action de trois autres opérateurs unaires sur une proposition déterminée. Le résultat de cette action peut être appelée: affirmation de la proposition (colonne II), tautologie (colonne I), antilogie (colonne IV).

E X E R C I C E S

E.4.1.

Soit les fonctions propositionnelles:

A(x) : " Le nombre entier naturel x est un diviseur de 12."

B(x) : " Le nombre entier naturel x est inférieur à 12."

C(x) : " Le nombre entier naturel x est égal à 12."

En remplaçant x, successivement, par 2, 4, 12, dans A(x), B(x), C(x), on obtient des propositions. Précisez leur valeur de vérité et énoncez leur négation.

E.4.2.

Soit les fonctions propositionnelles:

A(x,y) : " Le carré de l'entier naturel x est supérieur au carré de l'entier naturel y."

B(x,y) : " La somme des entiers naturels x, y, est un entier naturel pair."

C(x,y) : " Les deux entiers naturels x, y, sont pairs."

En remplaçant x par 7 et y par 5, dans A(x,y), dans B(x,y), dans C(x,y), on obtient 3 propositions. Précisez leur valeur de vérité et énoncez leur négation.

En remplaçant x par 7 et y par 6, dans A(x,y), dans B(x,y), dans C(x,y), on obtient 3 propositions. Précisez leur valeur de vérité et énoncez leur négation.

En remplaçant x par 6 et y par 3, dans A(x,y), dans B(x,y), dans C(x,y), on obtient 3 propositions. Précisez leur valeur de vérité et énoncez leur négation.

En remplaçant x par 6 et y par 4, dans A(x,y), dans B(x,y), dans C(x,y), on obtient 3 propositions. Précisez leur valeur de vérité et énoncez leur négation.

5 - LES OPERATEURS LOGIQUES BINAIRES

LA DISJONCTION LOGIQUE

5.1. Définition.

La disjonction logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A étant fausse, B l'est également, et qui est vraie dans tous les autres cas.

5.2. Notations.

La disjonction logique des deux propositions A, B, sera notée "A ou B". P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons le symbole "P ou Q". En remplaçant P par la proposition déterminée A, Q par la proposition déterminée B, on obtient "A ou B" qui symbolise la disjonction logique des propositions A, B.
Bien que P, Q soient deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que "P ou Q" est " la disjonction logique de P, Q ".
On rencontre également les notations suivantes:

APQ notation polonaise

$P \vee Q$ notation employée par Kuratowski, Fraïssé, [illegible].
Kreisel et Krivine, entre autres.

5.3. Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 5.1.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5.4. Conséquence.

Connaissant la valeur de vérité de la disjonction logique de deux propositions, on ne peut en déduire les valeurs de vérité de ces deux propositions que lorsque la disjonction logique est fausse. Nous sommes alors dans le cas de la ligne numéro 4: les deux propositions sont fausses.

5.5. Remarque.

Le mot "ou" utilisé pour la notation de la disjonction logique, a un sens plus précis que le mot "ou" du langage courant. Dans ce dernier, "ou" peut avoir le sens non exclusif envisagé dans la définition précédente, mais il peut également prendre le sens exclusif.

Par exemple, dans l'expression " il pleut ou il vente", "ou" a un sens non exclusif: il est certain que l'on peut avoir, à la fois, pluie et vent.

Par contre, "une porte est ouverte ou fermée", "mort ou vif", sont des expressions dans lesquelles les deux éventualités sont incompatibles; "ou" y a un sens exclusif.

Le latin évite cette ambiguïté puisque le mot "vel" a le sens de notre "ou" non exclusif, et le mot "aut" celui de notre "ou" exclusif.

5.6. Exemples.

a) Considérons les deux fonctions propositionnelles:

A(x): " la plaque L.O.G. x est ronde "

B(x): " la plaque L.O.G. x est rouge ".

Si nous remplaçons x par la petite plaque ronde rouge pleine, nous obtenons les propositions vraies A_1 , B_1 ; nous sommes dans le cas de la première ligne de la table:"A_1 ou B_1 " est vraie.

Si nous remplaçons x par la grande plaque ronde jaune pleine, nous obtenons les propositions A_2 ,B_2 ; A_2 est vraie, B_2 est fausse; nous sommes dans le cas de la deuxième ligne; "A_2 ou B_2 " est vraie.

En remplaçant x par la grande plaque carrée rouge trouée, nous obtenons les propositions A_3 ,B_3 ; A_3 est fausse, B_3 est vraie; nous sommes dans le cas de la troisième ligne; "A_3 ou B_3 " est vraie.

En remplaçant x par la petite plaque triangulaire bleue trouée, nous obtenons les propositions A_4 ,B_4 ; A_4 est fausse, B_4 est fausse; nous sommes dans le cas de la quatrième ligne: "A_4 ou B_4"

est fausse.

b) Soit les fonctions propositionnelles:

$A(x)$: " le nombre entier naturel x est premier "

$B(x)$: " le nombre entier naturel x divise 12 ".

Si nous remplaçons x successivement par les nombres 3, 5, 6, 8, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes numéro un, deux, trois, quatre, de la table de vérité.

5.7. Remarque.

Nous pouvons, maintenant, donner un exemple de tautologie. P étant une proposition indéterminée, considérons la proposition composée: "P ou (non P)" et construisons le tableau suivant:

P	non P	P ou (non P)
V	F	V
F	V	V

La proposition "P ou (non P)" est donc vraie quelle que soit la valeur de vérité de la proposition substituée à P. La proposition "P ou (non P)", appelée parfois " loi du tiers exclu ", est donc une tautologie que nous pouvons noter:

5.7.1. $\vdash$ [P ou (non P)]

LA CONJONCTION LOGIQUE

5.8. Définition.

La conjonction logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A étant vraie, B l'est également, et qui est fausse dans tous les autres cas.

5.9. Notations.

La conjonction logique des deux propositions A, B, sera notée "A et B".

P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons le symbole "P et Q".

En remplaçant P par la proposition déterminée A, Q par la proposition déterminée B, nous obtenons "A et B" qui symbolise la conjonction logique des propositions A, B.
Bien que P, Q, soient deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que "P et Q" est la " conjonction logique " de P, Q."

On rencontre également les notations suivantes:

KPQ notation polonaise

$P \wedge Q$ notation employée, entre autres, par Fraïssé, Kreisel et Krivine

P&Q notation employée, entre autres, par Novikov

P.Q notation utilisée en probabilités.

5.10. Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 5.8.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

5.11. Conséquence.

Connaissant la valeur de vérité de la conjonction logique de deux propositions, on ne peut en déduire les valeurs de vérité de ces deux propositions que lorsque la conjonction logique est vraie. Nous sommes alors dans le cas de la première ligne de la table de vérité: les deux propositions sont vraies.

5.12. Remarque.

Le mot "et" utilisé pour la notation de la conjonction logique a un sens plus précis que le "et" du langage courant. Dans la phrase: " cet enfant est grand et fort ", "et" a le sens de la conjonction. Toutefois, il peut marquer la consécution temporelle comme dans: " ils se marièrent et ils eurent beaucoup d'enfants ", ou la surprise, voir l'indignation, comme dans:" et vous croyez nous apitoyer ?".

5.13. Exemples.

a) Considérons les deux fonctions pro positionnelles:

A(x):" la plaque L.O.G. x est triangulaire "

B(x):" la plaque L.O.G. x est jaune ".

Si nous remplaçons x successivement par la grande plaque triangulaire jaune pleine, la petite plaque triangulaire bleue trouée, la petite plaque ronde jaune pleine, la grande plaque carrée bleue trouée, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes numéro un, deux, trois, quatre, de la table de vérité.

b) Soit les fonctions propositionnelles:

A(x):" le nombre entier naturel x est divisible par 2 "

B(x):" le nombre entier naturel x est divisible par 3 ".

En remplaçant x, successivement par les nombres 12, 4, 9, 5, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes numéro un, deux, trois, quatre, de la table de vérité.

5.14. Remarques.

a) Nous pouvons maintenant donner un exemple d'antilogie. P étant une proposition indéterminée, considérons la proposition composée: "P et (non P)" et construisons le tableau suivant:

P	non P	P et (non P)
V	F	F
F	V	F

La proposition "P et (non P)" est donc fausse quelle que soit la valeur de vérité de la proposition substituée à P. La proposition "P et (non P)" est donc une antilogie que l'on peut noter:

5.14.1. $$[P \text{ et } (\text{non } P)] \vdash$$

b) Nous pouvons également donner un nouvel exemple de tautologie.
P étant une proposition indéterminée, considérons la proposition composée: "non(P et (non P))" et construisons le tableau suivant:

P	non P	P et (non P)	non(P et (non P))
V	F	F	V
F	V	F	V

La proposition "non(P et (non P))", vraie quelle que soit la valeur de vérité de la proposition substituée à P, est une tautologie appelée parfois "loi de contradiction"; elle peut être notée:

5.14.2. $\vdash$ [non(P et (non P))]

L'IMPLICATION

L'implication intervenant souvent en mathématiques, ce paragraphe a une importance capitale. Seule, une connaissance précise et approfondie de cette proposition, peut permettre de comprendre les raisonnements et les définitions dans lesquels elle intervient.

5.15. Définition.

A, B, étant deux propositions déterminées, l'implication d'antécédent A et de conséquent B est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A étant vraie, B est fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas.

5.16. Notations.

L'implication d'antécédent A et de conséquent B sera notée: "A $\Longrightarrow$ B" que nous énoncerons: " A implique B ".
La proposition A est appelée " premier membre de l'implication "; la proposition B est appelée"second membre de l'implication ".
P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons le symbole "P $\Longrightarrow$ Q". En remplaçant P par la proposition déterminée A, Q par

la proposition déterminée B, on obtient "A $\Rightarrow$ B" qui symbolise l'implication d'antécédent A et de conséquent B.
Bien que P, Q, soient deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que "P $\Rightarrow$ Q" est "l'implication P implique Q".
Remarquons à ce propos que, lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, les propositions notées "A $\Rightarrow$ B", "P $\Rightarrow$ Q", seront appelées plus simplement implications.

On rencontre encore les notations suivantes:

CPQ notation polonaise

$P \supset Q$

$P \rightarrow Q$ notation employée, entre autres, par Kreisel et Krivine, Novikov.

Les deux derniers symboles $\supset$ et $\rightarrow$ se rencontrent en mathématiques avec des significations très différentes de celles envisagées ici. Ils sont, de ce fait, déconseillés aux débutants. Il ne convient pas d'utiliser le symbole $\Rightarrow$ dans le corps d'une phrase en guise d'abréviation sténographique.

5.17. Table de vérité.

La définition 5.15. est résumée par la table de vérité suivante:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

I II III

5.18. Implications associées à l'implication "P $\Rightarrow$ Q".

Soit l'implication:

5.18.1. $$P \Rightarrow Q$$

a) L'implication: "(non P) $\Rightarrow$ (non Q)" s'appelle implication inverse de l'implication 5.18.1. Cette écriture signifie que l'on considère d'abord la négation de la proposition P, puis la négation de la proposition Q, enfin la proposition: "(non P) $\Longrightarrow$ (non Q)". En tenant compte des définitions de la négation et de l'implication, nous pouvons construire le tableau suivant:

P	Q	non P	non Q	(non P) $\Longrightarrow$ (non Q)
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V
I	II	III	IV	V

b) L'implication "Q $\Longrightarrow$ P" s'appelle implication réciproque de l'implication 5.18.1. Construisons la table de vérité correspondante:

P	Q	Q $\Longrightarrow$ P
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V
I	II	III

Remarquons que la colonne III de la table associée à "Q $\Longrightarrow$ P" est la même que la colonne V du tableau associé à "(non P) $\Longrightarrow$ (non Q)".

c) L'implication "(non Q) $\Longrightarrow$ (non P)" s'appelle implication contraposée de l'implication 5.18.1. Nous pouvons construire le tableau suivant:

P	Q	non Q	non P	(non Q) $\Longrightarrow$ (non P)
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
I	II	III	IV	V

Remarquons que la colonne III de la table associée à "P $\Longrightarrow$ Q" est identique à la colonne V du tableau associé à "(non Q) $\Longrightarrow$ (non P)".

d) Exemples.

Considérons les deux propositions:

A_1 :"le nombre 8 est supérieur au nombre 6"

B_1 :" le nombre 8 est pair"

Envisageons alors l'implication:

5.18.2. "(le nombre 8 est supérieur au nombre 6) implique (le nombre 8 est pair)"

Nous pouvons lui associer les trois propositions suivantes:

l'implication inverse de 5.18.2.:

"(le nombre 8 est inférieur ou égal au nombre 6) implique (le nombre 8 est impair)"

l'implication réciproque de 5.18.2.:

"(le nombre 8 est pair) implique (le nombre 8 est supérieur au nombre 6)"

l'implication contraposée de 5.18.2.:

"(le nombre 8 est impair) implique (le nombre 8 est inférieur ou égal au nombre 6)"

Avec les propositions A_1, B_1, données nous sommes dans le cas de la première ligne des tables et tableaux des paragraphes 5.17. et 5.18.

De même considérons maintenant les propositions:

A_3: "le nombre 4 est supérieur au nombre 6"

B_3: "le nombre 4 est pair"

Nous pouvons envisager l'implication:

5.18.3. "(le nombre 4 est supérieur au nombre 6) implique (le nombre 4 est pair)"

et lui associer trois propositions:

l'implication inverse de 5.18.3.

l'implication réciproque de 5.18.3.

l'implication contraposée de 5.18.3.

Nous sommes alors dans le cas de la troisième ligne des tables et tableaux des paragraphes 5.17. et 5.18.

A titre d'éxercice, le lecteur pourra rechercher des exemples correspondant aux lignes numéro 2 et 4 des mêmes tables et tableaux

5.19. Cas où les propositions "$P \Longrightarrow Q$", P, sont vraies.

Envisageons la construction d'une implication "$P \Longrightarrow Q$" vraie. Si nous remplaçons P par une proposition déterminée A vraie, la première ligne de la table de vérité 5.17. permet d'affirmer qu'alors, Q ne peut être remplacée que par une proposition déterminée B vraie. Pour résumer ce qui précède, nous pouvons dire: "($P \Longrightarrow Q$) étant vraie, si P est vraie, alors Q est vraie". C'est la raison pour laquelle la proposition "$P \Longrightarrow Q$" est quelquefois présentée sous la forme:" si P alors Q". Malheureusement, cette expression cache un aspect important de l'implication.

Remarquons que "$P \Longrightarrow Q$" étant vraie, si nous remplaçons d'abord Q par une proposition déterminée B vraie, nous pouvons nous trouver dans le cas de la ligne 1 ou de la ligne 3 de la table 5.17.

5.20. Cas où la proposition "$P \Longrightarrow Q$" étant vraie, P est fausse.

Envisageons encore la construction d'une implication "$P \Longrightarrow Q$" vraie.

Si nous remplaçons P par une proposition déterminée A fausse, les lignes 3 et 4 de la table de vérité 5.17. montrent que le choix de la proposition déterminée B devant remplacer Q est sans importance: quelle que soit la valeur de vérité de cette proposition B, nous sommes assurés d'obtenir une implication vraie "$A \Longrightarrow B$". Nous constatons que le mot "implique" n'a pas le même sens en mathématiques et dans le langage courant: "$P \Longrightarrow Q$" vraie ne veut pas dire que P est vraie!

5.21. Cas où la proposition "$P \Rightarrow Q$" est fausse.

Envisageons, enfin, la construction d'une implication "$P \Rightarrow Q$" fausse.
La deuxième ligne de la table de vérité 5.17. montre que P doit être remplacée par une proposition déterminée A vraie et Q par une proposition déterminée B fausse.

5.22. Exemples.

a) Considérons les deux fonctions propositionnelles:

A(x):" la plaque L.O.G. x est ronde "

B(x):" la plaque L.O.G. x est jaune ".

Si nous remplaçons x, successivement, par la petite plaque ronde jaune trouée, la petite plaque ronde rouge pleine, la grande plaque carrée jaune pleine, la petite plaque rectangulaire bleue trouée, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes numéro 1, 2, 3, 4, de la table de vérité 5.17.

b) Soit les fonctions propositionnelles:

A(x,y) : " le nombre entier naturel x est supérieur à trois et le nombre entier naturel y est supérieur à 5"

B(x,y) : " les nombres entiers naturels x, y, ont une somme(x + y) supérieure à 8 ".

α) Remplaçons x par le nombre 4 et y par le nombre 6; nous obtenons les deux propositions vraies:

A(4,6) : " le nombre entier naturel 4 est supérieur à 3 et le nombre entier naturel 6 est supérieur à 5 "

B(4,6) : " les nombres entiers naturels 4, 6, ont une somme 4 + 6 supérieure à 8 "

que l'on peut écrire sous forme symbolique:

A(4,6) : " $4>3$ et $6>5$ "

B(4,6) : " $4+6>8$ "

L'implication vraie: " $A(4,6) \Rightarrow B(4,6)$ " peut s'écrire:

"$(4>3$ et $6>5) \Rightarrow (4+6>8)$"

Nous sommes dans le cas de la première ligne de la table 5.17.

β) Si nous remplaçons x par le nombre 2 et y par le nombre 7, nous obtenons les propositions:

A(2,7) : "2 > 3 et 7 > 5 " qui est fausse puisque "2 > 3" est une proposition fausse;

B(2,7) : " 2 + 7 > 8 " qui est vraie.

L'implication "(2 > 3 et 7 > 5) $\Rightarrow$ (2 + 7 > 8) " est vraie. Nous sommes dans le cas de la troisième ligne de la table 5.17.

γ) Remplaçons x par le nombre 1 et y par le nombre 6; nous obtenone les propositions:

A(1,6) : " 1 > 3 et 6 > 5 "

B(1,6) : " 1 + 6 > 8 "

L'implication "(1 > 3 et 6 > 5) $\Rightarrow$ (1 + 6 > 8) " est encore vraie. Nous sommes dans le cas de la quatrième ligne de la table 5.17.

δ) Il n'est pas possible de trouver deux entiers naturels tels que, en remplaçant x par l'un et y par l'autre, nous obtenions une proposition A vraie, une proposition B fausse et, par conséquent une implication "A $\Rightarrow$ B" fausse: nous ne pouvons pas être dans le cas de la deuxième ligne de la table 5.17.

L'EQUIVALENCE LOGIQUE

5.23. Définition.

L'équivalence logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A, B, ont même valeur de vérité, et qui est fausse dans les autres cas.

5.24. Notations.

L'équivalence logique des propositions A, B, sera notée:

$$A \Leftrightarrow B$$

que nous énoncerons: " A est logiquement équivalent à B ".

La proposition A s'appelle premier membre de l'équivalence logique, la proposition B s'appelle second membre de l'équivalence logique.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons le symbole "P $\Leftrightarrow$ Q". En remplaçant P par la proposition déterminée A, Q par la proposition déterminée B, nous obtenons "A $\Leftrightarrow$ B" qui symbolise l'équivalence logique des propositions A, B.

Bien que P, Q, soient deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que "$P \Longleftrightarrow Q$" est "l'équivalence logique de P, Q."

On rencontre également les notations suivantes:

EPQ notation polonaise

$P \equiv Q$ notation employée, entre autres, par Kuratowski

$P \longleftrightarrow Q$ notation employée, entre autres, par Kreisel et Krivine

$P \leftrightarrows Q$

$P \sim Q$ notation employée, entre autres, par Novikov

5.25. Table de vérité.

La définition 5.23. est résumée par la table de vérité suivante:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V
I	II	III

5.26. Conséquence

Connaissant la valeur de vérité de l'équivalence logique, de deux propositions, on ne peut pas en déduire les valeurs de vérité de ces deux propositions.

5.27. Cas où les propositions "$P \Longleftrightarrow Q$", P, sont vraies.

Envisageons la construction d'une équivalence logique "$P \Longleftrightarrow Q$" vraie.

Si nous remplaçons P par une proposition déterminée A vraie, la première ligne de la table de vérité 5.25. permet d'affirmer qu'alors Q ne peut être remplacée que par une proposition B vraie.

Si maintenant nous remplaçons d'abord Q par une proposition déterminée B vraie, nous sommes toujours dans le cas de la première ligne de la table de vérité 5.25. P ne peut être remplacéeque par une proposition déterminée A vraie.

Pour résumer ce qui précède, nous pouvons dire: "P $\Longleftrightarrow$ Q" étant vraie, si P est vraie et seulement si P est vraie, Q est vraie.

Remarquons que, contrairement à ce qui a été signalé au paragraphe 5.19., l'équivalence logique "P $\Longleftrightarrow$ Q" étant vraie, si nous remplaçons Q par une proposition déterminée B vraie, nous nous trouvons dans un seul cas de la table de vérité 5.25., celui de la ligne numéro 1.

5.28. Exemples.

a) Considérons les deux fonctions propositionnelles:

A(x) : " la plaque L.O.G. x est bleue ou jaune "

B(x) : " la plaque L.O.G. x n'est pas rouge "

Si nous remplaçons x par la petite plaque carrée bleue pleine, nous obtenone les propositions vraies A_1, B_1 ; nous sommes dans le cas de la première ligne de la table 5.25.:"$A_1 \Longleftrightarrow B_1$" est vraie.
Si nous remplaçons x par la petite plaque ronde jaune trouée, nous obtenons les propositions vraies A'_1, B'_1 ; nous sommes encore dans le cas de la première ligne de la table 5.25.: "$A'_1 \Longleftrightarrow B'_1$" est vraie.
Si nous remplaçons x par la grande plaque ronde pleine, nous obtenons les propositions fausses A_4, B_4; nous sommes dans le cas de la quatrième ligne de la table 5.25.:"$A_4 \Longleftrightarrow B_4$" est vraie.
Il n'est pas possible de trouver une plaque L.O.G. telle que en la substituant à x, nous obtenions deux propositions A, B, ayant des valeurs de vérité différentes et par conséquent, une équivalence logique "A $\Longleftrightarrow$ B" fausse: nous ne pouvons pas être dans le cas de la deuxième ligne ni dans celui de la troisième ligne de la table 5.25.

b) Soit les fonctions propositionnelles:

A(x) : " le nombre entier naturel x est pair "

B(x) : " le nombre entier naturel x est un multiple de 5"

En remplaçant x, successivement, par les nombres 10, 8, 15, 17, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes un, deux, trois, quatre, de la table de vérité 5.25.

