IREM

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
DES PAYS DE LA LOIRE

NANTA IREMICA N°9

Algèbre linéaire
et
Géométrie vectorielle

M. Seroux

1976

UNIVERSITE DE NANTES

I.R.E.M DE NANTES

ALGEBRE LINEAIRE

ET

GEOMETRIE VECTORIELLE

Par

R. SEROUX

Animateur à l'I.R.E.M. de NANTES

Professeur au Lycée Jean-Perrin

REZE-LES-NANTES

NANTA IREMICA

Volume N° 9

Janvier 1976

AUTRES PUBLICATIONS DE LA COLLECTION

NANTA IREMICA

Volume N° 1	Introduction à la logique	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 2	Introduction à la Théorie des Ensembles	MM. DURAND, VAN DEN BOSSCHE
Volume N° 3	Etude épistémologique et historique de la notion de nombre réel et de mesure des grandeurs	J. DHOMBRES
Volume n° 4	Documents relatifs au Volume N° 3	J. DHOMBRES
Volume N° 5	Le langage BASIC	M. BELHACHE
Volume N° 6	Echec en Mathématiques	A. BIGARD
Volume N° 7	Eléments d'Analyse fonctionnelle	J. DHOMBRES
Volume N° 8	Exercices d'analyse fonctionnelle	J. DHOMBRES
Volume N° 9	Algèbre linéaire et Géométrie vectorielle	R. SEROUX
Volume N° 10	Analyse et Topologie	Melle VENARD, J. DHOMBRES
Volume N° 11	Méthode Mathématiques modernes utilisées en Théorie de l'approximation	J. DHOMBRES
Volume N° 12	Géométrie et Axiomatique	J.P. LETOURNEUX

Pour se procurer ces livres s'adresser à :

I.R.E.M. de NANTES

Université de Nantes

38, boulevard Michelet

BP 1044 44037 NANTES-CEDEX

INTRODUCTION

L'algèbre linéaire et les géométries que l'on peut lui associer remonte au siècle dernier et constitue désormais une des bases de l'édifice mathématique. C'est un outil d'usage constant, dont la présentation pédagogique est infiniment polie, et que le numéricien se doit de posséder tout comme l'arithméticien, l'analyste, le topologue ou le spécialiste de la théorie des jeux.

C'est aussi un outil indispensable au niveau de l'enseignement Secondaire pour tout futur scientifique au sens large ou pour tout esprit appelé à utiliser l'informatique, les statistiques, ou la gestion. C'est donc un élément de culture de l'homme contemporain.

Il m'a semblé utile d'ailleurs de faire un rapide historique du développement de l'algèbre linéaire en exord au texte lui-même, persuadé que certaines motivations du passé peuvent éclairer les problèmes et mieux faire goûter l'élégance des solutions apportées et la souplesse d'emploi des notions élaborées.

Mais, dira-t-on, pourquoi un nouveau cours ? On sait bien que "des mathématiques pour papa", "maman", "grand-papa" et mille autres ouvrages pullulent sur cette algèbre linéaire. Le pire, le lourd, le compliqué voisinent avec le subtil, le concis, l'exposé solide. L'inflation fut à son comble, en France, lorsque les nouveaux programmes de mathématiques de 1966 ouvrirent officiellement le Secondaire à l'algèbre linéaire. Et pourtant, il est bien difficile d'innover en un domaine passé complètement dans l'utilisation courante. Certes.

Le présent cours a pour lui d'avoir été écrit par un enseignant du Secondaire pour ses collègues enseignants en vue d'une actualisation de connaissances.

Et d'abord ce n'est pas un cours complet d'algèbre linéaire : on n'a pas cherché la plus grande généralité, loin de là ; ni a couvrir tous les théorèmes élémentaires. En outre, l'accent a été mis sur le calcul, par exemple, calcul systématique dans une base, avec des coordonnées, plus que sur les méthodes intrinsèques ou les méthodes géométriques. Qu'on n'en fasse pas le reproche à l'auteur : c'est un choix pédagogique pour une première approche. Naturellement, il faut que le lecteur une fois le livre terminé, le digère... et se débarrase des manies du calcul. C'est une deuxième étape non abordée ici et à laquelle sont consacrés bien d'autres ouvrages (Cf dans la même série Nanta Iremica, Volume N° 7 , le chapitre 0 de Eléments d'Analyse fonctionnelle et le Volume N° 12 consacré à la Géométrie).

Le cadre des stages IREM a permis la critique indispensable des auditeurs, libre, intéressée, suffisamment longue pour tester la rapidité de l'exposé des notions, le bien-fondé des exercices etc. A ce titre, nous sommes sûrs que ce livre pourra rendre de grands services aux Enseignants désireux de se familiariser convenablement avec l'algèbre linéaire d'une façon adaptée à leurs besoins. Monsieur SEROUX a pris soin de limiter le vocabulaire utilisé, de fournir de fréquents exemples et de donner des applications géométriques. Nous ne pouvons que le remercier de ne pas avoir ménagé sa peine pour aboutir au résultat qu'on lira avec intérêt.

Janvier 1976

Jean DHOMBRES

Directeur de l'IREM de NANTES

BREF HISTORIQUE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

J. DHOMBRES

Au début du XIX ème siècle, le statut, tant des nombres réels que des nombres complexes, est bien mal précisé On admet qu'un point peut être représenté par un nombre réel sur une droite (après avoir choisi une longueur unité et une orientation) et que réciproquement tout nombre réel représente un point. Ceci est bien connu depuis l'emploi des coordonnées par R. Descartes (1596-1650). De même, depuis J. R. Argand (1768-1822) et son Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (1806), on représente un point du plan par un nombre complexe et réciproquement.

Dès lors les propriétés opératoires des nombres réels ou complexes sont peu perçues et logiquement mal assur Cette faiblesse est ressentie par de nombreux mathématiciens, par exemple par A. M. Legendre qui réécrivant vers 1794 le livre V sur les proportions des Eléments d'Euclide distingue soigneusement le cas où les valeurs sont rationnelles (et donc les lois usuelles, associativité, commutativité, distributivité, bien établies) et les cas où les valeurs sont irrationnelles et où il tente d'établir ces mêmes lois.

Pourrait-on dire que le flux des idées nouvelles (fonctions holomorphes, séries etc) est tel que les mathématiciens du début du XIXème siècle n'ont guère de temps pous se préoccuper des bases mêmes ?

UNE FORMALISATION

L'Ecole Anglaise va cependant commencer à justifier les opérations algébriques indépendamment des objets sur lesquels elles portent. Le premier essai significatif est de G.Peacock (1791-1858) lequel introduit un principe de permanence des formes qui revient grosso modo à dire que les expressions littérales, correctes lorsqu'exprimées de façon générale en nombres entiers, le sont encore en "algèbre symbolique" (Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, 1833). Bien entendu, une telle idée favorise un progrès mais, par sa rigidité est un handicap. Par exemple, elle présuppose la commutativité a priori des opérations que l'on peut considérer. De nombreux auteurs anglais poursuivent dans cette voie : D. F Gregory (1813-1844) ; A. De Morgan (1806-1871) et l'on commence à utiliser les mots "commutatif", "associatif" forgés par le français F. J Servois (1767-1847).

Vers 1830, la notion de vecteur ne pouvait donc être que géométrique ou mécanique. On sait qu'Aristote déjà utilisait la composition des forces suivant la loi du parallélogramme et que Galilée en avait fait un des piliers de sa statique. Mais on n'utilisait pas de façon opératoire systématique cette notion.

LES QUATERNIONS

Le côté opératoire va lentement s'imposer aux mathématiciens mais par un long et finalement difficile détour. Argand et C. F Gauss (1777-1855) avaient donc représenté un vecteur par un nombre complexe et un début de calcul s'amorçait. Quelques auteurs se mirent alors à chercher une généralisation des nombres complexes pour représenter les vecteurs de l'espace - mais avec l'idée de disposer encore de deux lois : une addition et une multiplication d'ailleurs commutative.

C'est W. R Hamilton (1805-1865) qui en Octobre 1843 construit le corps des quaternions en réussissant à se débarasser du présupposé commutatif et de l'idée que n'interviennent que trois composantes. On sait qu'un quaternions z s'écrit d'une façon unique

$$z = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$$

où α, β, γ, δ sont des nombres réels ; i, j, k des "unités qualitatives" pour employer le langage d'Hamilton, soumises aux lois

$$jk = i \quad kj = -i \quad ; \quad ki = j \quad ik = -j \quad ; \quad ij = k \quad ji = -k \quad ; \quad i^2 = j^2 = h^2 = -1$$

Les principales propriétés et applications sont établies dans l'ouvrage posthume d'Hamilton : Elements of Quaternions (1866). Notons que dans le produit de deux quaternions apparait simultanèment la notion de produit scalaire et celle le produit vectoriel.

LE ROLE DE GRASSMANN

Parallèlement à cette construction, un autre mathématicien H. G. Grassmann (1809-1877), développait en 1844 une sorte de généralisation des nombres complexes dans son Die lineale Ausdehnungslehre. Très schématiquement, Grassmann partait d'une écriture

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

x_1, x_2, ... , x_n sont des nombres réels et e_1, e_2, ... , e_n des segments orientés de longueur unité déterminant un repère orthonormal (pour n = 3, par exemple). Il définissait l'addition comme aujourd'hui et introduisait une multiplication selon

$$e_i \cdot e_i = 1 \qquad e_i \cdot e_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

le conduisant au produit scalaire. Il introduisait aussi le produit vectoriel selon

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \quad ; \quad [e_i, e_i] = 0$$

$$\text{et} \quad [e_1, e_2] = e_3 \quad \text{etc}$$

Les écrits de Grassmann eurent un retentissement modeste au début, beaucoup plus modeste que ceux d'Hamilton car son style était loin d'être clair et la généralité cherchée beaucoup trop grande pour l'époque. Ce sont surtout les créateurs du calcul tensoriel qui reprendront ses idées et en tireront le parti que l'on sait au début du XXème siècle.

LES VECTEURS

Ce sera le rôle des physiciens théoriques que de ne retenir des travaux d'Hamilton et de Grassmann que le seul côté vectoriel et de négliger les autres aspects. J. C Maxwell (1831-1879) dans son "Treatise on Electricity and Magnetism" de 1873 traite séparément la partie scalaire d'un quaternion (α) et sa partie vectorielle ($\beta i + \gamma j +$ et définit explicitement un vecteur par trois composantes. Dans ce même traité, il fait de l'analyse vectorielle et introduit ce qui deviendra le laplacien, le gradient, le rotationnel et la divergence. Ceci sera encore amplifié dans l'ouvrage Electromagnetic Theory (1er volume publié en 1893) de O. Heaviside (1850-1925). Très vite les vecteurs, si pratiques en physique, vont faire de nombreux adeptes et le premier livre qui formalisera cette notion est du à E. B. Wilson et J. W. Gibbs (1839-1903) en 1901 et a pour titre "Vector Analysis". Cependant les manuscrits de Gibbs circulaient depuis 1881.

Pendant quelques années, on assiste à une certaine lutte d'influence entre les notations issues de la présentation des vecteurs par les quaternions (Heaviside) et celles plus linéaires provenant de Grassmann (Gibbs Cayley). Mais l'utilisation systématique des notations vectorielles par les praticiens (physiciens, ingénieurs) obligera les mathématiciens à négliger les quaternions. Ils y étaient peu enclins considérant comme une tare la pauvreté des opérations sur les vecteurs (pas de multiplication inversible). Ainsi il y eut au début beaucoup plus de travaux théoriques sur la caractérisation du corps des quaternions, ou la classification des algèbres linéaires associatives que sur ce qui allait devenir les espaces vectoriels. Citons par exemple

(W. F. Clifford (1845-1879) ; B. Peirce (1809-1880),
F. G. Frobenius (1849-1917) ; C. S Peirce (1839-1914),
R. Dedekind (1831-1916) ; et A. Hurwitz (1859-1919)).

LES MATRICES

Il peut paraître surprenant que le calcul vectoriel ne soit pas né des considérations fort anciennes sur la résolution des systèmes d'équations linéaires.

La première notion déduite de ces considérations est l'étude des déterminants. Cette étude ne va développer aucune idée théorique bien nouvelle. On trouve l'utilisation des déterminants chez Gauss, Laplace (1749-1827), Lagrange (1736-1813) et les principaux théorèmes chez A. L. Cauchy (1789-1857) notamment dans ses leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie (1826) et ses Cours à l'Ecole Royale Polytechnique. Avec J. J. Sylvester (1814-1897) et Cayley (1821-1895), on en arrive à peu près au statut actuel, bien manifesté per le livre de C.L. Dodgson (alias Lewis Carroll : 1832-1898) : An Elementary Theory of Determinants de 1867.

