IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N° 3

Histoire et Philosophie des sciences

Étude épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu

Tome 1
L'analyse

Jean DHOMBRES

1976

INTRODUCTION

Ce cours d'histoire et de philosophie des Sciences fut d'abord conçu comme une étude épistémologique et historique de la notion de nombre prise au sens large, de grandeur donc et partant de mesure et de continu. Gardons-nous de fixer pour l'instant un vocabulaire encore imprécis et annonçons tout de go que ce premier projet tourna court. La principale raison en est pédagogique. Est-il possible de faire une étude sérieuse de la question, jalonnée en ses extrémités par Euclide et Cantor d'une part, Archimède et Lebesgue de l'autre, devant un public d'étudiant(es) de première année d'Université ? Tout enseignant de mathématiques sait par expérience combien les propriétés des nombres réels "passent mal", sans parler des rudiments de la théorie de la mesure ou de la topologie. Et pourtant ce Cours devait également servir aux étudiants préparant l'Agrégation de Mathématiques et surtout à des Professeurs de l'Enseignement Secondaire participant aux activités de l'Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques.

Il semblait par contre que les constructions algébriques de la théorie des ensembles fussent plus assimilables : passage des entiers naturels aux entiers relatifs et aux nombres rationnels par exemple, nombres cardinaux, etc. Peut-être est-ce l'effet de l'innoculation -massive ajouteront certains- de l'Axiomatique dans l'Enseignement Secondaire ? Cependant, la fondation logique de ces constructions est tardive d'un point de vue historique et s'en tenir aux discussions concernant ces constructions revenait à oblitérer le caractère évolutif de notre étude.

Bref, il fallait transiger en éliminant une trop grande spécialisation mathématique. Par contre, on pouvait essayer de replacer les diverses étapes de la pensée mathématique au sujet du nombre, de la mesure et du continu dans le cadre intellectuel plus large de la civilisation où cette pensée avait pu mûrir et s'épanouir.

L'histoire, dès lors, reprenait ses droits, mais le danger opposé était de crouler sous la documentation érudite et de dissoudre l'intérêt au fil des siècles écoulés. Jusqu'au milieu du XVIIIème siècle, les grands philosophes occidentaux sont aussi des mathématiciens, pénétrés de la pensée scientifique. D'où la possibilité de juxtaposer des textes mathématiques originaux et des textes contemporains concernant les mathématiques, à certains moments cruciaux pour notre étude. On évitait ainsi une analyse chronologique trop poussée.

C'est donc le parti pris de ce cours, avant tout un commentaire de textes choisis pour sonder certaines étapes des mathématiques en se donnant comme fil conducteur le développement d'un thème, à savoir la construction du corps des nombres réels, la compréhension de ses propriétés caractéristiques et la mesure des grandeurs continues. Mais qui annonce un commentaire de textes doit fournir des passages assez longs et significatifs de ces textes et non des citations à l'usage des hommes du monde ! Je voudrais terminer cette courte introduction par des éléments de réponse à deux questions bien naturelles aux yeux d'un mathématicien et sans doute de tout chercheur :

Pourquoi seulement l'idée de nombre et de continu, alors que l'histoire des mathématiques est si vaste et l'histoire de la Science si peu enseignée ? Il nous a semblé qu'en couvrant des notions aussi importantes que celles de nombre et de continu, nous rencontrerions avec quelques grands mathématiciens des problèmes essentiels des mathématiques et de l'histoire des idées scientifiques tout en évitant la dispersion et une superficialité de mauvais aloi. Qu'on songe un instant qu'avec les nombres réels nous avons toutes les difficultés de la notion de continuité comme opposée au discret, de la notion d'infini comme opposée au fini, de rationnel comme opposée à l'incommensurable, etc. Il eût certes été plus raisonnable de choisir l'exemple de la ou des Géométries, mais l'algèbre aurait alors pris trop de place à notre goût.

Pourquoi l'histoire et l'épistémologie d'une notion de mathématiques ? Ce cours voudrait illustrer la percutante analyse de J. Cavaillès, tirée de l'Introduction à ses Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles et qui date de 1938. Cavaillès parle de la méthode issue de Cantor et de la théorie des ensembles :

"Mais une méthode n'est pas chose isolable arbitrairement pour les besoins d'un problème. L'exigence même de sécurité oblige à la dépouiller de son vêtement accidentel, pris dans un cas particulier, à préciser les conditions nécessaires et suffisantes de son application. Si elle réussit avec certains ensembles, ce ne peut être qu'en vertu de propriétés définissables en eux : il n'y aura de mathématique rigoureuse que lorsqu'on aura, par l'investigation même des procédés, défini le champ d'objets auxquels ils conviennent. D'autre part, ces procédés s'enchaînent dans un complexe organique : c'est un état d'esprit qui constitue la base secrète d'où ils jaillissent avec une apparente imprévisibilité, à quoi il faut revenir si l'on veut vraiment comprendre et non plus exposer mais continuer. Parenté profonde qui unit -sans qu'ils en aient même pleine conscience, comme une entente implicite- les chercheurs d'une même discipline, au moins dans une période donnée, vis a tergo, élan objectif de la recherche elle-même. Cette double unité, justification, pour une théorie, de son existence mathématique, la théorie des ensembles la possède-t-elle ? Rechercher la première est travail technique : on a vu à quelles difficultés il se heurte" (C'est la crise des fondements des mathématiques et en particulier de la théorie des ensembles que Cavaillès a rapidement brossée plus tôt. "Mais peut-être, ne fut-ce que pour évaluer ses chances d'aboutir, est-il possible d'essayer de déceler la seconde là où elle existe, sans les juxtapositions peut-être factices, d'une construction arbitraire. C'est ici que l'histoire intervient.

L'histoire mathématique semble, de toutes les histoires, la moins liée à ce dont elle est véhicule ; s'il y a lien c'est a parte post, servant uniquement pour la curiosité, non pour l'intelligence du résultat : l'après explique l'avant. Le mathématicien n'a pas besoin de connaître le passé, parce que c'est sa vocation de le refuser : dans la mesure où il ne se plie pas à ce qui semble aller de soi par le fait qu'il est, dans la mesure où il rejette autorité de la tradition, méconnaît un climat intellectuel, dans cette mesure seule il est mathématicien, c'est-à-dire révélateur de nécessités. Cependant avec quels moyens opère-t-il ? L'oeuvre négatrice d'histoire s'accomplit dans l'histoire. Double liaison : avec les problèmes posés et étudiés dans un temps -choix de la rebellion-, avec les méthodes déjà existantes, matière où forger le nouvel instrument. Dans les deux cas, l'arbitraire individuel ou le style d'un milieu ne suffisent pas à expliquer : même si l'on concevait les mathématiques comme un système en soi, les sinuosités du processus de révélation seraient en relation avec la structure des parties révélées. Autrement dit, il y a une objectivité, fondée mathématiquement, du devenir mathématique ; c'est l'exigence d'un problème qui oblige à dépouiller une méthode d'accidents qu'aucune réflexion n'apercevait inutiles, c'est la vigueur interne d'une méthode qui dépasse son champ primitif d'application et pose de nouveaux problèmes. Connexion du système mathématique d'un temps, pour lequel la réciprocité d'actions exclut aussi bien les lacunes intérieures, que l'imagination d'un vide extérieur où se situerait la fixité d'un modèle."

En définitive, on en jugera.

J. G. DHOMBRES
Décembre 1975

Je tiens à remercier chaleureusement Mademoiselle MAGNINO pour la grande patience et l'ingéniosité manifestées dans son long travail de dactylographie.

Le texte se divise en deux parties :

- d'une part une glose sur certains textes (tome 1),
- d'autre part des documents (tome 2).

Ces deux parties ne sont pas réunies dans un même volume pour la commodité du lecteur qui pourra suivre les commentaires des textes originaux qu'il aura en même temps devant les yeux.

TABLE DES MATIERES

PREMIER CHAPITRE

NOMBRE ET MESURE DANS LA MATHEMATIQUE GRECQUE JUSQU'A EUCLIDE

"The Greeks first spoke a language which modern mathematicians can understand ; as Littlewood said to me once, they are not clever schoolboys or "scholarship candidates" but "Fellows of another college"

G.H. HARDY

A Mathematician's Apology

Vers 300 avant Jésus-Christ, un corps de doctrines mathématiques est constitué et se trouve magistralement exposé dans les Eléments d'Euclide. Ce dernier a vécu à Alexandrie, dans un milieu hellénistique, à la jonction du 4ème et du 3ème siècle. En dehors de la formation d'Euclide à l'Académie de Platon d'Athènes, nous ne savons rien de ce mathématicien. Nous ignorons presque tout autant les différentes étapes et les antagonismes qui ont dû préluder en Grèce à l'avénement d'un tel ouvrage.

Toutefois, une première constatation est celle de la différence totale de nature entre le corpus composé par Euclide et ce que l'on connaît des mathématiques égyptiennes, babylonniennes ou chinoises. Chez Euclide, non seulement il y a des faits mathématiques, mais on trouve des concepts élaborés capables de production mathématique, c'est-à-dire des définitions convenablement organisées selon un ordre logique à partir de définitions élémentaires, d'axiomes et de postulats et des résultats ordonnés déductivement les uns après les autres sous forme de théorèmes et de propositions.

On pressent que ce corps de doctrine doit aller de pair avec une théorie du monde réel et du monde des idées. Les Dialogues de Platon sont le pendant naturel, presque obligé, des Eléments d'Euclide. Rappelons d'ailleurs les dates de Platon : 427-347. Ce dernier n'est pas novateur en mathématiques, mais son entourage et sa descendance intellectuelle comportent, semble-t-il, les plus grands mathématiciens du temps : Théodore de Cyrène (vers 470) ; Archytas de Tarente (428-347) ; Eudoxe (408-355) ; Théétète (413-369) ; Menechme etc. De même, Aristote (384-322), d'abord disciple de Platon, s'intéressera quelque peu aux mathématiques et certains collaborateurs seront des mathématiciens renommés tels Eudème de Rhodes, Autalycius de Pilane...

Pratique mathématique et théorie platonicienne influent l'une sur l'autre et nous pouvons distinguer, grâce aux textes des Anciens et à leurs commentateurs, quelques échos des discussions. Indiquons d'abord par des citations quel était le statut des mathématiques aux yeux de Socrate que fait parler Platon. Nous en viendrons à quelques points de vue théoriques développés par Platon et qui s'avèrent non négligeables pour la pratique mathématique euclidienne des nombres. La partie essentielle de ce chapitre sera ensuite une analyse d'un texte capital d'Euclide en ce qui concerne les nombres et la théorie des grandeurs : à savoir le livre V des Eléments. Nous passerons plus rapidement sur les autres livres concernant les nombres. Enfin, nous essaierons de faire le point des connaissances grecques sur la théorie des grandeurs, ceci en utilisant les connaissances mathématiques actuelles. Par une sorte de récurrence, historique et épistémologique, nous tenterons de rendre compte de ce qu'ont pu être les différentes écoles de pensée qui ont finalement produit l'oeuvre d'Euclide. Naturellement, une telle démarche ne peut prétendre à l'historicité, mais dans l'état actuel -et sans doute définitif- de la documentation, il est bien difficile d'agir autrement.

1. STATUT DES MATHEMATIQUES SELON PLATON

Dans La République, un texte écrit par Platon vers 380 avant Jésus-Christ, Socrate décrit en particulier la formation idéale que devrait recevoir le futur philosophe appelé à gérer la Cité et à garder l'Etat. Le but de cette éducation est de *"tourner l'âme du jour ténébreux au vrai jour, c'est-à-dire l'élever jusqu'à la réalité"* (cf. Allégorie de la caverne : La République, Livre VII, § I, II, III). Socrate, sous la forme habituelle d'un dialogue avec Glaucon, cherche *"parmi les Sciences celle qui possède ce pouvoir"*.

> *"Quelle peut donc être, Glaucon, la Science qui attire l'âme de ce qui naît à ce qui est".*

Reprenant une discussion antérieure, nos deux philosophes tombent d'accord que ni la gymnastique, qui accorde l'harmonie du corps, ni la musique, sa contrepartie naturelle, qui accorde l'harmonie des habitudes, ne sauraient convenir au but supérieur visé.

> *"Sont-ce les arts ? mais nous n'y avons vu que les oeuvres mécaniques".*

Non.

> *"Prenons une de ces sciences qui s'étendent à tout. Par exemple, cette science générale qui sert à tous les arts, à toutes les opérations intellectuelles, à toutes les sciences et que chacun doit apprendre parmi les premières.*
> *Laquelle ? dit-il.*
> *Cette science très ordinaire, dis-je, qui distingue les nombres un, deux, trois, en un mot la science des nombres et des calculs..."*

Suit une discussion sur l'utilité de l'arithmétique dans l'art de la guerre, mais on revient vite au point clef.

> *"Te fais-tu, repris-je, de cette science, la même idée que moi ?*
> *Quelle idée ?*
> *Elle pourrait bien être une de ces sciences que nous cherchons qui conduisent naturellement à la pure intelligence ; mais on n'en use pas comme il faudrait, toute propre qu'elle est à nous hausser jusqu'à l'être".*

Il s'agit, pour Socrate, d'expliquer ce point de vue. Il indique que parmi les objets qui frappent nos sens, certains n'invitent pas à la réflexion, parce que les sens suffisent à en juger. D'autres, au contraire, engagent la réflexion, parce que *"la sensation qu'ils produisent ne donne rien de sain"*. C'est-à-dire que la sensation produite est de deux impressions opposées : dur et mou, grand et petit, etc. L'entendement doit discerner s'il y a unicité de l'objet ou non.

> *"Si la vue de l'unité offre toujours quelque contradiction, en sorte qu'elle ne paraît pas plus unité que multiplicité, alors on a besoin d'un juge pour en décider ... et c'est ainsi que la perception relative à l'unité est de celles qui poussent et tournent l'âme vers la contemplation de l'être...*
> *Mais s'il en est ainsi de l'unité, repris-je, il en est de même aussi de tous les nombres ?*
> *Assurément.*
> *Or, le calcul et l'arithmétique roulent entièrement sur le nombre ?*
> *Sans contredit.*
> *Alors, ce sont évidemment des sciences propres à conduire à la vérité.*
> *Merveilleusement propres, certainement.*
> *Elles sont donc, semble-t-il, de celles que nous cherchons ; en effet, l'étude en est nécessaire à l'homme de guerre pour ranger une armée, et au philosophe aussi, pour atteindre l'essence et sortir de la sphère de la génération, sans quoi il ne sera jamais un véritable arithméticien".*

Socrate, avec une conviction à la Jules Ferry, souhaite rendre obligatoire l'étude de l'arithmétique pour ceux qui briguent les plus hautes fonctions de l'Etat. Cependant, et la restriction est d'importance, il ne s'agit pas d'une étude superficielle, mais d'arriver,

> *"par la pure intelligence, à pénétrer la nature des nombres, non point pour la faire servir, comme les négociants et les marchands, aux ventes et aux achats, mais pour en faire des applications à la guerre et pour faciliter à l'âme elle-même le passage du monde sensible à la vérité et à l'essence".*

Socrate, ensuite, va marquer le caractère abstrait des mathématiques, et nous aurons à revenir plus tard sur ce point. Pédagogiquement, l'arithmétique permet à ceux qui sont nés calculateurs de saisir rapidement toutes les sciences, et aux esprits les plus pesants, à tout le moins d'accroître la pénétration de leur intellect. En outre, *"il serait difficile de trouver beaucoup de sciences qui coûtent plus d'efforts à apprendre et à pratiquer que celle des nombres".*

Même, l'arithmétique

"donne à l'âme un puissant élan vers la région supérieure, et la force à raisonner sur les nombres eux-mêmes, sans jamais souffrir qu'on introduise dans ses raisonnements des nombres qui représentent des objets visibles ou palpables".

La discussion repart sur l'utilité d'une autre discipline mathématique, la géométrie.

"Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient ; si elle se borne à ce qui naît, elle ne nous convient pas".

En fait, la géométrie a un objet entièrement différent de ce que disent d'elle ceux qui la pratiquent, et qui, avec mesquinerie, ne parlent que de carrer, de construire sur une ligne donnée, etc.

"Or, toute cette science n'est cultivée qu'en vue de la connaissance...Qu'on la cultive pour connaître ce qui est toujours et non ce qui à un moment donné naît et périt".

La discussion envisage l'astronomie, mais Socrate fait remarquer qu'on a oublié de mentionner la géométrie des solides, alors en pleine élaboration, notamment grâce à Théétète.

Toutes ces citations montrent bien que, pour Platon, la mathématique travaille sur des concepts abstraits, et nous essaierons d'indiquer au paragraphe suivant la doctrine platonicienne sur les relations concret-abstrait et sur la méthodologie de la connaissance. Cette abstraction même confère à la mathématique une grande pureté, propre à élever l'âme. Cette volonté de ne pas s'en référer au réel ou aux objets mécaniques usuels va prendre une grande importance pratique sur le développement de la géométrie, mais aussi sur la théorie euclidienne des nombres.

Il est peut-être bon d'opposer dès maintenant un texte bien plus tardif et dû à Plutarque (45-125 après Jésus-Christ), concernant tout l'avantage qu'il y a à utiliser des analogies mécaniques. Il faut aussi reconnaître qu'entre-temps sera venu Archimède ! Cependant, l'opposition concret-abstrait continuera à jouer en mathématiques jusqu'à la mathématique actuelle, et nous aurons l'occasion maintes fois d'en décrire les protagonistes et d'en délimiter les aboutissants.

Le texte est tiré de la vie de Marcellus, consul de Rome, qui vient de planter son camp devant Syracuse où demeure Archimède...

> *"Mais Archimède ne se souciait point de tout cela, comme aussi n'était-ce rien auprès des engins qu'il avait inventés, non que luy en feist autrement cas ny compte, ne qu'il les eust faits comme des chefs d'oeuvres pour montrer son esprit : car c'étoient pour la plus part jeux de la geometrie, qu'il avoit faits en s'esbatant par maniere de passetemps, à l'instance du roy Hiéron, lequel l'avait prie de revoquer un petit la geometrie de la speculation des choses intellectives à l'action des corporelles et sensibles, et faire que la raison démonstrative fust un peu plus évidente et plus facile à comprendre au commun peuple, en la meslant par expérience matérielle à l'utilité de l'usage. Car cet art d'inventer et dresser instrumens et engins, qui s'appelle la mechanique ou organique, tant aimée et prisee de toutes sortes de gens, fut premierement mise en avant par Archytas et Eudoxe, en partie pour resjouir et embellir un peu la science de la geometrie par ceste gentillesse, et en partie aussi pour estayer et fortifier par exemples d'instruments materiels et sensibles, aucunes propositions geometriques, dont on ne peut trouver les démonstrations intellectives par raisons indubitables et nécessaires, comme est la proposition, qui enseigne à trouver deux lignes moyennes proportionales, laquelle ne se peut prouver par raison démonstrative et neantmoins est un principe et fondement nécessaire à beaucoup de choses qui se mettent en portraiture. L'un et l'autre l'a reduitle à la manufacture de quelques instruments qui s'appellent mesolables ou mesographes, qui servent à trouver ces lignes moyennes proportionales, en tirant certaines lignes courbes et sections traversantes et obliques. Mais depuis s'estant Platon courroucé à eulx, en leur maintenant qu'ilz corrompoient et gastoient la dignité, et ce qu'il y avait d'excellent en la geometrie, en la faisant descendre des choses intellectives et incorporelles aux choses sensibles et matérielles, et luy faisant user de matière corporelle, où il faut vilement et trop bassement employer l'oeuvre de la main : depuis ce temps là, dis-je, la mechanique ou art des ingénieurs, vint à estre séparée de la geometrie, et estant longuement tenue en mespris par le philosophe, devint l'un des arts militaires".*

(Nous avons gardé la savoureuse traduction d'Amyot en ancien français).

2. DOCTRINE PLATONICIENNE DES CONCEPTS MATHEMATIQUES

Celui qui faisait graver au fronton de l'Académie : "Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre" attribue aux mathématiques un statut éducatif essentiel comme nous l'avons vu. En outre, ce statut est basé sur une réflexion a priori sur les mathématiques et cette réflexion s'ordonne pour construire une théorie extra-mathématique (et même extra méta-mathématique au sens moderne), théorie dont le but est l'explication de la structure des mathématiques elles-mêmes. L'essentiel de cette réflexion, à nos yeux de scientifiques du XXème siècle, est de dégager le caractère intelligible et déductif de toute construction mathématique. Essayons d'entrer dans le détail.

A la base de l'attitude philosophique platonicienne, il y a la distinction entre le monde des objets sensibles, imparfaits et surtout changeants et le monde de leurs modèles éternels, à savoir les Idées, parfaites et immuables. Bien entendu, la réalité vraie, c'est le monde des Idées, lequel seul donc mérite l'étude puisqu'il s'agit d'un monde non corruptible. Ce monde des Idées est seul intelligible et, dès lors, le raisonnement déductif peut y oeuvrer en toute sécurité.

La question relative aux mathématiques est pour Platon de déterminer le domaine du monde des Idées qu'étudie le mathématicien. En effet, lorsque ce dernier envisage une figure géométrique qu'il dessine sur le sable, par exemple un cercle, ce n'est pas le support matériel bien imparfait qu'il considère, mais le cercle idéal, celui qui répond à la définition du cercle. Ainsi parlant de ceux qui s'occupent de géométrie (La République, Livre VI) :

> *"... Tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures".*

Le support matériel n'est qu'un symbolisme opératoire puisque :

> *"Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'étaient aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée".*

Le mathématicien a donc pour objet l'étude de certains concepts, capables d'une définition statique. Cette définition désigne l'objet étudié, elle en exprime la nature et en délimite le caractère essentiel. Ces concepts sont des données immuables et constituent donc les éléments intangibles -les hypothèses selon le vocabulaire de Platon- sur lesquelles la science est fondée.

> *"Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et d'autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche ; qu'ils les traitent comme choses connues, et que, quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits ; qu'enfin partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquences à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher".*

Comment parvient-on à ces hypothèses de départ ? Platon prétend que puisque ces hypothèses existent a priori et éternellement, nous devons les découvrir en nous, car elles sont évidentes à tous les esprits, comme des objets intuitivement contemplés et non perçus d'abord par l'expérience. Du point de vue méthodologique, pour accéder à ces concepts, on utilise la réminiscence. Citons le fameux dialogue de Socrate qui induit le jeune esclave à résoudre par lui-même le problème de la duplication d'un carré dans Le Ménon (cf. document n° 1 fourni en annexe).

Une fois les hypothèses de départ mises à jour, le raisonnement déductif prend son essor, sans aucunement faire appel aux opinions du monde sensible. Ce côté déductif des mathématiques, à partir d'une donnée axiomatique, trouve son couronnement dans les Eléments d'Euclide et va être d'ailleurs historiquement la pierre de touche de toute science mathématique.

Parmi les modes de raisonnements déductifs possibles, c'est-à-dire la méthodologie utilisable, Platon distingue la méthode analytique qui enchaîne les vérités les unes après les autres à partir de la vérité que l'on veut démontrer : si l'on arrive à un énoncé déjà connu, on essaie de renverser l'ordre des raisonnements pour établir la proposition de départ. Il y a aussi la méthode de réduction à l'absurde, où l'on suppose que la proposition de départ est fausse et on cherche à obtenir une contradiction entre cette hypothèse et les vérités déjà connues et leurs conséquences.

Cependant, les concepts mathématiques n'appartiennent qu'à la première classe des objets intelligibles, celle où dans la recherche qu'il en fait, *"l'esprit est obligé d'user d'hypothèses, sans aller au principe, parce qu'il* *ne peut s'élever au dessus des hypothèses"*. Il existe une deuxième classe d'objets intelligibles.

> *"Ce sont ceux que la raison elle-même saisit par la puissance dialectique, tenant ses hypothèses non pour des principes, mais pour de simples hypothèses, qui sont comme des degrés et des points d'appui pour s'élever jusqu'au principe de tout, qui n'admet plus d'hypothèse. Ce principe atteint, elle descend, en s'attachant à toutes les conséquences qui en dépendent, jusqu'à la conclusion dernière, sans faire aucun usage d'aucune donnée sensible, mais en passant d'une idée à une idée, pour aboutir à une idée".*

L'interlocuteur de Socrate résume la pensée de ce dernier en expliquant que la connaissance de l'intelligible obtenue par la science de la dialectique est plus claire, plus convaincante que celle qu'on acquiert par les sciences, lesquelles ont des hypothèses pour principes et ne viennent que de l'hypothèse à la conclusion, non au principe.

> *"Tu appelles connaissance discursive, et non intelligence, la science des géomètres et autres savants du même genre, parce que la connaissance discursive est quelque chose d'intermédiaire entre l'opinion et l'intelligence".*

Pour préciser la partie essentielle de cette dernière citation, véritable clef de la théorie de la connaissance selon Platon, ajoutons que Socrate a distingué deux espèces : le visible et l'intelligible. Dans le visible, il distingue encore deux classes : dans l'une, il situe les êtres vivants, les plantes, les objets fabriqués par l'homme, et dans l'autre il n'y a que les ombres, les *"fantômes représentés dans les eaux et sur la surface des corps opaques, lisses et brillants"*, en un mot les images de la première classe. Dans l'intelligible, nous avons déjà signalé la distinction capitable entre deux classes, l'une, celle des concepts mathématiques, plus généralement des hypothèses de la science, n'étant que l'image de l'autre, celle des principes. Pour chacune de ces quatre classes, il existe une opération de l'esprit. A la classe des images, la foi, à la classe des êtres visibles, l'opinion, à la classe des concepts de la science, la connaissance discursive, à la classe des principes enfin, l'intelligence dialectique, qui va d'idées en idées sans utiliser des images sensibles ou des hypothèses.

Dès lors, puisque le critère de Platon est la contemplation cognitive de la Vérité, et puisque plus les objets participent de la Vérité, plus ils ont de clarté, si l'on ordonne les classes suivant la clarté, on aboutit à une hiérarchie de la Connaissance selon une maïeutique qui force l'admiration.

La conséquence immédiate de cette hiérarchie, quant aux mathématiques, est que cette science n'atteint pas la vérité immuable. Fruit de l'esprit humain seulement, les mathématiques ne permettent d'appréhender que l'ombre des réalités intangibles. Mais par voie de conséquence, les mathématiques peuvent et doivent se développer selon la seule raison humaine. Le savant mathématicien est devenu maître de sa Science.

3. ANALYSE DU LIVRE V DES ELEMENTS D'EUCLIDE

On trouvera, dans les documents annexes de ce cours, la traduction française du Livre V des Eléments d'Euclide, traduction due à F. Peyrard (1809). Il convient de se reporter constamment à cette traduction dans l'analyse qui va suivre.

3.1 Les manuscrits et l'auteur

Proclus, au 5ème siècle après J.-C., affirme qu'Euclide a composé Les Eléments en réunissant les théorèmes d'Eudoxe, perfectionnant plusieurs autres de Théétète et *"donnant des démonstrations inattaquables de résultats que ses prédécesseurs avaient vaguement esquissés"*. C'est sur des présomptions de ce genre que la plupart des érudits attribuent le Livre V à Eudoxe (408-355 ?). Ce dernier est né et mort à Cnide en Asie Mineure et travailla avec Platon à l'Académie. Sa réputation considérable éblouissait encore Eratosthène (284-192).

Le plus ancien manuscrit grec des Eléments d'Euclide date du Xème siècle et fut découvert dans des manuscrits du Vatican par F. Peyrard dans le tohu-bohu de l'occupation de Rome par les troupes napoléoniennes. Quelques fragments de papyrii du Fayoum des IIIème et IVème siècles attestent la qualité du manuscrit de Peyrard. Les Latins ne traduisirent sans doute pas l'intégralité des Eléments, même si Boèce en incorpora des fragments dans son encyclopédie. Gérard de Crémone (1114-1187) et Campanus (1214-1254) donnent un texte latin complet. Certes, sous l'impulsion des caliphes Al-Ma'-mūn et Al-Mansūr au Xème siècle, les Arabes ont des traductions, celles de Al-Haggaz vers 900 et plus tard celle de Al-Asar Nasīraddin At Tusi (1201-1274). Cependant, ces traductions ne peuvent guère aider à préciser les points obscurs du manuscrit de Peyrard. Il y aurait tout une étude du style à faire concernant le texte d'Euclide, style mathématique qui variera peu jusque vers le XVIIème siècle. La chronique de ces légères variations en soi serait une chose intéressante. Bien entendu, nous ne saurions l'entreprendre ici.

3.2 Environnement intellectuel du Livre V

Une des premières démarches de nature mathématique est certainement de comparer entre elles des choses de même espèce, de faire des rapports au sens courant du terme, donc de vouloir mesurer des grandeurs.

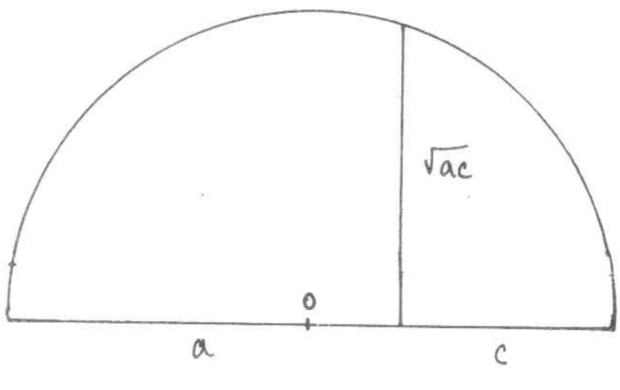
Avant toute théorie mathématique des rapports, il y a émergence d'une notion commune, ne serait-ce que le rapport d'un groupe armé de 12 hommes à celui d'un autre groupe de 7 hommes !

Que ce soit dans les premiers corpus babyloniens, égyptiens ou chinois, on trouve toujours des rapports et des proportions particulières sous la forme de moyennes (μεσόζης) :

- la proportion de la moyenne géométrique (ἀναλογία) de la forme $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (avec la remarque très ancienne que $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ et $b = \sqrt{ac}$ en notation moderne),
- la proportion harmonique $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ (et donc $\frac{b}{2} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$) ,
- la proportion arithmétique $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$.

La moyenne géométrique est de construction géométrique élémentaire selon le dessin ci-joint. Cette construction est obtenue d'ailleurs à la Proposition 13 du Livre VI (cf. Figure 1).

Figure 1



En outre, les proportions surviennent pour préciser quantitativement la notion de similitude laquelle (sous la forme du théorème de Thalès par exemple) remonte à la plus haute antiquité et est d'usage courant chez les architectes. La proportion harmonique peut fort bien avoir une origine musicale, etc.

Très tôt aussi, on s'est rendu compte que certains rapports avaient un aspect fort différent des rapports tels que le rapport de 2 à 3 etc. Ainsi de la longueur de la diagonale du carré comparée à celle du côté du même carré. Un multiple entier de la première longueur ne sera jamais égal à un autre multiple entier de la seconde. C'est la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, à partir du théorème de Pythagore. Découverte certainement très ancienne puisque repéré dans la tablette Plimpton N° 322, en haute époque babylonienne.

Nettement plus tard, Théétète dispose d'une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{17}$, laquelle démonstration utiliserait peut-être un procédé d'approximation par passage à la limite. Ce passage à la limite, basé on s'en doute sur des faits sensibles du monde matériel, ne pouvait que déplaire aux Platoniciens d'après ce que nous avons vu. Ceux-ci n'ont pas manqué de chercher à remettre sur des bases fermes l'idée de rapport. L'arithmétique ne pouvait y suffire puisqu'il fallait considérer (même sans le dire) les irrationnels et la géométrie des figures semblables semblait avoir laissé trop de place à l'intuition sensible. Cette volonté de base ferme, d'enchaînement linéaire d'axiomes, de définitions et de propositions trouve de fervents protagonistes, notamment en la personne d'Eudoxe, en tous cas de l'auteur du Livre V et bien sûr d'Euclide. Rappelons que le titre grec des Eléments est στοιχεῖον, littéralement alignement. Et cette volonté débouche sur les 13 livres d'Euclide et sur un chef d'oeuvre, le Livre V.

Ce Livre V doit donc être dépouillé de notions arithmétiques (nombres rationnels, etc) et géométriques (similitudes, etc). Il l'est comme on le verra plus **loin**. Il doit aussi être dépouillé de ces notions encore vagues de limite ou de continu, tant pour des raisons philosophiques que pour ne pas être soumis à la dure critique des fameux paradoxes de Zénon (cf. §6.2). Là aussi, le Livre V y parvient bien, à l'exception toutefois de la quatrième proportionnelle (cf. § 3.5 et les remarques suivant la Définition 9 du Livre V).
Par exemple, le Livre V, avec l'emploi de ce qui s'appellera l'axiome d'Archimède, évite les pièges des grandeurs non archimédiennes (cf. Remarques suivant la Définition 5 du Livre V). Des grandeurs non archimédiennes liées aux infinitésimaux avaient pourtant droit de cité, même dans les Eléments. Ainsi la notion d'angle contingent, c'est-à-dire de "l'angle" déterminé par un arc de cercle et la tangente à ce cercle, appelé "angle corniculaire" (cf. figure 2).

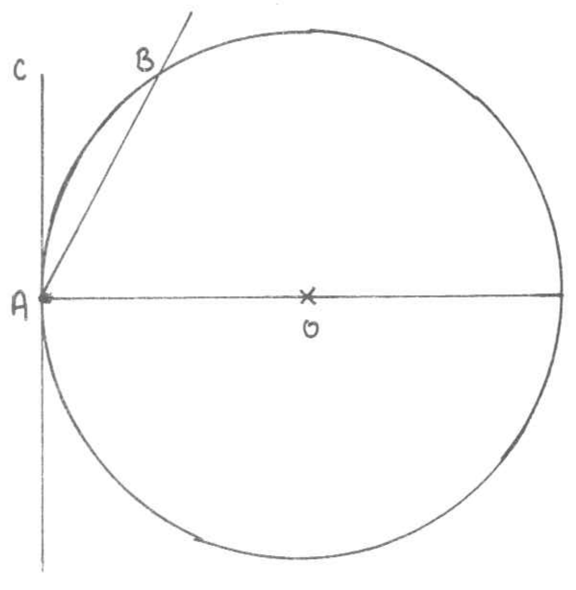


Figure 2

Cet angle corniculaire intervient à la proposition 16 du Livre II. Il est défini comme la portion d'espace comprise entre le cercle et la droite menée perpendiculairement au rayon OA du cercle. Dans cette portion d'espace, dit la Proposition, on ne peut mener aucune droite et l'angle corniculaire est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu. Un scoliaste d'Euclide, Proclus, ajoute dans ses commentaires au premier Livre des <u>Eléments</u>, que cet angle corniculaire ne peut être une grandeur car

> *"si l'angle était une grandeur, puisque toutes les grandeurs finies du même genre ont un rapport entre elles, tous les angles du même genre, c'est-à-dire ceux qui sont dans les surfaces, auraient un rapport entre eux ; de sorte que l'angle corniculaire aurait un rapport avec l'angle rectiligne. Or les choses qui ont un rapport entre elles peuvent se dépasser l'une l'autre si elles sont multipliées ; donc l'angle corniculaire pourrait finalement dépasser l'angle rectiligne ; ce qui est impossible car il est démontré que l'angle corniculaire est plus petit que tout angle rectiligne..."*

Tel est donc l'environnement intellectuel du <u>Livre V</u>. Nous échafauderons plus loin quelques hypothèses sur l'état des mathématiques grecques avant Euclide (§ 6 du chapitre I).

3.3 <u>Les définitions</u>

Parmi les vingt définitions de ce Livre, certaines sont essentielles, d'autres semblent troubles, d'autres enfin témoignent de préoccupations bien particulières (de la définition 13 à la définition 20).

Il ne faudrait certes pas demander au texte une précision à la moderne, du genre : les éléments que nous appelons grandeurs appartiennent à un groupe totalement ordonné, etc. Pour la commodité de l'analyse, et conscient des risques énormes de confusion mentale, j'utiliserai cependant quelquefois les concepts modernes en les repoussant le plus possible à la section IV (<u>les résultats vus du XXème siècle</u>). Toutefois, j'utiliserai plus fréquemment les notations algébriques désormais classiques.

Donc Euclide ne définit pas ce qu'il entend par grandeur.

Définitions 1 et 2 . Le verbe "mesurer" ici employé signifie que la plus grande grandeur est un multiple entier de la plus petite. A est partie de B si $nA = B$ pour un certain entier n . (Penser au vocable partie aliquote).
D'ailleurs le livre des Eléments d'Euclide qui traite des figures semblables (Livre VI) vient juste après le livre des proportions.
J'aurais tendance à penser que les deux définitions établissent que l'on peut diviser à volonté une grandeur. Si A est une grandeur et n un entier, il existe une grandeur B et $A = nB$.
Il peut aussi paraître que l'emploi d'un verbe, "mesurer" en l'occurence, rend actif en un sens le rôle de l'entier m , lequel serait opératoire, transformant une grandeur A en mA . Cet aspect "opérateur" sera examiné plus loin.

La Définition 3 m'est obscure sauf à donner une vague idée de ce qui va venir. Le mot essentiel est peut-être le qualificatif "homogènes" car le mot "quantité" est une tautologie quand on parle de grandeur. Le mot "raison" traduit ici le grec λόγος et rappelons à ce propos que le mot "irrationnel" est ἄλογος. En langage français moderne, on utiliserait plutôt le mot "rapport" que le mot "raison", bien que je trouve au premier vocable un certain avantage pédagogique de distanciation.

La Définition 4 , qui ne figure pas dans tous les manuscrits, ne dit rien que vaille à ce niveau. Il faut la repousser plus loin.

La Définition 5 est importante. Elle restreint les seules grandeurs auxquelles nous pourrons associer une raison. Ce sont celles pour lesquelles A et B étant deux grandeurs, il existe toujours un entier n (Pour les Grecs, 0 et d'ailleurs 1 ne sont pas des nombres entiers. Nous supposerons toujours $n \neq 0$ dans tout ce qui suit) et $nA > B$.

L'habitude est prise d'appeler cette définition axiome d'Archimède, peut-être parce que ce dernier, citant ses précurseurs, en a magnifié l'intérêt (En particulier dans son Traité de la quadrature de la parabole).

Historiquement parlant, la définition 5 empêcha les mathématiciens du XVIIIème siècle de travailler avec bonne conscience, c'est-à-dire d'utiliser le Livre V péremptoirement en ce qui concerne les infiniment petits. Attardons-nous sur ce point dans un langage moderne et considérons l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'axe réel sur un voisinage de l'origine, continues en O et nulles en ce point. On peut convenir que $f \succ g$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a > 0$ et pour tout x, $|x| < a$, on a : $|f(x)| < \varepsilon |g(x)|$.
C'est la relation d'infiniment petit (en notation de Landau $f = o(g)$). Le préordre $\succ$ n'est certes pas total (ni antisymétrique), mais on peut se restreindre à

des familles où l'ordre soit total. C'est ce que faisaient les mathématiciens de l'âge classique en prenant par exemple tous les polynômes nuls en zéro et de tous degrés. L'ordre ainsi obtenu n'est cependant pas archimédien puisqu'il n'existe aucun entier n tel que $nx^2 > x^3$!
Nous avons déjà noté que les Grecs considéraient des "grandeurs" non archimédiennes avec l'exemple dûment explicité de l'angle corniculaire.

La Définition 6 est la définition essentielle du Livre V. Soient quatre grandeurs A,B,C et D. On dit que A et B ont même raison que C et D lorsque pour tous entiers n et m on a :

. Si $nA > mB$ alors $nC > mD$.
. Si $nA = mB$ alors $nC = mD$.
. Si $nA < mB$ alors $nC < mD$.

La Définition 6 parle remarquablement à un moderne, mais elle fut jugée soit trop floue, soit trop inutilement compliquée, voire impossible à utiliser, par bien des mathématiciens, notamment depuis la Renaissance (Galilée, par exemple, mais peut-être parce qu'il avait des arrière-pensées non archimédiennes -et nous y reviendrons- et beaucoup d'autres mathématiciens).

Une objection fréquente précise qu'il faut une infinité d'opérations pour vérifier la proportionnalité (tous n, tous m). Ce point est épistémologiquement crucial. Nous reportons la discussion plus loin. Une autre objection concerne le caractère non naturel de la définition. Là, on trouve une critique constante en mathématiques. Il faut surtout reconnaître que la notion de "λόγος", de "proportion", était passée dès la fin du Moyen-Age et sans doute déjà chez les Anciens dans la langue usuelle et avait prise une connotation pratique (même partie aliquote). On souhaitait donc l'impossible : cette notion pratique sous la plume d'Euclide ! Vers 1666, un mathématicien comme Isaac Barrow, professeur de Newton, est obligé de justifier, défendre et illustrer la définition euclidienne du λόγος devant ses contemporains. Il semble d'ailleurs être le premier moderne à saisir le sens du Livre V.

Au XIXème siècle même, on remplacera quelquefois cette définition par une autre, laquelle établit que A,B,C,D forment une proportion lorsque mesurant A et C par les mêmes sous-multiples, par ailleurs quelconques, de B et D respectivement, on obtient les mêmes quotients (Faifofer, Elementi di geometria, 3ème ed. 1882). C'est-à-dire si $A = m\frac{B}{n}$ et $C = m'\frac{D}{n}$ alors $m = m'$. Cela revient à n'accepter que des valeurs rationnelles pour $\frac{A}{B}$, restriction arithmétique dont justement la construction d'Eudoxe veut se débarrasser. C'est une sérieuse incompréhension du texte d'Euclide.

La Définition 7 permet de comprendre la Définition 4. En grec, proportionnel se dit ἀνάλογον, ce qui est typique de l'économie de vocabulaire utilisé par Euclide.

La Définition 8 traite des inégalités. On part de quatre grandeurs A,B,C et D. Si pour des entiers n et m, on a $nA > mB$, et $nC < mD$, on dit que la raison de A avec B (que je vais noter A/B) dépasse la raison de C avec D (C/D). Bien entendu, cette inégalité est plus facile à vérifier que la Définition 7 mais elle ne peut que lui succéder.

On peut ergoter sur la possibilité d'utilisation de $>$ dans un sens et de $<$ dans l'autre sens. Il faut peut-être souligner que l'on devrait, en moderne, ne pas utiliser la même notation $>$ pour désigner l'ordre sur les grandeurs et l'ordre sur les raisons.

Il me paraît surtout important de noter que la Définition 8 établit en fait un ordre sur les raisons. Mais on se sert pour ce faire de couples représentatifs (A,B) et (C,D) de grandeurs. Une vérification indispensable concerne la cohérence de la définition de cet ordre, à savoir :

Si (A,B ; A',B') sont des grandeurs proportionnelles, ainsi que (C,D ; C',D') , la relation d'ordre entre les raisons définies par (A,B) et (C,D) est la même que celle entre les raisons définies par (A',B') et (C',D'). La vérification est immédiate à partir de la Définition 6. Il est d'ailleurs permis de penser que ce point illustre, aux yeux d'Euclide, le bien-fondé de cette Définition 6.

En outre, les Définitions 6 et 8 établissent que l'ordre sur les raisons est un ordre total, c'est-à-dire que l'on peut toujours comparer deux raisons. Les modernes (De Morgan par exemple) veulent cependant prendre Euclide en défaut de logique à ce niveau. Il conviendrait en effet de montrer que l'ordre sur les raisons est antisymétrique, c'est-à-dire qu'on ne saurait avoir simultanément $A/B > C/D$ et $C/D > A/B$. Supposons donc que des entiers m, n ; p et q soient tels que :

$$nA > mB \quad \text{et} \quad nC < mD$$
$$pA < qB \quad \text{et} \quad pC > qD$$

En multipliant par p les deux premières inégalités :

$$(pn)A > (pm)B \quad \text{et} \quad (pn)C < (pm)D$$

et par n les deux inégalités suivantes :

$$(np)A < (nq)B \quad \text{et} \quad (np)C > (nq)D$$

soit

$$(nq)B > (pm)B \quad \text{et} \quad (pm)D > (nq)D$$

d'où $nq > pm$ et $pm > nq$

Il y a contradiction. La démonstration ci-dessus fait usage de deux résultats :

- d'une part, que $p(nA) = (pn)A$ et ceci est établi à la Proposition 3 du Livre V ;

- d'autre part, que $nA > mA$ équivaut à $n > m$ (au sens des entiers).

La Proposition 6 procure sans peine cette équivalence, laquelle sera d'ailleurs implicitement utilisée par Euclide.

Les Définitions 9, 10 et 11 concernent le cas $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$. Le mot intéressant est celui de raison double, qui correspond en langage moderne à $\frac{A}{C} = (\frac{B}{C})^2$. Mais alors là intervient quelque chose de bien nouveau : la multiplication d'une raison par elle-même. Et voici que la définition 10 semble signifier $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D}$, du moins lorsque $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$, donc correspondre au "produit" de trois raisons !

Pourtant, on ne trouve pas trace dans Euclide d'une définition consciente du "produit" de deux raisons quelconques, ni d'ailleurs du mot "produit" en ce sens. L'expression "composition" de deux raisons intervient dans quelques textes postérieurs, notamment chez Archimède ou Pappus. Elle n'intervient pas au Livre V, sauf donc avec la notion de raison double ou triple, etc, qui semble correspondre à la composition de raisons égales. On pourrait voir dans cette inutile restriction un relent géométrique : pour géométriser le produit, on construit des carrés voire des cubes. On ne peut aller plus loin au niveau géométrique d'Euclide !

Pour bien manifester certaine ambiguïté, le mot διπλασίων (double), au sens moderne de carré, est utilisé par d'autres (Nicomaque, Pappus, Archimède) pour signifier la raison de 2 à 1.

Certes, l'expression "composition de raisons" intervient au Livre VI (Définitions 5 et 23). On pense généralement que ces définitions sont des interpolations du temps de Théon d'Alexandrie (vers le IVème siècle après Jésus-Christ).

> *"Une raison est dite une composée de raisons lorsque la multiplication des tailles des raisons est une raison".*

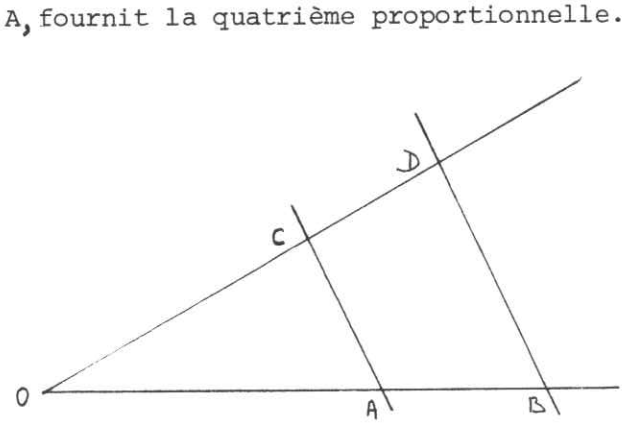
C'est bien obscur (Une "taille" de raison ? une "multiplication" ?). Le mot grec utilisé pour taille est πηλικότητες, et on a voulu y voir la seule signification de nombre (ἀριθμός), ce qui ne peut convenir d'après ce que nous savons des ambitions d'Eudoxe. Le mot "taille" suggère surtout une idée de comparaison (entre grandeurs géométriques) par opposition à une idée de dénombrement. Nous reviendrons sur ce point au § 6 .

La Définition 23 du Livre VI, quant à elle, parle brutalement de composition des raisons pour ce qui correspond à notre idée de produit.
Quoiqu'il en soit, et nous essaierons plus tard de nous livrer à des conclusions, le mot de "composition" suggère une explication plausible, tant pour les Définitions 10 et 11 que pour d'autres emplois implicites. C'est De Morgan, semble-t-il, qui l'énonça le premier et cette explication fut reprise par N. Bourbaki (Note historique du Chapitre 4, Livre III, Topologie Générale, 3ème édition, Hermann 1960).

L'explication tiendrait à ce que les raisons constituent des opérateurs sur les grandeurs. Précisément, si $\frac{A}{B}$ est la raison de la grandeur A par rapport à la grandeur B, alors : $A = (\frac{A}{B}).B$.
Dès lors, la composition des raisons n'est autre que la composition des opérateurs.
Cependant, pour que l'on puisse toujours parler de la grandeur résultant de l'action de $\frac{A}{B}$ sur une grandeur C, c'est-à-dire de $(\frac{A}{B}).C$, il convient d'établir la Proposition suivante, dite de la quatrième proportionnelle.

Proposition. Soient A,B et D trois grandeurs. Il existe une grandeur C telle que A et B aient même raison que C et D.

Une telle proposition, non explicitée chez Euclide, interviendra cependant de façon implicite dans certaines démonstrations (cf. Proposition 18 par exemple). Toutefois, une proposition analogue est obtenue au Livre VI (Proposition 12) pour un cas particulier de grandeurs à savoir les longueurs rectilignes. En effet, ce n'est rien d'autre que le théorème de Thalès. Si A et B sont deux longueurs rectilignes (représentées par OA et OB), si D est une troisième longueur (représentée par OD), la longueur C (représentée par OC), obtenue en prenant l'intersection de la droite support de OD et de la parallèle à DB menée par A, fournit la quatrième proportionnelle.



Euclide a-t-il présupposé ce résultat géométrique, lui si précautionneux dans son Livre V de ne pas faire usage de résultats géométriques ou arithmétiques concernant les grandeurs ?

Dès lors que nous tiendrions pour acquise l'existence de la quatrième proportionnelle, l'idée de composition des opérateurs devient naturelle, puisqu'en langage moderne :

$$\left(\left(\frac{A}{B}\right) \circ \left(\frac{C}{D}\right)\right) . E = \left(\frac{A}{B}\right) . \left[\left(\frac{C}{D}\right) . E\right] .$$

Nous reviendrons un peu plus loin sur la quatrième proportionnelle (§ 3.5).

La Définition 12 fournit un vocabulaire commode, mais non indispensable, pour dire que dans $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, A et C sont homologues (les antécédents) et de même B et D (les conséquents). D'ailleurs, homologue traduit le grec ὁμό λογος. Ce vocabulaire simplifie l'énoncé des définitions 13 à 20.

Partons de quatre grandeurs A,B,C et D et supposons que A et B ont même raison que C et D.

La raison alterne, selon la Définition 13, est celle que font A et C (ou B et D). La raison inverse, selon la Définition 14, est celle que font A + B et B (ou C + D et D). Le mot composé utilisé en français par Peyrard est tout à fait distinct de l'importante composition des raisons (συγκείμενος λόγος) dont nous avons parlé après la Définition 10.

La division de raison, vocable mal choisi, selon la Définition 17, signifie $\frac{A-B}{B}$, la conversion de raison signifie $\frac{A}{A-B}$.

La Définition 18 déclare qu'il y a raison par égalité pour $\frac{A_1}{A_n}$ et $\frac{a_1}{a_n}$ lorsque $A_1,\dots,A_n$ et $a_1,\dots,a_n$ sont deux familles de grandeurs telles que $\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ pour $i = 1, 2, \dots, (n-1)$. C'est une définition, et l'on prouvera à la Proposition 22 que la raison par égalité correspond à l'égalité des raisons.

La Définition 19 est bien inutile. N'est-elle pas une manie de mathématicien lequel veut définir une "proportion troublée" et par antithèse tient à envisager ce que pourrait être une proportion non troublée, c'est-à-dire "ordonnée" ?

La Définition 20, dernière définition du Livre V, déclare que la proportion est troublée si A_1, A_2 et A_3 sont des grandeurs ainsi que a_1, a_2 et a_3 avec :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_2}{A_3} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{A_1}{A_2} .$$

On en déduira (Proposition 23) que dans ce cas, on a quand même l'égalité de raisons $\frac{a_1}{a_3} = \frac{A_1}{A_3}$.

3.4 Les Propositions

Il est fastidieux de reprendre les propositions une à une en glosant sur les démonstrations. Le texte d'Euclide exige un léger effort pour celui qui est trop habitué à la souplesse des notations algébriques. On suivra mieux Euclide en prononçant nos notations usuelles et nous invitons le lecteur à faire quelques essais (par exemple les Propositions 6, 16 ou 20). On sera aussi étonné de voir qu'après avoir énoncé en langage "littéraire" mais précis une Proposition, Euclide reprend ensuite l'énoncé avec des lettres et un langage mathématique avant d'effectuer toute démonstration. Il faut enfin noter qu'Euclide agrémente son texte de dessins, des segments rectilignes, mais il entend bien que son raisonnement reste abstrait et ne repose pas sur la géométrie.

Proposition 1 . $mA_1 + mA_2 + \dots + mA_n = m(A_1 + \dots + A_n)$.
Evidemment, ce qu'Euclide utilise sans le dire, c'est l'associativité et la commutativité de l'addition des grandeurs en divisant m en unités.

Proposition 2 . Avec les notations d'Euclide, $nA_2 + mA_2$ est le même multiple de A_2 que $nA_4 + mA_4$ l'est de A_4.
Cela revient, peu ou prou, à dire que $(n+m)A = nA + mA$. De même, la démonstration décompose m et n en unités.

Proposition 3 . Avec les notations d'Euclide, $l(kA_2)$ est le même multiple de A_2 que $l(kA_4)$ l'est de A_4.
Cela revient à dire $n(mA) = (nm)A$.

Proposition 4 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}$ pour tous les entiers m et n.
La démonstration est basée sur la Définition 6.

Proposition 5 . $m(A-B) = mA - mB$.
Ici, Euclide utilise, sans vraiment l'établir préalablement (Définition 1), que l'on peut diviser toute grandeur par un entier n. Pour tout entier n, et toute grandeur A, il existe une grandeur B et $nB = A$.
Une fois encore, Euclide utilise $mA > mB$ implique $A > B$.
La démonstration d'Euclide de la Proposition 5, en langage moderne, est la suivante. Soit C telle que $mC = mA - mB$. On a alors $mC + mB = mA$ et $m(C+B) = mA$ d'après la Proposition 1. Donc $C+B = A$ d'où $C = A-B$.
Des commentateurs (Peletarius ou Campanus) ont depuis fort longtemps établi cette Proposition sans passer par l'hypothèse de division. Il suffit de partir de $D = m(A-B)$ et d'ajouter mB selon $mB+D = m(A-B)+mB = mA$ d'après la Proposition 1. Donc $D = mA - mB$. Personnellement, je vois mal l'intérêt d'une théorie des

proportions où l'on ne pourrait pas diviser une grandeur et je pense que la Définition 1 assure aussi l'existence de la division.

<u>Proposition 6</u> . $mA - nA = (m-n)A$.
Analysons cette proposition. En fait, l'énoncé d'Euclide est un peu différent de l'égalité algébrique $mA - nA = (m-n)A$. L'énoncé dit : soient A et B deux grandeurs, alors $mA - nA$ est le même multiple de A que $mB - nB$ l'est de B .

Il est normal qu'Euclide ne veuille pas noter $(m-n)$ car la notion de différence d'entiers et l'arithmétique ne sont pas envisagées avant le Livre VII. La démonstration se fait d'abord dans le cas où $mA - nA = A$ et Euclide la conduit comme suit (J'ai seulement changé ses notations en prenant une grandeur A au lieu de AH) :
Soient A, B deux grandeurs ainsi que nA, nB et mA, mB . Supposons d'abord $mA - nA = A$. Ajoutons B à nB ce qui donne, d'après la Proposition 2, une grandeur qui est à B ce que mA est à A et donc aussi ce que mB est à B . Donc $nB+B = mB$. Retranchons nB aux deux membres. Il reste : $B = mB - nB$, ce que nous voulions démontrer.

Euclide laisse au lecteur le soin de généraliser au cas $mA - nA = pA$ $(p \neq 1)$, mais fait un dessin explicatif (tandis que les versions arabes donnent une démonstration). On notera que la possibilité de soustraction d'une même quantité aux deux membres d'une égalité n'est pas rappelée car c'est une notion commune (cf. Livre I des <u>Eléments</u>, voir documents annexes).
Remarquons que l'on déduit sans peine de cette Proposition que $mA > nA$ équivaut à $m > n$ (si l'on sait que l'ordre sur les grandeurs est total, comme sur les entiers).

<u>Proposition 7</u> . $A = B$ implique $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ et $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ pour toute grandeur C .

<u>Proposition 8</u> . $A > B$ implique $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ et $\frac{C}{A} < \frac{C}{B}$ pour toute grandeur C .

<u>Proposition 9</u> . Si $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ pour une grandeur C alors $A = B$; si $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ alors $A = B$.
(On utilise ici encore que l'ordre est total sur les grandeurs).

<u>Proposition 10</u> . $\begin{cases} \frac{A}{C} > \frac{B}{C} & \text{implique } A > B . \\ \frac{C}{A} > \frac{C}{B} & \text{implique } A < B . \end{cases}$

Un commentateur, Simson, a noté un manque dans la démonstration d'Euclide, en ce sens qu'il n'a pas effectivement montré, disons en langage moderne, l'antisymétrie de l'ordre introduit sur les raisons. On peut y pallier par la remarque qui fait suite à la Définition 8 ou par une démonstration directe.

Proposition 11 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $\frac{C}{D} = \frac{E}{F}$, alors $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$.

C'est la transitivité de l'égalité sur les raisons. Le plus remarquable est qu'Euclide se donne la peine, bien entendu nécessaire, de démontrer la Proposition 11 en utilisant la Définition 6.

Proposition 12 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$ implique $\frac{A}{B} = \frac{A + C + E}{B + D + F}$.

Proposition 13 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$ implique $\frac{A}{B} > \frac{E}{F}$.

Proposition 14 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $A > C$ implique $B > D$.
$A = C$ implique $B = D$.
$A < C$ implique $B < D$.

Proposition 15 . Pour tout entier m , $\frac{mA}{mB} = \frac{A}{B}$.

Proposition 16 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$.

Analysons l'admirable démonstration d'Euclide en adaptant seulement le langage. Soient m et n des entiers, $\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$ (Proposition 15) ainsi que $\frac{C}{D} = \frac{nC}{nD}$.
Par suite, comme $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ on a $\frac{mA}{mB} = \frac{nC}{nD}$ (Proposition 11).
Donc, si $mA > nC$ alors $mB > nD$; si $mA = nC$ alors $mB = nD$ et si $mA < nC$ alors $mB < nD$ (Proposition 14). Mais cela entraîne que $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ d'après la Définition 6.

Proposition 17 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$.

Proposition 18 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$.

Cependant, Euclide utilise implicitement la proposition de la quatrième proportionnelle, laquelle n'est pas conséquence de ses axiomes (cf. discussion § 1.3.5). Simson a fourni une démonstration directe qui reste dans le cadre des démonstrations d'Euclide.

Proposition 19 . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{A-C}{B-D} = \frac{A}{B}$.

Proposition 20 . J'ai gardé les lettres utilisées par Euclide. On lit :

Si $\frac{A}{B} = \frac{\Delta}{E}$ et $\frac{B}{\Gamma} = \frac{E}{Z}$ alors $A > \Gamma$ implique $\Delta > Z$,
$A = \Gamma$ implique $\Delta = Z$,
et $A < \Gamma$ implique $\Delta < Z$.

Avec cette proposition 20 et les 3 propositions suivantes, on tourne autour de la notion peu explicitée de composition des raisons (cf. Définitions 10 et 11). La proposition 22 par exemple justifie une simplification évidente avec nos notations, mais qui ne possède pas cette évidence quand on n'utilise pas ces notations modernes, ce qui est le cas d'Euclide. Bien sûr, c'est une amorce des propriétés du produit ; amorce qui justifie en partie la remarque par laquelle on envisage $\frac{A}{B}$ comme un opérateur.

<u>Proposition 21</u> . $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$ et $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ alors si $A > C$ on a $D > F$; de même, si $A = C$ on a $D = F$, si $A < C$ on a $D < F$.

<u>Proposition 22</u> . $\frac{A}{B} = \frac{D}{E}$ et $\frac{B}{C} = \frac{E}{F}$ alors $\frac{A}{C} = \frac{D}{F}$.

<u>Proposition 23</u> . $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$ et $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ alors $\frac{A}{C} = \frac{D}{F}$.

<u>Proposition 24</u> . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et $\frac{E}{B} = \frac{F}{D}$ alors $\frac{A+E}{B} = \frac{C+F}{D}$.

<u>Proposition 25</u> . $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ et A est la plus grande, D la plus petite, alors $A+D > B+C$.

(Bien que cela ne figure pas dans Euclide, avec $B = C$, on en déduit $\frac{A+D}{2} > B$ où $B = \sqrt{AD}$, donc la comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique).

On comprend, à la fin de ce <u>Livre V</u>, la phrase de I. Barrow, lequel a tant fait dans ses cours de Cambridge au XVIIème siècle pour faire comprendre la profondeur du <u>Livre V</u>, sérieusement occultée à l'époque par des considérants géométriques : "In my judgment, there is nothing extant in the whole work of the Elements more subtilly invented, more solidly established, or more accurately handled than the Doctrine of Proportionalities".

3.5 <u>La quatrième proportionnelle</u>

Essayons, <u>dans notre langage moderne</u>, de voir ce que l'on pourrait faire pour démontrer la Proposition de la quatrième proportionnelle à partir des définitions du Livre V.

Le plus simple est bien sûr de la mettre en axiome. Ne le faisons pas, et considérons trois grandeurs A, B et D. Si C est une grandeur telle que $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, alors pour toute grandeur C' , $C' > C$, on a aussi $\frac{C'}{D} > \frac{A}{B}$. De même, si C est une grandeur telle que $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$, alors pour toute grandeur C', $C' < C$, on a aussi $\frac{C'}{D} < \frac{A}{B}$.

Toutefois, on dispose d'une propriété supplémentaire. Si $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$, il existe C' , $C' < C$ et cependant on a encore $\frac{A}{B} < \frac{C'}{D}$. Etablissons ce dernier point. Il existe n et m entiers, tels que $mB > nA$ et $nC > mD$. Soit C'' une grandeur telle que $C'' < \frac{E}{n}$, par exemple $\frac{E}{2n}$ où $E + mD = nC$. Posons $C' = C - C''$, ce qui est possible puisque $C > C''$. Dans ce cas, $nC' > mD$ et donc $\frac{C'}{D} > \frac{A}{B}$ avec $C' < C$. Nous avons seulement utilisé la possibilité de diviser une grandeur et la notion de soustraction (Si $A > B$, il existe C. telle que $A = B + C$: on note $C = A - B$).

Par suite, $\frac{A}{B}$ étant fixe, ainsi que D , on distingue deux classes de grandeurs C . Celles pour lesquelles $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$ et celles pour lesquelles $\frac{C}{D} < \frac{A}{B}$. On établit sans peine que ces deux classes ne sont pas vides et s'excluent mutuellement. En outre, toute grandeur qui surpasse une grandeur de la deuxième classe est en fait dans la deuxième classe et toute grandeur qui est surpassée par une grandeur de la première classe est dans la première classe. Admettons qu'il y ait une grandeur intermédiaire C_o , dépassant toute grandeur de la première classe et inférieure à toute grandeur de la seconde classe. La grandeur C_o est nécessairement la quatrième proportionnelle cherchée.

En effet, si C_o appartient à la deuxième classe, on a vu qu'il existe C_o' , $C_o' < C_o$, appartenant encore à la deuxième classe. Ceci nie la propriété supposée de C_o inférieure à tout élément de la seconde classe. De même quant à l'appartenance de C_o à la première classe.
Cependant, puisque l'ordre sur les raisons est total (cf. Définition 8 et remarques qui suivent) et puisque $\frac{C_o}{D}$ ne peut ni dépasser $\frac{A}{B}$ ni lui être inférieur, c'est que $\frac{C_o}{D} = \frac{A}{B}$.

Toute la démonstration repose sur cette grandeur intermédiaire dont on peut intuitivement concevoir l'existence en parcourant dans l'ordre toutes les grandeurs en partant d'une des grandeurs de la première classe et en admettant que les grandeurs varient de façon "continue".

Ce n'est pas une preuve, mais par le vocabulaire invoqué (Continuité, etc) et à qui connaît $\mathbb{R}$, la Proposition de la quatrième proportionnelle paraît comme une conséquence d'un résultat de continuité (du genre théorème des valeurs intermédiaires), voire de borne supérieure.

Nous reviendrons dans un autre chapitre sur la technique utilisée qui est évidemment celle des coupures de Dedekind. Cette technique marque-t-elle une étape totalement neuve par rapport à Euclide ? C'est un problème épistémologique précis qu'il nous faudra examiner (cf. Chap. V).

Par opposition, avec les nombres entiers seulement, on peut se contenter d'une théorie moins forte, à savoir celle qu'Euclide utilise justement au Livre VII. En effet, si les grandeurs sont les nombres entiers, les raisons seraient nos nombres rationnels (strictement positifs) et la Proposition de la quatrième proportionnelle est fausse : il n'existe pas de nombre entier n tel que $\frac{5}{3} = \frac{n}{4}$. La Proposition de la quatrième proportionnelle est exacte en prenant comme ensemble de grandeurs les nombres rationnels strictement positifs (réduction des fractions) et donc la Proposition de la quatrième proportionnelle est beaucoup moins forte qu'un résultat de valeurs intermédiaires ou de borne supérieure. En langage moderne, on sait que le groupe topologique des nombres rationnels est très pathologique (non localement compact, non localement connexe, etc). Nous devrons revenir sur ces points.