5.29. Equivalences logiques associées à "$P \Longleftrightarrow Q$".

Soit l'équivalence logique:

5.29.1. "$P \Longleftrightarrow Q$"

Nous pouvons lui associer les trois équivalences logiques suivantes

5.29.2. "$Q \Longleftrightarrow P$"

5.29.3. "(non P) $\Longleftrightarrow$ (non Q)"

5.29.4. "(non Q) $\Longleftrightarrow$ (non P)"

Ces propositions seront étudiées au chapitre 6.

LA DISJONCTION LOGIQUE EXCLUSIVE

5.30. Définition.

La disjonction logique exclusive de deux propositions A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A, B, ont des valeurs de vérité différentes, et qui est fausse lorsque A, B, ont même valeur de vérité.

5.31. Notations.

La disjonction logique exclusive de deux propositions A, B, sera notée "A W B" que nous énoncerons: "soit A, soit B".
P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons le symbole "P W Q". En remplaçant P par la proposition déterminée A, Q par la proposition déterminée B, nous obtenons "A W B" qui symbolise la disjonction logique exclusive des propositions A, B.
Bien que P, Q, soient deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que "P W Q" est la disjonction logique exclusive de P, Q.
On rencontre également la notation suivante:

JPQ notation polonaise

5.32. Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 5.30.

P	Q	P W Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F
I	II	III

5.33. Conséquences.

Connaissant la valeur de vérité de la disjonction logique exclusive de deux propositions, on ne peut pas en déduire les valeurs de vérité de ces deux propositions.

5.34. Exemples.

a) Considérons les deux fonctions propositionnelles:

A(x) : " la plaque L.O.G. x est carrée "

B(x) : " la plaque L.O.G. x est rouge "

Si nous remplaçons x, successivement, par la grande plaque carrée rouge pleine, la grande plaque carrée jaune trouée, la petite plaque ronde rouge trouée, la petite plaque ronde bleue pleine, nous nous trouvons respectivement dans les cas des lignes numéro un, deux, trois, quatre, de la table de vérité 5.32.

b) Soit les fonctions propositionnelles:

A(x) : " le nombre entier naturel x est un multiple de 2"

B(x) : " le nombre entier naturel x est un multiple de 3 "

En remplaçant x successivement , par les nombres 6, 8, 9, 7, nous nous trouvons respectivement danq les cas des lignes numéro un, deux, trois, quatre, de la table de vérité 5.32.

LES 16 OPERATEURS LOGIQUES BINAIRES

5.35. Tautologie.

a) Définition.

Désignons par P' une proposition composée de deux propositions indéterminées P, Q, et d'opérateurs logiques. Nous pouvons envisager le cas où P' est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions substituées à P et à Q. Dans ce cas, la valeur de vérité de P' est donc parfaitement déterminée: P' est appelée "tautologie".

b) Notation.

Pour signaler que la valeur de vérité de P' est parfaitement déterminée et plus précisément que P' est vraie et seulement vraie, nous placerons devant P' le symbole $\vdash$. Cette tautologie sera notée: $\vdash$ P'.

c) Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 5.35.a.

P	Q	$\vdash P'$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

d) Exemple.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, étudions la proposition:

"(P W Q) $\Longleftrightarrow$ (non(P $\Longleftrightarrow$ Q))"

Construisons le tableau suivant:

P	Q	P W Q	$P \Leftrightarrow Q$	non$(P \Leftrightarrow Q)$	$(P W Q) \Leftrightarrow (non(P \Leftrightarrow Q))$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V

La proposition "$(P\ W\ Q) \Longleftrightarrow (non(P \Longleftrightarrow Q))$" est donc vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions déterminées substituées à P et à Q: c'est une tautologie que nous pouvons noter

5.35.1. $\vdash [(P\ W\ Q) \Longleftrightarrow (non(P \Longleftrightarrow Q))]$

5.36. Antilogie.

a) Définition.

Désignons par P" une proposition composée de deux propositions indéterminées P, Q, et d'opérateurs logiques. Nous pouvons envisager le cas où P" est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions substituées à P et à Q. Dans ce cas, la valeur de vérité de P" est parfaitement déterminée: P" est appelée "antilogie".

b) Notation.

Pour signaler que la valeur de vérité de P" est parfaitement déterminée et plus précisément que P" est fausse et seulement fausse, nous placerons, après P", le symbole $\vdash$. Cette antilogie sera donc notée: P" $\vdash$.

c) Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 5.36.a.

d) Exemple.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, étudions la proposition:

$$\text{"(P et Q)} \Longleftrightarrow \text{(non(P et Q))"}$$

Construisons le tableau suivant:

P	Q	P et Q	non (P et Q)	(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (non (P et Q))
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

La proposition "(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (non(P et Q))" est donc fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions substituées à P et à Q: c'est une antilogie que nous pouvons noter:

5.36.1. $\left[\text{(P et Q)} \Longleftrightarrow \text{(non(P et Q))} \right] \vdash$

5.37. Les 16 opérateurs binaires.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, nous pouvons substituer à chacune d'elles une proposition déterminée. En considérant les valeurs de vérité possibles, nous pouvons rencontrer, au plus, quatre situations distinctes qui apparaissent dans la table de vérité introduite au paragraphe 3.3.a.

A cette table à quatre lignes, nous pouvons associer seize autres tables à quatre lignes et quatre seulement, constituant les colonnes A, B, C, D, E, F, G, H, H', G', F', E', D', C', B', A', du tableau suivant. Les 16 tables doivent être considérées comme correspondant à 16 opérateurs binaires, certains d'entre eux n'ayant pas été introduits.

Nous reconnaissons:

- en colonne A, la table de vérité associée à la tautologie (§ 5.35.c.)
- en colonne B, la table de vérité associée à la disjonction logique (§ 5.3.)
- en colonne C, la table de vérité associée à l'implication

TABLEAU SYSTÉMATIQUE DES OPÉRATEURS LOGIQUES BINAIRES

P	Q	TAUTOLOGIE	P ou Q	Q ⇒ P	AFFIRMATION de P	P ⇒ Q	AFFIRMATION de Q	P ⇔ Q	P et Q	non (P et Q)	P W Q	non Q	non (P ⇒ Q)	non P	non (Q ⇒ P)	non (P ou Q)	ANTILOGIE
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
		A	B	C	D	E	F	G	H	H'	G'	F'	E'	D'	C'	B'	A'

"$Q \Longrightarrow P$" (§ 5.18.b.)

- en colonne E, la table de vérité associée à l'implication "$P \Longrightarrow Q$" (§ 5.17.)
- en colonne G, la table de vérité associée à l'équivalence logique "$P \Longleftrightarrow Q$" (§ 5.25.)
- en colonne H, la table de vérité associée à la conjonction logique (§ 5.10.)

Ces tables correspondent à des opérateurs binaires étudiés dans les paragraphes précédents.
En colonne D figure la table de vérité associée à une proposition que nous appellerons "affirmation de P" : elle correspond à un opérateur binaire qui n'a pas été introduit.
De même, en colonne F, figure la table de vérité associée à une proposition que nous appellerons " affirmation de Q ".
La table de la colonne A' est associée à la négation de la proposition correspondant à la table de la colonne A.
Il en est de même pour les colonnes B' et B, C' et C, etc...

Remarque.

Nous reconnaissons en colonne G' la table de vérité associée à la disjonction logique exclusive "P W Q".
Notons à ce propos que la tautologie 5.35.1. traduit l'équivalence logique entre "P W Q" et "non($P \Longleftrightarrow Q$)".

E X E R C I C E S

E.5.1.

Soit les propositions:

P : " 2 est premier."

Q : " 2 divise 90."

Considérons les propositions composées suivantes:

S_1: " 2 n'est pas premier ou divise 90."

S_2: " 2 est premier et divise 90."

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_1 , S_2 ?

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_1 , S_2 dans chacun des trois cas suivants:

2 est remplacé par 35 dans P, Q, S_1 , S_2 ;

2 est remplacé par 7 dans P, Q, S_1 , S_2 ;

2 est remplacé par 15 dans P, Q, S_1 , S_2 .

E.5.2.

Soit les propositions:

P : " 2 est premier."

Q : " 2 divise 90."

Considérons les propositions composées suivantes:

S_3: " Si 2 ne divise pas 90, alors 2 est premier ou divise 90."

S_4: " Le fait ,pour 2, d'être premier ou de ne pas diviser 90 n'implique pas la négation du fait que 2 n'est pas premier et divise 90."

S_5: " 2 ne divise pas 90 est logiquement équivalent à 2 est premier ou divise 90."

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_3 , S_4 , S_5 ?

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_3 , S_4, S_5, dans chacun des trois cas suivants:

2 est remplacé par 11 dans P, Q, S_3 , S_4 , S_5 .

2 est remplacé par 18 dans P, Q, S_3 , S_4 , S_5 .

2 est remplacé par 12 dans P, Q, S_3 , S_4 , S_5 .

E.5.3.

En utilisant les lettres P, Q, et les signes logiques $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, construire les assemblages représentant les propositions composées S_1 , S_2 , S_3 , S_4, S_5, considérées dans les exercices E.5.1 et E.5.2.

E.5.4.

Soit les propositions:

p : " 2 est premier."

q : " 2 divise 90."

En utilisant les lettres p, q, et la notation polonaise, construire les assemblages représentant les propositions composées S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5, considérées dans les exercices numérotés E.5.1 et E.5.2.

E.5.5.

Soit les propositions:

p : " 5 n'est pas premier."

q : " 5 divise 120."

r : " 5 est le carré d'un entier naturel."

Considérons les propositions composées suivantes:

S_1: " 5 est le carré d'un entier naturel et 5 divise 120 ou n'est pas premier."

S_2: " Soit 5 est premier, soit 5 divise 120 ou est le carré d'un entier naturel.

S_3: " 5 n'est pas le carré d'un entier naturel ou 5 divise 120 ou 5 n'est pas premier."

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_1 , S_2, S_3 ?
Quelle est la valeur de vérité des propositions S_1 , S_2 , S_3 , lorsque 5 est remplacé par 6 dans p, q, r, S_1 , S_2 , S_3 ? lorsque 5 est remplacé par 4? lorsque 5 est remplacé par 7? lorsque 5 est remplacé par 33? lorsque 5 est remplacé par 9?

E.5.6.

Les propositions représentées par les lettres p, q, r, sont celles définies à l'exercice E.5.5.

Considérons les propositions composées:

S_3: " Si 5 n'est pas premier et n'est pas le carré d'un entier naturel, alors 5 ne divise pas 120."

S_4: " 5 divise 120 ou 5 n'est pas le carré d'un entier nature est logiquement équivalent à 5 est premier."

S_5: " Si 5 est premier ou est le carré d'un entier naturel alors, le fait que 5 divise 120 n'implique pas que 5 n'est pas le carré d'un entier naturel."

Quelle est la valeur de vérité des propositions S_3 , S_4, S_5 ? Quelle est la valeur de vérité des propositions S_3 , S_4 , S_5 , lorsque 5 est remplacé par 4 dans p, q, r, S_3 , S_4 , S_5 ? lorsque 5 est remplacé par 15? lorsque 5 est remplacé par 21? lorsque 5 est remplacé par 13? lorsque 5 est remplacé par 25?

E.5.7.

En utilisant les lettres p, q, r, et les signes logiques $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, W , construire les assemblages représentant les propositions composées S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , considérées dans les exercices E.5.5 et E.5.6.

E.5.8.

En utilisant les lettres p, q, r, et la notation polonaise, construire les assemblages représentant les propositions composées S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , considérées dans les exercices numérotés E.5.5 et E.5.6.

E.5.9.

Soit les propositions:

p : " La lettre U est une voyelle."

q : " La lettre U figure dans le mot logique."

Traduire, en langage courant, les propositions composées représentées par les assemblages suivants:

$(\neg p) \vee (\neg \neg q)$

$\neg ((\neg q) \Longrightarrow (\neg p))$

$\overline{p \vee \overline{q}}$

NApKpq

E.5.10.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions composées S_1 , S_2 :

S_1 : " (p et non q) $\Longrightarrow$ (non p ou q)"

S_2 : " (non(p $\Longrightarrow$ q)) $\Longrightarrow$ (q $\Longrightarrow$ p)"

lorsque p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " $2 < 7$".

q : " 8 est pair."

Traduire en langage courant les propositions S_1 et S_2.

E.5.11.

Reprendre l'exercice E.5.10. dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " Le rectangle ABCD est un parallélogramme."

q : " Le rectangle ABCD a 5 côtés."

E.5.12.

Reprendre l'exercice E.5.10. dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " i est une consonne."

q : " u est une voyelle."

E.5.13.

Reprendre l'exercice E.5.10. dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " $5^2 + 3^2 = 8^2$ "

q : " $\sqrt{5^2 + 3^2} = 5 + 3$ "

E.5.14.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions composées S_1 , S_2 , S_3 :

S_1 : " (non(p et non q)) $\Longleftrightarrow$ (non p ou q)

S_2 : " ((non p) W q) $\Longrightarrow$ (non(p $\Longleftrightarrow$ q))

S_3 : " (non(p $\Longrightarrow$ non q)) $\Longleftrightarrow$ ((p W q) ou (p et q))

lorsque p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " La Seine traverse Paris."

q : " Le Rhône se jette dans la Manche."

E.5.15.

Reprendre l'exercice E.5.14, dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " Un triangle rectangle est équilatéral."

q : " Un triangle rectangle a au moins un angle aigu."

E.5.16.

Reprendre l'exercice E.5.14, dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " Corneille est l'auteur d'Andromaque."

q : " Corneille naquit en 1667."

E.5.17.

Reprendre l'exercice E.5.14, dans le cas où p, q, désignent les propositions suivantes:

p : " $3^2 + 4^2 = 5^2$ ".

q : " $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

E.5.18.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions composées suivantes:

S_1: " (p et (q ou r)) $\Longleftrightarrow$ ((p et q) ou (p et r))

S_2: " non[(p et (q $\Longrightarrow$ non p)) $\Longrightarrow$ (p ou (r $\Longrightarrow$ non q))]

lorsque p, q, r, désignent les propositions:

p : " e est une voyelle."

q : " b est une voyelle."

r : " m est une lettre du mot logique."

E.5.19.

Reprendre l'exercice E.5.18, dans le cas où p, q, r, désignent les propositions:

p : " i est une voyelle."

q : " o est une voyelle."

r : " o, i, sont des lettres du mot logique."

E.5.20.

Reprendre l'exercice E.5.18, dans le cas où p, q, r, désignent les propositions:

p : " 7 divise 12."

q : " $5 > 11$"

r : " 4903 est un nombre premier."

E.5.21.

Reprendre l'exercice E.5.18, dans le cas où p, q, r, désignent les propositions:

p : " L'or est plus lourd que l'eau."

q : " L'eau est un métal."

r : " L'or est un métal."

E.5.22.

Reprendre l'exercice E.5.18, dans le cas où p, q, r, désignent les propositions:

p : " 12 est impair."

q : " 12 est premier."

r : " 12 divise 34."

E.5.23.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions composées S_1 , S_2 , S_3 , S_4 :

S_1: $(q \vee p) \vee (\neg (p \vee q))$

S_2: $(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow [(r \vee (\neg p)) \wedge (q \Leftrightarrow r)]$

S_3: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))]$

S_4: $(p \mathbin{W} q) \Rightarrow [(\neg (p \Rightarrow q)) \vee (\neg (q \Rightarrow p))]$

1º) Dans le cas où p, q, r, désignent des propositions vraies.

2º) Dans le cas où p, q, désignent des propositions vraies et r une proposition fausse.

3º) Dans le cas où p, r, désignent des propositions fausses et q une proposition vraie.

4º) Dans le cas où p, q, r, désignent des propositions fausses.

5º) Dans le cas où q, r, désignent des propositions fausses et p une proposition vraie.

E.5.24.

Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions composées représentées par:

S_1: EKppp

S_2: CNKpqCqNp

S_3: ANpEqCpq

S_4: ENApqCpq

S_5: EANpqCpq

1º) Dans le cas où p, q, désignent des propositions vraies.

2º) Dans le cas où p, q, désignent des propositions fausses.

3º) Dans le cas où p désigne une proposition vraie et q une proposition fausse.

4º) Dans le cas où p désigne une proposition fausse et q une proposition vraie.

E.5.25.

Etudier les valeurs de vérité des propositions composées suivantes en construisant les tableaux associés correspondants.

1º) (p et (q ou non p)) $\Longrightarrow$ p

2º) (p ou q) et p W q)

3º) p W((non q) et p)

4º) (p et q) $\Longleftrightarrow$ [p ou non(q $\Longrightarrow$ p)]

5º) (p et (q ou non r)) $\Longrightarrow$ (p $\Longleftrightarrow$ (q et r))

6º) (p $\Longrightarrow$ q ou q $\Longrightarrow$ r) $\Longrightarrow$ ((p et q) $\Longrightarrow$ nonr)

7º) (non(p ou q) et r) ou non s

6 - NOTIONS SUR LES LOIS LOGIQUES

GENERALITES

6.1. Généralisations des tableaux de vérité.

Soit P,Q,R,... des propositions indéterminées.

A l'aide de ces propositions et des opérateurs logiques unaires et binaires, nous pouvons construire une nouvelle proposition indéterminée composée P' (revoir à ce sujet le paragraphe 2.2.). Par exemple, à l'aide de P, Q, et des opérateurs "non", "ou", " $\Longrightarrow$ ", " $\Longleftrightarrow$ ", nous pouvons construire la proposition P':

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))$$

En remplaçant P, Q, R,... par des propositions déterminées A, B, C,... , P' est remplacée par une proposition déterminée A' dont la valeur de vérité est alors connue.

Le propblème important est de connaître la valeur de vérité de A' dans chacune des situations qui peuvent se présenter, relativement aux valeurs de vérité de A, B, C,....

Dans ce cas, la construction d'un tableau de vérité T, utilisant les tables de vérité introduites pour préciser la signification des opérateurs logiques, permet de mettre en évidence toutes les situations ainsi que la valeur de vérité de A' correspondant à chaque situation.

En considérant l'exemple précédent, nous obtenons le tableau suivant:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non P	Q ou (non P)	P'
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

6.2. Lois logiques ou tautologies.

Considérons la dernière colonne du tableau T; elle indique la valeur de vérité de A' associée à chaque situation. Cette colonne peut présenter trois aspects différents.

1º La dernière colonne du tableau T ne contient que des V. Nous avons alors établi que la proposition A' est vraie quelles que soient les propositions déterminées remplaçant P, Q, R,... Dans ce cas nous pouvons dire que P' est vraie.
P' ayant une valeur de vérité bien déterminée doit être considérée comme une proposition déterminée vraie. Nous appellerons P' "loi logique" ou encore "tautologie" et nous noterons cette proposition $\vdash P'$.
Reprenons par exemple la proposition "$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q$ ou (non $P))$"; elle est vraie quelles que soient les propositions déterminées remplaçant P, Q; nous sommes donc en présence d'une loi logique que nous noterons:

6.2.1 $$\vdash [(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))]$$

En définitive, nous appellerons tautologie une proposition qui est construite à l'aide de une ou plusieurs propositions indéterminées P, Q, R,... et des opérateurs logiques, et qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions déterminées substituées à P, Q, R,....

2º La dernière colonne du tableau T ne contient que des F. Nous avons alors établi que la proposition A' est fausse quelles que soient les propositions déterminées remplaçant P, Q, R,.... Dans ce cas nous pouvons dire que P' est fausse.
P' ayant une valeur de vérité bien déterminée, doit être considérée comme une proposition déterminée fausse. Nous appellerons P' "antilogie" et nous noterons cette proposition $P' \vdash$.
Prenons par exemple la proposition P': "$(P \text{ W } Q) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$" et construisons le tableau suivant:

P	Q	P W Q	$P \Leftrightarrow Q$	P'
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

La proposition P' est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions déterminées remplaçant P, Q; nous sommes en présence d'une antilogie que nous noterons:

6.2.2 $$[(P \text{ W } Q) \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)] \vdash$$

En résumé, nous appellerons antilogie, une proposition qui est construite à l'aide de une ou plusieurs propositions indéterminées P, Q, R,... et des opérateurs logiques, et qui est fausse quelles que soient les valeurs de vérité des propositions déterminées substituées à P, Q, R,...

Remarque.

Lorsque P' est une antilogie, "non P' " est une tautologie.

3º La dernière colonne du tableau T contient des V ainsi que des F.

Dans ce cas P' n'est qu'une proposition indéterminée. Prenons, par exemple, la proposition P' : "(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (P ou Q) " et construisons le tableau suivant:

P	Q	P et Q	P ou Q	P'
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

La proposition P' n'est ni une antilogie, ni une loi logique; c'est une proposition indéterminée.

6.3. Conclusion.

Une loi logique ou une tautologie affirme la vérité d'une proposition représentée par un certain assemblage dans lequel figurent des lettres désignant des propositions et des symboles représentant des opérateurs logiques. De ce fait, la loi logique dépend essentiellement de l'assemblage et non des propositions représentées dans cet assemblage. Les lois logiques constituent donc un des fondements du raisonnement mathématique.