La notion de matrice en tant que telle est exploitée par Cayley dans son "Memoir on the theory of Matrices" de 1858 et il utilise les matrices semblables, les valeurs et vecteurs propres (et démontre en particulier le théorème connu sous le nom de Cayley-Hamilton assurant qu'une matrice carrée annule son polynôme caractéristique). C. Hermite (1822-1911) établit la réalité des valeurs propres d'une matrice auto adjointe (hermitienne !) tandis que l'on détermine les invariants par similitude avec Sylvester, G. Frobenius et C. Weierstrass (1815-1897) et finalement C. Jordan (1838-1922) dans son Traité des Substitutions de 1870. A cette date, la théorie mathématique généralement enseignée sous le nom d'algèbre linéaire est complètement élaborée. Pourtant l'enseignement universitaire français ne l'intégrera dans ses programmes que bien après la seconde guerre mondiale. Il serait intéressant de déterminer les causes pertinentes d'un tel retard mais cela nous entraînerait trop loin.

ANALYSE FONCTIONNELLE

Pendant presque tout le 19 ème siècle, l'influence géométrique reste grande et on reste en dimension finie. Au tournant du siècle, les travaux de Fredholm (1866-1927), V. Volterra (1860-1940), D. Hilbert (1862-1943) etc sur les équations intégrales font sortir de ce cadre. Rappelons que ces équations sont de la forme

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) \, f(y) \, dy$$

où il faut déterminer f lorsque g et k sont connues et λ un nombre complexe. D. Hilbert résoud magistralement ce que nous appelons maintenant le cas hilbertien dans ses "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integral-gleichungen" de 1912. On s'aperçoit très vite de l'aspect géométrique qui persiste dans les travaux d'Hilbert et simultanément plusieurs mathématiciens considèrent des espaces vectoriels de dimension infinie, dont les vecteurs sont des fonctions, et sur lesquels ils font de l'analyse en définissant une notion de norme. C'est essentiellement l'oeuvre de E. Schmidt (   ), de Fréchet (1878-1974), de F. Riesz (1880-1956), de J. Von Neumann (1903-1957) et de S. Banach (1892-1945). L'Analyse fonctionnelle était née.

NOTE DE L'AUTEUR

Conçue, à l'origine, comme un document de travail interne à un groupe de l'I.R.E.M. de Nantes fonctionna durant l'année 1974-1975, cette brochure s'est peu à peu étoffée à la demande de collègues enseignants.

Ceux-ci souhaitaient disposer d'un ouvrage, simple, donnant les principales définitions et les théorème fondamentaux d'algèbre linéaire en se limitant à des espaces vectoriels de dimension finie (essentiellement dimen 2 ou dimension 3).

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur DHOMBRES, directeur de l'I.R.E.M. de Nantes, et Monsieur LETOURNEUX qui, en acceptant de lire le manuscrit se sont imposés un travail long et fastidieux.

Leurs remarques judicieuses m'ont permis d'améliorer considérablement la qualité de ce travail.

Mes remerciements vont également à Messieurs CARNEC, TEXERAUD et BETREMA, animateurs à l'I.R.E.M. de Nantes, qui ont bien voulu participer à la rédaction de quelques chapitres non prévus initialement. Leur aide m'a été fort précieuse.

Je ne voudrais pas oublier Madame LACIRE et Mademoiselle LESAULT, secrétaires à l'I.R.E.M. qui, malgré le lourd travail qui leur fut imposé, m'ont toujours accueilli avec beaucoup de compréhension et la plus extrême gentillesse.

Que tous trouvent ici l'expression de ma gratitude.

R. SEROUX

Chapitre I

ESPACES VECTORIELS SUR $\mathbb{R}$

1.1. Définition

Un ensemble E a une structure d'espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{R}, +, .)$ si, et seulement si, il est muni :

- d'une loi de composition interne, notée additivement, vérifiant les axiomes :
  - (I_1) la loi, notée +, est associative
  - (I_2) il existe un élément neutre, noté $\vec{0}$, pour la loi notée +
  - (I_3) pour tout élément $\vec{u}$ de E, il existe dans E, un symétrique noté $(-\vec{u})$
- d'une loi de composition externe qui, à tout couple $(\alpha, \vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$ associe l'élément de E noté $(\alpha\vec{u})$, et qui vérifie les axiomes :

(E_1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ | $(\forall \alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$, $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

(E_2) $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \in E$ | $\forall(\alpha, \beta)$, $(\forall\vec{u})$, $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(E_3) $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \in E$ | $\forall(\alpha, \beta)$, $(\forall\vec{u})$, $\alpha(\beta u) = (\alpha.\beta)\vec{u}$

(E_4) $\vec{u} \in E$, $\forall \vec{u}$, $1\vec{u} = \vec{u}$

1.2. Règles de calcul dans un espace vectoriel

1.2.1. Propriété 1.

Tous les éléments d'un espace vectoriel sont réguliers pour l'addition.

Ceci résulte immédiatement du fait que (E, +) est un groupe.

1.2.2. Propriété 2.

(E, +) est un groupe commutatif.

REMARQUE : La commutativité de l'addition figure souvent dans les axiomes servant à définir un espace vectoriel. Nous allons démontrer qu'elle résulte des axiomes auxquels satisfait la loi externe.

. D'après l'axiome (E_1)

$(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$, $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

En particulier, si $\alpha = 1 + 1$

$\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $(1+1)(\vec{u}+\vec{v}) = (1+1)\vec{u} + (1+1)\vec{v}$

donc d'après l'axiome (E_2) : $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $(1+1)(\vec{u}+\vec{v}) = 1\vec{u} + 1\vec{u} + 1\vec{v} + 1\vec{v}$

et d'après l'axiome (E_4) : $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $(1+1)(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{v}$ (1)

. D'après l'axiome (E_2) : $\forall(\alpha,\beta)$, $(\forall\vec{w})$, $(\alpha+\beta)\vec{w} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{w}$

en particulier, si $\alpha=\beta = 1$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $(1+1)(\vec{u}+\vec{v}) = 1(\vec{u}+\vec{v}) + 1(\vec{u}+\vec{v})$

et d'après l'axiome (E_4) : $\forall(\vec{u},\vec{v})$ $(1+1)(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} + \vec{v}$ (2)

. D'après les égalités (1) et (2) il vient (associativité) :

$(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u} + (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{u}) + \vec{v}$

et en raison de la régularité dans (E, +) : $\forall(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Par suite (E, +) est un groupe commutatif.

1.2.3. Propriété 3.

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\alpha \qquad \alpha\vec{0} = \vec{0}}$

D'après l'axiome (E_1) : $(\forall\alpha), \forall(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

En particulier si $\vec{v} = \vec{0}$: $(\forall\alpha), (\forall\vec{u}), \quad \alpha(\vec{u} + \vec{0}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{0}$

D'où, puisque $\vec{0}$ est élément neutre de (E, +), $(\forall\vec{u}) \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et par suite :

$(\forall\alpha)(\forall\vec{u}) \quad \alpha\vec{u} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{0}$

ou encore :

$(\forall\alpha)(\forall\vec{u}) \qquad \alpha\vec{u} + \vec{0} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{0}$

et en raison de la régularité dans (E, +) : $(\forall\alpha) \qquad \alpha\vec{0} = \vec{0}$

1.2.4. Propriété 4.

$\boxed{\vec{u} \in E, \forall\vec{u} \qquad 0\vec{u} = \vec{0}}$

D'après l'axiome (E_2) : $\forall(\alpha,\beta), \forall\vec{u} \quad (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

En particulier, si $\beta = 0$: $(\forall\alpha), (\forall\vec{u}), \quad (\alpha+0)\vec{u} = \alpha\vec{u} + 0\vec{u}$

D'où, puisque 0 est élément neutre de $(\mathbb{R},+)$, $\quad (\forall\alpha) \quad \alpha+0 = \alpha$ et par suite $(\forall\alpha),(\forall\vec{u}), \quad \alpha\vec{u} = \alpha\vec{u} + 0\vec{u}$

ou encore : $(\forall\alpha),(\forall\vec{u}), \quad \alpha\vec{u} + \vec{0} = \alpha\vec{u} + 0\vec{u}$

et en raison de la régularité dans (E, +) : $(\forall\vec{u}) \quad 0\vec{u} = \vec{0}$.

1.2.5. Propriété 5.

$\boxed{(\alpha,\vec{u}) \in \mathbb{R} \times E\ ,\ \forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \iff ((\alpha=0) \vee (\vec{u}=\vec{0}))]}$

. La proposition $\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha=0)\vee(\vec{u}=\vec{0})] \Longrightarrow (\alpha\vec{u} = \vec{0})$ résulte des propriétés (P_3) et (P_4).

. Démontrons la réciproque :

si $\alpha = 0$: la proposition est évidente,

si $\alpha \neq 0$: α est inversible dans $(\mathbb{R},\times)$, c'est à dire qu'il existe α^{-1} tel que $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Alors :

$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Longrightarrow (\alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \alpha^{-1}\vec{0})]$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Longrightarrow ((\alpha^{-1}\alpha)\vec{u} = \vec{0})]$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Longrightarrow (1\vec{u} = \vec{0})]$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(\alpha\vec{u}=\vec{0}) \Longrightarrow (\vec{u}=\vec{0})]$$

1.2.6. Propriété 6.

$\boxed{(\alpha,\vec{u}) \in \mathbb{R}\times E,\ \forall(\alpha,\vec{u}) \quad [(-\alpha)\vec{u} = \alpha(-\vec{u}) = -(\alpha\vec{u})]}$

. D'après l'axiome (E_2) : $\forall(\alpha,\beta), \forall\vec{u} \quad (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.

En particulier, si $\beta = -\alpha$:

$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad [\alpha+(-\alpha)]\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u}$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad 0\vec{u} = \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u}$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad \vec{0} = \alpha\vec{u} + (-\alpha)\vec{u}$$

En ajoutant $-(\alpha\vec{u})$ aux deux membres de cette égalité : $\forall(\alpha,\vec{u}) \qquad -(\alpha\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} \qquad (1)$

. D'après l'axiome (E_1) : $(\forall\alpha), \forall(\vec{u}, \vec{v}), \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

En particulier, si $\vec{v} = -\vec{u}$,

$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad \alpha[\vec{u} + (-\vec{u})] = \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u})$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad \alpha\vec{0} = \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u})$$
$$\forall(\alpha,\vec{u}) \quad \vec{0} = \alpha\vec{u} + \alpha(-\vec{u})$$

En ajoutant $-(\alpha\vec{u})$ aux deux membres de cette égalité : $\forall(\alpha,\vec{u}) \qquad -(\alpha\vec{u}) = \alpha(-\vec{u}) \qquad (2)$

. Par transitivité de l'égalité les relations (1) et (2) permettent d'écrire : $\forall(\alpha,\vec{u}) \qquad \alpha(-\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u}$

1.2.7. Propriété 7.

$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\vec{u} \in E - \{\vec{0}\}$	$\forall(\alpha,\beta), (\forall\vec{u}), [\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Longrightarrow \alpha=\beta]$

$\forall(\alpha,\beta)$, $(\forall\vec{u})$, $\left[\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Longrightarrow \alpha\vec{u} + (-\beta\vec{u}) = \vec{0}\right]$
$\forall(\alpha,\beta)$, $(\forall\vec{u})$, $\left[\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Longrightarrow [\alpha + (-\beta)]\vec{u} = \vec{0}\right]$
Or, $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc d'après la propriété 4 : $\forall(\alpha,\beta)$, $(\forall\vec{u})$, $\left[\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Longrightarrow \alpha + (-\beta) = 0\right]$
donc, $\forall(\alpha,\beta)$, $(\forall\vec{u})$ $\left[\alpha\vec{u} = \beta\vec{u} \Longrightarrow \alpha = \beta\right]$

1.2.8. Propriété 8.

$\alpha \in \mathbb{R}^*$ $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$	$(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $\left[\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}\right]$

Puisque $\alpha \in \mathbb{R}^*$, il existe α^{-1} tel que $\alpha.\alpha^{-1} = 1$
$(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $\left[\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Longrightarrow \alpha^{-1}(\alpha\vec{u}) = \alpha^{-1}(\alpha\vec{v})\right]$
D'après l'axiome (E_3) : $(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $\left[\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Longrightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\vec{u} = (\alpha^{-1}\alpha)\vec{v}\right]$
$(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $\left[\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Longrightarrow 1\vec{u} = 1\vec{v}\right]$
D'après l'axiome (E_4) : $(\forall\alpha)$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $\left[\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}\right]$

1.3. Exemples d'espaces vectoriels

. $(\mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

La multiplication est alors considérée comme loi externe (application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un élément de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de réels que l'on peut noter : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On rappelle que dans $\mathbb{R}^n$ l'égalité **est** définie par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

On définit alors :

- une addition : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

- une loi externe (application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$) : $\alpha . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$

On vérifiera aisément que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

. Soit $\Phi = \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

On rappelle que dans Φ l'égalité **est** définie par :

$(f = g) \Longleftrightarrow \left[x \in E, \forall x \quad f(x) = g(x)\right]$. On définit alors :

- une addition : $x \in E$, $\forall x$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- une loi externe (application de $\mathbb{R} \times \Phi$ dans Φ) : $x \in E$, $\forall x$ $(\alpha \circ f)(x) = \alpha \times [f(x)]$

On démontre aisément que $(\Phi, +, .)$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

. Soit M_2 l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels

$(M_2, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que sur M_2 l'égalité est définie par :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

On définit alors :

- une addition : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$

- une loi externe (application de $\mathbb{R} \times M_2$ dans M_2)

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{bmatrix}$$

. <u>Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites numériques à coefficients réels</u>. Une suite sera notée $(\mathcal{U}_n)$; son terme général u_n.