3.6. La duplication du cube

Pour nous reposer un peu, commençons par une jolie histoire contée par Eutocius et Plutarque. Les habitants de Délos souffrant d'une fièvre pestilentielle, après avoir consulté l'oracle de la ville, furent conviés à doubler le volume de l'autel cubique où l'on honorait Apollon. Mais en doublant le côté de l'autel cubique, on n'obtenait pas un volume double. Que faire ? Il paraît que Platon aurait tiré la morale de l'histoire en avisant ses compatriotes que le Dieu avait surtout manifesté son courroux devant le peu d'empressement des Grecs à étudier les mathématiques.

Le mathématicien pythagoricien Hippocrate de Chios, vers le 5ème siècle avant notre ère, établit que le problème de la duplication du cube se ramène à un problème de proportions.

En notations modernes, a étant le côté du cube initial, il s'agit de résoudre $x^3 = 2a^3$. Il suffit alors de trouver des nombres x et y de sorte que $(a,x;x,y)$ soient proportionnelles ainsi que $(x,y;y,2a)$. Soit $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ et $\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. En effet, en utilisant la Définition 10 du Livre V (raison double identifiée à produit !) on a $\frac{x}{2a} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = (\frac{x}{y})^2 = (\frac{a}{x})^2$. D'où la formule cherchée $x^3 = 2a^3$. On peut montrer que x ne peut se déduire à partir de a à l'aide de la seule règle et du compas.

Bien entendu, Hippocrate ne pouvait utiliser notre symbolisme algébrique et son raisonnement ne pouvait qu'être de nature géométrique.

Eratosthène raconte que les géomètres de l'Académie de Platon ne se trouvèrent guère avancés avec le résultat d'Hippocrate. Cependant, Archytas de Tarente fournit une solution en prenant l'intersection de deux cylindres, donc sort de la géométrie plane tandis qu'Eudoxe invente des lignes courbes, lesquelles ne nous sont pas conservées. Ménechme, disciple d'Eudoxe, utilise les paraboles $x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$. Malicieux, Eratosthène ajoute :

> *"Mais tous ces géomètres ont décrit ces proportions de manière démonstrative sans pouvoir les obtenir manuellement, ni les faire tomber dans la pratique, sauf Ménechme qui peut le faire un peu, mais cependant d'une manière incommode" (Oeuvres d'Archimède, cité dans la Science Antique et Médiévale, P.U.F. 1966).*

J'ai cité cet exemple, d'une part parce qu'il fut un des problèmes les plus célèbres de l'Antiquité, et d'autre part parce qu'on y voit intervenir, avec la notion de produit, la raison double qui nous a posé problème lors de la Définition 10 du Livre V.

4. LES RESULTATS VUS DU XXème SIECLE

Au terme de l'analyse du Livre V, il me semble que l'on peut reprendre globalement le point de vue d'Euclide. Celui-ci part de la notion de grandeurs qu'il voudrait mesurer et donc introduire des rapports. Les propriétés intuitives (les hypothèses au sens de Platon) de ces grandeurs sont de se comparer, de s'additionner, de se diviser et de satisfaire l'axiome d'Archimède.

Pour traduire en langage algébriste, on serait tenté de dire que les grandeurs sont des éléments d'un même ensemble, disons G . Je crois que ce n'est pas si clair car Euclide parle de la raison de deux grandeurs *"homogènes entre elles suivant la quantité"* à la Définition 3.

> "λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις".

Il semble vouloir comparer $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$, A et B étant des grandeurs homogènes entre elles, ainsi que A' et B' , mais il n'y a aucune raison de supposer une quelconque homogénéité entre les grandeurs A, B et les grandeurs A' , B' .

D'ailleurs, au Livre X, Proposition 5, Euclide parle d'une proportion dont deux termes sont des grandeurs et deux autres termes sont des nombres. Au contraire, la Proposition 16 présuppose sans le dire que A, B, C et D soient "homogènes". Quitte à réduire pour le moment la pensée d'Euclide, partons donc d'un ensemble G sur lequel existe une addition :

$A + B$ a un sens lorsque A et B sont des grandeurs (éléments de G).

Dès la Proposition 1, il est implicitement supposé que la loi + est associative et commutative.
Pour la division, si A est une grandeur de G, $B = \frac{A}{n}$ en est encore une pour tout entier n donné ($nB = A$). Ce n'est peut-être pas le sens de la Définition 1, mais on utilise explicitement la division à la Proposition 5 et nous avons déjà signalé que cela correspond au caractère divisible des "grandeurs continues".

Sur G, il existe un ordre "naturel", qui est en fait lié à la loi + sous la forme suivante : $B + C > B$ pour toutes grandeurs B et C. Ceçi me semble en fait correspondre à l'axiome que le tout est plus grand que la partie (cf. Livre I d'Euclide ; Documents), lorsqu'en outre on tient compte du support intuitif de la notion de grandeur (μεγέθη). Certes, la définition ci-dessus ne suffirait pas à constituer une relation sur G. Cependant, il me semble qu'Euclide pose :

$A > B$, s'il existe une grandeur C telle que $A = B + C$; la grandeur C est notée $A - B$ (cf. Définition 16 et démonstration de la Proposition 15 par exemple).

En résumé, quant à l'ordre :

$A > B$, <u>si et seulement s'il existe</u> C <u>et</u> $A = B + C$.

Sur cette soustraction, Euclide prend comme axiome (cf. Livre I) que $A = B$ implique $A - C = B - C$ (si des égaux sont retranchés d'égaux, les restes sont égaux). Ceci est utilisé notamment à la Propositon 6 du <u>Livre V</u>. Comme on a aussi (<u>Livre I</u>) que $A = B$ implique $A + C = B + C$, on en déduit que $(G,+)$ est un semi-groupe régulier.

De la définition donnée de la relation d'ordre, et que nous prendrons sous la forme $A \geqslant B$ (signifiant $A > B$ ou $A = B$; n'oublions pas que, par un souci de géométrie, la grandeur 0 n'existe pas chez Euclide), il résulte que $\geqslant$ est une relation d'ordre :

. Elle est réflexive et même $A > A$ est impossible (En effet, si $A > A$, on a $A = A + B$ et donc $2A = 2A + 2B$ d'après la Proposition 1. Or $2A < 2A + B$ par définition de l'ordre, soit $2A + 2B + C = 2A + B$ donc par soustraction, axiome admis, $2B + C = B$ d'où $2B < B$ ce qui contredit la Définition 1).

. Elle est antisymétrique : si $A > B$ et $B > A$, on a $A = B + C$ et $B = A + C'$. Donc $A = A + C + C'$ et donc $A > A$ dont on a vu l'impossibilité.

. Elle est transitive : pour le cas $A < B$ et $B < C$, c'est bien simple grâce à $B = A + A'$ et $C = B + B'$ donc $C = A + A' + B'$ soit $A < C$. Pour le cas

$A < B$ et $B = C$ (ou $A = B$ et $B < C$), on raisonne facilement grâce à la transitivité de l'égalité, laquelle est un axiome commun pour Euclide (cf. Livre I) et à la notion commune que des égaux ajoutés à des égaux sont encore égaux (cf. aussi Livre I).

Dès lors, $(G,+,\leqslant)$ est un semi-groupe ordonné, si l'on montre que $A \geqslant B$ entraîne $A + D \geqslant B + D$ pour toute grandeur D. Ceci est bien facile à vérifier tant pour le cas $A = B$ que pour le cas $A > B$. Réciproquement, si $A + D \geqslant B + D$ on a $A \geqslant B$ (avec $>$ on écrit : $A + D + C = B + D$ et par l'axiome de soustraction : $A + C = B$). En deux temps, on obtient :

. $A \geqslant B$ et $A' \geqslant B'$ implique $A + A' \geqslant B + B'$

et comme corollaire utilisé par Euclide :

. $A > B$ équivaut à $nA > nB$ pour tout entier n .

La Définition 5 signifie en outre que $(G,+,\leqslant)$ est archimédien. Cependant, Euclide suppose que $\leqslant$ est une relation d'ordre total, c'est-à-dire que pour deux grandeurs A et B on n'a que les trois possibilités d'ailleurs exclusives l'une de l'autre :

. $A > B$. $A = B$. $A < B$

c'est-à-dire $A = B + C$; $A = B$; $A + C = B$.

Que l'ordre soit total est explicitement utilisé par Euclide dans les démonstrations des Propositions 7, 8 et 9 mais surtout dès la Définition 6, clef de voûte du Livre V.

Résumons :

$(G,+,\leqslant)$ est un semi-groupe abélien, divisible, régulier, archimédien et totalement ordonné.

Quelle serait, à ce niveau, la démarche d'un mathématicien actuel désireux de rester dans le cadre de la théorie des ensembles et de définir le rapport $\frac{A}{B}$? Un souci analogue de rigueur dans la construction en ne sortant que du déjà connu (ni l'arithmétique, ni la géométrie) me semble assurer la démarche d'Eudoxe. Elle restera longtemps incomprise. Notre mathématicien d'aujourdh'ui, quant à lui, passerait au produit $G \times G$ et définirait une relation d'équivalence sur les couples (A,B) , celle précisément qu'Euclide donne à la Définition 6 :

$(A,B) \sim (C,D)$ si $(A,B ; C,D)$ sont proportionnelles.

Qu'il s'agisse d'une relation d'équivalence est explicitement établie par Euclide (transitivité) à la Proposition 11. On considère alors l'espace quotient

$G \times G/\sim = \tilde{G}$ des classes d'équivalence et on va l'équiper d'un certain nombre de lois et relations.

Tout d'abord, on munit $\tilde{G}$ d'une relation d'ordre. C'est ce qui est fait à la Définition 8 (moyennant une petite vérification à rajouter au texte euclidien lui-même quant à l'antisymétrie et une autre quant à la transivité, que nous donnons ci-dessous avec les outils euclidiens :

Si $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ et $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, on a des entiers m, n, p, q et $nA > mB$; $nC < mD$; $qC > pD$ et $qE < pF$. Dès lors, $npA > mpB$ et $npC < mpD$ ainsi que $qmC > pmD$ et $qmE < pmF$. Des deuxième et troisième inégalités, on déduit $qmC > npC$ et donc (cf. commentaire sur la Proposition 6) que $qm > np$. Or la dernière inégalité fournit $qmE < pmF$ et donc $npE < mpF$ tandis que $npA > mpB$. On déduit $\frac{A}{B} > \frac{E}{F}$ grâce à la Définition 8. Les cas où $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} > \frac{E}{F}$ ou $\frac{A}{B} > \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$ se traitent de la même façon en utilisant la Définition 6).

On notera encore $\leqslant$ la relation d'ordre sur $\tilde{G}$. Cette relation est totale comme on le voit en utilisant les Définitions 6 et 8 et sachant que $\leqslant$ est déjà totale sur G .

Pour définir un produit sur $\tilde{G}$, ce qu'Euclide préfigure peut-être avec la notion de raison double, etc (cf. commentaires des Définitions 9, 10 et 11), nous ferons désormais <u>l'hypothèse de la quatrième proportionnelle quant à</u> G .

Dès lors, $\frac{A}{B}$ peut être considéré comme un opérateur sur G selon $\left[\frac{A}{B}\right]D = C$ où (A,B;C,D) est une proportion. Bien entendu, l'opérateur ne dépend que de la classe d'équivalence de A et B (cf. Proposition 9). Que $\frac{A}{B} \neq \frac{A'}{B'}$ induise deux opérateurs distincts provient de la transitivité de l'équivalence $\sim$ (Proposition 11). Le produit $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$ est défini comme produit de composition des opérateurs et est donc associatif :

$$\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right) .$$

Evidemment, $\frac{A}{A}$ est l'élément unité de ce produit. En outre, tout élément $\frac{A}{B}$ possède un inverse $\frac{B}{A}$ (par exemple d'après la Proposition 16 deux fois appliquée). Il me semble utile de noter qu'Euclide a défini des raisons inverses à la Définition 14 et a établi $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ implique $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ dans un Corollaire de la Proposition 4. Cependant, ce corollaire est un ajout de Théon d'Alexandrie. De fait, si les grandeurs (A,B;C,D) sont proportionnelles, il en est évidemment de même de (B,A;D,C) par simple utilisation de la Définition 6. Euclide n'a pu manquer de le voir.

Peut-on déduire de l'utilisation du mot "inverse" (dans "raison inverse", ανάπαλιν λόγος) tiré du langage courant avec la signification de "dans l'autre sens", qu'Euclide pense à l'inverse au sens de notre produit d'opérateur ou simplement de renversement de la proportion ?

Finalement $(\tilde{G},.)$ est un groupe abélien.

On peut aussi munir $\tilde{G}$ d'une loi additive selon la définition

$$\left[\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right] E = \left[\frac{A}{B}\right] E + \left[\frac{C}{D}\right] E \quad \text{pour tout } E \text{ de } G .$$

Nous voyons par cette définition que $\left[\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right]$ est un opérateur sur G mais il convient de prouver que cet opérateur provient d'un élément de $\tilde{G}$ pour assurer que $+$ est une loi interne sur $\tilde{G}$. Il suffit de prouver que $\left[\frac{A}{B}\right] E + \left[\frac{C}{D}\right] E$ a une raison avec E indépendante de E. Soit F une autre grandeur et posons $\left[\frac{A}{B}\right] E = E_1$, $\left[\frac{A}{B}\right] F = F_1$; $\left[\frac{C}{D}\right] E = E_2$ et $\left[\frac{C}{D}\right] F = F_2$. On dispose de :

$$\frac{A}{B} = \frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} \quad \text{et} \quad \frac{C}{D} = \frac{E_2}{E} = \frac{F_2}{F} .$$

Par la Proposition 16, on a :

$$\frac{E_1}{F_1} = \frac{E}{F} \quad \text{et} \quad \frac{E_2}{F_2} = \frac{E}{F} ,$$

donc (Proposition 12) :

$$\frac{E}{F} = \frac{E_1}{F_1} = \frac{E_2}{F_2} = \frac{E_1+E_2}{F_1+F_2} ,$$

et par la Proposition 16 à nouveau :

$$\frac{E_1+E_2}{E} = \frac{F_1+F_2}{F} ,$$

ce qui termine notre démonstration.
Il est alors évident que la loi $+$ est associative et commutative sur $\tilde{G}$ comme $+$ l'est sur G.
La loi $+$ est régulière sur $\tilde{G}$ $\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D} = \frac{A}{B}+\frac{E}{F}\right.$ implique $\left.\frac{C}{D}=\frac{E}{F}\right)$ car tel est le cas de la loi $+$ sur G.
On a bien sûr $\left[\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\right] G = \left[\frac{A}{B}\right] \cdot \left(\left[\frac{C}{D}\right] \cdot G\right)$.
Enfin, on a la propriété de distributivité :

$$\frac{A}{B}\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} + \frac{A}{B}\cdot\frac{E}{F} ,$$

car il suffit d'appliquer les deux membres à une grandeur arbitraire de G en utilisant la Proposition 12.

On dispose de toutes les propriétés d'un corps pour $(\tilde{G},+,.)$ sauf que $(\tilde{G},+)$ n'est qu'un semi-groupe régulier et abélien et non un groupe.

Convenons d'appeler ceci un demi-corps. (Par une démarche parallèle à celle qui construit $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, on pourrait d'ailleurs facilement agrandir $(\tilde{G},+,.)$ pour en faire un corps).

En outre, $(\tilde{G},+,.,\leqslant)$ est un demi-corps totalement ordonné. Une propriété seulement doit être établie, à savoir que si $\frac{A}{B} \geqslant \frac{A'}{B'}$ et $\frac{C}{D} \geqslant \frac{C'}{D'}$ alors $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} \geqslant \frac{A'}{B'} + \frac{C'}{D'}$. On utilise la remarque $\left[\frac{A}{B}\right] F \geqslant \left[\frac{A'}{B'}\right] F$ pour toute grandeur F (d'après la Proposition 10) et le fait que $(G,+,\leqslant)$ est ordonné.

De plus, l'ordre $\leqslant$ sur $\tilde{G}$ est archimédien puisque $(G,\leqslant)$ l'est et que les Propositions 10 et 8 établissent que $\frac{A}{B} \geqslant \frac{A'}{B'}$ si et seulement si $\left[\frac{A}{B}\right] F \geqslant \left[\frac{A'}{B'}\right] F$ (et ce pour toute grandeur F).

Il ne reste plus maintenant, pour un moderne, qu'à établir le théorème suivant dont on trouvera la démonstration au Chapitre V § 7.

THEOREME . Un demi-corps totalement ordonné archimédien est un sous-demi-corps de l'ensemble des nombres réels.

Concluons donc le point de vue d'un moderne. La méthode d'Euclide conduit sans peine, et sans utiliser d'autres outils que ceux d'Euclide, à l'exception près toutefois des nombres négatifs, à tous les sous-corps des nombres réels. L'extension maximale possible étant le corps des réels lui-même.

La construction qui vient d'être expliquée est parfaitement justifiée à partir de la seule donnée d'un ensemble de grandeurs G satisfaisant les axiomes imposés. Il faut toutefois admettre des constructions de la théorie des ensembles (passage à un ensemble quotient), et surtout l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. On sait (cf. Chap. V § 7) qu'il existe des moyens plus économiques pour construire les nombres réels à partir de la seule théorie des ensembles (et de l'existence de $\mathbb{N}$) sans avoir à présupposer l'existence de G . Est-il besoin de dire que ces dernières considérations sont totalement en dehors des préoccupations de l'auteur du Livre V ?

5. EUCLIDE A-T-IL CONSTRUIT LES REELS ?

A cette question de récurrence historique, laquelle consiste à analyser la situation mathématique atteinte par Euclide en fonction de la situation mathématique actuelle sur les nombres réels, il paraît légitime de répondre non.

Euclide dispose de tous les moyens techniques pour construire tous les sous-demi-corps de réels, mais ne semble disposer d'aucun moyen mathématiquement mûr pour distinguer entre ces sous-corps. En tous cas, aucun passage d'Euclide ne distingue une idée d'une quelconque propriété qui obligerait à choisir le corps maximal à savoir $\mathbb{R}$ tout entier. En ce sens, Euclide n'a pas construit les nombres réels.

Nous savons maintenant ce qu'il a construit (les demi-corps) mais notre analyse d'épistémologie historique ne peut s'arrêter là. La question est de déterminer la nature de ce qu'Euclide pensait avoir construit. Pour l'Alexandrin, semble-t-il, il s'agissait au Livre V de fonder la comparaison, la mesure des grandeurs que l'on pourrait intuitivement qualifier de "continues", sans référence ni à la géométrie, ni bien sûr à une quelconque idée de continuité, ni à l'arithmétique.

(1) Objectivement, c'est-à-dire par la seule analyse du texte et à la notion de quatrième proportionnelle près, la construction des λόγος qu'Euclide fait répond à ce but. Qu'elle constitue une merveille mathématique par l'élégance des démonstrations et l'ingéniosité des définitions est un avantage supplémentaire. Cette ingéniosité est beaucoup trop en avance sur son temps, car elle fonde, techniquement parlant, des préoccupations que l'on ne dévoilera qu'à la fin du XIXème siècle.

(2) Historiquement, nous voyons bien le souci de se dégager de l'arithmétique et de la géométrie puisque les rapports de longueurs rectilignes ne sont traités qu'au Livre VI et les rapports de nombres entiers au Livre VII et suivants. Il est plus surprenant, et tous les commentateurs l'ont noté, de s'apercevoir qu'Euclide ne prend pas la peine de dire que les rapports qu'il envisage au Livre VII ne sont que des cas particuliers des λόγος plus généraux que la théorie édifie au Livre V.

De nombreuses explications furent données. Les empiristes tiennent à la différence des auteurs Eudoxe-Euclide et voudraient faire d'Euclide un compilateur des théories avec d'un côté le courant eudoxien, de l'autre le courant pythagoricien des rapports de nombres. N. Bourbaki, tenant à une utilisation des raisons comme opérateurs sur les grandeurs, remarque justement que $\mathbb{N}$ étant discret, $\frac{p}{q}$ n'agit pas sur tout $\mathbb{N}$, mais seulement sur $q\mathbb{N}$. Dès lors, il faut bien développer une théorie séparée pour traiter des rapports d'entiers. Le Livre V des proportions est largement utilisé pour les rapports géométriques au Livre VI (livre qui traite des figures semblables). Ces rapports géométriques vont jouer un rôle essentiel dans toute la suite des Eléments. Nous avons déjà noté qu'au Livre VI, et dans le cas des grandeurs envisagées, Euclide démontre l'existence d'une quatrième proportionnelle (Proposition 12). L'ambiguïté relative à l'homogénéité des grandeurs (cf. Définition 3) traduirait-elle l'unicité numérique des raisons, indépendamment des grandeurs considérées ?

Mathématiquement, c'est erroné puisque les sous-corps de $\mathbb{R}$ ne sont pas tous isomorphes à $\mathbb{R}$ et il manque une propriété de maximalité (cf. Chap. V § 6). Mais l'intuition est bien exacte car il y a un corps maximal $\mathbb{R}$. Tout le Livre X repose sur une telle unicité (comparaison de raisons de longueurs, d'aires ou de nombres).

(3) Limitativement à nos yeux, Euclide fonde la mesure des grandeurs mais ne veut nullement construire un corps de nombres, c'est-à-dire un ensemble muni à la fois d'une addition et d'une multiplication. Les λόγος sont peut-être munis d'un produit (la composition des raisons) mais il n'y a pas de tentative pour définir une addition que suggèrerait peut-être la quatrième proportionnelle pour les longueurs rectilignes ou la réduction au même dénominateur par les fractions d'entiers. La provenance d'une telle limitation est philosophique sous l'influence platonicienne (cf. § 2). Le concept de nombre entier appartient à la deuxième classe des objets intelligibles dans le monde incorruptible des Idées. C'est un donné absolu et universel. Le mathématicien qui en part comme d'une hypothèse ne peut s'élever au dessus des hypothèses et la construction eudoxienne ne peut fournir un autre concept de la deuxième classe. Pourtant, un ensemble muni de deux lois internes, celui que l'on pourrait construire avec les raisons, participerait de la beauté absolue, donc appartiendrait aux concepts de la deuxième classe. Cela semble impossible, puisque, pour construire les λόγος, on a dû diviser les nombres et l'unité, donc détruire l'harmonie. Le mathématicien ne dispose pas de tels droits... donc ne le fera pas.

Dévoiler une Vérité mathématique, un peu comme Michel-Ange dirait qu'il dévoilait la statue sous la pierre brute, exige une volonté orientée. L'horizon philosophique euclidien éliminait a priori la possibilité d'autres corps de nombres.

Cependant entre Eudoxe et la parution du Livre V, d'autres philosophies sont apparues. Nous essaierons au § 6 d'opposer les unes aux autres ces diverses conceptions philosophiques dans la mesure où elles intéressent la conceptualisation mathématique.

6. UN ESSAI DE RECURRENCE HISTORIQUE SUR LA CRISE DES IRRATIONNELLES

6.1 La préhistoire

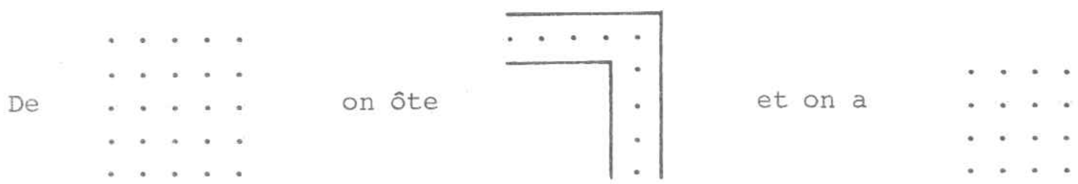
Il n'existe pas de civilisation sans arithmétique rudimentaire concernant les nombres, dégagés des objets qu'ils comptent. Des notations particulières sont élaborées par chaque civilisation et les opérations élémentaires -addition, soustraction et multiplication- sont toujours connues dans le cas de petits entiers et peuvent être écrites (cf. Chapitre III sur ces notations).

Généralement, la suite illimitée des nombres n'est pas perçue, et l'on ne sait tout simplement pas écrire de grands nombres (cf. Chapitre III). Généralement aussi, quelques nombres fractionnaires font partie du bagage minimum (1/3, 1/2, etc). On ne sait guère distinguer si les nombres fractionnaires sont utilisés comme doués de propriétés opératoires (prendre le 1/3 par exemple) ou comme des entités numériques (au sens d'unités composées à partir d'autres par changement d'échelle). Jusqu'au XIXème siècle, ces deux aspects du nombre se croisent, s'opposent et se mêlent en créant de sérieuses difficultés. Nous essaierons de traquer les linéaments de cet antagonisme ambigu entre l'aspect opératoire et l'aspect quantitatif du nombre, auquel il faudra plus tard ajouter l'aspect ordinal.

Les passages de systèmes de numération sexagésimale, en astronomie babylonienne par exemple, à d'autres systèmes, favorisent le deuxième aspect. Chez les Egyptiens, au contraire, la notation ○ est utilisée systématiquement en symboles hiéroglyphiques pour désigner une fraction de l'unité.
10 s'écrit ∩ , 5 s'écrit ¦¦' et 1/15 s'écrit  .
Le papyrus de Rhind (vers 1700 avant J.-C. , XIIème dynastie) décompose toute fraction en fractions unitaires ($\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$) et dresse une table pour la décomposition de $\frac{2}{n}$ pour un entier n entre 5 et 101 ce qui permet par récurrence bien des décompositions. Il n'est pas indiqué que cette décomposition n'est pas unique ce qui semblerait privilégier l'aspect opératoire.

Avec l'Ecole Ionienne (Thalès de Milet) et surtout celle de Pythagore, apparaît une volonté de réduire le réel, perçu ou imaginé, à quelques abstractions simples de l'ordre du calcul. Du moins, tel est le témoignage d'Aristote (Métaphysique I v. 986 a 21) et d'Eudème de Rhodes, lequel qualifie Pythagore de *"créateur des mathématiques pures"*.

Nous savons pour sûr qu'une sorte d'arithmétique géométrique se développe pour elle-même ou pour des raisons esthétiques. On range des nombres selon certaines configurations et on essaie de déterminer ce qu'il faut ôter (le γνωμόν, sorte d'équerre du temps de Pythagore) pour obtenir une configuration semblable.



En notations modernes, $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$ soit encore $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$.

On peut définir des "nombres carrés", mais on imagine assez bien les nombres triangulaires, pentagonaux ou hexagonaux. Au témoignage d'Aristote encore, l'idée d'infini surgit du fait qu'*"en ajoutant les gnomons autour de l'Un, et cela à part, on obtient tantôt une figure toujours différente, tantôt la même"* (Physique III § 4 203 a 14). En clair, en ajoutant les nombres impairs successifs, on a toujours des carrés et ceci ne peut se produire en ajoutant les nombres pairs. Un pythagoricien, Philolaüs, dira : *"Toutes les choses qu'il nous est donné de connaître possèdent un nombre, et rien ne peut être conçu ni connu sans le nombre"*.

Peut-être que ces quelques abstractions simples auxquelles Pythagore prétend réduire le Monde l'amenèrent-elles à supposer que l'architectonique de celui-ci était purement numérique et qu'en particulier tout segment de droite était composé d'un nombre fini de points. Si p est le nombre de points d'un côté du carré et q le nombre de points de la diagonale, il surgit une contradiction flagrante dès lors qu'on utilise le théorème de Pythagore. On doit avoir en effet $2p^2 = q^2$ et, pour employer les mots d'Aristote, pour qui cette démonstration est devenue une trivialité *"un nombre impair serait égal au pair"* (Analytiques Postérieurs I 23). La construction pythagoricienne s'effondre et pour bien marquer le désarroi, le divulgueur de la découverte des irrationnelles, un certain Hippase de Métaponte, est englouti dans les flots. Le scoliaste Proclus commentera ainsi :

> *"Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de formes doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants"*.

Nous gardons trace de cette expérience douloureuse dans le vocabulaire (irrationnel : ἄλογος voire ἄρρητος, ce qui n'est pas énonçable).

Cette crise des "irrationnelles" est la première crise de l'ordre de la pure réflexion intellectuelle sur laquelle nous ayons quelques connaissances. Il semble bien qu'au lieu de ruiner le goût des spéculations intellectuelles, elle l'aviva.

Certes, un moyen de s'en sortir était d'introduire des considérations sur l'infini, par exemple en prétendant qu'un segment contient une infinité de points. Mais l'infini fait problème ! La langue commune masque mal la maladresse dans la manipulation de l'infini et Littré ne dit-il pas que souvent en mathématiques, l'infini signifie ce qui n'existe pas et il cite même :

> *"Une parabole est une ellipse dont le second foyer est à l'infini, c'est-à-dire n'existe pas".*

Nous savons peu de choses du bouillonnement d'idées relatives à l'infini, mais gardons trace des paradoxes de Zénon, de l'Ecole des Eléates, vers le 5ème siècle avant J.-C. Ces paradoxes visent aussi bien le point de vue finitiste (atomiste si l'on veut) que le point de vue continuiste (indéfinie possibilité de division). ἀριθμός (discret) opposé à συνεχής (continu).

6.2 Les paradoxes des Eléates

De ce Zénon d'Elée, dans l'ambiance de Parménide, de Leuccippe et du mathématicien Démocrite (460-370) dont parlera Archimède pour des problèmes de quadrature (et donc d'utilisation de méthodes infinitésimales avant la lettre), nous connaissons plutôt mal quatre paradoxes rapportés et réfutés par Aristote dans La Physique.

Le premier argumente que pour aller d'un point à un autre, il faut d'abord arriver au point milieu et ainsi de suite à l'infini. Donc en un temps fini parcourir une infinité de points distincts, d'où l'impossibilité.

Le deuxième dit qu'Achille au pied léger jamais ne rattrapera la tortue car Achille doit passer par tous les points parcourus par la tortue donc parcourir le même nombre de points qu'elle. Il ne peut donc la rattraper si parcourir un point prend une unité de temps tant pour la tortue que pour Achille.

Le troisième paradoxe concerne une flèche qui en chaque point de sa trajectoire est nécessairement au repos puis qu'elle est en ce point, donc en définitive la flèche ne se meut pas.

Le quatrième concerne trois segments de longueur égale, donc contenant le même nombre de points. Deux de ces segments se meuvent à la même vitesse mais en sens inverse parallèlement au troisième fixe. Dans la plus petite unité de temps en laquelle on puisse diviser le temps, le décalage entre les deux segments mobiles est double du décalage entre un segment mobile et le segment fixe. Le paradoxe est patent puisque pour avoir un décalage moitié entre les deux segments mobiles, ce qui doit physiquement survenir, il faudrait diviser la plus petite unité de temps.

Ces paradoxes se présentent dans leur ensemble sous la forme d'un dilemme, c'est-à-dire que si l'on accepte une chose ou bien son contraire, on aboutit à une contradiction dans les deux cas. Les deux hypothèses qui s'opposent sont l'aspect finitiste et l'aspect continuiste, tant pour un segment de droite que pour un intervalle de temps. Par exemple, pour le paradoxe d'Achille et de la tortue, si un segment ne contient qu'un nombre fini de points, il y a bien une impossibilité mais cette impossibilité se maintient s'il y en a une infinité, du moins en étendant au nombre infini les résultats du fini.

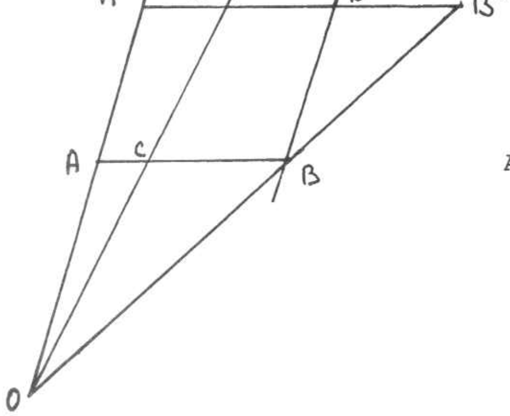
Où sont les difficultés soulevées par Zénon ? Le coeur du problème est l'infini opposé au fini, le continu opposé au discret. Il n'est que naturel que ces paradoxes aient hanté la philosophie occidentale depuis Aristote dans La Physique jusqu'à Bergson dans l'Evolution créatrice, même sous le déguisement trompeur du mouvement. Nous pourrons donc traquer l'évolution des idées autour de la droite réelle.

La solution mathématique des contradictions de Zénon viendra historiquement en deux vagues :

- d'une part, le calcul infinitésimal apprendra à sommer une famille infinie de quantités de plus en plus petites (du genre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$) ;

- d'autre part, la théorie des ensembles, avec Bolzano puis Cantor, établira qu'une des définitions possibles d'un ensemble infini est de pouvoir être mis en bijection avec un sous-ensemble propre (cf. figure 3). Par suite, l'infini ne peut être manipulé comme un nombre avec les lois usuelles de l' l'arithmétique (En clair $\frac{\infty}{2} = \infty$ et $\infty+1 = \infty$!).

Figure n° 3



AA' // BB"

Figure 3 : AB = A'B" est de longueur inférieure à A'B' et pourtant il y a une bijection entre A'B' et A'B" .

Autant la première vague rejaillira dans l'ordre philosophique et sera assimilée (mais Descartes et Leibniz sont à la fois philosophes et mathématiciens), autant la seconde sera mal comprise (Bergson, pour ne citer qu'un nom n'est pas un mathématicien créateur !).

6.3 Les réfutations d'Aristote et sa conception de l'infini

Pour réfuter les arguments de Zénon, il est notable qu'Aristote commence par établir la continuité des grandeurs (μέγεθος), en particulier des segments de droite.

Il décide en effet d'étudier le mouvement (κίνησις) sur lequel est axé toute sa physique et donc *"dire ce qu'est d'être ensemble et d'être séparé, et ce qu'est être au contact, intermédiaire, consécutif, contigu, continu"* (Physique, Livre V 226 b 18). Le consécutif (ἐφεξῆς) est ce entre quoi *"il n'y a aucun intermédiaire du même genre"*, le contigu (ἐχόμενον) est ce qui, *"étant consécutif, est en outre en contact"*. Sont en contact *"les choses dont les extrémités sont une seule chose"*. Cette définition est sémantique : συνεχής signifie tenir ensemble. Pour donner une image naturelle, Aristote précise que *"l'unité du tout sera celle du facteur éventuel de continuité, comme le clouage, le collage, l'assemblage, la greffe"* (Physique Livre V 227 a 10).

Aristote commence par démontrer que le continu ne peut être une somme d'indivisibles, par exemple qu'une ligne (γραμμή) ne peut être formée de points (στιγμή), mais il ajoute précautionneux *"s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point un indivisible"*. L'idée de sa démonstration est qu'un point, un indivisible (ἄτομος) n'a pas d'extrémités car ce ne pourrait être que lui-même or une extrémité *"est distincte de ce dont c'est l'extrémité"* (Physique Livre VI 231 a 26). Le cercle vicieux est le présupposé d'Aristote que la décomposition d'un continu ne peut l'être qu'en choses continues voire contiguës. Ce dernier cas est impossible également car *"il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps"*. En effet, dit Aristote, l'intermédiaire (μεταξύ) entre deux points ne peut être du même genre, c'est-à-dire un point, mais un segment de droite, de même entre deux instants l'intermédiaire est un temps. Cette démonstration met en évidence que pour Aristote, un point (ou un instant) est considéré comme une borne, une limite et jouit d'un statut différent d'un segment de droite (ou un intervalle de temps). L'instant est *"la limite (πέρας) du temps ; en effet il est commencement d'une partie, fin d'une autre"* (Physique, Livre IV 222 a 10). Par ailleurs encore *"et si l'instant mesure le temps c'est en tant qu'antérieur et postérieur"*. Il est amusant de noter la manie philologique d'Aristote lequel s'attarde sur l'expression "à l'instant" pour signifier tout à l'heure et désigne quand même un intervalle de temps (Livre IV 222 a 20).

Comme si cela ne suffisait pas, Aristote en déduit que le mouvement lui non plus ne saurait être composé d'indivisibles car, suivant un raisonnement parallèle à celui de Zénon sur la flèche *"si l'on va à Thèbes, on ne peut en même temps aller à Thèbes et être allé à Thèbes"*. En définitive, *"nul continu n'est divisible en choses sans parties"* (αλλά οὔθὲν ῆν τῶυ συνεχῶν εἰς ἀμερῆ διαιρετόν) et comme conséquence *"toute grandeur est divisible en grandeurs puisqu'il a été démontré qu'un continu ne peut être composé d'indivisibles et d'autre part que toute grandeur est continue"*.

Ce résultat tracasse suffisamment Aristote pour qu'il y revienne : *"Or j'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles"* (Physique, Livre VI 232 b 23) et il déduit la continuité du temps par une argumentation parallèle à celle du paradoxe de Zénon sur la dichotomie. Cela lui permet aussitôt de réfuter ce même paradoxe et d'ailleurs celui sur Achille puisqu'on n'impose pas la division en deux parties égales dans le raisonnement qui suit. Ainsi, s'il fallait un temps infini Γ pour parcourir une grandeur rectiligne finie AB (à vitesse constante), soit $\Gamma\Delta$ une partie finie du temps et BE la portion rectiligne parcourue dans ce même temps. Mais, grâce à la définition eudoxienne des grandeurs (axiome dit d'Archimède du Livre V, Définition 6), un multiple de BE dépasserait AB et donc Γ serait inférieur à un multiple de $\Gamma\Delta$.

Au contraire, l'instant est indivisible et aucun mouvement ne peut avoir lieu dans l'instant (cf. Livre VI 234 a 34). Aristote prend même le soin de démontrer, par divisibilité et non-contiguité des instants, qu'il n'y a pas d'intervalle de temps "premier" où commence à s'effectuer le changement. Après avoir utilisé une partie de l'argumentation de Zénon, Aristote fait disparaître le paradoxe sur la flèche qui *"est conséquence de la supposition que le temps est composé d'instants"*. Un point n'est pas une grandeur *"car la limite est indivisible, non la chose limitée"* (Physique, Livre I 185 b 16). Le dernier paradoxe de Zénon contredit, selon Aristote, en établissant que la vitesse relative de deux objets en mouvement est différente de la vitesse relative par rapport à l'objet fixe. Ce n'est pas là, semble-t-il, l'aspect intéressant du paradoxe.

La lecture d'Aristote n'est pas plaisante. Sa définition de la continuité est mathématiquement inopérante même si quelques notions sont séparées comme celles de contiguité et de continuité. Aristote utilise des définitions trop subjectives et les démonstrations données laissent un sentiment de malaise. L'impression générale est que des notions de bon sens commun (l'instant comme frontière par exemple) sont systématiquement malaxées avec pédantisme en vue de réfutations des paradoxes de Zénon.

Au Livre III de la Physique, Aristote a longuement disserté sur la notion d'infini (απειρον) qu'il relie directement à la notion de continu :

> *"Or le mouvement appartient aux continus et dans le continu l'infini apparaît en premier lieu ; c'est pourquoi les définitions qu'on donne du continu se trouvent utiliser souvent l'infini, le continu étant divisible à l'infini"* (Livre III 200 b 12).

Aristote distingue l'infini par composition (σύνθεσις) de l'infini par division (διαίρεσις) et donne des exemples physiques, tirés des Anciens dit-il, de la notion d'infini : le temps, la succession des générations (γένεσις), les grandeurs mathématiques, *"car les mathématiciens eux aussi utilisent l'infini"* ajoute-t-il narquois, enfin un argument ontologique *"le limité est limité à une autre chose, de sorte que rien ne sera limite, s'il faut que toujours la limitation se fasse entre deux termes"*.

Pour l'infini par composition -ou par absence de limite- Aristote va le nier. Une première remarque :

> *" C'est parce que la représentation ne l'épuise point que le nombre paraît être infini".*

L'infini n'est jamais réalisé actuellement (en acte : ἐνέργεια) mais virtuellement (en puissance : δύναμις). Ainsi de l'infini par division dont nous avons vu la réalisation avec le temps, les grandeurs continues, etc. Pour établir ce résultat sur l'infini, Aristote utilise des arguments physiques, déjà partiellement cités lui permettant de nier l'infini actuel, réalisé, le corps infini (σῶμα) et des arguments ontologiques que l'on peut résumer en disant que l'infini est le contraire de ce que l'on dit :

> *"non pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais ce hors de quoi il y a toujours quelque chose".*

Par suite, l'infini n'est jamais achevé (τέλειον, achevé au sens de parfait) mais *"est toujours en génération et corruption, limité certes, mais différent et cela sans cesse"*. Cette subjectivité d'imperfection relative à l'infini, dont le concept n'est pas encore vraiment pensé, pèsera lourd lors de la formation du calcul infinitésimal. *"L'essence de l'infini est privation"*"(στέρησις) et son sujet en soi, c'est le continu sensible. Mais Aristote revient sur le point de vue des mathématiciens (Physique, Livre III 207 b 27).

> *"La théorie ne supprime pas les considérations des mathématiciens en supprimant l'infini qui existerait en acte dans le sens de l'accroissement ; car,*

en réalité, ils n'ont pas besoin et ne font point usage de l'infini, mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées".

6.4 La solution eudoxienne

Selon la belle expression de J. Desanti, Eudoxe *"faute de calculer l'impensable, pense l'incalculable"*. Nous avons longuement disséqué le Livre V qui fonde rigoureusement la théorie des rapports de grandeurs en éliminant le recours aux notions tirées de l'infini, de l'arithmétique ou de la géométrie. Sans doute cette solution privilégie-t-elle le point de vue opératoire mais elle ne peut aller au bout d'elle-même dans ce même champ opératoire. Nous avons noté que l'addition des raisons n'est pas définie et que le produit des raisons n'est défini que dans le cas de deux autres raisons, par ailleurs égales. Il y a une nette limitation. Nous en avons noté la raison culturelle (§ 5). Du point de vue mathématique, la gêne vient certainement d'images géométriques qui contrecarrent la logique interne de la construction eudoxienne.

En effet, on notera qu'au Livre II des Eléments d'Euclide, on représente le produit de deux grandeurs rectilignes par la surface du rectangle associé et le produit de trois par un volume. Une sorte d'algèbre géométrique s'en déduit du genre $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (cf. figure 4).

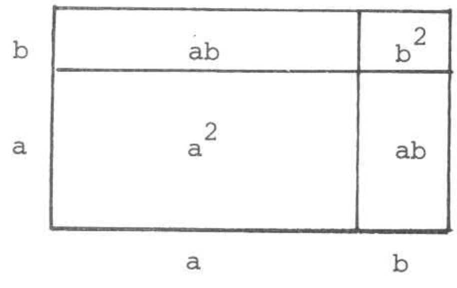


Figure n° 4

Nous gardons trace de cette intrusion géométrique dans notre langage mathématique grâce aux expressions x au carré, ou au cube au lieu de x puissance deux ou trois.

Ce handicap par manque va sérieusement affaiblir le rôle ultérieur du Livre V et ce de deux façons :

- d'une part, on n'utilisera le Livre V que pour les seules grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes) et on pensera que le Livre V est fondé sur les axiomes de la géométrie (peut-être à cause de l'emploi de la quatrième proportionnelle) ;

- d'autre part, le courant numéricien ne trouvant pas dans le Livre V le support théorique idoine errera peu ou prou dans des recettes souvent ingénieuses mais non scientifiques en ce sens qu'elles ne s'accompagneront d'aucune justification, d'aucun moyen pour adapter le procédé à des situations voisines.

Quoiqu'il en soit, bien qu'évacué avec brio par Eudoxe, le problème de l'infini reste à résoudre lorsque disparaît la civilisation grecque classique.

DEUXIEME CHAPITRE

NOMBRE ET MESURE CHEZ LES ALEXANDRINS

"Si ruminando, e si mirando in quelle,
mi prese il sonno, il sonno che sovente
anzi che il fatto sia sa le novelle"

DANTE
La Divine Comédie

1. DOCTRINE ARISTOTELICIENNE DES CONCEPTS MATHEMATIQUES

Le Livre V d'Eudoxe avait pour contrepartie la doctrine platonicienne des Idées. L'oeuvre d'Archimède, schématiquement, a pour contrepartie philosophique la doctrine aristotélicienne.

On sait qu'Aristote, surnommé le Stagirite pour son lieu de naissance, vécut de 384 à 322, fut élève de Platon et tuteur pendant trois ans du jeune Alexandre. Il fonda sa propre école, le Lycée, à Athènes, se maria à la soeur du tyran Hermias et publia beaucoup avant de devoir précipitamment quitter Athènes en raison de la défaveur des Macédoniens après la mort d'Alexandre le Grand.

Son oeuvre est une encyclopédie organisée du savoir humain dont la forme, déjà, s'oppose aux Dialogues de Platon. Aristote inaugure le genre universitaire : les "Sommes", les "Miroirs du Monde" et cette forme littéraire tentera bien des poètes de Dante (La Divine Comédie) à Soljénitsine (Le Premier Cercle). Ayant déjà cité Aristote à propos de l'infini et des grandeurs continues, attachons-nous ici à préciser le statut des concepts mathématiques aux yeux du Stagirite.

Un premier point à noter est l'absence de livre entièrement consacré aux mathématiques (μαθήματα). On passe de traités sur la logique (Organon, le court traité sur Les Catégories, les deux Analytiques) aux traités consacrés au monde naturel (La Physique, le traité Du Ciel, De la génération et de la corruption, les Météorologiques) et enfin aux traités métaphysiques, politiques ou éthiques. D'ailleurs un certain agacement perce chez Aristote lorsqu'il déclare :

> *"Les mathématiques sont devenues pour les philosophes d'à présent toute la philosophie, bien qu'on dise qu'on ne devrait les cultiver qu'en fonction du reste"* (Métaphysique 992 a).

Un deuxième point est cette insistance, très neuve par rapport à Platon, à développer la logique. Certes, comme le dit B. Russel, dans son Histoire de la Philosophie Occidentale (Chap. XXII in fine),

> *"dans les temps modernes, pratiquement, chaque pas en avant, en science, en logique ou en philosophie, a été marqué par une lutte contre l'opposition des disciples d'Aristote".*

Il n'empêche que l'effort d'Aristote est fondamental.

Nous ne nous livrerons à aucune description de cette logique aristotélicienne, ou de ses conséquences métaphysiques, sauf pour souligner l'accent "syntaxique" et "linguistique" des concepts productifs d'Aristote. (Une définition comme assemblage de mots, rôle du syllogisme, cet outil logique que la mathématique en tant que telle utilise bien peu). Interviennent chez Aristote des "noms propres" ou "substances" (le soleil, Socrate, etc), des "universaux" (l'homme, le chien, le blanc comme opposé au noir, le mou comme opposé au dur) et des "attributs" ou propriétés d'une substance donnée ou de tel universel.

Il y a en outre, quant aux "sujets" (noms propres ou substances), une extension de la notion de substance, sous la classification de "catégories". Une substance réunit certaines propriétés mais ne se réduit pas à la somme de celles-ci (la forme (εἶδος) est la substance d'un objet matériel, l'âme est la forme du corps).

Il y a surtout, quant aux "sujets", la notion d'"essence" (οὐσία), c'est-à-dire celle des propriétés que le sujet ne pourrait perdre sans cesser d'être lui-même. La "définition" d'un sujet est la mise en oeuvre linguistique de son essence. Les concepts mathématiques sont alors des définitions particulières concernant les objets naturels ou physiques (au sens de φύσις). Deux conséquences sont bien mises en évidence par Aristote :

- d'une part, une définition n'assure pas l'existence du sujet défini. A côté des notions communes de logique, à côté des axiomes ou définitions qui proviennent d'une abstraction des données sensibles directement perceptibles, on aura aussi des postulats. Ces derniers ne doivent pas leur présence à la vision immédiate de l'Idée (comme chez Platon) mais aux déductions constructives qu'ils permettent d'obtenir.(Le Moyen-Age et l'âge classique oublieront ces distinguos). Les processus de pensée n'imposent aucune nécessité aux choses.

> *"Ainsi pour la démonstration peu importent les choses réelles ; pour l'existence, elle n'est que dans celles-là"* (Physique III 208 a 34).

Ailleurs, Aristote donne l'exemple suivant très explicite :

> *"La droite étant telle, il est nécessaire que le triangle ait ses angles égaux à deux droits ; mais la vérité de la conséquence n'entraîne pas celle de l'hypothèse ; toutefois si la conséquence n'est pas vraie, la droite n'existe plus"* (Physique II 9 200 a 13).

Certes, chez Aristote, la discussion sur l'existence a une coloration "théologique" et plus encore "téléologique" (c'est-à-dire que le monde naturel et par corollaire l'intelligible sont organisés en vue d'une fin), mais l'on retrouvera le débat au sujet des fondements des mathématiques au début du XXème siècle ;

- d'autre part, pour parvenir à ces définitions, prémisses indispensables d'un syllogisme, le raisonnement inductif partant du sensible est le seul outil possible.

Rappelons à ce propos les principes de la démarche du physicien selon Aristote :

> *"Or, la marche naturelle, c'est d'aller des choses les plus connaissables pour nous et les plus claires pour nous à celles qui sont plus claires en soi et plus connaissables... Or, ce qui, pour nous, est d'abord manifeste et clair, ce sont les ensembles les plus mêlés ; c'est seulement ensuite que, de cette indistinction, les éléments et les principes se dégagent et se font connaître par voie d'analyse".*
> (Physique Livre I 1 184 a 16)

De toute façon, avec un gros bon sens, Aristote note :

> *"Nous apprenons, soit par induction, soit par déduction. La déduction part des vérités universelles, l'induction des vérités particulières. Mais il est impossible d'acquérir la contemplation des vérités universelles, si ce n'est par l'induction".*

On est là à l'opposé de Platon et un embryon de méthode expérimentale ou opératoire se précise. Certes Aristote intègre dans son système l'intuition platonicienne fondamentale en posant l'intemporalité, donc l'intangibilité, des "essences".

Pour notre propos, bien plus que par les arguments textuels d'Aristote, dont l'aspect souvent nébuleux n'échappe qu'aux déjà convaincus, on comprendra la démarche d'Aristote par les citations suivantes où Aristote veut montrer l'inexistence de l'infini (Physique III § 5) :

> *"Mais peut-être est-ce une question trop générale que de savoir si l'infini est possible dans les choses mathématiques et dans les choses intelligibles et dans celles qui n'ont aucune grandeur ; pour nous, c'est dans les choses sensibles, dans ce qui fait l'objet de notre étude, que nous nous demandons s'il y a ou non un corps infini quant à l'accroissement".*

Aristote commence par dire *"qu'un examen logique semblerait prouver qu'il n'y en a pas"*

> Λογικῶς μὲν οὖν σκοπουμένοις ἐκ τῶν τοιῶνδε δόξειεν ἄν οὐκ εἶναι.

L'argument clef est que la notion de corps sensible étant celle de corps limité par une surface, ceci s'oppose à la notion d'infini actuel. Mais on notera le côté dubitatif de la phrase car la logique n'a pas de caractère probant définitif. C'est surtout en mathématiques que *"le pourquoi se ramène à la définition"* (Livre II 198 a 17)(Aristote utilise ορισμός). Aristote passe au nombre et à ce qui est nombrable donc compté et donc ne pouvant être infini. Mais sa démonstration ne s'arrête pas là :

> *"Si l'on considère plutôt les choses physiquement, voici les raisons qui se présentent : l'infini ne peut être ni composé, ni simple".*

Bien que cela ne nous intéresse pas vraiment, mais pour illustrer la "méthode expérimentale" d'Aristote, donnons le tout début de la preuve :

> *"Composé d'abord, le corps infini ne le sera pas, si les éléments sont finis en nombre, car il faut qu'ils soient plusieurs, que les contraires s'égalent toujours et que nul d'entre eux ne soit infini ; car si la puissance d'un seul corps est dépassée par celle d'un autre, d'une quantité quelconque, par exemple si le feu est limité et l'air infini, quelque soit l'excès de la puissance du feu sur l'air à quantité égale, pourvu que cet excès reste nombrable, cependant on comprend que malgré tout l'infini dépasse et détruise le fini. D'autre part, il impossible que chacun soit infini...etc".*

N'est-ce pas une attitude normale pour celui qui dit qu'

> *"il est absurde de prétendre qu'entre les objets de la perception sensible et les idées accessibles à la seule intuition, il existe des êtres intermédiaires connus seulement par le raisonnement mathématique".*

2. LE PRINCIPE MATHEMATIQUE D'EXHAUSTION

Archimède, dans son traité Sur la sphère et le cylindre, attribue explicitement l'invention de la méthode d'exhaustion à Eudoxe et insiste dans la Quadrature de la parabole sur l'utilisation essentielle par ce même Eudoxe de ce qui est devenu notre axiome d'Archimède. Il n'est pas impossible que des tentatives voisines n'aient été faites par Hippocrate de Chios, Démocrite, Anaxagore, etc.

Nous allons détailler la méthode d'exhaustion telle qu'exposée au Livre XII d'Euclide afin de surprendre l'utilisation du Livre V et afin de mieux apprécier la démarche d'Archimède. Pour la petite histoire, ajoutons que le nom "méthode d'exhaustion" est tardif puisque dû à Grégoire de Saint-Vincent vers 1647 (Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni).

2.1 La notion d'aire

La notion d'aire est mal explicitée dans Euclide aux yeux d'un mathématicien frotté aux techniques de l'intégrale de Lebesgue et de la théorie de la mesure.

Pourtant, on peut en gros décrire l'attitude euclidienne ainsi : une Définition du Livre I des Eléments assure que *"une surface est ce qui a seulement longueur et largeur"*. Pourtant, Euclide ne considère que les surfaces limitées par des portions de droite ou d'arcs de cercle. Plus tard, on y adjoindra des portions de coniques (cf. Archimède, Appolonius, Pappus, Théon d'Alexandrie, etc). A une surface est associée une aire laquelle possède les propriétés des grandeurs du Livre V (semi-groupe archimédien totalement ordonné et divisible). Cette aire ne dépend pas de la position de la surface (invariante par déplacement) donc deux figures égales ont même aire. Enfin, une telle grandeur est liée à une autre notion, celle de longueur, dont on présuppose qu'il s'agit aussi d'une grandeur susceptible du traitement par le Livre V. Nous discuterons plus loin (§ 3.1) de la notion de longueur.

La liaison entre aire et longueur étant que l'aire du parallélogramme ABCD est à celle du parallélogramme AB'C'D comme la longueur AB l'est à AB', de même d'ailleurs que l'aire du triangle ADB à celle de ADB' (cf. figure n° 5).

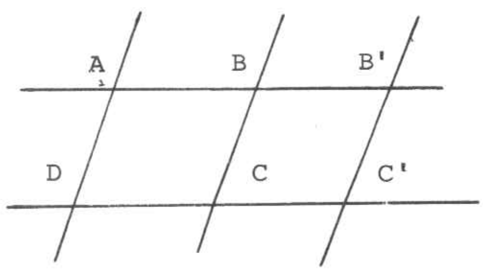


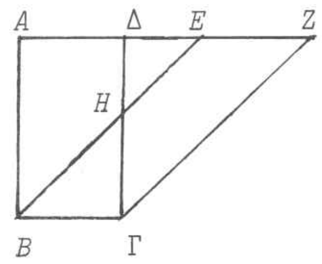
Figure n° 5

Les propriétés d'addition des aires et de division par un entier étant alors assez claires en prenant des triangles. Naturellement, on postule qu'une surface, du moins de celles considérées, incluse dans une autre, possède une aire plus petite (Notion commune n° 9 ; le tout est plus grand que la partie). Ce faisant, on peut montrer par exemple (Proposition 35 du Livre I) :

"Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux".

Citons d'ailleurs Euclide lui-même :

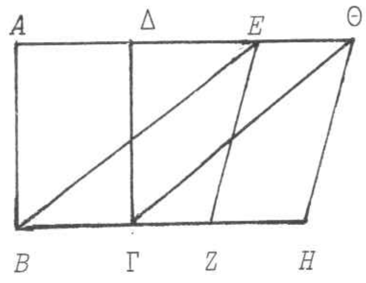
"Que les parallélogrammes ABΓΔ ; EBΓZ soient construits sur la même base BΓ , et entre les mêmes parallèles AZ , BΓ ; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme ABΓZ .



Car puisque ABΓΔ est un parallélogramme, AΔ est égal à BΓ ; par la même raison, EZ est égale à BΓ ; donc AΔ est égal à EZ ; mais la droite ΔE est commune ; donc la droite totale AE est égale à la droite totale ΔZ ; mais AB est égal à ΔΓ ; donc les deux droites EA, AB sont égales aux deux droites ZΔ , ΔΓ, chacune à chacune ; mais l'angle extérieur ZΔΓ est égal à l'angle intérieur EAB ; donc la base EB est égale à la base ZΓ ; donc le triangle EAB sera égal au triangle ΔΓZ . Retranchons la partie commune ΔHE ; le trapèze restant ABHΔ sera égal au trapèze restant EHΓZ ; ajoutons le triangle commun HBΓ , le parallélogramme total ABΓΔ sera égal au parallélogramme total EBΓZ . Donc, etc."

Citons aussi la Proposition 36 et sa démonstration.

"Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux. Que les parallélogrammes ABΓΔ , EZHΘ soient construits sur des bases égales BΓ , ZH , et entre les mêmes parallèles AΘ , BH ; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EZHΘ .



Joignons BE , ΓΘ .
Puisque BΓ est égal à ZH , et ZH égal à EΘ , la droite BΓ est égale à EΘ ; mais les droites BE , ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles ; donc les droites EB , ΓΘ sont égales et parallèles ; donc EBΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ABΓΔ ; car il a la même base BΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme EZHΘ est égal au parallélogramme EBΓΘ ; donc le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EZHΘ . Donc, etc."

La théorie des proportions permet d'aller nettement plus loin. Au Livre VI, qui traite de la similitude, Euclide démontre la proposition sui-

Proposition 19 . Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

L'argument se lit ainsi. Soient ABΓ et ΔEZ des triangles semblables (AB homologue de ΔE, etc). On construit une quatrième proportionnelle BH de sorte que $\frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{BH}{EZ}$ (H sur la droite BΓ). On peut alors vérifier que les triangles ABH et ΔEZ sont égaux (C'est la Proposition 15 du Livre VI, car les angles en B et E sont égaux et que $\frac{BA}{E\Delta} = \frac{EZ}{BH}$, égalité tirée de $\frac{BA}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{EZ}$ et de l'inversion de l'égalité définissant BH). On calcule alors :

$$\frac{B\Gamma}{BH} = \frac{\text{Aire } AB\Gamma}{\text{Aire } ABH} = \frac{\text{Aire } AB\Gamma}{\text{Aire } \Delta EZ} .$$

Comme $\frac{B\Gamma}{BH} = (\frac{B\Gamma}{EZ})^2$, on en déduit la Proposition.

Résumons donc le présupposé euclidien en disant qu'a priori on assigne une grandeur à toute surface limitée par des portions de droite et des portions d'arc de cercle.

2.2 Les deux premières Propositions du Livre XII

1) 1ère Proposition .

Cette Proposition énonce que des polygones semblables inscrits dans des cercles ont des aires qui sont en raison double de celle des diamètres correspondants.

La démonstration est basée sur une remarque de triangles semblables (cf. Figure n° 6).

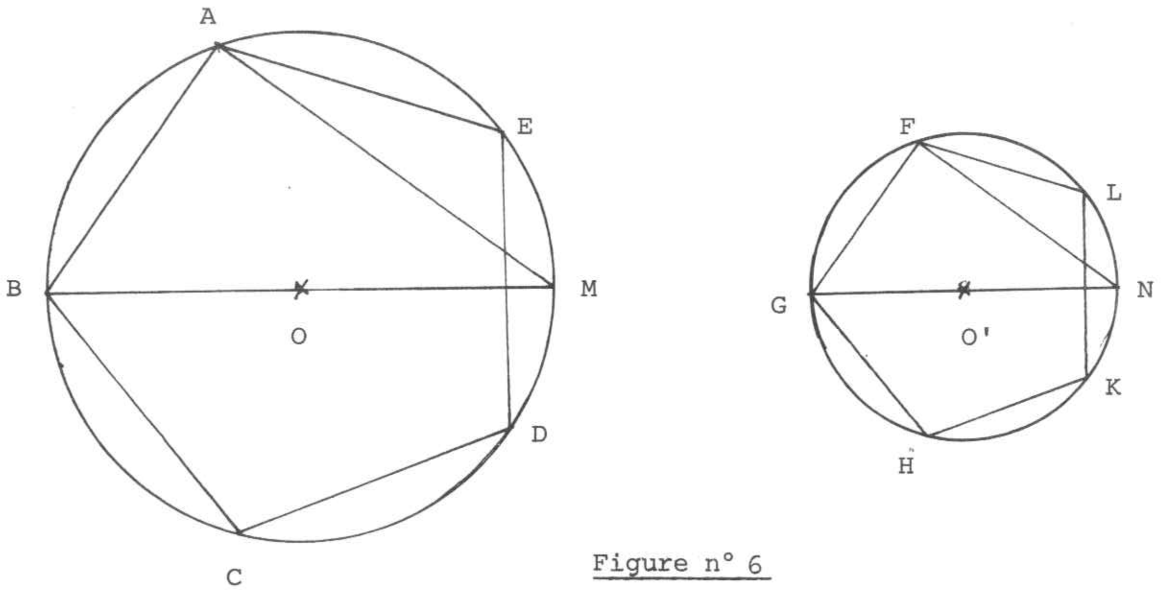


Figure n° 6

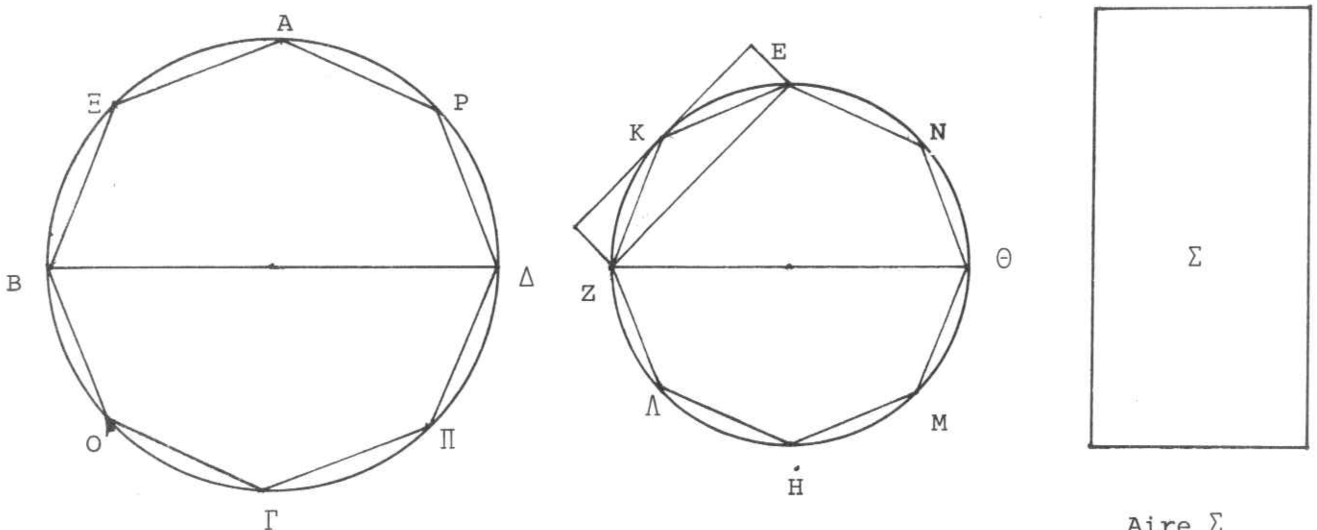
Les triangles ABM et FGN sont semblables, par suite BM est à GN ce que BA est à GF . La Proposition 20 du Livre VI énonce que les aires de polygones semblables sont dans une raison double de celle des côtés correspondants. Par transitivité de l'égalité des raisons, donc égalité des raisons doubles, on en déduit la Proposition 1.

2) 2ème Proposition

Les aires de deux cercles ont une raison double de celle des diamètres.

En langage moderne, le rapport des aires de deux cercles est le carré du rapport des diamètres. L'idée intuitive est que ceci étant vrai de polynômes semblables inscrits dans le cercle, quel que soit le nombre de côtés de ces polynômes, on a encore le résultat pour le cercle.