QUELQUES LOIS LOGIQUES RELATIVES A LA COMMUTATIVITE

6.4.La disjonction logique.

Considérons la proposition P' : "(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (Q ou P) " et construisons le tableau suivant:

P	Q	P ou Q	Q ou P	P'
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

La dernière colonne de ce tableau ne contenant que des V, nous pouvons affirmer que P' est une loi logique. De ce fait nous écrivons:

6.4.1. $\vdash \left[(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } P)\right]$

Remarque. Construisons le tableau associé à la proposition: P'_1 : "(P ou Q) $\Longrightarrow$ (Q ou P) "

P	Q	P ou Q	Q ou P	P'_1
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

La dernière colonne ne contenant que des V, nous écrirons:

6.4.2. $\vdash [(P \text{ ou } Q) \Rightarrow (Q \text{ ou } P)]$

6.5. La conjonction logique.

Construisons le tableau correspondant à la proposition P': "$(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$"

P	Q	P et Q	Q et P	P'
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

L'examen de la dernière colonne nous permet d'écrire:

6.5.1. $\vdash [(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)]$

6.6. L'équivalence logique.

Construisons le tableau associé à la proposition: P': "$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$"

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow P$	P'
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.6.1. $\vdash [(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)]$

6.7. La disjonction logique.exclusive.

La proposition P': "(P W Q) $\Longleftrightarrow$ (Q W P)" nous conduit au tableau suivant:

P	Q	P W Q	Q W P	P'
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Nous en déduisons:

6.7.1. $\vdash [(P\ W\ Q) \Longleftrightarrow (Q\ W\ P)]$

6.8. Remarques.

1) Chacune des lois précédentes exprime une propriété appelée parfois commutativité.

2) Construisons le tableau associé à la proposition P': "$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longrightarrow P)$".

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	P'
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La dernière colonne du tableau contient des V ainsi que des F. P' étant une proposition indéterminée n'est pas une loi logique. On exprime parfois ce fait en disant que l'implication n'est pas commutative.

QUELQUES LOIS LOGIQUES RELATIVES A L'ASSOCIATIVITE

6.9. La disjonction logique.

A) La disjonction logique non exclusive.

La proposition P':

$$((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R))$$

nous conduit au tableau suivant:

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) ou R	Q ou R	P ou (Q ou R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons:

6.9.1. $\vdash \left[((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R))\right]$

Cette loi logique exprime une propriété appelée parfois associativité de la disjonction logique non exclusive.

B) La disjonction logique exclusive.

La proposition P":

$$((P \text{ W } Q) \text{ W } R) \Longleftrightarrow (P \text{ W } (Q \text{ W } R))$$

nous conduit au tableau suivant:

P	Q	R	P W Q	(P W Q) W R	Q W R	P W (Q W R)	P"
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons:

6.9.2. $\vdash \left[((P \ W \ Q) \ W \ R) \Longleftrightarrow (P \ W \ (Q \ W \ R))\right]$

Cette loi logique exprime une propriété appelée parfois associativité de la disjonction logique exclusive.

6.10. La conjonction logique.

Construisons le tableau associé à la proposition P':

$$((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))$$

P	Q	R	P et Q	(P et Q) et R	Q et R	P et (Q et R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.10.1. $\vdash [((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Longleftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))]$

Cette loi exprime une propriété appelée associativité de la conjonction logique.

QUELQUES LOIS LOGIQUES RELATIVES A LA NEGATION

6.11. Négation de la proposition "non P".

Soit la proposition P' : "(non(non P)) $\Longleftrightarrow$ P". Construisons le tableau suivant:

P	non P	non (non P)	P'
V	F	V	V
F	V	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.11.1. $\vdash [(\text{non}(\text{non } P)) \Longleftrightarrow P]$

Cette loi est quelquefois appelée "loi de double négation".

6.12. Lois de De Morgan.

La proposition P' : "(non(P ou Q)) $\Longleftrightarrow$((non P) et (non Q))" nous conduit au tableau suivant:

P	Q	P ou Q	non (P ou Q)	non P	non Q	(non P) et (non Q)	P'
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.12.1. $\vdash$ [(non(P ou Q)) $\Longleftrightarrow$((non P) et (non Q))]

Construisons le tableau associé à la proposition P":
"(non(P et Q)) $\Longleftrightarrow$((non P) ou (non Q))"

P	Q	P et Q	non (P et Q)	non P	non Q	(non P) ou (non Q)	P"
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.12.2. $\vdash$ [(non(P et Q)) $\Longleftrightarrow$((non P) ou (non Q))]

Les lois logiques 6.12.1. et 6.12.2. sont souvent appelées lois de De Morgan.

La proposition "non(P et Q)" est quelquefois appelée "incompatibilité des propositions P, Q ".

6.13. Négation de l'implication.

Construisons le tableau correspondant à la proposition P' : "(non(P $\Rightarrow$ Q)) $\Leftrightarrow$ ((non Q) et P)".

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	non (P $\Rightarrow$ Q)	non Q	(non Q) et P	P'
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

Nous pouvons écrire:

6.13.1. $\vdash$ [(non(P $\Rightarrow$ Q)) $\Leftrightarrow$ ((non Q) et P)]

6.14. Négations de la disjonction logique exclusive et de l'équivalence logique.

Le tableau suivant correspond à la proposition P': "(non(P $\Leftrightarrow$ Q)) $\Leftrightarrow$ (P W Q)".

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q	non (P $\Leftrightarrow$ Q)	P W Q	P'
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Nous avons donc la loi logique:

6.14.1. $\vdash$ [(non(P $\Leftrightarrow$ Q)) $\Leftrightarrow$ (P W Q)]

Construisons le tableau associé à la proposition P":
"(non(P W Q)) $\Longleftrightarrow$ (P $\Longleftrightarrow$ Q)"

P	Q	P W Q	non (P W Q)	P $\Longleftrightarrow$ Q	P'
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Nous en déduisons:

6.14.2. $\vdash$ [(non(P W Q)) $\Longleftrightarrow$ (P $\Longleftrightarrow$ Q)]

QUELQUES LOIS LOGIQUES RELATIVES A LA DISTRIBUTIVITE

6.15. Distributivité de la disjonction logique par rapport à la conjonction logique.

La proposition P':"(P ou (Q et R)) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) et (P ou R))" nous conduit au tableau suivant:

P	Q	R	Q et R	P ou (Q et R)	P ou Q	P ou R	(P ou Q) et (P ou R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Nous pouvons écrire:

6.15.1. $\vdash$ [(P ou (Q et R)) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) et (P ou R))]

En procédant de la même manière, nous obtenons la loi logique suivante:

6.15.2. $\vdash$ [((P et Q) ou R) $\Longleftrightarrow$ ((P ou R) et (Q ou R))]

6.16. Distributivité de la conjonction logique par rapport à la disjonction logique.

A) Construisons le tableau associé à la proposition P':
"(P et (Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) ou (P et R))"

P	Q	R	Q ou R	P et (Q ou R)	P et Q	P et R	(P et Q) ou (P et R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.16.1. $\vdash$ [(P et (Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) ou (P et R))]

En procédant de façon analogue, nous obtenons la loi logique:

6.16.2. $\vdash$ [((P ou Q) et R) $\Longleftrightarrow$ ((P et R) ou (Q et R))]

B) Construisons le tableau associé à la proposition P":

(P et (Q W R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) W (P et R))

P	Q	R	Q W R	P et (Q W R)	P et Q	P et R	(P et Q) W (P et R)	P"
V	V	V	F	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.16.3. $\vdash$ [(P et (Q W R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) W (P et R))]

En procédant de façon analogue, nous obtenons la loi logique:

6.16. 4. $\vdash$ [((P W Q) et R) $\Longleftrightarrow$ ((P et R) W (Q et R))]

6.17. Distributivité de la disjonction logique par rapport à elle-même.

Le tableau suivant correspond à la proposition P':
"(P ou (Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) ou (P ou R))".

P	Q	R	Q ou R	P ou (Q ou R)	P ou Q	P ou R	(P ou Q) ou (P ou R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

P' est donc une loi logique.

6.17.1. $\vdash$ [(P ou (Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) ou (P ou R))]

Nous obtenons de la même manière la loi logique suivante:

6.17.2. $\vdash$ [((P ou Q) ou R) $\Longleftrightarrow$ ((P ou R) ou (Q ou R))]

6.18. Distributivité de la conjonction logique par rapport à elle-même.

Le tableau suivant correspond à la proposition P':
"(P et (Q et R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) et (P et R))"

P	Q	R	Q et R	P et (Q et R)	P et Q	P et R	(P et Q) et (P et R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

Nous en déduisons:

6.18.1. $\vdash \left[(P \text{ et } (Q \text{ et } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ et } (P \text{ et } R))\right]$

D'une manière analogue, nous obtenons la loi logique suivante:

6.18.2. $\vdash \left[((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Longleftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ et } (Q \text{ et } R))\right]$

DEUX LOIS LOGIQUES RELATIVES A LA TRANSITIVITE

6.19. Transitivité de l'implication.

Construisons le tableau associé à la proposition P':
"$((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$".

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

P' est une loi logique qui exprime une propriété souvent désignée sous le vocable de "transitivité de l'implication"; nous pouvons écrire:

6.19.1. $\vdash \left[((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\right]$

6.20. Transitivité de l'équivalence logique.

Construisons le tableau correspondant à la proposition P': "$((P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$"

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow R$	$(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$	$P \Leftrightarrow R$	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.20.1. $\vdash \left[((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)\right]$

Elle exprime une propriété souvent appelée "transitivité de l'équivalence logique".

LIENS ENTRE CERTAINS OPERATEURS

Dans les paragraphes 6.21.,6.22.,6.23.,6.24., nous étudions des lois logiques ayant entre elles une certaine analogie: ce sont toutes des équivalences logiques au premier membre desquelles figurent deux propositions P, Q, liées par un seul opérateur binaire. Au second membre figurent ces mêmes propositions P, Q, des opérateurs binaires différents de celui in troduit au premier membre et, parfois, l'opérateur "non".
Ces lois logiques traduisent, en quelque sorte, la possibilité d'exprimer un opérateur binaire en fonction de l'opérateur "non" et des autres opérateurs binaires.

6.21. Conjonction et disjonction logique.

Soit P' la proposition: "(P et Q) $\Leftrightarrow$ (non((non P) ou (non Q)))"
Construisons le tableau suivant:

P	Q	P et Q	non P	non Q	(non P) ou (non Q)	non((non P) ou (non Q))	P'
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V

Nous en déduisons:

6.21.1. $\vdash \left[(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)))\right]$

En procédant de la même manière, nous obtenons la loi logique suivante:

6.21.2. $\vdash \left[(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)))\right]$

6.22. Implication.

Considérons la proposition:"$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))$". Elle a été étudiée, à titre d'exemple, aux paragraphes 6.1. et 6.2. Cette proposition est une loi logique; nous écrirons:

6.22.1. $\vdash \left[(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

6.23. Equivalence logique.

Construisons le tableau associé à la proposition P':
"$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$	P'
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.23.1. $\vdash \left[(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))\right]$

6.24. Disjonction logique exclusive et équivalence logique.

La proposition "$(P \text{ W } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(P \Longleftrightarrow Q))$" a été étudiée au paragraphe 5.35.(exemple). Cette proposition étant une loi logique ou tautologie, nous pouvons écrire:

6.24.1. $\vdash \left[(P \text{ W } Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(P \Longleftrightarrow Q))\right.$

En procédant de la même manière, nous obtenons la loi logique suivante:

6.24.2. $\vdash [(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(P \text{ W } Q))]$

QUELQUES PROPRIETES DE LA DISJONCTION ET DE LA CONJONCTION LOGIQUES

6.25. La disjonction logique.

Construisons le tableau suivant:

P	P	P ou P	(P ou P) ⟹ P	(P ou P) ⟺ P
V	V	V	V	V
F	F	F	V	V
I	II	III	IV	V

L'examen de la colonne IV nous permet d'écrire:

6.25.1. $\vdash [(P \text{ ou } P) \Longrightarrow P]$

La colonne V ne contenant que des V, nous pouvons encore écrire:

6.25.2. $\vdash [(P \text{ ou } P) \Longleftrightarrow P]$

Rappelons enfin la "loi du tiers exclu" étudiée au paragraphe 5.7.:

6.25.3. $\vdash [P \text{ ou } (\text{non } P)]$

6.26. La conjonction logique.

Construisons le tableau suivant:

P	P	P et P	(P et P) ⟺ P
V	V	V	V
F	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.26.1. $\vdash [(P \text{ et } P) \Longleftrightarrow P]$

Au paragraphe 5.14. nous avons étudié la proposition:

"non(P et (non P))"

C'est une loi logique appelée "loi de contradiction". Nous pouvons écrire:

6.26.2. $\vdash$ [non(P et (non P))]

QUELQUES PROPRIETES DE L'IMPLICATION

6.27. Etude de la proposition "P $\Rightarrow$ P".

Construisons le tableau suivant:

P	P	P $\Rightarrow$ P
V	V	V
F	F	V

Nous en déduisons:

6.27.1. $\vdash$ [P $\Rightarrow$ P]

6.28. Etude des propositions "P $\Rightarrow$ (P ou Q)", "(P et Q) $\Rightarrow$ P", "(P et Q) $\Rightarrow$ (P ou Q)".

Construisons le tableau suivant:

P	Q	P ou Q	P et Q	P $\Rightarrow$ (P ou Q)	(P et Q) $\Rightarrow$ P	(P et Q) $\Rightarrow$ (P ou Q)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V
I	II	III	IV	V	VI	VII

L'examen des colonnes V, VI, VII, permet d'écrire:

6.28.1. $\vdash [P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$

6.28.2. $\vdash [(P \text{ et } Q) \Rightarrow P]$

6.28.3. $\vdash [(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$

6.29. Etude de la proposition "$(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ ".

La proposition "$(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ " nous conduit au tableau suivant:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \text{ et } (P \Rightarrow Q)$	$(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Nous en déduisons:

6.29.1. $\vdash [(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q]$

6.30. L'implication et sa contraposée.

Construisons le tableau associé à la proposition P':

"$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P))$".

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non Q	non P	$(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$	P'
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.30.1. $\vdash \left[(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P))\right]$

6.31. Etude de la proposition: "$((P \Longrightarrow Q)$ et $((\text{non } P) \Longrightarrow Q)) \Longleftrightarrow Q$ "

Construisons le tableau associé à la proposition P':

"$((P \Longrightarrow Q)$ et $((\text{non } P) \Longrightarrow Q)) \Longleftrightarrow Q$ "

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non P	$(\text{non } P) \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q)$ et $((\text{non } P) \Rightarrow Q)$	P'
V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.31.1. $((P \Longrightarrow Q)$ et $((\text{non } P) \Longrightarrow Q)) \Longleftrightarrow Q$

6.32. Etude de la proposition: "$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R))$".

La proposition P': "$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R))$", nous conduit au tableau suivant:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous pouvons donc écrire:

6.32.1. $\vdash \left[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))\right]$

6.33. Etude des propositions: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } R))$" et "$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Rightarrow (Q \text{ et } R))$".

Construisons le tableau suivant associé à la proposition P' : "$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } R))$"

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	P ou R	Q ou R	((P ou R) $\Rightarrow$ (Q ou R))	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

Nous en déduisons:

6.33.1. $\vdash \left[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } R))\right]$

En procédant de façon analogue, nous obtenons la loi logique:

6.33.2. $\vdash \left[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Rightarrow (Q \text{ et } R))\right]$

6.34. Etudes des propositions "$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Rightarrow (Q \text{ et } S))$" et "$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } S))$".

Construisons le tableau correspondant à la proposition P' "$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Rightarrow (Q \text{ et } S))$"

P	Q	R	S	$P \Rightarrow Q$	$R \Rightarrow S$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(R \Rightarrow S)$	P et R	Q et S	(P et R) $\Rightarrow$ (Q et S)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	V

Nous en déduisons:

6.34.1. $\vdash \left[((P \Rightarrow Q) \text{ et } (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Rightarrow (Q \text{ et } S))\right]$

En procédant de la même manière, nous obtenons la loi logique:

6.34.2. $\vdash \left[((P \Rightarrow Q) \text{ et } (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Rightarrow (Q \text{ ou } S))\right]$

6.35. Etude des propositions: "$((P \Rightarrow Q)$ et $(P \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$" et "$((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$".

Construisons le tableau associé à la proposition P': "$((P \Rightarrow Q)$ et $(P \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$".

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow R$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(P \Leftrightarrow R)$	$R \Rightarrow Q$	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.35.1. $\vdash \left[((P \Rightarrow Q) \text{ et } (P \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (R \Rightarrow Q)\right]$

La proposition P" : "$((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$", nous conduit au tableau suivant:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Leftrightarrow R$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.35.2. $\vdash \left[((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longleftrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)\right]$

QUELQUES PROPRIETES DE L'EQUIVALENCE LOGIQUE

6.36. Etude de la proposition: " $P \Longleftrightarrow P$ ".

Construisons le tableau suivant:

P	P	$P \Longleftrightarrow P$
V	V	V
F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.36.1. $\vdash [P \Longleftrightarrow P]$

6.37. Equivalence logique et négations.

Construisons le tableau associé à la proposition P':
"$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\text{non } Q) \Longleftrightarrow (\text{non } P))$

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	non Q	non P	$(\text{non } Q) \Longleftrightarrow (\text{non } P)$	P'
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons:

6.37.1. $\vdash \left[(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\text{non } Q) \Longleftrightarrow (\text{non } P))\right]$

La proposition P": "$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\text{non } P) \Longleftrightarrow (\text{non } Q))$", nous conduit au tableau sui vant:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	non P	non Q	(non P) $\Leftrightarrow$ (non Q)	P'
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.37.2. $\vdash \left[(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \Leftrightarrow (\text{non } Q))\right]$

6.38. Etude des propositions: "$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R))$" et "$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } R))$".
Construisons le tableau correspondant à la proposition P': "$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R))$".

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	P et R	Q et R	(P et R) $\Leftrightarrow$ (Q et R)	P'
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

Nous en déduisons:

6.38.1. $\vdash \left[(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ et } R) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R))\right]$

En procédant de la même manière, nous obtenons la loi logique:

6.38.2. $\vdash \left[(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow ((P \text{ ou } R) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } R))\right]$

DEUX TAUTOLOGIES PARTICULIERES

N'ayant à considérer que les valeurs de vérité des propositions indépendamment de leur signification concrète, toute proposition appartient à l'une des deux classes suivantes:

la première classe contient toutes les propositions vraies; l'une quelconque de ces propositions pourra être désignée par le symbole A_V .

la seconde classe contient toutes les propositions fausses; l'une quelconque d'entre elles pourra être notée A_F .

6.39. Etude de la proposition "$(P \text{ et } A_V) \Leftrightarrow P$ ".

A_V étant une proposition vraie, construisons le tableau correspondant à la proposition: "$(P \text{ et } A_V) \Leftrightarrow P$ ".

P	A_V	P et A_V	$(P \text{ et } A_V) \Leftrightarrow P$
V	V	V	V
F	V	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.39.1. $\vdash \left[(P \text{ et } A_V) \Leftrightarrow P\right]$

6.40. Etude de la proposition "$(P \text{ ou } A_F) \Leftrightarrow P$ "

A_F étant une proposition fausse, construisons le tableau associé à la proposition "$(P \text{ ou } A_F) \Leftrightarrow P$ ".

P	A_F	P ou A_F	$(P \text{ ou } A_F) \Leftrightarrow P$
V	F	V	V
F	F	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

6.40.1. $\vdash \left[(P \text{ ou } A_F) \Longleftrightarrow P \right]$

7 - UTILISATION DES LOIS LOGIQUES

Soit X, Y,... les propositions composées construites à l'aide de propositions initiales P, Q, R, S,... et d'opérateurs logiques comme il a été indiqué au paragraphe 2.2. Les propositions X, Y, obéïssent aux règles suivantes, qui permettent l'utilisation effective des lois logiques.

7.1. Première règle.

P' étant une proposition, composée ou non, en remplaçant P par P', en chacune des occurrences de P dans X, on obtient une nouvelle proposition X'.
La proposition X' pourra être notée "$(P'|P)X$" et se lira: "proposition obtenue lorsque P' remplace P dans X".

Exemple.

Soit X la proposition "$(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (P \text{ ou } Q)$". Considérons la proposition P': "$(\text{non } R) \Longrightarrow S$". La proposition X' notée $(P'|P)X$ s'écrira:

$$(((\text{non } R) \Longrightarrow S) \text{ et } Q) \Longleftrightarrow (((\text{non } R) \Longrightarrow S) \text{ ou } Q)$$

7.2. Deuxième règle.

X' étant la proposition notée $(P'|P)X$, Y' la proposition notée $(P'|P)Y$,
$(\text{non } X')$ sera la proposition notée $(P'|P)(\text{non } X)$
$(X' \text{ ou } Y')$ sera la proposition notée $(P'|P)(X \text{ ou } Y)$
$(X' \text{ et } Y')$ sera la proposition notée $(P'|P)(X \text{ et } Y)$
$(X' \Longrightarrow Y')$ sera la proposition notée $(P'|P)(X \Longrightarrow Y)$
$(X' \Longleftrightarrow Y')$ sera la proposition notée $(P'|P)(X \Longleftrightarrow Y)$
$(X' \text{ W } Y')$ sera la proposition notée $(P'|P)(X \text{ W } Y)$

Exemple.