On rappelle que dans $\mathcal{S}$ l'égalité est définie par :

$$(\mathcal{U}_n) = (\mathcal{V}_n) \iff (n \in \mathbb{N}, \forall n \quad u_n = v_n).$$ On définit alors :

- une addition : $(\mathcal{U}_n) + (\mathcal{V}_n) = (\mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n)$

- une loi externe (application de $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$) : $\alpha \cdot (\mathcal{U}_n) = (\alpha \mathcal{U}_n)$

$(\mathcal{S}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

<u>Nota</u> : La notion de dimension (envisagée dans le chapitre 4) permettra de distinguer entre les diverses réalisations d'espaces vectoriels que nous venons de mentionner.

On pourra lire également l'annexe située en fin d'ouvrage " géométrie naïve et vecteurs".

Chapitre 2

SOUS-ESPACES VECTORIELS

2.1 COMBINAISONS LINEAIRES

21.1 DEFINITION

n désignant un entier naturel non nul, soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n$, n éléments d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ et soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, n réels, l'élément $\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$ de E est appelé *combinaison linéaire* de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n$. Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sont les *coefficients* de cette combinaison linéaire.

21.2 EXEMPLES

. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
Soit les fonctions : f, g, h de $\mathcal{A}$ telles que :

$$f : x \longmapsto x^2 - 1$$
$$g : x \longmapsto 2x + 3$$
$$h : x \longmapsto -x + 1$$

L'élément $F = 2f - 3g + h$ est la combinaison linéaire de f, g, h définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad F(x) = 2f(x) - 3g(x) + h(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad F(x) = 2x^2 - 7x - 10$

. Soit $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 4)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

L'élément $\vec{V} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$ est la combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ définie par $\vec{V} = (11, -12, -19)$

Remarque

Si $\vec{u} = (1, 0, -1)$ l'élément $\alpha\vec{u} = (\alpha, 0, -\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est également considéré comme une combinaison linéaire de l'élément $\vec{u}$.

2.2 SOUS-ESPACE VECTORIEL D'UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$

22.1 DEFINITION

Un sous ensemble F d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, les restrictions à F de la loi interne et de la loi externe de $(E, +, .)$ munissent F d'une structure d'espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Remarque

Il résulte de cette définition que F est non vide puisque $(F, +)$ étant un groupe, $\vec{0}_E \in F$.

22.2 THEOREME 1

> Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :
>
> P_1 F est non vide
>
> P_2 F est stable pour l'addition :
> $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $[(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2 \Longrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \in F]$
>
> P_3 F est stable pour la loi externe :
> $(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E$, $\forall(\alpha, \vec{u})$ $[\vec{u} \in F \Longrightarrow (\alpha\vec{u}) \in F]$

Démontrons que ces trois propriétés sont équivalentes à la définition.

- Il est clair que si F est un sous-espace vectoriel de E , P_1, P_2, P_3 sont vérifiées.

Réciproquement,

- puisque F est stable pour l'addition, celle-ci est une loi interne dans F . Elle est associative et commutative dans E donc elle l'est, à fortiori, dans F .

D'après P_3 où $\alpha = -1$, puisque F non vide P_1 , $\vec{u} \in E$, $\forall \vec{u}$ $[\vec{u} \in F \Longrightarrow (-\vec{u}) \in F]$

et alors d'après P_2

$$\vec{u} \in E ,\ \forall \vec{u}\ [\vec{u} \in F \Longrightarrow (\vec{u} + (-\vec{u})) \in F]$$

donc $\vec{0} \in F$.

$(F, +)$ est un groupe commutatif.

- F étant stable pour la loi externe, les axiomes (E_1) , (E_2) , (E_3) , (E_4) vrais dans E , le sont, à fortiori, dans F . Donc $(F, +, .)$ est un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$.

22.3 THEOREME 2

> Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,
>
> P_1 F est non vide
>
> P'_2 F est stable pour les combinaisons linéaires
> $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ $\forall(\alpha, \beta)$ $\forall(\vec{u}, \vec{v})$ $[(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2 \Longrightarrow (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in F]$

Démontrons que P'_2 est équivalente à P_2 et P_3

- D'après P'_2 où $\alpha = 1$ et $\beta = o$ il vient :

$$(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E ,\ \forall(\alpha, \vec{u})\ [\vec{u} \in F \Longrightarrow \alpha\vec{u} \in F]$$

donc P_3 est vérifiée.

D'après P'_2 où $\alpha = \beta = 1$ il vient :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 ,\ \forall(\vec{u}, \vec{v})\ [(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2 \Longrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \in F]$$

donc P_2 est vérifiée.

Réciproquement,

- D'après P_3

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ,\ (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 ,\ \forall(\alpha, \beta) ,\ \forall(\vec{u}, \vec{v})\ [(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2 \Longrightarrow [(\alpha\vec{u} \in F) \wedge (\beta\vec{v} \in F)]$$

alors d'après P_2

$$\forall(\alpha, \beta) ,\ \forall(\vec{u}, \vec{v})\ [(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2 \Longrightarrow (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in F]$$

donc P'_2 est vérifiée.

2.3 EXEMPLES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

23.1 Pour tout espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ E et $\{\vec{0}_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

23.2 Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$
Soit $\vec{u}$ un élément de E. Considérons l'ensemble F tel que :

$$F = \{\vec{v} \mid (\vec{v} \in E) \wedge (\exists \alpha, \vec{v} = \alpha\vec{u})\}$$

F est un sous-espace vectoriel de E.

23.3 Soit $E \subset \mathbb{R}$. L'ensemble des applications de E vers $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

* L'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
* L'ensemble des fonctions en escalier de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
* L'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n $(n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
* Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des fonctions continues sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des fonctions dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

2.4 SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRE PAR n VECTEURS D'UN ESPACE VECTORIEL $(E, +, .)$ SUR $(\mathbb{R}, +, \times)$

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ et soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ n vecteurs de E.

On désigne par C l'ensemble des combinaisons linéaires des n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, c'est à dire que :

$\vec{V}$ est élément de C si, et seulement si, il existe n réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tels que :

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$$

. C est non vide car :

$$\vec{0}_E = 0\,\vec{u}_1 + 0\,\vec{u}_2 + \dots + 0\,\vec{u}_n \quad \text{donc } \vec{0}_E \in C$$

. C est stable pour l'addition :

soit $\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$ et $\vec{W} = \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_n \vec{u}_n$ deux éléments de C

$$\vec{V} + \vec{W} = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n) + (\beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{u}_2 + \dots + \beta_n \vec{u}_n)$$

et en utilisant les axiomes de structure d'espace vectoriel :

$$\vec{V} + \vec{W} = (\alpha_1 + \beta_1)\,\vec{u}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\,\vec{u}_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\,\vec{u}_n$$

donc :

$$(\vec{V}, \vec{W}) \in E^2, \ \forall (\vec{V}, \vec{W}) \quad [(\vec{V}, \vec{W}) \in C^2 \Longrightarrow (\vec{V} + \vec{W}) \in C]$$

. C est stable pour la loi externe :

soit $\vec{V} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$ un élément de C et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$a\,\vec{V} = a\,(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n)$$

et en utilisant les axiomes de structure d'espace vectoriel :

$$a\,\vec{V} = (a\,\alpha_1)\,\vec{u}_1 + (a\,\alpha_2)\,\vec{u}_2 + \dots + (a\,\alpha_n)\,\vec{u}_n$$

donc :

$$(a, \vec{V}) \in \mathbb{R} \times E, \ \forall (a, \vec{V}) \quad [\vec{V} \in C \Longrightarrow a\,\vec{V} \in C]$$

Nous pouvons énoncer le théorème :

> L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n$ d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.5. INTERSECTION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel (E, +, .) sur ($\mathbb{R}$, + , x).

. $F \cap G$ est non vide

En effet puisque F est un sous-espace vectoriel de E , $\vec{0}_E \in F$. De même $\vec{0}_E \in G$.
Par suite : $\vec{0}_E \in F \cap G$.

. Soit $\vec{u} \in F \cap G$ et $\vec{v} \in F \cap G$

F étant un sous-espace vectoriel de E, quels que soient les réels α et β, le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est élément de
Pour la même raison, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est élément de G.
Par suite, $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$ est élément de $F \cap G$.

> L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de

Remarque F et G désignant deux sous-espaces vectoriels de E.

soit U un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et G. Tout vecteur $\vec{u}$ de U appartient à $F \cap G$
donc $U \subset F \cap G$. Par suite :

> $F \cap G$ est, au sens de l'inclusion, le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans F et G.

2.6. UNION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E

> L'union de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E.

Donnons un exemple :
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par F l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ o \end{pmatrix}$ où x et y sont réels,
par G l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} o \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où y et z sont des réels.
Le vecteur $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F ; le vecteur $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à G ; mais le vecteur $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
n'appartient ni à F, ni à G, donc n'appartient pas à $F \cup G$.

2.7. SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E

2.7.1. Définition

> Etant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, on appelle "somme" de F et G l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1$ appartient à F et $\vec{u}_2$ appartient à G.
> Cet ensemble est noté F + G .

Donnons un exemple. Soit $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par F l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où x est un réel, par G l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ où y est un réel.
F + G est l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ o \end{pmatrix}$ où x, y sont des réels.

2.7.2. Théorème

> La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.

. F + G est non vide

En effet $\overrightarrow{0_E}$ est élément de F et de G, et $\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$ donc $\overrightarrow{0_E} \in (F+G)$

. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de (F+G). Il existe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F \times G$ tel que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et il existe $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in F \times G$ tel que : $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Alors, quels que soient les réels α et β : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(\vec{u}_1+\vec{u}_2) + \beta(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1) + (\alpha\vec{u}_2 + \beta\vec{v}_2)$$

Or, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1)$ appartient à F et $(\alpha\vec{u}_2 + \beta\vec{v}_2)$ appartient à G, et par suite $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$ appartient à F + G . (F+G) est donc un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

Soit $\mathcal{U}$ un sous espace vectoriel de E contenant deux sous espaces F et G de E. Tout vecteur $\vec{u}$ de la forme $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in G$ appartient à $\mathcal{U}$, donc $F + G \subset \mathcal{U}$. Par suite

> F + G est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

2-8 SOMME DIRECTE

2-8-1 Définition

> Si deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel réel E sont tels que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ leur somme est dite somme directe.

On note cette somme $F \oplus G$

Alors :

$$\mathcal{U} = F \oplus G \Longleftrightarrow (\mathcal{U} = F + G \text{ et } F \cap G = \{\vec{0}_E\})$$

2-8-2 Théorème

> Tout vecteur $\vec{u}$ de la somme directe de deux sous espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel réel E s'écrit de *façon unique* sous la forme $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in G$.