L'argument utilisé au Livre XII ne fait intervenir aucune notion de limite comme nous allons le voir. On part de la figure n° 7 ,



Cercle $AB\Gamma\Delta$ — Cercle $EZH\Theta$ — Aire Σ

Figure n° 7

Il faut donc montrer $\dfrac{\text{Aire } \widehat{AB\Gamma\Delta}}{\text{Aire } \widehat{EZH\Theta}} = (\dfrac{B\Delta}{Z\Theta})^2$. Compte tenu du présupposé que les aires, comme les longueurs, sont susceptibles de la théorie élaborée au <u>Livre V</u> et compte tenu de l'hypothèse de la quatrième proportionnelle, il existe une aire Σ telle que (cf. Chapitre I § 3.5) : $(\dfrac{B\Delta}{Z\Theta})^2 = \dfrac{\text{Aire } \widehat{AB\Gamma\Delta}}{\Sigma}$.

Dès lors, il y a trois cas :

- Σ est plus petite que l'aire du cercle $\widehat{EZH\Theta}$,
- Σ est plus grande que l'aire du cercle $\widehat{EZH\Theta}$,
- Σ est égale à l'aire du cercle $EZH\Theta$.

Euclide montre que les deux premiers cas sont impossibles, ce qui suffit à établir la Proposition 2.

a) Il commence par supposer $\Sigma <$ **Aire** $\widehat{EZH\Theta}$. On notera ici $S' = \text{Aire } \widehat{EZH\Theta}$ et $S = \text{Aire } \widehat{AB\Gamma\Delta}$. Précisément, on suppose que $EZH\Theta$ est un carré inscrit dans le cercle. L'aire de ce carré est strictement supérieure à la moitié de l'aire du cercle (Pour le voir, il suffit de prendre le carré dont les côtés sont les tangentes au cercle menées par les sommets E, Z, H et Θ . Ce nouveau carré a une aire double de celle du carré $EZH\Theta$ (cf. Proposition 47 du <u>Livre XI</u> et Proposition 31 du <u>Livre III</u>) et comme le cercle est intermédiaire, on a le résultat).

Partageons alors l'arc EZ en deux parties égales KE et KZ par exemple. Construisons le rectangle de côté ZE d'une part, l'autre côté parallèle passant précisément par K (c'est la tangente en K au cercle). L'aire du triangle ZKE est moitié de l'aire de ce carré comme il est facile de le constater. En particulier, la moitié de l'aire du segment circulaire $\widehat{ZKE}$ est inférieure à l'aire du triangle ZKE.

Nous répétons cette dichotomie sur les côtés ZH, $H\Theta$ et ΘE construisant ainsi les points Λ, M et N . L'octogone EKZΛHMΘN possède une aire strictement supérieure à la moitié de l'aire S' .

> *"Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales ; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès de l'aire du cercle* EZHΘ *sur la surface* Σ *; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées".*

[En termes algébriques modernes, on construit par dichotomies successives, des polygones inscrits dont les aires S'_1 , S'_2 , ..., S'_n , ... satisfont

$$S'_1 > \frac{S'}{2} \quad ; \quad S'_1 \text{ aire du carré EZH}\Theta$$

$$S'_2 - S'_1 > \frac{S'-S'_1}{2} \quad ; \quad S'_2 \text{ aire de l'octogone EKZ}\Lambda\text{HM}\Theta\text{N}$$

et plus généralement

$$S'_n - S'_{n-1} > \frac{S'-S'_{n-1}}{2} \quad .$$

Soit

$$S' - S'_n < \frac{S'-S'_{n-1}}{2}$$

et donc

$$0 \leqslant S' - S'_n < \frac{S'-S'_1}{2^{n-1}} \quad .$$

Par suite (axiome d'Archimède), $S'-S'_n$ peut être rendu plus petit que $S' - \Sigma$ pour n assez grand.]

Reprenons l'argumentation d'Euclide lequel fait la figure en supposant (simple question de facilités de notations pour lui) qu'on ait cette majoration du reste pour l'octogone EKZΛHMΘN (c'est-à-dire que $n = 2$ convient). On note que $S'-S'_n < S'-\Sigma$ implique $S'_n > \Sigma$.

On construit dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone semblable au polygone d'aire S'_n (avec $n = 2$, ΑΞΒΟΓΠΔΡ est semblable au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ). Soit S_n l'aire de ce polygone. Grâce à la Proposition 1 du <u>Livre XII</u>, on a

$$\left(\frac{B\Delta}{Z\Theta}\right)^2 = \frac{S_n}{S'_n}$$

(ce qu'Euclide dit sous forme littérale et non algébrique)

donc

$$\frac{S}{\Sigma} = \frac{S_n}{S'_n} \quad .$$

Par permutation (<u>Livre V</u>, Proposition 16) :

$$\frac{S}{S_n} = \frac{\Sigma}{S'_n} \, .$$

Puisque le polygone d'aire S_n est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ, alors $S > S_n$. D'où $\Sigma > S'_n$ par définition de l'égalité de deux rapports (cf. <u>Livre V</u>, Définition 6). Cette inégalité contredit l'inégalité obtenue plus haut, à savoir $\Sigma < S'_n$ d'où l'impossibilité.

b) Supposons maintenant que $\Sigma >$ Aire ΕΖΗΘ . Pour conduire la démonstration, Euclide commence par exploiter symétriquement ce qui a été obtenu en a), à savoir que $\left(\frac{Z\Theta}{B\Delta}\right)^2 = \frac{S'}{\Sigma'}$ est impossible avec une aire Σ' plus petite que l'aire S'. Or, à partir de la proportion qui définit Σ', on a par inversion (cf. <u>Livre V</u>, Proposition 16) : $\left(\frac{Z\Theta}{B\Delta}\right)^2 = \frac{\Sigma}{S}$. Il est alors possible d'utiliser une fois encore la quatrième proportionnelle et en faisant une inversion, il existe une aire Σ' telle que : $\frac{\Sigma}{S} = \frac{S'}{\Sigma'}$. Puisque $\Sigma > S'$ alors $S > \Sigma'$, d'où $\left(\frac{Z\Theta}{B\Delta}\right)^2 = \frac{S'}{\Sigma'}$ avec $S' > \Sigma'$, ce que l'on a vu être impossible et ce qui termine cette belle démonstration. La valeur exacte π du rapport de l'aire au carré du rayon n'intéresse pas Euclide ici et n'interviendra pas dans les <u>Eléments</u> (cf. § 4.4).

Nous touchons là une sérieuse limitation pratique de la théorie des Proportions, laquelle permet de comparer les raisons et surtout d'indiquer les cas d'égalité, mais laquelle ne permet pas, en règle générale, de concevoir une raison comme une entité ou valeur numérique. Pourtant, avec la méthode d'exhaustion, tout est en place pour un calcul par défaut du nombre π, calcul approché dont tant les Egyptiens que les Babyloniens ont déjà une certaine pratique et qu'Euclide domine fort bien, mais écarte péremptoirement -c'est-à-dire par principe- de ses propres considérations.

Une telle attitude puriste -on croirait surprendre certains modernes bourbakisants- ne peut que susciter une démarche numérique opposée (cf. § 4 le courant numéricien).

2.3 L'axiome d'Archimède et ses conséquences

Le texte même du Livre XII nous indique deux choses :

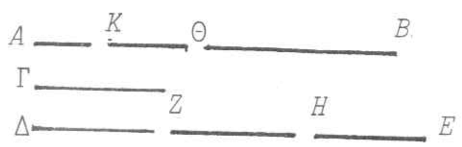
- d'une part que la quatrième proportionnelle est explicitement utilisée pour les rapports d'aires et que la théorie du Livre V est remarquablement maîtrisée (un rapport d'aires comparé à un rapport de longueurs) ;

- d'autre part que l'importance de l'axiome d'Archimède (cf. Définition 5 du Livre V) est exemplifiée par l'emploi de la Proposition 1 du Livre X. Le Livre X traite essentiellement de toutes les longueurs que l'on peut représenter par $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ lorsque a et b sont des longueurs commensurables. En un sens, c'est un livre qui montre que l'aspect opératoire du Livre V n'a pas été poursuivi jusqu'au bout (pas d'addition et multiplication rare). La première proposition est importante pour nous. Elle s'énonce comme suit.

Proposition 1 (Livre X) . Soient deux grandeurs inégales. Si l'on soustrait de la plus grande une grandeur supérieure à sa moitié et de ce qui reste une grandeur supérieure à la moitié de ce reste, et si l'on répète continuellement le procédé, alors il restera une grandeur inférieure à la plus petite grandeur envisagée.

Il n'est pas impossible que cette Proposition ait été considérée comme une évidence par Eudoxe qui en déduisait le reste des remarquables résultats du Livre XII et n'ait été "démontré" qu'après la rédaction du Livre V, livre qui témoigne d'une telle maturité que sa rédaction pourrait être plus tardive, par exemple datant de l'époque d'Archimède (cf. Conclusions de J. Itard dans *Les Livres arithmétiques* d'Euclide). Mais fournissons la démonstration littérale d'Euclide.

"Soient deux grandeurs inégales AB, Γ ; que AB soit la plus grande ; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ .



Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB "

L'argument essentiel est là : c'est la définition V du Livre V (axiome d'Archimède). Poursuivons notre lecture.

> *"Qu'il soit multiplié ; que ΔE soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔZ, ZH, HE égales chacune à Γ ; retranchons de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié, de AΘ une partie ΘK plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ΔE ; que le nombre des divisions de AK, ΘK , ΘB soit donc égal au nombre des divisions ΔZ, ZH, HE.*
> *Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de AB une partie BΘ plus grande que sa moitié le reste HΔ est plus grand que le reste ΘA. Et puisque HΔ est plus grand que ΘA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de ΘA on a retranché ΘK plus grand que sa moitié, le reste ΔZ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔZ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que AK ; donc AK est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur AB une grandeur AK plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.*
> *La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés."*

Le Livre X, le plus long des livres des Eléments, et en un sens le plus technique, se poursuit par un critère d'incommensurabilité, par l'algorithme fournissant la plus grande commune mesure de deux grandeurs commensurables. Ceci permet d'introduire une classification minutieuse des irrationnelles de la forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. On notera que les constructions géométriques à la règle et au compas jouent un rôle mental essentiel puisque dans ce Xème Livre on accepte d'appeler "rationnels" les segments dont le carré est commensurable au segment de référence choisi et que tout au long de ce Xème Livre le langage des droites et des surfaces est utilisé. D'ailleurs, on parle de carré d'une grandeur A ce qui ne peut être défini au Livre V. On ne peut donc pas argumenter de ce Livre X pour préciser l'esprit du Livre V notamment en ce qui concerne la duplication des raisons, même si l'on y trouve la comparaison d'une raison de nombres à une raison de grandeurs. On lira d'ailleurs quelques propositions de ce Livre X, importantes pour notre propos, dans le document n° 16. Par contre, nous reportons la discussion à proprement parler du Livre X au § 4.3 de ce chapitre.

2.4 Les autres Propositions

La méthode d'exhaustion que nous venons de décrire sert à Euclide pour établir des résultats élaborés sur la comparaison de volumes. Commençant par la Proposition III :

> *"Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux ; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière"* .

et la Proposition IV :

> *"Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre pyramide, ces prismes étant égaux en nombre"*

On a déblayé le terrain techniquement parlant et on peut appliquer la méthode d'exhaustion pour déduire (Préposition V) :

> *"Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leur base"*.

De la même façon, le volume d'un cône est le tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur (Proposition 10). Des cônes ou des cylindres semblables ont des volumes dont le rapport est la raison triple des diamètres des bases (Proposition 12). Le rapport de deux sphères est raison triple du rapport des diamètres (Proposition 18).

Cette dernière Proposition force l'admiration par l'emploi rigoureux et économique des résultats du Livre V et du début du Livre XII. On est quand même étonné qu'Euclide ne compare pas les deux raisons qui interviennent à la Proposition 18 et à la Proposition 2. Avec les éléments d'algèbre géométrique des Grecs, une telle comparaison nécessitait un véritable tour de force, accompli par Archimède (cf. § 3).

3. L'APPORT D'ARCHIMEDE SUR MESURE ET NOMBRE

Tout comme pour Euclide, on ne sait rien de certain sur la vie d'Archimède, sinon qu'il acquit une renommée extraordinaire propagée jusqu'à nos jours. Sa mort tragique lors du siège de Syracuse, en 212 avant J.-C., une formule heureuse au sortir précipité d'un bain, un principe de corps flottants, sont les souvenirs immédiatement évoqués par son nom. A travers lui s'opposèrent les tendances de mathématiques pures et de mathématiques appliquées à l'Art de l'Ingénieur, les capacités techniques (usage du levier ou des lentilles optiques, détermination des poids spécifiques...) ont ébloui les contemporains (*"Tous les ressorts de l'univers lui étaient connus"* dira Silius Italicus) et Plutarque dit que *"ce fut par ses connaissances profondes en mécanique qu'Archimède se conserva invincible, lui et sa ville, autant qu'il dépendit de lui"*, mais ce même Plutarque ajoute :

> *"Au reste, Archimède avait une âme si élevée, un esprit si profond, et une si grande richesse de théories géométriques, qu'il ne voulut jamais rien laisser par écrit sur la construction de ces machines qui lui avaient acquis tant de gloire... ; regardant la mécanique et, en général, tout art qu'on exerce pour le besoin, comme des arts vils et obscurs, il ne se livra qu'aux sciences dont la beauté et la perfection ne sont liées à aucune nécessité".*

Le génie mathématique d'Archimède le détache nettement de ses contemporains et, en fait, de tous les mathématiciens antiques. La lecture de ses ouvrages, quelquefois très ardue, provoque chez le lecteur moderne un extraordinaire sentiment d'admiration devant l'ingéniosité dans la manipulation des techniques géométriques (et il faut tenir compte de la pauvreté des techniques opératoires de nature algébrique).

Citons en vrac quelques résultats marquants en mathématiques, résultats rigoureusement démontrés :

- le nombre π est la raison qui mesure le rapport de l'aire de cercle au carré de son rayon, ou le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, ou le rapport de l'aire d'une sphère à quatre fois l'aire d'un grand cercle (De la sphère et du cylindre, περὶ σφαίρας καὶ κυλινδρον ; De la mesure du cercle, κύκλον μέτρησις) ;

- le volume d'une sphère vaut les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre qui l'inscrit (Corollaire de la Proposition 34, De la sphère et du cylindre). Ce dernier résultat établit que $\frac{4}{3}\pi$ est la raison qui mesure le rapport du volume d'une sphère au cube de son rayon ;

- détermination de l'aire d'une ellipse (sous la forme suivante : l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b est à l'aire d'un cercle de rayon r comme $\frac{ab}{r2}$) (Proposition 5, Sur les conoïdes et les sphéroïdes, περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων) ;

- détermination améliorée de la valeur de π (De la mesure du cercle cf. § 4.4) ;

- détermination du volume d'un segment de paraboloïde de révolution (Sur les conoïdes et les sphéroïdes, Proposition 11) ;

- détermination de l'aire d'un segment de parabole (Quadrature de la parabole, τετραγωνισμός παραβολῆς) ;

- étude quasi exhaustive de la spirale (Sur les Spirales, περὶ έλικων), première courbe non algébrique dont on ait déterminé l'aire d'une spire, les tangentes, etc.

Et nous ne mentionnerons pas les résultats mécaniques fondamentaux qui bousculent le corpus aristotélicien et fondent la statique (Sur l'équilibre des plans, Les corps flottants, etc).

Dans le domaine très précis qui nous concerne, l'apport d'Archimède est essentiel :

- d'une part, Archimède va préciser mathématiquement la notion de longueur d'une courbe, d'aire d'une surface, de volume et de centre de gravité et raffiner à l'extrême les possibilités de la méthode d'exhaustion tout en maintenant les normes rigoureuses de la Géométrie grecque. Nous nous contenterons au § 3.1 d'envisager les considérations d'Archimède sur la notion de longueur et au § 4.4, comme illustration, sa mesure approchée du périmètre d'un cercle. Au § 3.2, nous donnerons l'admirable calcul de l'aire d'un segment de parabole ;

- d'autre part, Archimède va taquiner les possibilités floues du calcul infinitésimal en s'autorisant à opérer sur des décompositions infinies des figures, mettant d'ailleurs à l'oeuvre les ressources de la statique. Archimède énonce explicitement que cette méthode lui sert pour découvrir une propriété et non de preuve définitive, à la manière géométrique. Tel est l'objet d'un court traité adressé à Eratosthène, La méthode, retrouvé sur parchemin du Xème siècle à Constantinople dans une librairie en 1906 (περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρός Ἐρατοσθένην ἔφοδος).

3.1 Notion de longueur chez Archimède

Au § 2.1 nous avons envisagé la notion euclidienne d'aire. Un précurseur d'Euclide, Zénodore, mit l'accent sur le fait que l'égalité des périmètres des lignes délimitant deux surfaces n'entraîne pas l'égalité des aires. Cette évidence, embryon de calcul des variations, repose, pour un rectangle, sur le produit, notion mal maîtrisée géométriquement, comme nous l'avons noté quant aux proportions. Zénodore semble avoir prouvé un certain nombre de résultats sur les isopérimétriques, par exemple que le cercle était la figure de plus grande aire pour un périmètre donné..

Archimède va être le premier à comparer des longueurs courbes à des longueurs rectilignes. Pour lui, comme pour Euclide, la longueur est un donné a priori comme grandeur divisible toujours comparable à une autre et donc susceptible du Livre V d'Euclide. Pour les aires, l'utilisation de la notion commune : le tout est plus grand que la partie, suffit à l'application de l'ingénieuse méthode d'exhaustion. Il n'en est pas de même pour les longueurs et ceci est clairement perçu par Archimède.

Ainsi, son deuxième postulat (plus précisément Λαμβάνομενα) en tête de l'ouvrage De la sphère et du cylindre énonce :

> *"Quant aux lignes, lorsque, situées dans un plan, elles ont les mêmes extrémités, elles sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la droite ayant mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune et la ligne comprise est la plus petite".*

La définition de ligne concave est la définition moderne, une ligne pouvant comporter des parties courbes ou rectilignes.

> *"J'appelle concave dans la même direction une ligne telle, qu'ayant pris deux points quelconques sur cette ligne, les droites qui joignent ces points tombent, soit toutes du même côté de la ligne, soit, les unes du du même côté, d'autres sur la ligne même, sans que toutefois aucune d'elles ne tombe de l'autre côté"* (Définition 2).

Archimède précise comme postulat que la droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités. Ceci est nouveau par rapport aux Eléments d'Euclide puisqu'on rajoute, a priori, une propriété de la droite, propriété indispensable pour la mesure des longueurs comme va le montrer Archimède. Ces choses étant posées, dit Archimède,

> *"si un polygone est inscrit dans un cercle, il est clair que le périmètre du polygone est plus petit que la circonférence du cercle ; car chacun des côtés du polygone est plus petit que l'arc du cercle qu'il découpe".*

Mais les précisions apportées sur la concavité lui permettent de passer à la première proposition du livre De la sphère et du cylindre :

> *"Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle".*

On pourra utiliser alors la méthode d'exhaustion aussi bien aux polygones inscrits qu'aux polygones circonscrits, ce qui s'avèrera indispensable pour déterminer la longueur d'un cercle (cf. § 4.3). Archimède énonce de telles propriétés, mesurant sciemment son originalité par rapport à Euclide.

Il est intéressant de noter quelques remarques, bien tardives, faites par Eutocius d'Ascalon, mathématicien palestinien né vers 480 après Jésus-Christ et qui appartient à cette lignée de commentateurs comme Théon d'Alexandrie, Pappus ou Proclus.

En ce qui concerne les longueurs, qu'elles soient de ligne courbe ou non, Eutocius dit clairement :

> *"Nous croyons évident pour tous que la circonférence du cercle est une grandeur et est parmi celles qui sont établies sous une seule dimension. Or, la ligne droite est de la même espèce, par conséquent, il ne semble pas encore possible de se procurer (πορίςειν) une droite égale à la circonférence d'un cercle ; mais le fait qu'une droite soit naturellement égale à celle-ci, ne sera néanmoins mise en question par personne"* (Commentaire sur le Théorème I du livre De la Mesure du cercle d'Archimède).

Pour Archimède,

> *"Ce ne sont pas simplement les lignes circulaires ou coniques ou ayant leur continuité non brisée qu'il appelle courbes, mais il dénomme uniquement courbe dans le plan toute ligne*

> *exceptée celle qui est droite et une ligne construite de manière quelconque dans le plan, de telle sorte qu'elle soit même composée de lignes droites"*
> (Commentaire sur les Définitions du livre d'Archimède, De la sphère et du cylindre).

Mais Eutocius ergote sur le premier postulat, à savoir que la droite est la plus courte des lignes qui ont mêmes extrémités. Son argumentation est d'inscrire une ligne polygonale ΑΛΓΕΒ sur la courbe AB et d'utiliser plusieurs fois le fait qu'un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres (les Eléments Livre I Prop. 20) afin d'établir que la longueur de la ligne polygonale ΑΛΓΕΒ domine celle du segment AB .

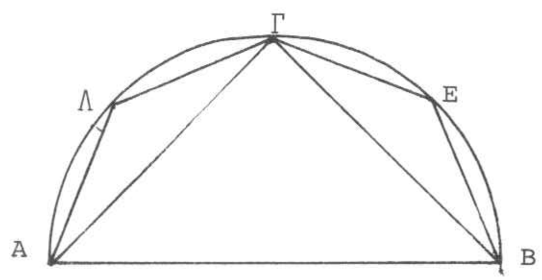


Figure n° 8

Mais il ajoute :

> *"Et si nous faisons cela continuellement, nous trouverons que les lignes droites qui se rapprochent le plus de la ligne AB sont beaucoup plus grandes ; de sorte qu'il est donc manifeste que cette ligne même est plus grande que la droite AB".*

Cet argument limite ne pouvait qu'être refusé par Archimède et nous avons apprécié la sagacité des géomètres anciens qui n'utilisaient pas les limites (cf. Méthode d'exhaustion). Mais il est vrai qu'Eutocius veut expliquer et dit un peu obscurément *"qu'il n'est pas absurde d'admettre de telles conceptions aussi dans les démonstrations de choses qui s'accordent"* (τῶν ὁμολογουμένον). En vrai, au titre d'un première investigation, n'est-ce pas ce genre de raisonnement qu'autorisait Archimède dans son ouvrage La Méthode ?

3.2 Quadrature d'un segment de parabole

Le traité, La quadrature de la parabole, s'ouvre sur une lettre-préface d'Archimède à Dosithée, où Archimède expose ses résultats, à savoir

> *"Un théorème de géométrie qui n'avait pas encore été examiné, et qu'après l'avoir étudié moi-même, j'ai*

trouvé d'abord par la mécanique, puis démontré par la géométrie".

Archimède manifeste alors clairement sa gêne devant les méthodes infinitésimales de ses prédécesseurs et l'intérêt du lemme d'Eudoxe-Archimède.

"Parmi ceux qui, d'ailleurs, se sont occupés de géométrie avant nous, d'aucuns se sont efforcés d'exposer par écrit qu'il était possible de trouver une aire rectiligne équivalente à celle d'un cercle donné ou d'un segment de cercle donné ; puis ils ont essayé de carrer l'aire, délimitée par une section de cône entier et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles ; motif pour lequel beaucoup ont reconnu que ces choses n'avaient pas été découvertes par eux. Mais aucun de mes prédécesseurs n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant. Nous démontrons, en effet, que tout segment délimité par une droite et par une parabole dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant d'ailleurs pour la démonstration ce lemme : que l'excès dont la plus grande de deux aires inégales dépasse la plus petite peut être ajouté à lui-même jusqu'à dépasser toute aire finie donnée. Les géomètres qui nous ont précédé ont également fait usage de ce lemme ; car ils s'en sont servis pour démontrer que le rapport de cercles entre eux est le même que celui des carrés de leurs diamètres, et que le rapport de sphères entre elles est le même que celui des cubes de leurs diamètres. De plus, ils ont assumé un lemme semblable pour démontrer que toute pyramide, et que tout cône est le tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que ce cône. Il se fait cependant que les divers théorèmes que nous venons de mentionner ne sont pas considérés comme moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme, et il me suffira que ceux que je publie maintenant soient traités avec ce même degré de certitude".

La première démonstration d'Archimède est basée sur la mécanique. Nous n'en parlerons pas, car elle ressemble beaucoup à celle utilisée comme exemple typique dans sa lettre à Eratosthène (La Méthode, περὶ τῶν μηχανικῶν Θεωρημέτων πρός Ἐρατοσθένην ἔφοδος), sauf que l'on n'utilise pas une infinité de droites mais, comme pour le principe d'exhaustion, un raisonnement par l'absurde. La seconde démonstration, par l'absurde, alors qu'Archimède connaît le résultat à démontrer, est géométriquement rigoureuse, mais avec une variante par rapport à la méthode usuelle d'exhaustion.

Détaillons un peu l'analyse de cette dernière méthode. La Proposition 18 établit que la tangente en A est parallèle à BC (Ici, AD est le diamètre, c'est-à-dire la droite qui bissecte toutes les cordes parallèles à BC de la parabole). Ensuite, (Proposition 19), si l'on mène du milieu de BD une parallèle au diamètre AD et une parallèle ED" à BC, la longueur DD" est les $\frac{3}{4}$ de la longueur DA. On a $\frac{AD}{AD''} = (\frac{BD}{ED''})^2$, ce qui provient d'une proposition antérieure sur les sections coniques, bien classique à l'époque d'Archimède, et sans doute faisant partie de textes d'Euclide ou d'Aristée qui ne nous sont pas parvenus (On pourrait partir de cette proposition comme définition de la parabole). Or $2BD' = 2ED'' = BD$ d'où $\frac{AD}{AD''} = \frac{4(BD')^2}{(BD')^2}$ soit $AD = 4AD''$.

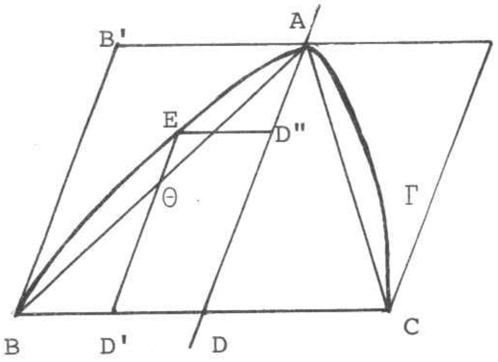


Figure n° 9

La Proposition 20 établit que l'aire du triangle ABC est supérieure à la moitié du segment parabolique BAC, ce qui provient facilement du fait que deux fois l'aire du triangle ABC donne l'aire du parallélogramme BB'C'C qui contient le segment parabolique.

On continue ce raisonnement avec le segment parabolique déterminé par AC et AB. On montre (Proposition 21) que le triangle BEA est le huitième du triangle ABC. En effet $AD = \frac{4}{3} ED'$ et $2D'\Theta = AD$ donc $E\Theta = 2\Theta D'$. L'aire de $BE\Theta$ est la moitié de celle de $B\Theta D'$, elle-même égale au quart de celle du triangle BAD. On en déduit sans peine le résultat.

Citons un corollaire énoncé par Archimède.

> *"Cela étant démontré, il est évident que, dans un pareil segment, il est possible d'inscrire un polygone tel que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. En effet, il est clair que, si l'on retranche continuellement ce qui, en vertu de la proposition 20 est plus grand que leur moitié, les segments restants, devenant continuellement plus petits, deviendront moindres que toute aire donnée".*

Ce n'est rien d'autre que l'utilisation de la Proposition 1 du Livre X des Eléments d'Euclide.

Par contre en appelant S l'aire du triangle ABC et S' celle du segment de parabole, on a pour tout entier n :

$$S + \frac{1}{4} S + \frac{1}{16} S + \dots + \frac{1}{4^n} S \leqslant S'$$

(Archimède montre explicitement à la Proposition 22 que chaque somme finie correspond à un polygone inscrit).

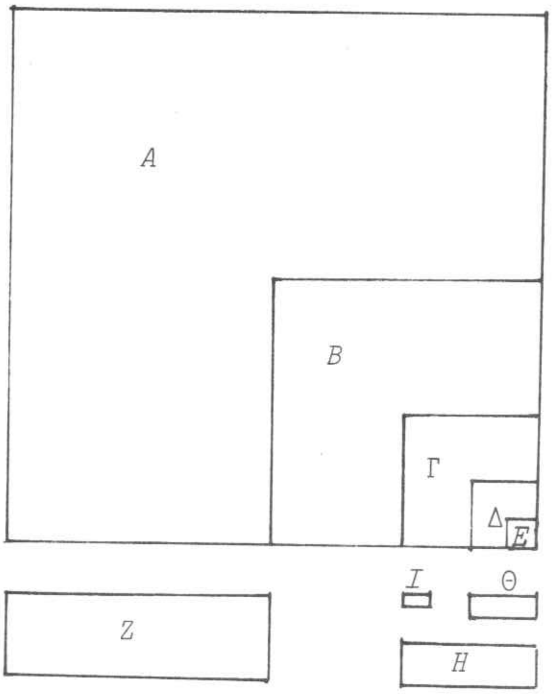
A la Proposition 23, si S_n est le $n^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$ avec $S_1 = S$, Archimède établit que :

$$S + S_2 + \dots + S_n + \frac{1}{3} S_n = \frac{4}{3} S .$$

C'est la formule de sommation des n-premiers termes d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Mais laissons la parole à Archimède.

"*Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.*

Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande.



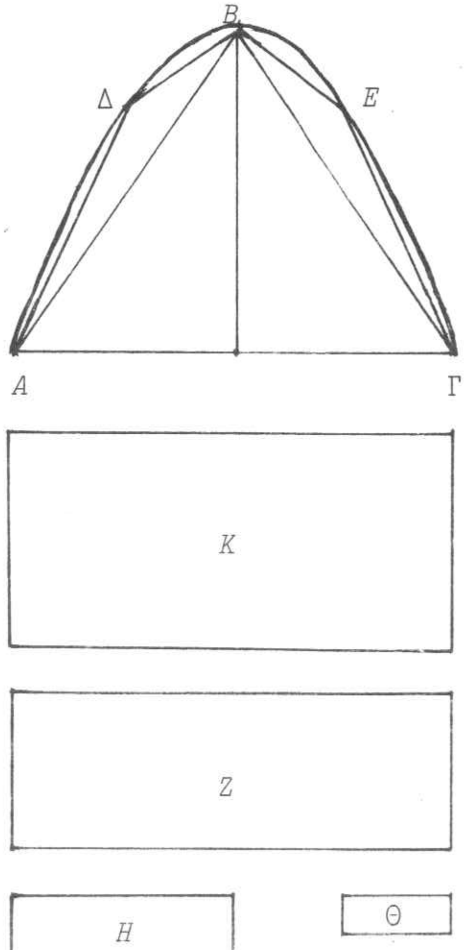
D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ , Θ le tiers de Δ , et I le tiers de E . Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A , l'ensemble de B , Z sera la troisième partie de A ; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H , Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ , Δ , la troisième partie de I , E, la troisième partie de Δ . Il en résulte que l'ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ.

Or, l'ensemble de Z, H, Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A . Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A ".

Maintenant tout est en place pour l'application de la méthode d'exhaustion proprement dite. Par l'absurde, le lecteur vérifiera que l'aire S' du segment ne peut satisfaire ni $S' > \frac{4}{3} S$ (il existe n et $S' > S_1 + \ldots + S_n > \frac{4}{3} S$ par la considération géométrique des polygones inscrits et le corollaire énoncé plus haut), ni $S' < \frac{4}{3} S$ (il existe n et $\frac{4}{3} S - S' > S_n$, c'est la Proposition 1 du <u>Livre X</u> d'Euclide, et aussi $S_n > \frac{1}{3} S_n = \frac{4}{3} S - (S_1 + \ldots + S_n)$ d'où $S_1 + \ldots + S_n > S'$ ce qui contredit l'interprétation géométrique de $S_1 + \ldots + S_n$ comme aire d'un polygone inscrit dans le segment parabolique), donc $S' = \frac{4}{3} S$. Mais il vaut mieux citer Archimède lui-même.

"<u>*Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment*</u>. (Proposition 29 et dernière proposition du traité).

En effet, soit $A\Delta BE\Gamma$ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit $AB\Gamma$ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire K équivalente aux quatre tiers du triangle $AB\Gamma$. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment $A\Delta BE\Gamma$. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment $A\Delta BE\Gamma$ soit d'abord plus grand que l'aire K, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles $A\Delta B$, $BE\Gamma$, comme il a été dit, et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles



ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment AΔBEΓ dépasse l'aire K ; en sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ABΓ est d'abord quadruple des triangles AΔB, BEΓ, qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande. Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire ; par conséquent, le segment AΔBEΓ n'est pas plus grand que l'aire K.
Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut.
Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle AB , une aire H équivalente au quart de l'aire Z, et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté du tiers de l'aire I, vaut les quatre tiers de l'aire Z .
Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté de la troisième partie de l'aire I. Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, Θ, I d'une aire plus petite que l'aire I, il est évident que l'ensemble des aires Z, H, Θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment. En conséquence, le

segment $A\Delta BE\Gamma$ n'est pas plus petit que l'aire K. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle $AB\Gamma$; donc, le segment $A\Delta BE\Gamma$ vaut aussi les quatre tiers du triangle $AB\Gamma$".

3.3 Utilisation des irrationnels par Archimède

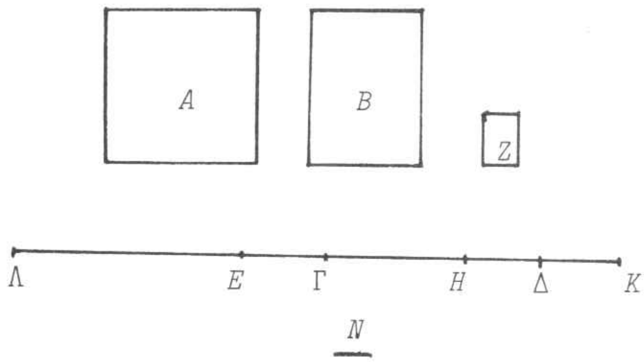
Archimède, du point de vue numérique, n'hésite pas à utiliser les ingénieuses ressources des méthodes géométriques et de la théorie des proportions. Nous le verrons au § 4.4 en ce qui concerne l'approximation du nombre π .

Du point de vue théorique, Archimède prend bien soin de distinguer dans les démonstrations le cas des grandeurs commensurables et le cas général, même dans un traité plus mécanique, comme celui de l'Equilibre des plans. Ainsi, à la Proposition VI de ce traité, lit-on :

> *"Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids".*

Nous donnons la démonstration intégrale d'Archimède. Le lecteur aura intérêt à noter algébriquement les assertions afin de les vérifier. Nous ne redonnons pas les hypothèses d'Archimède faciles à imaginer (des poids égaux s'équilibrent à des distances égales, etc...).

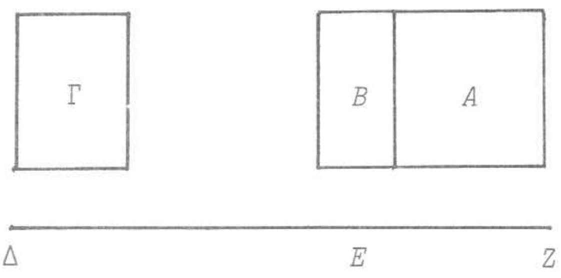
> *"Soient les grandeurs commensurables A, B, dont les centres sont les points A, B. Soit, de plus, une certaine longueur $E\Delta$, et que la longueur $\Delta\Gamma$ soit à la longueur ΓE comme A est à B. Il faut démontrer que le point Γ est le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A, B.*
> *En effet, puisque $\Delta\Gamma$ est à ΓE comme A est à B, et que A et B sont commensurables, il en résulte que les longueurs, c'est-à-dire les droites $\Gamma\Delta$, ΓE, sont aussi commensurables, de manière que $\Gamma\Delta$, ΓE ont une commune mesure. Soit N cette commune mesure. Prenons des droites ΔH, ΔK respectivement égales à la droite $E\Gamma$ et la droite $E\Lambda$ égale à la droite $\Delta\Gamma$.*



De plus, puisque ΔH est égal à ΓE, ΔΓ est aussi égal à EH ; de manière que ΛE est aussi égal à EH ; par conséquent, ΛH est le double de ΔΓ, et HK est le double de ΓE. Il en résulte que N mesure aussi chacune des droites ΛH, HK, puisqu'il mesure aussi leurs moitiés. Et puisque ΔΓ est à ΓE comme A est à B, tandis que ΛH est à HK comme ΔΓ est à ΓE, car chacune des premières droites est respectivement double de chacune des secondes, il en résulte que ΛH est aussi à HK comme A est à B. Que A soit un multiple de Z autant de fois que ΛH est un multiple de N ; dès lors, ΛH est à N comme A est à Z. Or, KH est aussi à ΛH comme B est à A ; donc, par identité, KH est à N comme B est à Z. En conséquence, B est un multiple de E autant de fois que KH est un multiple de N. Or, on a déclaré que A est aussi un multiple de Z, en sorte que Z est la mesure commune des grandeurs A, B. Dès lors, la droite ΛH étant divisée en parties égales à N, tandis que A étant diviséeen parties égales à Z, les segments de longueur égale à N, contenus dans ΛH, seront en même nombre que les segments égaux à Z contenus dans A ; de manière que, si sur chacun des segments de la droite ΛH on dispose une grandeur égale à Z, ayant son centre de gravité au milieu du segment, l'ensemble de ces grandeurs sera égal à A, et le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera le point E ; car toutes ces grandeurs sont en nombre pair, et elles sont en même nombre de chaque côté de E, parce que ΛE est égal à HE. On démontrera pareillement que, si sur chacun des segments de la droite KH on dispose une grandeur égale à Z, ayant son centre de gravité au milieu du segment, l'ensemble de ces grandeurs sera égal à B, et que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs *sera le point Δ. En conséquence, la grandeur A sera disposée au point E, tandis que la grandeur B le sera au point Δ. Dès lors, des grandeurs égales entre elles, dont les centres de gravité sont également distants entre eux, seront disposées en nombre pair sur une droite ; par conséquent, il est évident que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs est le milieu de la droite sur laquelle sont situés les centres des grandeurs médianes. Or, puisque la droite ΛE est égale à la droite ΓΔ, et que la droite EΓ est égale à la droite ΔK, la droite entière ΛΓ sera aussi égale à la droite entière ΓK ; de manière que le centre de gravité de la grandeur composée de toutes les grandeurs est le point Γ. En conséquence, la grandeur A, disposée au point E, et la grandeur B, disposée au point Δ s'équilibreront autour du point Γ".*

La Proposition VII traite le cas incommensurable.

"*Au reste, si les grandeurs sont incommensurables, elles s'équilibreront pareillement à des distances inversement proportionnelles à leurs grandeurs.* *Soient les grandeurs incommensurables AB* (au sens de A+B), *Γ ; soient des distances ΔE, EZ, et que le*



rapport de AB à Γ soit le même que celui de la distance EΔ à la distance EZ. Je dis que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs AB, Γ est le point E .
En effet, si AB, disposé au point Z, n'équilibre pas Γ, disposé au point Δ , la grandeur AB est trop ou pas assez grande par rapport à la grandeur Γ pour qu'il y

ait équilibre. Qu'elle soit trop grande, et retranchons de AB une grandeur moindre que l'excédent dont AB dépasse Γ pour pouvoir l'équilibrer, de manière que la grandeur restante A soit commensurable avec Γ".

Cela signifie qu'on ôte B à A+B, de sorte que A soit commensurable à Γ , mais que A soit trop lourd, c'est-à-dire qu'il soit avec A inclinaison du côté de Z vers le haut.

"Dès lors, puisque les grandeurs A, Γ sont commensurables, et que le rapport de A à Γ est moindre que celui de E à EZ, si A est disposé en Z, tandis que Γ est disposé en Δ, les grandeurs A, Γ ne s'équilibreront pas aux distances ΔE, EZ".

Le texte d'Archimède est altéré et il semble manquer un bout de démonstration. On peut cependant conclure sans risque d'édulcorer Archimède Par construction $\frac{A}{\Gamma} < \frac{A+B}{\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z}$. Comme les grandeurs A et Γ sont commensurables, la Proposition 6 précédente établit non seulement qu'il n'y a pas équilibre, mais que l'on a une inclinaison du côté de Δ vers le haut. Ceci est impossible par hypothèse d'où la contradiction.

Reprenons le texte d'Archimède pour conclure dans l'autre sens (il suffit d'échanger les rôles de Γ et A+B bien sûr).

"Pour le même motif, il n'y aura pas équilibre si la grandeur Γ est trop grande par rapport à AB pour l'équilibrer".

Ce texte nous livre facilement le statut des nombres irrationnels. On les traite selon la méthode eudoxienne du <u>Livre V</u>, sans passage à la limite, mais par l'essence même de la technique d'exhaustion, à savoir par contradiction à partir de résultats sur le commensurable utilisé quant à lui soit par excès, soit par défaut. En géométrie, le commensurable, c'étaient les aires des polygones exinscrits ou inscrits. Ici, on retire B à A+B. On trouve ainsi une <u>unité fondamentale</u> de raisonnements productifs de résultats dans l'oeuvre archimédienne. Mais précisons un peu l'hypothèse implicite sur le domaine des grandeurs considérées pour que le raisonnement d'Archimède convienne :

- d'une part, si une grandeur A+B n'équilibre pas à une certaine distance une autre grandeur, on peut lui ôter une grandeur B de sorte que l'équilibre n'ait toujours pas lieu et que le déséquilibre soit dans le même sens ;

- d'autre part, qu'entre deux grandeurs, dont l'une est incommensurable à une troisième, il existe au moins une grandeur commensurable à la troisième.

Cette dernière supposition revient exactement à dire que l'ensemble des grandeurs $\frac{p}{q}A$ où A est une grandeur quelconque est dense dans le domaine des grandeurs considérées (ici les poids). Ceci ne peut bien entendu suffire à construire le corps $\mathbb{R}$ sans qu'on explicite une propriété de complétion maximale (cf. Chap V), mais le champ numérique est virtuellement offert au raisonnement mathématique sans ajout géométrique.

Ajoutons que l'hypothèse de la quatrième proportionnelle pour les grandeurs que sont les poids, une fois acquise la Proposition 7, équivaut à l'hypothèse physique qu'étant donné un poids A, centré en E, un centre de gravité G et un point F, il existe un poids B qui, placé en F, équilibre le système.

4. LE COURANT NUMERICIEN

4.1 Des recettes

La mauvaise presse des mathématiques non basées sur la géométrie est attestée par le latin qui emploie "mathematicii" pour astrologues lesquels sont notamment condamnés par Dioclétien et bien d'autres empereurs. Toutefois Cicéron déclare :

> *"Les Grecs tenaient le géomètre en grand honneur, de sorte que rien ne progressa aussi brillamment parmi eux que les mathématiques. Nous avons toutefois établi comme limites de cet art son utilité dans la mesure et le dénombrement".*

Nous connaissons l'existence d'un courant numéricien chez les Alexandrins notamment et disposons de quelques "recettes". Les incendies de la riche bibliothèque d'Alexandrie (-47 par César, 392 par les chrétiens de Théodose et finalement les musulmans d'Omar en 640) empêchent de se faire une idée exacte de la force réelle de ce courant.

Par exemple, la mathématique babylonienne donne les cinq premières décimales exactes de $\sqrt{2}$ et fournit une approximation de la longueur d de la diagonale d'un rectangle de côtés a,b selon la formule $d = a + \frac{b^2}{2a}$, formule raisonnable si a est beaucoup plus grand que b^2 (puisque $d^2 = a^2+b^2$ donc $d = a\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} = a(1+ \frac{b^2}{2a^2}+ o(\frac{b^2}{a^2})) = a + \frac{b^2}{2a} + o(\frac{b^2}{a}))$.

Des papyrii égyptiens attribuent à π une valeur de l'ordre de $(\frac{16}{9})^2$; d'autres une valeur de l'ordre de 3.

Les Pythagoriciens approximaient judicieusement $\sqrt{2}$ par $\sqrt{\frac{49}{25}}$ soit $\frac{7}{5}$ et Théodore $\sqrt{3}$ par $\sqrt{\frac{49}{16}}$ soit $\frac{7}{4}$.

Archimède, dans La mesure du cercle, se propose de déterminer π et d'autres irrationnels tels que $\sqrt{3}$ qu'il encadre sans plus de commentaires selon : $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

Une remarque linguistique éclaire un peu les choses. Pour les Grecs, l'art du calcul s'appelle logistique par opposition à l'arithmétique (ἀριθμός). Le mot calcul provient lui du latin "calculus" qui signifie caillou et nous ramène sans doute aux groupements pythagoriciens sur les nombres.

Appolonius de Perge, le dernier grand mathématicien grec de l'époque classique (262-190), écrivit un livre sur la quadrature du cercle, seul livre de cet auteur situé en dehors de l'orthodoxie géométrique grecque.

Héron (au début de l'ère chrétienne ?) reprend l'approximation babylonienne afin de déterminer $\sqrt{A}$ en écrivant : $A = a^2 + b$ où a^2 est le nombre entier carré immédiatement inférieur à A et $\sqrt{A} = a + \frac{b}{2a}$.

Un renseignement supplémentaire est fourni quant à l'origine de la recette. Héron commence par prendre α_o , nombre entier voisin de $\sqrt{A}$ et ensuite $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_o + \frac{A}{\alpha_o})$. En prenant $\alpha_o = a$, on a $\alpha_1 = a + \frac{b}{2a}$. Puis il recommence $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \frac{A}{\alpha_1})$. Il ne parle pas de résultat limite. En termes modernes, $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \frac{A}{\alpha_{n-1}})$ est une suite convergente. Pour l'établir, on peut vérifier soit qu'elle est de Cauchy, soit qu'elle est monotone décroissante à partir de α_1 et minorée. Ces deux méthodes reposent sur la connaissance de $\mathbb{R}$. Bien entendu, la limite α qui est positive doit satisfaire $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha+\frac{A}{\alpha})$. et donc $\alpha^2 = A$. Il semble bien que cette méthode soit fort ancienne. Dans le cas $A = 2$, et partant de $\alpha_o = 1$, on a $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = \frac{17}{12}$ et plus généralement $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n, q_n sont des entiers comme on le voit sans peine par récurrence. En outre :

$$p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2 \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 2p_nq_n$$

ainsi que $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = p_n^4 + 4q_n^4 - 4p_n^2q_n^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$.

Or, $p_1^2 - 2q_1^2 = 1$. Par suite, pour tout $n \geqslant 1$, on a $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$. On en déduit aussitôt que p_n et q_n sont premiers entre eux donc que $\frac{p_n}{q_n}$ est une fraction irréductible dont le carré approche 2 d'autant mieux que n est grand. Ce procédé est explicite chez Théon de Smyrne (Expositio rerum mathemati-

carum ad legendum Platonem utilium) sous la forme suivante.
Si l'on part de deux nombres entiers p_1 et q_1 avec $p_1^2 - 2q_1^2 = -1$, on posera $p_2 = p_1 + 2q_1$ et $q_2 = p_1 + q_1$, $p_2^2 - 2q_2^2 = +1$ et ainsi de suite. Naturellement, $\frac{p_n^2}{q_n^2}$ s'approche de 2 à mesure que n augmente. La méthode de Théon de Smyrne, généralisable à l'approximation de $\sqrt{A}$, ne fournit pas une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{A}$ lorsque A n'est pas un carré parfait. Cette preuve existe chez Euclide (Livre VIII, Proposition 9) mais chez Euclide, on n'approxime pas !

Le procédé exposé par Théon de Smyrne est d'ailleurs beaucoup plus ancien. On obtient la suite $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$ des approximations de $\sqrt{2}$ en partant de $p_1 = q_1 = 1$. Cette suite est alternativement par excès et par défaut pour l'approximation de $\sqrt{2}$.

Il serait bon d'opposer les diverses techniques du calcul de $\sqrt{2}$ par exemple, depuis l'Antiquité jusqu'à Viète, en y relevant le rôle des notations et celui des théories géométriques ou numériques sous-jacentes et de faire une comparaison avec les méthodes chinoises (cf. Chap. VII).

4.2 L'algorithme d'Euclide

Il est intéressant de noter qu'un aspect théorique aurait pu être poussé assez loin dans le domaine numérique. Ainsi, la définition euclidienne du nombre au Livre VII insiste sur l'aspect de quantité mesurée par l'unité (ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος Déf. 2) et parvient à l'algorithme célèbre pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers (Proposition 2). En termes modernes, si $a_2 < a_1$, où a_2 et a_1 sont des entiers, on écrit grâce à l'axiome d'Archimède :

$$a_1 = n_1 a_2 + a_3 \qquad 0 < a_3 < a_2 \qquad n_1,\ a_3 \text{ entiers}$$

puis

$$a_2 = n_2 a_3 + a_4 \qquad 0 < a_4 < a_3 \qquad n_2,\ a_4 \text{ entiers}$$

puis

$$a_3 = n_3 a_4 + a_5 \qquad \text{etc...}$$

Comme $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$, et comme nous avons des entiers, le procédé doit se terminer à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes. L'étape avant-dernière fournit alors le p.g.c.d. des deux nombres a_1 et a_2 .

L'algorithme d'Euclide, à condition de disposer d'une notation algébrique convenable et ce sera le cas pour le mathématicien hindou Aryābhata (476- ? après J.-C.), peut s'écrire :

$$\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}} \quad \text{puis} \quad \frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_4}} \quad \text{etc...}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}} \quad \text{que l'on note aujourd'hui} \quad \frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \dots$$

Naturellement, le procédé s'arrête lorsque a_1 et a_2 sont entiers. Cependant, si a_1 et a_2 ne sont pas entiers, mais des "grandeurs divisibles", le procédé peut ne pas avoir de fin. Ainsi, Bombelli écrit en 1572 dans son Algèbre avec $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_2 = 1$ où il apparaît surtout un jeu d'écriture :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et donc} \quad \alpha = 1+\sqrt{2}$$

soit $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha}$

d'où $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\alpha}}} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+} \dots$$

La question des ... n'est évidemment pas abordée et nous venons de faire un saut de 10 siècles. La méthode dite des fractions continues sera aménagée par J. Wallis (Opera Mathematica 1695), Euler (De fractionibus continuis 1737) et J. E. Lambert (1761), pour n'atteindre qu'au XIXème siècle la rigueur nécessaire.

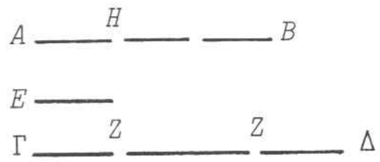
Revenons à Euclide. Au Livre X, l'algorithme est utilisé pour des grandeurs a_1 et a_2 susceptibles du traitement par le Livre V. Si le procédé s'arrête, on obtient une grandeur qui est la plus grande mesurant exactement a_1 et a_2 . Si le procédé (aussi appelé anthypharèse) se poursuit indéfiniment ("se révèle illimité"), les grandeurs a_1 et a_2 sont incommensurables (Proposition 2 du Livre X). Les deux premières définitions de ce livre sont les suivantes :

> "*1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.*
> *2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.*"

Et la Proposition 2 s'énonce :

> "*Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.*
> *Soient les deux grandeurs inégales AB, ΓΔ; que AB soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours*

retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; je dis que les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables.
Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E ; que AB mesurant ΔZ laisse



ΓZ plus petit que lui ; que ΓZ mesurant BH laisse AH plus petit que lui ; que l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui soit plus petite que E. Que cela soit fait, et qu'il reste AH plus petit que E (Proposition 1 du Livre X). *Puisque E mesure AB, et que AB mesure ΔZ, E mesurera ΔZ. Mais E mesure ΓΔ tout entier ; donc E mesurera le reste ΓZ. Mais ΓZ mesure BH ; donc E mesure BH. Mais E mesure AB tout entier ; donc E mesurera le reste AH, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les grandeurs AB, ΓΔ; donc les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables ; donc, etc."*

On remarquera l'élégance du texte euclidien, mais également le léger effort qu'un moderne doit fournir alors qu'on aurait envie d'écrire $\Gamma\Delta = nAB + \Gamma Z$ avec $\Gamma Z < AB$ tandis qu'Euclide nomme $nAB = \Delta Z$ d'abord, etc.

La Proposition 3 du Livre X décrit l'anthypharèse pour les grandeurs traitées par le Livre V. On se reportera au Document n° 16.

J. Itard, dans Les Livres Arithmétiques d'Euclide, a relevé l'utilisation pratique de l'algorithme d'Euclide dans Aristarque de Samos, astronome (vers 300 avant notre ère), pour des rapports de distance . Précisément, il compare $a_1 = 71\ 755\ 875$ à $a_2 = 61\ 735\ 500$

$$71\ 755\ 875 - 61\ 735\ 500 = 10\ 020\ 375$$
$$61\ 735\ 500 - 6(10\ 020\ 375) = 1\ 613\ 250$$
$$10\ 020\ 375 - 6(1\ 613\ 250) = 340\ 875 .$$

D'où, en considérant ce reste comme négligeable par rapport aux nombres en jeu, ce qui revient à prendre 1 613 250 comme p.g.c.d. de a_1 et a_2 , on trouve :

$$71\ 755\ 875 = 43(1\ 613\ 250) + 7(340\ 875)$$
$$61\ 735\ 500 = 37(1\ 613\ 250) + 6(340\ 875)$$

d'où l'approximation $\frac{a_1}{a_2} = \frac{43}{37}$ qui est précisément celle fournie par Aristarque de Samos (sans explications).

Cela est d'autant plus intéressant qu'une autre méthode, au moins, aurait pu être utilisée, celle qui ne fait jouer que des fractions dont le numérateur est 1 et qu'appréciaient les calculateurs égyptiens. En termes modernes :

$$a_1 = n_1 a_2 + a_3 \qquad 0 \leqslant a_3 < a_2 \text{ ; } n_1,\ a_3 \text{ entiers}$$
$$a_1 = n_2 a_3 + a_4 \qquad 0 \leqslant a_4 < a_3 \text{ ; } n_2,\ a_4 \text{ entiers}$$
$$a_1 = n_3 a_4 + a_5 \qquad \text{etc}$$

D'où

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1 n_1} = \frac{1}{n_1} \quad , \quad \frac{a_3}{a_1 n_1} + \frac{a_4}{a_1 n_1 n_2} = \frac{1}{n_1 n_2} \quad .$$

Soit

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \cdots \pm \frac{a_k}{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}\, a_1} \quad .$$

On vérifie $n_k > n_{k-1}$ et cette série alternée converge rapidement lorsque a_2 et a_1 sont incommensurables. Avec les nombres d'Aristarque, on aurait :

$$\frac{a_2}{a_1} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{308} - \ldots$$

Aussi bien avec $\frac{6}{7}$ qu'avec $\frac{265}{308}$ on n'a pas le résultat approché choisi par Aristarque.

4.3 Les irrationnels

Nous avons déjà établi l'irrationalité du rapport de la diagonale au côté du carré par l'argument purement arithmétique de parité, qui semble très ancien (cf. Chap I § 6.2). Nous savons, au témoignage de Platon, que Théétète disposait d'une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{17}$, mais non d'une démonstration générale de celle de $\sqrt{A}$ lorsque A n'est pas un carré parfait. Or, la technique élémentaire de parité bute justement sur $\sqrt{17}$. Il semblerait que ce soit à l'occasion d'une telle démonstration particulière que l'infini ait paru jouer un rôle en théorie des nombres. Nous tentons une reconstitution d'un argument possible de Théétète ou de l'un de ses contemporains en utilisant l'argumentation de l'algèbre géométrique, typique du Livre VI. Cependant, pour ne pas lasser le lecteur, on prendra des notations modernes et on admettra la quatrième proportionnelle, ce qui revient à pouvoir parler de grandeur du type $\frac{A}{B}C$. On notera surtout l'égalité de raisons provenant des aires ou provenant de longueurs (cf. Chap. I § 5).

Précisément, soit ABC un triangle équilatéral de hauteur AH issue de A . On porte sur la droite BC une longueur HD = AH (cf. Figure n° 10).

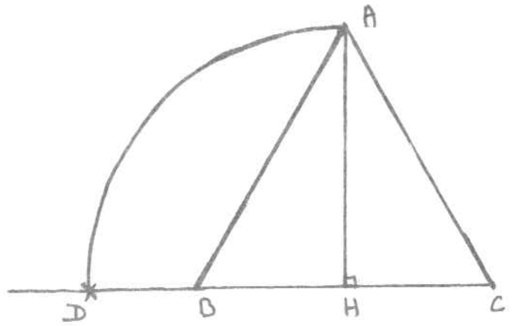


Figure n° 10

On a $AH^2 = 3\ BH^2$ et $2\ BH = BC = AB > AH > BH$ d'où l'écriture :

$$AH = BH + DB \quad \text{avec} \quad DB < BH .$$

Ce premier quotient de l'algorithme d'Euclide (en longueurs) est donc 1. Il convient de comparer BH et DB . D'abord un calcul de proportions :

$$\frac{BH}{DB} = \frac{BH.DC}{DB.DC} = \frac{BH.DC}{(DH-BH)(DH+BH)} = \frac{BH.DC}{DH^2-BH^2} = \frac{BH.DC}{AH^2-BH^2} = \frac{BH.DC}{2\ BH^2} = \frac{DC}{BC}$$

(On pourrait justifier chaque étape avec le Livre VI).

Avec des aires en lieu des longueurs, on a, en utilisant $DB + BC = DC$, $BH.BC = DB.BC + DB.DB$ et $DB.DB < DB.BC$. Ce que l'on notera :

$$BH = DB + \frac{DB}{BC} . DB \qquad \text{avec} \qquad \frac{DB}{BC} . DB < DB .$$

Cette deuxième étape fournit le deuxième quotient de l'algorithme d'Euclide, à savoir 1.
Il convient de comparer DB et $\frac{DB}{BC}.DB$ ou encore DB et $\frac{BH}{DC} . DB$. Or, on note que :

$$DC = 2\ BH + DB ,$$

donc

$$DC.DB = 2\ BH.DB + DB.DB ,$$

soit

$$DB = 2\ \frac{BH}{DC} .DB + \frac{DB}{DC} .DB \qquad \text{avec} \qquad \frac{DB}{DC} .DB < \frac{BH}{DC} .DB .$$

Cette troisième étape fournit le troisième quotient de l'algorithme d'Euclide, à savoir 2. Pour le quatrième quotient, il convient de comparer $\frac{BH}{DC}.DB$ et $\frac{DB}{DC}.DB$ ou encore BH et DB . Mais cela a déjà été fait et l'on peut écrire : $BH = DB + \frac{DB}{BC} .DB$.

Les différentes étapes de l'algorithme d'Euclide se répètent donc et les quotients successifs sont alternativement 2 et 1. Bref, l'algorithme ne se termine pas, ce qui assure l'irrationalité du rapport de AH à BH (Proposition 2 du Livre X).

Cependant, la Proposition 2 dépend du Livre V bien entendu. Il se peut donc que, sans théorie des proportions, on ait constaté l'aspect illimité de l'algorithme d'Euclide pour quelques rapports de longueurs ou d'aires géométriques simples et proposé de qualifier irrationnels ces rapports ... qui se trouvaient définis, d'un point de vue arithmétique, à partir justement d'un algorithme infini,(même si les nombres quotients successifs forment une famille finie !). Toute l'activité d'Eudoxe fut de définir proprement la notion de rapports de grandeurs, aussi bien commensurables que non, et de disposer ensuite d'un critère de séparation des deux cas (justement la Proposition 2 du Livre X). Cependant, ce critère qui porte en lui un aspect numérique pratique n'est plus utilisé dans la suite des Eléments. Eudoxe ou Euclide ont-ils voulu montrer explicitement que leur théorie retrouvait certes des vieilles méthodes, mais se détachait complètement des soucis du courant numéricien ?

Le Livre X, en effet, se poursuit par une classification très géométrique de certains irrationnels. Ce Livre X a eu pratiquement une très grande influence sur la littérature mathématique, beaucoup plus que le Livre V qui n'a touché que les esprits les plus remarquables. On en trouve de nombreux commentaires chez les mathématiciens arabes et bien entendu chez les mathématiciens européens à partir de la Renaissance. Mais déjà, le mathématicien clef du XIIIè siècle, Léonard de Pise, domine complètement ce Livre (cf. Chap. III § 4.1).

Pour vraiment suivre l'influence du Livre X sur les irrationnels et la dialectique qui va s'instaurer entre pratique géométrique et pratique algébrique jusqu'au XIXème siècle inclusivement, il faudrait entrer dans de considérables détails à la fois techniques, historiques et linguistiques. Il faudrait aussi dépouiller des documents peu connus dans le genre des "Traictés des quantitez incommensurables", du "De Circulo" de Van Ceulen ou des ouvrages de Wolf vers 1730 en dehors même des textes beaucoup plus connus de Léonard de Pise (Flos Leonardi), d'Isaac Barrow (Lectiones mathematicae) et plus généralement de ceux cités au long de ces pages.

Un tel travail d'érudition n'a pas sa place ici et l'on comprendra que l'analyse effectuée aux chapitres 3 et 4 soit beaucoup plus fragmentaire et dogmatique que celle des deux premiers chapitres. Nous ne pourrons citer que de courts fragments de textes et souvent nous fier aux commentaires d'érudits historiens des Sciences.

Au terme de l'étude du texte des Eléments, on peut conclure que la théorie s'est débarrassée de toute manipulation sur les développements infinis. Pourtant, P. Tannery manifestait encore à la fin du siècle dernier que l'idée d'infini était sous-jacente à celle de nombre réel.

> *"Le plus insupportable dans les mathématiques, ce sont les nombres irrationnels. Leur introduction dans l'arithmétique est un véritable scandale. A côté de la notion de nombre entier qui est la plus claire du monde, à côté des propositions les plus pures, belles et parfaites, voici qu'apparaît tout le cortège du transcendant et de l'infini. C'est dans le nombre réel que se sont condensées toutes les difficultés des idées de limite, de convergence et de continuité. Si nous voulons écrire* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *, nous ne pouvons l'éviter et il est inutile de s'indigner : l'idée de l'infini est dans la nécessité des choses ; on l'aura réduite à ses limites les plus simples en disant qu'après un nombre entier il y en a toujours un autre, mais nous ne nous en affranchirons pas".*

Dans le sens de la justification des opérations numériques du corps de nombres que constitueraient les raisons, nous avons déjà noté qu'Euclide s'arrêtait en chemin (Chap. I § 5).

Mais la force des Eléments vient de l'identification à une même famille de toutes les raisons de grandeurs archimédiennes par ailleurs quelconques. On ne saurait mieux le manifester qu'en rappelant que la démonstration, donnée par Euclide, de l'incommensurabilité du rapport de la diagonale d'un carré à son côté est ramenée à une démonstration sur les nombres par la parité.

On aurait donc bien tort de réduire l'usage des Proportions dans l'Antiquité à un simple appendice de la Géométrie. Bien des successeurs d'Euclide et Archimède commettront cette mauvaise assimilation, facilitée il est vrai par la rareté de documents sur le courant numéricien.

Avant de terminer ce chapitre par quelques remarques sur le nombre π , il faut signaler que la Proposition 9 du Livre VIII établit l'irrationalité de $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ lorsque $\frac{p}{q}$ est irréductible, p et q n'étant pas des puissances n-ièmes d'entiers.

4.4 Le cas du nombre π

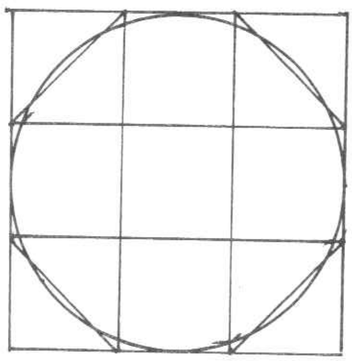
Le papyrus Rhind, copié vers 1800 avant Jésus-Christ par le scribe égyptien Ahmès sur un texte antérieur d'un ou deux siècles fournit le calcul de l'aire d'un cercle de diamètre d selon la formule :

$$(1-\frac{1}{9})d^2 - \frac{1}{9}(1-\frac{1}{9})d^2 = (\frac{8}{9}\ d)^2 \ .$$

L'approximation donnée de π est alors $3+\frac{13}{81} \sim 3{,}1604$, valeur par excès de presque 2/100 .
On ne sait comment fut obtenue cette approximation. En tous cas, $\frac{8}{9}$ d pour le côté du carré de même aire que le cercle de diamètre d est la meilleure formule possible en quantièmes $(1-\frac{1}{n})$. Peut-être fut-il fait usage de la pesée (récipients cylindriques et cubiques) ? Peut-être fut-il fait usage de l'artifice suivant :

On prend un carré et son cercle inscrit et l'on divise chaque côté du carré en trois. On construit, comme indiqué sur la figure, un octogone dont on va assimiler l'aire à celle du cercle.

Figure n° 11



L'aire de l'octogone est les $\frac{7}{9}$ de celle du carré. Par suite, le carré de même que le cercle a un côté de l'ordre de $\sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{1-\frac{2}{9}}$ soit $1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ selon les approximations de racine carrée dont nous avons parlé (§ 4.1).

Les Babyloniens, les Hindoux, etc, retrouveront des approximations analogues. Toutefois, Archimède, dans κύκλον μέτρησις (La Mesure du Cercle), donne une meilleure approximation numérique. Ce faisant, il s'écarte complètement de la problématique euclidienne.