Soit X la proposition $(P \text{ ou } Q)$, Y la proposition $((\text{non } P) \Longrightarrow Q)$, P' la proposition $(R \Longleftrightarrow S)$.
La proposition X', notée $(P'|P)X$ s'écrit: $((R \Longleftrightarrow S) \text{ ou } Q)$.
La proposition Y', notée $(P'|P)Y$ s'écrit: $((\text{non}(R \Longleftrightarrow S)) \Longrightarrow Q)$.
La proposition $(X' \text{ et } Y')$, c'est à dire:

$$((R \Longleftrightarrow S) \text{ ou } Q) \text{ et } ((\text{non}(R \Longleftrightarrow S)) \Longrightarrow Q)$$

sera notée: $(P'|P)(X \text{ et } Y)$ ou encore:

$$(P' \mid P)((P \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non } P \Rightarrow Q))$$

7.3. Troisième règle.

X étant une loi logique, la proposition X' notée $(P' \mid P)X$ est une nouvelle loi logique.

Exemple.

Soit X la loi logique 6.28.3:

$$\vdash \left[(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)\right]$$

Considérons la proposition P': (R ou S). La proposition X' notée $(P' \mid P)X$ est une nouvelle loi logique qui s'écrit:

$$\vdash \left[((R \text{ ou } S) \text{ et } Q) \Rightarrow ((R \text{ ou } S) \text{ ou } Q)\right]$$

7.4. Quatrième règle.

Soit X une proposition construite à l'aide de plusieurs propositions dont l'une, que nous désignerons par A, peut être composée.
A' désignant une proposition telle que l'on ait la loi logique

$$\vdash \left[A \Leftrightarrow A'\right]$$

lorsque nous remplaçons A par A', en une ou plusieurs occurences de A dans X, nous obtenons une nouvelle proposition X' telle que:

$$\vdash \left[X \Leftrightarrow X'\right]$$

Exemple.

Soit X la proposition $(R \text{ et } (P \Rightarrow Q))$; nous avons la loi logique 6.22.1:

$$\vdash \left[(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))\right]$$

Remplaçons $(P \Rightarrow Q)$ par $(Q \text{ ou } (\text{non } P))$ dans X; nous obtenons la proposition X': $(R \text{ et } (Q \text{ ou } (\text{non } P)))$ telle que:

$$\vdash \left[(R \text{ et } (P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (R \text{ et } (Q \text{ ou } (\text{non } P)))\right]$$

7.5. Remarque.

Certaines phrases comportant des fonctions propositionnelles et des opérateurs logiques (non, et, ou, implique, etc...) peuvent être des propositions. C'est le cas dans les exemples suivants:

a) "Quel que soit l'entier naturel x, x divise 4 implique x divise 12", est une proposition vraie

b) "Il existe au moins un entier naturel y telque 3 est le carré de y ou 5 est le carré de y", est une proposition fausse.

c) "Il y a trois entiers naturels z et trois seulement, tels que z divise 4 et z divise 12", est une proposition vraie.

8 - LE CALCUL DES PROPOSITIONS

TABLEAU SYNOPTIQUE

3. Les tables de vérité

4.1. La négation.

La négation d'une proposition A déterminée est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A est vraie et qui est vraie lorsque A est fausse.

5.1. La disjonction logique.

La disjonction logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A étant fausse, B l'est également, et qui est vraie dans tous les autres cas.

5.8. La conjonction logique.

La conjonction logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A étant vraie, B l'est également, et qui est fausse dans tous les autres cas.

5.15. L'implication.

A, B, étant deux propositions déterminées, l'implication d'antécédent A et de conséquent B est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A étant vraie, B est fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas.

5.23. L'équivalence logique.

L'équivalence logique de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A, B, ont même valeur de vérité, et qui est fausse dans tous les autres cas.

5.30. La disjonction logique exclusive.

La disjonction logique exclusive de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A, B, ont des valeurs de vérité différentes, et qui est fausse lorsque A, B, ont même valeur de vérité.

6.2. Lois logiques.

6.4.1. $\vdash (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$

6.4.2. $\vdash (P \text{ ou } Q) \Rightarrow (Q \text{ ou } P)$

6.5.1. $\vdash (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$

6.6.1. $\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

6.7.1. $\vdash (P \text{ W } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ W } P)$

6.9.1. $\vdash ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R))$

6.9.2. $\vdash ((P \text{ W } Q) \text{ W } R) \Leftrightarrow (P \text{ W } (Q \text{ W } R))$

6.10.1. $\vdash ((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))$

6.11.1. $\vdash (\text{non}(\text{non } P)) \Leftrightarrow P$

6.12.1. $\vdash (\text{non}(P \text{ ou } Q)) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \text{ et}(\text{non } Q))$

6.12.2. $\vdash (\text{non}(P \text{ et } Q)) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$

6.13.1. $\vdash (\text{non}(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow ((\text{non } Q) \text{ et } P)$

6.14.1. $\vdash (\text{non}(P \Leftrightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \text{ W } Q)$

6.14.2. $\vdash (\text{non}(P \text{ W } Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$

6.15.1. $\vdash (P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$

6.15.2. $\vdash ((P \text{ et } Q) \text{ ou } R) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R))$

6.16.1. $\vdash (P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$

6.16.2. $\vdash ((P \text{ ou } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R))$

6.16.3. $\vdash (P \text{ et } (Q \text{ W } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ W } (P \text{ et } R))$

6.16.4. $\vdash ((P \text{ W } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ W } (Q \text{ et } R))$

6.17.1. $\vdash (P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } (P \text{ ou } R))$

6.17.2. $\vdash ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } R) \text{ ou } (Q \text{ ou } R))$

6.18.1. $\vdash (P \text{ et } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ et } (P \text{ et } R))$

6.18.2. $\vdash ((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ et } (Q \text{ et } R))$

6.19.1. $\vdash ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

6.20.1. $\vdash ((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

6.21.1. $\vdash (P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)))$

6.21.2. $\vdash (P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non}((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)))$

6.22.1. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))$

6.23.1. $\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P))$

6.24.1. $\vdash (P \text{ W } Q) \Leftrightarrow (\text{non}(P \Leftrightarrow Q))$

6.24.2. $\vdash (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(P \text{ W } Q))$

6.25.1. $\vdash (P \text{ ou } P) \Rightarrow P$

6.25.2. $\vdash (P \text{ ou } P) \Leftrightarrow P$

6.25.3.	$\vdash$	P ou (non P)
6.26.1.	$\vdash$	(P et P) $\Longleftrightarrow$ P
6.26.2.	$\vdash$	non(P et (non P))
6.27.1.	$\vdash$	P $\Longrightarrow$ P
6.28.1.	$\vdash$	P $\Longrightarrow$ (P ou Q)
6.28.2.	$\vdash$	(P et Q) $\Longrightarrow$ P
6.28.3.	$\vdash$	(P et Q) $\Longrightarrow$ (P ou Q)
6.29.1.	$\vdash$	(P et (P $\Longrightarrow$ Q)) $\Longrightarrow$ Q
6.30.1.	$\vdash$	(P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((non Q) $\Longrightarrow$ (non P))
6.31.1.	$\vdash$	((P $\Longrightarrow$ Q) et ((non P) $\Longrightarrow$ Q)) $\Longleftrightarrow$ Q
6.32.1.	$\vdash$	(P $\Longrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((Q $\Longrightarrow$ R) $\Longrightarrow$ (P $\Longrightarrow$ R))
6.33.1.	$\vdash$	(P $\Longrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((P ou R) $\Longrightarrow$ (Q ou R))
6.33.2.	$\vdash$	(P $\Longrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((P et R) $\Longrightarrow$ (Q et R))
6.34.1.	$\vdash$	((P $\Longrightarrow$ Q) et (R $\Longrightarrow$ S)) $\Longrightarrow$ ((P et R) $\Longrightarrow$ (Q et S))
6.34.2.	$\vdash$	((P $\Longrightarrow$ Q) et (R $\Longrightarrow$ S)) $\Longrightarrow$ ((P ou R) $\Longrightarrow$ (Q ou S))
6.35.1.	$\vdash$	((P $\Longrightarrow$ Q) et (P $\Longleftrightarrow$ R)) $\Longrightarrow$ (R $\Longrightarrow$ Q)
6.35.2.	$\vdash$	((P $\Longrightarrow$ Q) et (Q $\Longleftrightarrow$ R)) $\Longrightarrow$ (P $\Longrightarrow$ R)
6.36.1.	$\vdash$	P $\Longleftrightarrow$ P
6.37.1.	$\vdash$	(P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((non Q) $\Longleftrightarrow$ (non P))
6.37.2.	$\vdash$	(P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((non P) $\Longleftrightarrow$ (non Q))
6.38.1.	$\vdash$	(P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((P et R) $\Longleftrightarrow$ (Q et R))
6.38.2.	$\vdash$	(P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((P ou R) $\Longleftrightarrow$ (Q ou R))
6.39.1.	$\vdash$	(P et A_V) $\Longleftrightarrow$ P
6.40.1.	$\vdash$	(P ou A_F) $\Longleftrightarrow$ P

7. Utilisation des lois logiques.

8. Quelques autres lois logiques.

8.41.1. $\vdash$ ((P $\Longleftrightarrow$ Q) et (R $\Longleftrightarrow$ S)) $\Longrightarrow$ ((P et R) $\Longleftrightarrow$ (Q et S))

8.41.2. $\vdash$ ((P et non Q) ou (Q et non P)) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) et non(P et Q))

8.41.3. $\vdash$ P $\Longrightarrow$ ((P et Q) $\Longleftrightarrow$ Q)

8.41.4. $\vdash$ P $\Longrightarrow$ (Q $\Longrightarrow$ P)

8.41.5. $\vdash$ ((P et Q) $\Longrightarrow$ (P et R)) $\Longleftrightarrow$ (P $\Longrightarrow$ (Q $\Longrightarrow$ R))

8.41.6. $\vdash$ [P et ((non P) ou Q)] $\Longleftrightarrow$ (P et Q)

8.41.7. $\vdash$ (P et non(P et Q)) $\Longleftrightarrow$ (P et non Q)

8.41.8. $\vdash$ (non(P $\Longleftrightarrow$ Q)) $\Longleftrightarrow$ ((P et non Q) ou (Q et non P))

8.41.9. $\vdash$ (P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ (R $\Longrightarrow$ (P $\Longleftrightarrow$ Q))

8.41.10. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ (P $\Longrightarrow$ (P et Q))

8.41.11. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ (P $\Longleftrightarrow$ (P et Q))

8.41.12. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ ((R et non Q) $\Longrightarrow$ (R et non P))

8.41.13. $\vdash$ (P et non P) $\Longrightarrow$ Q

8.41.14. $\vdash$ (P $\Longleftrightarrow$ Q et P $\Longleftrightarrow$ R et Q $\Longleftrightarrow$ S) $\Longrightarrow$ ((P $\Longleftrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ (R $\Longleftrightarrow$ S)

8.41.15. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((P ou Q) $\Longleftrightarrow$ Q)

8.41.16. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ [(P ou(Q et non P)) $\Longleftrightarrow$ Q]

8.41.17. $\vdash$ ((P ou Q) et (P et Q)) $\Longleftrightarrow$ (P et Q)

8.41.18. $\vdash$ (P et non(Q et R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et non Q) ou (P et non R))

8.41.19. $\vdash$ (P et non(Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et non Q) et (P et non R))

8.41.20. $\vdash$ ((P $\Longrightarrow$ R) et (Q $\Longrightarrow$ R)) $\Longrightarrow$ ((P ou Q) $\Longrightarrow$ R)

8.41.21. $\vdash$ ((P et Q) et non(P et R)) $\Longleftrightarrow$ (P et (Q et non R))

8.41.22. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q et R $\Longrightarrow$ Q) $\Longrightarrow$ [(P et non R) $\Longleftrightarrow$ (P et(Q et non R))]

8.41.23. $\vdash$ (P et (Q et non R)) $\Longleftrightarrow$ ((P et Q) et non(P et R))

8.41.24. $\vdash$ (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((P et non Q) $\Longleftrightarrow$ (Q et non Q))

8.41.25. $\vdash$ ((P et Q) W (P et R)) $\Longleftrightarrow$ (P et (Q W R))

E X E R C I C E

E. 8.1.

En utilisant la méthode des tables de vérité, démontrer que les propositions répertoriées sous les numéros 8.41.1, 8.41.2, etc..., sont des lois logiques.

A P E R Ç U S U R L A M E T H O D E A X I O M A T I Q U E

9 - PRINCIPE DE LA METHODE AXIOMATIQUE

Dans l'introduction, nous avons indiqué la possibilité de construire une logique par une méthode axiomatique. Cette méthode comporte différentes étapes:

9.1. la donnée de symboles représentant, entre autres, des propositions indéterminées et des opérateurs logiques. Les définitions de ces opérateurs ne font plus intervenir les valeurs de vérité et ne sont plus résumées par des tables de vérité.

9.2. l'introduction de la notion "d'expressionsbien formées", que nous désignerons par le sigle EBF, et de celle "d'expressions vraies" que nous désignerons par le sigle EV.
Les EBF sont des expressions "autorisées", c'est à dire considérées comme ayant un sens dans la logique étudiée. Ce sont, d'une part, les symboles représentant les propositions et, d'autre part, les expressions construites à l'aide de ces symboles et de ceux qui représentent les opérateurs logiques par application de règles appelées règles de syntaxe.
On peut considérer que les EBF jouent, en axiomatique, le rôle des propositions composées dans le calcul des propositions.
Les EV sont des EBF qui sont considérées comme vraies dans la logique étudiée. Elles sont, soit données à priori, soit déduites. U désignant une EBF, si celle-ci est également une EV, nous la noterons $\vdash U$ ou T.
On peut envisager les EV comme jouant en axiomatique le rôle des lois logiques dans le calcul des propositions.
Pour abréger l'écriture des EBF, il est fréquent d'introduire, à l'aide de dèfinitions, des symboles supplémentaires tels que: $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, etc...

9.3. l'énumération d'un certain nombre d'EBF qui sont des EV à priori et que l'on appelle des "axiomes".

9.4. l'énoncé de règles de déduction permettant de prouver qu'une EBF est une EV, à partir des axiomes. Cette EV sera appelée théorème.

10 - ESQUISSE D'UNE CONSTRUCTION AXIOMATIQUE

10.1. Signes primitifs.

On se donne trois espèces de signes:

a) des lettres P, Q, R, etc... qui représentent des propositions indéterminées et jouent le rôle de variables. Nous les appellerons "variables propositionnelles".

b) les signes $\neg$, $\vee$, qui représentent des opérateurs logiques et jouent le rôle de constantes. $\neg$ se lit "non", et $\vee$ se lit "ou".

c) les deux parenthèses: (,).

10.2. Expressions bien formées: EBF.

a) Règles de syntaxe.

Les règles permettant d'obtenir une EBF sont les suivantes:

S1 : Une variable propositionnelle est une EBF.

S2 : Si A est une EBF, $\neg(A)$ est une EBF.

S3 : Si A, B, sont deux EBF, $(A)\vee(B)$ est une EBF.

S4 : Il n'existe pas d'EBF en dehors de celles obtenues par les règles précédentes.

b) Allègements d'écriture.

Lorsque il n'y a pas d'ambiguité, nous convenons d'alléger l'écriture en supprimant des paires de parenthèses. Par exemple, si A et B sont des EBF, $(B)\vee(\neg(A))$ se note plus simplement: $B\vee\neg A$.

Remarque: Lorsque une EBF comporte plusieurs paires de parenthèses, certaines peuvent être remplacées par des paires de crochets.

c) Exemples

1º A, B, étant des EBF, d'après S2 et la convention 10.2.b., $\neg A$ est une EBF. $B\vee\neg A$ est une EBF d'après S3 et la convention 10.2.b.

2º D'après la règle S2 et la convention 10.2.b., $\neg A$, $\neg B$, sont des EBF. D'après S3, $(\neg A)\vee(\neg B)$ est une EBF. Enfin, S2 permet d'affirmer que $\neg((\neg A) \vee (\neg B))$ est une EBF.

10.3. Axiomes.

Les EBF suivantes doivent être considérer comme des EV à priori.

AX1 : $\vdash [P \vee \neg(P \vee P)]$
AX2 : $\vdash [(P \vee Q) \vee (\neg P)]$
AX3 : $\vdash [(Q \vee P) \vee (\neg(P \vee Q))]$
AX4 : $\vdash [((Q \vee R) \vee (\neg(P \vee R))) \vee (\neg(Q \vee \neg P))]$

10.4. Règles de substitution.

Soit A une EBF et B une seconde EBF dans laquelle figure une variable propositionnelle P. Nous pouvons substituer A à P, mais ceci doit être effectué en chacune des occurrences de P dans B. Le résultat de cette substitution est une nouvelle EBF que nous désignerons par X. Cette substitution est régie par les conventions suivantes:

1º Si B est la variable propositionnelle P, alors X est l'EBF A.

2º Si Z est l'EBF obtenue en substituant A à P dans $\neg B$, alors Z est l'EBF $\neg X$.

3º Soit C une EBF dans laquelle figure la variable propositionnelle P, et Y l'EBF obtenue en substituant A à P dans C. Si U est l'EBF obtenue en substituant A à P dans $B \vee C$ alors U est l'EBF $X \vee Y$

4º Il n'existe pas d'EBF résultant de substitutions en dehors de celles obtenues par la règle précédente.

5º Si B est une EV, alors X est une nouvelle EV.

Dans tout ce qui suit, la règle de substitution sera désignée par le sigle RS.

Exemple.

Désignons par B l'EBF: $(\neg P) \vee ((\neg Q) \vee P)$. Substituons l'EBF A à P dans B. Nous obtenons:l'EBF X : $(\neg A) \vee ((\neg Q) \vee A)$.
B désigne l'EBF $\neg((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee P))$.
L'EBF $\neg X$ est alors: $\neg((\neg A) \vee ((\neg Q) \vee A))$.

10.5. Définitions.

Des symboles supplémentaires sont introduits à l'aide de définitions. Ils jouent le rôle d'abréviations.

A, B, étant des EBF, introduisons dès maintenant les définitions suivantes:

DEF 1 : $A \Rightarrow B$ représente l'EBF: $B \vee \neg A$; $A \Rightarrow B$ se lit: A implique B, et est appelée implication de premier membre A et de second membre B.

DEF 2 : $A \wedge B$ représente l'EBF $\neg((\neg A) \vee (\neg B))$. $A \wedge B$ se lit: A et B.

DEF 3 : $A \Leftrightarrow B$ représente l'EBF $\neg((\neg(B \vee \neg A)) \vee (\neg(A \vee \neg B)))$ ce qui peut encore s'écrire, en tenant compte de DEF 1 et de DEF 2: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. $A \Leftrightarrow B$ se lit: A est logiquement équivalent à B, et s'appelle équivalence logique de premier membre A et de second membre B.

Les signes $\Rightarrow$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, ne sont pas des signes primitifs. Les symboles $A \Rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \Leftrightarrow B$, ne seront utilisés que pour désigner sous forme abrégée les EBF qu'ils représentent. Lorsque, dans un assemblage, figure le symbole $A \Rightarrow B$, nous devons en fait considérer que dans cet assemblage, figure l'EBF $B \vee \neg A$. Il en résulte la règle suivante:

Si X est une EBF dans laquelle figure,une ou plusieurs fois, l'EBF $B \vee \neg A$, nous pouvons remplacer, à chaque instant, toutes ces EBF $B \vee \neg A$, ou certaines d'entre elles seulement, par l'abréviation $A \Rightarrow B$. Le nouvelle assemblage obtenu est encore l'EBF X. Le remplacement de $A \Rightarrow B$ par $B \vee \neg A$ obéit à la même règle.

On procède de la même manière avec les symboles $A \wedge B$, $A \Leftrightarrow B$.

Exemple:

Soit X l'EBF : $P \vee \neg(\neg((\neg P) \vee (\neg Q)))$. Cette EBF peut encore s'écrire: $P \vee \neg(P \wedge Q)$, soit encore, $(P \wedge Q) \Rightarrow P$.

10.6. Ecriture simplifiée des axiomes.

En tenant compte de DEF 1, DEF 2, DEF 3 les axiomes prennent la forme simplifiée suivante:

AX 1 : $\vdash [(P \vee P) \Rightarrow P]$

AX 2 : $\vdash [P \Rightarrow (P \vee Q)]$

AX 3 : $\vdash [(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)]$

AX 4 : $\vdash [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R))]$

Remarque:

Le symbole $\Longrightarrow$ n'intervient dans les axiomes qu'à titre d'abréviation.

10.7. Règle de détachement.

Soit A, B, deux EBF . Si $A \Longrightarrow B$ est une EV, et si A est une EV, alors B est une EV.
Dans tout ce qui suit, la règle de détachement sera désignée par le sigle RD.

10.8. Règles dérivées.

La règle de substitution et la règle de détachement constituent les règles de déduction.

De nouvelles EBF étant construites, les axiomes, les règles de déduction et les définitions, permettent de démontrer que certaines de ces EBF sont de nouvelles EV appelées théorèmes. Cependant, afin d'alléger les raisonnements, on applique d'autres règles de déduction appelées règles dérivées. Ces règles doivent d'abord être démontrées en utilisant ce qui précède. Elles seront répertoriées à l'aide de la lettre D suivie d'un numéro.

10.9. Convention.

Pour rendre la lecture plus aisée, dans tout ce qui suit, nous conviendrons d'écrire non A , A ou B , A et B , les symboles $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$.