Soit $\mathcal{U} = F \oplus G$ et $\vec{u} \in \mathcal{U}$

Alors il existe au moins un couple $(\vec{u}_1 , \vec{u}_2)$ élément de $F \times G$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Supposons qu'il en existe un autre $(\vec{v}_1 , \vec{v}_2)$ de $F \times G$ tels que $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Alors :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Longleftrightarrow \vec{u}_1 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{u}_2$$

or $(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) \in F$ et $(\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \in G$

donc $(\vec{u}_1 - \vec{v}_1) \in F \cap G$. Mais puisque $F \cap G = \{\vec{0}\}$ il vient $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$.

De même $(\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \in F \cap G$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_2$.

2-9 SOUS-ESPACES VECTORIELS SUPPLEMENTAIRES

2-9-1 Définition

> Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel réel E sont supplémentaires si, et seulement si, E est somme directe de F et G.

2-9-2 Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Désignons par F l'ensemble des éléments de E de la forme $\binom{x}{0}$ où x est réel et par G l'ensemble des éléments de E de la forme $\binom{0}{y}$ où y est réel. Il est clair que $F \cap G = \{\binom{0}{0}\}$ et que : $F + G = \{\binom{x}{y} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 2

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $(\mathcal{A}, +, .)$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1° On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f(o) = o$
$\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$?

2° On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x, y) \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right]$$

a) Démontrer que toute application affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{F}$.

b) $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$?

Exercice 2

On considère l'ensemble $\mathcal{P}_2$ des applications polynômes de degré inférieur ou égal à 2, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1° Démontrer que $(\mathcal{P}_2, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2° On considère l'ensemble E des éléments de $\mathcal{P}_2$ définis par :

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad A(x) = x(ax + b) \quad \text{où} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

et l'ensemble F des éléments de $\mathcal{P}_2$ définis par :

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad B(x) = cx + d \quad \text{où} \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

a) Démontrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{P}_2, +, .)$.

b) Déterminer $E \cap F$.

c) $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_2$?

Exercice 3

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose, de plus, que E est symétrique par rapport à zéro, c'est à dire que :

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad [x \in E \Longrightarrow (-x) \in E]$$

1° Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications paires de E vers $\mathbb{R}$. Démontrer que $(\mathcal{P}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$.

2° Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des applications impaires de E vers $\mathbb{R}$. Démontrer que $(\mathcal{J}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$.

3° a) On désigne par n l'application de E vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \in E, \ \forall x \qquad n(x) = o$$

Démontrer que : $\mathcal{P} \cap \mathcal{J} = \{n\}$.

b) Soit f un élément de $\mathcal{A}$. Démontrer qu'il existe un couple unique (φ, ψ) élément de $\mathcal{P} \times \mathcal{J}$ tel que :

$$x \in E, \ \forall x \qquad f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Qu'en déduit-on ?

4° a) Appliquer le résultat précédent à la fonction qui, au réel x, associe sa partie entière, notée $E(x)$.

b) Construire, dans un plan rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, α et β, définies par :

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad \alpha(x) = E(x) + E(-x)$$

$$x \in \mathbb{R}, \ \forall x \qquad \beta(x) = E(x) - E(-x).$$

Chapitre 3

BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

3.1 SYSTEME LIBRE - SYSTEME LIE

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et S un sous-ensemble *fini* de n éléments de E ,

$$S = \{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \ldots, \vec{u}_n\}$$

31.1 Système libre

Le sous-ensemble $S = \{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \ldots \vec{u}_n\}$ est dit système libre (ou partie libre) de E si, et seulement si, quels que soient les réels $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots \alpha_n$:
$(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{o}) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = o)$

Remarque : On pourrait donner une définition plus générale ne supposant pas que S est fini (voir à ce sujet le paragraphe 4-6 du chapitre 4).

Exemples

* Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ des couples de réels $\binom{x}{y}$. L'élément $\vec{0}$ est $\binom{o}{o}$.
Soit $\vec{u} = \binom{2}{+3}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{5}$. Quel que soit l'élément (α, β) de $\mathbb{R}^2$:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{o} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = o \\ +3\alpha + 5\beta = o \end{cases}$$

Le déterminant de ce système homogène est égal à +13 donc l'unique solution est $\alpha = o$, $\beta = o$ et le système $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre.

* Soit l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômes, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. L'élément $\vec{0}$ est la fonction n telle que : $x \in \mathbb{R}$, $\forall x \quad n(x) = o$.
Soit $p_1 : x \longmapsto x - 1$; $p_2 : x \longmapsto x^2 - x + 1$ et

$p_3 : x \longmapsto x^2 - x$

Quel que soit l'élément (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$: $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = n$ est équivalent à :

$$x \in \mathbb{R} , \forall x \quad \alpha(x-1) + \beta(x^2-x+1) + \gamma(x^2-x) = 0$$

ou encore :

$$x \in \mathbb{R} , \forall n \quad (\beta+\gamma)x^2 + (\alpha-\beta-\gamma)x + \beta - \alpha = 0$$

ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = o \\ \alpha - \beta - \gamma = o \\ \beta - \alpha = o \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$. Le système $\{p_1, p_2, p_3\}$ est donc libre.

31.2 Système lié

Le système $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est dit lié, s'il n'est pas libre c'est à dire si, et seulement si, il existe n réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que : $\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{o}$.

Remarque : Là encore, il n'est pas indispensable de supposer S fini

(voir paragraphe 4-6 du chapitre 4).

Exemples

✱ Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ des couples de réels $\binom{x}{y}$, soit $\vec{u}_1 = \binom{2}{-3}$, $\vec{u}_2 = \binom{-1}{5}$, $\vec{u}_3 = \binom{5}{-4}$ $\quad 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = \vec{o}$ donc le système $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est lié.

✱ Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2, soit :

$p_1 : x \longmapsto x - 1$; $p_2 : x \longmapsto x^2 - x + 1$ et $p_3 : x \longmapsto x^2 - 2x + 2$.

$p_1 + p_3 - p_2 = n$ (n désignant la fonction nulle) donc $\{p_1, p_2, p_3\}$ est lié.

31.3 Propriétés

(P_1) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{o}$ constitue un système libre.

En effet : $(\lambda\vec{u} = \vec{o}$ et $\vec{u} \neq \vec{o}) \Longrightarrow \lambda = o$

(P_2) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; $\{\vec{O}_E\}$ est un système lié.

En effet : $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda$ $\quad \lambda\vec{o} = \vec{o}$

(P_3) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et S un système de vecteurs de E . Si $\vec{O} \in S$ alors S est lié.
Nota : par contraposition il vient : si S est libre alors $\vec{O} \notin S$.

Soit $S = \{\vec{O}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$. Alors, quel que soit le réel non nul λ :

$\lambda\vec{o} + O\vec{u}_1 + \dots + O\vec{u}_n = \vec{o}$ donc S est lié .

(P_4) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; S et S' deux systèmes de vecteurs de E tels que $S \subseteq S'$
. Tout sur-système d'un système lié est lié c'est à dire : (S lié $\Longrightarrow S'$ lié)
Par contraposition, il vient :
. Tout sous-système d'un système libre est libre c'est à dire :
(S' libre $\Longrightarrow S$ libre) .

Soit $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ un système lié de p vecteurs de E et soit $S' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1} \dots \vec{u}_n\}$. Puisque S est lié, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, réels non tous nuls, tels que :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p = \vec{o}$$

Mais alors :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p + O\vec{u}_{p+1} + \dots + O\vec{u}_n = \vec{o}$$

avec l'un au moins des α_i non nul, donc S' est lié.

(P_5) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et S un système lié de vecteurs de E , alors l'un au moins des vecteurs de S est une combinaison linéaire des autres.

Soit $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n\}$ un système lié. Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, réels non tous nuls, tels que :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{o}$$

Supposons par exemple $\alpha_1 \neq o$, alors :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 = - \alpha_2 \vec{u}_2 - \alpha_3 \vec{u}_3 - \dots - \alpha_n \vec{u}_n \qquad \text{et}$$

$$\vec{u}_1 = - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \vec{u}_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \vec{u}_n \quad .$$

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soit :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que : $3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 = \vec{o}$

Alors on peut écrire que : $\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1 + 0\vec{u}_3$ donc $\vec{u}_2$ s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs.

Remarquons, toutefois, qu'il est impossible d'exprimer $\vec{u}_3$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

3.2 SYSTEME GENERATEUR

Un sous-ensemble fini $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dit système générateur de E si, et seulement si, tout vecteur $\vec{v}$ de E est une combinaison linéaire des vecteurs de S .

On peut formaliser cette définition comme suit :

$$\vec{v} \in E \text{ , } \forall \vec{v} \qquad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \qquad \vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1, + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$$

Exemples

* Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, soit $\vec{u}_1 = \binom{1}{0}$, $\vec{u}_2 = \binom{1}{1}$ et $\vec{u}_3 = \binom{0}{-1}$

  Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$ un élément de $\mathbb{R}^2$. S'il existe trois réels α, β, γ tels que $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3$ c'est que : $\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta - \gamma = y \end{cases}$

  Il est donc possible de choisir arbitrairement α ; il vient alors :

  $$\beta = x - \alpha \qquad \text{et} \qquad \gamma = x - y - \alpha$$

  Par suite :

  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2_2$, $\forall \vec{u}$: $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + (x-\alpha)\vec{u}_2 + (x-y-\alpha)\vec{u}_3$ donc $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^2$.

* Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2, soit :

  $P_1 : x \longmapsto x - 1$; $P_2 : x \longmapsto x^2 - x + 1$ et $P_3 : x \longmapsto x^2 - x$

  Soit $P \in \mathcal{P}_2$ tel que : $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

  S'il existe trois réels α, β, γ tel que : $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = P$ alors :

  $x \in \mathbb{R}$, $\forall x$ $\alpha(x-1) + \beta(x^2-x+1) + \gamma(x^2-x) = ax^2 + bx + c$ ou encore :

  $x \in \mathbb{R}$, $\forall x$ $(\beta+\alpha)x^2 + (\alpha-\beta-\gamma)x + (\beta-\alpha) = ax^2 + bx + c$

Ce qui est équivalent à : $\begin{cases} \beta + \alpha = a \\ \alpha - \beta - \gamma = b \\ \beta - \alpha = c \end{cases}$

On trouve finalement : $\begin{cases} \alpha = a + b \\ \beta = a + b + c \\ \gamma = -(b+c) \end{cases}$

Donc : $P \in \mathcal{P}_2$, $\forall P$: $P = (a+b)p_1 + (a+b+c)p_2 - (b+c)p_3$ et le système $\{p_1, p_2, p_3\}$ est un système générateur de $\mathcal{P}_2$

3.3 BASE D'UN ESPACE VECTORIEL

> On appelle base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, tout système S libre et générateur d'éléments de E.

* Remarque très importante : La notion de base ainsi définie présuppose que S est fini. Ceci est une restrict assez forte qui n'est pas indispensable à la notion de base (voir, à ce sujet, chapitre 4, paragraphe 4-6).

Exemples

* Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on vérifiera aisément que les vecteurs

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ constituent une base.

Démontrer que les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ constituent également une base de $\mathbb{R}^3$.

* Dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2, les applications :

$p_1 : x \longmapsto x^2$; $p_2 : x \longmapsto x$; $p_3 : x \longmapsto 1$

constituent une base de $\mathcal{P}_2$

. Démontrer que le système : $S_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$ où

$$\begin{aligned} f_1 &: x \longmapsto x(x-1) \\ f_2 &: x \longmapsto x \\ f_3 &: x \longmapsto 1 \end{aligned}$$

est également une base de $\mathcal{P}_2$.

. Démontrer que le système : $S_2 = \{g_1, g_2, g_3\}$ où

$$\begin{aligned} g_1 &: x \longmapsto x^2 - x \\ g_2 &: x \longmapsto x^2 - x + 1 \\ g_3 &: x \longmapsto x - 1 \end{aligned}$$

est encore une base de $\mathcal{P}_2$.

Convention

On conviendra, pour des raisons qui apparaitront dans la suite du cours, d'ordonner les vecteurs d'une base. Dans le premier exemple donné ci-dessus, les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ seront considérées distinctes.

3.4 COMPOSANTES D'UN VECTEUR RELATIVEMENT A UNE BASE D'UN ESPACE VECTORIEL

34.1 Théorème

Tout vecteur $\vec{v}$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ s'exprime, de façon unique, comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ de E.

Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ une base de E. B est, en particulier, un système générateur de E donc, quel que soit l'élément $\vec{v}$ de E, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ élément de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$.