Le traité en question, très court, est parvenu à nos jours en mauvais état. La première proposition très euclidienne d'inspiration établit l'égalité de la raison d'une aire d'un cercle au carré de son rayon à celle du périmètre de ce cercle à son diamètre.

La démonstration se conduit en établissant que l'aire d'un cercle est celle du triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est précisément le rayon du cercle, l'autre côté étant le périmètre de ce même cercle. La démonstration se fait par l'absurde comme au Livre XII d'Euclide. Soit S l'aire du cercle, S' celle du triangle rectangle décrit.

(1) Si l'on a $S > S'$, alors, comme au Livre XII, on construit un polygone (régulier) inscrit dans le cercle dont l'aire S_n est telle que $S - S_n < S - S'$, soit $S' < S_n < S$. Mais le périmètre du polygone est inférieur au périmètre du cercle selon l'axiome que la ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre (cf. Postulat 1 du Livre d'Archimède : De la sphère et du cylindre). En outre, S_n s'obtient aussi comme aire du triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est l'apothème du polygone régulier et l'autre côté le périmètre du polygone. Comme ces deux côtés sont strictement inférieurs à ceux correspondants du triangle d'aire S', on conclut $S_n < S'$ ce qui est contradictoire.

(2) Si l'on a $S' > S$, on utilise des polygones extérieurs au cercle cette fois. Détaillons la construction (cf. Figure n° 12). On part du carré A'B'C'D' d'aire S'_1 dans lequel le cercle d'aire S est inscrit. Une telle construction est décrite au Livre IV (Proposition 7).

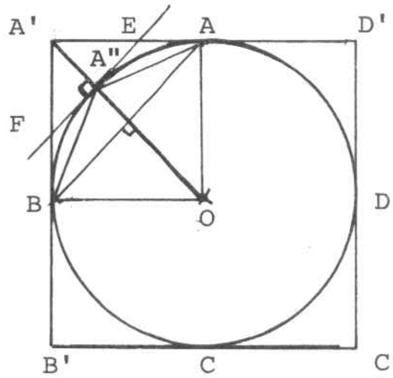


Figure n° 12

On décompose par exemple l'arc AB en deux parties égales (cf. Livre III, Proposition 30) en intersectant OA' et l'arc AB. En A" on mène la tangente au cercle (la droite passant par A" orthogonale à OA') qui détermine les points E et F. Par les arcs capables, on note que EA" = EA. Puisque l'angle A'A"E est droit, on en déduit que A'E est strictement supérieur à EA. Dès lors, l'aire de A'A"E dépasse la moitié de l'aire de A'A"A, et de même l'aire de A'FA" dépasse la moitié de l'aire de A'A"B. Continuant la construction pour les autres côtés du carré, on obtient un polygone AEFB... d'aire S'_2. Pour avoir S'_2, on a ôté à l'aire S'_1 une quantité supérieure à la moitié de l'aire $S'_1 - S$. On construit de proche en proche un polygone S'_n, exinscrit au cercle d'aire S, de sorte que : $S'_n - S < S' - S$. Soit $S < S'_n < S'$.

Cependant, l'aire de S'_n , compte tenu de la construction, est celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est OA" , c'est-à-dire le rayon du cercle, et l'autre côté le périmètre du polygone d'aire S'_n. Mais ce périmètre est supérieur au périmètre du cercle et donc $S'_n > S'$ ce qui est contradictoire.

Il ne reste plus que la possibilité $S' = S$, ce qui termine la démonstration de la première Proposition de cet ouvrage d'Archimède. On notera que le fait que A"E + EA soit supérieur à la longueur de l'arc de cercle AA" est un axiome rajouté par Archimède au corpus euclidien afin de fournir la définition de la longueur d'un arc. En assimilant la longueur de l'arc à l'angle, Archimède présuppose que $x \leqslant \operatorname{tg} x$ pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ pour employer le langage de l'enseignement français actuel. On peut se demander si la démarche d'Archimède n'est pas préférable ! (cf. § 3).

La deuxième Proposition du traité De la mesure du cercle, partant de l'approximation que le périmètre du cercle est au diamètre comme 22 à 7 ($\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$), établit que la surface du cercle est à son diamètre comme 11 à 14.

La troisième et dernière Proposition du traité s'énonce :

"Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre".

En termes modernes : $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

On pourra lire le détail de la démonstration modernisée d'Archimède dans le document annexe n° 12 , la lecture du texte d'Archimède étant passablement lassante car les calculs numériques selon la méthode des proportions ne sont pas explicités mais seulement les résultats. On pourra se reporter d'ailleurs au très intéressant commentaire sur la Proposition III dû à Eutocius d'Ascalon (publié dans les Oeuvres Complètes d'Archimède de Paul von Eecke, voir Bibliographie).

Pour la petite histoire, rapportons que la raison du périmètre du cercle à son diamètre fut désignée par π (première lettre de περίμετρος) depuis 1705 seulement. Nous suivrons d'ailleurs l'histoire des déterminations de plus en plus précises de π au chapitre III.

TROISIEME CHAPITRE

ALGEBRISATION DU DOMAINE NUMERIQUE

"Subtil ophidien
Longe prudemment
La crête ambiguë
Des scies égoïne"

D. DHOMBRES
Subtil ophidien

1. NOTATIONS ET SYMBOLES NUMERIQUES ANTIQUES

Chaque civilisation adopte des symboles particuliers plus ou moins commodes et des notations ad hoc pour les opérations élémentaires. Il est hors de propos de faire la chronique de l'évolution de ces notations, ni même de dresser un inventaire des obstacles engendrés ou surmontés par l'emploi de certaines notations. Malgré l'oeuvre érudite d'un Florian Cajori (A history of Mathematical Notations Open Court 1928), un tel travail d'épistémologie historique reste encore à faire. Nous allons nous contenter de donner quelques exemples, "piquants et amusants" comme on disait au Grand siècle, et d'indiquer les linéaments du développement de l'algèbre des Alexandrins à Descartes.

1.1 Systèmes numériques méditerranéens

Pour les Grecs de l'âge classique, comme pour les Syriens et les Hébreux, les lettres de l'alphabet ordonné servent aux nombres :

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ	ρ	
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ		
200	300	400	500	600	700	800	900		

Pour 6 on utilise ϛ (vau) , 90 on utilise ϟ (koppa) et pour 900 on utilise ϡ (sampi) qui n'appartiennent pas au système alphabétique courant mais sont des réminiscences de systèmes antérieurs.

En combinant les symboles, on obtient les nombres jusqu'à mille : par exemple 153 ρνγ . Les nombres un peu grands sont difficilement pensés et écrits. On se transmet avec admiration qu'Archimède résolut un problème de bétail particulièrement embrouillé et qui mène à des équations linéaires à résoudre en nombres entiers (équations diophantiennes dans la terminologie moderne) dont la plus petite solution entière est de l'ordre de 6.10^{12} (cf. Document n° 13 : le Problème des Boeufs). D'ailleurs, un ouvrage d'Archimède (L'Arénaire ψαμμίτη) s'occupe uniquement des grands nombres.

Nous avons déjà fourni quelques informations concernant la numération des Egyptiens.

Prenons un dernier exemple, le système de numération hébraïque. Les numérations décimale et sexagésimale sont concurremment utilisées. En "hébreu carré", et dans la notation des massorètes :

aleph	beth	ghimel	daleth	hé	waw	zain	heth	teht	yod
א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

puis

יא	יב	etc.
11	12	

Mais les noms de nombres sont plus élaborés : 3 par exemple : שְׁלֹשָׁה ou 10 : עֲשָׂרָה

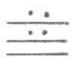
Le nombre 20 est exprimé par le pluriel de 10 עֶשְׂרִים (noté כ kaph), de même 30 est exprimé par le pluriel de 3 (שְׁלֹשִׁים) et noté ל lamed etc. Grammaticalement, ces noms sont toujours à l'état absolu devant les substantifs. Le nom 100 est noté selon l'ordre des lettres de l'alphabet déjà utilisées ק (qaph) et s'écrit מֵאָה , 200 se note ר (resch), 300 שׁ (shin). 1000 se note א̈ , 2000 ב̈ , 3000 ג̈ , etc. et 10000 עֲשֶׂרֶת אֲלָפִים

La science mathématique israélienne antique n'est pas originale, très marquée par l'influence des grandes civilisations voisines. Au Moyen-Age, l'influence árabe sera grande, mais il y aura des productions hébraïques originales. En outre, les traductions en hébreu rendront accessibles aux érudits des textes antiques. (Le "calcul des poudres" de Jacob ben Nessim traite des mathématiques indiennes).

Abraham bar Hiyya ha-Nasi au XIIème siècle par exemple écrit un traité des mensurations et des fractions, qui prolonge le traité plus ancien Mishnat hamiddoth vers le IIème siècle.

1.2 Le système maya

La civilisation maya, civilisation méso-américaine brillante du IV au IXèmes siècles de notre ère, établit un système numérique assez original dans le maniement des très grands nombres. De nos jours, on ne sait à coup sûr déchiffrer de l'écriture hiéroglyphique maya que les calendriers et les computs. Il se trouve que les cycles du calendrier maya sont assez longs et on est surpris de trouver dans les computs de très nombreux cycles (Une stèle de Quiriya mentionne une durée de 300 millions d'années). Il faut ajouter aussitôt que les fractions semblent à peu près inconnues et que les Mayas pour comparer des grandeurs semblent préférer prendre le plus petit commun multiple. Ainsi, la période de 37960 jours correspond à 65 cycles vénusiens de 584 jours (moyenne admise par les Mayas), 104 années rituelles de 365 jours et 146 cycles divinatoires de 260 jours.

Les symboles sont le trait horizontal —— valant 5 et le point • valant 1 , de sorte que 6 s'écrit  et 13 . Le système est un système de numération à position de base 20. L'ordre est de haut en bas dans le codex de Dresde et sans indication hiéroglyphique d'unités. Ainsi, 152 s'écrit :
 .

Cependant, à la troisième position, les choses se compliquent et il convient de multiplier par 360 (18 × 20) au lieu de multiplier par 400 (20 × 20) pour connaître  = 1875.

Dans d'autres manuscrits, notamment en ce qui concerne l'indication des dates de "l'Ancien Empire", figurent les hiéroglyphes des unités, vingtaines, etc., à partir d'une origine de l'ère maya (4 ahau, 8 cumku) qu'on situe au 12 août 3113 avant Jésus-Christ.

Le glyphe  indique l'absence d'un certain ordre. Ainsi  vaut 1818 et est distinct de  qui vaut 118. De même,

désigne 1 353 600 (En termes de durée, on lit 9 baktuns, 8 katuns, 0 tun, 0 uinal, 0 kin où 1 baktun vaut 20 katuns, 1 katun vaut 20 tuns, 1 tun vaut 18 uinals et 1 uinal vaut 20 kins).

Cependant, des experts estiment que  ne désignerait pas notre zéro, mais une réalité "d'achèvement".

Il convient d'ajouter que les textes ne livrent aucune mathématique originale en dehors de calculs remarquablement précis concernant le calendrier (lunaire, solaire, vénusien) et reliant les observations sur les cycles astronomiques (lunaisons, éclipses, année tropique). Pour ces calculs très précis, il semble bien qu'une arithmétique élémentaire, sans fractions, ait suffi.

2. NOTATIONS ET ALGEBRISATION AU TEMPS DE DIOPHANTE

Les progrès dans le domaine numérique vont provenir de l'emploi de meilleures notations et d'un recours à des techniques algébriques.

Même si les systèmes de numération méditerranéens ont bien de la peine face aux grands nombres, au contraire du système maya par exemple, l'idée de la suite infinie des nombres entiers est assurée.

Ainsi, Euclide démontre qu'il y a une infinité de nombres premiers (Si $p_1, p_2, \ldots p_n$ sont les n premiers tels nombres, $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n)+1$ en est un autre distinct : Proposition 20 du Livre VII). Ceci prouve bien que la notion de suite infinie des entiers est maîtrisée (au moins sous la forme d'infini en puissance selon le vocabulaire aristotélicien). D'ailleurs, Aristote dit explicitement que *"ce n'est pas le nombre qui est infini, mais sa représentation"*.

Les opérations élémentaires sont effectuées en colonnes avec retenues. Pour les fractions, on utilise la notation prime, ainsi $\frac{17}{31}$ s'écrit ιζ´λα´´.

A l'époque de Diophante, mathématicien grec d'Alexandrie aux alentours du milieu du 3ème siècle après Jésus-Christ, les notations sont déjà élaborées. L'influence de Ptolémée, mais surtout d'Héron et de Nicomaque (un pythagoricien attardé autour du 1er siècle après J.C., donc plus intéressé par les nombres que par la géométrie euclidienne) y est certainement pour quelque chose. Tant Héron que Nicomaque traitent des problèmes, éventuellement d'origine géométrique, mais en ne se servant que des nombres et des opérations élémentaires. On voit ajouter un diamètre à une aire, ce qui montre que seule la quantité numérique est en jeu.

Apparaissent vers cette époque de courts ouvrages donnant des énoncés de problèmes -que nous qualifierions d'algèbre élémentaire- et quelques fois, les techniques de solution. Une forme littéraire particulière fleurit où l'on fait appel aux héros mythologiques et à toutes les ressources de la fable pour présenter des devinettes mathématiques. Qui ne connaît l'âge de Diophante (84 ans) par le fait qu'il vécut en enfance le 1/6 de sa vie, 1/12 de la durée de sa vie plus tard la barbe lui poussa ; 1/7 de sa vie plus tard il se maria et son fils naquit 5 années après. Le fils vécut la moitié de l'âge de son père et le père mourut 4 ans après le fils !

L'oeuvre essentielle de Diophante, Arithmetica en 13 livres, ne nous est parvenue qu'en fragments. Il s'agit d'une collection de problèmes séparés, dans la tradition babylonienne ou égyptienne. En ce qui concerne notre sujet, l'apport de Diophante est double :

- d'une part, l'introduction d'un symbolisme algébrique rudimentaire débouchant sur des écritures qui sortent du domaine géométrique comme les notations de puissances d'ordre supérieur à 3 ou les produits de plus de trois facteurs. Ainsi Δ^Y (Δ pour δύναμις : puissance) pour le carré, κ^Y (κ pour κύβος) pour le cube, $\Delta\kappa^Y$ pour la puissance d'ordre 5 , etc. ;

- d'autre part, l'autonomie de traitement des problèmes algébriques et numériques. Les identités algébriques remarquables n'apparaissent pas comme des conséquences géométriques et les fractions d'entiers apparaissent comme des nombres et non plus comme des "raisons" en dehors du champ numérique. Cette autonomie empêche peut-être d'accorder un droit de cité aux nombres irrationnels. Le lien avec l'algèbre géométrique n'est pas fait et il faudra attendre Viète et Stevin pour cela au XVIIème siècle.

Sur le plan des méthodes, la lecture de Diophante déçoit en ce sens que des idées générales ne se dégagent pas. Pourtant, de grands mathématiciens comme Fermat ou Viète se réclameront explicitement de Diophante. En outre, la méthode axiomatique, qui depuis le corpus euclidien restait la règle dans la mathématique grecque, est abandonnée. Le champ numérique ne connaîtra pas avant la fin du XIXème siècle d'organisation axiomatique. Il faut ajouter que Viète et surtout Descartes auront pensé ramener ce champ numérique dans le giron géométrique, donc auront cru en avoir ainsi solidement établi les bases.

3. APPORTS HINDOUS ET ARABES

Les Hindous sont sans conteste les successeurs mathématiciens des Grecs. Ils n'ont pas innové en matière de géométrie, mais en ce qui concerne l'arithmétique et l'algèbre, ils ont pu abstraire bien des idées portées par le courant numéricien que nous avons quelque peu suivi (Chap. II § 4).

En ce qui concerne notre étude, un certain nombre d'adjonctions sont techniquement importantes. Il convient toutefois de noter que les textes mathématiques sont, comme après Diophante, présentés sous forme de devinettes, d'amusettes délicieusement académiques. Ainsi :

"Au milieu du combat, le furieux fils de Prit'ha prit un certain nombre de flèches pour tuer Carna ; il en utilisa la moitié pour sa défense, le quadruple de la racine carrée contre les chevaux ; six flèches transpercèrent le cocher Carna et brisèrent sa bannière et son arc et une lui traversa la tête. Combien de flèches avait le fils de Prit'ha ?"

3.1 Apports hindous en Arithmétique et sur l'infini

En arithmétique, Brahmagupta en 628 utilise le nombre 0 avec ses propriétés opératoires :

$$a-a = 0 \quad a+0 = a \quad a-0 = a \quad 0a = 0 = a0 .$$

On doit aussi aux mathématiciens hindous la notation de position pour la numération. Par contre, les nombres négatifs ne font que lentement leur apparition et un mathématicien comme Bhāskara au 12ème siècle, après avoir trouvé deux racines à une équation, dont une négative, éliminera la négative sous le prétexte que *"l'on ne peut approuver les solutions négatives"*.

Le rôle du zéro est intéressant vis-à-vis d'expressions telles que $\frac{a}{0}$. Bhāskara note en gros que $\frac{a}{0} = \infty$ $(a > 0)$ et $\infty + a = \infty$ en précisant :

"En cette quantité, qui consiste en une fraction avec le zéro pour diviseur, il n'y a aucun changement, quoiqu'on ajoute ou l'on retranche ; de même qu'aucun changement ne se produit en Dieu, l'infini et l'immuable, même dans les périodes de création ou de destruction des mondes et quoiqu'à ces périodes un grand nombre de choses se dissolvent ou émergent".

Bien plus tard, en 1558, Ganēsa déclare que $\frac{a}{0}$ est

"une quantité non définie, illimitée ou infinie puisqu'on ne peut déterminer sa grandeur. Elle ne change pas par addition ou soustraction de quantités finies".

Il semble d'ailleurs que certaines séries convergentes fussent utilisées très tôt, en tous cas bien avant leur emploi en Europe occidentale. Cependant, on ne note aucune volonté théorique dans ces débuts d'analyse infinitésimale et pas de volonté de lier intégration et différentiation comme ce sera au contraire le cas avec Newton ou Leibniz (cf. Chapitre IV).

Donnons pour exemple la série dite de Talakulattura, telle qu'expliquée dans un commentaire (le Yukti-Bhăsa) du Tantra-samgraka de Nilakantha (vers 1500 après Jésus-Christ).

On parvient par la trigonométrie élémentaire à la relation (cf. Figure n° 13) $P'B' = \frac{PB}{OP.OB}$ si $1 = OA = OB' = OP'$ et on identifie l'arc à la longueur en question (lorsque l'angle AOB est petit) de sorte que : .

$$P'B' = \frac{PB}{OP^2} = \frac{PB}{OA^2+AP^2} .$$

(En effet, $PB = \text{tg } AOB - \text{tg } AOP$, $OP = \frac{1}{\cos AOP}$, $OB = \frac{1}{\cos AOB}$ et

$\frac{PB}{OB.OP} = \sin AOB - \sin AOP \sim B'P'$).

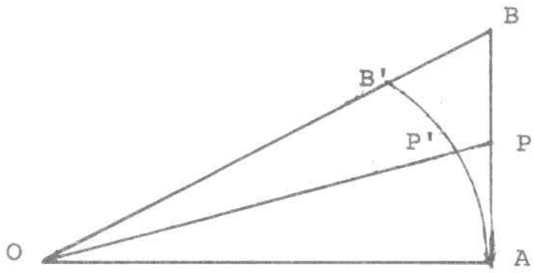


Figure n° 13

Ensuite, on divise le segment AB en n portions égales avec les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Lorsque l'angle AOB est suffisamment petit, on a en posant $\text{tg } AOB = t$:

$$\text{Arc } AB' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P_iP_{i+1}}{1+AP_i^2} \qquad P_o = A$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{t/n}{1+(ti/n)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\frac{t}{n} \left(1-\left(\frac{ti}{n}\right)^2 + \left(\frac{ti}{n}\right)^4 + \ldots + (-1)^p \left(\frac{ti}{n}\right)^{2p} + \ldots\right)\right]$$

Tenant compte de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^p\right) = \frac{1}{p+1}$, on "déduit" :

$$\text{Arc } AB' = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \ldots$$

soit en notations modernes :

$$\text{Arctg } t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} + \ldots$$

En admettant la validité du calcul pour $t = 1$, on en déduit un procédé, d'ailleurs incommode, d'approximation de $\frac{\pi}{4}$.

Bien entendu, il n'y a aucune théorie de la convergence ou des nombres réels.

En ce qui concerne la théorie des nombres proprement dite, les équations diophantiennes, de Pell-Fermat notamment, sont envisagées. Arỳābhata, en utilisant l'algorithme d'Euclide (cf. Chap. II § 4.2), donc les fractions continues, détermine toutes les solutions en nombres entiers des équations de la forme : $ax \pm by = c$; $a, b, c \in N$.

3.2 Apports hindous sur les irrationnels

L'absence de théorie sur les irrationnels du style de celle d'Eudoxe a certainement favorisé une manipulation algébrique des nombres irrationnels. On ne pose aucune difficulté quant à l'addition ou à la multiplication de nombres irrationnels, lesquels ne reposent sur aucun support géométrique apparemment. Les techniques algébriques usuelles du style $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ sont systématiquement utilisées "comme pour les nombres entiers" ajoute même Bhāshara. La description de telles identités reste verbale. Ainsi pour :

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{3}} + 1\right)^2 . \, 3}$$

on lit dans Bhāshara :

> *"La racine du quotient de la plus grande sourde divisée par la moins grande à laquelle on ajoute l'unité, laquelle somme étant prise au carré et multipliée par la plus petite sourde fournit la somme des deux sourdes".*

Le mot "sourde" (numeri surdi) fort employé au Moyen-Age occidental pour les irrationnels provient du persan a sour.

Au point de vue algébrique, il y a beaucoup plus de notations systématiques que chez Diophante par exemple.

3.3 Apports arabes

Dès les premiers caliphats, les arabes établiront des contacts culturels avec le monde byzantin et obtiendront des manuscrits des oeuvres grecques classiques qu'ils traduiront assez vite en langue arabe. Grâce à eux, nous disposerons des oeuvres grecques.

Au sujet des nombres irrationnels, il en est de même pour les Arabes que pour les Hindous, à savoir une absence d'inquiétude quant à la base logique des calculs mais une grande habileté. On pourrait d'ailleurs recenser les interventions de plus en plus fréquentes au cours des siècles d'égalités du type $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ ou $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.

On comprend d'autant mieux la position isolée d'Abu J'afar Ahmad ibn Jusaf ibn Ibrahim ibn Al-Maya al Misri vers le début du IXème siècle qui, bien que rejetant les difficultés du Livre V, tente de fonder une théorie des proportions plus élémentaire à partir des seuls résultats importants du Livre V.

On sait bien que l'algèbre doit son nom au livre du mathématicien Mohammed Ibn Musa-Al Kowârymî vers le IXème siècle, livre intitulé "Al jabr w'al muqâbâlâ" et traduit au XIIème siècle en latin (Ludus algebrae et almucgrabalaeque). Il est notable que malgré l'appareil analytique assez développé (notations, abréviations systématiques, etc), l'oeuvre d'Al Kowârymî reste très proche des explications géométriques, de l'algèbre géométrique du Livre VI des Eléments d'Euclide en utilisant par contre les sections coniques et éventuellement d'autres courbes. Omar Al-Khayyâm explique avec force cette conception d'une algèbre géométrique, l'algèbre étant considérée comme une technique de résolution des équations :

> *"Les résolutions algébriques ne s'effectuent qu'à l'aide de l'équation, c'est-à-dire en égalant ces degrés les uns aux autres, comme cela est bien connu. Si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de mesure, cela doit s'entendre métaphoriquement et non pas proprement, puisqu'il est absurde que le carré-carré soit au nombre de grandeurs mesurables. Ce qui rentre dans la catégorie des grandeurs mesurables, c'est d'abord une dimension, à savoir la racine, ou par rapport à son carré, le côté ; puis deux dimensions : c'est la surface ; et le carré (algébrique) fait partie des grandeurs mesurables, étant la surface carrée. Enfin trois dimensions : c'est le solide ; et le cube se trouve parmi les grandeurs mesurables, étant le solide terminé par six carrés..."* (Omar Al-Khayyam, Algèbre, traduction de F. Woepcke Paris 1851).

Mais une équation nécessite à la fois une démonstration "algébrique" et une construction géométrique. Cela est facile quant aux équations du 1er et du deuxième degré, grâce aux Eléments d'Euclide ou aux Données d'Euclide. Mais pour les équations du troisième degré, "les propriétés du cercle" ne suffisent pas et Omar Al-Khayyam insiste sur le fait constaté mais non démontré qu'on ne peut fournir les racines à partir de racines carrées portant sur les coefficients et qu'il y faut utiliser les Sections Coniques d'Appolonius. Il ajoute que *"peut-être un autre qui nous succèdera comblera-t-il cette lacune"* en donnant une démonstration de l'impossibilité, ce qui sera effectivement fait par P.L. Wantzel en 1837. L'auteur du Rubbayat laisse entrevoir un développement autonome de l'algèbre lorsqu'il écrit en parlant des procédés géométriques de résolution des équations du troisième degré :

> *"Et sachez que la démonstration géométrique de ces procédés ne remplace pas leur démonstration numérique, lorsque l'objet du problème est un nombre, et non pas une grandeur mesurable."*

Précisons la position d'Omar Al-Khayyam. Vers 1077 il écrit un commentaire sur les difficultés rencontrées dans les introductions sur le livre d'Euclide. Avec force, Al-Khayyam assure que le Livre V est juste, mais non vrai et il préconise pour définir un nombre la méthode des fractions continues.: c'est le retour à l'antique méthode numérique, l'antypharèse éventuellement infinie. Il tente d'établir l'équivalence logique de cette définition avec la théorie eudoxienne et traite donc de la même façon numérique raisons commensurables ou non. En outre, Al-Khayyam "démontre" l'existence de la quatrième proportionnelle selon le principe de continuité comme nous l'avons fait au Chap. I § 3,5.

Cette position semble isolée et la leçon ne sera pas comprise en Occident.

4. LES NOMBRES DANS LE MOYEN-AGE OCCIDENTAL

Dès le début du haut Moyen-Age, l'héritage grec disparaît complètement. Quelques auteurs tentent de maintenir l'ambition d'un Savoir unifiant en traduisant en latin et en commentant les oeuvres de toute nature de l'Antiquité. Visiblement, ces auteurs (Boèce, Isidore de Séville, Bède le Vénérable, etc) n'innovent pas sur leurs prédécesseurs et qui plus est ne semblent pas toujours bien comprendre ce qu'ils traduisent. Scientifiquement, c'est la nuit.

Quelques lueurs, par-ci, par-là, proviennent d'hommes qui se sont mis en contact avec la civilisation musulmane, comme Gerbert d'Aurillac, pape de l'an mil sous le nom de Sylvestre II, et qui effectua un séjour en Espagne vers 968. En laissant aux érudits le soin de déterminer des priorités, on peut dire que Gerbert introduisit en Occident les chiffres arabes et la pratique de l'abaque, où les chiffres prennent des valeurs (unités, dizaines, centaines, etc) selon la colonne dans laquelle ils s'inscrivent. Des procédés techniques de calcul opératoire (multiplication et division surtout) s'imposent peu à peu et il suffira de faire disparaître les colonnes et de mettre un zéro là où il n'y a pas de jeton sur l'abaque, pour disposer d'une arithmétique algorithmisée. Ainsi, le calcul de $\frac{4019}{87}$ se fait systématiquement de la façon suivante :

$$\frac{4019}{87} = 40 + \frac{40.13 + 19}{100-13} = 40 + \frac{539}{100-13} = 40 + 5 + \frac{5.13 + 39}{87}$$

$$= 40 + 5 + \frac{104}{87} = 40 + 5 + 1 + \frac{17}{87}$$

d'où la valeur de la division : 46 par défaut.

Bien que les mathématiques aient une place de choix dans les études au Moyen-Age (le quadrivium, rappelons-le, comporte l'arithmétique, la musique, la géométrie et l'astronomie), cette place se situe en début d'études et au titre de technique qui n'appelle pas en soi la spéculation intellectuelle.

Au XIIème siècle, paraissent un très grand nombre de traductions latines, plus ou moins bonnes, des oeuvres grecques pieusement conservées par les Musulmans et également des oeuvres musulmanes originales.

Donnons pour seul exemple celui d'Adélard de Bath qui après avoir étudié à Tours et Laon, voyage en Sicile, en Palestine, visite sans doute Bagdad, Damas, Le Caire et traduit les <u>Eléments</u> d'Euclide, l'<u>Almageste</u> de Ptolémée, le <u>Liber ysagogarum</u> d'al-Kowârymî. Les Croisades, les disputes théologiques avec les Byzantins, la division de l'Espagne expliquent en partie cette floraison.

Le XIIIème siècle intellectuel va être subjugué par la richesse philosophique et scientifique des Grecs. Cette fascination aurait pu produire en mathématiques des effets positifs rapides. Il n'en fut rien, sans doute parce que le climat intellectuel de ce XIIIème siècle n'est vraiment pas celui de la liberté, mais de l'autorité (Grégoire IX lance l'Inquisition en

1231). Assez vite, après les premières condamnations vers 1215, Aristote devient l'autorité indiscutée et indiscutable et bien téméraire qui, comme Roger Bacon, souhaiterait voir brûler toute l'oeuvre d'Aristote *"car c'est une perte de temps que de l'étudier, une source d'erreurs et un facteur de multiplication de l'ignorance"*. Un nom émerge nettement, celui de Léonard de Pise.

4.1 Le Liber Abaci de Fibonacci

Léonard de Pise (parfois mieux connu sous le sobriquet de Fibonacci) fut mis très jeune en contact avec le monde arabe par le négoce. Il compose en 1202 le Liber Abacci, ouvrage vite célèbre et très longtemps utilisé, puis la "Practica geometriae" en 1220. Il figure au sommaire de ce Liber abaci des rubriques bien éloignées de l'esprit de la mathématique grecque : calcul des prix ou trocs et ristournes, tous procédés provenant des besoins mercantiles de l'échange. La règle de trois est reine. Ainsi, il s'agit de savoir combien de "Rotuli" (unité de masse) de laine il est possible d'échanger contre 50 aunes de drap, sachant que 20 aunes de drap valent 3 lires et qu'avec 5 lires on a 42 "rotuli" de laine. Léonard de Pise présente les choses de la façon suivante (figura cata) :

3 lires　　　　20 aunes

42 rotuli　　5 lires　　50 aunes

On fait le produit des trois nombres liés par un trait et on divise par le produit de ceux qui restent.

Heureusement, d'autres chapitres relèvent le niveau et témoignent de l'habilité de Léonard de Pise dans la manipulation algébrique des nombres, des fractions, des racines carrées ou cubiques. Il n'y a pas utilisation de la géométrie, et d'ailleurs son livre sur la géométrie a le titre suggestif de "pratique de la géométrie".

Très intéressante pour nous est la résolution dans la "Flos Leonardi" d'une équation cubique soumise à titre de défi par Jean de Palerme.

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 10x = 20 .$$

Cette équation possède une seule racine, positive, qu'il s'agit de déterminer. On commence par établir qu'aucun entier positif ne peut convenir et que la racine est comprise entre 1 et 2 car :

$$P(1) = 13 < 20$$

et $$P(2) = 36 > 20 .$$

Sans explication, il fournit d'ailleurs une valeur approchée de la racine :

$$1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{(60)^2} + \frac{42}{(60)^3} + \frac{33}{(60)^4} + \frac{4}{(60)^5} + \frac{40}{(60)^6}, \text{ exacte à } 3.10^{-11} \text{ près.}$$

Cette racine de l'équation ne peut pas être un nombre rationnel, ce que montre Léonard de Pise et qu'un moderne retrouve facilement (Si $\frac{p}{q}$, irréductible, est racine, q divise 1).

Bien entendu, la racine x ne peut être racine carrée d'un nombre rationnel car dans ce cas x aussi serait rationnel ($x = \frac{20-2x^2}{10+x^2}$) ce qui est impossible. Léonard de Pise montre que x ne peut même pas être un irrationnel de la forme traitée par Euclide au Livre X (cf. Chap. II § 2.3 et § 4.3).

Au Livre X, Euclide a classé les nombres irrationnels de la forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ en douze classes disjointes. Cette fastidieuse classification sera très étudiée aux différentes époques de l'histoire jusqu'aux temps classiques. Chez Euclide, les grandeurs comme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ne sont pas des nombres, mais au contraire, chez Léonard de Pise et chez la plupart des mathématiciens arabes ou hindous, ces grandeurs sont traitées comme des nombres. L'assertion de Léonard de Pise repose en fait sur le Livre X. Supposons que la racine x s'écrive sous la forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ où a/b n'est pas un carré parfait, a et b étant rationnels. On devrait avoir $x^2 = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ et donc :

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(10 + \sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = 4(10 - \sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 .$$

Traitons le cas $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ par exemple :

$$\sqrt{a}\left[180 + a + 3b\right] + \sqrt{b}\left[180 + 3a + b\right] = 400 - 16(a+b) - 32\sqrt{ab} .$$

Justement, Euclide montre que de telles égalités sont impossibles, car elles correspondent à des classes distinctes de sa classification.

4.2 Les Ecoles d'Oxford et de Paris

Malgré le joug de l'autorité, l'essor des universités est considérable au XIIIème siècle et au début du XIVème siècle et la science "scholastique" fleurit. Diverses Ecoles sont frondeuses envers Aristote et repensent le rapport de la Science (la Philosophie naturelle : qui restera "natural philosophy" en anglais), de la Philosophie et de la Théologie. Les Ecoles d'Oxford (Robert

Grosseteste, Roger Bacon, Thomas Bradwardine, Guillaume d'Ockham) et de Paris (Jean Buridan, Nicole Oresme) sont les plus célèbres. Bien entendu, le problème de l'infini y est longuement discuté et toutes les difficultés rencontrées et quelquefois résolues par les Grecs sont à nouveau reprises et repensées. Par exemple, l'angle "corniculaire" (angulus contengencie), dont nous avons parlé au § 3.2 du chapitre I, refait son apparition. Pour Jean Campanus, dont la reprise de la traduction d'Adélard de Bath des Eléments d'Euclide et les commentaires auront une si grande célébrité qu'on croira qu'il est l'auteur des démonstrations, l'angle de contingence est une grandeur non nulle. Campanus s'appuie sur l'autorité du grec Bryson qui avait vainement cherché la quadrature du cercle, pour rappeler qu'une grandeur continue qui passe d'une valeur à une autre passe par toutes les valeurs intermédiaires. En particulier, la sécante OB où B parcourt le demi-cercle (cf. Figure n° 14)

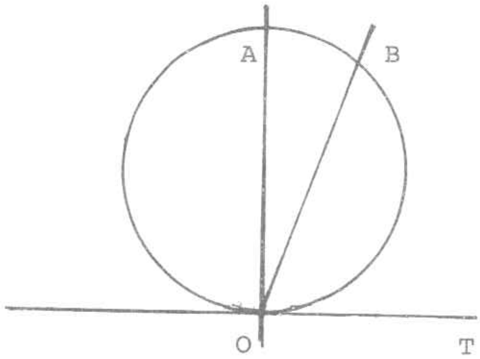


Figure n° 14

détermine avec OT un angle qui prend toutes les valeurs depuis l'angle droit jusqu'à 0 ... en passant par la valeur de l'angle de contingence ! Plus tard, Jacques Peletier du Mans et François Viète attribueront explicitement la valeur nulle à cet angle, tandis que Clavius, un autre commentateur d'Euclide vers la fin du XVIème siècle, dira que l'angle de contingence est une grandeur d'une autre nature que celle de l'angle de deux droites. Mais nous remettons au Chapitre IV la discussion concernant les grandeurs continues et au Chapitre VI l'examen des différentes attitudes devant l'infini. Restons plutôt fidèle au thème de ce chapitre.

4.3 Nicole Oresme et l'idée de fonction

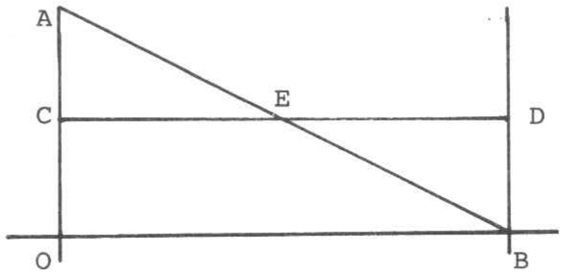
Evêque de Lisieux, puis professeur au Collège de Navarre, Nicole Oresme va introduire, dans son Algorismus proportionum, qui date du milieu du XIVème siècle, des exposants fractionnaires du type :

$$\boxed{1 \text{ p } \frac{1}{2}} \; 4 \quad \text{pour} \quad 4^{3/2} = 8$$

avec les règles telles que $a^{n/m} = (a^n)^{1/m}$, $a^{1/m}.b^{1/n} = (a^n b^m)^{1/mn}$ etc... C'est un début de manipulation algébrique des nombres et dans sa lignée s'inscrit la découverte des logarithmes par John Napier vers 1594 (Mirificis Logarithmorum Canonis Constructio, publié seulement en 1619).

Plus original encore est l'emploi d'une représentation graphique pour la représentation d'un phénomène changeant avec le temps. Nicole Oresme représente l'"intension", c'est-à-dire l'intensité, par un trait vertical au-dessus du point de l'"extension", c'est-à-dire la place du phénomène, soit dans l'espace, soit dans le temps. Ainsi, dans "De Uniformitate et Difformitate Intensionum", Nicole Oresme étudie la vitesse, qui varie avec le temps depuis la valeur OA en t = 0 jusqu'à O en t = B (cf. Figure n° 15).

Figure n° 15



Le mouvement uniformément ralenti étudié est donc tel que le mobile parcourt dans le même temps la même longueur qu'un mobile animé d'une vitesse constante égale à la moyenne entre la vitesse de départ et celle d'arrivée. En effet, le produit OC × OB , d'une vitesse par un temps, mesure l'espace parcouru par le mobile de vitesse constante $OC = \frac{OA+BB}{2} = \frac{OA}{2}$. A son tour, l'aire du triangle AOB mesure l'espace parcouru par le mobile uniformément ralenti. Or, géométriquement, l'aire AOB est égale à l'aire du rectangle OBDC.

Techniquement parlant, l'attitude d'Oresme est novatrice, car elle implique une volonté quantitative sur le mouvement. Qu'on ne s'y trompe pas : la représentation est géométrique et non pas numérique ; mais on ne craint pas de figurer une longueur par une aire, ce qui est un pas de plus vers l'algébrisation. La leçon d'Oresme aura peu d'influence sur ses descendants directs. D'ailleurs, l'esprit scholastique, cultivé pour lui-même, va bloquer, pour deux bons siècles, tout effort d'interprétation scientifique de la Nature. Heureusement, la fin du Moyen-Age va voir s'éclore tout une richesse d'inventions techniques. C'est sur cette accumulation de connaissances techniques, remarquablement variées, que les savants de la Renaissance pourront fonder les bases de la science moderne. Il n'est pas inintéressant de noter qu'au XVème siècle paraissent de très nombreux ouvrages en langue vulgaire traitant des opérations arithmétiques propres au négoce avec quelquefois beaucoup de sagacité.

5. ECOLES ITALIENNE, FRANCAISE ET ALLEMANDE DE LA RENAISSANCE

Peu à peu, les mathématiciens s'habituent à manipuler les irrationnels comme des nombres et l'empirisme pratique règne. Toutefois, quelques scrupules se font jour ici où là.

Nicolas Chuquet, mathématicien français, dégage le calcul de la géométrie. Pour le manifester, il propose de noter racine seconde ou tierce la racine carrée ou cubique (Le Triparty en la science des nombres Lyon 1484). Son oeuvre ne sera pas publiée et son contemporain Luca Pacioli publie en 1494 une Summa de Arithmetica, Geometria Proportioni et Proportionalita où l'algébrisation est de plus en plus accentuée. Les doutes sont clairement exprimés par Michel Stifel, un des grands mathématiciens de l'Ecole Allemande, dans son Arithmetica Integra parue à Nuremberg en 1544. D'une part :

> *"Puisque, en prouvant certaines figures géométriques, quand les nombres rationnels ne nous peuvent servir, ce sont les irrationnels qui interviennent et montrent exactement ces choses que ne peuvent montrer les rationnels... nous sommes alors conduits à assurer que ce sont vraiment des nombres, conduits et obligés par les résultats qui proviennent de leur utilisation, résultats que nous percevons comme réels, certains et constants".*

Cependant, d'autre part, Stifel est heurté par la représentation décimale, non périodique et infinie de ces nombres irrationnels et c'est au nom de ce rôle diabolique de l'infini que lui aussi les récuse. Voici son texte original :

> *"Non autem piotest dici numerus verus, qui talis est ut praecisione careat et ad numerus veros nullam cognitam habeat proportionem. Sicut igitur infinitus numerus, non est numerus ; sic irrationalis numerus non est verus numerus, quum lateat sub quadam infinitatis nebula".*

(Traduction libre : Il n'est cependant pas possible d'appeler vrai nombre celui dont la nature est de tendre vers la précision et n'a pas de proportion connue avec tout nombre vrai. De même qu'un nombre infini n'est pas un nombre, de même un nombre irrationnel n'est pas un vrai nombre, mais reste caché dans une nuée d'infini.)

Les Italiens vont manipuler ces irrationnels sans trop se poser de questions : Cardan, Tartaglia, Bombelli, Ferrari. Quelques dates : l'Ars Magna de Cardan est de 1545, sa Pratica Arithmeticae generalis et mensurandi singularis de 1539, le General trattato di numeri et mesure de Tartaglia est de 1556.

Bombelli obtient $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}$ de la même façon que le mathématicien hindou Āryabhatta (cf. § 4.1 du chapitre II).

Avec le français François Viète, l'algèbre va considérablement avancer. Il l'appelle d'ailleurs logistica speciosa par opposition à logistica numerosa pour l'arithmétique (In Artem Analyticam Isagoge 1591). Il introduit des symboles littéraux et donne les identités remarquables : $(a+b)^3$ etc. On doit à Viète une expression pour le calcul de π, obtenue en inscrivant dans un cercle des polygones réguliers de 4, puis 8, puis 16 côtés, etc :

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90°}{2}\cos\frac{90°}{4}\cos\frac{90°}{8}\cdots$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

D'ailleurs, Viète calcule π avec 10 décimales exactes et des déterminations de plus en plus précises sont obtenues, notamment par les calculs de L. van Ceulen aboutissant selon les procédés d'Archimède à 34 chiffres exacts. On en déduisit une excellente approximation (10^{-6} près) avec $\frac{355}{113}$. Huygens résumera ces travaux dans un remarquable petit traité : De circuli magnitudine inventa (1654). Il est très notable que dans ces travaux numériques, les mathématiciens s'habituent à considérer les rapports comme des nombres susceptibles des techniques opératoires d'addition, de soustraction et de multiplication. Viète insiste sur cet aspect numérique dans De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesin resolutione (1600) et Zeteticorum libri quinque (1593) et la virtuosité de Viète marquera ses successeurs (cf. § 6).

En 1625, Grégoire de Saint Vincent (Opus Geometricum) montre que la convergence, du moins dans les séries géométriques, est suffisamment comprise pour réfuter Zénon lequel en ce qui concerne Achille et la tortue

> *"fait exactement comme si les sections de temps entre chacune des divisions étaient égales, alors que ces sections se trouvent elles-mêmes déterminées par une série géométrique décroissante".*

Par suite, il suffit d'additionner ces sections, bien qu'infinies en nombre, pour avoir un temps fini. Tout le XVIIème siècle et le XVIIIème siècle vont devoir malgré tout préciser le sens de cette addition.

L'ingénieur et mathématicien Simon Stevin, qui avait écrit un "Livre de compte de prince à la manière d'Italie" (1608), allait aider à mieux faire assimiler les irrationnels comme nombres par l'introduction de la représentation décimale. Cette introduction est expliquée dans l'Arithmétique (La Practique d'Arithmétique 1585) sous le titre : la disme enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes.

La notation de Stevin est encore bien lourde, ainsi pour 3,141..., il écrit : 3 0 1 1 4 2 1 3 ....

Les nombres entourés d'un cercle désignent la puissance de $\frac{1}{10}$ correspondante. Là encore, il suffira de se débarrasser de ces 0, 1, ... ce que l'on fera bien vite. Ce que fait Clavius, qui d'ailleurs sera un professeur très influent par ses écrits jusqu'à Descartes, dans son Astrolabium en 1593.

D'autre part, Stevin insiste sur le fait que les irrationnels possèdent exactement les mêmes propriétés opératoires que les nombres réels et doivent donc être considérés comme des nombres à part entière.

Mais étudions de plus près son Traicté des incommensurables grandeurs, avec une Appendice de l'explication du dixième livre d'Euclide (1634). Ce traité commence donc par une explication fort intéressante.

AV LECTEVR.

APRES que nous auions veu & reueu le Dixiesme liure d'Euclide, traictant des Incommensurables Grandeurs, aussi leu & releu plusieurs commentateurs sur le mesme, desquels aucuns le iugeoient pour la plus profonde & incomprehensible matiere de la Mathematique, les autres que ce sont propositions trop obscures, & la croix des Mathematiciens; Et qu'outre cela ie me persuadois (quelle follie ne faict l'opinion commettre aux hommes?) d'entendre ceste matiere par ses causes, & qu'elle n'a en soi telles difficultez comme l'on estime vulgairement, ie me suis addonné d'en descripre ce traicté.

Simon Stevin explique que la difficulté tient à ce que de nombreux théorèmes sur les nombres se décrivent par les grandeurs (du Livre V) et seraient difficiles à établir par les seuls nombres tandis que réciproquement des problèmes sur les grandeurs ne se peuvent résoudre facilement sans les nombres.

> *"Par exemple, nous savons que 1 est incommensurable à $\sqrt{2}$, mais comme 1 à $\sqrt{2}$, ainsi le côté du carré de la diagonale, par quoi le côté du carré est incommensurable à sa diagonale, ce qui nous serait impossible à savoir sans les nombres".*

Puis Stevin déclare qu'en fin de compte le Livre X n'est guère difficile si l'on maîtrise les racines carrées (*"la connaissance desquelles est nécessaire, vu que sans la même l'on se tourmente en vain en cette matière"*) et si l'on sait que le Livre X classe en douze catégories les $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, mais en éliminant les nombres pour ne garder que les lignes géométriques. Cependant, *"une même ligne se peut dire en quelque ville de 5 pieds, laquelle sera en une autre peut-être de 4+$\sqrt{2}$ pieds"*. Stevin récupère donc quant à lui les nombres et l'on doit pouvoir partager en proportion rationnelle ou non une ligne. Quelle est alors la raison des gênes causées aux mathématiciens par le Livre X où l'on ne figurent pas les radicaux ?

> *"Certes, je ne vois autre raison, sinon qu'ils ne les tenaient pas pour nombres, mais pour quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes, absurdes et pas dignes d'être citées en propositions mathématiques".*

D'où l'essentielle thèse 4 dans la liste ci-dessous :

THESES MATHEMATIQVES.

THESE I.

QVE l'vnité eſt nombre.

THESE II.

Que nombres quelconques peuuent eſtre nombres quarrez, cubiques, de quarte quantité, &c.

THESE III.

Que racine quelconque eſt nombre.

THESE IIII.

Qu'il n'y à aucuns nombres abſurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou ſourds.

S. Stevin se propose de décrire alors tous les nombres irrationnels *"non pas seulement des douze lignes binomiales et leurs racines, comme au dit dixième livre, mais de millenomies lignes et de leurs racines de racines jusques en infini"*. Quel vent d'air frais !

C'est avec joie qu'on citera la fin de l'exorde :

> *. Mais (me dira quelcun) qu'elle peut estre l'vtilité de ceste matiere, veu que les choses qui sont à mesurer ou partir aux negoces des hommes, n'ont point de mestier de ceste extreme parfection, selon la raison des nombres radicaux proposez, par ce que nous trouuons en leur lieu, nombres Arithmetiques si peu differens d'iceux radicaux, qu'il ne pourra monter partie visible, voire es maieures matieres corporelles donnees : nous lui respondons, que l'on pourroit dire pareillement, pourquoi les operations de la Geometrie, comme les elemens d'Euclide, sont faistes par l'extreme perfection; Mais comme cela ne semble pas digne de responce, à cause des absurditez suiuantes de son contraire (car telles parfaictes operations, donnent parfaictes intelligences, qui sont causes des parfaicts & admirables effects que produict la Mathematique) ainsi de cestui ci.*

La première partie du traité de Stevin reflète bien que c'est le côté pratique des nombres qui l'a amené à balayer les préventions anciennes.

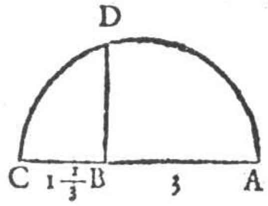
> VEV que les plus propres definitions, sont celles qui expliquent le mieux l'essence du defini, & que l'incommensurance des grandeurs, est trouuée, & seulement notoire par les nombres, nous vserons des nombres en ces definitions, comme le plus commode instrument à tel effect. Il est vrai qu'Euclide en sa 2e proposition du 10e liure, dict ainsi: *Si de deux grandeurs inegales données, l'on coupe tousiours la moindre de la maieure, & que la reste ne mesure iamais sa grandeur precedente: Telles grandeurs sont incommensurables.* Mais combien ce theoreme est veritable, toutesfois nous ne pouuons cognoistre par telle experience, l'incommensurance de deux gandeurs proposées; Premierement parce qu'a cause de l'erreur de noz yeux & mains (qui ne peuuent parfaictement veoir & partir) nous iugerions à la fin, que tous grandeurs tant incommensurables que commensurables, fussent commensura-

bles. Au second, encore qu'il nous fust possible, de soubstraire par action, plusieurs cent mille fois la moindre grandeur de la maieure, & le continuer plusieurs milliers d'annees, toutesfois (estant les deux nombres proposez incommensurables) l'on trauailleroit eternellement, demeurant tousiours ignorant, de ce qui à la fin en pourroit encore auenir; Ceste maniere donc de cognition n'est pas legitime, ains position de l'impossible, à fin d'ainsi aucunement declairer, ce qui consiste veritablement en la Nature; ceste incommensurance doncques est seulement notoire par les nombres incommensurables; ce que Euclide sçachant fort bien, aussi que telle inuention d'incommensurabilité n'estoit suffisante pour ses propositions suiuantes (car sa dixiesme proposition enseigne trouuer grandeurs incommensurables par le moien des nombres) il l'a expliqué à la 8e proposition legitimement selon les nombres, & ainsi le ferons nous en ceste premiere partie des definitions comme s'ensuit.

L'incommensurabilité des grandeurs est alors définie par l'incommensurabilité des nombres "expliquant ces grandeurs". La difficulté d'un fondement rigoureux réside dans cette dernière expression, car Euclide se contente de comparer des rapports de grandeurs à des rapports de nombres, et il s'en est offert le droit par les définitions du Livre V. Mais pouvait-il y avoir dans l'état de l'Algèbre au XVIIème siècle, et l'état des réflexions sur les bases des mathématiques, une possibilité de solution ?

Au lecteur moderne, l'attitude de Stevin apparaît comme la plus opérante, et il est fort étrange qu'une telle attitude soit absente chez Descartes (cf. Chap. IV § 3) où la Géométrie fait loi, purement formelle chez Newton (cf. Chap. IV § 4.1), réinventée enfin, mais dans un environnement très philosophique, chez Leibniz (cf. Chap. IV § 5.1). Il faudra la pratique de la géométrie analytique, et surtout de la Physique, pour qu'une lente appropriation du numérique s'effectue au cours du XVIIIème siècle. Même chez un Cauchy, la pratique numérique conserve un relent de géométrisme (cf. Chap. V § 1.4). Mais apprécions le caractère effectif de la méthode de Stevin sur un problème précis. Il s'agit, deux nombres étant donnés, ainsi qu'un segment, de construire un autre segment telle que la raison du second au premier soit égale à la raison des deux nombres donnés.

Explication du donné. Soit donné la ligne A B,& les nombres donnez √ 5 & 3. *Explication du requis.* Il faut trouuer vne ligne en telle raiſon à la A B, comme √ 5 à 3. *Conſtruction.* On prendra les potences quarrees des nombres donnez, qui ſont 9 & 5, puis on produira A B en C, ainſi que A B aie telle raiſon à B C, comme 9 à 5, puis ſe trouuera la ligne moienne proportionelle entre AB,& B C, par la 13 propoſition du 6e liure d'Euclide, qui ſoit B D.



Ie di que B D eſt la ligne requiſe, aiant telle raiſon à la A B, comme √ 5 à 3. *Demonſtration.* Poſons que A B ſoit 3; Mais comme 9 à 5, ainſi (par la conſtruction) A B 3 à B C, doncques B C faict 1 $\frac{2}{3}$, mais le rectangle de A B 3, en B C 1 $\frac{2}{3}$ faict 5, pour le quarré de B D (car B D eſt moienne proportionelle entre A B & B C par la conſtruction) parquoi B D faict √ 5. Il y a doncques telle raiſon de B D, à A B, comme de √ 5 à 3, ce qu'il falloit demonſtrer.

Nota 1. Si l'on voulut poſer pour A B quelque autre nombre que 3, on viendra touſiours à la meſme demonſtration. Poſons par exemple pour A B 9, & B C ſera 5, & B D √ 45, leſquels 9 & √ 45, ſont en la meſme raiſon que 3 à √ 5, car diuiſant l'vn & l'autre par le commun diuiſeur 3, viendra 3 & √ 5.

Nota 11. Si les nombres donnez fuſſent √ 5 & √ 10, l'operation ſeroit ſemblable à la precedente, car l'on produiroit A B en C, ainſi que A B euſt telle raiſon à B C, comme 10 à 5, quarrez des nombres donnez & puis comme deſſus.

Stevin poursuit par d'autres exemples avec les nombres $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ etc. On se reportera au Document n° 17 pour plus de précisions.

6. ALGEBRISATION DE LA GEOMETRIE PAR R. DESCARTES

Le "Prince des Amateurs", F. Viète, avait insisté sur une division de "l'analyse" (c'est-à-dire de l'art analytique où l'on suppose au départ ce qui est cherché et procède par déduction) en trois parties :

- la zététique ou l'art de chercher les problèmes (Zeteticorum libri quinque 1593) consiste à adopter un symbolisme pour ramener un problème à une ou des équations ;
- l'analyse poristique ou l'art de manipuler les équations ;
- l'analyse exégétique ou l'art de résoudre les équations.

Cette dernière analyse se divise elle-même en deux attitudes "logistiques", sous l'influence sans doute de la résurgence des Oeuvres tant de Diophante que d'Appolonius :

- la "logistique numéreuse" où il est question de résolution numérique approchée ;

- la "logistique géométrique" où il est question de résoudre les équations par des constructions géométriques, éventuellement à la règle ou au compas.

Viète et à sa suite R. Descartes et P. Fermat découvrent les analogies fondamentales entre l'analyse poristique (diophantienne par exemple) et la logistique géométrique (telle que développée par Archimède dans ses Oeuvres Géométriques et surtout par Appolonius). Leurs réflexions vont aboutir à une algébrisation de la géométrie, connue sous le nom de géométrie analytique.

Nous n'étudierons que le point de vue cartésien, conscient d'éliminer ainsi quelques éclairages. D'abord, R. Descartes construit un Système du Monde. C'est un philosophe "totalisateur" et sa Géométrie (1637) est un appendice des Règles pour conduire la Raison. En outre, R. Descartes faisant "table rase" du passé n'indique jamais ni ses sources, ni l'origine de ses réflexions. On a donc bien du mal à baliser son élaboration. Enfin, R. Descartes ne semble pas intéressé par le calcul numérique proprement dit et nous devrons expliquer cette singularité, ce qui nous portera à revenir nettement sur l'idée d'algébrisation de la Géométrie.

6.1 Exposé de R. Descartes

N'oublions pas que Descartes, dans son projet de *"chercher la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes les choses dont mon esprit serait capable"* commente l'influence de la logique, de l'analyse des géomètres et de l'algèbre.

> *"Pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination, et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive"* (Discours de la Méthode, 2ème partie).

Bien que cela fasse partie du bagage minimum et quelquefois lassant de tout Français, redonnons ici les principales règles de la Méthode.

D'abord une exigence de clarté et de distinction :

> *"ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle, c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute".*

La deuxième exigence précise la distinction requise dans l'analyse :

> *"diviser chacune des difficultés que j'examinerai en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre".*

La troisième exigence est celle d'un ordre :

> *"conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns des autres".*

Enfin, une exigence de complétude :

> *"faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre".*

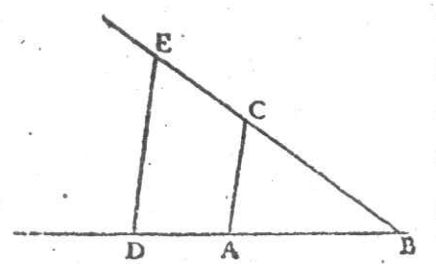
Descartes commente précisément ces Règles sur l'exemple de ce qui va devenir pour nous la géométrie analytique. Ayant noté que toutes les mathématiques *"ne considèrent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent"*, il étudie *"les proportions en général"* mais *"pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes"* pour des raisons de simplicité de l'imagination. Vient l'essentiel : *"pour les retenir ou les comprendre plusieurs ensembles, il fallait que je les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible".*

Etudions la mise en oeuvre explicite d'une telle attitude a priori :

Tous les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin, par aprés, que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

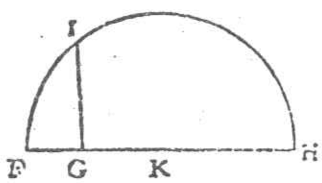
Et comme toute l'Arithmetique n'est composée que de quatre ou cinq operations, qui sont : l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision ; ainsi n'a-t-on autre chose a faire, en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster; ou bien, en ayant vne que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion , puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; ou bien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux comme l'vnité est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision ; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité & quelque autre ligne, ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligible.

Soit, par exemple, AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC; ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.



Ou bien, s'il faut diuiser BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC est le produit de cete Diuision.

Ou, s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH; puis, esleuant du point G vne ligne droite iusques a I a angles droits sur FH, c'est



GI, la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique ny des autres, a cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme, pour adiouster la ligne BD a GH, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a+b$; et $a-b$, pour soustraire b d'a; et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; et aa ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'a^2+b^2; et $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d'a^3-b^3+abb, & ainsi des autres.

Ensuite, précise Descartes, voulant résoudre quelque problème,

"on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres".

Par le critère de l'ordre (troisième règle), on doit aboutir à une ou des équations qu'il faut soigneusement recenser (quatrième règle).

Nous abandonnerons Descartes lorsqu'il entreprend par ce moyen analytique une brillante résolution d'un problème géométrique de Pappus, règle la résolution des équations de degré 3 et 4 par des intersections d'un cercle et d'une parabole et décrit complètement les Ovales qui portent son nom et proviennent de ses travaux en Optique (cf. La Dioptrique).

En un certain sens, la méthode cartésienne prolonge, sans plus, les géomètres grecs comme Appolonius. Mais, en fait, la liberté propre du champ opératoire de l'algèbre des équations va complètement modifier le paysage. On a voulu ergoter sur le sentiment que Descartes avait de cette originalité profonde et réduire le passage à l'algèbre au fait que cela "soulage l'imagination". Il me semble que la motivation de Descartes est tout à la fois plus profonde et plus consciente. Il s'agit de tenter d'aborder en Géométrie cette "clarté" qui doit se trouver dans la vraie mathématique, en utilisant la règle de séparation du distinct et la règle d'ordre :

"pour que les parties du sujet qui constituent la nature de la difficulté, demeurent toujours distinctes et ne soient pas enveloppées dans des nombres inutiles" (Règle 16 ; Règles pour servir à la direction de l'esprit).

Descartes donne l'exemple élémentaire de $225 = 9^2 + 12^2$ qui se trouve par le calcul, mais si l'on convient d'interpréter en termes de triangle rectangle, en notant a^2+b^2 , *"les deux parties a^2 et b^2 qui dans le nombre sont confuses demeureront distinctes"*.

L'exigence d'ordre est essentielle et cette même exigence d'ordre dans la propriété découverte correspond à l'exigence d'ordre dans la pratique même de la découverte. Descartes écrit une Méthode, non un Traité ! Or l'Algèbre peut répondre mieux que tout autre discipline à cette exigence comme le Livre III sur les Equations le montrera. En effet, la décomposition en facteurs correspond à la distinction en éléments ou voie analytique et la recomposition par multiplication, laquelle justifie les racines fausses ou les racines imaginaires, correspond à la reconstruction ou voie synthétique.

6.2 Primauté de la géométrie

De fait, l'algèbre cartésienne n'a pas de véritable indépendance propre. Elle est soumise à la géométrie, sans doute parce que pour Descartes le nombre réel n'a d'origine que géométrique (les lignes) comme nous essaierons de l'expliquer au chapitre IV § 3.

Les seuls problèmes algébriques traités par Descartes proviennent tous de problèmes géométriques et même au niveau des notations cela se sent bien (pas d'exposants fractionnaires, x.x au lieu de x^2, etc). Les problèmes de combinatoire algébrique lui échappent et il a tendance à les qualifier de puérils. Le but de l'algèbre est sans conteste de fournir clairement et sans peine les constructions géométriques à tel point qu'il omet souvent les démonstrations. Très souvent, les propriétés géométriques des courbes passent le calcul algébrique et on a l'impression que les équations algébriques ne sont là que pour fournir une caution quant à la possibilité de construction effective de la courbe.

Naturellement, la théorie des équations algébriques va acquérir son indépendance propre, en un sens comme cela se passe déjà chez Fermat (Ad Locos, qui ne sera publié qu'en 1679), parce que de nombreux mathématiciens partant de problèmes certes géométriques s'apercevront à la longue et par la pratique, du caractère artificiel de certaines références géométriques. Cela fut assez long, d'autant que la Géométrie d'abord publiée en français ne devint accessible en latin (langue scientifique internationale au XVIIème siècle) qu'en 1649 grâce à la traduction de van Schooten.

Il est tout aussi important de noter qu'en un sens également la Géométrie se trouve limitée chez Descartes par l'utilisation de l'Algèbre. On lira avec profit le Document n° 8 dans lequel Descartes décrit un appareil pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données (afin de résoudre le problème de la duplication du cube (cf. Chapitre I § 3.6) et où il classifie les courbes *"reçues en la Géométrie"*.

Cette lecture permettra de mieux comprendre la discussion suivante dans la Géométrie par laquelle Descartes se limite à la considération des courbes algébriques ($P(x,y) = 0$ où P est un polynôme à deux variables et où l'on peut localement calculer et construire explicitement y) et élimine en fait les courbes transcendantes (comme la spirale d'Archimède et autres "courbes mécaniques"). S'il y a progrès en ce sens que bien des courbes considérées auparavant comme incommodes trouvent droit de cité et seront systématiquement étudiées par la méthode cartésienne, il y a aussi une limitation contraire à la pulsion logique même de la géométrie analytique.

Mesme il eſt a propos de remarquer qu'il y a grande difference, entre cete façon de trouuer plusieurs poins | pour tracer vne ligne courbe, & celle dont on ſe ſert pour la Spirale & ſes ſemblables : car, par cete derniere, on ne trouue pas indifferemment tous les poins de la ligne qu'on cherche, mais ſeulement ceux qui peuuent eſtre determinés par quelque meſure plus ſimple que celle qui eſt requiſe pour la compoſer; & ainſi, a proprement parler, on ne trouue pas vn de ſes poins, c'eſt a dire pas vn de ceux qui luy ſont tellement propres qu'ils ne puiſſent eſtre troués que par elle. Au lieu qu'il n'y a aucun point, dans les lignes qui ſeruent a la queſtion propoſée, qui ne ſe puiſſe rencontrer entre ceux qui ſe determinent par la façon tantoſt expliquée. Et pource que cete façon de trouuer vne ligne courbe, en trouuant indifferemment plusieurs de ſes poins, ne s'eſtend qu'a celles qui peuuent auſſy eſtre deſcrites par vn mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie.

Et on n'en doit pas reietter non plus celle où on ſe ſert d'vn fil, ou d'vne chorde repliée, pour determiner l'eſgalité ou la difference de deux ou pluſieurs lignes droites qui peuuent eſtre tirées, de chaſque point de la courbe qu'on cherche, a certains autres poins, ou ſur certaines autres lignes, a certains angles : ainſi que nous auons fait en la Dioptrique pour expliquer l'Ellipſe & l'Hyperbole. Car, encore qu'on n'y puiſſe receuoir aucunes lignes qui ſemblent a des chordes, c'eſt a dire qui deuienent tantoſt droites & tantoſt courbes, a cauſe que, la proportion qui eſt entre les droites & les courbes n'eſtant pas connuë & meſme, ie croy, ne le pouuant eſtre par les hommes, on ne pourroit rien conclure de là qui | fuſt exact & aſſuré; toutefois, a cauſe qu'on ne ſe ſert de chordes, en ces conſtructions, que pour determiner des lignes droites dont on connoiſt parfaitement la longeur, cela ne doit point faire qu'on les reiette.