Avec cette convention, les 4 axiomes du numéro 10.6 et les 3 définitions du numéro 10.5 deviennent:

AX 1 : $\vdash [(P \text{ ou } P) \Longrightarrow P]$
AX 2 : $\vdash [P \Longrightarrow (P \text{ ou } Q)]$
AX 3 : $\vdash [(P \text{ ou } Q) \Longrightarrow (Q \text{ ou } P)]$
AX 4 : $\vdash [(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((P \text{ ou } R) \Longrightarrow (Q \text{ ou } R))]$
DEF 1 : $A \Longrightarrow B$ représente l'EBF: B ou (non A)
DEF 2 : A et B représente l'EBF:non((non A)ou(non B))
DEF 3 : $A \Longleftrightarrow B$ représente l'EBF: $(A \Longrightarrow B)$ et $(B \Longrightarrow A)$.

10.10. Première règle dérivée.

Remplaçons P par Q, Q par R, R par non P , dans AX 4. Il vient:

10.10.1. $\vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((Q \text{ ou non } P) \Rightarrow (R \text{ ou non } P))$ d'après AX4,RS

Appliquons DEF 1 à 10.10.1,

10.10.2. $\vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

Remplaçons Q par B, R par C, P par A, dans 10.10.2. On obtient:

10.10.3. $\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ d'après 10.10.2. RS

10.10.3 étant une EV, si $B \Rightarrow C$ est une EV, $A \Rightarrow C$ est encore une EV selon RD.

Nous avons ainsi démontrer une première règle dérivée:

D1 : Si $A \Rightarrow B$ est une EV et si $B \Rightarrow C$ est une EV, alors $A \Rightarrow C$ est une EV.

10.11. Quelques propriétés du "ou".

a) A, B, étant deux EBF, remplaçons P par A et Q par B dans AX2. Il vient:

10.11.1. $\vdash [A \Rightarrow (A \text{ ou } B)]$ d'après AX2, RS.

Appliquons RD à 10.11.1; on obtient la règle dérivée suivante:

D2 : Si A est une EV, alors A ou B est une EV.

Remplaçons maintenant P par Q et Q par P dans AX2 et dans AX3:

10.11.2. $\vdash [Q \Rightarrow (Q \text{ ou } P)]$ d'après AX2, RS.

10.11.3. $\vdash [(Q \text{ ou } P) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$ d'après AX3, RS.

En utilisant D1, 10.11.2. et 10.11.3. donnent:

T1 $\vdash [Q \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$

Remplaçons Q par B et P par A dans T1:

10.11.4. $\vdash [B \Rightarrow (A \text{ ou } B)]$

Appliquons RD à 10.11.4., nous obtenons la règle dérivée suivante:

D3 : Si B est une EV, alors A ou B est une EV.

b) Remplaçons P par Q et Q par P dans AX3:

T2 : $\vdash [(Q \text{ ou } P) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)]$ d'après AX3,RS.

10.12. Cinq théorèmes faisant intervenir une seule variable propositionnelle.

Remplaçons Q par P dans AX2

10.12.1. $\vdash P \Rightarrow (P \text{ ou } P)$ d'après AX2,RS.

mais: $\vdash (P \text{ ou } P) \Rightarrow P$ AX1

10.12.1. et AX1 étant des EV, alors $P \Rightarrow P$ est une EV d'après D1. D'où:

T3 : $\vdash P \Rightarrow P$

Soit encore d'après DEF1:

T4 : $\vdash P \text{ ou } (\text{non } P)$

Remplaçons maintenant Q par non P dans AX3:

10.12.2. $\vdash [P \text{ ou } (\text{non } P)] \Rightarrow [(\text{non } P) \text{ ou } P]$ d'après AX3,RS.

Cette expression étant une EV et T4 étant une EV, (non P) ou P est aussi une EV d'après RD; d'où:

T5 : $\vdash [(\text{non } P) \text{ ou } P]$

Remplaçons P par non P dans T5:

10.12.3. $\vdash (\text{non}(\text{non } P)) \text{ ou } (\text{non } P)$ d'après T5,RS.

Soit encore d'après DEF1:

T6 : $\vdash P \Rightarrow [\text{non}(\text{non } P)]$

et aussi en remplaçant P par non P dans T6:

10.12.4. $\vdash [\text{non } P] \Rightarrow [\text{non}(\text{non}(\text{non } P))]$ d'après T6,RS.

Remplaçons maintenant P par non p , Q par non(non(non P))), R par P, dans AX4. On obtient :

10.12.5. $\vdash [\text{non } P \Rightarrow \text{non}(\text{non}(\text{non } P))] \Rightarrow [((\text{non } P) \text{ ou } P) \Rightarrow (\text{non}(\text{non}(\text{non } P))) \text{ ou } P]$

d'après AX4,RS.

D'où, en appliquant RD à 10.12.4 et 10.12.5 :

10.12.6. $\vdash [(\text{non } P) \text{ ou } P] \Rightarrow [(\text{non}(\text{non}(\text{non } P))) \text{ ou } P]$

RD appliquée à T5 et 10.12.6, permet d'écrire:

10.12.7 $\vdash [\text{non}(\text{non}(\text{non } P)) \text{ ou } P]$

D'autre part, remplaçons P par non(non(non P)) , Q par P ,dans AX3:

10.12.8. $\vdash \left[\text{non}(\text{non}(\text{non } P) \text{ ou } P\right] \Rightarrow \left[P \text{ ou non}(\text{non}(\text{non } P))\right]$

d'après AX3, RS.

En utilisant RD avec 10.12.7 et 10.12.8, il vient:

10.12.9. $\vdash$ P ou (non(non(non P)))

C'est à dire, d'après DEF1:

T7 : $\vdash \left[\text{non}(\text{non } P)\right] \Rightarrow P$

10.13. L'implication et sa contraposée.

a) Remplaçons P par Q, Q par non(non Q) , R par non P , dans AX4. Nous obtenons:

10.13.1 $\vdash \left[Q \Rightarrow \text{non}(\text{non } Q)\right] \Rightarrow \left[(Q \text{ ou } (\text{non } P)) \Rightarrow ((\text{non } (\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

d'après AX4, RS.

D'autre part,

10.13.2. $\vdash Q \Rightarrow \left[\text{non}(\text{non } Q)\right]$ d'après T6, RS.

Ces deux EV permettent d'écrire, en appliquant RD:

10.13.3. $\vdash \left[Q \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P)\right]$

Remplaçons P par non(non Q) et Q par non P dans AX3:

10.13.4. $\vdash \left[(\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } Q))\right]$

d'après AX3, RS.

En considérant 10.13.3 et 10.13.4 , nous pouvons appliquer la règle dérivée D1 et conclure:

10.13.5. $\vdash \left[Q \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } Q))\right]$

C'est à dire en tenant compte de DEF1:

T8 : $\vdash \left[P \Rightarrow Q\right] \Rightarrow \left[(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)\right]$

Rappelons que $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ est appelée implication contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$.

b) Remplaçons maintenant P par non(non Q) , R par non P dans AX4. On obtient:

10.13.6. $\vdash \left[(\text{non}(\text{non } Q)) \Rightarrow Q\right] \Rightarrow \left[((\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P) \Rightarrow (Q \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

De plus, d'après AX4, RS.

10.13.7. $\vdash \left[\text{non}(\text{non } Q)\right] \Rightarrow Q$ d'après T7, RS.

Ces deux EV permettent d'écrire, en appliquant RD :

10.13.8. $\vdash \left[(\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(Q \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

D'autre part, remplaçons P par non P , Q par non(non Q) dans AX3:

10.13.9. $\vdash \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } Q))\right] \Rightarrow \left[(\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P)\right]$ d'après AX3, RS.

En considérant 10.13.9, puis 10.13.8, nous pouvons alors utiliser la règle dérivée D1 et conclure:

10.13.10. $\vdash \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } Q))\right] \Rightarrow \left[Q \text{ ou } (\text{non } P)\right]$

C'est à dire en tenant compte de DEF1:

T9 : $\vdash \left[(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(P \Rightarrow Q)\right]$

10.14. La conjonction logique et .

a) Remplaçons P par non P dans AX1;

10.14.1. $\vdash \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[\text{non } P\right]$ d'après AX1, RS.

Remplaçons ensuite P par (non P) ou (non P) , Q par non P , dans T8. Il en résulte:

10.14.2. $\vdash \left[((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } P)) \Rightarrow (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(\text{non}(\text{non } P)) \Rightarrow (\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } P)))\right]$ d'après T8, RS.

En appliquant RD à 10.14.1 et à 10.14.2, on obtient:

10.14.3. $\vdash \left[\text{non}(\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

Considérons T6, puis 10.14.3; d'après la règle dérivée D1, nous pouvons écrire:

10.14.4. $\vdash P \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

C'est à dire en tenant compte de DEF2:

T10 : $\vdash P \Rightarrow \left[P \text{ et } P\right]$

b) Remplaçons Q par non Q dans AX2;

10.14.5. $\vdash P \Rightarrow \left[P \text{ ou } (\text{non } Q)\right]$ d'après AX2, RS.

C'est à dire, avec DEF1:

T11 : $\vdash P \Rightarrow \left[Q \Rightarrow P\right]$

Remplaçons ensuite P par Q et Q par P dans T8;

10.14.6. $\vdash \left[Q \Rightarrow P\right] \Rightarrow \left[(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)\right]$ d'après T8, RS.

T11 puis 10.14.6, conduisent, par application de D1, à:

T12 : $\vdash P \Rightarrow \left[(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)\right]$

c) Remplaçons P par non P , Q par non Q , R par non Q dans AX4;

10.14.7. $\vdash \left[(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)\right] \Rightarrow \left[((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } Q))\right]$

d'après AX4, RS.

T12 puis 10.14.7 donnent, en utilisant D1:

10.14.8. $\vdash P \Rightarrow \left[((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } Q))\right]$

Remplaçons P par (non P) ou (non Q) et Q par (non Q) ou (non Q). dans T8;

10.14.9. $\vdash \left[((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } Q))\right] \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow \text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))\right]$

d'après T8, RS.

10.14.8 puis 10.14.9, donnent , toujours en appliquant R1,

10.14.10. $\vdash P \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow \text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))\right]$

C'est à dire en tenant compte de DEF2:

T13 : $\vdash P \Rightarrow \left[(Q \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)\right]$

d) Soit A, B, deux EBF. Remplaçons P par B dans T10;

10.14.11. $\vdash B \Rightarrow \left[B \text{ et } B\right]$ d'après T10, RS.

Remplaçons P par A et Q par B dans T13;

10.14.12 $\vdash A \Rightarrow \left[(B \text{ et } B) \Rightarrow (A \text{ et } B)\right]$ d'après T13, RS.

Si B est une EV, 10.14.11 étant une EV, B et B est alors une EV d'après RD. Si en outre A est une EV, 10.14.12 étant une EV, (B et B) $\Rightarrow$ (A et B) est encore une EV d'après RD. Mais B et B étant une EV, la même règle RD permet d'affirmer que A et B est une EV. Ainsi, nous venons de démontrer une nouvelle règle dérivée:

D4 : Si A est une EV et si B est une EV, alors A et B est une EV

e) Remplaçons P par non Q , Q par non P , dans AX3;

10.14.13. $\vdash \left[(\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P)\right] \Rightarrow \left[(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)\right]$

d'après AX3, RS.

Remplaçons ensuite P par (non Q) ou (non P) , Q par (non P) ou (non Q) dans T8; il vient:

10.14.14. $\vdash \left[((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P)) \Rightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))\right] \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow \text{non}((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P))\right]$ d'après T8, RS.

RD, appliquée à 10.14.13 et 10.14.14, conduit à:

10.14.15. $\vdash \left[\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))\right] \Rightarrow \left[\text{non}((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P))\right]$

Soit, en tenant compte de DEF2:

T14 : $\vdash \quad [P \text{ et } Q] \Rightarrow [Q \text{ et } P]$

En remplaçant, dans T14, Q par P et P par Q, nous obtenons:

T15 : $\vdash \quad [Q \text{ et } P] \Rightarrow [P \text{ et } Q]$

f) Remplaçons P par non P , Q par non Q , dans AX2;

10.14.16. $\vdash [\text{non } P] \Rightarrow [(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)]$ d'après AX2, RS.

Remplaçons ensuite P par non P , Q par (non P) ou (non Q), dans T8;

10.14.17. $\vdash [(\text{non } P) \Rightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))] \Rightarrow [\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \Rightarrow \text{non}(\text{non} P)]$ d'après T8, RS.

En appliquant RD à 10.14.16 et 10.14.17, nous sommes conduits à:

10.14.18. $\vdash [\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))] \Rightarrow [\text{non}(\text{non } P)]$

Soit en tenant compte de DEF2:

10.14.19. $\vdash [P \text{ et } Q] \Rightarrow [\text{non}(\text{non } P)]$

Cette EV, puis T6, donnent, par application de D1:

T16 : $\vdash \quad [P \text{ et } Q] \Rightarrow P$

Remplaçons P par Q, Q par P, dans T16:

10.14.20. $\vdash [Q \text{ et } P] \Rightarrow Q$

T14 puis 10.14.20 donnent, d'après D1,

T17 : $\vdash \quad [P \text{ et } Q] \Rightarrow Q$

g) A, B, étant deux EBF, remplaçons P par A, Q par B, dans T16 et T17;

10.14.21. $\vdash [A \text{ et } B] \Rightarrow A$ d'après T16, RS.

10.14.22. $\vdash [A \text{ et } B] \Rightarrow B$ d'après T17, RS.

Si A et B est une EV,

10.14.21 étant une EV, alors A est une EV selon RD;

10.14.22 étant une EV, alors B est une EV selon RD.

En résumé, nous avons la règle dérivée:

D5 : Si A et B est une EV, alors A, ainsi que B, sont des EV.

10.15. Quelques règles dérivées relatives à l'implication et à l'équivalence logique.

Soit A, B, deux EBF.

a) $A \Longleftrightarrow B$ est, d'après DEF3, l'EBF $(A \Longrightarrow B)$ et $(B \Longrightarrow A)$. Si $A \Longrightarrow B$ est une EV et si $B \Longrightarrow A$ est une EV, d'après D4, $(A \Longrightarrow B)$ et $(B \Longrightarrow A)$ est une EV, c'est à dire, $A \Longleftrightarrow B$ est une EV. D'où la règle dérivée:

D6 : Si $A \Longrightarrow B$ est une EV et si $B \Longrightarrow A$ est une EV, alors $A \Longleftrightarrow B$ est une EV.

b) $P \Longrightarrow P$ étant une EV d'après T3, $(P \Longrightarrow P)$ et $(P \Longrightarrow P)$ est une EV d'après D4; soit en tenant compte de DEF3: $P \Longleftrightarrow P$ est une EV.

T18 : $\vdash \quad P \Longleftrightarrow P$

c) Remplaçons P par B ou (non A) dans T18;

10.15.1. $\vdash$ [B ou (non A)] $\Longleftrightarrow$ [B ou (non A)] d'après T18, RS.

Soit d'après DEF1:

T19 : $\vdash$ $[A \Longrightarrow B] \Longleftrightarrow$ [B ou (non A)]

Remplaçons maintenant P par non((non A) ou (non B)) dans T18;

10.15.2. $\vdash$ [non((non A) ou (non B))] $\Longleftrightarrow$ [non((non A) ou (non B))] d'après T18, RS.

Soit, en utilisant DEF2:

T20 : $\vdash$ [A et B] $\Longleftrightarrow$ [non((non A) ou (non B))]

En remplaçant P par $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ dans T18, nous obtenons:

10.15.3. $\vdash$ [$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$] $\Longleftrightarrow$ [$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$] d'après T18, RS.

Soit, en tenant compte de DEF3:

T21 : $\vdash$ $[P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow$ [$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$]

d) Remplaçons P par Q , Q par P, dans T11;

10.15.4. $\vdash \quad Q \Rightarrow [P \Rightarrow Q]$ d'après T11, RS.

Remplaçons ensuite P par A, Q par B, dans T11 et 10.15.4:

10.15.5. $\vdash \quad A \Rightarrow [B \Rightarrow A]$ d'après T11, RS.

10.15.6. $\vdash \quad B \Rightarrow [A \Rightarrow B]$ d'après 10.15.4, RS.

Si B est une EV, 10.15.6 étant une EV, RD permet d'énoncer la règle dérivée suivante:

D7 : Si B est une EV, alors $A \Rightarrow B$, est une EV.

Si, en outre, A est une EV, 10.15.5. étant une EV, d'après RD, $B \Rightarrow A$ est une EV. En résumé, si B, A, sont deux EV, alors $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ sont des EV. En définitive, tenant compte de DEF3, nous pouvons affirmer que $A \Leftrightarrow B$ est une EV. D'où la règle dérivée:

D8 : Si A est une EV et si B est une EV, alors $A \Leftrightarrow B$ est une EV.

e) Si $A \Leftrightarrow B$ est une EV, c'est à dire, en tenant compte de DEF3, si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ est une EV, alors, d'après D5, $A \Rightarrow B$ ainsi que $B \Rightarrow A$ sont des EV.

En particulier, $A \Leftrightarrow B$ étant une EV, si A est en outre une EV, B est aussi une EV selon RD. NOus obtenons la règle dérivée:

D9 : Si $A \Leftrightarrow B$ est une EV et Si A est une EV, alors B est une EV.

10.16. Quelques équivalences logiques remarquables.

En appliquant la règle dérivée D6 à T6 et T7, on obtient:

T22 : $\vdash \quad P \Leftrightarrow [\text{non}(\text{non } P)]$

En appliquant la règle dérivée D6 à T8 et T9, on obtient:

T23 : $\vdash \quad [P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non} P)]$

En appliquant la règle dérivée D6 à AX3 et T2, on obtient:

T24 : $\vdash \quad [P \text{ ou } Q] \Leftrightarrow [Q \text{ ou } P]$

En appliquant la règle dérivée D6 à T14 et T15, on obtient:

T25 : $\vdash \quad [P \text{ et } Q] \Longleftrightarrow [Q \text{ et } P]$

10.17. Commutativité de l'équivalence logique.

Remplaçons P par $P \Longrightarrow Q$, Q par $Q \Longrightarrow P$, dans T25;

10.17.1. $\vdash [(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)] \Longleftrightarrow [(Q \Longrightarrow P) \text{ et } (P \Longrightarrow Q)]$

d'après T25, RS.

C'est à dire en tenant compte de DEF3:

T26 : $\vdash \quad [P \Longleftrightarrow Q] \Longleftrightarrow [Q \Longleftrightarrow P]$

10.18. Transitivité de l'équivalence logique.

Dans ce qui suit, nous supposons que $A \Longleftrightarrow B$, $B \Longleftrightarrow C$, sont deux EV.

a) $A \Longleftrightarrow B$ étant une EV, en tenant de DEF3, nous pouvons affirmer que $(A \Longrightarrow B)$et $(B \Longrightarrow A)$ est une EV.
En appliquant D5, il vient:
$A \Longrightarrow B$ ainsi que $B \Longrightarrow A$, sont deux EV.

b) $B \Longleftrightarrow C$ étant une EV, en tenant compte de DEF3, nous obtenons:

$(B \Longrightarrow C)$ et $(C \Longrightarrow B)$ est une EV.

Soit d'après D5,
$B \Longrightarrow C$ ainsi que $C \Longrightarrow B$, sont des EV.

c) $A \Longrightarrow B$, $B \Longrightarrow C$, sont deux EV; D1 nous autorise à énoncer: $A \Longrightarrow C$ est alors une EV.
$C \Longrightarrow B$, $B \Longrightarrow A$ sont deux EV; d'après D1, nous pouvons donc dire que $C \Longrightarrow A$ est une EV.

d) $A \Longrightarrow C$, $C \Longrightarrow A$, étant deux EV, d'après D4, $(A \Longrightarrow C)$ et $(C \Longrightarrow A)$ est alors une EV. Donc, d'après DEF3, $A \Longleftrightarrow C$ est une EV.
Nous pouvons maintenant énoncer la règle dérivée suivante:

D10 : Si $A \Longleftrightarrow B$ est une EV, et si $B \Longleftrightarrow C$ est une EV, alors $A \Longleftrightarrow C$ est une EV.

10.19. Conclusion.

Les paragraphes 9 et 10 ont permis au lecteur de prendre contact avec la méthode axiomatique. Il ne nous semble pas indispensable de poursuivre la recherche systématique de nouveaux théorèmes et de nouvelles règles dérivées.

Le lecteur qui souhaiterait approfondir la méthode axiomatique pourra se reporter à un ouvrage spécialisé.

11 - AXIOMATIQUE TABLEAU SYNOPTIQUE

10.1. Signes primitifs

Variables: P, Q, R,...

Constantes: non, ou.

Parenthèses.

10.2. EBF

S1 : Une variable propositionnelle est une EBF

S2 : Si A est une EBF, non A est une EBF.

S3 : Si A, B, sont deux EBF, A ou B est une EBF.

S4 : Il n'existe pas d'EBF en dehors de celles obtenues par les règles précédentes.

Allègements d'écriture.

10.3. et 10.6. et 10.9. Axiomes

AX1 : $\vdash$ (P ou P) $\Rightarrow$ P

AX2 : $\vdash$ P $\Rightarrow$ (P ou Q)

AX3 : $\vdash$ (P ou Q) $\Rightarrow$ (Q ou P)

AX4 : $\vdash$ (P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ ((P ou R) $\Rightarrow$ (Q ou R))

10.4. Règles de substitution

Soit A une EBF et B une seconde EBF dans laquelle figure une variable propositionnelle P. Nous pouvons substituer A à P, mais ceci doit être effectué en chacune des occurrences de P dans B. Le résultat de cette substitution est une nouvelle EBF que nous désignerons par X. Cette substitution est régie par les conventions suivantes:

1º Si B est la variable propositionnelle P, alors X est l'EBF A.