Supposons qu'il existe un autre élément $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\vec{v} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$

Alors : $\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$

Soit : $(\alpha_1-\beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2-\beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n-\beta_n)\vec{e}_n = \vec{o}$ (1)

Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ est un système libre de E donc :

$$(1) \Longrightarrow (\alpha_1-\beta_1 = \alpha_2-\beta_2 = \dots = \alpha_n-\beta_n = o)$$ et finalement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

34.2 Définition

Il résulte du théorème ci-dessus que tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$$

où $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ **est** une base de E.
Les nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés COMPOSANTES du vecteur $\vec{v}$ relativement à la base B.

Remarque

Si un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est muni d'une base B, le n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ des composantes d'un vecteur $\vec{v}$ relativement à B définit parfaitement ce vecteur. Mais ce fait justifie la convention faite au chapitre 3.3 consistant à ordonner les vecteurs d'une base.

34.3 Composantes de la somme de deux vecteurs

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de E tels que :

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad \text{et}$$
$$\vec{v} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n$$

Alors, en utilisant les axiomes de la structure d'espace vectoriel, il vient :

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1+y_1)\vec{e}_1 + (x_2+y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n+y_n)\vec{e}_n.$$ En résumé :

Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$ alors

$$\vec{u} + \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)\vec{e}_i$$

34.4 Composantes du vecteur $(\alpha\vec{u})$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$. Soit $\vec{u}$ un élément de E tel que : $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors, en utilisant les axiomes de la structure d'espace vectoriel, il vient :

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1)\vec{e}_1 + (\alpha x_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha x_n)\vec{e}_n.$$ Donc

Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

$$\alpha\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)\vec{e}_i$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 3

Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $(\mathcal{P}_2, +, .)$ des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2, est un espace vectoriel sur $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1° On considère l'ensemble E des éléments A de $\mathcal{P}_2$ tels que :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \qquad A(x) = ax^2 + bx \qquad \text{où} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

et l'ensemble F des éléments B de $\mathcal{P}_2$ tels que :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \qquad B(x) = mx^2 - 2px + m \qquad \text{où} \quad (m, p) \in \mathbb{R}^2$$

a) Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{P}_2, +, .)$.

b) Déterminer une base de E et une base de F. En déduire la dimension de E et celle de F.

2° Déterminer $E \cap F$ ainsi qu'une base de ce sous-espace vectoriel de $(\mathcal{P}_2, +, .)$. En déduire la dimension de $E \cap F$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ deux vecteurs de E.

1° Démontrer que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une partie libre de E, il en est de même de $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$

2° Ecrire $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ et $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$. En déduire que si $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$ est une partie libre de E, il en est de même de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

3° Démontrer que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base de E, il en est de même de $\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$.

Exercice 3

On considère l'ensemble E des applications $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \qquad f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x} \qquad \text{où} \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$.

2° On considère les applications $f_{1,o}$ et $f_{o,1}$ définies par :

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \qquad f_{1,o}(x) = 1 \qquad \text{et}$$

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \qquad f_{o,1}(x) = \frac{1}{x}$$

Démontrer que $(f_{1,o}, f_{o,1})$ est une base de E, notée B.

3° On considère les applications $f_{1,1}$ et $f_{3,2}$ définies par :

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \qquad f_{1,1}(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \forall x \qquad f_{3,2}(x) = 3 + \frac{2}{x}$$

Démontrer que $(f_{1,1}, f_{3,2})$ est une base de E, notée B'.

4° On considère l'application $f_{a,b}$ définie par :

$$x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall x \qquad f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x}$$

Déterminer les composantes de $f_{a,b}$ dans la base B'.

Exercice 4

On considère l'ensemble Φ des applications de $E = [0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, constantes sur $]0, 1[$.

1°) Démontrer que Φ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ des applications de E vers $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer une base de Φ. En déduire la dimension de Φ.

3°) On considère l'ensemble Δ des éléments de Φ tels que :

$$x \in]0, 1[, \quad \forall x \qquad f(x) = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)]$$

a) Démontrer que Δ est un sous-espace vectoriel de Φ.

b) Déterminer une base de Δ. En déduire la dimension de Δ.

4°) On considère l'ensemble Γ des éléments de Φ constants sur $[0, 1[$.

a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de Φ.

b) Déterminer une base de Γ. En déduire la dimension de Γ.

5°) Déterminer $\Delta \cap \Gamma$. Déterminer une base de $\Delta \cap \Gamma$ et préciser la dimension de ce sous-espace vectoriel de Φ.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des applications polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Soit α et β deux réels distincts.

1° Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_2$ tels que $f(\alpha) = 0$ est un plan vectoriel de $\mathcal{P}_2$.

2° Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_2$ tels que $f(\alpha) = 0$ et $f(\beta) = 0$ est une droite vectorielle de $\mathcal{P}_2$.

Exercice 6

On rappelle que l'ensemble, S, des suites réelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère le sous-ensemble E, de S, formé des suites (u_n) vérifiant la relation :
$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\forall n$: $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de S.

2° On considère la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = r^n$. Démontrer qu'il existe deux valeurs de r telles que la suite géométrique correspondante soit élément de E. On notera ces deux suites (a_n) et (b_n).

3° Soit (u_n) un élément de E. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha a_0 + \beta b_0 \\ u_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \end{cases}$$

Démontrer que : $n \in \mathbb{N}$, $\forall n$: $u_n = \alpha a_n + \beta b_n$. En déduire une base de E.

CHAPITRE 4

DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

4.1 THEOREME "de L'ECHANGE"

Soit $G = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_p\}$ un système générateur et $L = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un système libre de E.

* Tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de G donc, en particulier, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, réels, tels que :

$$\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p$$

L'un au moins des α_i, $(i \in [1, p] \cap \mathbb{N})$, est non nul sinon $\vec{u}_1 = \vec{0}$ et L serait lié : supposons $\alpha_1 \neq \vec{0}$, a

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \vec{u}_1 - \frac{1}{\alpha_1} (\alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_p \vec{e}_p)$$

Tout vecteur $\vec{x}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\boxed{\vec{u}_1}$, $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$. Le système $G_1 = \{\vec{u}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ est générateur de E.

* Réutilisons le procédé pour le vecteur $\vec{u}_2$.

Il existe $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$, réels, tels que :

$$\vec{u}_2 = \beta_1 \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_p \vec{e}_p$$

L'un au moins des β_i $(i \in [1, p] \cap \mathbb{N})$ est non nul, sinon $\vec{u}_2 = \vec{0}$ et L serait lié.

Qui plus est, l'un au moins des β_i $(i \in [2, p] \cap \mathbb{N})$ est non nul car si β_1 seul était non nul le système $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ serait lié et il en serait de même de L.

Supposons donc, $\beta_2 \neq 0$. Alors :

$$\vec{e}_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \vec{u}_1 + \frac{1}{\beta_2} \vec{u}_2 - \frac{1}{\beta_2} (\beta_3 \vec{u}_3 + \dots + \beta_p \vec{u}_p)$$

Le système $G_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_p\}$ est générateur de E.

* Supposons que $n > p$ et itérons la méthode précédente. On obtient le système $G_p = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ générateur de E.

* Mais, alors, le vecteur $\vec{u}_{p+1}$ de L est combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_p$ ce qui entraine que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}\}$ est lié donc que L est lié. Contradiction.

* En conclusion l'hypothèse $n > p$ est fausse et par conséquent, $n \leq p$ est vraie.

> Soit E est un espace vectoriel réel. Si G est un système générateur et L un système libre de E,
>
> $$\text{Card } L \leq \text{Card } G$$

4.2 THEOREME DE LA DIMENSION

Soit $B = (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \dots , \vec{e}_n)$ et $B' = (\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots \vec{u}_p)$ deux bases d'un espace vectoriel réel E.

$\left.\begin{array}{l}\text{B système libre}\\ \text{B' système générateur}\end{array}\right\}$ donc card B $\leqslant$ Card B'

$\left.\begin{array}{l}\text{B système générateur}\\ \text{B' système libre}\end{array}\right\}$ donc Card B' $\leqslant$ Card B

Par suite : Card B = Card B'

Si un espace vectoriel réel E admet une base de n éléments, toute autre base de E possède n éléments : n est la dimension de E sur $\mathbb{R}$.

Remarques

* Si n est la dimension de E sur $\mathbb{R}$ on note : dim E = n.
* Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle.
* Tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel.
* Par convention : $\dim \{\vec{0}\} = 0$

Conséquences : Il résulte des deux théorèmes précédents que :

C_1

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n

- tout système libre a au plus n éléments
- tout système ayant plus de n éléments est lié
- tout système générateur a au moins n éléments

C_2

Si $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_p\}$ est une partie libre de E, non génératrice, il existe un élément $\vec{x}$ de E tel que $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_p, \vec{x}\}$ soit une partie libre de E.

En effet, supposons que quel que soit $\vec{x}$ de E, $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_p, \vec{x}\}$ soit liée.

Alors il existe $(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots \alpha_p , \beta)$ non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p + \beta\vec{x} = \vec{0}$$

Si $\beta \neq 0$ $\quad \vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{u}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta}\vec{u}_2 - \dots - \frac{\alpha_p}{\beta}\vec{u}_p$. Contradiction car $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots \vec{u}_p\}$ serait génératrice.

Si $\beta = 0$ $\quad \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p = \vec{0}$. Contradiction car $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_p\}$ étant libre on aurait $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

En conclusion : il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que $\{\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \dots , \vec{u}_p, \vec{x}\}$ soit libre.

4.3 THEOREME 3

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, toute partie libre de E possédant n éléments est une base de E.

Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ une partie libre de E

Soit $\vec{v}$ un vecteur de E nous devons démontrer que $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$

- Si $\vec{v} = \vec{u}_1$ ou $\vec{v} = \vec{u}_2$ ... ou $\vec{v} = \vec{u}_n$ c'est immédiat.
- Si $\vec{v} \neq \vec{u}_1$ et $\vec{v} \neq \vec{u}_2$ ... et $\vec{v} \neq \vec{u}_n$

Le système $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{v}\}$ est lié d'après C_1 donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \lambda_{n+1}$ réels <u>non tous nuls</u> tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n + \lambda_{n+1} \vec{v} = \vec{0}$.

On ne peut avoir $\lambda_{n+1} = 0$ sinon, puisque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ est libre on aurait $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ donc $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n, \vec{v}\}$ libre.

Alors, $\lambda_{n+1} \neq 0$ donc $\vec{v} = -\dfrac{1}{\lambda_{n+1}} (\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n)$ et $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ est génératrice.

4.4 THEOREME 4

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, toute partie génératrice de n éléments de E est une base de E.

Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ une partie génératrice de E

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ était liée, l'un des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ serait combinaison linéaire des (n-1) autres

Par exemple : $\vec{u}_1 = \alpha_2 \vec{u}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n$

Mais alors tout vecteur $\vec{v}$ de E qui est une combinaison linéaire de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ par hypothèse serait aussi une combinaison linéaire de $\{\vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$

Il existerait dans E une partie génératrice de (n-1) vecteurs et une partie libre (n'importe quelle base) de n vecteurs.

Ceci est en contradiction avec le théorème 4.1 donc $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_n\}$ est libre.

4.5 THEOREME DE LA BASE INCOMPLETE

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. Si $\{\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_p\}$ est une partie libre de E telle que $p < n$, il existe $\vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{u}_n$, éléments de E, tels que :

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}, \ldots, \vec{u}_n\} \text{ soit une base de } E$$

Soit $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ une partie libre de E. Puisque $p < n$ $\{\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_p\}$ n'est pas génératrice de E donc il existe un élément $\vec{u}_{p+1}$ de E tel que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}\}$ soit libre (théorème C4 paragraphe 2.2.4).

- Si $p + 1 = n$, d'après le théorème 4.4, $(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1})$ est une base de E.

- Si $p + 1 < n$ on réitère la méthode autant de fois que nécessaire.

4.6 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION INFINIE

Dans le chapitre 3, pour définir les notions de système libre, système lié, système générateur, base, nous avons considéré, à priori, un *système fini* de vecteurs de E. Nous aurions pu éviter cette condition en envisageant le problème de la façon suivante :

> Un ensemble S de vecteurs de E est libre si, et seulement si, toute égalité du type
>
> $$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{v}_i \in E, \text{ implique}$$
>
> $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Par exemple, dans l'espace vectoriel E, de tous les polynômes à coefficients réels, le système $\{1, x, \ldots, x^n\}$ constitue, pour tout entier n, un système libre (on peut le vérifier aisément par dérivation).

> Un ensemble S de vecteurs de E est générateur si, et seulement si, tout vecteur de E peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire *finie* de vecteurs de E

Dans l'exemple ci-dessus tout élément de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire *finie* de la famille *infinie* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$

La nouveauté réside dans le fait que la combinaison linéaire fait intervenir un nombre *fini* certes mais à priori *quelconque* de vecteurs.