Or, de cela ſeul qu'on ſçait le rapport qu'ont tous les poins d'vne ligne courbe a tous ceux d'vne ligne droite, en la façon que i'ay expliquée, il eſt ayſé de trouuer auſſy le rapport qu'ils ont a tous les autres poins & lignes données; &, en ſuite, de connoiſtre les diametres, les aiſſieux, les centres, & autres lignes ou poins a qui chaſque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus ſimple, qu'aux autres; & ainſi, d'imaginer diuers moyens pour les deſcrire, & d'en choiſir les plus faciles

Et pourtant, Descartes forme l'espoir de clore la Géométrie (Lettre à Beeckman du 26 mars 1619). Epistémologiquement, il a raison en ce qui concerne la Géométrie telle qu'issue des Grecs. Mais en dehors des fondements mêmes de la Géométrie, des diverses géométries, le thème inauguré par Descartes devait déboucher sur la Géométrie Algébrique, qui s'épanouit dans les années 70 de notre siècle.

7. ALGEBRE ET THEORIE DES EQUATIONS JUSQU'A GAUSS, ABEL ET GALOIS

7.1 L'état des choses au temps de Descartes

Afin de mieux faire comprendre les avatars ultérieurs de la notion de nombre, il nous faut parcourir rapidement l'histoire des équations. Nous n'entrerons dans aucun détail mathématique, car cela sortirait de notre propos.

On sait que les Italiens (Cardan, Ferrari, Scipione del Ferro, Tartaglia, etc) ont réussi à obtenir un procédé pour calculer les racines d'une équation du 3ème degré et du 4ème degré. Le récit de ces découvertes tient de la foire d'empoigne à cause des revendications d'antériorité. Tartaglia ira jusqu'à mettre en vers la méthode utilisée pour trouver la racine de $x^3+px = q$ (p,q positifs) [*"Quando che'l cubo con le cose appresso..."*].

Ce faisant, ces mathématiciens se trouvent confrontés aux nombres négatifs et aux nombres complexes. Face à ces nouvelles entités, l'attitude est surtout pragmatique. On ne leur reconnaît pas encore de statut en tant que nombre, mais on en utilise les propriétés formelles.

Stevin est le premier à admettre le caractère légitime des nombres négatifs, mais il refuse les nombres complexes. Au contraire, Albert Girard, dans son ouvrage L'Invention nouvelle en l'algèbre (1629), dit :

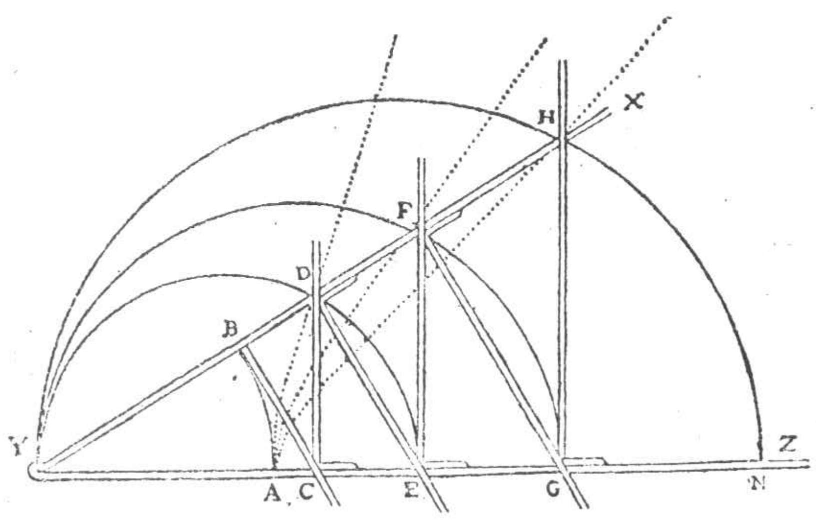
> *"On pourrait se demander : A quoi servent ces solutions impossibles ? Je réponds : à trois choses, d'une part, pour la certitude des règles générales, d'autre part, pour leur utilité, et enfin, parce qu'il n'existe pas d'autre solution".*

Les nombres "imaginaires", le vocabulaire est de Descartes, seront difficilement admis avant la fin du XVIIIème siècle et connaîtront les mêmes avatars que les irrationnels. Ne nous y attardons pas.

Dans sa Géométrie (1637), au Livre III, Descartes expose la théorie des équations algébriques. Il est symptomatique de noter que le Livre III qui va être consacré aux Equations commence en fait par des considérations géométriques. Ceci est bien conforme aux conclusions du § 6, à savoir que le géométrisme prédomine en fait chez Descartes. Pour bien saisir le sens du texte cartésien, on se reportera au Document n° 8 où est exposée la conception mécanique de l'instrument XYZ.

Encore que toutes les lignes courbes, qui peuuent eſtre deſcrites par quelque mouuement regulier, doiuent eſtre receuës en la Geometrie, ce n'eſt pas a dire qu'il ſoit permis de ſe ſeruir indifferemment de la premiere qui ſe rencontre, pour la conſtruction de chaſque | probleſme; mais il faut auoir ſoin de choiſir touſiours la plus ſimple par laquelle il ſoit poſſible de le reſoudre. Et meſme, il eſt a remarquer que, par les plus ſimples, on ne doit pas ſeulement entendre celles qui peuuent le plus ayſement eſtre deſcrites, ny celles qui rendent la conſtruction ou la demonſtration du Probleſme propoſé plus facile, mais principalement celles qui ſont du plus ſimple genre qui puiſſe ſeruir a determiner la quantité qui eſt cherchée.

Comme, par exemple, ie ne croy pas qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouuer autant de moyennes proportionelles qu'on veut, ny dont la demonſtration ſoit plus euidente, que d'y employer les lignes courbes qui ſe deſcriuent par l'inſtrument XYZ cy deſſus expliqué. Car, voulant trouuer deux moyennes proportionelles entre YA & YE, il ne faut que deſcrire vn cercle dont le diametre ſoit YE :& pource que ce cercle couppe la courbe AD au point



D, YD eſt l'vne des moyennes proportionelles cherchées. Dont la demonſtration ſe voit a l'œil, par la ſeule application de cet inſtrument ſur là ligne YD : car, comme YA, ou YB qui lui eſt eſgale, eſt a YC, ainſi YC eſt a YD, & YD a YE.

Tout de meſme, pour trouuer quatre moyennes proportionelles entre YA & YG, ou pour en trouuer ſix entre YA & YN, il ne faut que tracer le cercle YFG, qui, couppant AF au point F, determine la ligne droite YF, qui eſt l'vne de ces quatre proportionelles ; ou YHN, qui, couppant AH au point H, determine YH, l'vne des ſix : & ainſi des autres.

Mais, pource que la ligne courbe AD eſt du ſecond genre, & qu'on peut trouuer deux moyennes proportionelles par les ſections coniques, qui ſont du premier; & auſſy pource qu'on peut trouuer quatre ou ſix moyennes proportionelles, par des lignes qui ne ſont pas de genres ſi composés que ſont AF & AH, ce ſeroit vne faute en Geometrie que de les y employer. Et c'eſt vne faute auſſy, d'autre coſté, de ſe trauailler inutilement a vouloir conſtruire quelque probleſme par vn genre de ligne plus ſimple que ſa nature ne permet.

C'est alors bien pour éviter les deux fautes mentionnées que Descartes se doit de "*dire quelque chose en général de la nature des Equations*".

Le premier énoncé est le suivant :

> "*En chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines... Mais souvent il arrive que quelques-unes de ces racines sont fausses ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ fait*
>
> $$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$
>
> *pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir quatre vraies, qui sont 2, 3, 4 et une fausse qui est 5* ".

Notons pour la suite, comme nous allons prendre le texte de Descartes original que x^2 se note xx et = se note ∞ . Essentielle est l'assertion suivante de factorisation. Avec elle débute l'algèbre polynômiale moderne.

Et on voit euidemment, de cecy, que la ſomme d'vne Equation qui contient pluſieurs racines, peut touſiours eſtre diuiſée par un binóme compoſé de la quantité inconnuë, moins la valeur de l'vne des vrayes racines, laquelle que ce ſoit; ou plus la valeur de l'vne des fauſſes . Au moyen de quoy on diminue d'autant ſes dimenſions .

Et reciproquement, que ſi la ſomme d'vne Equation ne peut eſtre diuiſée par vn binóme compoſé de la quantité inconnue, + ou — quelque autre quantité, cela teſmoigne que cete autre quantité n'eſt la valeur d'aucune de ſes racines. Comme : cete derniere

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0,$$

peut bien eſtre diuiſée par $x - 2$, & par $x - 3$, & par $x - 4$, & par $x + 5$; mais non point par x + ou — aucune autre quantité : ce qui monſtre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4 & 5.

Sans démonstration, Descartes enchaîne sur ce qui est devenu sa fameuse règle d'alternance.

On connoiſt auſſy, de cecy, combien il peut y auoir de vrayes racines, & combien de fauſſes, en chaſque Equation. A ſçauoir : il y en peut auoir autant de vrayes que les ſignes + & — s'y trouuent de fois eſtre changés; & autant de fauſſes qu'il s'y trouue de fois deux ſignes +, ou deux ſignes —, qui s'entreſuiuent (*). Comme, en la derniere, a cauſe qu'aprés $+x^4$ il y a $-4x^3$, qui eſt vn changement du ſigne + en —; & aprés $-19xx$ il y a $+106x$, & aprés $+106x$ il y a -120, qui ſont encore deux autres changemens, on connoiſt qu'il y a trois vrayes racines; & vne fauſſe, a cauſe que les deux ſignes —, de $4x^3$ & $19xx$, s'entreſuiuent.

Suivent quelques calculs qui reviennent à trouver l'équation déduite d'une équation quand on ajoute ou retranche aux racines une même quantité. Ceci est utilisé pour éliminer le second terme d'une équation (rangée par puissances décroissantes) et faire *"que toutes les fausses racines d'une équation deviennent vraies sans que les vraies deviennent fausses"*. De même, on procède au cas de la multiplication de toutes les racines.

Ce qui peut ſeruir pour reduire, a des nombres entiers & rationaux, les fractions & ſouuent auſſy les nombres ſours, qui ſe trouuent dans les termes des Equations. Comme, ſi on a

$$x^3 - \sqrt{3}\,xx + \tfrac{26}{27}x - \tfrac{8}{27\sqrt{3}} \infty\ 0,$$

& qu'on veuille en auoir vne autre en ſa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut ſuppoſer $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connuë du ſecond terme, qui eſt auſſy $\sqrt{3}$; & par ſon quarré, qui eſt 3, celle du troiſieſme, qui eſt $\frac{26}{27}$; & par ſon cube, qui eſt $3\sqrt{3}$, celle du dernier, qui eſt $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. Ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \tfrac{26}{9}x - \tfrac{8}{9} \infty\ 0.$$

Puis, ſi on en veut auoir encore vne autre en la place de celle cy, dont les quantités connuës ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut ſuppoſer $z \infty 3y$, &, multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouue :

$$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty\ 0,$$

où les racines eſtant 2, 3 & 4, on connoiſt de là que celles de l'autre d'auparauant | eſtoient $\frac{2}{3}$, 1 & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere eſtoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

Descartes est bien conscient que sa règle initiale nécessite le recours aux nombres complexes, mais n'éprouve guère la volonté d'approfondir le raisonnement.

Cete operation peut auſſy ſeruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'vn des termes de l'Equation eſgale a quelque autre donnée. Comme, ſi, ayant

$$x^3 \quad - bbx + c^3 \infty 0,$$

on veut auoir en ſa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë du terme qui occupe la troiſieſme place, a ſçauoir celle qui eſt icy bb, ſoit $3aa$, il faut ſuppoſer $y \infty x \sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, puis eſcrire

$$y^3 \quad - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$$

Au reſte, tant les vrayes racines que les fauſſes ne ſont pas touſiours reelles, mais quelquefois ſeulement imaginaires : c'eſt a dire qu'on peut bien touſiours en imaginer autant que i'ay dit en chaſque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui correſponde a celles qu'on imagine. Comme, encore qu'on en puiſſe imaginer trois en celle cy :

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0,$$

il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui eſt 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie, en la façon que ie viens d'expliquer, on ne ſçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

Descartes donne ensuite, sur un exemple, le moyen pour trouver les racines rationnelles d'une équation à coefficients rationnels. Il passe ensuite à quelques considérations sur l'équation bicarrée qu'il résoud par factorisation en polynômes de second degré par la méthode des coefficients indéterminés.

Tous les résultats avancés par Descartes sont déjà plus ou moins connus, la règle d'alternance étant exceptée.

Mais Descartes tient à rester dans le domaine de la Géométrie et la fin du Livre III de la Géométrie s'occupe de la construction géométrique des racines par des intersections de courbes. La discussion est fort intéressante, mais reste secondaire pour notre propos ; elle débouche sur les raisons mathématiquement, encore imprécises, qui font qu'un tel problème puisse se résoudre à la règle ou au compas, ou bien exige les sections coniques ou d'autres courbes enfin (division en problèmes plans et solides).

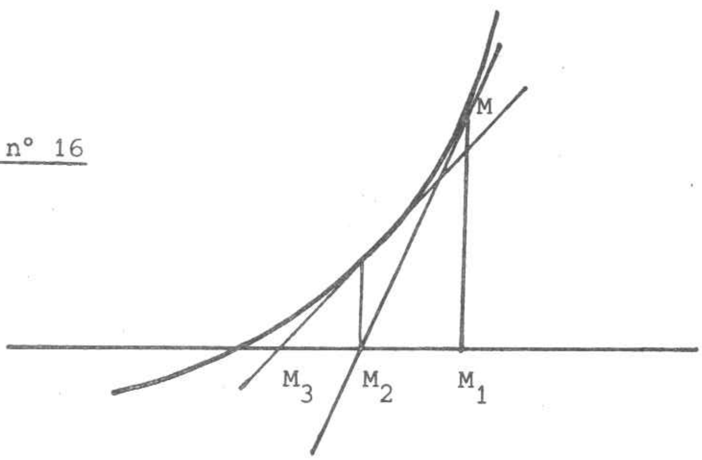
Tout mathématicien un peu pédagogue sera ravi par la phrase par laquelle Descartes justifie l'absence de démonstration concernant ses règles sur les équations.

Au reſte, i'ay omis icy les demonſtrations de la pluſpart de ce que i'ay dit, a cauſe qu'elles m'ont ſemblé ſi faciles que, pouruû que vous preniés la peine d'examiner methodiquement ſi i'ay failly, elles ſe preſenteront a vous d'elles meſme : & il ſera plus vtile de les apprendre en cete façon qu'en les liſant.

7.2 L'empirisme anglosaxon

Les Anglosaxons ne partageront pas les idées de Descartes éliminant les considérations numériques pour le calcul approché des racines d'une équation. Harriott, Oughtred et finalement Newton fourniront diverses méthodes. Ce dernier décrira ce qui est connu sous le nom de méthode d'approximation de Newton et qu'un dessin géométrique explique mieux que des mots (cf. Figure n° 16).

Figure n° 16



Il serait d'ailleurs fort instructif de faire l'histoire des méthodes numériques et d'essayer de déterminer les blocages théoriques concernant ces méthodes, blocages dûs à la personnalité dominante d'un mathématicien, ou à l'incapacité théorique d'expliquer le succès de l'algorithme.

7.3 Développements ultérieurs sur les équations

Du point de vue algébrique, l'idée d'une possibilité de décomposition d'une équation à coefficients réels en facteurs du premier ou du second degré à coefficients réels est mal perçue, sinon niée par Leibniz par exemple.

C'est Euler qui l'affirme en 1742 dans une lettre à Nicholas Bernoulli, mais les démonstrations fournies sont incomplètes, de même celles proposées par J. d'Alembert ou Lagrange. La première démonstration satisfaisante est due à Gauss en 1799. Son but est d'assurer l'existence d'au moins une racine, non de la calculer. Pour ce faire, en écrivant $P(x+iy) = a(x,y) + ib(x,y)$ et en utilisant la représentation géométrique du plan complexe pour voir qu'il y a une racine, il faut établir que la courbe $a(x,y) = 0$ intersecte la courbe $b(x,y) = 0$. C'est ce qu'il fait par une sorte d'argument de connexité.

Gauss, tout au long de sa vie, donnera plusieurs démonstrations de ce résultat, connu en France sous le nom de théorème de d'Alembert et sous le nom de "fundamental theorem of algebra" dans les pays anglo-saxons (cf. Document n° 6). Les démonstrations les plus élégantes sont basées sur la théorie des fonctions d'une variable complexe que Cauchy développait justement vers cette époque.

Le XVIIIème siècle s'occupera aussi beaucoup à résoudre les équations par des radicaux, c'est-à-dire exprimer toute racine d'une équation générale au moyen de radicaux portant sur les coefficients. Ce sera l'objet d'un monumental travail de Lagrange, <u>Réflexions sur la résolution algébrique des équations</u> de 1771. Au terme de son étude, Lagrange en venait à conjecturer que la résolution par radicaux d'une équation de degré supérieur à 4 était impossible. C'est Abel qui fournit la démonstration de cette conjecture en 1826 (Journ. für Math., tome 1 (1826) p. 65-84). Abel essaya d'ailleurs de caractériser celles des équations qui peuvent se résoudre par radicaux. C'est Evariste Galois qui sut donner les conditions dans des papiers sur lesquels le malheur s'acharna (Cauchy perdit le manuscrit, un autre arriva à Fourier mais ce dernier mourut peu de temps après, enfin Poisson ne parvint pas à comprendre le texte et demanda une refonte). Cet article "<u>Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux</u>" de 1831 ne parut finalement qu'en 1846 sous les auspices de Liouville dans son Journal de Mathématiques (tome II, p. 381-444) et les idées ne furent complètement élucidées que par Jordan vers 1870 dans son <u>Traité des Substitutions</u>.

Une citation d'Evariste Galois témoigne de l'établissement de nouvelles relations réciproques de l'Algèbre et de la Géométrie. Il s'agit des relations de la pratique opératoire de ces disciplines et non pas encore des relations sur les fondements logiques comparés des deux disciplines (Ce dernier point, la si difficile "naissance" des nombres réels, faisant l'objet du chapitre V).

> *"Les longs calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des Mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donnée à la science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires, mais de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont su imprimer à leurs recherches, et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.*
> *Il est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre, n'a pas d'autre but.*
> *Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance, on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails.*
> *Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas), ont leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus le temps ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues. Je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour, sans cela, tout serait épuisé."*
> (E. Galois, Préface à Deux Mémoires d'Analyse pure 1831).

Justement, au § 6, nous avons étudié les origines de ce retournement spectaculaire des relations entre l'algèbre et la géométrie. Terminons en disant que Galois a définitivement réglé le vieux problème de déterminer toutes les constructions géométriques réalisables à l'aide seulement de la règle et du compas (cf. Chap. VI).

QUATRIEME CHAPITRE

ALGEBRISATION DES GRANDEURS CONTINUES : LE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

"A Mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns"

G.H. HARDY

A Mathematician's Apology

Les notions d'infini et de continuité se trouvent à l'aube du XVIIème siècle au mieux dans l'état où nous les avions laissées après Eudoxe et Archimède. Il va falloir deux siècles pour opérer un changement complet de la scène mathématique par l'intervention du calcul sur des quantités infiniment petites, changement immédiatement pris en compte par des philosophes comme Descartes, Spinoza et Leibniz, mais les deux noms extrêmes ne sont-ils pas d'extraordinaires créateurs de mathématiques ?

Certes, la Scholastique du Moyen-Age a longuement disserté, après Aristote et Saint Thomas d'Aquin, sur l'infini. On trouverait sans peine des traces de certains paradoxes mathématiques sur l'infini, tels que ceux recensés par B. Bolzano, G. Cantor ou B. Russel, mais sous une forme théologique, dans les définitions et controverses sur Dieu et ses attributs. Il serait peut-être fascinant de lire certains textes métaphysiques des Scholastiques à partir d'une telle grille, non pour apprendre quelque chose mathématiquement parlant sur l'infini, mais pour tester certains schémas logiques chez ces mêmes Scholastiques.

Nous irons directement à la révolution intellectuelle consciemment élaborée par Galilée qui fait de la mathématique le langage même de la Science. Nous parcourerons ensuite rapidement le développement du calcul infinitésimal et intégral. Cette algébrisation des grandeurs continues ne nous concerne pas en tant que telle car, aussi fabuleux que cela puisse paraître, tant historiquement qu'épistémologiquement, la démarche en question n'a pas aidé à fonder le statut des nombres réels ni celui de l'espace euclidien.

1. LA MATHEMATIQUE COMME LANGAGE CHEZ GALILEE

Les bouleversements intellectuels et scientifiques apportés par Copernic et Kepler, les bouleversements religieux de la Réforme, les bouleversements tant économiques que sociologiques de la conquête de l'Amérique et bientôt de bien d'autres régions par les Européens modifient le rapport de la Science et de la Philosophie et plus encore le regard que l'homme porte sur son rôle.

C'est par une phrase qui claque comme une bannière de ralliement que Galilée ouvre le siècle :

"La nature est écrite en langue mathématique".

Pour pouvoir déchiffrer le grand livre de l'Univers offert à nos yeux, il faut parler en *"triangles, cercles, et autres figures géométriques"*, car sans cela *"on erre en vain dans un sombre labyrinthe"*.

Phrase bien téméraire en ce début de siècle, car les résultats scientifiques généraux sont plus que rares. Oui, mais depuis plus d'un siècle les artisans européens (et c'est tout aussi vrai des artisans chinois) ont accumulé une grande masse de résultats techniques. Cette fin du XVème siècle est le triomphe des engrenages, des instruments nouveaux en navigation, dans les métiers à tisser, etc. On n'en est pas encore aux "automates" mondains du XVIIème siècle. Une image romanesque saisissante de cette époque est donnée dans l'Oeuvre au Noir de Marguerite Yourcenar :

> *"Les genoux pliés, penchés côte à côte sur un tas de ferraille, ils n'étaient jamais las de s'entraider à suspendre un contrepoids, à ajuster un levier, à monter et démonter des roues s'engrenant l'une dans l'autre ; des discussions sans fin s'établissaient autour de l'emplacement d'un boulon ou du graissage d'une glissière".*

C'est du XVIème siècle que date l'expression ingénieur, associée à ingénieux et à génie, qui subsiste dans Génie civil, etc.

Sur le plan épistémologique général, le grand apport de Galilée, et de Descartes, c'est d'éliminer dans l'étude d'un phénomène tout ce qui est secondaire par rapport à l'unique propriété étudiée. Cette analyse des choses, fort éloignée de l'analyse métaphysique des Causes Premières, qui s'épanouira philosophiquement dans les Règles de la Méthode de Descartes (cf. Chap. III), va effectivement permettre de dégager un tout petit nombre de concepts : par exemple, la force au sens quasiment vectoriel, l'accélération, la masse ou la pesanteur. En plus, le langage de la nature est simple et doit s'énoncer par des formules quantitatives. Il est assez fantastique de penser que très peu d'expériences, et des expériences assez faciles, suffiront à dégager ces concepts essentiels sur lesquels le XVIIème siècle travaillera. Une autre capitalisation d'expériences autrement délicates sera nécessaire au XIXème siècle. Peut-être les expériences galiléennes classiques n'ont-elles été qu'imaginées et non réalisées, tant le résultat ne faisait aucun doute : *"Io non ha fatto tale experienza, ma inclino a credere che una palla d'archibuso o d'artiglieria, cadendo da un'altezza quanto si voglia grande..."* Discorsi, giovana quarta).

Le second apport est cette considération des phénomènes naturels, sous l'apparence changeante desquels la science (ἐπιστήμη) devra dégager les règles de grammaire, les lois, c'est-à-dire les formules mathématiques, qui en un sens participent de l'être (τὸ ὄν). Le platonisme de Galilée n'étonne plus, envisagé sous cet angle.

Lorsque Galilée publie le "Dialogo dei massimi sistemi" en 1632 et plus encore lorsqu'il fait passer en Hollande le manuscrit du "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali" (1638), la formule de sa jeunesse n'est plus une bravade : elle est justifiée par des découvertes fondamentales.

O certes, ces nouvelles idées ne s'imposent pas d'un coup et on connaît trop les douloureuses humiliations subies par Galilée sous la férule des inquisiteurs du Saint-Office. Les fervents d'Aristote sont devenus répressifs.

Sur le plan des mathématiques, et Descartes en sera le plus net protagoniste, on tendra à dégager les notions les plus simples et les plus claires. Si la voie axiomatique reste la plus en faveur sur le plan des principes, l'accent mis sur les formules et les rapports quantitatifs développe une algébrisation croissante : que ce soit dans la manipulation même des équations, déjà bien engagée par les débuts de la Renaissance Italienne et Viète, que ce soit en Géométrie (cf. Chap. III § 6 l'algébrisation de la Géométrie par Descartes) ou que ce soit en combinatoire et en calcul infinitésimal (notamment avec Leibniz). Plus que la notion de nombre réel, ce sera la notion algébrique de relation, de fonction, qui poindra.

Mais le XVIIème siècle est avant tout le siècle de la Mécanique dont l'impact mathématique essentiel est d'obliger à préciser la notion de continu et de limite (vitesse, accélération). Commençons donc par les premiers essais, le calcul des indivisibles, qui débouchera sur le calcul infinitésimal à la fin du siècle.

2. LES INDIVISIBLES

Depuis Archimède, on peut dire que rien de bien nouveau n'a été fait pour calculer des longueurs, des aires ou des volumes lorsque naît le XVIIème siècle.

2.1 Le principe de continuité de Nicolas de Cuse

Le premier ouvrage notable est celui de Képler : Stereometria Doliorum qui paraît en 1615. Dans cet ouvrage, on fait sciemment fi de la méthode de réduction à l'absurde qui caractérise la méthode d'exhaustion et l'on utilise sans vergogne le passage à la limite. Ainsi, on identifie la circonférence d'un cercle à un polygone à un nombre infiniment grand de côtés infiniment courts. A partir du périmètre du cercle ($2\pi R$) et du rapport entre l'aire d'un polygone inscrit à son périmètre, on déduit ipso facto l'aire du cercle πR^2 .

Connaissant le talent de Képler, on peut s'étonner d'une telle désinvolture et surtout chercher à comprendre le principe sous-jacent. Il semble bien que ce soit un principe de changement continu, d'origine géométrique peut-être.

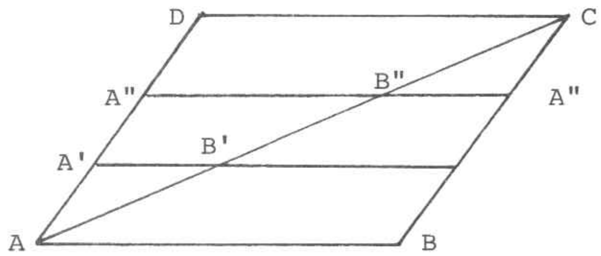
Ainsi, dans son Astronomia per optica (1604), Képler note que les différentes sections coniques s'obtiennent en faisant varier "continûment" l'inclinaison du plan sécant. Autre analogie : lorsque les deux foyers d'une ellipse se rapprochent jusqu'à se confondre, on obtient un cercle ; et deux droites lorsqu'il s'agit d'une hyperbole. Cette "transformation continue" d'une figure géométrique en une autre s'avère porteuse de résultats et se retrouve chez un géomètre expert comme Pascal.

Le principe de continuité est clairement énoncé dans l'oeuvre d'un philosophe doublé d'un érudit scientifique et de surcroît cardinal, Nicolas de Cuse au XVème siècle. Il part d'une conception essentiellement dialectique de toute pensée rationnelle, laquelle fait assimiler l'infiniment grand à l'infiniment petit. Une grandeur "continue" qui évolue entre une grandeur A et une grandeur C prend au moins une fois toute valeur intermédiaire. Cette coïncidence permet d'attribuer à la grandeur intermédiaire des propriétés de rapport possédées par les grandeurs A ou C. Il s'agit d'un principe plus philosophique que mathématique (De mathematica perfectione 1458). Il y aurait peut-être intérêt à lire certains textes analogues (par exemple chez Campanus, dans sa traduction si influente d'Euclide au XIIIème siècle) et suivre ce principe de continuité au Moyen-Age, ce que n'a pas fait l'auteur de ces lignes.

2.2 Les indivisibles de Cavalieri

Cavalieri, poussé par son maître Galilée, publie en 1635 une "Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quodam Ratione promota" (Géométrie des continus indivisibles suivant une nouvelle méthode). Il n'accepte pas la simplification képlérienne, mais définit une surface comme formée d'objets (segments de droite) ayant une seule dimension, de même un volume comme formé de surfaces planes (une dimension en moins). Ce sont les "indivisibles" qui ne sont pas des infiniment petits, mais que Cavalieri ne définit nulle part. *"Ainsi les plans constituent un volume comme les pages d'un livre forment ce livre"*. Cavalieri donne l'exemple explicatif suivant (cf. Figure n° 17).

Figure n° 17



L'aire du parallélogramme ABCD vaut deux fois celle du triangle ABC, car lorsque AA' = CA", on a A'B' = A"B" et donc les triangles ABC et ADC sont "composés" d'éléments égaux, donc ont une aire égale.

J. F. Montluca, le célèbre historien des mathématiques, dira :

> *"On ne peut disconvenir que Cavalieri s'énonce d'une manière un peu dure pour des oreilles accoutumées à l'expression géométrique".*

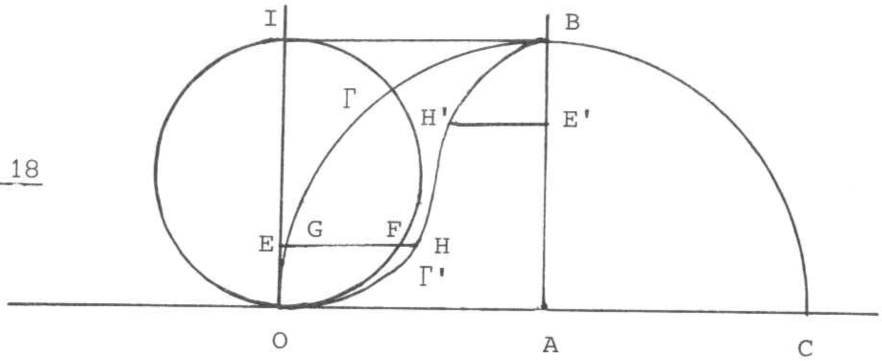
Cependant, il faut bien remarquer, ce qu'on lui reprochera étourdiment, que Cavalieri n'empile pas des petites tranches, ou tranches infinitésimales, ayant la même dimension que la surface à mesurer, pour ensuite passer à la limite. C'est a priori que la surface possède les segments de droite comme éléments constitutifs et on déduit l'égalité de deux aires de l'égalité des éléments constitutifs , non pas d'un raisonnement par passage à la limite.

Une application célèbre, le premier théorème du Livre VII de son ouvrage, établit que :

> *"Les figures planes, placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques, parallèles aux premières, découpent des segments égaux, sont égales".*

C'est ce résultat que Roberval utilisera pour carrer l'arche de cycloïde en 1634 (Traité des indivisibles).

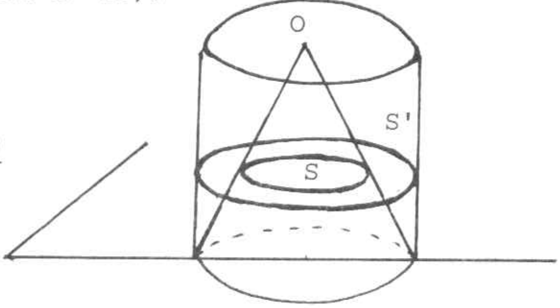
Figure n° 18



On sait qu'une arche de cycloïde (OΓBC sur la figure n° 18) est le lieu d'un point fixe sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite OA (*"Ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour achevé"* dira Pascal dans son Histoire de la Roulette (appelée autrement trochoïde ou cycloïde)). Roberval porte une longueur GH = EF à partir du G de la cycloïde, parallèlement à l'axe OA et engendre la courbe OΓ'B . Par symétrie sur OFI, symétrie répercutée de EH à E'H' , le calcul prouve que la courbe lieu de H divise le rectangle OABI en deux parties égales, si l'on applique le théorème de Cavalieri. Selon ce même principe, l'aire incluse entre les courbes Γ et Γ' égale l'aire du demi-cercle OFI. Bref, l'aire de la demi-arche de cycloïde vaut en additionnant : $\frac{\pi R.2R}{2} + \frac{\pi R^2}{2}$. On calcule donc que l'aire de l'arche OΓBC entière vaut trois fois l'aire du cercle de base.

Cette "règle commune" développée par Cavalieri s'applique pour des indivisibles parallèles et vaut aussi pour l'espace. Si les sections par des plans parallèles de deux solides sont toujours dans un même rapport, ainsi en est-il des volumes des solides. La difficulté d'utilisation de la méthode de Cavalieri réside dans la décomposition de deux figures en "éléments homologues" et formant un rapport constant. En analysant un peu mieux, Cavalieri retrouve ainsi le volume d'un cône comme le tiers de celui du cylindre correspondant (cf. Figure n° 19).

Figure n° 19



Qu'en est-il de cette analyse plus précise de Cavalieri. De fait, les sections planes du cylindre ont toutes la même aire, tandis que l'aire des sections planes du cône varie de façon croissante depuis l'aire du cercle de base jusqu'à zéro. Lorsque la variation est linéaire, disons de 0 à 1, le rapport correspondant est $\frac{1}{2}$ (cf. Figure n° 20 ; aire de ABC par rapport à celle de BB'C'C). En termes modernes : $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

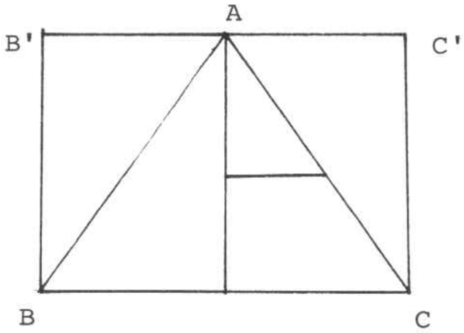


Figure n° 20

Lorsque la variation est géométrique, c'est-à-dire comme le carré de la variable, ce qui est le cas des sections du cône, disons encore de 0 à 1, le rapport correspondant est $\frac{1}{3}$. Soit en termes modernes : $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Cavalieri généralisera ceci à $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (n entier, $1 \leqslant n \leqslant 9$) et le publiera dans Centuria di varii problemi (1646). Muni de ce renseignement algébrique, bien qu'obtenu de manière purement géométrique, on peut effectivement en déduire le volume du cône comme le tiers de celui du cylindre ou encore retrouver l'aire d'un segment de parabole précédemment obtenue par Archimède (cf. Chap. II § 3.2).

> *("Si parallelogrammum, et triangulum fuerint in eadem basi, et circa eudem axim, vel diametrum cum parabola, parallelogrammum erit parabolae sesquialterum, triangulum autem erit eiusdem parabolae subsesquitertium" Theorema I prop I , Geometrica continuorum).*

Cavalieri passera astucieusement à des résultats plus originaux en comparant des indivisibles homologues, mais non de même nature (segment de droite à des arcs de cercle), ramenant ainsi la rectification de la spirale à celle de la parabole. Ceci sera repris par Pascal (Dimension des lignes courbes, rapports entre la spirale et la parabole), mais "à la manière des Anciens", c'est-à-dire en utilisant la méthode d'exhaustion laquelle exige comme souvent une réelle ingéniosité géométrique. D'ailleurs, dit Pascal,

> *"je voulus chercher, comme si personne n'y avait pensé ; et sans m'arrêter ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celle des anciens, afin que la chose put être ferme et sans dispute".*

C'est bien dire que les méthodes de Cavalieri laissaient un doute profond, doute fortifié par l'obscurité de style de Cavalieri et par une mécompréhension fondamentale de la nature même de ses indivisibles, envisagés comme des infiniment petits.

2.3 Les méthodes utilisant des procédés limites ou des infiniment petits

L'insuccès relatif de Cavalieri tient à ce que son point de vue ne pouvait déboucher sur un véritable calcul algébrique, dégagé de toute géométrie, et pouvant prendre en compte simultanément les quatre problèmes suivants, que nous savons être de même nature aujourd'hui :

(a) rectification des courbes et quadrature des surfaces, etc,
(b) détermination des maximas et minimas,
(c) détermination des tangentes et normales,
(d) calcul des vitesses et des accélérations d'un mouvement et recomposition de ce même mouvement à partir de la vitesse par exemple.

Les trois derniers problèmes ont une consonance extra-mathématique et ce n'est pas pour rien que Fermat part de considérations physiques pour étudier (b) (Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam en 1637), que Descartes part de l'optique où sa découverte des lois de la réfraction impose la résolution de (c) (La Géométrie et la Dioptrique datent de 1637) et enfin que le créateur de la dynamique, Galilée, s'intéresse à (d). Nous ne souhaitons pas étudier les contributions variées qui préparent techniquement les résultats de Newton et de Leibniz. Les oeuvres de Roberval (Traité des indivisibles 1634), de Fermat (opus cité 1637), de Descartes (La Géométrie 1637 Livre II), de Barrow (Lectiones Geometricae 1669), de Pascal (oeuvre déjà citée), de J. Wallis (Arithmetica Infinitorum 1655), de Grégoire de Saint Vincent (Opus Geometricum 1647), de J. Gregory enfin (Geometriae Pars Universalis 1668) sont les plus caractéristiques.

Toutes ces oeuvres sont basées sur la géométrie et non sur les grandeurs (On mesurera plus loin l'originalité de Leibniz à ce propos). Fermat, par exemple, introduit le fameux triangle caractéristique BD_1C_1 (cf. Figure n° 21) semblable au triangle TAB(d'ailleurs dans le cas particulier d'une parabole).

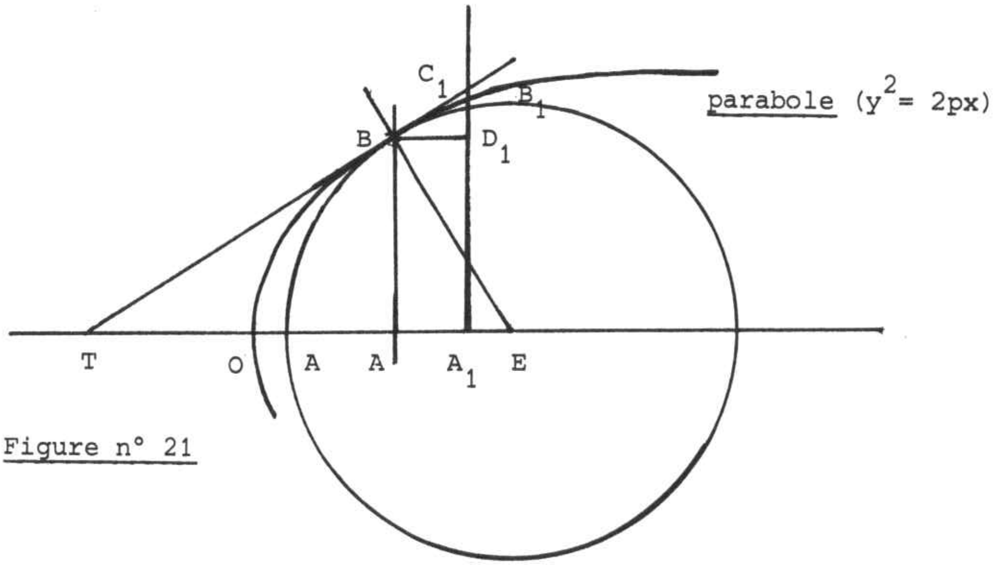


Figure n° 21

Fermat assimile C_1D_1 à B_1D_1 et crée un vocabulaire spécial pour cela, l'adégalité. Par similitude, on obtient facilement la formule donnant la sous-tangente AT.

$$AT = \frac{BD_1}{B_1A_1 - BA} BA$$

puis en divisant numérateur et dénominateur par BD_1 et faisant $BD_1 = 0$, ce qui est encore adégaliser ou "élision des homogènes", Fermat obtient la propriété de la sous-tangente d'une parabole ($AT = \frac{(BA)^2}{p}$ où p est le paramètre).

Le procédé de Descartes, au Livre II de sa Géométrie, et pour des courbes polynomiales, est nettement plus algébrique. Il revient à considérer un cercle osculateur à la parabole en B. En notations modernes, si O est l'origine, on cherche à déterminer E où EB est la normale en B à la parabole de sommet O. (équation $y^2 = 2px$). On calcule le rayon R du cercle de centre E passant par B avec OA = x et OE = z selon

$$R^2 = x^2 - 2(z-p)x + z^2 .$$

La parabole et le cercle se coupent a priori en quatre points, et par symétrie selon l'axe OA, il n'y a que deux abcisses à découvrir. L'équation devient :

$$X^2 - 2X(z-p) - (x^2 - 2(z-p)x) = 0$$

soit

$$\begin{aligned} X &= (z-p) \pm \sqrt{(z-p)^2 + x^2 - 2(z-p)x} \\ &= (z-p) \pm \sqrt{(z-p-x)^2} \end{aligned} .$$

Dès lors, si l'on ne regarde que la moitié de la parabole, plus les deux points d'intersection sont proches, moins il y a de différence entre les deux racines et si ces points *"sont tous deux points en un, c'est-à-dire si le* *cercle qui passe par B touche la courbe OB sans la couper"*, on doit avoir la nullité du discriminant et donc l'abcisse cherchée z = p+x , soit AE = p.

Certes, la méthode de Descartes est beaucoup moins discutable que celle de Fermat par élimination de l'adégalité, mais son principe par utilisation des équations est peu général. Descartes en tire avantage sur Fermat car sa méthode *"suit la plus sûre façon de démontrer qui puisse être, à savoir celle qu'on nomme a priori"*.

3. LE NOMBRE CHEZ DESCARTES ET GALILEE

Nous avons constaté la primauté du géométrique chez Descartes (cf. Chap. III § 6.2). Certes, Descartes sait bien qu'entre la ligne, la surface et le corps, le simple duquel tout découle est la ligne et que ces quantités ne sont pas vraiment distinctes l'une de l'autre (cf. Règle 14, Règles pour servir à la Direction de l'esprit). Certes, Descartes conçoit le nombre entier comme une notion innée. (*"Le nombre que nous considérons en général, sans faire réflexion sur aucune chose créée, n'est point hors de notre pensée"*). Cependant, le nombre réel, en particulier l'incommensurable, provient de la géométrie, de "l'étendue" dirait Descartes. Le nombre réel est la mesure de l'étendue ou de la durée, la mesure s'entendant au sens des proportions euclidiennes donc présupposant la division des grandeurs considérées, ce qui nous fait aussitôt sortir de l'arithmétique des entiers. On ne mesure que des dimensions, c'est-à-dire :

> *"Le mode et le rapport sous lequel un sujet quelconque est jugé mesurable, en sorte que non seulement la longueur, la largeur et la profondeur sont des dimensions du corps, mais la pesanteur est la dimension suivant laquelle les sujets sont pesés, la vitesse est la dimension du mouvement..."* Règle 14 .

Il s'agit donc de grandeurs comparables (ordre total) et divisibles, car c'est là ce qui est clair, distinct et ce qui est ordonné. Certes, *"au moyen d'une unité d'emprunt les grandeurs continues peuvent être ramenées à la pluralité, parfois tout entières et toujours au moins en partie"*, mais, et c'est là la recomposition ordonnée qui compte, *"la pluralité des unités peut ensuite être disposée dans un ordre tel que la difficulté qui était relative à la connaissance de la mesure, ne dépende plus enfin que de la considération de l'ordre"* (Règle 14).

Toutefois, l'image du nombre continu ne restera pas dans l'abstrait eudoxien, mais s'incarnera dans la ligne géométrique. Du point de vue des notations, il est symptomatique que dans les chaînes de comparaison des surfaces aux lignes, il note $\frac{a}{1} = \frac{a^2}{a}$. Bien entendu, tout ceci s'enracine dans la conception philosophique cartésienne sur laquelle nous ne souhaitons pas nous étendre.

Descartes n'insiste guère sur la notion de continuité, rejettant les discussions de distinction entre quantité et étendue dans le domaine des subtilités philosophiques méprisées.

Chez Galilée, si le langage euclidien des proportions (et non un langage numéricien) est le seul utilisé, l'impact de la géométrie est bien moindre. En outre, comme pour Nicole Oresme et l'Ecole des dynamiciens parisiens, Galilée en mécanicien met aussi à jour la notion de fonction ou plutôt de relations entre grandeurs. Il n'y a toujours pas de symbolisme, mais l'idée est là. (Par exemple, dans un ouvrage de jeunesse, le De motu gravium , on peut poser des questions du genre : "quelle est la proportion que suivront en ce qui concerne leurs vitesses, des mobiles, égaux en volume, mais inégaux en poids ?"). La notion de fonction passera au XVIIème siècle par l'intermédiaire de la représentation géométrique des courbes, et particulièrement des courbes nouvelles par rapport aux Anciens (cf. à ce propos la gêne d'un Descartes Document n° 8). Les mécaniciens n'auront pas trop de mal à concevoir ces courbes à partir de la vision d'une trajectoire et les nouvelles courbes seront souvent appelées "mécaniques". La véritable distinction entre courbes algébriques et courbes transcendantes ne sera dominée que vers la fin du siècle avec la démonstration de Leibniz que $\sin x$ n'est pas une fonction algébrique. L'idée de fonction, assez clairement exprimée par J. Gregory, ne sera pourtant pas utilisée par les mathématiciens avant le siècle suivant, malgré le vocabulaire newtonien qui désigne par fluente toute quantité variable dépendant d'un paramètre. Euler adoptera le mot fonction et la notation $f(x)$ en 1734 seulement.

4. LES EMBARRAS DE NEWTON

Galilée par qui nous avons ouvert ce chapitre et Newton sont les esprits les plus novateurs du XVIIème siècle. Commençons par examiner le statut des nombres chez Newton.

4.1 Le nombre chez Newton

La définition d'un nombre apparaît clairement dans Arithmetica Universalis, ouvrage publié vers 1707, mais il convient de rappeler que Newton appartient à cette race de savants qui hésitent très longtemps avant de publier leurs découvertes. Il en sera de même pour Gauss. Bref, Newton déclare :

> *"On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unité qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce qu'on regarde comme unité".*

D'un coup, la leçon du Livre V d'Euclide est dominée, mais en plus le champ des opérations numériques est ouvert aux "raisons" euclidiennes. C'est certainement la meilleure définition possible compte tenu de l'environnement culturel et on ne risque rien en assurant qu'il faut y voir aussi l'influence de I. Barrow, dont nous avons parlé au chapitre I, et auquel succèda Newton dans la chaire de "Lucasian professor" au Trinity College de Cambridge. On est alors d'autant plus surpris de voir que cette définition n'est guère réutilisée par Newton dans le reste du texte où prédomine la leçon du Descartes de la Géométrie.

Par contre, le concept intuitif de grandeur, autour duquel le calcul infinitésimal va s'organiser, fait intervenir la durée sous la forme du mouvement, selon une démarche déjà signalée chez le Descartes prenant en charge certaines "courbes mécaniques" (cf. Document n° 8).

> *"Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu de points, les surfaces, par le mouvement des lignes ; les solides par le mouvement des surfaces ; les angles par la rotation des côtés ; les temps par un flux continu"*
> (Tractatus de quadratura curvarum 1704 en appendice à l'ouvrage Opticks, ce qui indique encore l'influence cartésienne).

Un tel point de vue sera répété dans le Methodus Fluxionum et Serverum Infinitarum de 1671. Cette conception de la durée, du mouvement, l'amène à la vitesse du mouvement, c'est-à-dire à imaginer pour les grandeurs *"les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent"*. Ces vitesses seront appelées fluxions et Newton date son point de vue de ses deux très grandes années de découvertes : 1665-1666. Etudions rapidement cet apport en rappelant que notre propos essentiel n'est pas là.

4.2 Les fluxions et le calcul infinitésimal

Le point de départ de Newton est donc : la vitesse de changement, notre $\lim\limits_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ que Newton note $\dot{y}$ mais qu'il ne définit pas vraiment. Pour le calcul, il raisonne sur un accroissement h de la variable, divise par h et fait ensuite $h = 0$. On ne cessera de lui faire remarquer qu'il y a là un sérieux embarras. En tous cas, Newton peut calculer la fluxion de la fluente $f(x) = x^n$ qui est nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Q}/0)$. Réciproquement, l'inverse de la différentiation est le calcul des aires, calcul obtenu par sommation d'infiniment petits. Newton est le premier à insister sur le double aspect du nouveau calcul : calcul intégral et calcul des fluxions (De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas 1669). C'est peut-être dans les Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) sur le Système du Monde que Newton fournit les explications les plus explicites et les mieux corrigées sur son calcul infinitésimal ou "méthode des premières et dernières raisons". Le calcul des fluxions n'est que l'un des moindres apports de cet ouvrage extraordinaire. Le langage est souvent géométrique et rarement analytique. Newton rejette les "indivisibles" au profit des "evanescent divisible quantities" et s'approche d'une définition moderne :

> "*Ultimate ratios in which quantities vanish are not, strictly speaking, ratios of ultimate quantities, but limits to which the ratios of these quantities, decreasing without limit, approach, and which, though they can come nearer than any difference whatever, they can neither pass over nor attain before the quantities have diminished indefinitely*" (Principia, édition anglaise).

Cela lui permet de démontrer les :

"*Lemme I. - Des quantités ou des rapports de quantités qui tendent constamment à l'égalité dans un temps fini, et qui, avant la fin de ce temps, s'approchent davantage l'un de l'autre que toute différence donnée, sont à la fin égaux. Si on le nie, qu'ils soient à la fin inégaux, et que leur dernière différence soit D. Ils n'approchent pas de l'égalité plus que de la différence D, ce qui est contre l'hypothèse.*

Lemme II. - Si dans une figure quelconque AacE, comprise entre les droites Aa, AE et la courbe abE, sont inscrits des parallélogrammes en nombre quelconque Ab, Bc, Cd, etc., de bases égales AB, BC, CD, DE et de côtés Bb, Cc, Dd, etc., parallèles au côté Aa de la figure, et si l'on complète les parallélogrammes aKbl, bLcm, cMdn, etc. ; si ensuite les bases des parallélogrammes diminuent indéfiniment tandis que leur nombre croît à l'infini, je dis que les derniers rapports qu'on entre elles la figure inscrite AKbLcMdD, la circonscrite AalbmcndoE et la curviligne AabcdE sont des rapports d'égalité (cf. figure n° 22).

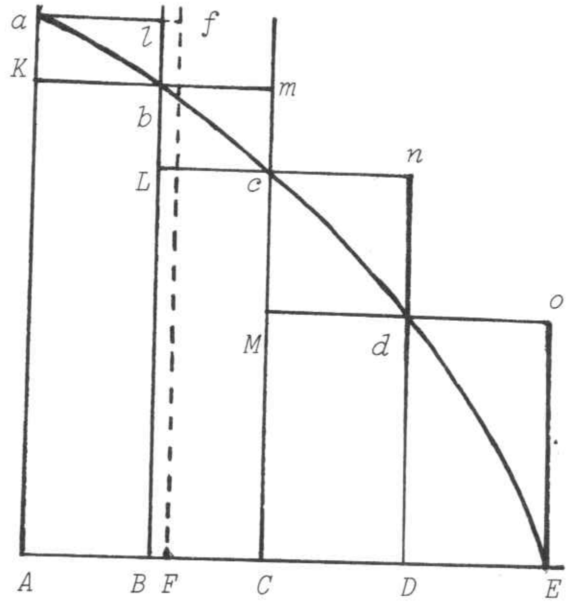


Figure n° 22

Car la différence entre les figures inscrite et circonscrite est la somme des parallélogrammes Kl, Lm, Do, c'est-à-dire, puisque toutes les bases sont égales, le rectangle de base Kb et de hauteur la somme Aa des hauteurs, soit le rectangle ABla. Mais ce rectangle, dont la base AB diminue indéfiniment est plus petit que tout rectangle donné. Donc, par le lemme I, les figures inscrite et circonscrite et à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire, sont à la fin égales."

Il en déduit, après un rappel des propriétés de similitude du Livre VI d'Euclide, que le dernier rapport de l'arc, de la tangente et de la corde entre eux, est le rapport d'égalité. Par suite, pour établir des rapports d'aires, il se contentera de faire des rapports des polygones, parallélogrammes, etc., inscrits. En un mot, Newton, et des disciples comme Mac Laurin ne manqueront pas de le souligner, a justifié les raccourcis opérés par les Modernes vis-à-vis de la méthode d'exhaustion des Anciens.

On ne peut que regretter que Newton n'ait pas mis à profit sa définition du nombre et ne se soit mieux débarrassé de la géométrie pour fonder sa théorie des fluxions. Pour couper le rêve, n'oublions pas que la notion de fonction n'est pas encore élaborée et que le corpus euclidien joue un rôle totalisateur.

5. LA DEMARCHE DE LEIBNIZ

Leibniz philosophe est un lecteur, donc un critique de Descartes. Tous les deux prennent pour modèle les mathématiques, tant pour des raisons pédagogiques que pour tenter une explication du Monde. Toutefois, Leibniz dispose de deux atouts supplémentaires : d'une part, il participe activement à la création d'une analyse combinatoire, et d'autre part, il crée (simultanément avec Newton) une algèbre des infiniment petits. De telles découvertes ne pouvaient que rejaillir sur son système philosophique. On sait que Leibniz refuse les quatre règles du Discours de la Méthode parce que le fondement sur la notion d'évidence lui semble inadmissible.

> *"Si Euclide avait voulu se contenter du bénéfice de la vision ou de l'opinion de l'évidence, il aurait assumé bien des choses sans démonstration, au grand dommage de la science dont il a compris la nature mieux que plusieurs ne le croient."*

Leibniz, en logicien nourri d'Aristote, préfère l'évidence formelle, c'est-à-dire le principe de la non-contradiction au sein d'un ensemble de définitions.

> *"La vraie marque d'une notion claire et distincte d'un objet est le moyen qu'on a d'en connaître beaucoup de vérités par des preuves a priori."*

Et ailleurs Leibniz entonne une rengaine bien mathématique :

> *"La force de la démonstration est indépendante de la figure tracée, qui n'est que pour faciliter l'intelligence de ce qu'on veut dire et fixer l'attention ; ce sont les propositions universelles, c'est-à-dire les définitions, les axiomes et les théorèmes déjà démontrés qui font le raisonnement et le soutiendraient quand la figure n'y serait pas"* (Nouveaux Essais sur l'Entendement humain).

Enfin :

> *"La connaissance, qui n'est pas évidente par elle-même, s'acquiert par des conséquences, lesquelles ne sont bonnes que lorsqu'elles ont leur forme due"* (Ibid. Livre IV chp. 17 § 5).

Et Leibniz note, et cela semble neuf, que *"les propositions doivent être réciproques, afin que la démonstration synthétique puisse repasser à rebours par les traces de l'analyse."*

Descartes, lui, se comporte en chercheur pressé d'accumuler du Savoir ordonné et ne tient pas à réduire toutes les propositions au principe de non-contradiction (Impossibile est idem simul esse et non esse) car cela ne nous rend en rien plus savant. On retrouvera un écho naturellement localisé de telles divergences lors de la crise des fondements des mathématiques au début du XXème siècle et avec chaque discussion concernant l'existence de nouveaux objets mathématiques (les nombres irrationnels que nous suivons, les nombres imaginaires, les différentielles et les infinitésimaux, les nombres cardinaux et ordinaux, etc.). Dans les mathématiques pratiquées aujourd'hui, le sentiment qui prévaut et qui est exemplifié par N. Bourbaki est celui de la méthode axiomatique (cf. Chap. V § 6 le point de vue axiomatique : D. Hilbert), c'est-à-dire l'opinion leibnizienne.

5.1 Le nombre chez Leibniz

La qualité formelle, requise par Leibniz pour une définition ou pour une théorie, qui lui fait reprocher à Euclide dans les Nouveaux Essais sur l'Entendement humain de ne donner qu'une image sensible de la droite au lieu d'une définition, devrait nous valoir une assise convenable pour les nombres. En 1666, Leibniz écrit De Arte Combinatoria dans lequel il développe et enrichit la combinatoire du temps : permutations, combinaisons, etc., mais aussi les premières notions sur les déterminants, le développement en écriture dyadique, etc.

Ce premier intérêt autour du nombre, dont la fragrance est pythagoricienne, évite à Leibniz de tout fonder sur la Géométrie et il proclame formellement la subordination de celle-ci à l'Arithmétique :

> *"Ipsa autem Geometria seu scientia extensionis rursus subordinatur Arithmeticae, quia in extensione, ut supra dixi, repetitio est seu multitudo..."*

Pour mesurer l'espace, on doit se servir des nombres entiers, mais la notion de mesure ne fonde pas le nombre.

> *"La distinction précise des idées dans l'étendue ne consiste pas dans la grandeur, car pour reconnaître distinctement la grandeur, il faut recourir aux nombres entiers ; ainsi de la quantité continue, il*

faut recourir à la quantité discrète pour avoir une connaissance distincte de la grandeur."

Là encore, le passage à l'infini s'avère nécessaire (cf. Chap. VI) pour expliquer comment sont empilées ces diverses unités. Mais Leibniz tirera plus de conséquences philosophiques que mathématiques de telles considérations. Le nombre apparaît à la fois comme un principe, qui désignerait un cardinal aurait-on tendance à dire aujourd'hui, mais aussi comme indiquant une composition ($7 = 3 + 4$, etc.). Cela est si vrai que Leibniz prendra le soin de démontrer par associativité que : $2 + 2 = 4$, la définition de 4 provenant de $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ (cf. Nouveaux Essais sur l'Entendement humain).

L'aspect ordinal se dégage aussi, mais là encore Leibniz en tirera surtout des conséquences philosophiques dans sa Monadologie. Pour les mathématiques, on attend Leibniz au tournant des incommensurables et voilà qu'il en rajoute même :

"Ex his manifestum est, Numerum in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod Homogeneum est Unitati, seu quod habet ad Unitatem, ut recta ad rectam."

Le nombre, pris dans son acception générale (entier, rationnel, ordinal, irrationnel) est ce qui est homogène à l'unité. On aurait fort tendance à voir ici l'expression du Livre V d'Euclide, où enfin serait affirmée l'identité des raisons et des nombres. *"Ratio representatur per fractionem, re ad quam ratio est repraesentata per unitatem."* D'autant plus que le nombre est ce qui par excellence est susceptible d'être soumis à des opérations.

Et qu'en est-il de l'empilage des nombres, en un mot du continu ? Sur ce point, la pensée de Leibniz va être beaucoup plus précise que celle de ses prédécesseurs car le philosophe des monades a manipulé les séries convergentes. On peut s'approcher d'un nombre, 2 par exemple, sans jamais l'atteindre

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Cette série convergente a une interprétation géométrique par les milieux, mais justement l'égalité ne provient pas d'une intuition de l'espace ou d'une définition. L'égalité est démontrée -nous y reviendrons- sur la base de l'arithmétique et du calcul des infinis.

En passant (il ne s'agit pas de mouvement mais d'ordre) d'un nombre à l'autre, on prend toutes les valeurs intermédiaires.

"Et in universum in Homogeneis locum habet illud axioma, quod transit continue ab uno extremo ad aliud transire per omnia intermedia..."

L'incommensurable π , dont la position privilégiée tient aux relations géométriques dans le cercle, rentre dans le rang numérique. Il s'obtient par la série :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

que Leibniz établit en 1674 (Acta Eruditorum de 1682).

Tout ceci nous incite à regarder de plus près les manipulations des séries par Leibniz et de ce fait aussi sa méthode des quantités infinitésimales.

5.2 Analyse des quantités infinitésimales chez Leibniz

Leibniz a écrit en 1714 son Historia et Origo Calculi Differentialis dans le cadre de la vive dispute sur les priorités et le plagiat entre Newton et lui-même, et toute l'escouade des partisans des deux bords. Les papiers personnels de Leibniz établissent qu'il était arrivé très loin vers 1673, bien avant la publication de Nova Methodus... (1684).

Leibniz semble là encore partir de considérations combinatoires puisque dans la suite des carrés des entiers

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad \ldots$$

les premières différences sont

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad \ldots$$

et les différences secondes sont constantes

$$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \ldots$$

Pour les valeurs d'une fonction, Leibniz parle en termes de différences entre deux valeurs voisines, différence qu'il note 1 au début, pour bien souligner l'analogie avec le cas arithmétique (différence de deux entiers successifs). En notant omn pour la somme des différences l de la fonction y commençant à 0 , on a :

$$\text{omn } l = y \ .$$

Bientôt, Leibniz notera $l = dy$, $1 = dx$ et remplacera omn par $\int$, la première lettre de somme, dans le style du Grand Siècle.

$$\int dy = y \; .$$

Leibniz pose, en considérant le graphe de $x \longrightarrow x$, que :

$$\int y dy = \frac{y^2}{2} \quad .$$

Il établit formellement le théorème d'intégration par parties :

$$\int x dy + \int y dx = xy$$

et réalise que la différentiation et l'intégration (en son sens) sont des opérations inverses l'une de l'autre et cela corrobore le bien-fondé de sa notation ($\int$ pour somme, d pour différence).

Formellement encore, et toujours par analogie avec les différences portant sur les variables discrètes, ce qui explique les changements de signe dans la formule, il établit :

$$y = \frac{1}{1} x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2} x^2 \frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1.2.3} x^3 \frac{dddy}{dx^3} + \ldots$$

où les valeurs dérivées s'entendent en 0 et y vaut 0 en 0. De même :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad dx^n = nx^{n-1}dx \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad .$$

On le voit ici encore, c'est l'arithmétique qui est fondamentale, non la géométrie :

> *"Car ce n'est pas par les fluxions des lignes, mais par les différences des nombres que j'y suis venu"*
> (Lettre à l'Abbé Conti).

En outre, ce sont les propriétés formelles de la différentiation (et de l'intégration) qui sont mises en évidence par Leibniz :

$$d(y_1 y_2) = y_1 dy_2 + y_2 dy_1 \quad \text{etc.}$$

Toutefois, il est bien conscient de la généralité de sa méthode formelle, bien que les résultats qui précèdent aient plus ou moins été déjà découverts, de Cavalieri à Wallis.

Le tournant épistémologique se réalise lorsque Leibniz prend conscience que dx peut avoir avec x *"une raison plus petite que n'importe qeulle quantité assignable"*. Formellement, il peut conserver les identités précédemment établies, mais il lui faut donner un sens à l'expression $\frac{dy}{dx}$ et préciser dx .

Une explication possible, mais non rigoureusement fondée, provient du triangle caractéristique (cf. § 2 de ce chapitre). La pente de la tangente s'identifiant à $\frac{dy}{dx}$ et on néglige d^2y etc (En fait, Leibniz raisonne avec la sous-tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{sous-tangente}}$). Il s'agit chez Leibniz plus d'une explication, basée sur la Géométrie, que d'une démonstration formelle.

Pour Leibniz, mais ses explications pourront varier, dx désigne une quantité infinitésimale (ou "évanouissante") qui est certes une "fiction", mais une *"fiction utile pour abréger et pour parler universellement"* (Lettre à Dangicourt, 1er septembre 1716). Bien sûr, Leibniz prétend quelquefois *"qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions"* (Journal de Trévoux 1701 Mémoire de M. G.G. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel) et qu'au lieu de quantités infinitésimales *"on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée"* (Ibidem).

L'aspect formel et algébrique justifie bien des choses d'ailleurs.

> *"... et il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme s'il y avait des atomes (c'est-à-dire des éléments assignables de la nature), quoiqu'il n'y en ait point, la matière étant actuellement sous-divisée sans fin ; et que vice versa les règles de l'infini réussissent dans le fini, comme s'il y avait des infiniment petits métaphysiques, quoiqu'on n'en n'ait point besoin ; et que la division de la matière ne parvienne jamais à des parcelles infiniment petites : c'est parce que tout se gouverne par raison, et qu'autrement il n'y aurait point de science ni règle, ce qui ne serait point conforme avec la nature du souverain principe"* (Ibidem).

Admettre pour Leibniz l'existence de quantités infinitésimales, d'ailleurs mettre un ordre sur ses infiniment petits aussi bien que sur les infiniment grands, c'est aller à l'encontre d'Aristote, c'est surtout aller à l'encontre du Livre V car l'ordre n'est pas archimédien, et c'est rencontrer les problèmes de la cardinalité des ensembles qui soulèveront tant de difficultés pour Cantor... et le fondement des mathématiques (cf. Chapitre VI). Il le fait quand même et, en philosophe, Leibniz réservera ses explications à l'infiniment grand de par les implications possibles avec l'existence de Dieu. Nous ne pouvons entrer ici dans ces explications.