2º Si Z est l'EBF obtenue en substituant A à P dans $\neg$B, alors Z est l'EBF $\neg$X.

3º Soit C une EBF dans laquelle figure la variable propositionnelle P, et Y l'EBF obtenue en substituant A à P dans C. Si U est l'EBF obtenue en substituant A à P dans $B \vee C$, alors U est l'EBF $X \vee Y$.

4º Il n'existe pas d'EBF résultant de substitutions en dehors de celles obtenues par la règle précédente.

5º Si B est une EV, alors X est une nouvelle EV.

10.5. et 10.9. Définitions.

DEF1 : $A \Rightarrow B$ représente l'EBF B ou (non A)

DEF2 : A et B représente l'EBF non((non A) ou (non B))

DEF3 : $A \Leftrightarrow B$ représente l'EBF $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$

10.7. Règle de détachement.

Soit A, B, deux EBF; si $A \Rightarrow B$ est une EV et si A est une EV, alors B est une EV.

Règles dérivées.

10.10. D1. Si $A \Rightarrow B$ est une EV et si $B \Rightarrow C$ est une EV, alors $A \Rightarrow C$ est une EV.

10.11. D2. Si A est une EV, alors A ou B est une EV.

10.11. D3. Si B est une EV, alors A ou B est une EV.

10.14. D4. Si A est une EV et si B est une EV, alors A et B est une EV.

10.14. D5. Si A et B est une EV, alors A ainsi que B sont des EV.

10.15. D6. Si $A \Rightarrow B$ est une EV et si $B \Rightarrow A$ est une EV, alors $A \Leftrightarrow B$ est une EV.

10.15. D7. Si B est une EV, alors $A \Rightarrow B$ est une EV.

10.15. D8. Si A est une EV et si B est une EV, alors $A \Leftrightarrow B$ est une EV.

10.15. D9. Si $A \Leftrightarrow B$ est une EV et si A est une EV, alors B est une EV.

10.18. D10. Si $A \Leftrightarrow B$ est une EV et si $B \Leftrightarrow C$ est une EV, alors $A \Leftrightarrow C$ est une EV.

Théorèmes.

10.11. T1 $\vdash$ $Q \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$

10.11. T2 $\vdash$ $(Q \text{ ou } P) \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$

10.12. T3 $\vdash$ $P \Rightarrow P$

10.12. T4 $\vdash$ P ou (non P)

10.12. T5 $\vdash$ (non P) ou P

10.12. T6 $\vdash$ $P \Rightarrow (\text{non}(\text{non } P))$

10.12. T7	$\vdash$	non(non P) $\Rightarrow$ P
10.13. T8	$\vdash$	(P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ ((non Q) $\Rightarrow$ (non P))
10.13. T9	$\vdash$	((non Q) $\Rightarrow$ (non P)) $\Rightarrow$ (P $\Rightarrow$ Q)
10.14. T10	$\vdash$	P $\Rightarrow$ (P et P)
10.14. T11	$\vdash$	P $\Rightarrow$ (Q $\Rightarrow$ P)
10.14. T12	$\vdash$	P $\Rightarrow$ ((non P) $\Rightarrow$ (non Q))
10.14. T13	$\vdash$	P $\Rightarrow$ ((Q et Q) $\Rightarrow$ (P et Q))
10.14. T14	$\vdash$	(P et Q) $\Rightarrow$ (Q et P)
10.14 T15	$\vdash$	(Q et P) $\Rightarrow$ (P et Q)
10.14. T16	$\vdash$	(P et Q) $\Rightarrow$ P
10.14. T17	$\vdash$	(P et Q) $\Rightarrow$ Q
10.15. T18	$\vdash$	P $\Leftrightarrow$ P
10.15. T19	$\vdash$	(A $\Rightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ (B ou (non A))
10.15. T20	$\vdash$	(A et B) $\Leftrightarrow$ (non((non A) ou (non B)))
10.15. T21	$\vdash$	(P $\Leftrightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ ((P $\Rightarrow$ Q) et (Q $\Rightarrow$ P))
10.16. T22	$\vdash$	P $\Leftrightarrow$ (non(non P))
10.16. T23	$\vdash$	(P $\Rightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ ((non Q) $\Rightarrow$ (non P))
10.16. T24	$\vdash$	(P ou Q) $\Leftrightarrow$ (Q ou P)
10.16. T25	$\vdash$	(P et Q) $\Leftrightarrow$ (Q et P)
10.17. T26	$\vdash$	(P $\Leftrightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ (Q $\Leftrightarrow$ P)

LES OPERATEURS DE SHEFFER

1 2 - L ' I N C O M P A T I B I L I T E E T L E R E J E T

12.1. Réduction du nombre des opérateurs logiques primitifs.

Pour construire une logique par une méthode axiomatique, on donne souvent deux signes au moins, représentant des opérateurs logiques primitifs (cf. §10.1.b). Des symboles supplémentaires sont ensuite introduits à l'aide de définitions (revoir à ce sujet le paragraphe 10.5).

Il est toutefois possible de construire une logique par une méthode axiomatique en se donnant des lettres, P, Q, R, etc..., les parenthèses (,) et un seul signe représentant un opérateur logique binaire primitif. Dans ce cas, il est démontré qu'il n'existe que deux possibilités pour choisir cet opérateur; on peut adopter:

soit l'opérateur servant à exprimer l'incompatibilité de deux propositions;

soit l'opérateur servant à exprimer le rejet de deux propositions.

Ces deux opérateurs sont quelquefois appelés "opérateurs de Sheffer". Nous préciserons d'abord la signification de ces deux opérateurs en définissant l'incompatibilité, puis le rejet de deux propositions selon la méthode adoptée au chapitre 5. Ensuite, en utilisant les tables de vérité, nous montrerons qu'il est raisonnable de définir la négation d'une proposition, la disjonction logique, la conjonction logique, l'implication, l'équivalence logique de deux propositions à l'aide du seul opérateur logique correspondant à l'incompatibilité de deux propositions.

INCOMPATIBILITE DE DEUX PROPOSITIONS

12.2. Définition.

L'incompatibilité de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque A étant vraie, B l'est également, et qui est vraie dans tous les autres cas.

12.3. Notations.

L'incompatibilité des deux propositions A, B, sera notée $A|B$. P, Q, étant deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que $P|Q$ est l'incompatibilité de P, Q.

12.4. Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 12.2.

P	Q	P|Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Dans le tableau systèmatique associé aux opérateurs logiques binaires (cf. § 5.37), nous reconnaissant en colonne H' la table de vérité associée à la proposition $P|Q$; c'est aussi la table de vérité associée à la proposition non(P et Q).

REJET DE DEUX PROPOSITIONS

12.5. Définition.

Le rejet de deux propositions déterminées A, B, est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque A étant fausse, B l'est également, et qui est fausse dans tous les autres cas.

12.6. Notations.

Le rejet de deux propositions A, B, sera noté $A \downarrow B$ que nous lirons "ni A, ni B". P, Q, étant deux propositions indéterminées, par abus de langage, nous dirons que $P \downarrow Q$ est le rejet de P, Q.

12.7. Table de vérité.

La table de vérité suivante résume la définition 12.5.

P	Q	$P \downarrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dans le tableau systématique (cf. §5.37), nous reconnaissons en colonne B' la table de vérité associée à la proposition $P \downarrow Q$; c'est aussi la table de vérité associée à la proposition non(P ou Q).

DEFINITIONS DES OPERATEURS LOGIQUES UNAIRES

12.8. Négation d'une proposition.

P étant une proposition indéterminée, considérons la proposition composée (non P) $\Longleftrightarrow$ (P|P) et construisons le tableau suivant:

P	non P	P	P|P	(non P) $\Longleftrightarrow$ (P|P)
V	F	V	F	V
F	V	F	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

12.8.1. $\vdash \quad [(\text{non } P) \Longleftrightarrow (P|P)]$

L'opérateur logique correspondant à l'incompatibilité étant le seul opérateur logique primitif donné, dans une méthode axiomatique, ce qui précède justifie le choix de la définition suivante:

$\neg A$ représente l'EBF $A|A$.

12.9. Les quatre opérateurs logiques unaires.

A la table de vérité correspondant à une proposition indéterminée P, nous pouvons associer les tables de vérité correspondant aux propositions:

$$P|(P|P) \; ; \; (P|P)|(P|P) \; ; \; P|P \; ; \; (P|(P|P))|(P|(P|P)) \; .$$

Il en résulte le tableau suivant:

P	P|(P|P)	(P|P)|(P|P)	P|P	(P|(P|P))|(P|(P|P))
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F
	I	II	III	IV

Nous reconnaissons dans les colonnes I, II, III, IV, de ce tableau les colonnes I, II, III, IV, du tableau construit au paragraphe 4.7

DEFINITIONS DES OPERATEURS LOGIQUES BINAIRES

12.10. Disjonction logique de deux propositions.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons la proposition composée; $(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow ((P|P)|(Q|Q))$ et construisons le tableau suivant:

P	Q	P ou Q	P|P	Q|Q	(P|P)|(Q|Q)	(P ou Q) ⟺ ((P|P)|(Q|Q))
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Nous en déduisons la loi logique:

12.10.1. $\vdash \left[(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow ((P|P)|(Q|Q))\right]$

L'opérateur logique correspondant à l'incompatibilité étant le seul opérateur logique primitif donné dans une méthode axiomatique, ce qui précède justifie le choix de la définition suivante:

$A \vee B$ représsnte l'EBF $(A|A)|(B|B)$

12.11. Conjonction logique de deux propositions.

P, Q, étant deux propositions indéterminées, construisons le tableau associé à la proposition:

$$(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow ((P|Q)|(P|Q))$$

P	Q	P et Q	P|Q	(P|Q)|(P|Q)	(P et Q) ⟺ ((P|Q)|(P|Q))
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	V

Nous en déduisons:

12.11.1. $\vdash \quad (P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow ((P|Q)|(P|Q))$

Ce qui précède justifie la définition suivante dans une méthode axiomatique basée sur l'incompatibilité:

$A \wedge B$ représente l'EBF $(A|B)|(A|B)$

12.12. Implication

P, Q, étant deux propositions indéterminées, considérons la proposition composée:

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P|(Q|Q))$$

et construisons le tableau suivant:

P	Q	P ⟹ Q	Q|Q	P|(Q|Q)	(P ⟹ Q) ⟺ (P|(Q|Q))
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Nous en déduisons:

12.12.1. $\vdash \quad (P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P|(Q|Q))$

Dans une méthode axiomatique basée sur l'incompatibilité, ce qui précède justifie la définition suivante:

$A \Longrightarrow B$ représente l'EBF $A|(B|B)$

12.13. Equivalence logique

P, Q, étant deux propositions indéterminées, construisons le tableau associé à la proposition P':

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P|Q)|((P|P)|(Q|Q)))$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P\|Q$	$P\|P$	$Q\|Q$	$(P\|P)\|(Q\|Q)$	$(P\|Q)\|((P\|P)\|(Q\|Q))$	P'
V	V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V

Nous en déduisons la loi logique:

12.13.1. $\vdash \quad (P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P|Q)|((P|P)|(Q|Q)))$

Si une méthode axiomatique est basée sur l'incompatibilité, la définition suivante est donc justifiée:

$A \Longleftrightarrow B$ représente l'EBF $(A|B)|((A|A)|(B|B))$

12.14. Conclusion.

Les paragraphes précédents montrent qu'il est possible de définir tous les opérateurs logiques unaires et les principaux opérateurs logiques binaires, à l'aide de l'opérateur correspondant à l'incompatibilité.

En se reportant au tableau systématique du paragraphe 5.37 , on

réalise alors la possibilité de définir tous les opérateurs logique binaires à l'aide du seul opérateur associé à l'incompatibilité de deux propositions.
Ce résultat a une grande importance sur le plan théorique, mais en pratique cela conduit à de sérieuses difficultés d'écriture et de langage.

E X E R C I C E S

E.12.1.

Exprimer à l'aide des opérateurs logiques définis aux chapitres 4 et 5 les propositions suçvantes:

$(P|P)|(P|P)$; $Q|(Q|Q)$; $Q|(P|Q)$; $(P|P)|(P|Q)$;
$(Q|Q)|(Q|P)$

E.12.2.

Exprimer à l'aide de l'opérateur associé à l'incompatibilité de deux propositions, les propositions répertoriées sous les numéros 6.25.1, 6.25.2, 6.25.3, 6.26.1, 6.28.1, 6.28.2, 6.28.3.

L'EGALITE

13 - L'EGALITE

a désignant un objet et b désignant un objet, il est nécessaire de pouvoir exprimer que a, b, désignent le même objet. Pour ce faire, nous introduirons une relation fondamentale en mathématique, appelée relation égalité.

13.1. Définition.

$a = b$ représente la relation d'égalité existant entre l'objet désigné par a et celui désigné par b; cette relation exprime que a, b, désignent le même objet.

$a = b$ se lit: "a est égal à b" ou "a égale b".

a constitue le premier membre de l'égalité, b, en constitue le second membre.

13.2. Propriétés.

La relation d'égalité obéit aux axiomes suivants:

a) Axiome de réflèxivité: quel que soit l'objet désigné par a, la proposition $a = a$ est vraie.

b) Axiome de symétrie: quels que soient les objets désignés par a, b, la proposition $(a = b) \Longleftrightarrow (b = a)$ est vraie.

c) Axiome de transitivité: quels que soient les objets désignés par a, b, c, la proposition
$$((a = b) \text{ et } (b = c)) \Longrightarrow (a = c)$$
est vraie.

d) Axiome de remplacement: quelle que soit la proposition $R(a)$, si $a = b$, alors les propositions $R(a)$ et $R(b)$ ont même valeur de vérité:
$$(a = b) \Longrightarrow (R(a) \Longleftrightarrow R(b))$$

Exemple.

x désignant un entier naturel, nous considérons la fonction propositionnelle: $x < 5$.

Remplaçons x par 4, nous obtenons la proposition vraie $4 < 5$. Comme $4 = 2.2$,
$$(4 = 2.2) \Longrightarrow (4 < 5 \Longleftrightarrow 2.2 < 5)$$
Remplaçons x par 7, nous obtenons la proposition fausse $7 < 5$.

Nous avons $7 = 4 + 3$, donc:

$$(7 = 4 + 3) \Rightarrow ((7 < 5) \Leftrightarrow (4 + 3 < 5))$$

13.3. Négation de l'égalité.

La relation (non(a = b)) exprime que a, b, ne désignent pas le même objet; (non(a = b)) se note $a \neq b$ et se lit: "a est différent de b".

N O T I O N S   S U R
L E   C A L C U L   D E S   P R E D I C A T S

14 - INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous n'avons considéré que des propositions et de ce fait, nous avons donné des résultats concernant seulement le calcul des propositions.
En mathématique , ce calcul des propositions s'avère insuffisant puisque, pratiquement, il est souvent fait usage de fonctions propositionnelles. Il nous semble donc nécessaire d'introduire quelques notions se rattachant à ces fonctions propositionnelles et d'énoncer quelques résultats concernant le calcul des prédicats.

Afin d'atteindre une meilleure compréhension, nous avons cru devoir nous livrer, dans le chapitre 15, à une approche des notions suivantes:

notion d'analyse des fonctions propositionnelles;

notion de prédicat;

Pour faire apparaître le prédicat, nous avons utilisé la méthode des abstracteurs. Il nous a semblé alors naturel d'introduire les quantificateurs à partir des prédicats. Nous nous sommes d'abord placés dans le cas d'une seule variable pour objet, puis dans le cas de deux variables. La généralisation ne présente plus alors de difficultés majeures.

Bien qu'il existe des constructions axiomatiques du calcul des prédicats, nous nous contenterons d'indiquer, dans le chapitre 16, un certain nombre de conventions et de résultats intervenant dans un tel calcul. Cependant, nous avons tenu à introduire les notions d'expressions bien formées et d'expressions vraies, et à préciser des règles permettant:

1º) de dégager, parmi certains assemblages contenant des fonctions propositionnelles, ceux qui ont un sens;

2º) de construire de nouvelles expressions vraies.

Enfin, après avoir montré sur quelques exemples comment les notions précédentes peuvent être utilisées, nous indiquerons quelques expressions vraies pouvant être employées par la suite, sans prétendre en donner une liste exhaustive.

Il ne nous a pas semblé utile d'aborder le problème de la "décision". Signalons, à ce propos, qu'il existe, dans le cas où les fonctions propositionnelles comportent une seule variable, des méthodes de décision permettant de reconnaître si une EBF est ou n'est pas une EV. Parmi ces méthodes, signalons celle des tableaux sémantiques de BETH. Indiquons, pour conclure, que CHURCH a démontré en 1936 la non exitence d'une méthode uniforme permettant de décider si une expression quelconque est ou n'est pas une loi logique: la logique faisant intervenir deux objets au moins avec des quantificateurs ne peut pas avoir de méthode générale de décision.

15 A N A L Y S E D E S F O N C T I O N S P R O P O S I T I O N N E L L E S

FONCTIONS PROPOSITIONNELLES A UNE SEULE VARIABLE

15.1. Les prédicats monadiques.

Soit la proposition P:"3 est un nombre premier". Dans cette proposition vraie, nous pouvons distinguer deux parties:

a) "3" : ce symbole désigne un objet déterminé;

b) ce que l'on affirme de cet objet: "est un nombre premier"; cette deuxième partie s'appelle un prédicat.

Nous venons d'effectuer une analyse de la proposition P.

Considérons maintenant la fonction propositionnelle A(x) : " x est un nombre premier". Dans cette fonction propositionnelle, qui n'a pas de valeur de vérité, nous pouvons encore distinguer deux parties:

a) "x" : ce symbole désigne un objet indéterminé;

b) ce que l'on affirme de cet objet : "est un nombre premier"; cette dernière partie s'appelle toujours un prédicat.

En faisant apparaître dans A(x) la variable pour objet x, d'une part, et le prédicat, que l'on peut désigner par A, d'autre part, nous venons d'effectuer l'analyse de la fonction propositionnelle A(x).

Dans la proposition P et la fonction propositionnelle A(x), l'analyse nous conduit au même prédicat A; les notations P et A(3) désignent, de ce fait, la même proposition. Ce prédicat A ne s'appliquant qu'à un objet déterminé ou à une seule variable pour objet, s'appelle prédicat monadique.

Un prédicat monadique donne naissance à une fonction propositionnelle à une variable lorsqu'on l'applique à une seule variable pour objet. En remplaçant cette variable par un objet déterminé, dans cette fonction propositionnelle, on obtient alors une proposition.

En résumé, analyser une fonction propositionnelle à une seule variable, c'est séparer le prédicat monadique (représenté par les symboles A, B, C,...) et la variable pour objet (représentée par x, y, z,...).

15.2. Les abstracteurs.

Considérons la fonction propositionnelle $A(x)$:

15.2.1. "x est premier et x est impair"

Nous pouvons l'analyser de la façon suivante:

la variable est: x

le prédicat est : "est premier et impair".

Bien que figurant deux fois, la lettre x désigne le même objet et, de ce fait, $A(x)$ est une fonction propositionnelle à une seule variable.

Remarquons que le prédicat précédent ne s'obtient pas en supprimant, purement et simplement, la lettre x dans 15.2.1.

Il existe un procédé automatique pour faire apparaître un prédicat à partir d'une fonction propositionnelle à une variable: c'est la méthode des abstracteurs utilisée par le logicien Dopp. Elle consiste à introduire un nouveau symbole constitué par la variable d'objet surmontée d'un accent circonflexe et appelé abstracteur.

Par exemple, le prédicat relatif à 15.2.1, se notera:

$$\hat{x}A(x)$$

Cette méthode permet la représentation de prédicats analysés.

Si nous considérons les fonctions propositionnelles:

$B(x)$: "x est premier"

$C(x)$: "x est impair"

$A(x)$ peut s'écrire : "$B(x)$ et $C(x)$".(Voir § 16.2.56)

En appliquant à cette dernière fonction propositionnelle la méthode des abstracteurs, nous obtenons le prédicat :

$\hat{x}(B(x)$ et $C(x))$

Il apparaît comme la conjonction des prédicats B, C : il exprime la propriété que devrait posséder un objet a, pour que en remplaçant x par a dans "$B(x)$ et $C(x)$", on obtienne la proposition vraie : "$B(a)$ et $C(a)$".

A partir des prédicats monadiques, on peut construire des fonctions propositionnelles à une variable; il suffit pour cela de faire suivre le prédicat d'une variable pour objet.

Par exemple, le prédicat $\hat{x}A(x)$ ci-dessus peut nous donner la fonction propositionnelle $(\hat{x}A(x))x$ qui, dans ce cas, n'est autre que $A(x)$. Le même prédicat peut également nous conduire à la fonction propositionnelle $(\hat{x}A(x))y$ qui n'est autre que $A(y)$

c'est à dire:

"y est premier et y est impair".

En tenant compte du fait que le prédicat A apparaît comme la conjonction des prédicats A,B, cette dernière fonction propositionnelle peut encore se noter: $(\hat{x}(B(x)$ et $C(x)))y$ qui n'est autre que : $B(y)$ et $C(y)$.

Nous pouvons également construire des propositions à partir des prédicats monadiques; il suffit pour cela de faire suivre le prédicat d'un symbole représentant un objet bien déterminé. Par exemple, le prédicat $\hat{x}A(x)$ ci-dessus peut nous donner les propositions suivantes:

avec l'objet noté 7: $(\hat{x}A(x))7$; cette proposition peut encore s'écrire $A(7)$ et n'est autre que la proposition vraie: "7 est premier et impair".

avec l'objet noté 15: $(\hat{x}A(x))15$; cette proposition peut encore s'écrire $A(15)$ et n'est autre que la proposition fausse: "15 est premier et impair".

avec l'objet noté a : $(\hat{x}A(x))a$; cette proposition peut encore s'écrire $A(a)$ et possède une valeur de vérité bien déterminée.