Le théorème fondamental que nous admettrons est le suivant :

> Tout espace vectoriel réel admet au moins une base.

Deux cas se présentent :

- ou bien il existe une base finie, et nous l'avons démontrée (théorème de la dimension) tout autre base est nécessairement finie et possède le même nombre d'éléments.

- ou bien il existe une base infinie. On dit que l'espace est de *dimension infinie*. La plupart des espac fonctionnels sont de dimension infinie. Pour démontrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie il suffit d'exhiber un système libre infini.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 4

Exercice 1

On appelle ε l'ensemble des suites numériques (applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$) notées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Si on considère sur ε les lois suivantes :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varepsilon \quad \forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varepsilon \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varepsilon \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha . (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$(\varepsilon, + ..)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; on note $\vec{0}$ l'élément neutre.

Dans la suite $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0$$

1 - Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de ε .

montrer que l'application φ de $\mathcal{F}$ vers $\mathbb{R}^2$ qui à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe le couple (u_o, u_1) est une application linéaire bijective. En déduire la dimension de $\mathcal{F}$.

2 - Soit $\vec{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\vec{v} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 2 éléments de $\mathcal{F}$.

Montrer que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$ dans $\mathcal{F}$ équivaut à

$$\lambda u_o + \mu v_o = 0$$

$$\lambda u_1 + \mu v_1 = 0$$

En déduire que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une partie libre de $\mathcal{F}$ si et seulement si

$$u_o\, v_1 - u_1\, v_o \neq 0$$

3 - a) Soit r un réel non nul.

Montrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si

$$2r^2 - 3r - 2 = 0$$

b) En déduire l'existence dans $\mathcal{F}$ de 2 suites du type précédent qu'on notera $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Montrer qu $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est alors une base de $\mathcal{F}$.

c) En déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{F}$. Déterminer ces éléments u en fonction de u_o et

B - Pour toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f quand elle existe.

On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2f^{(2)} - 3f^{(1)} - 2f = \theta$$

(où θ désigne l'application nulle).

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Etablir que les applications φ et ψ telles que

$$\varphi(x) = e^{2x} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

pour x dans $\mathbb{R}$, sont des éléments linéairement indépendants de $\mathcal{S}$.

2. Soit f appartenant à $\mathcal{S}$.

Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}$ appartient à $\mathcal{S}$ pour tout entier n.

En déduire que f appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si f possède des dérivées de tous ordres et si pour tout réel x la suite de terme général $f^{(n)}(x)$ appartient à $\widehat{\mathcal{F}}$.

3. On veut montrer que $\mathcal{S}$ est engendré par φ et par ψ.

Soit f un élément de $\mathcal{S}$.

Montrer que $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ $\quad \alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$ implique

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha f^{(n)}(x) + \beta\varphi^{(n)}(x) + \gamma\psi^{(n)}(x) = 0$$

En déduire en utilisant la dimension de $\widehat{\mathcal{F}}$ qu'il existe α, β, γ, avec α différent de zéro tels que l'on ait

$$\alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$$

Quelle est la forme générale des éléments de $\mathcal{S}$?

Chapitre 5

SOUS-ESPACES VECTORIELS DE E_3

Dans tout ce chapitre E_3 désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3.

5.1 DIMENSION D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

* Etant donné E_n, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension n, $\{\vec{0}_{E_n}\}$ et E_n sont des sous-espaces vectoriels de E_n. La dimension de $\{\vec{0}_{E_n}\}$ est <u>par convention</u> 0; celle de E_n est n.

* Soit F_p un <u>sous-espace propre</u> de E_n (c'est-à-dire un sous espace autre que $\{\vec{0}_{E_n}\}$ et E_n). Désignons par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_p)$ une base de F_p : c'est un système libre de F_p donc de E_n. Par suite : $p \leqslant n$

Si $p = n$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n)$ est une famille libre de E_n, à n éléments, c'est une base de E_n : alors F_p serait confondu avec E_n (contraire à l'hypothèse F_p sous espace propre de E_n)

En conclusion :

> La dimension p de tout sous espace vectoriel propre de E_n, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n est telle que $o < p < n$

* <u>Remarque</u> Si F est un sous-espace vectoriel de E et si dim F = dim E alors F = E

En effet soit $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... $\vec{e}_n$ une base de F. C'est un système libre de n vecteurs dans E : c'es donc une base de E (cf théorème 3 chapitre 4). D'où **E** = F.

5.2 SOUS ESPACES VECTORIELS PROPRES DE E_3

Il résulte du théorème précédent que les sous-espaces vectoriels propres de E_3, s'il en existe, ne peuvent être que des droites vectorielles (dimension 1), ou des plans vectoriels (dimension 2).

* Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E_3 et soit :

$$\Delta = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Δ est la <u>droite vectorielle</u> engendrée par $\vec{u}$ (cf 2.4)

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants de E_3 et soit :

$$P = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2\ ,\quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

P est le <u>plan vectoriel</u> engendré par $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ (cf 2.4)

5.3 INTERSECTION DE DEUX DROITES VECTORIELLES DE E_3

Soit Δ et Δ' deux droites vectorielles de E_3 engendrées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

* $\{\vec{u}\ ,\ \vec{u}'\}$ <u>partie liée</u>

Il existe deux réels α, β non tous nuls tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}' = \vec{0}$. L'un de ces deux réels peut-il être nul ?

. Supposons par exemple $\beta = 0$. Alors : $\alpha\vec{u} = \vec{o}$ avec $\alpha \neq o$ et $\vec{u} \neq \vec{o}$ ce qui ne peut être.

Par suite : aucun des réels α, β n'est nul. On peut alors écrire : $\vec{u}' = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{u}$ donc $\vec{u}' \in \Delta$

$(\vec{u}')$ est donc une base de Δ : il en résulte que $\Delta = \Delta'$ et $\Delta \cap \Delta' = \Delta = \Delta'$

* $\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ partie libre

Soit $\vec{v}$ un élément de $\Delta \cap \Delta'$ (il en existe au moins un : $\vec{0}_{E_3}$).

Il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \beta\vec{u}'$$

Par suite, il existe deux réels α, β tels que :

$$\alpha\vec{u} - \beta\vec{u}' = \vec{0}$$

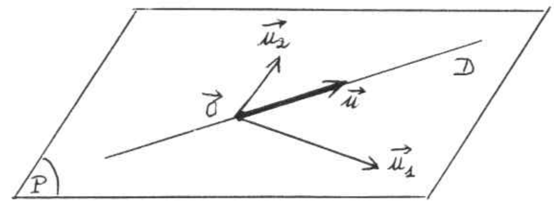
Puisque $\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ est une partie libre on en déduit que : $\alpha = \beta = 0$ donc $\vec{v} = \vec{0}$ et $\Delta \cap \Delta' = \{\vec{0}\}$

Deux droites vectorielles de E_3 ont pour intersection $\left\{\vec{0}_{E_3}\right\}$ ou bien sont confondues

5.4 INTERSECTION D'UNE DROITE VECTORIELLE ET D'UN PLAN VECTORIEL DE E_3

Soit Δ une droite vectorielle de E_3 dont une base est $\vec{u}$ et P un plan vectoriel de E_3 dont une base est $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

* $\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ liée



Il existe trois réels α, β, γ non tous nuls tels que :

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2 = \vec{0}$

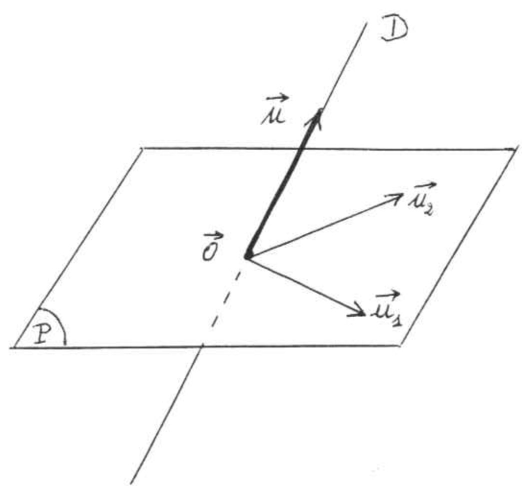
α peut-il être nul ?

Si $\alpha = 0$, $\beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2 = \vec{0}$ entrainerait $\alpha = \beta = 0$ puisque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une base de P (contradiction car α, β, γ non tous nuls). Par suite $\alpha \neq 0$.

Alors : $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{u}_1 - \frac{\gamma}{\alpha}u_2$ et $\vec{u}$ appartient à P

Donc $D \subset P$ et $D \cap P = D$

* $\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ libre



Soit $\vec{v}$ un élément de $D \cap P$ (il en existe au moins un : $\vec{0}$)

Il existe α, β, γ réels tels que :

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \beta\vec{u}_1 + \gamma\vec{u}_2$$

Par suite, il existe α, β, γ réels tels que

$$\alpha\vec{u} - \beta\vec{u}_1 - \gamma\vec{u}_2 = \vec{0}$$

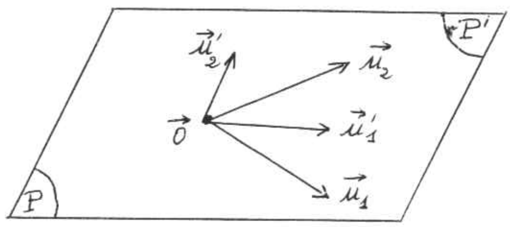
Puisque $\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une partie libre on en déduit que : $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $\vec{v} = \vec{0}$ et $D \cap P = \{\vec{0}\}$

> Une droite vectorielle et un plan vectoriel de E_3 ont pour intersection $\left\{\vec{0}_{E_3}\right\}$
>
> ou bien la droite vectorielle est un sous-ensemble du plan vectoriel

5.5 INTERSECTION DE DEUX PLANS VECTORIELS DE E_3

Soit P et P' deux plans vectoriels de E_3 ayant respectivement pour base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $(\vec{u}_1', \vec{u}_2')$

✱ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ et $\{\vec{u}_2, \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ parties liées



Il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que :

$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_1' + \gamma\vec{u}_2' = \vec{0}$

et $\alpha', \beta'\ \gamma'$ réels non tous nuls tels que :

$$\alpha'\vec{u}_2 + \beta'\vec{u}_1' + \gamma'\vec{u}_2' = \vec{0}$$

α ne peut être nul car si $\alpha = 0$, $\beta\vec{u}_1' + \gamma\vec{u}_2' = \vec{0}$ entrainerait $\beta = \gamma = 0$ (puisque $(\vec{u}_1', \vec{u}_2')$ est une base de P'. Par suite :

$$\vec{u}_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{u}_1' - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}_2' \quad \text{et} \quad \vec{u}_1 \in P'$$

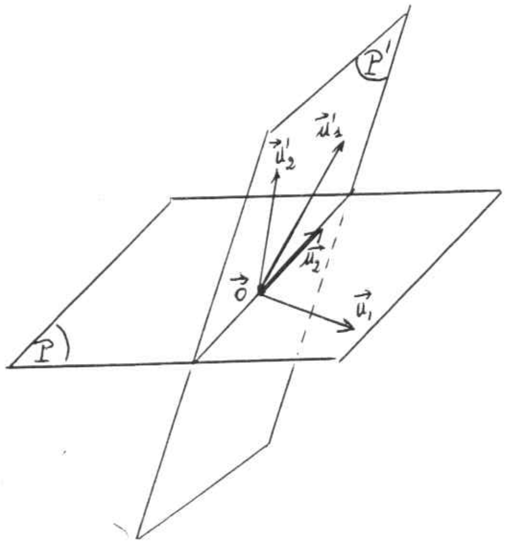
De même α' ne peut être nul et :

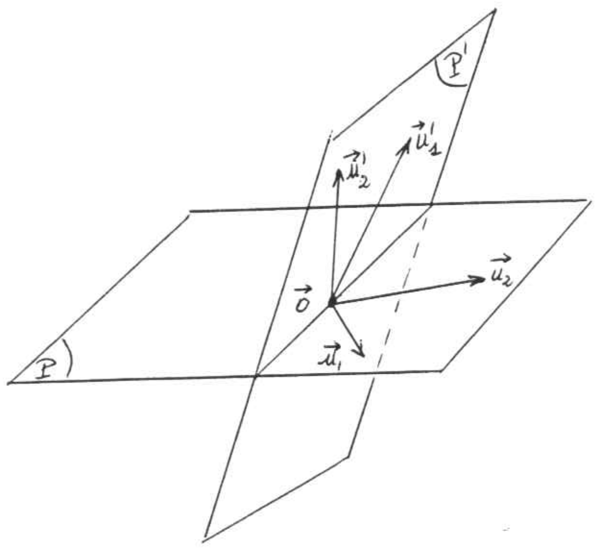
$$\vec{u}_2 = -\frac{\beta'}{\alpha'}\vec{u}_1' - \frac{\gamma'}{\alpha'}\vec{u}_2' \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 \in P'$$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est alors une base de P' , donc :

$$P = P' \quad \text{et} \quad P \cap P' = P = P'$$

✱ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ ou $\{\vec{u}_2, \vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ parties libres





Supposons par exemple que $\{\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ soit une partie libre. $(\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ est une base de E_3 donc le vecteur $\vec{u}_2$ peut s'exprimer sous la forme : $\vec{u}_2 = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}'_1 + \gamma\vec{u}'_2$ où α, β, γ sont trois réels non tous nuls.