En tous cas, l'aspect non archimédien des quantités infinitésimales est clairement examiné et l'analogie algébrique est faite entre la ligne et la surface, qui n'ont aucune raison entre elle, *"parce que la ligne prise mathématiquement est considérée sans aucune largeur."* D'ailleurs, pour préciser le rôle de l'algèbre, rôle que tous les successeurs souligneront à l'envi, Leibniz ajoute que :

> *"L'analyse nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en général, comme fait la spécieuse ordinaire. Elle montre un algorithme nouveau, c'est-à-dire une nouvelle façon d'ajouter, de soustraire, de multiplier, de diviser, d'extraire, propre aux quantités incomparables"* (De la chaînette).

C'est cette algèbre *"qui nous donne un fil dans le labyrinthe"* de la synthèse qui recompose à partir du simple pour découvrir une Vérité, c'est elle *"qui retranche une bonne partie des combinaisons inutiles"* par la méthode des exclusions, mais *"il y a des cas où la nature même de la question exige qu'on aille tâtonner partout, les abrégés n'étant pas toujours possibles"* (Nouveaux Essais sur l'Entendement humain 1703 , Livre IV chap. 2 § 2).

Par contre, Leibniz tient bien à préciser que *"la science de l'infini n'est pas dégradée"* par la considération des quantités infinitésimales :

> *"car il reste toujours un infini syncatégorématique, comme parle l'école, et il demeure vrai par exemple que 2 est autant que* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$, *etc., ce qui est une série infinie dans laquelle toutes les fractions dont les numérateurs sont 1 et les dénominateurs de progression géométrique double, sont comprises à la fois, quoiqu'on n'y emploie toujours que des nombres ordinaires et quoiqu'on n'y fasse point entrer aucune mention infiniment petite, ou dont le dénominateur soit un nombre infini..."*

L'égalité $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ est vraiment une égalité entre tous les termes de la série (et la loi qui les fonde) et le nombre 2. De même pour la série donnant $\frac{\pi}{4}$ (*"Tota autem series infinita exacte natura circuli exprimit"*).

Mais il ne suffit pas de dire qu'il y a égalité pour que l'on sache ce que signifie la série. Une lecture de Leibniz, pour les séries à termes positifs, semblerait montrer que ce dernier voit la limite au sens de la borne supérieure, donc à partir de la notion d'ordre.

5.3 L'Analyse non standard

Rajouter aux nombres usuels des quantités infinitésimales, cela, Leibniz l'a pensé . Refaire la théorie du Livre V d'Euclide, sans l'axiome d'Archimède (Définition 4), ne pouvait être fait par Leibniz compte tenu même de ce que signifiait "construire" un nouvel objet mathématique au XVIIème siècle.

Tout le XVIIIème siècle, nous allons le voir, va s'acharner à mettre au clair la pensée leibnizienne (et aussi newtonienne) en faisant disparaître ces quantités "évanouissantes". Nous verrons qu'avec Cauchy, revu corrigé et surtout formalisé par Weierstrass, la notion de limite sera la notion clef sur laquelle tout l'édifice de l'Analyse est fondé. Cette notion évacuera les quantités "évanouissantes". Au XXème siècle, toutefois, il se trouva possible de construire une "analyse non standard" et ce fut essentiellement l'oeuvre de A. Robinson (Non standard Analysis Springer Verlag 1964) grâce aux développements de la logique mathématique, et de l'analyse non archimédienne. Avec Robinson, on assiste à un passionnant dépassement du Livre V d'Euclide et des constructions de Dedekind ou Cantor, dépassement qu'il nous est impossible de décrire ici, car il fait trop appel à des techniques de logique. Soulignons de suite que cette théorie débouche sur des résultats délicats d'analyse classique (théorie des sous-espaces invariants, par exemple). Contentons-nous de citer le paragraphe final du livre de Robinson.

> *"Returning now to the theory of this book, we observe that it is presented, naturally, within the framework of contemporary Mathematics, and thus appears to affirm the existence of all sorts of infinitary entities. However, from a formalist point of view we may look at our theory syntactically and may consider that what we have done is to introduce new deductive procedures rather than new mathematical entities. Whatever our outlook and in spite of Leibniz'position, it appears to us today that the infinitely small and infinitely large numbers of a non-standard model of Analysis are neither more nor less real than, for example, the standard irrational numbers. This is obvious if we introduce such numbers axiomatically ; while in the genetic approach both standard irrational*

numbers and non-standard numbers are introduced by certain infinitary processes. This remark is equally true if we approach the problem from the point of view of the empirical scientist. For all measurements are recorded in terms of integers or rational numbers, and if our theoretical framework goes beyond these then there is no compelling reason why we should stay within an Archimedean number system. For, repeating a quotation given earlier in this chapter, 'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer'."

5.4 Extension philosophique

S'appuyant encore sur une option arithmétique, Leibniz conçoit les "substances" ou "monades" comme "inétendues", indiscernables et ne pouvant agir l'une sur l'autre mais reflétant chacune l'Univers. Il y a une hiérarchie des monades selon la clarté avec laquelle les monades reflètent l'Univers. Hiérarchie à laquelle il suffit de rajouter un principe de continuité pour disposer d'une analogie avec les nombres ou les grandeurs. Dans les Nouveaux Essais sur l'Entendement humain, on retrouve le vieux principe de Nicolas de Cuse :

> *"Rien ne se fait tout d'un coup, et c'est une de mes grandes maximes et des plus vérifiées, que la nature ne fait jamais de sauts. J'appelle cela la loi de la continuité... et l'usage de cette loi est très considérable dans la physique. Elle porte qu'on passe toujours du plus petit au grand et à rebours par le médiocre, dans les degrés comme dans les parties ; et que jamais un mouvement ne naît immédiatement du repos, ni ne s'y réduit pas au mouvement plus petit, comme on n'achève jamais de parcourir aucune ligne ou longueur avant que d'avoir achevé une ligne plus petite..."*

Plus loin,

> *"Tout cela fait bien juger que les perceptions remarquables viennent par degré de celles qui sont trop petites pour être remarquées. En juger autrement, c'est peu*

connaître l'immense subtilité des choses qui enveloppe toujours et partout un infini actuel."

Ou encore lorsque Philatète, qui représente soi-disant Locke, magnifie la hiérarchie des monades :

"les différentes espèces de créatures s'élèvent aussi peu à peu depuis nous jusqu'à l'infinie perfection du souverain architecte."

Théophile, alias Leibniz, ajoute :

"La loi de la continuité porte que la nature ne laisse point de vide dans l'ordre qu'elle suit, mais toute forme ou espèce n'est pas de tout ordre. Quant aux esprits ou génies, comme je tiens que toutes les intelligences créées ont des corps organisés, dont la perfection répond à celle de l'intelligence ou de l'esprit qui est dans ce corps en vertu de l'harmonie préétablie, je tiens que pour concevoir quelque chose des perfections des esprits au-dessus de nous, il servira beaucoup de se figurer des perfections encore dans les organes du corps qui passent celles du nôtre."

Avec une telle imagination, cette "invenzione la più vaga", on comprend que Leibniz ne craignait pas les "évanouissantes".

6. LA MISE EN ORDRE JUSQU'A CAUCHY

6.1 La totalisation philosophique chez Hegel

L'introduction du calcul infinitésimal et des quantités infiniment petites en une époque où la Science n'est pas disjointe de la Philosophie, la notion de nombre -et de nombre mesurant tous les nombres- en une époque où la Philosophie côtoie la théologie, provoquent nécessairement les philosophes. Les controverses de Galilée, Descartes, Newton, Leibniz, Berkeley et bien d'autres amènent chaque génération à redéfinir sa position sur les idées de nombre, de mesure, d'infini et de continu. Nous avons tenu à indiquer les grandes lignes de pensée de Descartes, Leibniz et Newton, négligeant bien d'autres interventions plus significatives du milieu historique mais de portée moins générale. A la fin du XVIIIème siècle, voire au milieu du XIXème siècle, nous souhaiterions trouver un auteur capable de résumer la situation. Malheureusement, la lignée des mathématiciens philosophes est rompue. Voltaire fait sourire des pensées philosophiques d'Euler et l'on verra au Chapitre V § 1.2 les avatars de la pensée mathématique kantienne. Il faudrait bien envisager Hegel, dont l'influence sur Marx en fait le grand-père intellectuel de notre siècle. Hegel a médité les mathématiques, principalement dans ses aspects de logique, aspects que nous ne regardons pas ici (Wissenschaft der Logik). Il se trouve d'ailleurs qu'Hegel dans cet ouvrage consacre quelques notes essentielles à l'infini mathématique et au calcul infinitésimal. Il se trouve surtout qu'Hegel a écrit un texte, Théorie de la mesure, qui concerne directement notre sujet et est basé sur le rôle du concept en soi dans la pensée hégélienne, du concept du Quantum en particulier et de sa détermination en excroissance de la pensée spéculative dans la mathématique. L'auteur de ces lignes, mathématicien faut-il le rappeler, ne peut qu'avouer son incapacité à déchiffrer autrement qu'en surface la signification des textes hégéliens et les rares fois où il a pu accrocher une référence mathématique, ou bien l'exemple n'éclairait pas le texte, ou bien l'exemple était mathématiquement inacceptable. Vite découragé, mais par souci de tradition, on se contentera donc de signaler le texte hégélien.

6.2 Les résultats de l'Analyse et les divers essais de fondation du Calcul

Avec les outils forgés par Leibniz et Newton, et même en négligeant bien des questions fondamentales concernant les "fluxions" ou les "différentielles", les mathématiciens avaient devant eux pour un bon siècle de travail systématique.

Nous n'avons pas à décrire ici ce que furent les résultats de l'Analyse Infinitésimale, auquel les Anglais réservent avec bonheur l'expression de "Calculus". Rappelons que le nom de L. Euler se dégage automatiquement au XVIIIè siècle (cf. Document n° 5, Chronologie sommaire des mathématiciens et auteurs cités dans le texte). Citons en vrac quelques réussites spectaculaires en Analyse au XVIIIème siècle et au début du XIXème siècle :

- Définition infinitésimale des fonctions transcendantes usuelles (fonctions exponentielles, trigonométriques, hyperboliques, etc.).
- Intégration des fonctions d'une variable complexe, théorie de Cauchy et des résidus.
- Intégrales elliptiques (classifications de Legendre dans son Traité des fonctions elliptiques de 1825).

- Etude des fonctions spéciales (fonctions eulériennes, etc.).
- Séries entières et développements tayloriens des fonctions.
- Séries trigonométriques et applications au problème des cordes vibrantes.
- Equations différentielles et aux dérivées partielles : premières classifications et nombreuses solutions particulières.
- Calcul des variations (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietati gaudentes Euler 1744, etc.).

Bien naturellement, la nature même et la justification de l'Analyse Infinitésimale gênent les esprits. Tout au long du XVIIIème siècle, parallèlement à la floraison de résultats nouveaux, de nombreux auteurs s'essayent en vain à un traitement du calcul différentiel mathématiquement satisfaisant aux yeux des mathématiciens du temps, c'est-à-dire basé sur le traitement euclidien. Citons par exemple B. Taylor (Methodus Incrementorum Directa et Inversa 1715), M. Rolle (1652-1719) (Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés), T. Simpson (A New Treatise on Fluxions 1737) ou M. De L'Hospital (Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes 1696).

Des controverses fort vives éclatèrent par exemple entre l'évêque philosophe G. Berkeley, J. Jurin, B. Robins, C. Mac Laurin (Treatise of fluxions 1742). Il est piquant de noter que Berkeley cherchait à prouver le vague de l'analyse afin d'ôter au mathématicien tout cynisme quant aux fondements du Christianisme (Le titre même de son ouvrage mentionne la parabole évangélique de la poutre et de la paille !).

En dehors de ces controverses philosophico-religieuses, le XVIIIème siècle connaît un lent cheminement contradictoire entre la doctrine des quantités infinitésimales actuelles à la Leibniz et les raisons dernières, c'est-à-dire les limites en forçant un peu, à la Newton.

Le Marquis de l'Hospital, qui en tient pour Leibniz via Jean Bernoulli, accepte les quantités infiniment petites comme des entités ayant droit de cité Témoin :

> *"On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite."*

Ce qui force à demander *"qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite"* (Analyse des infiniment petits... 1696).

Cette acceptation dérange tandis que le formalisme algébrique de Leibniz est adopté sans peine, du moins sur le Continent, et c'est au nom de ce formalisme qu'une autre percée va être tentée.

Euler en 1755 (Institutiones Calculi Differentialis) s'engage sur la voie analytique, mais cette démarche est accentuée par Lagrange (Théorie des fonctions analytiques 1792) et avec cet auteur on aboutit vraiment au sommet de l'algébrisation des grandeurs continues par l'utilisation algébrique systématique de la formule de Taylor et sans référence à la géométrie ni aux infiniment petits. A ceci près bien sûr que les nombres réels n'ont encore pas de fondement ! A ceci près encore que les questions de convergence sont, souvent, soit escamotées, soit totalement négligées. Pour Lagrange, par exemple, il ne semble faire aucun doute que, sauf en quelques points singuliers, toute fonction s'exprime localement sous forme d'une série entière convergente. Le concept de fonction est évidemment imprécis (forme analytique !) mais la passionnante étude d'épistémologie historique de ce concept nous entraînerait hors de notre sujet (cf. par exemple l'ouvrage de J. Desanti, Les Idéalités Mathématiques, Ed. du Seuil Paris 1968).

A la fin du siècle, Lazare Carnot, exilé par le Directoire et remplacé à l'Institut par un certain Napoléon, publie Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal. Les phrases d'introduction illustrent bien le nouvel état d'esprit :

> *"Les réflexions que je propose à ce sujet sont distribuées en trois chapitres : dans le premier j'expose les principes généraux de cette analyse ; dans le second j'examine comment elle a été réduite en algorithme par l'invention des calculs différentiel et intégral ; dans le troisième je la compare aux autres méthodes qui peuvent la suppléer, telles que la méthode d'exhaustion, celle des indivisibles, celle des indéterminées, etc."*

L. Carnot prend soin de dire que les quantités infinitésimales ne sont pas des êtres *"métaphysiques et abstraits"*, mais *"des quantités réelles, arbitraires, susceptibles de devenir aussi petites que je veux"*. Toutefois, ces quantités lui salissent les mains. *"On ne les emploie que comme auxiliaires"* et le calcul est parfaitement exact *"du moment que je suis parvenu à en éliminer les quantités infinitésimales"*. Cette confusion entre la technique et le fondement est assez typique du début du XIXème siècle. Lazare Carnot, un peu archaïsant, n'hésite pas à comparer -et il n'est pas le seul- les quantités infinitésimales aux quantités imaginaires. Sur le fond épistémologique -la pratique de l'algébrisation- il a tout à fait raison. Déjà, D'Alembert, dans l'article "Différentiel" de l'Encyclopédie, basait le Calcul différentiel sur la notion de limite et affirmait *"qu'il n'y a point dans le calcul différentiel* *de quantités infiniment petites*". Il est d'ailleurs piquant de noter que d'Alembert n'ose pas accepter qu'une quantité y qui tend vers y_o puisse prendre en chemin la valeur y_o . On doit avoir $y \neq y_o$ et cette inconséquence va se répercuter dans les manuels de l'enseignement français pour triompher, comme trop souvent, dans les Programmes Officiels de 1966 !

Les essais divers mentionnés ci-dessus, passionnants à parcourir, sont les contributions encore floues et malhabiles qui vont permettre de fonder l'Analyse. Il faut avouer que Lagrange convient que l'algébrisation trop poussée du calcul infinitésimal (par les différences finies) conduit à des "*procédés embarrassants et peu naturels*" et sa foi dans le calcul infinitésimal, même mal fondé, éclate alors.

> "*On doit convenir que cette manière de rendre le calcul plus rigoureux dans ses principes lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations*".

Mais répondrait Euler (Mémoire de l'Académie de Berlin de 1754) :

> "*Ce calcul même, quoique l'analyse en prescrive les règles, doit partout être soutenu par un raisonnement solide, au défaut duquel on court le risque de se tromper à tout moment*".

6.3 La rigueur dans la notion de convergence

C'est avec les séries infinies, donc avec un problème relativement technique, que les premières définitions rigoureuses de l'Analyse vont se faire jour.

Eclairons un peu la situation par un exemple. Euler n'hésite pas à écrire :

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{x^2 n^2}\right)$$

sous la seule justification que $\sin x$ s'annule seulement en $x = \pm n\pi$ et par analogie avec les polynômes. Avec cette même analogie, en utilisant les relations entre racines et coefficients des polynômes, il obtient :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

(cf. Opera Omnia 1, 14, p. 138-155).

Les Bernoullis, Mac Laurin, Leibniz, bien entendu Euler lui-même et bien d'autres, s'emploient à préciser l'idée de convergence, mais ont bien raison de ne pas éliminer l'emploi des séries divergentes. Il semble bien que la pérennité d'une certaine forme analytique d'ailleurs présupposée unique gêne les esprits. Par exemple :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

conduit à écrire :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

N'avons nous pas noté le règne des points de vue formels au XVIIIème siècle, ce qui ne pouvait que retarder, faute d'outils, la construction des nombres réels. A ce stade, le formalisme polynômial algébrique inauguré par Descartes, soutenu par le concept de différentielle de Leibniz, devenait un handicap au progrès.

Certes, il est remarquable qu'un Laplace se pique d'écrire une Mécanique analytique sans dessiner une seule figure et en se basant uniquement sur les calculs de l'analyse. Cependant, ces mêmes calculs ne reposent pas sur un système axiomatique considéré comme cohérent (comme le système euclidien). Il ne s'agissait déjà plus de faire reposer l'analyse sur la géométrie car les doutes sont de plus en plus grands (cf. Chap. V § 1.1). Il s'agissait de construire une base logique pour l'Analyse elle-même. Cependant, les mathématiciens du XVIIIème siècle préfèrent un point de vue pragmatique ("aller de l'avant"), et sont conscients de cette attitude, comme en témoigne la citation suivante :

> *"Jusqu'à maintenant, on a plus fait pour agrandir l'édifice que pour en rendre lumineuse l'entrée, pour l'édifier haut que pour assurer la force des fondations"* (J. Le Rond d'Alembert).

Qui plus est, ces mathématiciens justifient leur attitude. Ainsi, Clairaut, dans ses Eléments de Géométrie (1741), abandonne la démarche euclidienne et la volonté de rigueur qui s'y manifeste pour recourir ostensiblement à l'intuition :

> *"Tous les raisonnements qui concernent ce que le bon sens connaît par avance ne servent qu'à cacher la vérité et gêner le lecteur".*

A la fin du XVIIIème siècle, un changement se profile et l'oeuvre d'Augustin-Louis Cauchy va apporter une conception nouvelle de la rigueur.

6.4 La démarche scientifique de Cauchy basée sur la notion de limite

A.L. Cauchy débute un Cours d'Analyse à l'Ecole Royale Polytechnique (1821) par une première partie très symptomatiquement appelée analyse algébrique. Mais citons son Introduction qui explicite sa démarche :

> *"Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude ; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'une série divergente n'a pas de somme ; dans le chapitre VII, qu'une équation imaginaire est seulement la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles ;*

dans le chapitre IX, que, si des constantes ou des variables comprises dans une fonction, après avoir été supposées réelles, deviennent imaginaires la notation à l'aide de laquelle la fonction se trouvait exprimée, ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu d'une convention nouvelle propre à fixer le sens de cette notation dans la dernière hypothèse ; etc."

Quant à l'éventuelle utilisation de la rigueur mathématique dans l'ordre moral et philosophique, le baron Cauchy, ultra royaliste et intégriste intempérant, énonce avec force une leçon que de nombreux hommes de Science négligent et qui marque tant la distance d'avec les Encyclopédistes que le refus a priori de ce qui va être le positivisme.

"Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine ; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral".

Il ne faudrait quand même pas imaginer que l'exposé de Cauchy soit inattaquable, quant aux propriétés de limites ou des fonctions continues. Loin de là ! On pourra se faire une idée sommaire en lisant les premières pages du Cours d'Analyse (cf. Document n° 15). Nous reportons la discussion des difficultés logiques du texte de Cauchy au Chapitre V § 1.4 pour mieux préparer les résultats de Dedekind et Cantor. Il suffira de dire ici que le concept de base chez Cauchy est la notion de limite.

La présence même des propriétés opératoires des concepts de limites ou de continuité, dans le texte de Cauchy, bouleverse en l'organisant toute la scène mathématique.

C'est surtout sur l'opération d'intégrale définie que la contribution de Cauchy est fondamentale. Il définit pour $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où f est continue, la somme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\theta_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{où} \quad x_{i-1} \leqslant \theta_i \leqslant x_i$$

pour une division $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Il passe à la limite lorsque $\max\limits_{i=1,..,n} |x_i - x_{i-1}|$ tend vers 0 et montre que la limite existe indépendamment du choix des x_i et des θ_i . Il note $\int_a^b f(x)dx$. La seule insuffisance de cette démonstration est la supposition inconsciente qu'une fonction continue est uniformément continue. Dès lors, Cauchy établit que la fonction définie par $x \longrightarrow \int_a^x f(t)dt$ est continue et dérivable en tout point x de $[a,b]$, la dérivée valant $f(x)$. Avec ce résultat, un style vigoureux nouveau était né... et subsistait tel quel, il y a encore une décennie, dans les classes préparatoires aux Grandes Ecoles. De ce style, retenons que le concept productif est la notion de limite (et son partenaire obligé, la notion de continuité). Ce concept permet le développement du calcul intégral et différentiel sans utilisation réelle des quantités infinitésimales.

Reportons au paragraphe suivant l'étude des généralisations de la notion d'intégrale et concentrons-nous un peu sur cette notion de limite.

Fourier, dans son travail de 1811 sur l'équation de la chaleur, donne la définition actuelle pour la convergence d'une série tandis que Gauss en 1812 dans son Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam discute complètement la convergence, mais dans le seul cas des séries hypergéométriques. Qui plus est, Gauss, dans des manuscrits personnels, définit $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} u_n$.

Bolzano est le premier, en 1817, dans son Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewahren wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege, à énoncer le critère connu aujourd'hui sous le nom de critère de Cauchy. Cauchy va fonder son cours d'Analyse sur la notion de limite et sur le critère de Cauchy. Mais citons Cauchy.

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général.* Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \ldots,$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire la puissance $n^{\text{ième}}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n, la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croit au delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que, dans la première hypothèse, la progression

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que, dans la seconde hypothèse, la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad u_{n+1}, \quad \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \ldots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
s_{n+1} - s_n &= u_n,\\
s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1},\\
s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée." (A. Cauchy, Cours d'Analyse 1821 Chap. VI § 1).

Le lecteur moderne s'étonne du traitement singulier de la réciproque. Mais comment serait-il possible à Cauchy de fournir une démonstration puisque l'ensemble des nombres réels reste flou ? On se demande malgré tout si Cauchy est conscient d'avoir escamoté une difficulté.

En tous cas, il peut facilement montrer la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ puisque $\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. A partir de là, suivent facilement les tests de convergence pour les séries entières ($\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|v_n|}$).

Pour marquer la limite du raisonnement pourtant si remarquablement riche, citons la "démonstration" d'un théorème faux. Cauchy part d'une série $u_o, u_1, \ldots, u_n$ et note $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $r_n = s - s_n$.

Lorsque, les termes de la série renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Lorsque les différents termes de la série sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

Cauchy répètera plusieurs fois une erreur analogue et semble considérer comme allant de soi des propriétés d'uniformité quant à la convergence.

Abel, dans un travail de 1826, rendra manifeste l'erreur de Cauchy en fournissant un exemple trigonométrique désormais classique :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

lequel est tel que $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = \frac{\pi}{2}$ tandis que $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Cauchy remaniera correctement son théorème en 1853 dans une Note aux Comptes-Rendus. Il est bon d'ajouter que la théorie des séries trigonométriques, issue de considérations physico-mathématiques (par exemple l'équation de la chaleur avec Fourier), par son opposition à la théorie "régulière" des séries entières (développée par Cauchy), va jouer un rôle essentiel de test d'erreurs d'Abel à Cantor en passant par Weierstrass, Riemann, Dirichlet ou du Bois-Reymond. Ce rôle sera plus qu'un rôle de contre-exemples, mais suscitera de profondes réflexions qui inaugureront certaines des théories les plus novatrices en Analyse. Citons quelques oeuvres symptomatiques :

<u>Fourier</u> : Théorie analytique de la chaleur 1811.

<u>Lejeune Dirichlet</u> : Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen. Repertorium der Physik (I) 1837 p. 152-174 .

<u>B. Riemann</u> : (1854 : Habilitationsschrift) Über die Dartellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe.

B. Dirichlet : Sur la convergence des séries de Fourier. Journ. für Math. 4 (1829) 157-169.

Weierstrass : 1872 (18 Juillet) Exemple d'une fonction continue nulle part différentiable. Mathematische Werke 2 p. 71-74 éd. Mayer und Müller 1894-1927.

G. Cantor : Über die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Annalen 5 (1872) p. 123-132. Cette oeuvre inaugure la théorie des Ensembles avec la notion d'ensemble dérivé (cf. Chap. V).

H. Lebesgue : Leçons sur les séries trigonométriques 1905.

N. Wiener : The Fourier integral and certain of its applications. (1932) De cette dernière oeuvre sortiront plus tard les théorèmes taubériens, l'analyse harmonique généralisée et les premières idées de la théorie du signal et de la cybernétique.

L'oeuvre de Cauchy subira les nécessaires et décisives corrections d'Abel, de Weierstrass et de Riemann, mais en un sens restera le moule à partir duquel sortira toute l'Analyse du XIXème siècle. Les corrections viendront de ce que Cauchy présupposait trop de régularité et il est intéressant de noter que les quelques rares mathématiciens à chercher une construction logique des nombres réels sont aussi ceux qui exhibent ces fonctions, pathologiques pour leur époque, que sont les fonctions continues non dérivables. Ce sont d'ailleurs les mêmes mathématiciens qui s'opposeront et aux constructions des réels et à la considération systématique des fonctions pathologiques (Du Bois-Reymond, R. Lipschitz, C. Hermite, H. Poincaré, etc.) comme nous le verrons au Chapitre V.

Mais terminons ce chapitre IV par une brève étude de l'extension de la notion de mesure.

7. THEORIE DE LA MESURE : DE RIEMANN A LEBESGUE

Cauchy a donné dans son Cours d'Analyse dès 1821 une définition de l'intégrale d'une fonction continue à laquelle ne manquait que la continuité uniforme pour être irréprochable. Bien que Cauchy ait envisagé des cas de discontinuités (et les intégrales impropres), Riemann se débarrasse de la notion de continuité en envisageant les sommes supérieures et inférieures (Habilitationschrift de 1854 déjà cité). Avec les notations du § 6.3 :

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(x_i - x_{i-1}) \qquad S_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

et
$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - x_{i-1}) \qquad s_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad .$$

Riemann dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si et seulement si $S-s$ peut être rendu inférieur à ε dès que la division choisie est de pas assez petit. Cela permet à Riemann d'exhiber une fonction intégrable ayant un ensemble dense de discontinuité. Darboux (Ann. de l'Ecole Normale Supérieure (2) 4 (1875) p. 57-112) complète le travail de Riemann en définissant

$$A = \operatorname{Inf} S \quad \text{et} \quad \operatorname{Sup} s = B$$

et montrant que S tend vers A (et s vers B) lorsque le pas de la division tend vers 0. Le critère d'intégrabilité est donc $A = B$. Avec ce résultat, on établit sans trop de peine qu'une fonction bornée $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann) si et seulement si l'ensemble E de ses points de discontinuité est de mesure nulle. Cette dernière expression signifiant qu'à tout ε on peut associer une famille $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ d'intervalles recouvrant E et dont la somme des longueurs est majorée par ε .

Jusqu'à la fin du XIXème siècle, de nombreux auteurs fournissent des exemples de fonctions bizarres, intégrables ou non au sens de Riemann. Citons Dirichlet, Dini, Jordan, Darboux, Harnack, Stolz, Stieltfès (Recherches sur les fractions continues de 1894), Peano et Borel. Quelles sont les difficultés de l'intégrale de Riemann ? Il y en a de deux types :

- le passage à la limite sous l'intégrale : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)dx$;

- la mesure des aires des sous-ensembles du plan, sous-ensembles non nécessairement limités par des courbes régulières, mais pouvant apparaître comme lieu des singularités de certaines limites de fonctions analytiques par exemple.

Dans sa thèse, Intégrale, longueur, aire de 1902 et surtout dans son livre Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Lebesgue fournit la théorie et des techniques auxquelles rien n'est à modifier jusqu'à nos jours.

Indiquons très sommairement la démarche de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour un sous-ensemble E non vide de $[a,b]$, on définit deux quantités :

- la mesure extérieure $M(E)$ de E comme étant la borne inférieure des sommes d'intervalles (formant au plus une infinité dénombrable) et recouvrant E ;

- la mesure intérieure $m(E)$ de E est la mesure extérieure de $[a,b] \setminus E$. On convient que E est mesurable si $m(E) = M(E)$. En général, on a seulement $m(E) \leqslant M(E)$.

Lebesgue montre alors que la réunion dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et même que :

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \quad \text{si} \quad E_n \cap E_{n'} = \emptyset \quad \text{lorsque} \quad n \neq n' .$$

Ensuite, Lebesgue définit une fonction mesurable $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ comme étant une fonction telle que $\{x | x \in [a,b] \ ; \ f(x) > \alpha\}$ soit un sous-ensemble mesurable de $[a,b]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Techniquement, l'intégrale se définit en prenant les sommes analogues à celles de Riemann, mais en effectuant une division sur les ordonnées au lieu de l'effectuer sur les abcisses. On pose : $\operatorname{Sup} f(x) = \beta$; $\operatorname{Inf} f(x) = \alpha$ et $y_o = \alpha < y_1 < \ldots < y_n = \beta$ pour une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ où E est un sous-ensemble mesurable de $[a,b]$. On pose $E_i = \{x | y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}$, lequel est un ensemble mesurable. Enfin, si f est mesurable :

$$S = \sum_{i=1}^{n} y_i \, M(E_i)$$

et

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \, m(E_i) \quad .$$

On établit que $\operatorname{Sup} s = \operatorname{Inf} S$, ces expressions étant calculées sur toutes les divisions possibles et la valeur commune est notée : $\int_E f(x)dx$. Si f est intégrable au sens de Riemann et si $E = [a,b]$, alors les deux intégrales coïncident, mais la notion introduite par Lebesgue généralise vraiment celle de Riemann.

En fait, Lebesgue généralise ensuite cette notion au cas des fonctions non bornées et au cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Un résultat spectaculaire est le théorème de la convergence dominée. Supposons que $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ converge en chaque point x de $[a,b]$ vers f et que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ pour tout x de $[a,b]$ où $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$, alors f est aussi intégrable au sens de Lebesgue et l'on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \; .$$

Nous tairons les applications de cette théorie aux développements en séries trigonométriques et les liens subtils dégagés par Lebesgue entre la recherche des fonctions primitives, les nombres dérivés des fonctions et sa propre théorie. Nous tairons aussi le passage aux fonctions de plusieurs variables qui sera définitivement amélioré par Fubini en 1907 (Atti della Accad. dei Lincei(5) 16 1907 p. 608-614).

Nous insisterons un peu sur l'aspect théorie de la mesure dégagé par Lebesgue. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable au sens de Lebesgue et intégrable sur tout fermé borné de $\mathbb{R}^n$. On pose pour tout sous-ensemble E : $F(E) = \int_E f(x)dx$.

En particulier, $m(E)$ est l'intégrale de la fonction caractéristique de E. Deux points sont notables, le premier provenant du théorème de la convergence dominée :

- si E_n sont des sous-ensembles disjoints avec $F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \infty$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n) = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) .$$

- si $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} F(E_n) = 0$.

(a) La première propriété, dite de σ-additivité, peut servir de point de départ abstrait d'une théorie de la mesure quelconque sur un espace abstrait E. On définit une tribu $\mathfrak{F}$ sur E comme étant une famille de sous-ensembles de E telle que :

- $E \in \mathfrak{F}$
- $A \in \mathfrak{F}$ implique $E \backslash A \in \mathfrak{F}$
- Si $A_n \in \mathfrak{F}$ alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

On appelle mesure sur E muni de $\mathfrak{F}$, une application μ définie de $\mathfrak{F}$ dans $[0,\infty]$ telle que :

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

pour une famille quelconque de A_n de $\mathfrak{F}$, deux à deux disjoints. En suivant les techniques de Lebesgue, on peut alors partir du triplet $(E,\mathfrak{F},\mu)$ pour construire une théorie de l'intégration. Il s'est trouvé que ce qui pouvait apparaître comme une généralisation inutile vers l'abstraction prit une importance considérable dans au moins deux domaines : celui de l'Analyse Fonctionnelle (avec les contributions de F. Riesz, M. Frechet, J. von Neumann et S. Banach) et celui du calcul des probabilités (avec E. Borel et surtout A. Kolmogorov à qui l'on doit la modélisation mathématique actuelle du calcul des probabilités dès 1933 dans son Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung publié à Berlin). Nous ne pouvons prétendre ici en dire plus.

(b) La deuxième propriété, qualifiée d'absolue continuité, pose le problème de sa réciproque. Si l'on a une mesure μ telle que $\mu(E_n) \longrightarrow 0$ lorsque $m(E_n) \longrightarrow 0$, a-t-on aussi $\mu(E) = \int_E f(x)dx$? Cette question est évidemment liée à un problème de dérivation à plusieurs variables. La réponse positive (avec même la seule condition $\mu(E) = 0$ si $m(E) = 0$) fut acquise par Radon (1887-1956) et Nikodym ; J. von Neumann en fournit une élégante démonstration en utilisant l'analyse sur les espaces de Hilbert.

Pour s'éblouir du chemin parcouru depuis la méthode d'Archimède, on lira avec un grand profit le court texte de haute vulgarisation dû à H. Lebesgue lui-même, La Mesure des Grandeurs, dans l'Enseignement Mathématique Vol. (1954).

CINQUIEME CHAPITRE

FONDATION DES GRANDEURS CONTINUES

"These dupes of intellect and logic die
In arguments on being or not being ;
Go, ignoramus, choose your vintage well
From dust like theirs grow none but unripe grapes"

OMAR AL-KHAYYAM
Le Rubayyat

(trad. de Graves)

Autour des années 1870, plusieurs mathématiciens construisent sans fondement géométrique l'architecture des nombres réels comme corps continu de nombres, réalisant complètement le procès opératoire élaboré par Eudoxe vingt deux siècles auparavant. Nous détaillerons surtout les travaux de R. Dedekind, G. Cantor et K. Weierstrass bien que des constructions fort voisines soient nées vers la même époque (J. Tannery, Heine, C. Méray, etc).

Auparavant, nous étudierons la systématisation, tant philosophique que mathématique, des blocages qui ont rendu si difficile la construction des nombres réels alors que l'analyse infinitésimale était algébriquement fondée.

1. LES DOUTES DES MATHEMATICIENS ET LES CERTITUDES DES PHILOSOPHES

1.1 Les doutes sur l'espace euclidien

Malgré l'algébrisation introduite dans le calcul des infiniment petits, malgré la rigueur élaborée par Cauchy et Abel en Analyse, les notions de nombres réels et de grandeurs continues restent mathématiquement floues par manque de base. Pour la notion de continu, la référence constante tant au XVIIIème siècle qu'au début du XIXème siècle est l'espace euclidien.

Prenons comme exemple d'une position techniquement désabusée une citation de H. Hankel quelques années avant les résultats de Dedekind et Cantor qui fondent les réels.

> *"Tout essai de traitement formel des nombres irrationnels qui n'utiliserait pas le concept de grandeur géométrique conduirait aux artifices les plus délicats et abstrus ce qui, quand bien même on pourrait y déployer une totale rigueur, ce dont nous doutons à juste titre, n'aurait pas de valeur scientifique plus élevée"* (Theorie des complexen Zahlensystem 1867 p. 46-47).

Pourtant le doute mathématique sur cette nécessité géométrique à la base de l'Analyse aiguillonne constamment les grands auteurs du début du siècle. Ainsi, dans une lettre écrite à Olbers en 1817, Gauss descend la géométrie de son piédestal :

> *"Je deviens de plus en plus convaincu que la nécessité (physique) de notre géométrie (euclidienne) ne peut pas être prouvée, du moins pas par des raisons humaines ou pour des raisons humaines. Peut-être que dans une autre*

> *vie, nous serons capables de mieux discerner la nature de l'espace, ce qui est présentement inaccessible. D'ici là, nous devons placer la géométrie non pas dans la même classe que l'arithmétique, laquelle est purement a priori, mais dans une même classe que la mécanique".*

Dans une lettre adressée à Bessel en 1830, il précise que :

> *"Si le nombre n'est qu'un produit de notre esprit, l'espace possède en dehors de notre esprit une réalité dont nous ne pouvons pas a priori fixer complètement les lois".*

Nous n'allons pas discuter ici, car ce n'est pas notre propos, de la découverte essentielle de géométries non-euclidiennes (c'est-à-dire la possibilité de raisonner comme en géométrie euclidienne mais en refusant d'une façon ou d'une autre l'axiome d'Euclide). On peut dire que les travaux de J. Bolyai et de N. I. Lobatchevsky ont porté un coup définitif à la volonté de faire reposer l'analyse (nombres réels, grandeurs continues, mesures) sur la Géométrie. Signalons seulement que les premiers papiers tant de Lobatchevsky que de J. Bolyai sont de 1826 (publiés à Kazan malheureusement pour le premier, mais son traité des Fondements de la Géométrie paraît en 1837 dans le Journal für Mathematik).

1.2 Les certitudes de E. Kant

Nous avons déjà noté, dans les commentaires sur le Livre V d'Euclide, les ambiguïtés des Leçons de Géométrie d'A.M. Legendre, leçons élémentaires qui publiées en 1794 ont eu une grande influence sur la jeune et brillante génération de mathématiciens issus de la Révolution Française. D'une part, la théorie des grandeurs est explicitement fondée sur la géométrie, d'autre part, on se complique la vie à suivre les démonstrations eudoxiennes tout en distinguant le cas d'un rapport rationnel du cas irrationnel. Cette attitude représente bien les palinodies de la pensée mathématique de l'époque sur la question des nombres réels.

Du point de vue philosophique, les blocages vont être beaucoup plus systématisés, en particulier sous l'influence kantienne dont nous allons maintenant parler.

Dans la Critique de la Raison Pure (parue en 1781) et dans les Prolégomènes, E. Kant (1724-1804) inaugure une théorie de l'espace et du temps qui en un sens synthétise toute une pensée empiro-criticiste du XVIIIème siècle.

Fort des analyses développées principalement en Grande-Bretagne par Locke, Berkeley et Hume pour citer quelques noms connus, Kant pose également que *"l'expérience est, sans aucun doute, le premier produit que notre entendement obtient en élaborant la matière brute des sensations"* (Introduction, 1ère édition ; Critique de la Raison Pure).

Cependant, Kant s'oppose sciemment aux conclusions négatives de Hume sur l'impossibilité d'une connaissance en distinguant un irrésistible besoin d'universalité.

> *"Il s'en faut bien pourtant que ce soit le seul champ* (l'expérience) *où s'exerce notre entendement et qu'il s'y laisse enfermer. Elle* (l'expérience) *nous dit bien ce qui est, mais elle ne dit pas qu'il faut que cela soit, d'une manière nécessaire, ainsi et non pas autrement. Elle ne nous donne, par cela même, aucune véritable universalité, et la raison qui est si avide de connaissances de cette espèce est plus excitée par elle que satisfaite. Or des connaissances universelles qui présentent en même temps le caractère de la nécessité intrinsèque, doivent, indépendamment de l'expérience, êtres claires et certaines par elles-mêmes ; c'est pour ce motif qu'on les nomme connaissances a priori, tandis que ce qui, au contraire, est puisé uniquement dans l'expérience n'est connu, comme on dit, qu'a posteriori ou empiriquement"* (Ibidem).

L'originalité kantienne est d'établir l'existence d'une connaissance ayant un fondement a priori. Il y a, dit-il,

> *"Certains concepts primitifs et certains jugements que ces concepts produisent et qui doivent être formés entièrement a priori, indépendamment de l'expérience, puisque c'est grâce à eux qu'on a le droit -ou que du moins on croit l'avoir- de dire des objets qui apparaissent à nos sens plus que n'en apprendrait la simple expérience"* (Ibidem).

Dans sa Préface à la seconde édition (1787), Kant étaye son assertion par un exemple mathématique.

> *Le premier qui démontra le triangle isocèle (qu'il s'appelât Thalès ou comme l'on voudra) eut une révélation ;*

> *car il trouva qu'il ne devait pas suivre pas à pas ce qu'il voyait dans la figure, ni s'attacher au simple concept de cette figure comme si cela devait lui en apprendre les propriétés, mais qu'il lui fallait réaliser (ou construire) cette figure, au moyen de ce qu'il y pensait et s'y représentait lui-même a priori par concepts".*

La pensée opère donc soit avec des jugements analytiques ("*ou le prédicat appartient au sujet*") soit avec des jugements synthétiques ou extensifs ("*où le prédicat B est entièrement en dehors du concept A*"). Ainsi, "*tous les corps sont étendus*" appartient au premier type ("*car je n'ai pas besoin de sortir du concept que je lie au mot corps, pour trouver l'étendue unie à lui*") et "*tous les corps sont pesants*" appartient au second type (car il y a adjonction de prédicat, adjonction que seule l'expérience physique de tout un chacun justifie).

Objectivement, dans les jugements synthétiques "*je dois avoir en dehors du concept du sujet quelque chose encore (X) sur quoi l'entendement s'appuie pour reconnaître qu'un prédicat qui n'est pas contenu dans le concept lui appartient cependant*" (Ibidem).

Cet X doit provenir de l'expérience (jugement empirique) mais peut provenir d'autre chose, c'est-à-dire peut avoir une base a priori et donner un <u>jugement synthétique a priori</u>. En mathématiques pures, on n'utilise que de tels jugements (en dehors des analytiques bien entendu). La force de la démonstration kantienne va d'ailleurs provenir de cette remarque. Ainsi, il donne l'exemple de la somme $12 = 7 + 5$, que je peux réaliser à partir de 7 en comptant sur mes doigts (expérience pratique) ou encore avec des objets, mais dont je suis bien convaincu de la valeur générale par intuition a priori indépendamment de l'expérience particulière que j'ai pu faire. On se reportera au texte de Kant lui-même, intitulé : Les jugements mathématiques sont tous synthétiques, dans l'Introduction à la Critique de la Raison Pure (cf. Document n° 9).

Ceci acquis, le vrai problème de la raison pure tient dans cette question : <u>Comment des jugements synthétiques a priori sont-ils possibles</u> ? et la solution de ce problème contiendra la solution du problème suivant : <u>Comment la mathématique pure est-elle possible</u> ?

D'après Kant, le monde extérieur, les objets, produisent sur nous des sensations que notre structure mentale dispose dans l'espace et le temps et conceptualise sous forme d'intuition (<u>Anschauung</u>, littéralement vision) de ce monde extérieur. Des formes de l'intuition comme l'espace et le temps sont alors composées par notre système même de perception et sont a priori. En conséquence, tout ce qui sera expérimenté présentera les caractéristiques spatiotemporelles.

Kant appelle Esthétique Transcendantale *"la science de tous les principes de la sensibilité a priori"*, par opposition à la logique transcendantale, laquelle *"renferme les principes de la pensée pure"*.

Deux conséquences essentielles sont déduites aussitôt par Kant de ces prémisses.

1) Le monde des noumènes. Le monde des objets en soi, qui ne peut pas être expérimenté, c'est-à-dire les noumènes causes de sensation, ne peut absolument pas être connu en soi. Qui plus est, en supposant le contraire, on rajoute alors du spatio-temporel là où il ne saurait en exister. Citons in extenso Kant lui-même :

> *"Que, par suite, l'entendement ne puisse faire de tous ses principes a priori et même de tous ses concepts qu'un usage empirique et jamais un usage transcendantal, c'est là un principe qui a de grandes conséquences si l'on peut arriver à le connaître avec certitude. L'usage transcendantal d'un concept dans un principe quelconque consiste à le rapporter aux choses en général et en soi, tandis que l'usage empirique l'applique simplement aux phénomènes, c'est-à-dire à des objets d'une expérience possible. Or, que seul ce dernier usage puisse avoir lieu, on le voit aisément par là. Tout concept exige d'abord la forme logique d'un concept (de la pensée)en général, et ensuite la possibilité de lui donner un objet auquel il se rapporte. Sans ce dernier il n'a pas de sens et il est complètement vide de tout contenu, quoiqu'il puisse cependant toujours contenir la forme logique qui a pour but de tirer un concept de certaines données. Or, un objet ne peut être donné à un concept autrement que dans l'intuition et quand même une intuition pure ((sensible)) serait possible ((pour nous)) a priori antérieurement à l'objet, cette intuition même ne peut recevoir son objet ni par suite une valeur objective que par l'intuition empirique dont elle est la simple forme. Tous les concepts, et avec eux tous les principes, en tant qu'ils peuvent être a priori, se rapportent donc à des intuitions empiriques, c'est-à-dire à des données pour l'expérience possible. Sans cela ils n'ont pas du tout de valeur objective, mais ils ne sont qu'un simple*

jeu de l'imagination ou de l'entendement avec leurs représentations respectives. Que l'on prenne, par exemple, seulement les concepts de la Mathématique, en les envisageant tous dans leurs intuitions pures : l'espace a trois dimensions, entre deux points on ne peut tirer qu'une ligne droite, etc. Quoique tous ces principes et la représentation de l'objet dont s'occupe cette science soient produits tout à fait a priori dans l'esprit, ils ne signifieraient pourtant absolument rien, si nous ne pouvions pas toujours en montrer la signification dans des phénomènes (dans des objets empiriques). Aussi est-il indispensable de rendre sensible un concept abstrait, c'est-à-dire de montrer dans l'intuition un objet qui lui corresponde, parce que sans cela le concept n'aurait, comme on dit, aucun sens, c'est-à-dire aucune signification. La Mathématique remplit cette condition par la construction de la figure qui est un phénomène présent aux sens (bien que produit a priori). Le concept de la quantité dans cette même science cherche son soutien et son sens dans le nombre, et celui-ci dans les doigts ou dans les grains des tables à calculer, ou dans les traits et les points mis sous les yeux. Le concept reste toujours produit a priori avec les principes ou les formules synthétiques qui résultent de ces concepts, mais leur usage ou leur application à de prétendus objets ne peuvent en définitive être cherchés que dans l'expérience dont ils constituent la possibilité a priori (quant à la forme).

Il est particulièrement intéressant de noter que les premières antimonies relevées par Kant (et qui tiennent à l'erreur transcendantale d'interprétation de notre connaissance des phénomènes comme une connaissance des choses en soi) soient précisément celles qui nous occupent depuis Zénon sur le contenu et l'indivisible, sur l'infini et le fini :

<u>Thèse</u> : Le monde a un commencement dans le temps et il est aussi limité dans l'espace.

<u>Antithèse</u> : Le monde n'a ni commencement dans le temps, ni limite dans l'espace, mais il est infini aussi bien dans le temps que dans l'espace.

<u>Thèse</u> : Toute substance composée, dans le monde, se compose de parties simples et il n'existe absolument rien que le simple ou ce qui en est composé.

<u>Antithèse</u> : Aucune chose composée, dans le monde, n'est formée de parties simples et il n'existe rien de simple dans le monde.

On trouvera les explications de Kant dans le document n° 10 (<u>Antinomies de la Raison Pure</u> ; Premier et Deuxième conflit des Idées Transcendantales).

La deuxième conséquence déduite par Kant est essentielle quant aux mathématiques.

2) <u>Les formes a priori de l'intuition</u>. *"Il y a deux formes pures de l'intuition sensible, comme principes de la connaissance a priori, savoir : l'espace et le temps"*.

Kant donne quatre arguments pour établir que l'espace est une forme a priori donc universelle de l'intuition. Ne nous intéressons qu'aux arguments épistémologiques et liés aux mathématiques.

- L'espace n'est pas un concept discursif, mais une pure intuition. Il n'y a qu'un <u>seul</u> espace.

> *"C'est ainsi que tous les principes géométriques, -par exemple que dans un triangle la somme de deux côtés est plus grande que le troisième,- ne sont jamais déduits des concepts généraux de la ligne et du triangle, mais de l'intuition et cela a priori et avec une certitude apodictique"*.

Kant, dans la première édition de la <u>Critique de la Raison Pure</u>, assure que l'on pourrait se borner à dire *"qu'on n'a pas trouvé d'espace qui eût plus de trois dimensions"*.

- L'espace est représenté comme une grandeur infinie <u>donnée</u>. Ce ne peut être un concept lequel est susceptible d'une multitude de représentations diverses.

- La géométrie est une science qui détermine synthétiquement et cependant a priori les propriétés de l'espace. Il faut que l'espace soit originairement une intuition ; car, d'un simple concept on ne peut tirer aucune proposition qui dépasse le concept, ce qui a lieu cependant en géométrie.

> *"En effet, les propositions géométriques sont toutes apodictiques, c'est-à-dire qu'elles impliquent la conscience de leur nécessité , celle-ci, par exemple : l'espace n'a que trois dimensions ; mais des propositions de cette nature ne peuvent pas être des pro-*

positions empiriques ou des jugements d'expérience, ni dériver de ces jugements".

Dès lors, si mon intuition peut anticiper en géométrie sur ce qui sera trouvé par l'expérience, c'est que la géométrie, c'est-à-dire l'espace euclidien seulement, fait partie de mes moyens de percevoir. Derechef, la notion de grandeur et de mesure ne se peut elle-même concevoir que dans un cadre spatio-temporel.

"Nul ne peut définir le concept de la grandeur en général sinon en disant, par exemple, qu'elle est la détermination d'une chose qui permet de penser combien de fois l'unité est continue dans cette chose. Mais ce combien se fonde sur la répétition nécessaire, par conséquent, sur le temps et sur la synthèse (de l'homogène) dans le temps" (Critique de la Raison Pure, Livre II, Chap. III).

La leçon d'Eudoxe et du Livre V est complètement occultée.

En un mot, Kant fonde sa démonstration sur la possibilité unique de la géométrie, donc de la seule géométrie euclidienne, comme connaissance synthétique a priori. Le démenti mathématique sera sévère !

Il est piquant, mais au fond réconfortant, de reprendre les paroles de Kant lui-même pour conclure :

"La solidité des mathématiques repose sur des définitions, des axiomes et des démonstrations. Je me contenterai donc de montrer qu'aucun de ces éléments, dans le sens où le prend le mathématicien, ne peut être fourni ni imité par la philosophie ; que le géomètre, en suivant sa méthode dans la philosophie, ne construirait que des châteaux de cartes et que le philosophe, en appliquant la sienne sur le terrain de la mathématique, ne peut faire qu'un verbiage. Toutefois, la philosophie a un rôle à jouer dans la mathématique : elle en fait connaître les limites, et le mathématicien lui-même, quand son talent n'est pas déjà circonscrit par la nature et restreint à sa sphère, ne peut ni repousser les avertissements de la philosophie, ni s'élever au-dessus d'eux" (Critique de la Raison Pure, Théorie transcendantale de la méthode, 1ère section).

1.3 Le scientisme positiviste : un pragmatisme dogmatique en mathématiques

Les mathématiques, comme arrangement logique linéaire -et réputé inébranlable-, ne cessent de fasciner les philosophes occidentaux jusqu'au XIXème siècle. Depuis le XVIIème siècle d'ailleurs, la fascination s'étend à la Science entière, dont les réalisations techniques distillent peu à peu la notion de progrès indéfini. Le Philosophe devient alors, au dire d'Auguste Comte, "le spécialiste des généralités". Il peut être intéressant de noter ce que ce dernier pense du statut des objets mathématiques et nous utiliserons son Cours de philosophie positive dont la parution s'étale de 1830 à 1842.

D'une part,

> *"Nous définirons avec exactitude la science mathématique en lui assignant pour but la mesure indirecte des grandeurs et disant qu'on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles"*
> (3ème Livre, 71).

L'avantage de cette définition, avantage souligné par Comte, est de ne pas restreindre les mathématiques à un art, mais d'en faire une véritable science, dotée d'une logique interne par ses enchaînements d'opérations intellectuelles. D'ailleurs,

> *"C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est que la science"*
> (3ème Livre, 71-72).

Auguste Comte divise la mathématique en partie concrète (*"connaître avec précision les relations existantes entre les quantités que l'on considère"*) et abstraite (*"déterminer des nombres inconnus, lorsqu'on sait quelles relations précises les lient à des nombres connus"*). Il est notable que ces "quantités", ces "nombres" n'aient chez Comte pas de statut autre qu'opératoire. Il y a total abandon des problèmes en soi d'existence, mais aussi des problèmes de cohérence, de non-contradiction. Où sont donc les idées générales du Philosophe ? Et que peut-il apporter vraiment ? Poursuivons.

> *"La partie concrète des mathématiques se compose de la géométrie et de la mécanique rationnelle"* (3ème Livre I 76-77).

La partie abstraite, qu'Auguste Comte appelle "le calcul", est encore bien éloignée de ce que nous appellerions l'algèbre aujourd'hui. Mais une telle notion générale d'algèbre est à peine en train de se constituer avec Peacock et Hamilton au moment où écrit Comte. Il reste au niveau équation et calcul des solutions.

Le passage se fait du concret à l'abstrait :

> *"J'indiquerai pour exemple les puissances devenues en général fonctions abstraites, depuis seulement les travaux de Viète et de Descartes. Ces fonctions x^2, x^3, qui, dans notre analyse actuelle, sont si bien conçues comme simplement abstraites, n'étaient, pour les géomètres de l'antiquité, que des fonctions entièrement concrètes, exprimant la relation de la superficie d'un carré ou du volume d'un cube à la longueur de leur côté"* (4ème Livre I 92-93).

La difficulté éprouvée à mettre en équation les questions mathématiques :

> *"C'est essentiellement à cause de l'insuffisance du très petit nombre d'éléments analytiques que nous possédons que la relation du concret à l'abstrait est ordinairement si difficile à établir"* (Ibidem, 103).

Auguste Comte, restant dans le domaine opératoire, réussit ce tour de force de ne pas parler des objets précis sur lesquels portent les opérations. Il souhaite étendre ces opérations *"en établissant un mode général de dérivation"*, pour dépasser ces notions que Comte (on est au 19ème siècle !) manie séparément : les différentielles à la Leibniz, les premières et dernières raisons des accroissements ou fluxions à la Newton ou les dérivées à la Lagrange. La géométrie, qui a pour objet *"la mesure de l'étendue"*, réduit en fait *"les comparaisons de toutes les espèces d'étendues, volumes, surfaces ou lignes, à de simples comparaisons de lignes droites"*.
En outre, la géométrie repose

> *"sur un certain nombre de phénomènes primitifs qui, n'étant établis par aucun raisonnement, ne peuvent être fondés que sur l'observation et constituent la base nécessaire de toutes les déductions"* (Livre X, 193-194).

Enfin, Comte limite singulièrement la méthode mathématique et son champ d'investigations :

"Nous savons que l'application de l'analyse mathématique, par sa nature, ne peut jamais commencer aucune science quelconque, puisqu'elle ne saurait avoir lieu que lorsque la science a déjà été assez cultivée pour établir, relativement aux phénomènes considérés, quelques équations qui puissent servir de point de départ aux travaux analytiques".

Tout cela est bien pâle, peu utilisable et revient finalement à expliquer *"l'opium par sa vertu dormitive"*.

Après des explications "idéalistes" (Platon, Kant et Hegel) et "positivistes" (Comte) ou "réalistes" (Aristote) sur les mathématiques et les grandeurs, il conviendrait de tirer au clair le point de vue déduit du matérialisme historique et le point de vue empiriste. Il nous a paru préférable de reporter cette analyse au chapitre suivant, après la construction des nombres réels.

1.4 Les maladresses concernant les techniques de l'analyse

Nous avons signalé que A. Cauchy avait pris comme concept de base celui de limite autour duquel il construisait toute l'Analyse. Cependant, le domaine de variation des variables, la droite réelle, restait dans le vague. Par suite, le critère de Cauchy par exemple ne pouvait recevoir de démonstration satisfaisante (cf. Chap IV § 6). C'est plutôt avec les fonctions continues que les difficultés s'explicitèrent. Partons de la définition de la continuité donnée par Cauchy en 1821 dans son Cours d'Analyse.

"Soit $f(x)$ *une fonction de la variable* x *, et supposons que, pour chaque valeur de* x *intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de* x *comprise entre ces limites, on attribue à la valeur* x *un accroissement infiniment petit* α *, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence*

$$f(x+\alpha) - f(x) ,$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α *et de la valeur de* x *. Cela posé, la fonction* $f(x)$ *sera, entre les deux limites assignées à la variable* x *, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de* x *intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence*

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α *. En d'autres termes, la fonction* $f(x)$ *restera continue par rapport à* x *entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même".*

Mais Cauchy traite aussitôt de la continuité en **un** seul point.

"On dit encore que la fonction $f(x)$ *est, dans le voisinage d'un valeur particulière attribuée à la variable* x *, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de* x *, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit".*

Techniquement parlant, Cauchy peut facilement établir la continuité des fonctions telles que $\sin x$ ou $\text{Arc}\cos x$.

Il passe d'ailleurs aussitôt aux fonctions de plusieurs variables et démontre l'essentiel

"Théorème I. - Si les variables $x, y, z, \ldots$ *ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées* $X, Y, Z, \ldots$*, et que la fonction* $f(x, y, z, \ldots)$ *soit continue par rapport à chacune des variables* $x, y, z, \ldots$ *dans le voisinage du système des valeurs particulières*

$$x = X \ , \quad y = Y \ , \quad z = Z \ , \ \ldots \ ,$$

$f(x, y, z, \ldots)$ *aura pour limite* $f(X, Y, Z, \ldots)$*."*

Cependant, Cauchy commet l'erreur de définir la continuité de $f(x,y)$ à partir de la continuité de $f(x,y_o)$ ou $f(x_o,y)$ pour y_o et x_o fixés. C'est toujours la même erreur d'uniformité qui joue.

Il faut reconnaître que la définition de la continuité par Cauchy n'est pas encore complètement mathématisée. La définition actuellement utilisée au niveau élémentaire (avec les ε et les δ) remonte à Weierstrass.

Après cela, le théorème des fonctions composées, à savoir la composée de deux fonctions continues est continue, est démontré.

Brutalement, la Géométrie fait son apparition :

"Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes continues droites ou

courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :

Théorème IV. - Si la fonction $f(x)$ *est continue par rapport à la variable* x *entre les limites* $x = x_o$, $x = X$, *et que l'on désigne par* b *une quantité intermédiaire entre* $f(x_o)$ *et* $f(X)$, *on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x *comprises entre* x_o *et* X .

Démonstration. - Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle conpris entre les coordonnées qui correspondent aux abscisses x_o *et* X *; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise."*

Le texte poursuit par une simple visualisation géométrique et l'on retrouvera encore cette pratique pour la démonstration du théorème de Rolle dans des Traités d'Analyse fort sérieux aux alentours des années 1900. Cette visualisation géométrique avait déjà servi à Gauss pour "démontrer" le théorème fondamental de l'algèbre (cf. Chap. III § 6).

Bien entendu, le théorème des valeurs intermédiaires ci-dessus pose spécifiquement le problème de la nature du domaine de la variable. Quelques années auparavant, Bolzano dans son mémoire de 1817 (Rein analytischer Beweis...) avait tenté d'en donner une démonstration correcte. L'étude de ce Mémoire de Bolzano est fort enrichissante car certaines techniques qui y sont développées vont devenir des classiques en Analyse. Il est d'autant plus étonnant que ce Mémoire ne figure pas dans les Schriften de Bolzano réunis en 5 volumes entre 1930 et 1948. En posant $g(x) = f(x) - b$ on ramène facilement le problème au suivant : si $g : [x_o, X] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x_o) < 0$, $g(X) > 0$ et g continue, il existe au moins un $x \in [x_o, X]$ tel que $g(x) = 0$. Appelons $M(x)$ la propriété pour un point x de $[x_o, X]$ que $f(y) < 0$ pour tout $y \in [x_o, x]$. Bien entendu, si $M(x)$ est vraie, ainsi en est-il de $M(y)$ pour tout $x_o \leq y \leq x$.

Muni de cette seule propriété pour M , Bolzano établit qu'il existe une "quantité" X_o qui est la borne supérieure des quantités x pour lesquelles $M(x)$ a lieu. En termes modernes, il suffirait de dire que l'ensemble des réels $x \in [x_o, X]$ tels que $M(x)$ soit vraie (ensemble non vide puisqu'il contient x_o et se trouve majoré par X) possède une borne supérieure.

Admettons un instant ce résultat et soit X_o le nombre réel annoncé. Par continuité et définition de la borne supérieure, on a $g(X_o) \leqslant 0$. Cependant, pour tout x tel que $X > x > X_o$, il existe x_1 satisfaisant $x > x_1 > X_o$ et $g(x_1) > 0$ par la propriété de définition de X_o . Encore par continuité, on en déduit $g(X_o) \geqslant 0$ et donc $g(X_o) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour établir son résultat de borne supérieure, Bolzano inaugure un raisonnement de découpage dyadique. L'obstacle linguistique empêchant de citer in extenso Bolzano, contentons-nous de décrire rapidement.

Ou bien X possède la propriété M et donc X est la borne supérieure cherchée. Ou bien X ne possède pas cette propriété et l'on considère le milieu $\frac{X + x_o}{2}$. Ou bien $\frac{X + x_o}{2}$ possède M et on considère alors le milieu $\frac{1}{2}\left[\frac{X + x_o}{2} + X\right]$, ou bien $\frac{X + x_o}{2}$ ne possède pas M et on considère le milieu $\frac{1}{2}\left[\frac{X + x_o}{2} + x_o\right]$. Quoiqu'il en soit, à la nouvelle étape, on est réduit à chercher le nombre X_o cherché dans un intervalle de longueur au plus $\frac{X - x_o}{4}$. En continuant, on a donc une famille de segments emboîtés, de longueur $2^{-n}(X-x_o)$ et Bolzano conclut à la convergence de la suite constituée par les extrémités droites de tels segments. Cette conclusion n'est pas fondée dans le cadre que Bolzano s'est imposé (Cela revient à admettre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ ou encore que 1 est la borne supérieure de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}$ lorsque N varie selon les entiers naturels, précisément une propriété du type de celle que l'on veut établir). La méthode de raisonnement est très neuve cependant et va servir constamment une fois l'axiomatisation de $\mathbb{R}$ effectuée.

Bolzano est un précurseur étonnant, mais pendant 50 ans, la "démonstration" visuelle de Cauchy pour le théorème des valeurs intermédiaires sera considérée comme satisfaisante par la plupart des mathématiciens. Les maladresses dans l'emploi des techniques de l'Analyse seront peu à peu stigmatisées comme nous l'avons déjà dit grâce souvent à des exemples tirés des séries trigonométriques et tout au long des cinquante ans qui séparent la publication du Cours de Cauchy de celle des textes cruciaux de Cantor ou Dedekind vers 1872 et dont nous parlerons plus loin. Les noms d'Abel, de Riemann et de Weierstrass sont ceux qui reviennent le plus souvent.

Il importe peut-être plus de dire que le critère de Cauchy, admis par Cauchy faute de pouvoir faire autrement puisque le domaine des nombres réels n'est pas précisé, et employé sous la forme des segments emboîtés (cf. Chapitre V) ou du développement décimal illimité d'un nombre réel, permettait à nos yeux de fonder l'Analyse axiomatiquement (cf. Chapitre V § 7 et 8).

Indiquons quelques correctifs apportés au travail de Cauchy.

Weierstrass et Heine vers les années 1870 dégageront nettement les propriétés d'uniforme continuité, et d'uniforme convergence. Cela les amènera eux et leurs successeurs à envisager des propriétés de compacité (soit sous la forme du théorème dit de Bolzano-Weierstrass : tout ensemble infini borné de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation ; soit sous la forme du théorème assurant qu'une fonction continue sur un compact y est bornée et y atteint ses bornes ; soit enfin sous la forme du théorème dit de Heine-Borel-Lebesgue assurant qu'un recouvrement ouvert fini peut être extrait d'un recouvrement ouvert quelconque d'un compact).

Darboux sera le premier à noter que le théorème des valeurs intermédiaires ne caractérise pas les fonctions continues (Il n'est pas difficile de montrer, avec le théorème des accroissements finis, que la dérivée d'une fonction satisfait toujours le théorème des valeurs intermédiaires).

2 LA CONSTRUCTION DES REELS PAR R. DEDEKIND

Cette construction est explicitée dans un ouvrage fondamental de R. Dedekind : Stetigkeit und Irrationale Zahlen paru en 1872, ouvrage complété par un autre : Was sind und was sollen die Zahlen publié en 1888.