Bien entendu, les abstracteurs obéissent à des règles de syntaxe. Le lecteur qui souhaiterait approfondir cette question voudra bien se reporter à des ouvrages spécialisés.

Remarque.

Considérons la fonction propositionnelle:

"x est premier et y est impair".

Ce qui précède ne peut lui être appliquée puisqu'il s'agit, cette fois, d'une fonction propositionnelle à deux variables.

15.3. Le quantificateur existentiel.

Considérons la fonction propositionnelle à une seule variable

15.3.1. $A(x)$: "x est pair"

Le prédicat qui lui est associé se note: $\hat{x}(A(x))$; remarquons que ce prédicat pourrait tout aussi bien se noter $\hat{y}(A(y))$ ou encore $\hat{z}(A(z))$; le choix de la variable n'a aucune importance et on exprime ce fait en disant que x, ou y, ou z, est une variable muette dans ce prédicat.

Lorsque nous voulons affirmer que, dans un univers donné, $\mathfrak{U}$ il existe au moins un objet déterminé a tel que A(a) soit une proposition vraie, nous écrivons:

15.3.2. $\exists(\hat{x}(A(x)))$

a, b, c,...désignant chacun des objets de $\mathfrak{U}$, la proposition 15.3.2 représente la disjonction logique des propositions A(a), A(b), A(c),..., c'est à dire, en fait, la proposition: " A(a) ou A(b) ou A(c) ou ...".

Afin de simplifier l'écriture, on convient de noter la proposition 15.3.2 de la façon suivante:

15.3.3. $(\exists x)A(x)$

Elle se lit:"il existe au moins un x tel que A(x)".

On rencontre également la notation suivante: $\sum xAx$ (notation polonaise).

Notons que l'expression 15.3.3 n'est ni une fonction propositionnelle, ni un prédicat, mais une proposition.(Voir à ce propos 1.6). D'après la signification de A(x),(voir 15.3.1),15.3.3 n'est autre que la proposition:

"il existe au moins un x tel que x est pair"

Cette proposition est vraie puisque l'objet 4, par exemple, est tel que la proposition A(4), c'est à dire:"4 est pair", est vraie. La vérité de $(\exists x)A(x)$ résulte de la vérité de A(4). B(x) étant une fonction propositionnelle quelconque, $(\exists x)B(x)$ est donc une proposition qui peut être vraie ou qui peut être fausse. Elle est vraie si B(x) désigne la fonction propositionnelle 15.3.1, elle est fausse si B(x) désigne la fonction propositionnelle: " l'entier naturel x a un carré négatif".

Dans 15.3.3, la lettre x n'est pas une variable pour objet, au sens habituel du terme, puisque 15.3.3 est effectivement une proposition; celle-ci peut d'ailleurs s'écrire encore: $(\exists y)A(y)$ ou $(\exists z)A(z)$ ou même $\exists\square\,,A\square$. Pour exprimer ce fait, nous dirons que x, ou bien y, ou bien z, est une variable liée.

Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel;il doit être obligatoirement suivi de la variable liée.

Remarquons que le symbole $\exists$ n'est pas un signe sténographique; il ne peut, en aucun cas, être employé comme abréviation dans le cours d'une phrase.

15.4. Le quantificateur universel.

Soit $A(x)$ une fonction propositionnelle.
Lorsque nous voulons affirmer que, dans un univers donné $\mathcal{U}$, "quel que soit l'objet déterminé a, la proposition $A(a)$ est vraie", nous écrivons:

$$\forall\,(\hat{x}(A(x)))$$

ou encore, pour simplifier:

15.4.1. $$(\forall x)A(x)$$

On rencontre aussi les notations:

$$\prod xAx \qquad \text{(notation polonaise)}$$
$$(x)Ax$$

a, b, c,..., désignant chacun des objets de $\mathcal{U}$, la proposition 15.4.1 représente la conjonction logique des propositions $A(a)$, $A(b)$, $A(c)$,...,c'est à dire, en fait, la proposition:

"$A(a)$ et $A(b)$ et $A(c)$ et ... "

15.4.1, n'est ni une fonction propositionnelle ni un prédicat, mais une proposition,(Voir 1.6), qui se lit:

"quel que soit x, $A(x)$"

ou encore: "pour tout x, on a $A(x)$".

Cette proposition peut être vraie ou fausse.
Elle est vraie si $A(x)$ désigne la fonction propositionnelle:

"l'entier naturel x est rationnel"

Elle est fausse si $A(x)$ désigne la fonction propositionnelle:

"l'entier naturel x est premier".

Comme dans le paragraphe précédent, x est une variable liée.
Remarquons que le symbole $\forall$ doit être obligatoirement suivi de la variable liée. $\forall$ est appelé quantificateur universel.
Le symbole $\forall$ n'est pas, lui non plus, un signe sténographique; il ne peut, en aucun cas, être employé comme abréviation dans le cours d'une phrase.

15.5. Expressions comportant une seule variable et un seul quantificateur.

A) Les prédicats monadiques que nous envisageons peuvent être représentés par des lettres. En aucun cas nous ne considérerons ces lettres comme des variables pour prédicats suceptibles d'être quantifiées. On exprime ce choix en disant que la logique étudiée est une logique du premier ordre.

B) Aux paragraphes 15.3 et 15.4, nous avons introduit deux quantificateurs: $\exists$ et $\forall$.

Considérons la fonction propositionnelle A(x):

"l'entier naturel x a un carré positif ou nul".

"non A(x)" est encore une fonction propositionnelle.(Voir § 16.2 S3). Elle peut s'écrire:

"l'entier naturel x a un carré négatif."

La proposition fausse: ($\exists$ x)(non A(x)) s'énonce:

"il existe au moins un entier naturel x ayant un carré négatif".

La négation de cette proposition, notée: non$\left[(\exists x)(\text{non } A(x))\right]$, est la proposition vraie:

"il n'existe aucun entier naturel x ayant un carré négatif."

Ce jugement peut encore s'exprimer de la façon suivante:

"tout entier naturel x a un carré positif ou nul."

Ce dernier énoncé se note: ($\forall$ x)(A(x)).

Cet exemple fait apparaître la possibilité d'établir un lien entre une proposition comportant un quantificateur universel et une autre proposition, convenablement choisie, faisant intervenir le quantificateur existentiel.

C) Soit A(x) une fonction propositionnelle à une variable. Dorénavant, ($\forall$ x)A(x) devra être considéré comme une autre notation de la proposition notée: non$\left[(\exists x)(\text{non } A(x))\right]$.

FONCTIONS PROPOSITIONNELLES A DEUX VARIABLES

15.6. Les prédicats dyadiques.

Soit la proposition P:

"5 est inférieur à 7".

Dans cette proposition vraie, nous pouvons distinguer deux parties:

a) l'objet 5;

b) l'objet 7;

c) un lien entre ces deux objets exprimé par:

"est inférieur à ".

Ce lien s'appelle prédicat dyadique: il s'applique à deux objets. Considérons maintenant la fonction propositionnelle à deux variables, et deux seulement, notée A(x,y):

"x divise y"

A(x,y) s'appelle aussi: relation logique binaire; par abus de langage, et lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, $A(x,y)$ sera appelée relation binaire.

Dans $A(x,y)$, nous pouvons distinguer:

a) la variable x;

b) la variable y;

c) le prédicat dyadique:"divise", que l'on peut désigner par la lettre A.

La variable y désigne un objet indéterminé qui peut cependant être le même que celui désigné par la variable x.

15.7. Fonctions propositionnelles et abstracteurs.

Soit $A(x,y)$ une fonction propositionnelle à deux variables et deux seulement.

Il existe un procédé permettant d'analyser une telle fonction propositionnelle et de faire apparaître le prédicat dyadique: c'est la méthode des abstracteurs(voir § 15.2).

En plaçant devant $A(x,y)$ l'abstracteur $\hat{x}$, on obtient l'expression $\hat{x}(A(x,y))$; elle contient encore la variable pour objet y.

En plaçant devant $\hat{x}(A(x,y))$ l'abstracteur $\hat{y}$, nous obtenons le prédicat dyadique $\hat{y}(\hat{x}(A(x,y)))$ que nous noterons plus simplement: $\hat{y}\hat{x}A(x,y)$.

Bien entendu, ces abstracteurs obéïssent à des règles de syntaxe. Notons, à ce propos, que l'ordre des abstracteurs est déterminant et que, en général, $\hat{y}\hat{x}A(x,y)$ ne désigne pas le même prédicat que $\hat{x}\hat{y}A(x,y)$.

Le lecteur qui souhaiterait étudier ces notions, pourra se reporter à un ouvrage spécialisé.

15.8. Fonctions propositionnelles et quantificateurs.

Soit $A(x,y)$ une fonction propositionnelle à deux variables et deux seulement.

$\hat{x}(A(x,y))$ est une expression contenant encore la variable y. En plaçant devant cette expression le quantificateur existentiel, nous obtenons: $\exists(\hat{x}(A(x,y)))$; c'est une fonction propositionnelle à une seule variable y que nous noterons plus simplement: $(\exists x)A(x,y)$.

Dans cette fondtion propositionnelle x est une variable liée alors que y est une variable libre.

En plaçant devant $(\exists x)A(x,y)$ l'abstracteur $\hat{y}$, nous obtenons le prédicat: $\hat{y}\left[(\exists x)A(x,y)\right]$.
Lorsque ce dernier est précédé du quantificateur existentiel, il en résulte une proposition qui se note:

$$(\exists y)(\exists x)A(x,y)$$

Dans cette expression, les deux variables x, y, sont liées.
Considérons par exemple la fonction propositionnelle à deux variables: "l'entier naturel x est inférieur à l'entier naturel y".
x, y, doivent, bien entendu, être considérées comme des variables libres.
La phrase: "il existe au moins un entier naturel x inférieur à l'entier naturel y" , doit être notée: $(\exists x)A(x,y)$; nous sommes en présence d'une fonction propositionnelle à une seule variable y; x joue le rôle de variable liée, y celui de variable libre.
La phrase: "il existe au moins un entier naturel y, il existe au moins un entier naturel x, tel que x soit inférieur à y", doit être notée: $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$; nous avons cette fois une proposition vraie; les variables x, y, sont toutes les deux liées.

En partant de $A(x,y)$ et en procédant d'une manière analogue, nous pouvons former les propositions suivantes:

$$(\exists x)(\exists y)A(x,y)$$
$$(\forall y)(\forall x)A(x,y)$$
$$(\forall x)(\forall y)A(x,y)$$
$$(\exists x)(\forall y)A(x,y)$$
$$(\exists y)(\forall x)A(x,y)$$
$$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$$
$$(\forall y)(\exists x)A(x,y)$$

Exemple:

$A(x,y)$ désigne la fonction propositionnelle: "x divise y".
$(\exists x)(\forall y)A(x,y)$ est une proposition vraie qui se lit: "il existe au moins un x, quel que soit y, tel que x divise y".
(Notons que tout nombre est divisible par un.)
$(\forall x)(\exists y)A(x,y)$ est une proposition fausse qui s'énonce: "pour tout x, il existe au moins un y tel que x divise y".(Notons que 0 ne divise aucun nombre.)

15.9. Généralisation

Les diverses notions introduites dans les paragraphes précédents peuvent être étendues aux cas des fonctions propositionnelles comportant plus de deux variables pour objets.

Remarque.

Désignons par $A(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ une fonction propositionnelle à n variables.

15.9.1. $$(\forall x_i)A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_2)$$

est une fonction propositionnelle à (n - 1) variables dans laquelle x_i est une variable liée. La lettre y ne figurant pas dans 15.9.1, en remplaçant x_i par y en chacune des occurrences de x_i dans 15.9.1, nous obtenons un nouvel assemblage représentant la même fonction propositionnelle:

$$(\forall y)A(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$$

Ceci peut être étendu aux cas de fonctions propositionnelles comportant un ou plusieurs quantificateurs existentiels ou universels.

15.10. Notion de classe logique.

Soit $A(x)$ une fonction propositionnelle à une seule variable x. En remplaçant x par un objet déterminé a d'un univers $\mathcal{U}$, nous obtenons la proposition $A(a)$.

Tous les objets de $\mathcal{U}$ qui, lorsqu'ils remplacent x dans $A(x)$, donnent naissance à une proposition vraie, constituent la classe logique associée au prédicat $\hat{x}A(x)$, moyennant certaines conventions.(Voir par exemple la théorie des types.)

15.11. Propriétés des relations logiques binaires.

Soit $\mathcal{U}$ un univers uniquement composé d'objets du même ordre. Considérons la relation logique binaire $A(x,y)$ dans laquelle les variables x, y, ne peuvent être remplacées que par des objets de l'univers $\mathcal{U}$.

La relation $A(x,y)$ est dite réflèxive dans l'univers $\mathcal{U}$, ou plus simplement réflèxive, si et seulement si:

$(\forall x)A(x,x)$ est une proposition vraie.

La relation $A(x,y)$ est dite symétrique dans l'univers $\mathcal{U}$, ou plus simplement symétrique, si et seulement si:

$(\forall x)(\forall y)\ [A(x,y) \Longrightarrow A(y,x)]$ est une proposition vraie

La relation $A(x,y)$ est dite antisymétrique dans l'univers $\mathcal{U}$, ou plus simplement antisymétrique, si et seulement si:

$(\forall x)(\forall y)\left[(A(x,y) \text{ et } A(y,x)) \Longrightarrow (x = y)\right]$ est une proposition vraie.

La relation $A(x,y)$ est dite transitive dans l'univers $\mathcal{U}$, ou plus simplement transitive, si et seulement si:

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left[(A(x,y) \text{ et } A(y,z)) \Longrightarrow A(x,z)\right]$ est une proposition vraie.

S6: Δ désignant un opérateur logique binaire arbitraire, si α, β, sont deux EBF telles que aucune variable pour objets ne soit, en même temps, liée dans l'une et libre dans l'autre, alors $(\alpha)\Delta(\beta)$ est une nouvelle EBF.

Si une variable est, par exemple, liée dans α et libre dans β, il suffit de remplacer, dans α, cette variable par une autre ne figurant ni dans α ni dans β pour que $(\alpha)\Delta(\beta)$ soit une EBF. (Voir § 15.9.)

Ainsi, si nous désignons par α l'EBF $A(x)$, par β l'EBF $(\forall x)A(x)$,

$$A(x) \Longrightarrow (\forall x)A(x)$$

n'est pas une EBF, mais

$$A(x) \Longrightarrow (\forall y)A(y)$$

en est une.

S7: Il n'existe pas d'EBF en dehors de celles obtenues par les règles précédentes.

16.3. Lois logiques: EV.

Les lois logiques sont des EBF considérées comme vraies dans la logique étudiée. Elles sont désignées par le sigle EV (expressions vraies).

L1: Les lois logiques du calcul des propositions sont des lois logiques du calcul des prédicats.

L2: Soit α une EV du calcul des propositions dans laquelle figurent des variables propositionnelles P, Q, R,...

Si en remplaçant P, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF β du calcul des prédicats, on obtient une EBF, cette EBF est une EV φ du calcul des prédicats.

Si en remplaçant, simultanément,

P, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF β,
Q, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF γ,
R, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF δ,
.....

on obtient une EBF, cette EBF est une EV φ' du calcul des prédicats. β, γ, δ, ... ne sont pas nécessairement des EBF toutes différentes.

Si $(\forall x)\varphi$, $(\forall x)\varphi'$, $(\exists x)\varphi$, $(\exists x)\varphi'$, $(\forall y)\varphi$, $(\forall y)\varphi'$, $(\exists y)\varphi$, $(\exists y)\varphi'$,..., sont des EBF, ces EBF sont des EV du calcul des prédicats.

16 - QUELQUES RESULTATS DU CALCUL DES PREDICATS

16.1. Signes primitifs.

Avant de construire un calcul des prédicats, il est nécessaire de se donner un certain nombre de signes appelés signes primitifs. Nous choisissons les suivants:

a) des lettres P, Q, R,...qui représentent des propositions indéterminées et jouent le rôle de variables. Nous les appellerons "variables propositionnelles".

b) des lettres x, y, z,...qui représentent des objets et jouent le rôle de variables. Nous les appellerons "variables pour objets".(x,y,...peuvent être affectées d'indices ou d'accents.)

c) des lettres A, B, C,...qui représentent des prédicats s'appliquant à une ou plusieurs variables pour objets. Ces lettres jouent le rôle de variables. Nous les appellerons "variables de prédicats".

d) les signes représentant les opérateurs logiques rencontrés dans le calcul des propositions.

e) les signes $\exists$, $\forall$.

f) les parenthèses et les crochets.

16.2. Expressions bien formées: EBF.

A l'aide des signes précédents il est possible de construire des assemblages. Ceux qui ont un sens dans la logique considérée sont appelés EBF. Nous adoptons les règles de syntaxe suivantes:

S1: Toutes les EBF du calcul des propositions sont des EBF du calcul des prédicats.

S2: Si A est un prédicat s'appliquant à n variables pour objets, alors $A(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ est une EBF. Cette EBF désigne une fonction propositionnelle à n variables.

S3: Si α est une EBF, alors non(α) est une EBF.

S4: Si α est une EBF qui contient la variable libre x, alors $(\exists x)\alpha$ est une EBF qui contient la variable liée x et les mêmes autres variables libres que α .

S5: Si α est une EBF qui contient la variable libre x, alors $(\forall x)\alpha$ est une EBF qui contient la variable liée x et les mêmes autres variables libres que α .

Exemples.

1º) Nous avons

$$\vdash \ (P \text{ et } Q) \Longrightarrow P \qquad 6.28.2.$$

C'est une EV du calcul des prédicats d'après L1.
Remplaçons P, en chacune de ces occurrences, par l'EBF A(x); nous obtenons:

$$(A(x) \text{ et } Q) \Longrightarrow A(x)$$

qui est une EV du calcul des prédicats, d'après L2.

$$(A(x) \text{ et } B(y)) \Longrightarrow A(x)$$
$$(A(x) \text{ et } A(x)) \Longrightarrow A(x)$$
$$(\forall xA(x)) \text{ et } B(y) \Longrightarrow (\forall xA(x))$$

sont encore des EV du calcul des prédicats d'après L2.

$$\forall x[(A(x) \text{ et } B(y)) \Longrightarrow A(x)]$$
$$\exists y[(A(x) \text{ et } B(y)) \Longrightarrow A(x)]$$

sont encore des EV.

$$\exists y[(A(x) \text{ et } B(y)) \Longrightarrow \forall xA(x)]$$

n'est pas une EBF car x est libre dans(A(x) et B(y)), mais liée dans le second membre de l'implication.
Par contre,

$$\exists y[(A(x) \text{ et } B(y)) \Longrightarrow \forall zA(z)]$$

est une EBF, et , d'après L2, cette EBF est une EV.

2º) Nous avons aussi:

$$\vdash \ (P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((Q \Longrightarrow R) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)) \qquad 6.32.1.$$

C'est une EV du calcul des prédicats d'après L1.
D'après L2:

$$[A(x,y) \Longrightarrow Q] \Longrightarrow [(Q \Longrightarrow \forall zB(z)) \Longrightarrow (A(x,y) \Longrightarrow \forall zB(z))]$$
$$\forall x[(B(x) \Longrightarrow \exists yC(y)) \Longrightarrow ((\exists yC(y) \Longrightarrow B(x)) \Longrightarrow (B(x) \Longrightarrow B(x))]$$

sont des EV du calcul des prédicats.

16.4. Règles de déduction.

Les EBF considérées comme lois logiques, à priori, sont toujours appelées axiomes.
A partir des axiomes et grâce à des règles de déduction, on peut construire de nouvelles lois logiques que l'on appelle théorèmes.
Enfin, à partir des axiomes et des théorèmes déjà connus,il est possible d'établir, à l'aide des mêmes règles de déduction, de nouvelles lois logiques également appelées théorèmes.

Notons, en particulier, les règles de déduction suivantes:

R1 : Règle d'inférence:

Soit α , β , deux EBF.

Si $\left[(\alpha) \text{ et } (\alpha \Rightarrow \beta)\right] \Rightarrow \beta$ est une EBF, cette EBF est une loi logique d'après L2.

En conséquence, si α est une EV et si $(\alpha \Rightarrow \beta)$ est une EV, alors β est une EV.

Ce qui précède est encore valable si $(\alpha \Rightarrow \beta)$ est remplacé par $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$.

R2 : Désignons par α une EV.

1º) Une EBF β est donnée.

Soit P une proposition figurant dans l'EV α . Dans α , en remplaçant P en chacune de ses occurrences par l'EBF β , on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

Exemple:

$$\left[\text{non}(P \Rightarrow \forall x B(x))\right] \Leftrightarrow \left[\text{non} \forall x B(x) \text{ et } P\right]$$

est une EV d'après L2 et 6.13.1.

Prenons pour EBF β : $\forall x(A(x) \text{ ou } B(x))$ et remplaçons P par β ;

$\text{non}\left[(\forall x(A(x) \text{ ou } B(x))) \Rightarrow \forall x B(x)\right] \Leftrightarrow \left[\text{non} \forall x B(x) \text{ et } \forall x(A(x) \text{ou} B(x))\right]$

est une EBF; c'est donc aussi une EV.

2º) Une fonction propositionnelle B(x) à une seule variable est donnée.