On en déduit que : $\vec{u}_2 - \alpha\vec{u}_1 = \beta\vec{u}'_1 + \gamma\vec{u}'_2$

soit $\vec{v} = \vec{u}_2 - \alpha\vec{u}_1 = \beta\vec{u}'_1 + \gamma\vec{u}'_2$

Il est clair que $\vec{v}$ est un vecteur non nul.

Or $\vec{v} = \vec{u}_2 - \alpha\vec{u}_1 \Longrightarrow \vec{v} \in P$

et $\vec{v} = \beta\vec{u}'_1 + \gamma\vec{u}'_2 \Longrightarrow \vec{v} \in P'$

Par suite $\vec{v}$ appartient à $P \cap P'$

Soit Δ la droite vectorielle engendrée par $\vec{v}$. Démontrons qu'il ne peut exister un vecteur $\vec{v}'$ appartenant à $P \cap P'$ sans appartenir à Δ .

S'il existait un tel vecteur $\vec{v}$, $\{\vec{v}, \vec{v}'\}$ serait une partie libre de P et de P' donc une base commune de P et de P'

Alors on aurait $P = P'$ ce qui est impossible puisque $\vec{u}_1$ n'appartient pas à P' (par hypothèse , $\{\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ partie libre)

En conclusion $P \cap P' = \Delta$

> Deux plans vectoriels ont pour intersection une droite vectorielle ou bien sont confondus.

Tableau récapitulatif

$\Delta(\vec{u}) \cap \Delta'(\vec{u}')$	$\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ liée	$\Delta \cap \Delta' = \Delta = \Delta'$
	$\{\vec{u}, \vec{u}'\}$ libre	$\Delta \cap \Delta' = \{\vec{0}\}$
$\Delta(\vec{u}) \cap P(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$	$\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$liée	$\Delta \cap P = \Delta$
	$\{\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$libre	$\Delta \cap P' = \{\vec{0}\}$
$P(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \cap P'(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$	$\{\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ ET $\{\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ liées	$P \cap P' = P = P'$
	$\{\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ OU $\{\vec{u}_2, \vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ libre	$P \cap P' = \Delta$

Chapitre 6

APPLICATIONS LINEAIRES.

6.1. DEFINITION

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une application f de E vers F est linéaire si, et seulement si :
$(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\forall (\vec{u}, \vec{v})$ $\quad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
$(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E$, $\forall (\alpha, \vec{u})$ $\quad f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

Remarques :

- une application linéaire de E vers F est aussi appelée homomorphisme de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F .
- Tout homomorphisme bijectif d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est appelé isomorphisme de E vers F.
- Si E = F une application linéaire de E vers E est appelée endomorphisme.
- Tout endomorphisme bijectif de E est appelé automorphisme de E.

6.2. EXEMPLES

6.2.1. Exemple 1.

Soit Id_E l'application identique d'un espace vectoriel E sur lui-même.
Quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E :
$Id_E(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} = Id_E(\vec{u}) + id_E(\vec{v})$
Quel que soit l'élément $(\alpha, \vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$:
$Id_E(\alpha\vec{u}) = \alpha\vec{u} = \alpha\, Id_E(\vec{u})$
Donc Id_E est un endomorphisme de E. De plus il est clair que Id_E est bijective donc c'est un automorphisme de

6.2.2. Exemple 2.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et soit n l'application de E vers F qui, à tout élément $\vec{u}$ de E associe le vecteur nul de F, noté $\vec{0}_F$.
Quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E :
$n(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{0}_F = n(\vec{u}) + n(\vec{v})$
Quel que soit l'élément $\alpha\vec{u}$ de $\mathbb{R} \times E$:
$n(\alpha\vec{u}) = \vec{0}_F = \alpha\vec{0}_F = \alpha n(\vec{u})$
Donc n est une application linéaire de E vers F.

6.2.3. Exemple 3.

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}_1$ l'espace vector des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On désigne par d, l'application de $\mathcal{P}_2$ vers $\mathcal{P}_1$ qui à tout élément f de $\mathcal{P}_2$: $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ associe l'élément f' de $\mathcal{P}_1$: $f' : x \longrightarrow 2ax + b$.
On démontre sans difficulté que :
- quel que soit l'élément (f, g) de $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2$, $\quad d(f+g) = d(f) + d(g)$
- quel que soit l'élément (α, f) de $\mathbb{R} \times \mathcal{P}_2$, $\quad d(\alpha f) = \alpha d(f)$.

Donc d est une application linéaire de $\mathcal{P}_2$ vers $\mathcal{P}_1$.

6.2.4. Exemple 4 : Homothéties vectorielles

Soit α un réel, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit h_α l'application de E vers E qui, à tout vecteur $\vec{u}$ de E associe le vecteur $h_\alpha(\vec{u})$ tel que : $h_\alpha(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.
Une telle application est appelée homothétie vectorielle de E , de rapport α .

Remarque : Il est clair que si α est un réel non nul, h_α est bijective.

. Quel que soit l'élément $(\vec{u}, \vec{v})$ de E^2 :
$h_\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
$h_\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = h_\alpha(\vec{u}) + h_\alpha(\vec{v})$
. Quel que soit l'élément $(\lambda, \vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$:
$h_\alpha(\lambda\vec{u}) = \alpha(\lambda\vec{u}) = (\alpha\lambda)\vec{u} = (\lambda\alpha)\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u})$
$h_\alpha(\lambda\vec{u}) = \lambda h_\alpha(\vec{u})$
donc h_α est un endomorphisme de E.

6.2.5. Exemple 5 : Projections vectorielles

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : tout vecteur $\vec{u}$ de E peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 \in E_1$ et $\vec{u}_2 \in E_2$.
Considérons les applications p_1 et p_2 de E dans lui-même définies par :
$\vec{u} \in E$, $(\forall \vec{u})$ $p_1(\vec{u}) = \vec{u}_1$ et $\vec{u} \in E$, $(\forall \vec{u})$ $p_2(\vec{u}) = \vec{u}_2$
L'application p_1 est appelée projection vectorielle sur E_1 dans la direction E_2.
L'application p_2 est appelée projection vectorielle sur E_2 dans la direction E_1.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, il existe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ éléments de $E_1 \times E_2$ tels que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
Alors, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$p_1(\vec{u}+\vec{v}) = p_1\left[(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\right]$

$p_1(\vec{u}+\vec{v}) = p_1\left[(\vec{u}_1+\vec{v}_1)+(\vec{u}_2+\vec{v}_2)\right]$

$p_1(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}_1+\vec{v}_1 = p_1(\vec{u}) + p_1(\vec{v})$

Quel que soit l'élément $(\alpha,\vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$:

$p_1(\alpha\vec{u}) = p_1\left[\alpha(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\right] = p_1(\alpha\vec{u}_1 + \alpha\vec{u}_2)$

$p_1(\alpha\vec{u}) = p\alpha\vec{u}_1 = \alpha p_1(\vec{u})$

Donc p_1 est un endomorphisme de E.
On démontrerait de même que p_2 est un endomorphisme de E.
Remarque : On constate aisément que $p_1 \circ p_1 = p_1$ et que $p_2 \circ p_2 = p_2$.

6.2.6. Contre-exemple : translation vectorielle

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\vec{a} \in E$. Soit $t_{\vec{a}}$ l'application de E dans E qui, du vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $t_{\vec{a}}(\vec{u})$ tel que : $t_{\vec{a}}(\vec{u}) = \vec{a}+\vec{u}$. Une telle application est appelée translation vectorielle de vecteu

. Quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E :

$t_{\vec{a}}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{a} + \vec{u} + \vec{v}$

$t_{\vec{a}}(\vec{u}) + t_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{a} + \vec{u} + \vec{a} + \vec{v}$

donc $t_{\vec{a}}(\vec{u}+\vec{v}) = t_{\vec{a}}(\vec{u}) + t_{\vec{a}}(\vec{v}) \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

. Quel que soit l'élément $(\alpha,\vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$

$t_{\vec{a}}(\alpha\vec{u}) = \vec{a} + \alpha\vec{u}$

$\alpha t_{\vec{a}}(\vec{u}) = \alpha(\vec{a}+\vec{u}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{u}$

donc $t_{\vec{a}}(\alpha\vec{u}) = \alpha t_{\vec{a}}(\vec{u}) \Longleftrightarrow (\alpha = 1$ ou $\vec{a} = \vec{0})$

Conclusion : si $\vec{a} \neq \vec{0}$ une translation vectorielle n'est pas une application linéaire de E dans E.

6.3. PROPRIETES

6.3.1. Théorème 1.

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel e sur $\mathbb{R}$ vers un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$,

. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

. $\vec{u} \in E$, $\forall \vec{u}$ $f(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u}) = \mathrm{Opp}_F(f(\vec{u}))$

- f étant linéaire, quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E : $f(\vec{u}+\vec{0}_E) = f(\vec{u}) + f(\vec{0}_E)$
  soit $f(\vec{u}) = f(\vec{u}) + f(\vec{0}_E)$
  donc $\vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$

- D'autre part, quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, désignons par $(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u})$ l'opposé de $\vec{u}$:

  $f\left[\vec{u} + \mathrm{Opp}_E\ \vec{u}\right] = f(\vec{u}) + f(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u})$

  $f(\vec{0}_E) = f(\vec{u}) + f(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u})$

  $\vec{0}_F = f(\vec{u}) + f(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u})$

  donc $f(\mathrm{Opp}_E\ \vec{u}) = \mathrm{Opp}_F(f(\vec{u}))$

Remarque : Cette dernière propriété est toujours noté : $\vec{u} \in E$, $\forall \vec{u}$ $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$.

6.3.2. Théorème 2.

> Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F dans G, alors $(g\circ f)$ est une application linéaire de E vers G.

. Quel que soit l'élément $(\vec{u}, \vec{v})$ de E^2 :

$(g\circ f)(\vec{u}+\vec{v}) = g[f(\vec{u}+\vec{v})] = g[f(\vec{u}) + f(\vec{v})]$

puisque f est linéaire. Mais g est également linéaire donc :

$g[f(\vec{u})+f(\vec{v})] = g[f(\vec{u})] + g[f(\vec{v})]$

$g[f(\vec{u})+f(\vec{v})] = (g\circ f)(\vec{u}) + (g\circ f)(\vec{v})$

Soit : $(g\circ f)(\vec{u}+\vec{v}) = (g\circ f)(\vec{u}) + (g\circ f)(\vec{v})$

. Quel que soit l'élément $(\alpha,\vec{u})$ de $\mathbb{R} \times E$:

$(g\circ f)(\alpha\vec{u}) = g[f(\alpha\vec{u})] = g[\alpha f(\vec{u})]$

puisque f est linéaire. Mais g est linéaire :

$g[\alpha f(\vec{u})] = \alpha g[f(\vec{u})] = \alpha[(g\circ f)(\vec{u})]$

Soit : $(g\circ f)(\alpha\vec{u}) = \alpha[(g\circ f)(\vec{u})]$

Donc $(g\circ f)$ est une application linéaire de E vers G.

6.3.3. Théorème 3.

> Une application f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est linéaire si, et seulement si,
> $\begin{array}{l|l} (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 & \\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 & \end{array}$ $\forall(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall(\alpha, \beta) \qquad f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

. Si f est linéaire, quel que soit le couple (α,β) de $\mathbb{R}^2$, quel que soit le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de E^2 :

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = f(\alpha\vec{u})+f(\beta\vec{v})$ et $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

. Réciproquement, si quel que soit le couple (α,β) de $\mathbb{R}^2$ et quel que soit le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de E^2 ;

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ alors, en particulier

si $\alpha=\beta= 1$, $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

et si $\beta= 0$, $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

donc f est linéaire.