R. Dedekind fait explicitement appel d'ailleurs au Livre V des Eléments d'Euclide en précisant : *"Je n'ai jamais cru avoir mis à jour dans mon ouvrage même un seul phénomène nouveau, ou un seul objet nouveau de la recherche mathématique"*.

2.1 $\mathbb{R}$ comme domaine inextensible

Son point de départ est l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et il utilise une intuition d'origine géométrique. Sur la droite géométrique, un point quelconque M la divise en deux classes, la classe des points situés à droite de M et la classe de ceux situés à gauche de M. Réciproquement, une telle division de la droite est nécessairement réalisée par un point. Pour Dedekind, cette propriété caractérise la notion de continu. Il faut préciser. Il va s'agir de transcrire cette intuition sur $\mathbb{Q}$, en remplaçant gauche et droite par la relation d'ordre.

Dedekind appelle donc coupure (C_1, C_2) de $\mathbb{Q}$ une partition ($C_1 \cup C_2 = \mathbb{Q}$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$) de $\mathbb{Q}$ en deux classes non vides C_1 et C_2

de sorte que tout nombre de la première classe C_1 soit strictement supérieur à tout nombre de la seconde classe C_2.

On constate qu'il existe deux sortes de coupures fort différentes.

(1) La première sorte est celle des coupures telles qu'il existe un nombre rationnel maximum dans C_2 ou bien un nombre rationnel minimum dans C_1.

(2) La deuxième sorte est celle des coupures telles qu'il n'existe ni nombre rationnel maximum dans C_2 ni nombre rationnel minimum dans C_1.

Il est en effet facile de montrer qu'on ne peut avoir que ces deux possibilités. Dans le premier cas, si par exemple x_2 est le nombre rationnel maximum de C_2, il est clair que :

$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q} , x > x_2\}$$
et
$$C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q} , x \leqslant x_2\} .$$

Bref, la coupure (C_1, C_2) est en fait déterminée par le nombre rationnel x_1. Réciproquement, x_1 définit la coupure (C_1, C_2) tout comme la coupure (C_1, C_2) détermine le nombre x_1 si l'on veut bien convenir que seule est désormais considérée la coupure (C_1, C_2) pour laquelle le maximum x_2 est dans C_2.

Mais le deuxième cas peut fort bien se présenter. L'exemple donné par Dedekind est désormais classique. On pose :

$$C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q} , x \leqslant 0 \text{ ou } x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$$
$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Q} , x \notin C_2\} .$$

On a bien réalisé une partition de $\mathbb{Q}$ en deux sous-ensembles non vides et disjoints. On vérifie que $x > y$ pour tout x de C_1 et tout y de C_2, puisque $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné. Cependant, il ne peut y avoir de rationnel maximum dans C_2 (ou de minimum dans C_1). La démonstration se fonde sur le fait qu'un tel maximum x_2 par exemple (ou un tel minimum x_1) devrait satisfaire $x_2^2 = 2$ (ou $x_1^2 = 2$), équation non résoluble en nombres rationnels (En effet, on ne peut avoir $x_2^2 > 2$. Si $x_2^2 < 2$, on note que $(x_2 + y)^2 = x_2^2 + 2x_2y + y^2 < x_2^2 + (2x_2+1)y < 2$ en prenant $y \in \mathbb{Q}$, $y < 1$, $y > 0$ et $y < \frac{2-x_2^2}{2x_2+1}$. Par suite $x_2+y > x_2$ et $x_2+y \in C_2$ donc x_2 n'est pas le maximum de C_2. Donc $x_2^2 = 2$. Le cas de x_1 se traite de façon similaire). Par suite, une coupure (C_1, C_2) du deuxième type n'est déterminée par aucun nombre rationnel.

Dès lors, pour employer les termes de Dedekind,

> *"nous créons avec une telle coupure un nouveau nombre irrationnel α, complètement déterminé par cette coupure. Nous dirons que le nombre α correspond à la coupure (C_1, C_2) ou encore qu'il crée cette coupure".*

Sur l'ensemble des nombres rationnels et des nouveaux nombres (créés par les coupures du type 2), Dedekind définit quelques relations à partir des coupures (moyennant la convention dite pour les coupures de type 1) :

- d'une part une relation $(C_1,C_2) \leqslant (C'_1,C'_2)$ selon $C'_2 \supset C_2$;

- d'autre part une addition $(C_1,C_2) + (C'_1,C'_2) = (C''_1,C''_2)$ selon $C''_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ ,\ x = x_2 + x'_2$ où $x_2 \in C_2\ ,\ x'_2 \in C'_2\}$.

R. Dedekind montre explicitement que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble créé noté A . D'autre part, il vérifie que l'addition définit bien une coupure et qu'elle structure l'ensemble créé en un groupe abélien (Pour les démonstrations mathématiques, cf. Document n° 4). En fait, il établit que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, contenant $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps ordonné.

Il est fort important que R. Dedekind ne s'arrête pas là et établisse (Théorème 4 du Chapitre V de l'ouvrage) qu'en renouvelant l'opération (celle qui a permis de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$) on ne trouve que $\mathbb{R}$. De façon imagée, $\mathbb{R}$ est complet ou inextensible et cette propriété d'inextensibilité (Vollständigkeit) est caractéristique de ce que Dedekind appelle le continu. Mathématiquement, cela veut dire que si C_1 et C_2 sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et dont la réunion est $\mathbb{R}$, tels que tout x_1 de C_1 majore strictement tout x_2 de C_2 , alors il existe un unique nombre réel x qui est inférieur ou égal à tout élément de C_1 et supérieur ou égal à tout élément de C_2 .

2.2 La notion de continu

Historiquement, voilà la première définition, en outre constructive, de la notion de domaine continu de grandeurs.

> *"Si l'on sépare toutes les grandeurs d'un domaine constitué de façon continue en deux classes telles que toute grandeur de la première classe est plus petite que toute grandeur de la deuxième classe, alors il existe ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la deuxième classe une grandeur qui est la plus petite".*

Notons au passage une petite controverse typiquement mathématique entre Cantor et Dedekind, justement sur "l'essence de la continuité". Cantor, dans une lettre du 17 mai 1877, fait remarquer à Dedekind que la propriété pour un domaine de grandeurs ordonnées que toute coupure soit représentée par une grandeur ne peut suffire à garantir la notion de continuité puisque

> *"cette propriété appartient aussi au système de tous les nombres entiers, qui peut pourtant être considéré comme un prototype de la discontinuité".*

La réponse de Dedekind, du 18 mai, manifeste que le langage elliptique usuel (et non mathématique) est fautif (*"Nous courons le risque de discuter sur des mots plus que sur des choses"*). Et Dedekind de signaler que les domaines de grandeurs qu'il appelle continus sont totalement ordonnés d'une part, d'autre part sont tels qu'entre deux grandeurs distinctes il y en a une infinité d'autres (ce qui n'est pas le cas de Z), enfin et enfin seulement prossèdent la propriété relative aux coupures. Si Dedekind met l'accent sur cette dernière propriété (*"essence de la continuité"*), c'est qu'elle lui paraît fondamentale. Malicieux, Dedekind fait remarquer que l'ordre intervient tout autant mais qu'en mettant tout dans un même sac, on émousserait ce qui *"constitue spécifiquement la pointe de son travail"*, qui réside précisément dans la place prépondérante donnée à la propriété relative aux coupures. *"Il est d'ailleurs bien vrai qu'il reste encore du travail pour s'émanciper de la notion d'ordre pour définir le continu"* (cf. § 8).

R. Dedekind est parfaitement conscient que l'originalité de sa découverte est celle du caractère inextensible de $\mathbb{R}$. A quelques détracteurs comme Pasch, Weber ou R. Lipschitz qui prétendent que Dedekind n'a rien fait que de *"reprendre les Anciens"*, c'est-à-dire le Livre V des Proportions, ce dernier répond fortement que sans l'intervention de la continuité telle que définie par lui, on peut créer avec Euclide des corps à partir des raisons de grandeurs, mais on ne peut distinguer le corps maximal et le système d'Euclide *"reste debout sans la continuité"*.

> *"J'en reste à mon affirmation que les principes euclidiens seuls, sans adjonction du principe de continuité, qui n'est pas contenu en eux, sont incapables de fonder une théorie complète des nombres réels comme rapports de grandeurs... Mais inversement, grâce à ma théorie des nombres irrationnels, le modèle parfait d'un domaine continu est produit, et ce domaine est donc pour cela capable de caractériser tout rapport de grandeur par un rapport numérique déterminé qui y est contenu"* (Lettre à R. Lipschitz, 27 juin 1876).

Effectivement, le concept de coupure n'est pas nouveau avec Dedekind. Déjà Hamilton vers 1835 l'avait explicitement utilisé (Transactions of the Royal Irish Academy de 1837). D'ailleurs, la Définition 6 du Livre V des Eléments d'Euclide pourrait s'énoncer sans contorsion en termes de coupures avec les rationnels strictement positifs bien sûr : (A,B;C,D) sont proportionnelles si A et B déterminent la même coupure que C et D , la coupure déterminée par deux grandeurs A et B étant la suivante :

$$C_1 = \left\{\frac{m}{n} \ ; \ m \in \mathbb{N} \ , \ n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ nA > mB \right\}.$$

$$C_2 = \left\{\frac{m}{n} \ ; \ m \in \mathbb{N} \ , \ n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ nA \leqslant mB \right\}.$$

C'est bien la "continuité" qui est la découverte capitale de R. Dedekind et cette continuité a une force opératoire très grande. On sait qu'avec elle il est bien facile d'établir le fameux théorème de Bolzano sur les valeurs intermédiaires d'une fonction continue sur un intervalle, théorème dont nous avons déjà parlé. Qui plus est, la définition avec les coupures permet une présentation logique de la notion de limite d'une suite, par exemple d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ croissante bornée de nombres réels. En effet, on détermine deux classes C_1 et C_2 de nombres réels :

$$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ . Pour tout entier } n \text{ , il existe un entier } m$$
$$m > n \text{ et } x > x_m \}.$$

$$C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ ; \ x \notin C_2 \} \ .$$

Grâce à l'hypothèse de croissance et de borne, il est facile de noter que C_1 et C_2 ne sont pas vides, sont disjoints, que $C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}$ et que (C_1,C_2) réalise une coupure de $\mathbb{R}$. Cette coupure (C_1,C_2) détermine précisément un nombre réel x , limite de la suite x_n .

En toute logique, il reste à vérifier que cette notion de limite coïncide avec la notion usuelle (définie avec les ε) ce qui ne pose pas de difficulté.

2.3 $\mathbb{R}$ construit à partir de l'arithmétique

Pourtant, R. Dedekind insiste beaucoup plus dans son ouvrage sur un autre aspect de sa construction. Dans une lettre du 10 juin 1876 à R. Lipschitz, il déclare :

> *"Je suppose comme base à propos de laquelle on doit naturellements'être entendu, l'Arithmétique des nombres rationnels, supposée bien fondée, et rien d'autre ; je*

montre dans mon ouvrage que, sans immixtion de choses étrangères, on peut constater dans le domaine des nombres rationnels un phénomène (la coupure) qui peut être employé à compléter ce domaine par une création unique de nombres nouveaux irrationnels".

Et plus loin :

"Je montre que l'addition des nombres réels peut être définie en toute précision, et j'affirme qu'en s'appuyant sur cela on peut démontrer en toute rigueur les propositions qui constituent l'édifice de l'Arithmétique" (Dedekind emploie ici le mot Arithmétique au sens actuel d'Analyse).

Certes, l'intuition géométrique disparaît de la construction de Dedekind et ce dernier a bien raison d'affirmer que l'espace euclidien, tel qu'il est axiomatisé par Euclide, tient debout sans la continuité, et que le côté intuitif de la représentation spatiale n'est pas probant. D'ailleurs, par une sorte de vigoureuse réponse à E. Kant :

"Le concept d'espace est pour moi complètement indépendant, complètement séparable de la représentation de la continuité et cette dernière propriété ne sert qu'à spécifier du concept général d'espace le concept spécial d'espace continu".

Cependant, la construction de Dedekind est-elle légitimée ? Dedekind précisera quelques années après la parution de son ouvrage qu'une coupure définit un nombre α , lequel est alors doué d'une existence propre grâce *"à la puissance créatrice de notre esprit"*. Ce dernier point ontologique ne peut être tiré au clair que dans un cadre constructif des mathématiques dûment précisé. Par exemple, la Théorie des Ensembles que justement G. Cantor commençait à élaborer autour de cette même année 1872.

Avec $\mathbb{Q}$ et la Théorie des Ensembles on peut alors entièrement construire $\mathbb{R}$.

Dedekind deviendra conscient de ce fait et dans Was sind und was sollen die Zahlen, il s'ingénie à fonder d'abord les entiers, puis $\mathbb{Q}$ en utilisant les idées de théorie des ensembles de Cantor. Cependant, sa construction est très contournée. C'est G. Péano qui élabore un système souple et simple d'axiomes pour les entiers, système qui est toujours utilisé aujourd'hui et sur lequel nous reviendrons (cf. Chap. VI § 2).

Il est honnête d'ajouter que la méthode de R. Dedekind fut également et indépendamment trouvée par J. Tannery et exposée dans son Introduction à l'étude des fonctions d'une variable (1886).

3. LA CONSTRUCTION DES REELS PAR G. CANTOR

3.1 Les suites fondamentales

Cette construction est fournie dans les quatre premières pages d'un article paru aux Mathematische Annalen de 1872 (Vol. 5 p. 123-132) sous le titre : "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" et elle commente un article de E. Heine paru en 1870 dans Journal für reine und angewandte Mathematik (vol. 71 p. 352). Notons dès le départ que Cantor se pose des problèmes d'analyse "concrète" (séries de Fourier) et qu'à cette occasion, il est contraint de développer une artillerie abstraite.

L'idée de base est celle de suite fondamentale (Fundamental Reihe). Cantor part lui aussi des nombres rationnels (qu'il estime bien construits) et définit une suite fondamentale $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, où $x_n \in \mathbb{Q}$, que nous appelons aujourd'hui suite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un N et pour tout $n \geqslant N$ et tout m, on a $|x_{n+m} - x_n| \leqslant \varepsilon$.

Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ de telles suites fondamentales de nombres rationnels, Cantor établit plusieurs opérations :

- d'une part, une addition : la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} + \{y_n\}_{n\geqslant 1}$ est la suite $\{x_n+y_n\}_{n\geqslant 1}$ dont on vérifie aisément qu'elle est fondamentale ;

- d'autre part, une multiplication : la suite $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \cdot \{y_n\}_{n\geqslant 1}$ est la suite $\{x_n y_n\}_{n\geqslant 1}$ dont on vérifie aisément qu'elle est fondamentale ;

- une relation d'ordre enfin $\leqslant$; $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \leqslant \{y_n\}_{n\geqslant 1}$ s'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $y_n \geqslant x_n$.

Cantor, en fait, est plus précis. Lorsque $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{y_n\}_{n\geqslant 1}$ sont deux suites fondamentales, trois possibilités se présentent (et s'excluent mutuellement, comme il n'est pas difficile de le voir) :

- ou bien il existe un nombre rationnel $\alpha > 0$ et il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $y_n - x_n \geqslant \alpha$;

- ou bien il existe un nombre rationnel $\alpha > 0$ et il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $-\alpha \geqslant y_n - x_n$;

- ou bien pour tout nombre rationnel $\alpha > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|y_n - x_n| \leqslant \alpha$.

Pour le premier cas, on note que $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \leqslant \{y_n\}_{n\geqslant 1}$ et dans le troisième cas $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \geqslant \{y_n\}_{n\geqslant 1}$. Dans le deuxième cas, on devrait avoir $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \geqslant \{y_n\}_{n\geqslant 1}$ et $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \leqslant \{y_n\}_{n\geqslant 1}$. On conviendra dans ce cas d'une égalité $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \equiv \{y_n\}_{n\geqslant 1}$, c'est-à-dire en fait d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{E}$.

On vérifie que la classe d'équivalence de la somme de deux suites fondamentales (ou le produit) ne dépend que des classes d'équivalence des suites additionnées (ou multipliées).

On appelle <u>nombre réel d'ordre 1</u> une classe d'équivalence de suites fondamentales. Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est ainsi structuré en corps commutatif totalement ordonné et de noter que $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ordonné de $\mathbb{R}$ à condition d'associer à tout rationnel x la classe d'équivalence de la suite fondamentale $\{x_n = x\}_{n\geqslant 1}$. On réservera l'appellation <u>d'ordre réel d'ordre 0</u> aux rationnels.

Cantor appelle ensuite <u>nombre réel d'ordre 2</u> la classe d'équivalence associée à une suite fondamentale de nombres réels d'ordre 1. Plus généralement, on passe aux nombres réels d'ordre n.

3.2 <u>Le caractère complet de $\mathbb{R}$</u>

Le point essentiel est que l'ensemble des nombres réels d'ordre 2 ne se distingue pas, en tant qu'ensemble, de celui des nombres réels d'ordre 1. En langage moderne, $\mathbb{R}$ est <u>complet</u>, c'est-à-dire qu'une suite fondamentale de nombres réels converge vers un nombre réel.

En effet, si $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels, et x un nombre réel, on peut dire que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ selon la définition : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N et pour tout $n \geqslant N$, on a $|x_n - x| < \varepsilon$ (Ici, on peut prendre aussi bien ε réel que seulement rationnel, sans changer la définition ; la valeur absolue d'un nombre réel étant facile à définir).

Avec cette définition de la limite, on constate que si $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite fondamentale de nombres rationnels et x le nombre réel qui lui est associé, on a : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Il convient aussi de montrer que si $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels, il existe au plus un nombre réel x qui soit la limite de la suite.

Soit alors $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ un nombre réel d'ordre 2, c'est-à-dire une suite fondamentale de nombres réels. Chaque x_n est défini par une classe d'équivalence de suites fondamentales de nombres réels d'ordre 0. On choisit un représentant $\{x_{n,m}\}_{m\geqslant 1}$ où $x_{n,m}$ est rationnel. Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour tout n fixé, il existe un $N(n)$, tel que pour tout $m \geqslant N(n)$, $|x_{n,m} - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. La suite de rationnels $\{x_{n,N(n)}\}_{n\geqslant 1}$ est une suite fondamentale grâce à la majoration :

$$|x_{n+m,N(n+m)} - x_{n,N(n)}| \leqslant |x_{n+m,N(n+m)} - x_{n+m}| + |x_{n+m} - x_n| + |x_n - x_{n,N(n)}| .$$

Cette suite définit donc un nombre réel x et l'on vérifie que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Le nombre x est défini de façon unique.

On voit donc que Cantor, tout comme Dedekind, insiste sur un aspect très nouveau par rapport à Euclide, l'aspect <u>complet</u> de $\mathbb{R}$. Le procédé qui sert à construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, en s'itérant, ne peut pas donner autre chose globalement que $\mathbb{R}$.

Pourtant, du point de vue pratique, Cantor tient à sa distinction entre les différents ordres de nombres réels. Il donne l'exemple suivant pour

> *"décrire le contenu intellectuel de la proposition* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, *on peut se donner* $\frac{\pi}{2}$ *et ses puissances par les suites :*
>
> *pour* $\frac{\pi}{2}$: $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ *et* $x_n = 2 \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
>
> *pour* $(\frac{\pi}{2})^{2m+1}$: $\{x_n^{2m+1}\}_{n\geqslant 1}$
>
> *Enfin pour* $\sin \frac{\pi}{2}$: $\left\{ \sum\limits_{m=0}^{m=p} (-1)^m \frac{x_n^{2m+1}}{2m+1} \right\}_{p\geqslant 1}$.
>
> *C'est-à-dire* $\sin \frac{\pi}{2}$ *est défini grâce à une suite fondamentale du 2ème ordre et par cette proposition est exprimée l'égalité entre le nombre rationnel* 1 *et un nombre* $\sin \frac{\pi}{2}$ *donné par une suite fondamentale du 2ème ordre. De façon analogue, le contenu intellectuel de formules compliquées comme celles de la théorie des fonctions theta peut se décrire avec précision et une relative simplicité"* (<u>Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten</u> V Math. Annalen Bd 20 1882).

Naturellement, Cantor doit se défendre d'avoir introduit avec les nombres réels d'ordre 2, 3, etc de nouveaux nombres réels (*"Cette bévue, je n'ai jamais envisagé, même de loin, de la commettre"* Lettre à Dedekind du 29 décembre 1878).

3.3 Lien avec la notion de continu et la géométrie

Tout comme Dedekind, Cantor explicite la relation entre les nombres réels nouvellement construits et la droite de la géométrie. Sur une droite, graduée par la donnée d'un vecteur unité, on peut définir les points rationnels comme ceux dont l'abscisse est mesurée par un nombre rationnel. A tout point de la droite M, on peut associer au moins une suite fondamentale $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, constituée de nombres rationnels, telle que les points d'abscisse x_n se rapprochent de M lorsque n tend vers l'infini. Réciproquement, Cantor pose en axiome qu'à tout nombre réel (non rationnel) correspond un point de la droite ayant alors ce nombre comme abcisse. Cantor précise bien qu'il s'agit d'un axiome *"parce qu'il est dans sa nature de ne pouvoir être démontré de façon générale"*. De fait, l'axiome en question se condense sous la forme dite de Cantor des segments emboîtés.

Si I_n est une suite de segments emboîtés non vides d'une droite (graduée par un vecteur), c'est-à-dire que I_{n+1} est inclus dans I_n, et si la longueur de I_n tend vers 0 avec n, il existe un unique point M de la droite appartenant à tous les I_n.

Il est honnête d'ajouter que C. Méray aboutit à la même construction des nombres réels que Cantor, construction qu'il expose dans son Nouveau précis d'analyse infinitésimale publié à Paris en 1872.

4. LA CONSTRUCTION DES REELS PAR K. WEIERSTRASS

Depuis 1860, K. Weierstrass s'était préoccupé de construire logiquement les nombres réels et les leçons qu'il donna à ce sujet furent rédigées et publiées en 1872 par Kossak (Die Elemente der Arithmetik) ; mais Weierstrass refusa de reconnaître là ses propres idées.

La notion de base chez K. Weierstrass est une généralisation de la notion de nombre entier naturel, celle de quantité numérique (Zahlengrösse) qui correspond à une famille d'éléments où l'on tient compte du nombre de fois où chaque élément y figure. Si l'on part des entiers n, $n \geqslant 1$, on considère aussi les parties de l'unité $\frac{1}{n}$ et : $1 = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$. De même, on représentera : $\frac{3}{5} = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$ et plus généralement on pourra écrire :

$\frac{3}{5} = \left\{\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$, ce qui permet de définir les nombres rationnels positifs à condition de poser une égalité (une relation d'équivalence, comme chez Euclide pour l'égalité des raisons cf. Chapitre I) à partir des simplifications permises dans l'écriture au moyen des parties de l'unité.

Ceci fait, le pas suivant à franchir est d'autoriser des familles infinies de parties de l'unité et de doter ces familles d'une relation d'équivalence en précisant les opérations (simplifications) qui permettent de passer d'une écriture à l'autre. En outre, on définit une comparaison de deux familles à partir de l'idée d'inclusion et de la relation d'équivalence.

Ces familles infinies peuvent définir soit des nombres rationnels, soit d'autres nombres. Ces autres nombres sont les nombres réels positifs. Avec ces quelques éléments d'information, deux remarques s'imposent :

D'une part, que Weierstrass part de la notion de nombre, non comme mesure des grandeurs au sens euclidien, mais comme moyen de dénombrer. C'est cette idée de compter qu'il tente d'abstraire, ne voulant pas baser sa construction sur celle de quantité.

D'autre part, la construction de Weierstrass, pour novatrice qu'elle soit par rapport à plus de vingt siècles d'influence eudoxienne, n'aboutit pas à ce qui fait la force des constructions de Dedekind (cf. § 2) ou de Cantor (cf. § 3) à savoir la preuve de leur caractère complet, inextensible. Avec Dedekind ou Cantor, le processus mathématique qui fait passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ se limite lui-même.

5. L'EXTREME DE L'ARITHMETISATION : LEOPOLD KRONECKER

Le point de vue de Weierstrass, qui consiste à partir du nombre pur et non pas seulement comme Dedekind, Cantor et d'autres de partir certes de $\mathbb{Q}$ mais aussi d'une propriété a priori d'origine géométrique (coupure ou segments emboîtés), devait aboutir à une position extrême. Défendue par Léopold Kronecker, nous ne pouvons l'expliciter ici (Über den Zahlbegriff 1887).

En gros, Kronecker rejette tous les intermédiaires étrangers à l'Arithmétique dans une construction de l'Analyse. Il débouche donc sur un

refus d'envisager la création d'un nouvel élément sans que celui-ci ne provienne des éléments déjà construits à partir d'un nombre fini d'étapes permises. Plus profondément, Kronecker refuse l'emploi du raisonnement par l'absurde -pour cette construction s'entend- exigeant que l'on fournisse pour construire un certain élément un certain procédé algorithmique.
Il s'érige en censeur de l'utilisation des fonctions pour lesquelles on ne donne pas de processus constructif pour en calculer la valeur en chaque point.

La tendance de Kronecker, après les dures controverses concernant l'axiome du choix, trouvera un écho très structuré dans les méthodes de l'analyse fonctionnelle constructive. En gros, cette analyse est basée sur l'axiome du choix dénombrable seulement, lequel assure qu'étant donnée une famille dénombrable d'ensembles $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ non vides, il existe un moyen de sélectionner une suite d'éléments $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ où $x_n \in E_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

On trouvera les principaux résultats d'une telle analyse en français dans un ouvrage de H. G. Garnir, M. de Wilde et J. Schmets : Analyse fonctionnelle : Théorie constructive des espaces à semi-normes (1968).

Aux axiomes de l'analyse constructive, on peut rajouter sans contradiction l'axiome suivant (comme l'a montré Solovay en 1971) : toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue. Bien entendu, cet axiome s'oppose à l'axiome du choix.

Ces considérations modernes nous obligent à revenir en arrière pour préciser un peu le rôle des axiomes en Analyse. C'est David Hilbert qui sera notre guide.

6. LE POINT DE VUE AXIOMATIQUE : D. HILBERT

Pour D. Hilbert, les constructions de Cantor ou de Dedekind, dont il reconnaît la grande valeur, font partie de ce qu'il appelle les méthodes génétiques dont l'intérêt est surtout pédagogique. Il y préfère la méthode axiomatique qu'il développe en 1899 (article repris en l'appendice 6 des Grundlagen der Geometrie). Avec les définitions explicitées dans le Document n° 3, Hilbert introduit une famille de nombres, notés x,y,..., de sorte que cette famille constitue :

(a) un corps commutatif pour deux lois +,. ,

(b) un corps totalement ordonné,

(c) un groupe ordonné archimédien,

(d) un système tel qu'il n'est pas possible de l'agrandir en y rajoutant des éléments de sorte que l'on obtienne à nouveau un système satisfaisant (a), (b) et (c).

On se doit d'ajouter que D. Hilbert n'utilise pas le langage ci-dessus pour (a), (b) et (c), mais détaille les propriétés par rapport à la possibilité de résoudre des équations (a+x = b ; ax = b) les répartissant en axiomes de connexion, axiomes de calcul et axiomes d'ordre. L'axiome (d), joint à l'axiome d'Archimède, est rangé sous la rubrique d'axiomes de continuité. Le point le plus important est le point (d) qui est la forme axiomatisée, abstraite, des recherches de Dedekind et de Cantor sur l'aspect "complet" de $\mathbb{R}$. Cet axiome (d) est totalement absent de la construction eudoxienne. A cette étape des idées mathématiques de Hilbert, l'avantage de la méthode axiomatique est de ne pas faire intervenir l'infini dans les raisonnements (au contraire de Cantor et de ses suites fondamentales), mais de manipuler des chaînes logiques finies à partir du système clos d'axiomes donnés. Nous reviendrons au Chapitre VI sur ce point important.

Naturellement, D. Hilbert sait que ses axiomes ne sont pas indépendants et sait surtout que le point essentiel est de garantir la non-contradiction des axiomes donnés. Il ne démontre pas cette non-contradiction, et pour cause, car cela revient à démontrer la non-contradiction de la Théorie des Ensembles. On sait qu'il n'est pas possible de le faire par des chaînes logiques finies ... et que le problème reste en suspens.

Il est important de noter que pour D. Hilbert la non-contradiction, si tant est qu'elle puisse être prouvée, assure l'existence mathématique d'un système d'objets satisfaisant ces axiomes. Selon lui, la méthode axiomatique est la seule valable pour la recherche en mathématiques :

> *"Vraiment, la méthode axiomatique est et reste la seule convenable et l'aide indispensable à l'esprit dans toute recherche exacte et indépendamment du domaine de recherche ; elle est logiquement inébranlable et en même temps fructueuse ; elle garantit donc la liberté complète de la recherche"* (Abh. Math. Seminar des Hamburger Unw. 1 1922 p. 157-177),

et il précise son point de vue quant à l'exposé des mathématiques :

> *"Tout ce qui peut faire l'objet d'une pensée mathématique, dès que la construction théorique est mûre, tombe dans la méthode axiomatique et par là directement dans les mathématiques... Par la vertu de la méthode axiomatique particulièrement, les mathématiques paraissent être appelées à jouer un rôle meneur dans toute connaissance"* (Axiomatisches Denken, 1918, Oeuvres complètes 3 pp. 145-156).

7. EQUIVALENCE MATHEMATIQUE DES DIVERSES CONSTRUCTIONS

Sous réserve de préciser le cadre constructif (Théorie des ensembles, Règles logiques des Fondements des Mathématiques, etc), nous voilà en présence de plusieurs constructions des nombres réels.

Dès le départ, Dedekind et Cantor reconnaissent -semble-t-il sans démonstration mathématique explicite- l'équivalence de leurs constructions. Pour Dedekind, cela est dûment signalé dans son avant-propos sur la théorie des nombres irrationnels de 1872 et pour Cantor dans une lettre adressée à Dedekind le 29 décembre 1878.

Pour établir l'équivalence d'un point de vue mathématique, on peut faire les démonstrations suivantes :

- montrer, d'une part, qu'un groupe abélien, totalement ordonné et archimédien, s'identifie pour ces structures à un sous-groupe d'un corps totalement ordonné, archimédien et complet (au sens des suites fondamentales) ;
- montrer, d'autre part, l'unicité (à un isomorphisme près de corps ordonné) d'un ensemble satisfaisant les conditions de Cauchy, à savoir : corps commutatif, totalement ordonné, archimédien, complet au sens des suites fondamentales ;
- montrer enfin que la propriété de Dedekind (être complet vis-à-vis de l'opération de coupure ; on dit complètement réticulé aujourd'hui) implique celle de Cantor.

On vérifiera que les théorèmes suivants réalisent ce but.

Théorèmes de caractérisation

THEOREME. Soit G un groupe abélien totalement ordonné et archimédien. Il existe un homomorphisme strictement croissant de G dans $\mathbb{R}$.

Soit e un élément fixé de G, différent de 0. Soit x un élément de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un entier k_n tel que :

$$k_n e \leqslant 10^n x < (k_n+1)e$$

comme il est facile de le constater puisque G est archimédien et que tout sous-ensemble fini non vide d'entiers possède un plus grand élément.

Comparons k_n et k_{n+1}.

$$10 k_n e \leqslant 10^{n+1} x < 10(k_n+1)e$$

$$k_{n+1} e \leqslant 10^{n+1} x < (k_{n+1}+1)e$$

donc :

$$k_{n+1} < 10(k_n+1) \quad \text{et} \quad 10 k_n < (k_{n+1}+1) .$$

Soit, puisque k_n et k_{n+1} sont des entiers :

$$10 k_n \leqslant k_{n+1} \leqslant 10 k_n + 9$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} - \frac{k_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^{n+1}} .$$

D'où :

$$0 \leqslant \frac{k_{n+p}}{10^{n+p}} - \frac{k_n}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n} .$$

Ce qui prouve que la suite $\{\frac{k_n}{10^n}\}_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de nombres décimaux, donc de nombres rationnels. $\mathbb{R}$ étant complet, cette suite converge vers un nombre réel noté $f(x)$. Nous avons donc établi une application $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Cette application est l'application cherchée.

- D'une part, f est une application strictement croissante.

Soient $x < y$ où x et y sont deux éléments de G. Notons $k_n(x)$ et $k_n(y)$ les entiers tels que :

$$k_n(x)e \leqslant 10^n x < (k_n(x)+1)e$$

$$k_n(y)e \leqslant 10^n y < (k_n(y)+1)e$$

d'où :

$$0 < 10^n(y-x) < (k_n(y)+1)e - k_n(x)e = (1+k_n(y)-k_n(x))e .$$

Il existe un entier N tel que $10^N(y-x) > e$. D'où pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$10^{n-N} < (1+k_n(y)-k_n(x)) .$$

Soit :

$$\frac{1}{10^N} < \frac{k_n(y)}{10^n} - \frac{k_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^n} .$$

En passant à la limite en n :

$$\frac{1}{10^N} \leqslant f(y)-f(x)$$

et donc $f(y) > f(x)$ lorsque $y > x$.

- D'autre part, f est un <u>homomorphisme de G dans $\mathbb{R}$</u> .

$$(k_n(x)+k_n(y))e \leqslant 10^n(x+y) < (k_n(x)+k_n(y)+2)e$$

$$k_n(x+y)e \leqslant 10^n(x+y) < (k_n(x+y)+1)e .$$

Soit :

$$\frac{k_n(x)}{10^n} + \frac{k_n(y)}{10^n} \leqslant \frac{k_n(x+y)}{10^n} \leqslant \frac{k_n(x)}{10^n} + \frac{k_n(y)}{10^n} + \frac{1}{10^n} .$$

A la limite :

$$f(x)+f(y) \leqslant f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$$

soit l'égalité caractéristique de l'homomorphisme :

$$f(x+y) = f(x)+f(y) .$$

Ce théorème prouve l'assertion du Chapitre I § 5 à condition de vérifier que f est un homomorphisme d'anneaux lorsque e est l'unité et lorsque G est en outre un anneau, ce que nous allons faire ci-dessous. On notera que cette démonstration présuppose $\mathbb{R}$ déjà construit, mais occulte le passage aux raisons euclidiennes en ramenant l'affaire à la comparaison à une même "unité de grandeur" e . En outre, le maniement, bien élémentaire, des limites, maniement essentiellement numérique, sort nettement du champ euclidien.

Si G est en outre un anneau, soient x et y deux éléments positifs de cet anneau. On dispose de :

$$k_n(x)k_n(y)e \leqslant 10^{2n}\,xy < (k_n(x)+1)(k_n(y)+1)e$$

et

$$k_{2n}(xy)e \leqslant 10^{2n}\,xy < (k_{2n}(xy)+1)e .$$

Soit :

$$\frac{k_n(x)}{10^n}\,\frac{k_n(y)}{10^n} \leqslant \frac{k_{2n}(xy)}{10^{2n}} < \left(\frac{k_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right)\left(\frac{k_n(y)}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right) .$$

D'où à la limite :

$$f(x)f(y) \leqslant f(xy) \leqslant f(x)f(y)$$

et donc :

$$f(xy) = f(x)f(y) .$$

Avec le caractère homomorphe de f , on note facilement que cette identité reste vraie avec x et y quelconques dans G (On pourra remarquer que $f(xy) = f(yx)$ et puisque f est injectif , $xy = yx$, c'est-à-dire que la commutativité de l'anneau G est une conséquence). En outre $f(e) = 1$.

En particulier, <u>tout corps totalement ordonné et archimédien peut s'identifier à un sous-corps de $\mathbb{R}$</u> .

$\mathbb{R}$ étant le sous-corps maximal. Cette maximalité peut encore se lire par une propriété.

<u>THEOREME</u>. <u>Tout corps totalement ordonné complet et archimédien est isomorphe à $\mathbb{R}$</u> .

Le mot complet s'entend par rapport à la métrique définie par la valeur absolue $|x| = \mathrm{Sup}(x,-x)$.

Il reste seulement à montrer que l'application f précédemment introduite est surjective. Soit t un nombre réel et $\frac{k_n}{10^n}$ son approximation décimale à 10^n par défaut :

$$\frac{k_n}{10^n} \leqslant t < \frac{k_n+1}{10^n} .$$

Soit e l'unité du corps $\mathbb{K}$ de départ. Considérons la suite $\frac{k_n}{10^n} e = x_n$. Il est facile de noter que $f(x_n) = \frac{k_n}{10^n}$ et que par la croissance de f , x_n est une suite de Cauchy dans le corps $\mathbb{K}$ comme $\frac{k_n}{10^n}$ l'est dans $\mathbb{R}$. Précisément :

$$\frac{k_n}{10^n} \leqslant \frac{k_{n+p}}{10^{n+p}} \leqslant \frac{k_n+1}{10^n}$$

d'où :

$$x_n \leqslant x_m \leqslant x_n + \frac{e}{10^n} .$$

Soit en appelant x la limite de la suite de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 1}$, dans $\mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$ et :

$$\frac{k_n}{10^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{k_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} .$$

Donc :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{10^n} = t .$$

Ce qui termine la démonstration.

THEOREME. Tout groupe abélien divisible totalement ordonné archimédien et complètement réticulé est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Que G soit divisible revient à dire que G contient une image homomorphe de $\mathbb{Q}$ (donc ne peut être $\mathbb{Z}$). Pour établir ce théorème, il suffit de prouver que le groupe G est complet. Or, une suite de Cauchy dans G est évidemment bornée, donc possède une borne supérieure. On atteint cette borne supérieure par une suite extraite et la convergence de la suite extraite entraîne facilement la convergence de la suite tout entière.

Le procédé décimal par lequel nous avons obtenu le premier théorème de caractérisation peut inciter à fournir une nouvelle construction de $\mathbb{R}$ par les nombres décimaux.

En gros, cette méthode consiste à appeler nombre réel positif une expression de la forme :

$$k, x_1 x_2 \dots x_n \dots$$

où $k \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1,\dots,9]$ pour tout n . Techniquement, on identifiera des expressions du type :

$$0{,}1999\dots \quad \text{et} \quad 0{,}20\dots$$

Ensuite, on ordonne lexicographiquement les expressions et montre que tout sous-ensemble non vide majoré de nombres réels positifs possède une borne supérieure. Avec cette notion, on peut vérifier que $x = h, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ est la borne supérieure de la suite $q_n(x) = h, x_1 x_2 \dots x_n 0 \dots 0 \dots$ et aussi définir l'addition de deux nombres réels positifs :

$$\operatorname{Sup}(q_n(x)+q_n(y)) = x+y \ .$$

Quelques lemmes techniques assurent que l'ensemble ainsi construit, dûment symétrisé, est un corps abélien archimédien totalement ordonné et complètement réticulé. C'est donc $\mathbb{R}$ à une isomorphie près.

Ce raisonnement fut utilisé depuis la fin du XIXème siècle, soit sous la forme décimale (ou en numération de base quelconque), soit sous la forme des fractions continues (cf. Chap. II § 4.3). Pédagogiquement, on aurait assez tendance à penser que c'est la présentation la mieux adaptée pour l'Enseignement Secondaire.

8. L'IDEE DE CONTINU DEGAGEE DE LA NOTION D'ORDRE : DEBUTS DE LA TOPOLOGIE PONCTUELLE

Nous avons déjà noté les nombreuses difficultés soulevées par la notion "intuitive", ou "a priori" , de continu depuis l'Antiquité, ainsi par exemple la solide défense de C. F. Gauss contre le système kantien.

Bolzano, dans ses Paradoxen des Unendlichen publiés en 1830, est le premier à vouloir *"caractériser le continu"* comme un ensemble (c'est-à-dire un *"certain système* (Inbegriff) *de choses... consistant en certaines parties ... dans lequel l'ordre des parties est indifférent"*), infini, ayant un *"certain ordre"* établi entre ses éléments :

> *"Il n'y a de continu que là où se trouve un système d'objets simples (de points dans le temps ou dans l'espace, ou encore de substances) placés de telle sorte que chacun d'eux possède, à toute distance si petite soit-elle, un voisin appartenant au système".*

Bolzano signifie que pour tout x du système S et tout $\varepsilon > 0$, il existe un y du système tel que $d(x,y) = \varepsilon$. L'égalité (et non l'inégalité comme nous aurions tendance aujourd'hui à l'y mettre) explique que pour Bolzano le segment $[0,1]$ auquel on a ôté les points $x_n = 2^{-n}$ pour $n \geqslant 1$ ne constitue pas un continu parce que *"pour toutes les distances de forme* 2^{-n} *il n'y a pas de voisin pour* 0*"*. Bolzano essaye ensuite de définir un domaine simplement continu comme celui où chaque point a pour chaque $\varepsilon > 0$ au moins un voisin, mais tel que le système de ces voisins à ε ne puisse former un continu. Dedekind, dans un fragment non publié de son vivant (Allgemeine Sätze über Räume) développe lui aussi une théorie des domaines *"ab ovo sans faire appel à l'intuition géométrique"* dans laquelle il définit explicitement un ouvert (Körper) sur ce qui est pour nous un espace métrique (E,d) (avec la définition classique : $\mathcal{O} \subset E$ est ouvert si pour tout x de $\mathcal{O}$ il existe un $\delta > 0$ et tous y de E tels que $d(x,y) < \delta$ sont dans $\mathcal{O}$). Il définit la notion de voisinage avec le signe d'inégalité cette fois et vérifie que la frontière d'un ouvert ne peut être un ouvert. Les choses en restent cependant là et c'est à ce point que survient G. Cantor. Faut-il dire à ce propos comme Rollin dans son Histoire Ancienne (tome 13, livre 27, chap. I, p. 134), avec une délicieuse réminiscence évangélique :

> *"Le terme étant arrivé où la géométrie devait enfanter le calcul de l'infini. M. Newton trouva le premier ce merveilleux calcul..."*

Bref, Cantor part de la définition d'un nombre irrationnel à partir d'une suite de nombres rationnels et de ce qui deviendra le procédé diagonal (celui qui d'une suite double $x_{n,m}$ construit une suite $x_{n,m(n)}$ pour établir qu'une suite fondamentale de réels converge vers un réel, c'est-à-dire pour établir le caractère complet de $\mathbb{R}$). Sa première question est de savoir si l'on peut numéroter les points de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

> *"de savoir si $\mathbb{N}$ peut être mis en correspondance avec $\mathbb{R}$ de telle manière qu'à chaque individu d'un des ensembles corresponde un individu et un seul de l'autre. A première vue, on se dit que ce n'est pas possible, car $\mathbb{N}$ est composé de parties discrètes, tandis que $\mathbb{R}$ forme un continu ; mais il n'y a rien à gagner avec cette objection, et, si fort que j'incline à penser qu'il n'y a pas de correspondance univoque entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$, je ne peux pourtant pas en trouver la raison et c'est d'elle que je me préoccupe -peut-être estelle très simple ?*
> *Ne serait-on aussi tenté de conclure au premier abord que $\mathbb{N}$ ne peut être mis en correspondance univoque avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$?"*
> (Lettre à R. Dedekind du 29 novembre 1873 ; on a noté $\mathbb{N}$ là où Cantor note (n), $\mathbb{R}$ là ou il note (x) qui est en fait $\mathbb{R}^+$ pour Cantor et $\mathbb{Q}$ là où il note $(\frac{p}{q})$).

Cantor montre aussitôt qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ et même qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres algébriques, et par opposition, qu'il ne peut exister une telle bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ (Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen ; Journal für reine und angewandte Mathematik (1874) 77 p. 258-263 , publication faite à la demande de Weierstrass, lequel semble pourtant ne s'intéresser qu'aux deux premiers résultats et non au dernier !). Le deuxième résultat était obtenu simultanément par R. Dedekind (cf. Lettre de Cantor à Dedekind du 2 décembre 1873). Donnons les démonstrations de Cantor. En fait, pour le premier point, on utilisera une démonstration de Cantor parue en 1895 aux Mathematische Annalen, car c'est celle qui traîne partout maintenant :

(a) $\mathbb{Q}$ est numérotable . On range les nombres rationnels positifs $\frac{p}{q}$ dans un tableau infini à double entrée, dans lequel chaque diagonale correspond aux nombres tels que $p+q = \text{cte}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Tous les rationnels figurent (plusieurs fois) dans ce tableau. On attribue un numéro à chaque rationnel suivant un ordre de parcours indiqué par les flèches (et qu'on pourrait mathématiquement décrire) et en ne renumérotant pas un rationnel déjà précédemment numéroté. On établit ainsi une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}^+$.

Passons à la deuxième assertion :

(b) Les nombres algébriques sont numérotables . Rappelons qu'un nombre réel x est algébrique s'il existe un polynôme P à coefficients entiers tels que $P(x) = 0$. Sinon le nombre est dit transcendant. L'idée est d'énumérer les polynômes. Pour ce faire, on appelle hauteur (terme de Dedekind) l'expression :

$$k(P) = (n + |a_o| + \ldots + |a_n|) - 1$$

lorsque $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ et $a_n \neq 0$ et $a_k \in \mathbb{Z}$ pour k variant de 0 à n .

Pour chaque entier m , il existe un nombre fini de polynômes tels que $k(P) = m$. En outre, pour chaque polynôme P , il existe un nombre fini de racines. Bref, pour un entier m , il y a n_m nombres algébriques associés. On part de $m = 1$, ce qui fait n_1 nombres algébriques numérotés arbitrairement de 1 à n_1 , puis $m = 2$, ce qui fait n_2 nombres algébriques numérotés de n_1+1 à n_1+n_2' , car on élimine les nombres algébriques déjà numérotés. Ce faisant, en poursuivant, on établit bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres algébriques.

Cantor, dans une lettre datée du 2 décembre 1873, réfute le commentaire de Dedekind sur l'aspect inutile de ce genre de recherche. A cette date, le caractère numérotable de l'ensemble des nombres algébriques est prouvé, mais Cantor cherche encore si $\mathbb{R}$ lui-même peut être numéroté :

> *"Ce serait pourtant beau, si l'on pouvait y répondre ; si, par exemple, la réponse était négative, on disposerait par là-même d'une nouvelle démonstration du théorème de Liouville affirmant l'existence de nombres transcendants".*

Reportons-nous à l'époque de la lettre, en 1873. Liouville a construit un nombre transcendant en 1844 à partir du théorème des accroissements finis en considérant le nombre :

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}} + \ldots$$

(Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (18) 1844 p. 910-911). En 1873, précisément, C. Hermite établit la transcendance de e (Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris (77) 1873), mais abandonne les efforts en vue d'établir la transcendance de π (la fameuse quadrature du cercle) à laquelle parviendra F. Lindemann en 1882 seulement. Au temps de Cantor, les problèmes de transcendance font partie de l'analyse fine et les exemples de nombres transcendants n'abondent pas. Pourtant, si Cantor établit que $\mathbb{R}$ n'est pas numérotable, tandis que les nombres algébriques forment un ensemble numérotable, c'est qu'il existe une foule de nombres transcendants !

Dedekind reconnaît qu'il a eu tort de s'aventurer sur le terrain miné de l'utilité d'un théorème.

Dès le 7 décembre 1873, Cantor dispose de la démonstration que $\mathbb{R}$ n'est pas numérotable et la simplifie le 9 décembre. La voici à peine modifiée. Supposons que l'on puisse ranger tous les nombres réels en une suite :

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

Soit $[\alpha, \beta]$ un segment donné arbitraire de $\mathbb{R}$ (pour lequel on suppose $\alpha < \beta$). Soit I_1 un segment de $[\alpha, \beta]$ tel que $\omega_1 \notin I_1$. Soit I_2 un segment inclus dans I_1 tel que $\omega_2 \notin I_2$. On construit ainsi une famille de segments emboîtés $\{I_n\}_{n \geqslant 1}$. Il existe, d'après ce que Cantor avait démontré sur $\mathbb{R}$, un nombre réel x appartenant à tous les I_n, donc distincts de tous les ω_n $(n=1,2,\ldots)$. Ce qui contredit le fait que tous les nombres réels sont numérotés. En 1890, Cantor donnera une autre démonstration qui ne fera pas usage du théorème des segments emboîtés, mais partira de l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel quelconque.

Cantor revient plusieurs fois sur la notion de continu et lui applique son résultat sur l'impossibilité de la numérotation des points de $\mathbb{R}$. Prenons un domaine plan A, par exemple un carré. Soit $\{M_n\}_{n\geq 1}$ un ensemble dénombrable de points de A et partout dense (überall dicht verbreitet), c'est-à-dire tel que pour tout M de A et tout nombre réel r , il existe un point M_n tel que $d(M,M_n) < r$. Cantor remarque que lorsque l'on ôte tous les points M_n de A , l'ensemble B obtenu est encore *"un domaine continûment connexe"* (ein stetig zusammenhängendes Gebiet) ; c'est-à-dire que deux points quelconques N et N' de B peuvent être joints par une ligne continue et "analytiquement définissable" située à l'intérieur de A et ne comportant aucun point de $\{M_n\}_{n\geq 1}$. Ce que Cantor exprime en disant que *"le mouvement est possible en un certain sens"* même dans B .

L'idée de la démonstration est de joindre N et N' par une ligne continue L restant dans A , puis de prendre sur L un nombre fini de points $N_1,N_2,\ldots,N_k$ distincts de tous les M_n et de sorte que les segments rectilignes $NN_1,NN_2,\ldots,N_kN'$ restent dans A . Enfin on remplace les segments par des arcs de cercle de mêmes extrémités que les segments, arcs de cercle inclus dans A , mais ne contenant aucun point du type M_n . C'est là qu'intervient le côté non-dénombrable de $\mathbb{R}$ et je recopie intégralement le texte de Cantor dans une lettre à Dedekind du 7 avril 1882 :

> *"Prenons par exemple le segment NN_1 ; par les points N et N_1 passe une famille de cercles simplement infinie dont les centres se trouvent sur une droite g et peuvent être déterminés sur celle-ci par une coordonnée u . On peut déterminer un intervalle (α,β) tel que les arcs de cercle correspondant aux valeurs de u comprises dans cet intervalle se trouvent entièrement à l'intérieur de A . Aux cercles de la famille qui passent non seulement par N et N_1 mais aussi par les points*
>
> $$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots,\ M_\nu,\ \ldots$$
>
> *correspondent des valeurs de u que l'on désignera par*
>
> $$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\omega_\nu,\ \ldots$$
>
> *Si l'on prend alors à l'intérieur de (α,β) une valeur η qui ne soit égale à aucun ω_ν, on obtient alors, en faisant $u = \eta$, un arc de cercle joignant les points N et N_1 , entièrement contenu dans A , et sur lequel ne se trouve aucun point M_ν, C. Q. F. D."*

Cette démonstration gêne Cantor. En effet, s'il émet lui aussi l'opinion que *"pour construire le concept d'espace, il n'y a aucune nécessité interne de se représenter ce dernier comme partout continu"*, il voudrait plus, c'est-à-dire caractériser le continu en général et pas seulement le continu totalement ordonné comme $\mathbb{R}$ (qui a déjà été caractérisé par Dedekind et Cantor lui-même).

Il a d'abord cherché à *"déduire la continuité d'un espace de raisons extérieures"*, comme ce qu'il a appelé la possibilité du mouvement continu à l'intérieur de l'espace (ce que nous appelons aujourd'hui la connexité par arcs). Malheureusement, en enlevant un ensemble dénombrable et pourtant dense de points d'un carré, on conserve encore ce "mouvement".

En outre, la généralisation de la méthode des coupures de Dedekind échoue (il n'y a pas d'ordre total !). Dans une lettre du 15 septembre 1882, légèrement modifiée le 30 septembre, il parvient au point suivant en réalisant l'abstraction de sa notion de suite fondamentale :

Soit M un ensemble d'éléments $m, n, q, \ldots$ et une correspondance complètement arbitraire qui à tout couple m,n associe un nombre réel positif non nul noté $[m,n]$. On dit que M est appelé continu relativement à $[m,n]$ (et Cantor dit encore que $[m,n]$ induit un "ordre" sur M mais dans le sens où cela crée un lien entre les points de M) si :

(1) m et n étant quelconques dans M et $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un nombre fini de points de M, notés $m_1, \ldots, m_k$ de sorte que :

$$k=0,\ldots,n \quad [m_k, m_{k+1}] < \varepsilon \qquad \text{où } m_o = m \ ; \ m_{k+1} = n \ .$$

(2) Si $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ est un ensemble infini dénombrable de M tel que $\lim\limits_{n\to\infty} [m_{n+k}, m_n] = 0$, alors il existe un unique m de M tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} [m, m_n] = 0$.

(3) Réciproquement, si m est un élément de M, $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ un ensemble dénombrable infini tel que $\lim\limits_{n\to\infty} [m,m_n] = 0$, alors on doit toujours avoir $\lim\limits_{n\to\infty} [m_{n+k}, m_n] = 0$.

> *"Avec cela, on devrait avoir épuisé tout ce qui peut être exigé d'un continu"*.

Cantor établit qu'en prenant pour M un sous-ensemble *"de la droite"* et pour $[m,n]$ la distance des deux points m et n, alors M est un segment (ou $\mathbb{R}$ tout entier).

En termes modernes, les seuls sous-ensembles complets et bien enchaînés de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et les segments. Il faut noter le caractère précurseur de Cantor, avec l'introduction abstraite de $[m,n]$ et songer que les espaces métriques fonctionnels ne seront définis par M. Fréchet qu'en 1904.

> *"De même, on devrait arriver à démontrer, pour des ensembles de points qui se trouvent dans un plan, que si les conditions (1), (2) et (3) sont remplies avec pour $[m,n]$ la distance entre m et n, ce sont soit des lignes fermées d'un seul tenant, soit des surfaces limitées par de telles courbes".*

En termes modernes, il s'agit de caractériser les sous-ensembles complets et bien enchaînés de $\mathbb{R}^2$. L'image d'un segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ par une fonction continue $f: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ fournit un tel ensemble (groupant ainsi les deux cas envisagés par G. Cantor, cf. Chap. VI § 1.2 Courbe de Péano), mais il en existe d'autres nettement plus compliqués. En outre, bien que cela soit assez intuitif, il n'est pas facile d'établir le théorème de Jordan qui assure qu'une courbe fermée simple sépare le plan en deux domaines connexes (une courbe fermée simple de Jordan est l'image de $f: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$ où f est continue, est injective sur $]\alpha,\beta[$ et telle que $f(\alpha) = f(\beta)$).

Les problèmes de ce type, c'est-à-dire déterminer les propriétés des espaces conservées par applications continues et exhiber les invariants des homéomorphies (applications bijectives et bicontinues) sont aujourd'hui rassemblés dans une discipline autonome : <u>la topologie</u>.

Certes, Cantor n'est pas le premier à s'intéresser à des propriétés topologiques, ne serait-ce que pour le caractère topologique sous-jacent de l'espace euclidien. Mais Cantor est le premier à tenter de construire a priori une théorie sur la topologie. Déjà, Euler avait déjà envisagé, sous le nom d'Analysis situs, d'associer des groupes à certaines courbes ou espaces, inaugurant la topologie algébrique notamment pour résoudre des problèmes de géométrie combinatoire (C'est l'exemple fameux des ponts de Koenigsberg. Il s'agit d'établir l'impossibilité (cf. Figure n° 23) de visiter les deux rives

<u>Figure n° 23</u>

et les deux îles de la ville de Koenigsberg en empruntant une fois, mais une seule, chacun des ponts. On note que ce problème ne dépend ni de la forme des îles, de la rive ou des ponts).

B. Riemann, beaucoup plus nettement, propose de fonder une théorie des surfaces, plus généralement des variétés. Citons d'ailleurs un passage très significatif de Riemann qui peut être considéré comme la première charte de la topologie ponctuelle et de l'analyse fonctionnelle.

> *"On sait que la Géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être.*
> *Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne, parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère. La raison en est que le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or, il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la Géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports*

> *métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses"* (B. Riemann, Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie, Oeuvres Mathématiques, Trad. Langel 1898 Paris).

Un peu plus loin, Riemann précise sa pensée.

> *"Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète ; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas, un point, dans le second, un élément de cette variété... Etant donné un concept dont les modes de détermination forment une variété continue, si l'on passe, suivant une manière déterminée, d'un mode de détermination à un autre, les modes de détermination parcourus formeront une variété étendue dans un seul sens, dont le caractère essentiel est que, dans cette variété, on ne peut, en partant d'un point, s'avancer d'une manière continue que dans deux directions : en avant et en arrière. Imaginons maintenant que cette variété se transporte à son tour sur une autre variété complètement distincte, et cela encore d'une manière déterminée, c'est-à-dire tellement que chacun de ses points se transporte en un point déterminé de l'autre variété ; l'ensemble des modes de détermination ainsi obtenus formera une variété de deux dimensions. On obtiendra semblablement une variété de trois dimensions, si l'on conçoit qu'une variété de deux dimensions se transporte d'une manière déterminéee sur une autre complètement distincte, et il est aisé de voir comment on peut poursuivre cette construction. Si, au lieu de considérer le concept comme déterminable, on considère son objet comme variable, on pourra désigner cette construction comme la composition d'une variabilité de n+1 dimensions, au moyen d'une variabilité de* **n** *dimensions et d'une variabilité d'une seule dimension"* (Ibidem).

En cette fin du XIXème siècle et début du XXème, bien des auteurs dégagent certaines propriétés topologiques, que ce soit dans l'étude des courbes et surfaces du plan (Jordan), dans l'étude des géométries non euclidiennes (H. Poincaré), des fonctions analytiques (Riemann, Weierstrass) ou dans l'étude des espaces de fonctions (Ascoli, Volterra, Hilbert, Fréchet, Riesz, etc). Des phénomènes à première vue pathologiques sont mis en évidence (ne citons que la courbe de Péano, mais on pourrait mentionner les nombres de Betti et la cohomologie des sphères de $\mathbb{R}^n$ de Poincaré, etc). Ces résultats étaient en un sens trop riches ou trop spécialisés.

Le véritable fondateur, celui qui va fournir les concepts productifs, est G. Cantor. Comme nous l'avons constaté, il s'est intéressé vivement à la topologie ponctuelle et à la théorie de la dimension pour des raisons d'analyse fine. Son génie fut de s'apercevoir assez vite qu'il lui fallait encore dépouiller les propriétés, abandonner même la continuité afin de pouvoir avancer. Il s'agissait de domestiquer la notion d'ensemble infini au point qu'une véritable arithmétique de l'infini s'avérât possible.

L'objet du chapitre suivant est de suivre, assez sommairement d'ailleurs, les efforts de Cantor, qui provoquent des bouleversements dans l'ordre de la logique mathématique et une crise des fondements mathématiques.

SIXIEME CHAPITRE

ARITHMETISATION DE L'INFINI

"Je conclus que le discours scientifique et le discours hystérique ont presque la même structure..."

J. LACAN

Télévision

1. LA CREATION CANTORIENNE DES CARDINAUX

1.1 Les précurseurs et les difficultés

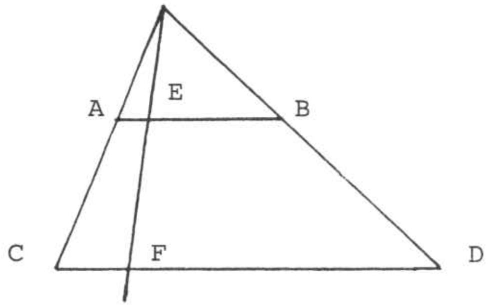
Les mathématiciens classiques ont réussi à apprivoiser, c'est-à-dire à algébriser les "quantités infiniment petites ou infiniment grandes" sous la forme du calcul différentiel et intégral. Cette réussite tient peut-être au côté "infini potentiel" de ces grandeurs pour employer le langage aristotélicien. La domestication de l'"infini actuel" devait être l'oeuvre de Cantor.

Pour les débuts du calcul différentiel, l'imbroglio était lié à l'inconséquence d'attribuer une "grandeur" à l'infini, par exemple $\frac{a}{0} = \infty$ (ou $0 \not\leq a$) car on y perdait les règles algébriques. La solution provint de la comparaison des différents ordres de l'infiniment petit ou grand (Comparer $\frac{a}{x^n}$, $\frac{a}{1-e^x}$, etc, lorsque x tend vers 0) et alors, comme dit Voltaire dans

le Dictionnaire Philosophique, *"l'infini commença à être traité par le calcul. On s'accoutumera insensiblement à recevoir des infinis plus grands que les autres"*.

Pour les débuts de la théorie des ensembles, la solution également sera l'introduction d'un ordre car l'imbroglio est de même nature. En effet, Thomas Bradwardine au XIIIème siècle (Tractatus de continuo), Galilée (Deux nouvelles sciences) et bien d'autres font remarquer (cf. Figure n° 24) que AB et CD sont en bijection et de longueurs inégales ; ou encore qu'il y a une bijection entre les points de circonférences concentriques, etc.

Figure n° 24



Bien d'autres exemples, qui reviennent tous à dire qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec un sous-ensemble propre, semblaient nier la possibilité d'un concept de l'infini, car on voulait a priori que ce concept fût celui d'un unique infini.

Pour Descartes, on l'a vu (cf. Chap. IV § 3), le nombre réel est ce qui mesure. Aussi l'idée d'un nombre infini, ou de nombre plus grand que tous les autres, lui paraît contradictoire en tant que nombre, mais il en accepte les paradoxes. Ainsi, si on lui dit (Mersenne) qu'une longueur infinie serait mesurée par un nombre infini de toises et un nombre six fois plus grand de pieds, Descartes répond qu'il n'y a là rien d'absurde, mais

> *"de cela seul que j'aperçois que je ne puis jamais, en nombrant, arriver au plus grand de tous les nombres... je puis conclure nécessairement, non pas à la vérité qu'un nombre infini existe, ni aussi que son existence implique contradiction... mais que cette puissance que j'ai de comprendre qu'il y a toujours quelque chose de plus à concevoir, dans le plus grand des nombres, que je ne puis concevoir, ne me vient pas de moi-même, et que je l'ai reçue de quelque autre être qui est plus parfait que je ne suis".*

Pour Leibniz, le nombre infini qui n'est qu'un manière de parler (modus loquendi) est contradictoire et seul l'infini potentiel possède un sens. Cette attitude de Leibniz, en additif à la pensée d'Aristote, offre l'intérêt d'une technique opératoire (limite de suites) et permet d'exposer les rapports entre des infinis d'ordres différents dans l'étude des variables. C'est ce qu'il fait avec les notations des différentielles d'ordre successif : dx, d^2x, d^3x, ... N'oublions pas que Leibniz manie les quantités infinitésimales et semble ébaucher une analyse non archimédienne (cf. Chap. IV § 5.3 : l'analyse non standard).

Au lieu de gloser sur des textes philosophiques, on se reportera à un remarquable texte de Spinoza qui éclaire bien la position au XVIIème siècle (Lettre à Louis Meyer ; Document n° 11), ainsi qu'au texte de Kant sur la première antinomie de la Raison Pure (Document n° 10).

C'est à Bolzano (Paradoxes de l'infini 1851) que l'on doit le premier essai systématique d'explication d'ordre mathématique. Mais Bolzano se lasse assez vite, en déclarant que ces considérations sur l'infini ne sont d'aucune utilité pour l'Analyse. Cantor montre vingt ans plus tard avec son résultat sur l'existence des nombres transcendants qu'il n'en était rien.

Après le théorème de Cantor sur l'impossibilité d'énumérer $\mathbb{R}$ (cf. Chap. V § 8), il semblait naturel à ce dernier que la réponse à la question suivante fut négative :

> *"Est-ce qu'une surface (par exemple un carré, frontière comprise) peut être mise en relation univoque avec une courbe (par exemple un segment de droite, extrémités*

comprises), de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et réciproquement à tout point de la courbe un point de la surface" (Lettre à Dedekind du 5 janvier 1874).

Il ajoute le 18 mai 1874 que pour l'un de ses amis berlinois l'idée même paraît *"pour ainsi dire absurde, car il se comprend de soi-même que deux variables indépendantes ne peuvent être ramenées à une seule"*.

Trois ans plus tard, Cantor montre qu'il faut répondre affirmativement (Lettre à Dedekind du 20 juin 1877, on se reportera au document annexe n° 14 , reproduction de la correspondance entre Cantor et Dedekind concernant les omissions et aménagements de la première démonstration). Dans le Journal de Crelle (de 1878, volume 84, pp. 242-258), Cantor publie une démonstration fort courte établissant une bijection entre $]0,1]$ et $]0,1] \times]0,1]$. On écrit tout x de $]0,1]$ sous la forme décimale unique en interdisant la seule présence de 0 au bout d'un certain rang. On range les décimales par groupes, chaque groupe se terminant dès qu'il apparaît un chiffre différent de 0, ainsi :

$$x = 0{,}930004033316\ldots$$
$$- 9 - 3 - 0004 - 03 - 3 - 1 - 6$$

Si $(x,y) \in]0,1] \times]0,1]$, on forme z en commençant par le premier groupe de x , puis celui de y , puis le deuxième de x etc ... Il est facile de vérifier que la correspondance $(x,y) \longrightarrow z$ est bijective. Cependant, la correspondance n'est pas continue. Ce sera Péano qui le premier montrera qu'il est possible de construire une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ continue et surjective. On cherchera d'ailleurs, après Péano, à construire une bijection continue de $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ mais ceci est impossible. En effet, par compacité, on aurait une homéomorphie de $[0,1]$ sur $[0,1] \times [0,1]$. Or $[0,1] \setminus \{x_o\}$ (où $x_o \in]0,1[$) est composé de deux domaines connexes, ce qui n'est pas le cas $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(x_o,y_o)\}$. Ce dernier résultat inaugure en fait la théorie topologique de la dimension, sur laquelle nous ne pouvons rien dire ici.