Soit les fonctions propositionnelles à une seule variable A(x), A(y),... figurant dans l'EV α . Dans α , en remplaçant:

A(x) en chacune de ses occurrences par B(x)

A(y) en chacune de ses occurrences par B(y)

....

on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

Exemple:

$$\left[A(x) \text{ et } \forall y A(y)\right] \Rightarrow \left[A(x) \text{ ou } \forall y A(y)\right]$$

est une EV d'après L2 et 6.28.3.

Prenons pour B(x) la fonction propositionnelle nonA(x) et remplaçons dans l'implication précédente. Nous obtenons:

$\left[\text{non}A(x) \text{ et } \forall y \text{non}A(y)\right] \Rightarrow \left[\text{non}A(x) \text{ ou } \forall y \text{non}A(y)\right]$

qui est une EBF; c'est donc aussi une EV.

3º) Une fonction propositionnelle $B(x,y)$ à deux variables est donnée.

Soit des fonctions propositionnelles $A(x,x)$, $A(x,y)$, $A(y,x),\dots,A(z,t),\dots$, figurant dans l'EV α. Dans α, en remplaçant:

$A(x,x)$ en chacune de ses occurrences par $B(x,x)$
$A(x,y)$ en chacune de ses occurrences par $B(x,y)$
$A(y,x)$ en chacune de ses occurrences par $B(y,x)$
...
$A(z,t)$ en chacune de ses occurrences par $B(z,t)$
...

on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

Exemple:

$$A(x,y) \Longrightarrow \left[A(x,y) \text{ ou } A(y,x)\right]$$

est une EV d'après L2 et 6.28.1.

Prenons pour $B(x,y)$ la fonction propositionnelle non$A(x,y)$ et remplaçons dans l'implication précédente;

$$\left[\text{non}A(x,y)\right] \Longrightarrow \left[\text{non}A(x,y) \text{ ou non}A(y,x)\right]$$

est une EBF; c'est donc une EV.

4º) Une fonction propositionnelle $B(x,y,\dots)$ est donnée.

La méthode de remplacement indiquée au 3º se généralise et on procède de la même manière.

R3 : Soit: α une EV dans laquelle figure l'EBF β ;
β' une EBF telle que $\beta \Longleftrightarrow \beta'$ soit une EV.
Dans α, en remplaçant β par β' en une ou plusieurs occurrences de β dans α, on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

R4 : Soit α, β, deux EBF, α contenant la variable libre x. Si $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ est une EV et si $((\forall x)\alpha) \Longrightarrow \beta$ est une EBF, alors cette dernière EBF est une EV.

R5 : Soit α, β deux EBF, β contenant la variable libre x et α ne contenant pas la variable x libre.
Si $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ est une EV, alors $(\alpha \Longrightarrow (\forall x)\beta)$ est une EV.

R6 : Soit α, β deux EBF, β contenant la variable libre x. Si $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ est une EV et si $(\alpha \Longrightarrow (\exists x)\beta)$ est une EBF, alors cette dernière EBF est une EV.

R7 : Soit α , β deux EBF, α contenant la variable libre x et β ne contenant pas la variable x libre.
Si ($\alpha \Rightarrow \beta$) est une EV, alors $((\exists x)\alpha \Rightarrow \beta)$ est une EV.

Remarque.

Dans les lois logiques du calcul des propositions, en remplaçant les variables propositionnelles P, Q, R,..., par, respectivement, les fonctions propositionnelles à une seule variable x, A(x), B(x), C(x),..., on obtient une EV du calcul des prédicats. (Voir L2, § 16.3)
En plaçant devant cette EV le symbole $(\forall x)$, on obtient une proposition vraie. Dans ce cas, la référence donnée sera celle attribuée à la loi logique dans le tableau synoptique du calcul des propositions (chapitre 8).

16.5. Quelques lois logiques.

Nous allons utiliser les règles précédentes pour démontrer que certaines EBF sont des EV. Ceci permettra au lecteur de se familiariser avec la "manipulation" des fonctions propositionnelles et des quantificateurs.

Rappelons d'abord que:

16.5.1. $(\forall x)A(x)$ est une autre notation de non $(\exists x)$(non A(x)
Il nous faut préciser, au préalable, l'EBF que nous considérerons comme vraie à priori. Dans ce qui suit, l'EBF:

16.5.2. $$A(y) \Rightarrow (\exists x)A(x)$$
dans laquelle A(y) et A(x) sont des fonctions propositionnelles à une seule variable, est un axiome.

Rappelons enfin que l'utilisation des parenthèses conduit très vite à une écriture compliquée. Afin de faciliter la lecture des expressions formelles, nous nous permettrons, lorsqu'il n'y a pas ambiguïté, les abus d'écriture suivants:

1º) La fonction propositionnelle à une seule variable A(x) sera notée Ax.

2º) $(\forall x)A(x)$ sera noté $\forall x Ax$.
$(\exists x)A(x)$ sera noté $\exists x Ax$.

3º) $(\forall x)$ non(A(x)) sera noté $\forall x$ non Ax.

4º) $((\forall x)A(x))$ et B(x), par exemple, sera noté $\forall x Ax$ et Bx mais $(\forall x)$(A(x) et B(x)) sera noté $\forall x$(Ax et Bx).

De même pour les autres opérateurs logiques binaires.

16.6. L'expression vraie: $(\forall x Bx) \Rightarrow By$.

Les fonctions propositionnelles qui interviennent dans ce paragraphe sont des fonctions propositionnelles à une seule variable.

En remplaçant Ay par (non By) et Ax par (non Bx) dans l'EV 16.5.2, nous obtenons, d'après R2, l'EV:

16.6.1. $\text{non } By \Rightarrow \exists x \text{ non } Bx$

Utilisons maintenant 6.30.1 et L2. En remplaçant P par (non By) et Q par ($\exists x$ non Bx), nous obtenons l'EV:

16.6.2. $[\text{non } By \Rightarrow \exists x \text{ non } Bx] \Leftrightarrow [\text{non}(\exists x \text{ non } Bx \Rightarrow \text{non}(\text{non } By))]$

D'après 16.5.1, le second membre de 16.6.2 peut s'écrire:

$$\forall x Bx \Rightarrow \text{non}(\text{non } By)$$

D'autre part, 6.11.1 et L2 nous donnent l'EV:

16.6.3. $\text{non}(\text{non } By) \Leftrightarrow By$

En appliquant R3 avec 16.6.2 et 16.6.3, nous obtenons l'EV:

16.6.4. $[\text{non } By \Rightarrow \exists x \text{ non } Bx] \Leftrightarrow [\forall x Bx \Rightarrow By]$

Puisque 16.6.1 et 16.6.4 sont des EV, d'après R1,

16.6.5. $\forall x Bx \Rightarrow By$ est une EV.

16.7. L'expression vraie: $[\forall x Ax \text{ et } \forall x Bx] \Rightarrow \forall x(Ax \text{ et } Bx)$

Dans ce paragraphe nous ne considérons que des fonctions propositionnel~~l~~es à une seule variable.

A) En appliquant R2 a 16.6.5, nous obtenons l'EV:

16.7.1. $\forall x Ax \Rightarrow Ay$

En tenant compte de 6.34.1, 16.7.1 et 16.6.5, nous pouvons écrire l'EV suivante:

16.7.2. $[(\forall x Ax \Rightarrow Ay) \text{ et } (\forall x Bx \Rightarrow By)] \Rightarrow [(\forall x Ax \text{ et } \forall x Bx) \Rightarrow (Ay \text{ et} By)]$

Le premier membre de 16.7.2 est la conjonction des EV 16.7.1 et 16.6.5; c'est une EV; 16.7.2 étant une EV, la règle R1 permet d'affirmer:

16.7.3. $(\forall x\ Ax \text{ et } \forall x Bx) \Rightarrow (Ay \text{ et } By)$ est une EV.

Appliquons R5 à cette dernière EV, nous obtenons l'EV:

16.7.4. $(\forall x Ax \text{ et } \forall x Bx) \Rightarrow \forall y(Ay \text{ et } By)$

La variable x étant liée, il nous est possible de changer la variable liée y et nous obtenons:

16.7.5. $(\forall x Ax \text{ et } \forall x Bx) \Rightarrow \forall x(Ax \text{ et } Bx)$

B) Selon 6.28.2, nous avons l'EV:

16.7.6. $(Ax \text{ et } Bx) \Rightarrow Ax$

$\forall z(Az \text{ et } Bz) \Rightarrow Ax$ étant une EBF, d'après R_4, nous sommes en présence de l'EV:

16.7.7. $(\forall z(Az \text{ et } Bz)) \Rightarrow Ax$

En appliquant R_5 à 16.7.7, nous obtenons l'EV:

16.7.8. $(\forall z(Az \text{ et } Bz)) \Rightarrow \forall xAx$

x étant une variable liée, en changeant la variable liée z, nous obtenons:

16.7.9. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow \forall xAx$

Partant de la loi logique $(Q \text{ et } P) \Rightarrow P$, une démonstration analogue nous conduit à l'EV:

16.7.10. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow \forall xBx$

Appliquons maintenant 6.34.1 aux EV 16.7.9 et 16.7.10. Il vient:

$$\left[\left[\begin{array}{c}(\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow \forall xAx \\ \text{et} \\ (\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow \forall xBx\end{array}\right] \Rightarrow \left[\left(\begin{array}{c}\forall x(Ax \text{ et } Bx) \\ \text{et} \\ \forall x(Ax \text{ et } Bx)\end{array}\right) \Rightarrow (\forall xAx \text{ et } \forall xBx)\right]\right]$$

Cette implication est une EV; son premier membre étant la conjonction de deux EV est lui-même une EV et, d'après R_1 :

16.7.11. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx) \text{ et } \forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow (\forall xAx \text{ et } \forall xBx)$

est une EV.

D'après 6.26.1:

16.7.12. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx) \text{ et } \forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Leftrightarrow \forall x(Ax \text{ et } Bx)$

est une EV.

En appliquant R_3 à 16.7.11 et à 16.7.12, nous obtenons l'EV:

16.7.13. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Rightarrow (\forall xAx \text{ et } \forall xBx)$

C) En remplaçant dans:

$(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ cf:6.23.1

P par: $\forall x(Ax \text{ et } Bx)$

Q par: $(\forall xAx \text{ et } \forall xBx)$,

nous obtenons une EV.

La conjonction des deux EV 16.7.13 et 16.7.5 étant une EV, R_1 nous permet d'affirmer que:

16.7.14. $(\forall x(Ax \text{ et } Bx)) \Leftrightarrow (\forall xAx \text{ et } \forall xBx)$

est une EV.

16.8. Les autres lois logiques.

La démonstration des lois logiques conduit généralement à des raisonnements assez longs. La méthode à suivre vient d'être exposée dans les paragraphes précédents. Pour ne pas surcharger cet ouvrage, nous nous contenterons d'énoncer les lois logiques les plus fréquemment utilisées. La liste de ces lois logiques sera donnée au chapitre 17.

Le lecteur désireux de prendre contact avec d'autres démonstrations pourra se reporter à un ouvrage spécialisé.

E X E R C I C E

E.16.1.

Démontrer les lois logiques répertoriées au chapitre 17, depuis le numéro 16.8.1, jusqu'au numéro 16.8.42.

17 - SYNOPTIQUE DU CALCUL DES PREDICATS

16.2. Expressions bien formées: EBF.

S1 : Toutes les EBF du calcul des propositions sont des EBF du calcul des prédicats.

S2 : Si A est un prédicat à n variables pour objets, alors $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une EBF.

S3 : Si α est une EBF, alors non(α) est une EBF.

S4 : Si α est une EBF qui contient la variable libre x, alors $(\exists x)\alpha$ est une EBF.

S5 : Si α est une EBF qui contient la variable libre x, alors $(\forall x)\alpha$ est une EBF.

S6 : Δ désignant un opérateur logique binaire arbitraire, si α, β, sont deux EBF telles que aucune variable pour objet ne soit, en même temps, liée dans l'une et libre dans l'autre, alors $\alpha \Delta \beta$ est une EBF.

16.3. Lois logiques: EV.

L1 : Les EV du calcul des propositions sont des EV du calcul des prédicats.

L2 : Soit α une EV du calcul des propositions dans laquelle figurent des variables propositionnelles P, Q, R,...
Si en remplaçant P, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF β du calcul des prédicats, on obtient une EBF, cette EBF est une EV φ du calcul des prédicats.
Si en remplaçant, simultanément,

P, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF β,
Q, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF γ,
R, en chacune de ses occurrences dans α, par une EBF δ,
...

on obtient une EBF, cette EBF est une EV φ' du calcul des prédicats. β, γ, δ, ..., ne sont pas nécessairement des EBF toutes différentes.

Si $(\forall x)\varphi$, $(\forall x)\varphi'$, $(\exists x)\varphi$, $(\exists x)\varphi'$, $(\forall y)\varphi$, $(\forall y)\varphi'$, $(\exists y)\varphi$, $(\exists y)\varphi'$, ..., sont des EBF, ces EBF sont des EV du calcul des prédicats.

16.4. Règles de déduction.

R1 : Si α est une EV et si ($\alpha \Longrightarrow \beta$) est une EV, alors β est une EV.

Si α est une EV et si ($\alpha \Longleftrightarrow \beta$) est une EV, alors β est une EV.

R2 : Désignons par α une EV.

1º) Une EBF β est donnée.

Soit P une proposition figurant dans l'EV α . Dans α , en remplaçant P en chacune de ses occurrences par l'EBF β , on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

2º) Une fonction propositionnelle B(x) à une seule variable est donnée.

Soit les fonctions propositionnelles à une seule variable A(x), A(y),..., figurant dans l'EV α . Dans α , en remplaçant:

A(x) en chacune de ses occurrences par B(x)
A(y) en chacune de ses occurrences par B(y)
...

on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

3º) Une fonction propositionnelle à deux variables, B(x,y) est donnée.

Soit des fonctions propositionnelles A(x,x), A(x,y), A(y,x),..., A(z,t),...,figurant dans l'EV α . Dans α , en remplaçant:

A(x,x) en chacune de ses occurrences par B(x,x)
A(x,y) en chacune de ses occurrences par B(x,y)
A(y,x) en chacune de ses occurrences par B(y,x)
...
A(z,t) en chacune de ses occurrences par B(z,t)
...

on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

4º) Une fonction propositionnelle B(x,y,...) est donnée.

La méthode de remplacement indiquée au 3º se généralise immédiatement.

R3 : Soit:

α une EV dans laquelle figure l'EBF β ;

β' une EBF telle que $(\beta \Longleftrightarrow \beta')$ soit une EV.

Dans α , en remplaçant β par β' en une ou plusieurs occurrences de β dans α , on obtient une expression qui, si elle est une EBF, est une EV.

R4 : Soit α , β , deux EBF, α contenant la variable libre x. Si ($\alpha \Longrightarrow \beta$) est une EV et si $(((\forall x)\alpha) \Longrightarrow \beta)$ est une EBF, alors cette dernière EBF est une EV.

R5 : Soit α , β , deux EBF, β contenant la variable libre x et α ne contenant pas la variable x libre. Si ($\alpha \Longrightarrow \beta$) est une EV, alors $(\alpha \Longrightarrow (\forall x)\beta)$ est une EV.

R6 : Soit α , β , deux EBF, β contenant la variable libre x. Si ($\alpha \Longrightarrow \beta$) est une EV et si $(\alpha \Longrightarrow (\exists x)\beta)$ est une EBF, alors cette dernière EBF est une EV.

R7 : Soit α , β , deux EBF, α contenant la variable libre x et β ne contenant pas la variable x libre. Si ($\alpha \Longrightarrow \beta$) est une EV, alors $((\exists x)\alpha \Longrightarrow \beta)$ est une EV.

16.5. Quelques lois logiques.

16.5.1. $\forall x$ Ax est une autre notation de non($\exists x$(non Ax))

16.5.2. $Ay \Longrightarrow \exists x Ax$

16.5.5. $(\forall x Bx) \Longrightarrow By$

16.7.14. $[\forall x(Ax \text{ et } Bx)] \Longleftrightarrow [(\forall x\ Ax) \text{ et } (\forall x\ Bx)]$

16.8.1. $(\forall x\ P) \Longleftrightarrow P$

16.8.2. $(\exists x\ P) \Longleftrightarrow P$

16.8.3. $(\text{non } Ay) \Longrightarrow \exists x(\text{non } Ax)$

16.8.4. $(\forall x(\text{non } Ax)) \Longrightarrow (\text{non } Ay)$

16.8.5. $(\forall x\ Ax) \Longrightarrow \exists x\ Ax$

16.8.6. $(\forall x(\text{non } Ax)) \Longrightarrow \exists x(\text{non } Ax)$

16.8.7. $(\forall x\ Ax) \Longleftrightarrow (\forall x\ Ay)$

16.8.8. $(\exists x\ Ax) \Longleftrightarrow (\exists x\ Ay)$

16.8.9. $(\exists x\ Ax) \Longleftrightarrow \text{non}(\forall x(\text{non } Ax))$

16.8.10. $(\text{non } (\forall x\ Ax)) \Longleftrightarrow \exists x(\text{non } Ax)$

16.8.11. $(\text{non}(\exists x\ Ax)) \Longleftrightarrow \forall x(\text{non } Ax)$

16.8.12. $(\exists x(\text{non } Ax))$ ou $(\exists x(\text{non non } Ax))$

16.8.13. $(\exists x(\text{non } Ax))$ ou $(\text{non non } \exists x(Ax))$

16.8.14. $(\exists x(\text{non } Ax))$ ou $(\text{non non } \forall x(Ax))$

16.8.15. $[\exists x(Ax \text{ et } Bx)] \Longrightarrow [(\exists x\ Ax) \text{ et } (\exists x\ Bx)]$

16.8.16. $[(\forall x\ Ax) \text{ ou } (\forall x\ Bx)] \Longrightarrow [\forall x(Ax \text{ ou } Bx)]$

16.8.17. $[\exists x(Ax \text{ ou } Bx)] \Longleftrightarrow [(\exists x\ Ax) \text{ ou } (\exists x\ Bx)]$

16.8.18. $[\forall x(Ax \text{ ou } Bx)] \Longrightarrow [(\exists x\ Ax) \text{ ou } (\forall x\ Bx)]$

16.8.19. $[\forall x(Ax \text{ ou } Bx)] \Longrightarrow [(\forall x\ Ax) \text{ ou } (\exists x\ Bx)]$

16.8.20. $[(\forall x\ Ax) \text{ et } (\exists x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ et } Bx)]$

16.8.21. $[(\exists x\ Ax) \text{ et } (\forall x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ et } Bx)]$

16.8.22. $[(\forall x\ Ax) \text{ ou } (\exists x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ ou } Bx)]$

16.8.23. $[(\exists x\ Ax) \text{ ou } (\forall x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ ou } Bx)]$

16.8.24. $[\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)] \Longrightarrow [(\forall x\ Ax) \Longrightarrow (\forall x\ Bx)]$

16.8.25. $[\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)] \Longrightarrow [(\forall x\ Ax) \Longrightarrow (\exists x\ Bx)]$

16.8.26. $[\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)] \Longrightarrow [(\exists x\ Ax) \Longrightarrow (\exists x\ Bx)]$

16.8.27. $[\exists x(Ax \Longrightarrow Bx)] \Longleftrightarrow [(\forall x\ Ax) \Longrightarrow (\exists x\ Bx)]$

16.8.28. $[(\forall x\ Ax) \Longrightarrow (\forall x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \Longrightarrow Bx)]$

16.8.29. $[(\exists x\ Ax) \Longrightarrow (\forall x\ Bx)] \Longrightarrow [\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)]$

16.8.30. $[(\exists x\ Ax) \Longrightarrow (\exists x\ Bx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \Longrightarrow Bx)]$

16.8.31. $[\forall x(Ax \Longleftrightarrow Bx)] \Longrightarrow [(\forall x\ Ax) \Longleftrightarrow (\forall x\ Bx)]$

16.8.32. $[\forall x(Ax \Longleftrightarrow Bx)] \Longrightarrow [(\exists x\ Ax) \Longleftrightarrow (\exists x\ Bx)]$

16.8.33. $[\exists x(Ax \Longleftrightarrow Bx)] \Longrightarrow [((\forall xAx) \Longrightarrow (\exists xBx)) \text{ et } ((\forall xBx) \Longrightarrow (\exists xAx)$

16.8.34. $[\forall x(P \Longleftrightarrow Ax)] \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow \forall xAx) \text{ et } (\exists xAx \Longrightarrow P)$

16.8.35. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)) \text{ et } (\exists xAx)] \Longrightarrow [\exists x(Bx \text{ et } Ax)]$

16.8.36. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow \text{non}Bx)) \text{ et } (\exists xBx)] \Longrightarrow [\exists x(Bx \text{ et non}Ax)]$

16.8.37. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)) \text{ et } Ay] \Longrightarrow By$

16.8.38. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow Bx)) \text{ et non } By] \Longrightarrow \text{non } Ay$

16.8.39. $[\forall x(Ax \Longrightarrow Bx) \text{ et } \forall x(Bx \Longrightarrow Cx)] \Longrightarrow [\forall x(Ax \Longrightarrow Cx)]$

16.8.40. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow Bx) \text{ et } \exists xAx) \text{ et } \forall x(Bx \Longrightarrow Cx)]$

$\Longrightarrow [\forall x(Ax \Longrightarrow Cx) \text{ et } \exists xAx]$

16.8.41. $[(\forall x(Ax \Longrightarrow Bx) \text{ et } \exists xAx) \text{ et } \forall x(Bx \Longrightarrow Cx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ et } Cx)]$

16.8.42. $[\exists x(Ax \text{ et } Bx) \text{ et } \forall x(Bx \Longrightarrow Cx)] \Longrightarrow [\exists x(Ax \text{ et } Cx)]$