Construisons une telle fonction, non par la méthode de Péano, mais en utilisant un ensemble inventé par Cantor pour l'étude des séries trigonométriques, ensemble remarquablement pathologique en un sens et qui a souvent guidé les idées de Cantor dans son élaboration de la théorie des ensembles. Avec cet ensemble, la construction d'une fonction continue se fait presque comme pour le cas envisagé par Cantor.

1.2 L'ensemble triadique de Cantor

On appelle E l'ensemble des nombres réels x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, qui peuvent s'écrire en numération ternaire sans utilisation de 1, c'est-à-dire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n} \qquad \text{où} \quad x_n = 0 \text{ ou } 1 .$$

On vérifie facilement l'unicité d'une telle écriture car :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{N-1}} < \frac{2}{3^{N-1}} .$$

Géométriquement, on peut visualiser E comme l'intersection des E_n où $E_1 = [0,1]$, $E_2 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, $E_3 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$, etc..

L'ensemble $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ est un fermé, de mesure nulle, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, E est inclus dans une réunion d'intervalles fermés dont la somme des longueurs est majorée par ε. Il suffit de noter que E_n est la réunion de 2^{n-1} intervalles de longueur $\frac{1}{3^{n-1}}$ chacun, donc que $|E_n| = (\frac{2}{3})^{n-1}$ et en choisissant n assez grand, $|E_n| < \varepsilon$ (cf. Chap. IV § 7).

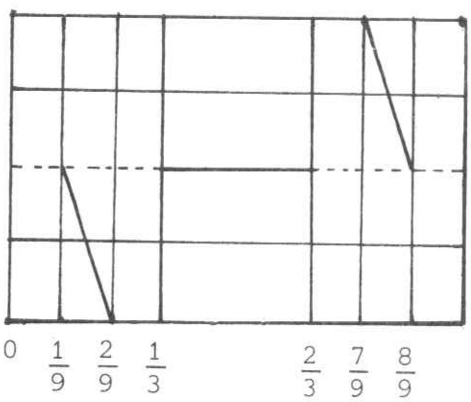
A tout x de E, on fait correspondre deux valeurs $f(x)$ et $g(x)$ selon :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{2^n} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{2n+1}}{2^{n+1}} .$$

On a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$; $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et il n'est pas difficile d'établir la continuité des applications f et g puisque pour que x et y soient voisins, il suffit de regarder x_n et y_n pour un nombre fini d'entiers n.

On prolonge $f : E \longrightarrow [0,1]$ en une application continue F sur tout $[0,1]$ par linéarité. Plus précisément, $f(\frac{1}{3})$ et $f(\frac{2}{3})$ sont bien déterminées, donc on pose $F(x) = f(\frac{1}{3}) + (x-\frac{1}{3})\dfrac{f(\frac{2}{3})-f(\frac{1}{3})}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}$ pour tout $x \in [0,1] \setminus E_2$ (cf. figure n° 25).

Figure n° 25



$f(\frac{7}{9}) = 1$; $f(\frac{8}{9}) = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = F(x)$ pour $x \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$.

$f(\frac{1}{9}) = \frac{1}{2}$; $f(\frac{2}{9}) = 0$ d'où $F(x)$ par linéarité sur $[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]$.

En l'occurence $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3})$. On répète le procédé pour les extrémités de E_n , etc. De même pour g . La fonction $x \longrightarrow (F(x),G(x))$ est alors définie et continue de $[0,1]$ dans $[0,1] \times [0,1]$. C'est cependant une surjection car si l'on prend $(y,z) \in [0,1] \times [0,1]$, on aura (d'ailleurs de plusieurs manières possibles quelquefois) :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \qquad y_n = 0 \text{ ou } 1$$

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n} \qquad z_n = 0 \text{ ou } 1 \ .$$

On pose $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$ où $\begin{cases} x_{2n} = y_n & n \geqslant 1 \\ x_{2n+1} = z_n & n \geqslant 0 \end{cases}$

et on vérifie que $F(x) = f(x) = y$, $G(x) = g(x) = z$, ce qui termine la démonstration.

1.3 La notion de puissance, de cardinal et d'ordinal

1.3.1 Les cardinaux

De 1879 à 1895, Cantor publie tout une série de travaux : "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten". Il abandonne peu à peu son point de vue de topologie ponctuelle (cf. Chap. V § 8), et même de théorie de la dimension (cf. § 1.2) au profit de ce qui va devenir le corpus de la théorie des ensembles.

Notre but n'est pas de suivre cette démarche, car cela sort de notre propos, mais juste d'indiquer en quelques mots la technique d'arithmétisation.

> *"Si deux ensembles bien définis M et N se laissent coordonner l'un à l'autre, élément par élément, de façon univoque et complète, je me sers de l'expression... qu'ils ont égale puissance ou qu'ils sont équivalents."*

($M \equiv N$ s'il existe $f : M \longrightarrow N$ où f est une bijection).

Cantor pense avoir montré que pour deux ensembles M et N , on a l'une et l'une seulement des trois possibilités :

. $M \equiv N$ M et N ont même puissance

. $M \equiv N'$ avec $N' \subsetneq N$, mais il n'existe pas d'injection de N dans M , auquel cas on dit que M a une puissance inférieure à N

. $N \equiv M'$ avec $M' \subsetneq M$, mais il n'existe pas d'injection de M dans N , auquel cas on dit que M a une puissance supérieure à N.

De fait, la démonstration correcte en sera donnée en 1897 par Schröder et Bernstein. Deux choses sont à prouver :

- d'une part, que les trois possibilités s'excluent mutuellement ; c'est le :

Théorème. Soient M et N deux ensembles et $f : M \longrightarrow N$ une injection ; $g : N \longrightarrow M$ une injection. Il existe alors une bijection $h : M \longrightarrow N$;

- d'autre part, qu'il n'existe aucune autre possibilité. Il suffit de montrer qu'étant donnés deux ensembles M et N, on a deux possibilités seulement, mais deux possibilités non exclusives l'une de l'autre :

$$\begin{cases} \text{. ou bien il existe une injection de M dans N} \\ \text{. ou bien il existe une injection de N dans M .} \end{cases}$$

Ces deux résultats ont l'air bien innocents, mais requièrent une certaine habileté et surtout l'énoncé même du résultat nécessite quelques précautions et la démonstration utilise l'axiome du choix. Mais n'anticipons pas et poursuivons avec Cantor comme celui-ci nous y invite en nous disant que la vérité du résultat *"ne pourra être reconnue que plus tard lorsque nous aurons un aperçu de la suite croissante des nombres cardinaux transfinis et une idée de leur enchaînement"* (Cantor ; Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten ; Zeitschrift für Phil. Kritik (1887) p. 81-125). Du point de vue logique, il y a là un sérieux ennui.

Naturellement, un ensemble fini aura pour cardinal le nombre de ses éléments. La notion de nombre entier est donc première et Cantor en est très conscient : *"sans le concept de nombre je ne pourrais même pas faire quelques pas en avant en théorie des ensembles"*. Le cardinal de l'ensemble des entiers naturels est noté $\aleph_0$ (aleph 0 , à partir de la première lettre de l'alphabet hébraïque). Puisque Cantor a montré qu'il ne pouvait exister de bijection entre l'ensemble des entiers et $\mathbb{R}$, on note C la puissance de $\mathbb{R}$, et $C > \aleph_0$.

Cantor définit alors quelques opérations sur les nombres cardinaux, de sorte bien sûr qu'il étende aux nouveaux nombres les lois connues sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

Si M et N sont deux ensembles disjoints, on pose les trois opérations :

$$\text{Card } M + \text{Card } N = \text{Card } (M \cup N)$$

$$\text{Card } M \,.\, \text{Card } N = \text{Card } (M \times N)$$

et
$$(\text{Card } M)^{\text{Card } N} = \text{Card } (M^N)$$

où M^N désigne l'ensemble des applications de N dans M. On peut montrer la commutativité, l'associativité et la distributivité (somme, produit) ainsi que (en posant $m = \text{Card } M$, $n = \text{Card } N$ et $p = \text{Card } P$) :

$$m^n . m^p = m^{n+p} \quad , \quad (m^n)^p = m^{np} \quad .$$

Cependant, les règles de simplification (régularité, etc.) cessent d'être vraies :

$$\aleph_0 + n = \aleph_0 \quad \text{pour tout cardinal fini } n$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad \text{etc.}$$

On note aussi :
$$2^{\aleph_0} = C \quad .$$

En effet, d'une part il existe une injection de $[0,1]$ dans $2^{\aleph_0}$ qui à tout $x \in [0,1]$ fait correspondre la suite infinie des $x_n = 0$ ou 1 du développement dyadique de x qui ne se réduit pas à des zéros au bout d'un certain rang. C'est une application $x \longrightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ qui a tout x associe une suite.
Donc **Card** $[0,1] = C \leq 2^{\aleph_0}$. Mais par le même procédé, il y a bijection entre $2^{\aleph_0}$ et l'ensemble de Cantor lequel est inclus dans $[0,1]$. D'où :

$$2^{\aleph_0} \leq \text{Card } [0,1]$$

ce qui fournit l'égalité cherchée.

Cantor montre aussi qu'à partir d'un ensemble M on peut toujours construire un ensemble de cardinal strictement plus grand.

Théorème. Soit M un ensemble. L'ensemble $\mathcal{P}(M)$ des sous-ensembles de M a un cardinal strictement supérieur à M.

Bien entendu, il existe une injection canonique de M dans $\mathcal{P}(M)$, celle qui à tout x de M fait correspondre l'ensemble $\{x\}$ réduit à l'élément x . Le cas de l'ensemble vide $\emptyset$ est vite réglé puisque $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ensemble qui n'est pas vide !

Supposons donc qu'il y ait une injection $f : \mathcal{P}(M) \longrightarrow M$. A tout x qui n'est pas dans l'image de f on fait correspondre M , sinon on utilise f^{-1} . On dispose de $g : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ qui est surjective. On pose :

$$N = \{x \mid x \in M \; ; \; x \notin g(x)\} .$$

D'une part, $N \in \mathcal{P}(M)$ et puisque g est surjective, il existe $x_o \in M$ tel que $g(x_o) = N$. Mais si $x_o \in N$, on déduit $x_o \notin g(x_o) = N$ ce qui est impossible tandis que si $x_o \notin N$, alors $x_o \in g(x_o) = N$ ce qui est tout autant impossible d'où la contradiction.

Le style de cette démonstration doit surprendre un lecteur qui n'a jamais ouvert de livre sur la Théorie des Ensembles. Nous verrons même qu'en dehors d'un cadre axiomatique précisé (Qu'est-ce qu'un ensemble ?), cette démonstration par la considération de N est le type même des démonstrations qui provoquent des contradictions paradoxales.

A ce niveau, la création cantorienne, par un mouvement dialectique, peut retrouver la notion de nombre entier comme cardinal d'un ensemble fini, c'est-à-dire, par définition, d'un ensemble qui ne peut avoir même puissance qu'un de ses sous-ensembles propres. On récupère alors l'arithmétique de $\mathbb{N}$ et ensuite celle de $\mathbb{Q}$, puis, par les seules techniques de la Théorie des Ensembles, on construit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, etc., c'est-à-dire toute l'Analyse ou la Géométrie. Epistémologiquement, l'abstraction de la notion de dénombrement, sous la forme du cardinal, est donc la seule base des mathématiques. La force unificatrice de la théorie cantorienne apparut comme éblouissante. Ce revirement étonnant, qui faisait dépendre non seulement la géométrie, mais aussi l'arithmétique, d'une unique théorie à l'axiomatique simple, ne pouvait que déconcerter des esprits géomètres comme Poincaré. Car la nature même des démonstrations, voire le style, semblaient échapper au discours mathématique. Les critiques fusèrent, d'abord sans avancer de justifications d'ordre vraiment mathématique, mais sous l'impulsion d'un refus viscéral de faire entrer les nouveaux types de raisonnement, les nouveaux objets ensemblistes, sur la scène soi-disant harmonieuse des mathématiques de la fin du siècle dernier.

Bientôt, des critiques mathématiques survinrent à partir de la découverte de divers paradoxes facilement construits à partir de la théorie de Cantor. Repoussons une rapide présentation de ces paradoxes au paragraphe suivant (§ 2). En effet, nous avons déjà signalé la difficulté logique située à la base même de la théorie des cardinaux. Par suite, la présence de paradoxes ne saurait étonner. On aménagera au XXème siècle une axiomatique plus exigeante que l'axiomatique finalement naïve de Cantor. C'est à partir d'une telle axiomatique que N. Bourbaki construit, logiquement parlant, toutes les mathématiques (cf. Théorie des Ensembles, dernière édition, Hermann 1970).

N. Bourbaki, dans l'introduction, explique ce qu'est un langage formalisé et se propose de décrire dans le Livre de la théorie des ensembles un tel langage parmi d'autres possibles. Il fait sienne l'ambition cantorienne, mais désormais c'est une réalité.

> *"Un seul de ces langages suffira toutefois à notre objet. En effet, alors qu'autrefois on a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières qui lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'un langage formalisé qui lui appartînt en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique d'une source unique, la Théorie des Ensembles."*

Prudent en 1970, Bourbaki ajoute :

> *"Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité."*

1.3.2 Les ordinaux

C'est encore à partir de considérations d'analyse fine (ensembles dérivés successifs des ensembles de singularités en analyse harmonique) que Cantor en vient à l'idée de nombre ordinal. Cette fois, c'est la notion d'ordre, de succession, qui va subir le laminoir de l'abstraction, de la même façon que la notion de dénombrement avait fourni le concept de cardinal. Là aussi, la Théorie des Ensembles éblouit puisque, comme nous l'avons montré dans ce texte, la notion d'ordre est liée à toutes les réflexions sur le continu.

Sur un ensemble E , un ordre total est une relation $\leqslant$ satisfaisant les trois propriétés :

$$\begin{cases} \forall\ x \in E\ , \text{ on a } \quad x \leqslant x\ . \\ \forall\ x,y,z \quad \text{si } x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z\ , \text{ on a } x \leqslant z\ . \\ \forall\ x,y \quad \text{ou bien} \quad x \leqslant y \text{ et } x \neq y \text{ (noté } x < y)\ , \\ \qquad\qquad \text{ou bien} \quad x \geqslant y \text{ et } x \neq y \text{ (noté } x > y)\ , \\ \qquad\qquad \text{ou bien} \quad x = y\ . \end{cases}$$

De même que pour définir la notion de cardinal on devait considérer les applications conservant le nombre, à savoir les bijections, pour la notion d'ordinal on définit les applications qui conservent l'ordre. Soient $(E,\leqslant)$ et $(F,\leqslant)$ deux espaces totalement ordonnés, $f : E \longrightarrow F$ est strictement monotone lorsque $x < y$ implique $f(x) < f(y)$. Alors $(E,\leqslant)$ et $(F,\leqslant)$ sont équivalents pour l'ordre ou ont même type d'ordre s'il existe une bijection strictement monotone de E sur F . Un type d'ordre s'appelle encore nombre ordinal.

Il n'est pas difficile d'imaginer ce que peut être la somme de deux nombres ordinaux, ni le produit ordinal. Seulement, ces opérations ne sont pas commutatives. On peut prouver toutefois l'associativité et que l'addition est régulière à gauche, etc. Il reste maintenant à comparer deux nombres ordinaux. Pour ce faire, Cantor introduit l'importante notion d'ensemble bien ordonné (Math. Ann. 21 (1883) p. 545-586). $(E,\leqslant)$ est dit bien ordonné si tout sous-ensemble non vide de E contient un plus petit élément. Visiblement, $\mathbb{N}$, pour l'ordre naturel, est bien ordonné.

Par définition, un nombre ordinal α (correspondant à $(E,\leqslant)$) est dit strictement inférieur à un nombre ordinal β (correspondant à $(F,\leqslant)$) s'il existe un élément $y_o \in F$ et s'il existe une bijection strictement monotone $f : E \longrightarrow F_o$ telle que $F_o = \{y | y \in F \text{ et } y < y_o\}$. (Bien entendu, l'ordre sur F_o est celui induit par F). On vérifie sans peine que cette définition ne dépend que des types d'ordre de $(E,\leqslant)$ et $(F,\leqslant)$.

Cantor établit alors que pour deux nombres ordinaux quelconques α et β, on a l'une et l'une seulement des trois possibilités suivantes :

- ou bien $\alpha = \beta$,
- ou bien $\alpha < \beta$,
- ou bien enfin $\alpha > \beta$.

Pour les nombres ordinaux, on ne rencontre pas la difficulté surgie au contraire avec les cardinaux. Peut-on alors comparer nombres ordinaux et nombres cardinaux ?

En ce qui concerne les ensembles finis, ordinaux et cardinaux coïncident. Appelons ω le nombre ordinal correspondant à $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ muni de l'ordre naturel. On construit ensuite par ajouts successifs d'éléments $\omega+1$, $\omega+2,\ldots$ puis 2ω, $2\omega+1$, $2\omega+2,\ldots$, puis 3ω, $3\omega+1$, etc. puis ω^2, ω^2+1 etc., puis ω^3, ω^3+1, etc. Tous ces nombres ordinaux correspondent à des ensembles ayant le même cardinal, à savoir $\aleph_o$, la puissance du dénombrable. Cependant, l'ensemble de ces nombres ordinaux ayant la puissance du dénombrable n'est pas dénombrable et possède alors un cardinal noté $\aleph_1$. Ce cardinal est le premier cardinal après $\aleph_o$. Cantor soulève sans le résoudre le problème de savoir si $\aleph_1 = 2^{\aleph_o}$, c'est-à-dire puisque $2^{\aleph_o}$ est le cardinal C du continu (celui de $\mathbb{R}$ par exemple), s'il n'existe aucun cardinal entre le dénombrable et le continu. Ce problème est connu sous le nom de problème du continu. Nous y reviendrons (§ 2.3).

Ces quelques éléments nous montrent qu'il convient de distinguer deux sortes d'ordinaux : ceux qui proviennent d'un ordinal par ajout d'un élément (Exemple 4 ou $\omega+1$) et les autres (Exemple ω). Cantor construit une véritable arithmétique des nombres ordinaux et fournit une forme normale pour l'écriture d'un ordinal, etc.

Il pressent, mais ne peut montrer, qu'il existe une surjection strictement monotone de la c asse de tous les ordinaux sur celle des cardinaux. On sait établir ce résultat aujourd'hui, dans le cadre de la Théorie des Ensembles, moyennant l'axiome du choix.

Pour Cantor, la difficulté logique à la base des nombres cardinaux, qu'il croyait pouvoir éviter grâce aux ordinaux (puisque la classe de tous les ordinaux est totalement ordonnée) se retrouve lorsque l'on veut comparer cardinaux et ordinaux.

Les dernières années de Cantor seront assombries par des essais infructueux et plus encore par l'apparition de paradoxes au sein même de la théorie, paradoxes soulevés en privé par Cantor lui-même.

2. LES PARADOXES ET LA CRISE DES FONDEMENTS : DEPART DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE

2.1 Quelques paradoxes

La sagesse populaire enseigne que l'excessif est insignifiant. Par ailleurs, les théologiens de toutes les religions savent qu'en définissant Dieu comme celui de tous les attributs possibles, on lui octroie tant la bonté que le mal, tant l'existence que la non-existence, etc. De même pour la notion cantorienne et naïve d'un ensemble qui pouvait être tout et n'importe quoi.

Le premier paradoxe surgit en 1897, sous la plume de Burali-Forti dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palerma. L'ensemble de tous les ordinaux est totalement ordonné et il n'est pas difficile d'établir à partir des démonstrations de Cantor lui-même, que cet ensemble est bien ordonné. Il possède donc un type d'ordre lequel est un nombre ordinal α . Mais par définition, ce nombre α doit être strictement supérieur à tous les nombres ordinaux, donc à lui-même !

En quelques années, bien d'autres paradoxes furent exhibés et rédigés dans une langue peu à peu débarrassée de tout jargon mathématique. Bertrand Russel (1872-1970) excella dans cet art qui tourne autour de la contradiction provoquée par l'idée d'un ensemble de tous les ensembles.

Citons le dilemme du barbier annonçant fermement qu'il rasera tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et ne rasera pas tous ceux qui se rasent eux-mêmes. Peut-il se raser lui-même ?

L'exemple de Russel le plus célèbre concerne justement l'ensemble de tous les ensembles, pris au sens naïf. Parmi les ensembles, il n'y a que deux possibilités : certains se contiennent eux-mêmes comme éléments (par exemple l'ensemble des ensembles qui peuvent se décrire en quatorze mots français au plus ou l'ensemble de tous les ensembles), d'autres non (par exemple l'ensemble des entiers). Soit E l'ensemble des ensembles qui se contiennent eux-mêmes et F l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. L'ensemble F ne peut ni se contenir lui-même, ni ne pas se contenir lui-même. C'est contradictoire !

2.2 Axiomatique de la Théorie des Ensembles

Les paradoxes pullulent dans la théorie cantorienne parce que certains ensembles sont trop "gros". Zermelo, en 1908, publia dans les Mathematische Annalen une axiomatique de la théorie des ensembles ne partant pas de la définition cantorienne naïve. L'idée est de définir des opérations permises sur des objets appelés ensembles : unions suivant un ensemble d'indices, intersections, famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble et produits d'ensembles suivant un ensemble d'indices, passage au quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence, etc. Axiomatiquement, on déclare en outre que la famille des entiers naturels est un ensemble.

Fraenkel en 1921 et J. von Neumann en 1925 apporteront des améliorations à ce système d'axiomes qui évite les paradoxes précédemment évoqués. Toutefois, rien n'assure encore aujourd'hui que d'autres paradoxes ne pourraient pas surgir même dans le cadre axiomatique ainsi fixé. Tout le problème est justement la non-contradiction de cette axiomatique. D. Hilbert, en posant la méthode axiomatique basée sur le langage formalisé, ouvrait directement la route aux théories dont le but même était de démontrer une non-contradiction. Dans la théorie des ensembles adoptée par N. Bourbaki, très influencé par Hilbert, une façon d'éviter des arguments du genre "Considérons tous les ensembles tels que ..." est justement l'utilisation d'une proposition logique formelle, l'opération τ de Hilbert. Ce problème de la non-contradiction ne pouvait que faire renaître la logique de la torpeur où elle s'était réfugiée depuis les vigoureuses percées d'Aristote et de Leibniz. C'est ce que nous décrirons rapidement dans le prochain paragraphe.

Toutefois, avant cela, il est nécessaire de dire un mot sur un axiome de Zermelo connu sous le nom d'axiome du choix. Sous sa forme la plus naïve, il revient à dire que si $(E_i)_{i \in I}$ est une collection d'ensembles non vides E_i , indexée par un ensemble non vide I , il est possible de définir une application qui à tout i de I associe un élément de E_i . On peut donner un énoncé autre en disant que le produit cartésien $\prod_{i \in I} E_i$ n'est pas vide.

On sentira peut-être mieux le rôle de cet axiome en disant qu'il équivaut à dire que tout ensemble E peut être muni d'un ordre total $\leqslant$ de sorte que $(E,\leqslant)$ soit bien ordonné. C'est dire que l'axiome du choix est justement le joint qui justifie le présupposé cantorien quant à la comparaison de tous les cardinaux (cf. § 1.3.1). D'autres énoncés équivalents sont connus (Principe de maximalité de Hausdorff, axiome de Zorn, etc.).

Cet axiome fit couler beaucoup d'encre en France et les querelles autour de l'année 1904 entre Hadamard, Lebesgue, Borel et Baire sont restées célèbres (cf. Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 33, 1905 p. 261-273). Aujourd'hui, le sentiment mathématique dominant est téléologique, justifiant l'axiome par les résultats qu'il permet d'obtenir (cf. § 3 : utilisation de l'infini en topologie et analyse fonctionnelle). Nous avons déjà dit (Chap. IV § 7) que l'on ne sait pas construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue sans utiliser l'axiome du choix. Ceci n'est pas fortuit, mais tient à une impossibilité fondamentale comme l'a montré Solovay en 1971. Il n'est pas dit qu'une théorie basée sur l'axiome du choix dénombrable seulement et un autre axiome du type de celui de Solovay (Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue) ne puisse donner des résultats intéressants en Analyse (cf. ouvrage cité au Chap. IV § 7).

2.2 Les Principia Mathematica de Russel et Whitehead

Malgré l'axiomatique de Zermelo, dont la non-contradiction n'était pas établie comme Poincaré le soulignait véhémentement vers 1900, les paradoxes de la création cantorienne soulevèrent le problème de la langue mathématique proprement dite, donc de la logique.

Dès 1884, G. Fregge (1848-1925), dans Die Grundlagen der Arithmetik, proclamait son ambition de construire l'arithmétique (donc les mathématiques d'après Cantor) sur une amélioration du calcul propositionnel tel que précédemment manipulé par Leibniz, De Morgan, Boole ou Peirce. C'est Bertrand Russel et A.N. Whitehead qui offriront un exposé systématique des bases des mathématiques dans les Principles of Mathematics de 1903 puis dans les 3 volumes des Principia Mathematica de 1910 à 1913.

Décrire cet exposé sort complètement de notre sujet. En gros, il s'agit d'énoncer des règles reliant les propositions élémentaires (implication, négation, etc.) et de définir des fonctions propositionnelles pour créer un langage formel. L'apport de Russel et Whitehead, en dehors du formalisme symbolique très riche, est de définir des types de divers ordres de fonctions propositionnelles pour éviter les paradoxes logiques. On veut éviter de considérer des classes qui se contiennent elles-mêmes comme élément. Une proposition prédicative libre sur un ensemble (. est ceci, par exemple . est pair) définit un ensemble. C'est une fonction propositionnelle de type 0 . Lorsque les éléments sont eux-mêmes des propositions, on a des fonctions propositionnelles de type 1 , etc. D'autre part, par un axiome de réduction, Russel et Whitehead évitent des empilages par trop complexes. Ils parviennent enfin à une explication complète des cardinaux.

Une telle approche de la mathématique, par le seul symbolisme formel de la logique, semble faire de cette science un jeu purement logico-déductif dont on ne comprend plus la relative adéquation au monde réel et qui semble avoir évacué l'intuition.

On comprend qu'à l'Ecole opposée on ait donné le nom d'Ecole Intuitioniste. Vulgarisée par H. Poincaré (La Science et l'hypothèse ; La valeur de la science ; Science et Méthode), cette école reprend l'idée kantienne de certains a priori des formes mêmes de la pensée. Il s'agit maintenant des nombres entiers et de l'induction par récurrence par exemple. Brouwer systématisera ce point de vue en accordant à la seule intuition mathématique la liberté -totale- de créer la mathématique, en dehors même d'une quelconque "matérialité" de la réalité extérieure, physique par exemple. Cette intuition appartiendrait à une sorte de monde des Idées à la Platon et se distinguerait bien entendu de la logique considérée comme un pur langage. Ce langage logique est en effet soumis à des règles strictes, provenant de l'étude des ensembles finis. C'est la logique aristotélicienne en gros. Mais alors, il n'y a aucune raison de pouvoir appliquer ce langage dans le cadre des ensembles infinis. Le fond du problème est bien la signification de l'existence d'un objet en mathématique. Le fait qu'on démontre qu'une propriété P ne puisse provenir d'une autre déjà acquise ne permet pas d'en déduire qu'il existe un élément ne satisfaisant pas la dite propriété P .

L'Ecole Intuitioniste rejette donc l'emploi de la logique ordinaire (par exemple principe du tiers exclu) aux ensembles infinis. Elle met l'accent sur l'idée qu'il existe des propositions indécidables dans le cadre d'une axiomatique donnée. En outre, cette Ecole rejette les procédés non explicitement constructifs et en particulier l'ensemble des nombres irrationnels en tant que tel. Un intuitioniste refuse l'argument euclidien qui définit une raison par les grandeurs proportionnelles. On se souvient (cf. Chap. I § 3.3) que la définition essentielle (Déf.6) partait de la phrase : Pour tous entiers n et m alors .... Comme la vérification explicite pour tous ces entiers est impossible, une telle définition est dénuée de sens. On comprend ainsi qu'un H. Weyl déclare que l'Analyse est bâtie sur du sable (Philosophy of Mathematics and Natural Science 1949). Ce refus de l'infini rappelle inévitablement un refus analogue par le dépassement eudoxien de l'algorithme infini grâce à la théorie des proportions. Bien sûr, un autre niveau est atteint puisque ce sont les raisonnements en chaînes infinies qui sont refusés. Si l'analogie rectiligne de l'accumulation du Savoir est inexacte, l'analogie de l'hélice serait-elle préférable ?

2.3 Des aperçus plus que sommaires sur les apports de Gödel et Cohen

A partir du moment où, refusant le point de vue intuitioniste, on adopte le point de vue de Whitehead et Russel, on est conduit à ne pas se satisfaire d'une seule famille d'axiomes et règles tant pour les mathématiques elles-mêmes que pour la logique qui les sous-tend. D'autres familles s'avèrent possibles. N. Bourbaki choisit un système particulier qui lui semble le mieux rendre compte... des mathématiques connues et parce que la non-contradiction du système semble la position la plus réaliste.

> *"... depuis 50 ans qu'on a formulé avec assez de précision les axiomes de cette théorie et qu'on s'est appliqué à en tirer des conséquences dans les domaines les plus variés des mathématiques, on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais."*

Car la seule limitation dans le choix des systèmes axiomatiques est justement cette non-contradiction qu'on n'arrive pas à prouver pour la théorie des ensembles et sur laquelle, avons-nous précisé, repose la non-contradiction des mathématiques. N. Bourbaki est persuadé de la pérennité de la majeure partie de l'édifice mathématique, *"mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience."*

Pour établir la non-contradiction d'un système et dans cette preuve seulement, Hilbert proposa de n'utiliser que des raisonnements constructifs et en chaînes finies (Beweistheorie). On sait de nos jours établir la non-contradiction de l'arithmétique, mais en autorisant des chaînes transfinies de propositions. Le programme de Hilbert, quant à lui, est beaucoup plus exigeant. C'est en 1931, dans les Monatshefte für Mathematik und Physik, que K. Gödel démontrait avec éclat qu'un tel espoir était illusoire pour l'arithmétique (disons pour le système de Péano (cf. § 3)). Pour tout système d'axiomes contenant le système de Péano, il existe un énoncé de théorie des nombres, lequel ne peut être démontré dans le cadre du système donné (ni vrai, ni faux). On peut dire que ce résultat de Gödel détruisait l'une des plus intimes convictions, qui font partie de la philosophie spontanée du mathématicien.

Une illustration concrète du théorème de Gödel fut donnée par P.J. Cohen en 1963 (Proc. Nat. Acad. Sc. 50 (963) 1143-1148). Gödel établissait en 1940 que le théorème du continu ajouté au système de Zermelo-Fraenkel n'entraîne pas une contradiction si le système de Zermelo-Fraenkel lui-même (sans l'axiome du choix) n'est pas contradictoire. De même pour l'axiome du choix.

Cohen, quant à lui, montre que tant l'exactitude du théorème du choix que celle du théorème du continu est indécidable dans le cadre du système de Zermelo-Fraenkel. C'est le premier exemple, stupéfiant mais prédit par l'Ecole Intuitioniste, d'un énoncé mathématique déterminé et indécidable.

Depuis, nombre de théorèmes non prouvés ont été subodorés indécidables dans les domaines les plus variés (théorie des équations diophantiennes, bien sûr, mais aussi en théorie de la mesure (lifting) voire en Analyse fonctionnelle).

Le moins que l'on puisse dire, c'est que la logique mathématique est une des branches les plus florissantes des mathématiques du dernier quart de ce siècle.

5. UTILISATION DE L'INFINI EN TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE

En mathématiques, même élémentaires, on utilise quelquefois l'infini, soit sous la forme très simple de l'existence d'un ensemble infini d'entiers perçu dans sa totalité, soit sous une forme déguisée qui se ramène à l'axiome du choix (le plus souvent dénombrable, faut-il ajouter).

Le système de Péano, exposé en 1889 dans Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita, décrit axiomatiquement la famille des entiers naturels. On part de ce que 1 est un nombre naturel qui n'est successeur d'aucun autre, de ce que tout entier a un successeur et que l'égalité (relation d'équivalence) des successeurs implique l'égalité des nombres. Enfin, un ensemble d'entiers contenant 1 et contenant avec un entier son successeur contient tous les entiers (principe de récurrence dénombrable).

Citons quelques résultats, en dehors de la théorie des nombres, qui sont plus ou moins consciemment utilisés et qui se déduisent du système de Péano par la considération de $\mathbb{N}$ dans sa totalité.

. $\mathbb{R}$ ou tout corps totalement ordonné archimédien et complet n'est pas en bijection avec l'ensemble des entiers naturels (Théorème de Cantor).

. Il n'est pas possible d'associer à chaque entier naturel n un sous-ensemble fermé F_n de $\mathbb{R}$ tel que F_n ne contienne aucun intervalle ouvert non vide et que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R}$. Ce théorème dû à Baire (1899) se démontre exactement de la même façon que le théorème de Cantor précédent (cf. Chap. V § 8). Il se généralise à tout espace métrique complet et, comme le théorème de Cantor, se révèle très souple pour établir l'existence de pathologies sans se donner la peine de les construire. (Par exemple, l'existence d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle part différentiable). L'emploi du théorème de Baire en Analyse Fonctionnelle est très fructueux : théorème de condensation des singularités de Banach, théorème de Banach-Steinhaus ou de la borne uniforme. On retrouve son analogue en théorie de la mesure (Théorème de Vitali-Hahn-Saks) pour généraliser la dérivation. Son emploi est indispensable même dans une discipline proche du numérique appliqué, comme la <u>théorie de l'approximation</u>. Quant à l'infini (en acte) non dénombrable, il intervient presque toujours à la base même de l'analyse fonctionnelle et de la topologie (En algèbre, il intervient pour assurer l'existence d'une base dans un espace vectoriel quelconque).

. En topologie, par exemple, il est bien difficile de construire des espaces compacts tant soit peu pathologiques sans utiliser le transfini. L'idée est simple à partir de l'ensemble triadique de Cantor dont on a vu qu'il était homéomorphe à la famille de toutes les suites de 0 et de 1, c'est-à-dire au produit topologique cartésien d'une infinité dénombrable d'ensembles discrets réduits à 0 et 1. En prenant des produits non dénombrables, on forge des compacts assez bizarres. Le bizarre se tempère si l'on sait que tout compact métrisable est l'image continue de l'ensemble triadique de Cantor ! Une pathologie du même acabit s'obtient en prenant un nombre ordinal α et en considérant l'ensemble E_α de tous les ordinaux β avec $\beta < \alpha$. On munit E_α de la topologie de l'ordre (ensemble bien ordonné) et E_α est compact si et seulement si α est de première espèce. Un comportement étrange est le suivant. Pour certains α transfinis, si $f : E_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors il existe un $\beta \in E_\alpha$ et f est constante pour tout γ de E_α tel que $\gamma > \beta$.

. Encore en topologie, le théorème de Tychonoff, qui établit que le produit topologique quelconque de compacts est compact, repose sur l'axiome du choix. Ce théorème est crucial en Topologie Générale, mais tout autant en Analyse Fonctionnelle. C'est par exemple ce théorème qui permet d'identifier tout espace normé à un sous-espace de fonctions continues sur un espace compact (déduit du Théorème d'Alaoglu-Bourbaki).

. En analyse, tous les procédés non triviaux de compactifications, que ce soit la méthode de Gelfand (algèbres stellaires de Banach) ou les méthodes plus anciennes de Čech (avec les ultrafiltres), sont basées sur l'axiome du choix.

. En théorie de la mesure, l'axiome du choix seul permet de construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue. La construction d'une mesure de Haar (invariance par translation) sur un groupe localement compact, se fait facilement avec l'axiome du choix, mais on peut s'en passer au prix d'une construction plus laborieuse.

. En Analyse fonctionnelle, dans un espace vectoriel normé E, seul l'axiome du choix permet de construire à partir d'un vecteur $x \neq 0$ une application linéaire continue $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \neq 0$ (Théorème dérivé du théorème de Hahn-Banach). Or, ces applications linéaires continues jouent le rôle, en dimension infinie, des coordonnées (covariantes) en dimension finie, d'où l'importance du résultat.

On en restera là de cette énumération.

SEPTIEME CHAPITRE

APERCUS
SUR UN DEVELOPPEMENT PARALLELE
EN CHINE

Ceux que, communément, l'on nomme savants, n'ont-ils pas prouvé n'être que les fourriers des grands voleurs ?
Et ceux que l'on considère comme sages, n'ont-ils pas prouvé n'être que les chiens de garde des grands voleurs ?

<u>*Maître Tchouang*</u>

IIIème siècle avant J.C.

世俗之所謂知者有不為大盜積者乎?
所謂聖者有不為大盜守者乎?
莊周

C'est par l'analyse de l'intuition eudoxienne que commença notre étude ; les raisons forment une idéalité dont la totalité est indépendante de la nature des grandeurs archimédiennes prises en compte, (longueurs, aires, poids, temps etc). Intuition opératoire puisque nous n'en connaissons que la formalisation exemplaire. Mais celle-ci oblitère le numérique, ses techniques et par un passage à un niveau autre, elle masque le rôle de l'infini.

La Science Occidentale, aussi bien l'antique que la musulmane, aussi bien la Moyenâgeuse que la science de la Renaissance ou la science classique, prend modèle sur la construction euclidienne.

D'abord un modèle stylistique -et combien d'expressions de type euclidien sont elles passées telles quelles chez les philosophes, d'Aristote aux Scholastiques ? - Q. E. D.

Mais surtout un modèle d'agencement intellectuel logico-déductif, à partir d'un présupposé axiomatique assez restreint et suggéré par le sensible.

Euclide domine l'Occident et régente la conception même de Nicolas Bourbaki. L'interjection célèbre : "A bas Euclide" visait plus certains pontifs de l'Enseignement Secondaire français -thuriféraires d'une mathématique désuète parce que figée par le programme et l'examen- que le projet euclidien de rationalité formalisée à partir d'intuitions de type réaliste.

Si donc la Chine n'existait pas, civilisation où Euclide n'a pas d'analogue, mais de tardifs épigones, il faudrait l'inventer pour les besoins de notre étude.

Et on l'inventerait moins complexe !

La Chine est une civilisation agraire par excellence, unifiée politiquement depuis l'Auguste de la Chine (秦始皇帝) dans le dernier quart du troisième siècle avant Jésus-Christ. L'Empire du milieu (中國) est gouverné par une "bureaucratie céleste". Cette caste mandarinale, peu à peu modelée par l'esprit confucéen et que les rapports de production laissent à peu près indépendante de la caste militaire, de la classe marchande ou des clergés bouddhistes et taoïstes, confère à la Chine cette continuité au long des millénaires, continuité qui n'exclut pas d'innombrables jacqueries paysannes, dont certaines parviennent à fonder une nouvelle dynastie. Le Mandat du ciel change seulement de destinataire et les choses reprennent comme auparavant.

S'il est bien vrai que les superstructures -comme la science mathématique- traduisent en leur logique propre les rapports économiques et les luttes de classes (féodale, bureaucratique ou paysanne), une telle continuité historique, dans laquelle se dissolvent les grandes invasions, devrait permettre bien des vérifications.

La très rapide analyse que l'on va entreprendre est loin en dessous de telles considérations et ne portera que sur la notion de nombre réel, telle qu'appréhendée par la civilisation chinoise avant l'arrivée des missions jésuites à la Cour de Pékin. Même sur un tel programme, 行易知難

(Il est facile d'agir, difficile de comprendre).

En tant que pratique calculatoire, les mathématiques font partie des techniques indispensables pour la gestion d'un pays agraire, ne serait-ce que pour déterminer les impôts, tout comme dans l'Egypte pharaonique. A ce titre, les chinois font montre d'une dextérité remarquable, illustrée par l'invention du boulier dont on sait qu'il peut rivaliser avec les calculateurs électroniques pour les opérations élémentaires. Le boulier devient d'usage constant en Chine à partir de la dynastie mongole des Yuans vers le XIII ème siècle après Jésus-Christ. Cette adresse chinoise dans la manipulation des chiffres s'oppose à la lourdeur occidentale si l'on songe à certaines anecdotes de Villehardouin ou d'un Grand Chroniqueur comme Marot père.

Mais il ne s'agit là que d'une technique, sans support spéculatif. Qu'en est-il du statut des Mathématiques en Chine ?

1 - IMPRESSION SUR LE CADRE INTELLECTUEL

Toute la philosophie classique chinoise, lorsqu'elle daigne parler des mathématiques, leur assigne une place technique et seulement technique. En un mot, comment la mathématique pourrait-elle s'introduire au delà du domaine de ce qui a forme ou nombre ?

Si l'on s'aventure dans quelques unes des "Cent Ecoles" qui fleurissent entre 500 et 250 avant Jésus-Christ, dans un climat de "condottieri", pendant la période des Royaumes Combattants, on découvre ce qui va servir de cadre au moins formel et stylistique à la réflexion chinoise pour les millénaires. Parmi ces écoles, que les Chinois appellent des "familles" (家), émergent les Ecoles Confucéenne, Taoïste, légiste et Mohiste.

Confucius (孔夫子) et plus encore l'idéologie confucéenne reconstruite et systématisée par le système impérial, visent à l'harmonie des diverses relations qui unissent l'homme à l'homme. C'est d'abord et avant tout une philosophie "sociale", dont le but est de modeler un honnête homme (君子), pénètré d'amour pour son voisin (仁) et comme opposé à l'homme vulgaire (小人). Derechef l'Ecole confucéenne (儒家) élimine toute spéculation métaphysique, mais aussi toute spéculation qui n'a pas l'homme pour objet.

"Le maître dit : *vous ne connaissez encore rien sur les vivants, comment connaîtriez-vous quelque chose sur les morts ?*"

Un autre maître confucéen (荀 子) précise

"Toutes choses qui n'ont rien à voir avec la distinction entre le bien et le mal, le vrai et le faux, une bonne économie de gouvernement et une mauvaise, ou bien les manières humaines, sont des domaines de la connaissance dont les hommes ne bénéficient pas et l'ignorance en ce qui concerne ces choses ne nuit en rien".

L'Ecole taoïste (道 家), qu'inaugure un splendide livre énigmatique (道 德 經) de Lao Tseu (老 子) s'intéresse au contraire aux liens de causalité naturelle. Un poème, dont la graphie suggère le chant, n'énonce-t-il pas :

> *"La terre modèle l'homme, le ciel modèle la terre, l'ordre de la nature (tao) modèle le ciel, le tao se modèle lui-même."*

人 法 地
地 法 天
天 法 道
道 法 自 然

Si tout démiurge est également expulsé de la vision taoïste, la sécurité confucéenne d'un monde humainement réglé est niée. Cependant, aucune formalisation logique, ou même une explication ordonnée de l'agencement des causes n'est entreprise.

2 - LIVRES CLASSIQUES DES HAN : ROLE DU CALCUL

En ce qui concerne les mathématiques, deux livres font la récolte des résultats connus en Chine jusqu'à la dynastie des Han (entre le 2ème siècle avant Jésus-Christ et le 2ème siècle après Jésus-Christ).

- Le classique des orbites célestes et de l'équerre

周 髀 算 經

- Le livre des neuf chapitres sur l'art mathématique

九 章 算 經

Le premier ouvrage, sans doute le plus ancien, traite, sous la forme du dialogue, des propriétés du triangle rectangle et en déduit certains calculs de longueurs. Si la forme stylistique du dialogue disparaît plus tard au profit d'une phrase introductive technique (法 曰 : la méthode enseigne que ...), le dialogue au début précise la motivation de l'étude des mathématiques. Il s'agit d'expliquer les mesures astronomiques alors que "l'on ne peut accèder au ciel". On constate que les applications des mathématiques règlent la mathématique elle-même.

Le livre des neuf chapitres sur l'art mathématique se présente comme une succession de problèmes. Fréquemment un nom imagé est associé à une méthode particulière, un peu comme on attribue un nom aux différentes prises de judo, sans que soit dégagée une logique d'ensemble.

Essentielle pour notre propos est l'impression générale que toute la Géométrie procède du numérique (rapports de nombre et opérations sur les nombres). Qu'on lise attentivement le passage suivant extrait du Classique des orbites célestes :

> *"L'art des nombres procède du cercle et du carré. Le cercle provient du carré et le carré du rectangle. Le rectangle trouve son origine dans le fait que 9 × 9 = 81".*

La deuxième phrase signifie bien que les propriétés de multiplication des nombres donnent l'idée du rectangle. La deuxième phrase indique-t-elle la connaissance d'un procédé limite pour le calcul de l'aire du cercle ?

En tous cas, la célèbre démonstration chinoise du théorème de Pythagore est de nature algébrique :

$$4\ \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2 = h^2$$

où a, b sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypothénuse h. Le dessin usuel est fait avec $a = b + 1$. La Géométrie ne connaitra d'ailleurs jamais de développement autonome en Chine, sauf peut-être dans les classiques de l'Ecole Mohiste (墨 家) mais l'influence en sera bien faible. Il convient d'ajouter que contrairement à ce que nous avons connu en Occident, un phénomène marquant des mathématiques chinoises est le manque de correspondances entre mathématiciens et les grandes difficultés de transmission du savoir, sinon du savoir-faire, allant jusqu'à la déshérence de plusieurs méthodes a priori fructueuses.

On peut par contre mesurer l'avance algébrique si l'on sait que les nombres négatifs (負數) sont utilisés. On peut encore mesurer cette avance en examinant l'habileté dans la manipulation numérique des fractions, et de fractions compliquées dès le début de l'ère chrétienne. La notation est a 分之 b pour $\frac{a}{b}$. On sait réduire les fractions par la méthode du p.g.c.d (更相減損) et un vocabulaire suggestif ponctue l'accomplissement des techniques nécessaires pour procéder à l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division de deux fractions (réduites au même dénominateur, les fractions deviennent semblables (同) et prêtes à entrer en relation (通), par exemple à être additionnées (合) etc... Là encore, le vocabulaire donne l'impression que la technique dépasse en intérêt le principe théorique.

3 - L'ECOLE ALGEBRIQUE DES SONG

Mis à part un moine bouddhiste (一行) de la dynastie T'ang, vers le 8ème siècle après Jésus-Christ, il faut vraiment attendre les dynasties Song et Yuan (vers le 13ème et 14ème siècles après Jésus-Christ) pour trouver des ouvrages mathématiques vraiment originaux.

- Le traité mathématique en neuf sections (數书九章) du à Xin Jiu Zhao (秦九韶) vers 1247
- Le (測圓海鏡) de Li Ye (李冶) en 1248
- Le calcul nouveau (益古演段) également de 李冶 en 1259
- La méthode de calcul (楊輝算法) de (楊輝) en 1275
- L'introduction aux études mathématiques (算学啓蒙) en 1299
- Le Miroir précieux des quatre éléments (四元玉鑑) en 1303

Ces deux derniers ouvrages sont tous deux de Chu Chi Jie (朱世傑)

L'algèbre, avec les nombres négatifs et les équations polynômiales, joue un rôle crucial dans ces oeuvres mathématiques. Nous ne pouvons faire une revue des résultats acquis (On se reportera à l'ouvrage fondamental de J. Needhann cité en bibliographie), mais on peut dire que l'extraction des racines carrées, la manipulation d'algorithmes pour les racines de polynômes et les éléments de combinatoire (triangle de Pascal etc) sont clairement maitrisés.

C'est d'ailleurs sous la dynastie Yuan qu'il est pour la première fois fait mention d'une possible traduction d'Euclide (九忽列的 ?) à partir d'un texte arabe de Nasir El Din At Tusi dont nous avons parlé au chapitre III.

Cependant la véritable intrusion d'Euclide provient de la traduction en chinois du Père Jésuite Ricci en 1607, tandis qu'en 1614 paraissait de ce même Jésuite un traité sur l'arithmétique occidentale (同文算指).

Il est étrange de noter un engourdissement dès la fin des Yuans dans l'intérêt porté aux mathématiques et dans la compréhension même des textes anciens. Fera-t-on méditer en précisant que l'instauration du système rigide des examens impériaux coïncide avec cette décadence ?

Il est amusant de noter que les oeuvres des Songs seront exhumées par (梅瑴成) Mei Ku Cheng au 18ème siècle, pour établir que les chinois dès avant l'arrivée des Européens possédaient aussi une mathématique ingénieuse. Le titre même de son ouvrage est suggestif (les perles retrouvées de la Rivière Rouge : 赤水遺珍).

4 - PRIMAUTE DE L'ALGEBRE ET DU NUMERIQUE

Alors que la philosophie chinoise ne fait guère intervenir le quantitatif dans l'agencement de sa réflexion, les nombres et plus encore les rapports de nombres jouent un grand rôle emblèmatique. Comme dit M. Granet ,

> *"En plus de leur fonction classificatoire et liée à elle, les Nombres ont une fonction protocolaire"* (la Pensée Chinoise, chapitre III).

On connait le jeu des trigammes et des hexagrammes dans la divination et dans l'herméneutique (Yi King 易經). Dans un des chapitres de cet ouvrage qui recense des procédés les plus anciens apparaissent force carrés magiques et couples de nombres opposés. Les 64 hexagrammes comportent donc 384 lignes, dont 192 paires (——) et 192 impaires (— — —) ce qui forme $192 \times 24 = 4608$ Essences Yin et $152 \times 36 = 6912$ Essences Yang,puisque le pair vaut les $\frac{2}{3}$ de l'impair. Le total des Essences Yin et Yang est donc de 11520 ! On imagine les possibilités infinies de telles combinaisons et la complexité des fractions qui peuvent y être associées.

Citons encore Granet

> *" Les nombres n'ont pas pour fonction d'exprimer des grandeurs ; ils servent à ajuster les dimensions concrètes aux proportions de l'Univers".*

On comprend dès lors la grande avance des Chinois sur l'Occident dans l'écriture décimale et dans la manipulation des fractions. En fait, dès l'antique dynastie des Chang, l'écriture des nombres est une écriture de position en base 10.

(On dispose d'évidences pictographiques du 13ème siècle avant Jésus-Christ, ce qui distingue la civilisation chinoise de toutes les autres).

Chaque chiffre (entre 1 et 9) est suivi d'un caractère non numérique indiquant sa valeur (unités, dizaines, etc). En caractère moderne

五 百 六 十 七

5 (centaine) 6 (dizaine) 7

En ce qui concerne le zéro (零) dont la forme écrite depuis les Mings utilise un caractère désignant les dernières gouttes d'un orage, son utilisation mathématique est attestée par les textes des mathématiciens Songs. Les grands nombres sont facilement écrits ; le millier se désigne par 千, et la dizaine de mille 萬
Les chinois rangent alors les nombres par paquets de 10.000.

Les fractions décimales sont employées depuis fort longtemps, en particulier dans les mesures de distances, de poids ou de longeurs de fils de soie.

Pour les distances, avec l'inauguration de l'Empire Chinois, on fixe

1 尺 = 10 寸
1 寸 = 10 分
1 分 = 10 釐 ...

D'une manière mathématiquement plus évoluée, les classiques des Han utilisent l'écriture décimale pour les racines carrées non exactes (不 盡) et poursuivent le calcul à plusieurs décimales, même si l'on n'attribue plus de noms au delà des décimales assez lointaines.

Par exemple, 3,1415927 s'écrit

三 丈 一 尺 四 寸 一 分 五 釐
九 毫 二 秒 七 忽

Notons que la détermination approchée de π en est à la cinquième décimale exacte pendant les Trois Royaumes (IIIème siècle après Jésus-Christ), par un procédé d'inscription polygonale. Au 5ème siècle, apparait la fraction $\frac{355}{113}$ aussi que des résultats encore plus précis. Ces résultats tombent dans l'oubli et les Chinois prendront les méthodes européennes à l'arrivée des Jésuites. Mais revenons à l'écriture décimale.

Sous les Tangs, on élimine les caractères des unités, dizaines etc (ici liées à la longueur). Les Songs désignent un nombre décimal par l'écriture 小數

Avec cette écriture décimale -qui peut aller aussi loin qu'on le désire mais on n'envisage pas de développement décimal illimité- Les Chinois disposent d'un outil technique fort bien adapté, par exemple à l'extraction des racines.

Il est alors moins surprenant de noter l'absence totale de considérations sur les irrationnels en tant que tel, et par conséquent l'absence de formalisation autour du corps des nombres réels. La mathématique est faite pour calculer, aussi précisément qu'il est possible. Elle n'a prise sur le réel que d'une manière grossièrement descriptive ; elle n'en est pas le lien organisateur.

On aimerait pouvoir approfondir les causes de cette attitude chinoise vis à vis des mathématiques, et préciser le rôle des idéologies (par exemple, en dehors du confucianisme et du taoïsme, envisager l'influence de l'Ecole Mohiste, fondée par Mo Ti (墨翟), et plus encore de l'Ecole des logistes (名家)). On ne le fera pas ici.

En parcourant les têtes de chapitre du <u>classique mathématique</u> de l'époque Han, on ne peut qu'être frappé au premier abord par l'aspect pragmatique :

方田	Mesure de la tere
粟米	Millet et riz (règles de pourcentages)
衰分	Rapports
少廣	Tailles en diminution
商功	Travaux de génie
均輸	Taxation juste
盈不足	Excès et défaut
方程	Calcul par tables
勾股	Angles droits

Cependant, cette division ne correspond-elle pas aux têtes de chapitres des oeuvres d'un mathématicien aussi expert que Léonard de Pise ?

Finalement, ce n'est pas l'attitude chinoise qui est mystérieuse. Ce qu'il faut pouvoir expliquer c'est au contraire la progression européenne, par exemple deux étapes cruciales : le livre V d'Euclide et l'attitude scientifique de Galilée.

CONCLUSION

Au IIIème siècle avant Jésus-Christ, une théorie axiomatique des proportions est établie pour rendre compte de la mesure des grandeurs et en particulier des grandeurs géométriques telles que les longueurs, les aires et les volumes. Cette théorie, par la force de ses enchaînements et l'élégance formelle de sa présentation, semble occulter une théorie du nombre en tant qu'objet seulement soumis à des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Le langage de la théorie des proportions, aux tonalités devenues géométriques, s'impose comme le langage dominant du monde savant jusqu'au début du XVIIIème siècle, tant en Occident que dans le monde musulman.

Parallèlement -mais à l'état rampant- une totalité numérique d'origine plus ancienne et aux résultats non négligeables, fait surface de temps à autre. Cette attitude numérique est la seule pratiquée en Chine, mais là elle ne débouche sur aucune formalisation et n'algébrise pas la notion de limite.

Les metteurs en scène du Savoir, que sont la plupart des philosophes occidentaux, sont de siècle en siècle éblouis par l'axiomatique simple de la Géométrie et les puissantes déductions qu'on en peut tirer, lesquelles semblent donner une prise sur le monde sensible et une clef pour découvrir l'architecture ordonnée du Monde. Le numérique et le quantitatif sont laissés dans l'ombre au profit de l'explication des formes, au profit des classifications en espèces, genres ou catégories. En Chine, la réflexion philosophique met la mathématique à une place précise : compter, mesurer, comparer, place qu'elle ne doit pas outrepasser.

Au milieu du XVIIème siècle, les deux langages se rencontrent dans l'algébrisation de la Géométrie. Paradoxalement, le langage et la pratique géométriques conservent la suprématie dans les présentations, même en ce qui concerne les nouveaux horizons du champ mathématique que sont les limites et les fonctions.

Un siècle de pratique et de réflexion scientifiques à partir d'expériences très simples et d'outils algébriques élémentaires réhabilite le numérique. C'est le siècle des mensurations de la terre et des recensements en tous genres. La Géométrie va éclater en plusieurs géométries et sa domination s'effondre. Du continu et de l'infini, on élimine lentement tout discours non quantifié et on aboutit par les limites, les intégrales ou les dérivées à une structure qui se règle par les seules opérations autorisées du calcul. L'axiomatisation proprement dite du champ numérique, sur la base de l'arithmétique, s'effectue enfin vers 1870.

L'une des constructions développe avec la Théorie des Ensembles une axiomatique des Mathématiques à volonté globalisante. Cette dernière aboutit à une crise sur les fondements alors que règne l'idéologie du Progrès.

Les Philosophes, depuis l'ère des Lumières jusqu'à la fin du XIXème siècle, ne basent plus leurs jugements sur la mathématique du temps, mais sur une mathématique passée qui terminerait d'ailleurs les Mathématiques. Interpellé par la crise des fondements, le discours philosophique, s'il enveloppe l'effervescente Logique Mathématique, en a été évacué.

Une maîtrise quantifiée des paradoxes de l'infini s'offre le luxe de nouveaux édifices axiomatisés comme l'Analyse Fonctionnelle, la Topologie, l'Analyse constructive ou l'Analyse non-archimédienne. Ce triomphe de la formalisation aboutit à une conception de la Mathématique comme d'un jeu. Une tentative d'exposé linéaire des mathématiques, en refusant la démarche dialectique, ne peut aboutir et offre surtout un intérêt pédagogique.

L'angle de vue extérieur, du philosophe au psychanalyste en passant par le pédagogue, passe alors de la Mathématique au mathématicien.

Nous souhaitons avoir réussi à montrer par l'étude historique et épistémologique détaillée de la notion de nombre réel, que le mathématicien, autrefois, ne formalisait qu'après avoir rencontré une irrégularité extérieure à sa pensée première et dans la mesure où il avait forgé un outil d'attaque de cette difficulté. C'est ce qui advint avec les irrationnels, avec les limites, pour le continu et pour l'infini, etc. - toutes notions dont la maîtrise est indispensable si l'on veut constituer un formalisme autour des réels. Quelquefois, l'outil et même l'irrégularité perdent leur transparence dès la formalisation opérée. S'il existe un monde des Idées Mathématiques, n'est-ce pas celui des irrégularités et des outils tout autant que celui des formes ?

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie sur le sujet est considérable et on se contentera de citer ici, chapitre par chapitre, les ouvrages constamment utilisés, ainsi que des références bibliographiques concernant certaines Oeuvres Originales. En tête, on a noté quelques références générales utiles tout au long du texte.

REFERENCES GENERALES

J. T. DESANTI : La Philosophie Silencieuse ou critique des philosophies de la science.
Ed. du Seuil Paris 1975

M. KLINE : Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
Oxford University Press New-York 1972

R. TATON et collaborateurs :
Histoire de la Science
5 volumes P. U. F. 1957

F. RUSSO : Eléments de Bibliographie en Histoire des Sciences
Paris Hermann 1959

N. BOURBAKI : Eléments d'histoire des mathématiques
Paris Hermann 1960

STRUIK : A source book in Mathematics
Harvard 1969

J. NEEDHAM : Science and Civilisation in China - Vol. I, II, III
Cambridge University Press 1959

CHAPITRE I

EUCLIDE : Opera omnia (grec et latin)
Edition J. L. Heiberg, H. Menge 8 volumes 1883 - 1916

PEYRARD : Les Eléments d'Euclide
Traduction française de Peyrard (1809)
Réédition Blanchard

T. L. HEATH : The thirteen Books of Euclid's Elements
Cambridge 1926
(Nouvelle édition chez Dover)

H. SCHOLZ : Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut
Kant Studien (1928) p. 35-72

A. KOYRE : Etudes d'histoire de la pensée philosophique
(Remarques sur les paradoxes de Zénon)
Gallimard Paris 1961

CHAPITRE II

NICOMAQUE : Introductio arithmetica
(Traduction anglaise M. L. d'Ooge New-York 1926)

PROCLUS : Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide
Trad. française P. Ver Eecke Bruges 1943

THEON DE SMYRNE : Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium
Trad. française J. Dupuis Paris 1892

ARCHIMEDE : L'Oeuvre complète
Trad. française P. Ver Eecke (Réédition Blanchard 1961)

DIOPHANTE : L'arithmétique
Trad. française P. Ver Eecke (Réédition Blanchard 1959)

J. ITARD : Les livres arithmétiques d'Euclide
Hermann 1961

KURT VON FRITZ : The discovery of Incommensurability by Hippasos of Metapontum
Annals of Mathematics vol. 48 (1945) p. 242-264

CHAPITRE III

N. H. ABEL : Oeuvres Complètes 1881
2 volumes

B. DATTA , A. N. SINGH :
History of Hindu Mathematics
Lahore 1935

E. GALOIS : Oeuvres Mathématiques
Gauthier Villars 1897

C. F. GAUSS : Disquisitiones Arithmeticae 1801

A. P. JUSCHKEWITSCH :
Geschichte der Mathematik in Mittelalter
Teubner Verlag Leipzig 1964

JACQUES PELETIER DU MANS :
Eléments géométriques d'Euclide traduits en français et dédiés à la noblesse française 1611

J. PIERPONT : Early History of Galois's Theory of Equations
Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1898) 332-340

LEONARDO PISANO : Scritti di Leonardo Pisano
Publicati da B. Boncompagni 1-2 Roma 1857-1862

F. VIETE : Opera Mathematica
Leyden 1646

S. STEVIN : Les Oeuvres Mathématiques (1634)
(Réédition d'une partie)

CHAPITRE IV

L. CARNOT : Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal
(Réédition Blanchard Paris 1970)

A. L. CAUCHY : Cours d'Analyse algébrique Paris 1821

R. DESCARTES : Oeuvres
Ed. C. Adam et P. Tannery Paris 1893-1913 (Librairie VRIN)

HELLMOTZ : Zahlen und massen erkenntnis theoritisch betrachter
Leipzig 1887

H. LEBESGUE : Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives
Gauthier-Villars 1903
: Leçons sur les séries trigonométriques
Gauthier-Villars 1905

G. W. LEIBNIZ : Mathematische Schriften
Ed. Gerhardt Berlin 1849-1863
: Der Briefwechsel mit Mathematikem 1899
: Oeuvres (Traduction française)
Firmin-Didot 1859-1875

J. F. MONTLUCA : Histoire des Mathématiques
Réédition Albert Blanchard 1960

I. NEWTON : The Mathematical Works - Mathematical Papers
Johnston Reprint Coys 1964-1967 (Réédition)
: Mathematical Principles of Natural Philosophy
University of Californa Press 1946 (Réédition)

B. PASCAL : Oeuvres Complètes
La Pléiade

CHAPITRES V ET VI

Beaucoup de références de textes originaux sont données dans le texte même.

B. BOLZANO : Paradoxen des Unendlichen
Berlin Mayer und Müller 1899
: Rein analytischer Beweis...
Ostwald's Klasscher n° 153 Leipzig 1905

G. CANTOR : Gesammelte Abhandlungen
Berlin Springer 1932

J. CAVAILLES : Philosophie Mathématique
(C'est l'ouvrage le plus utilisé dans ce chapitre et que le lecteur aurait avantage à méditer. C'est un chef-d'oeuvre du genre. On y trouvera en appendice la traduction française de la correspondance entre Dedekind et Cantor).

R. DEDEKIND : Was sind und was sollen die Zahlen
Braunschweig Vieweg u. Sohn 1887
(traduit en anglais, chez Dover 1963 : Essays on the theory of numbers).

: Stetigkeit und Irrationale Zahlen
Idem

: Gesammelte mathematische Werke
Braunschweig 1932

: Voir aussi l'ouvrage de J. Cavaillès pour les lettres de Dedekind à Lipschitz.

J. DESANTI : Les idéalités mathématiques
Ed. du Seuil 1968

M. FICHANT - M. PECHEUX :
Sur l'histoire des Sciences (Cours de Philosophie pour Scientifiques)
Maspéro 1969

E. KANT : Critique de la Raison Pure (Traduction française)
Bibliothèque de Philosophie contemporaine
P.U.F. 1971

C. MERAY : Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale
Paris Savy 1872

A. TARSKI : Sur les ensembles finis
Fund. Math. T 6 (1925) p. 45-65

WHITEHEAD - RUSSEL :
Principia Mathematica
Cambridge T. I, II, III 1910, 1912, 1913

A. ROBINSON : Non Standard Analysis
Springer Verlag

GARNIR, de WILDE, SCHMETS :
Analyse fonctionnelle : théorie constructive des espaces à semi-normes (1968)

CHAPITRE VII

J. NEEDHAM : Science and Civilisation in China - Vol. III -
Cambridge University Press 1959

LISTE DES DOCUMENTS

Ces documents se trouvent réunis dans le tome 2 .