6-3-4 Théorème 4.

> Une application linéaire f définie d'un espace vectoriel E de dimension n, vers un espace vectoriel F est déterminée de manière unique dès que l'on connaît les n vecteurs $\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1), \dots, \vec{a}_n = f(\vec{e}_n)$ images des vecteurs d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E.

* Soit f une application linéaire de E vers F et soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Tout vecteur $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$ de E a pour image $f(\vec{u}) = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

f étant linéaire $f(\vec{u}) = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \dots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$

Si l'on pose $\vec{e}'_1 = f(\vec{e}_1), \dots, \vec{e}'_n = f(\vec{e}_n)$ il en résulte que $f(\vec{u}) = \alpha_1 \vec{e}'_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}'_n$

* Réciproquement : Etant donné n vecteurs $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ de F, cherchons s'il existe une application linéaire de E vers F telle que $f(\vec{e}_1) = \vec{a}_1, \dots, f(\vec{e}_n) = \vec{a}_n$.

Considérons l'application g de E vers F qui à tout vecteur $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ associe le vecteur $g(\vec{u}) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$

En choisissant $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ nous obtenons $g(\vec{e}_1) = \vec{a}_1$ de la même façon :

$$g(\vec{e}_2) = \vec{a}_2 \text{ , } \ldots \ g(\vec{e}_n) = \vec{a}_n$$

Démontrons que g est linéaire. Soit $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ et $\vec{v} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$ et λ, μ deux réels.

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\vec{e}_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)\vec{e}_n$$

d'où $g(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)\vec{a}_n$

$$g(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n) + \mu(\beta_1 \vec{a}_1 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n)$$

$$g(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda g(\vec{u}) + \mu g(\vec{v})$$

Donc g est une application linéaire de E vers F.

* Démontrons qu'elle est unique.

Supposons qu'il existe une application linéaire h telle que :

$h(\vec{e}_1) = \vec{a}_1$, ... , $h(\vec{e}_n) = \vec{a}_n$. Alors pour tout vecteur $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ de E :

$$h(\vec{u}) = \alpha_1 h(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n h(\vec{e}_n)$$

$$h(\vec{u}) = \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = g(\vec{u})$$

Il en résulte que h = g.

6.4. NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

6.4.1. Définition

Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle noyau de f, l'ensemble noté N(f), des vecteurs u de E dont l'image par f est le vecteur nul de F.

$N(f) = \{ \vec{u} \mid (\vec{u} \in E) \wedge [f(\vec{u}) = \vec{0}_F] \}$

Remarque : De nombreux auteurs utilisent la notation Ker f pour noter le noyau de f (cette notation vient de l'anglais "Kernel").

6.4.2. Théorème

Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Le noyau N(f) de l'application linéa f est un sous-espace vectoriel de E.

. $N(f) \neq \emptyset$ car $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ donc $\vec{0}_E \in N(f)$.

. Quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de N(f) et quels que soient les réels α, β :

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{u}')$ (linéarité de f)

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') = \alpha(\vec{0}_F) + \beta(\vec{0}_F)$ ($\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont éléments de N(f))

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') = \vec{0}_F$

Donc $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') \in N(f)$ et par suite N(f), stable pour les combinaisons linéaires, est un sous-espace vector de E.

6.4.3. Théorème

Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. f est injective si, et seulement si, $N(f) = \{\vec{0}_E\}$.

. Si f est injective $\vec{0}_F$ a au plus un antécédent. Or $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc $N(f) = \{\vec{0}_E\}$

. Réciproquement si $N(f) = \{\vec{0}_E\}$ démontrons que f est injective.

Quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de E

$f(\vec{u}) = f(\vec{u}') \Longrightarrow f(\vec{u}) - f(\vec{u}') = \vec{0}_F$

$$f(\vec{u}) - f(\vec{u}') = \vec{0}_F \Longrightarrow f(\vec{u} - \vec{u}') = \vec{0}_F$$

$$f(\vec{u} - \vec{u}') = \vec{0}_F \Longrightarrow (\vec{u} - \vec{u}') \in N(f)$$

$$\left.\begin{array}{c} (\vec{u} - \vec{u}') \in N(f) \\ \text{et} \\ N(f) = \{\vec{0}_E\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{u}' \qquad \text{donc f est injective.}$$

6.4.4 Théorème

Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ une famille libre de E et f une application linéaire $\boxed{\text{injective}}$ de E vers F. La famille $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)$ est une famille libre de F.

Supposons que la famille $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots f(\vec{e}_n)$ soit liée. L'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des (n-1) autres. Par exemple :

$$f(\vec{e}_1) = \alpha_2\, f(\vec{e}_2) + \dots + \alpha_n\, (f\vec{e}_n)$$

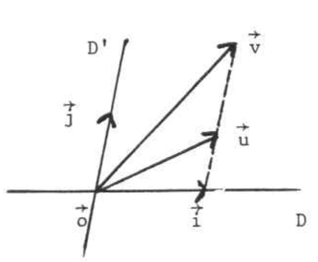
Mais f étant linéaire, on peut alors écrire :

$$f(\vec{e}_1) = f(\alpha_2\, \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\, \vec{e}_n)$$

et f étant injective : $\vec{e}_1 = \alpha_2\, \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\, \vec{e}_n$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n$ soit une famille libre.

Remarque

Si l'application f n'est pas injective on ne peut rien conclure sur la famille $f(\vec{e}\ ), f(\vec{e}\ ), \dots f(\vec{e}_n)$



Soit D et D' deux droites vectorielles d'un plan vectoriel Si f est la projection vectoriell sur D dans la direction de D' . Soit : $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ la famille libre de P définie ci-contre $f(\vec{u}) = f(\vec{v}) = \vec{i}$

6.5. IMAGE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

6.5.1. Définition

Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle image de f, l'ensemble noté Im f, des éléments de F ayant au moins un antécédent dans E par f.

$\mathrm{Im}\, f = \{ \vec{v} \mid (\vec{v} \in F) \wedge [\vec{u} \in E, \exists \vec{u} \quad f(\vec{u}) = \vec{v}] \}$

6.5.2 Remarques

* On appelle rang de l'application linéaire f la dimension de Im f.

Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. L'image par f d'un sous-espace vector[iel] E' de E est un sous-espace vectoriel de F.

Soit f(E') l'image par f de E'.

. $\vec{0}_E \in E'$ donc $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ est élément de f(E'). Par suite $f(E') \neq \emptyset$

. Quels que soient les éléments $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ de f(E'), il existe deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ tels que :
$\vec{v} = f(\vec{u})$ et $\vec{v}' = f(\vec{u}')$

Alors, quels que soient les réels α et β :

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}' = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{u}') = f(\alpha\vec{u}) + f(\beta\vec{u}')$

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}' = f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}')$

Or, $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') \in E'$ donc $(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}') \in f(E')$ et f(E') est un sous-espace vectoriel de F.

Remarques

. Dans le cas particulier E' = E, f(E') = Imf nous pouvons énoncer le théorème :
" L'image d'une application linéaire f de E vers F est un sous-espace vectoriel de F "

. Une application f de E dans F est surjective si, et seulement si : Im f = F .

6.5.3 Théorème

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n)$ une famille génératrice de E et f une application linéaire de E vers F. La famille $f(\vec{e}_1), \ldots f(\vec{e}_n)$ est une famille génératrice de Im f.

Soit $\vec{v} \in$ Im f. Il existe au moins un élément $\vec{u}$ de E tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n)$ étant une famille génératrice de E $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

donc $f(\vec{u}) = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n)$ et $\vec{v} = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$

En conclusion tout vecteur $\vec{v}$ de Im f est combinaison linéaire de $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ donc $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ engendrent Im f.

6.5.4 Théorème E désignant un espace vectoriel de dimension finie

> Soit f une application linéaire de E vers F, espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:
>
> $$\dim (\mathrm{Ker}\, f) + \dim (\mathrm{Im}\, f) = \dim E$$

Remarque

Si $E = \{\vec{0}\}$ l'application linéaire f est telle que :

$$\mathrm{Im}\, f = \{\vec{0}_F\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\, f = E = \{\vec{0}\}$$

donc $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim E = 0$ et le théorème est vérifié.

Nous exclurons donc ce cas dans la démonstration.

Démonstration

Supposons que Ker f est un sous-espace propre de E c'est-à-dire que si $\dim \mathrm{Ker}\, f = k$, on pose

$$1 \leq k < n$$

Désignons par $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_k)$ une base du noyau de f et complétons cette base pour obtenir une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1} \dots \vec{e}_n)$ de E (voir théorème 4.6)

* Les vecteurs $f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)$ engendrent Im f (théorème 6.5.3). Or $f(\vec{e}_1) = \dots = f(\vec{e}_k) = \vec{0}_F$

  Donc $f(\vec{e}_{k+1}), \dots f(\vec{e}_n)$ est aussi une famille génératrice de Im f.

* Démontrons que cette famille est libre.

  Soit $\alpha_{k+1} \dots, \alpha_n$ réels tels que :

  $\alpha_{k+1} f(\vec{e}_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_F$.

  Alors : $f(\alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \dots + \alpha_n \vec{e}_n) = \vec{0}_F$ donc si l'on pose $\vec{V} = \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$,

$\vec{V}$ appartient à Ker f. Puisque $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_k)$ est une base de Ker f, il existe donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ réels tels que :

$$\vec{V} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k$$

Par suite : $\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k - \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} - \dots - \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}_E$

Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ est une base de E donc :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

d'où $f(\vec{e}_{k+1}), \dots, f(\vec{e}_n)$ est une famille libre de Im f.

En conclusion : $f(\vec{e}_{k+1}), \dots, f(\vec{e}_n)$ est une base de Im f, donc dim Im f = n − k,

d'où : dim E = dim Im f + dim Ker f.

✱ Cas particuliers :

On vérifiera aisément que la formule précédente reste vraie dans chacun des cas suivants :

- $\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}$
- Ker f = E

✱ Remarque : Si $(\vec{e}_1, \dots e_k)$ est une base de Ker(f) et si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots \vec{e}_n)$ est une base de E notons E' le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n$.

Sa dimension est n − k = dim (Im f) et $E = E' \oplus \text{Ker } f$.

✱ Conséquences $\boxed{\text{dim Im } f \leq \text{dim } E}$

- Par une application linéaire, une droite vectorielle peut être transformée en
  - une autre droite vectorielle,
  - le vecteur nul $\vec{0}_F$.
- Par une application linéaire, un plan vectoriel peut être transformé en :
  - un autre plan vectoriel
  - une droite vectorielle
  - le vecteur nul $\vec{0}_F$

6-6 ESPACE VECTORIEL $\mathcal{L}(E, F)$

Rappelons que l'ensemble des applications de E vers F, noté $\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 10

> E et F désignant deux espaces vectoriels réels, l'ensemble, noté $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F, muni de la multiplication par un réel et de l'addition est un espace vectoriel sur R.

Démontrons que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}(E, F), +, \cdot)$.

✱ $\mathcal{L}(E, F)$ est inclus dans $\mathcal{A}(E, F)$. De plus $\mathcal{L}(E, F)$ est non vide car l'application nulle appartient à $\mathcal{L}(E, F)$.

✱ Soit f et g deux applications linéaires de E vers F. Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de E et les réels α, β:

$$(f+g)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) + g(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$$

$$(f+g)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \left[\alpha\ f(\vec{u}) + \beta\ f(\vec{v})\right] + \left[\alpha\ g(\vec{u} + \beta g(\vec{v})\right]$$

$$(f+g)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\left[f(\vec{u}) + g(\vec{u})\right] + \beta\left[f(\vec{v}) + g(\vec{v})\right]$$

$$(f+g)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\left[(f+g)\ (\vec{u})\right] + \beta\left[(f+g)\ (\vec{v})\right]$$

donc $(f+g)$ est linéaire et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable pour l'addition.

* Soit f une application linéaire de E vers F et λ un réel.
  Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de E et les réels α, β

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = (\lambda f)\ (\alpha\vec{u}) + (\lambda f)\ (\beta\vec{v})$$

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda.\left[f(\alpha\vec{u})\right] + \lambda.\left[f(\beta\vec{v})\right]$$

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \lambda.\left[\alpha.f(\vec{u})\right] + \lambda.\left[\beta.f(\vec{v})\right]$$

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = (\lambda\times\alpha).f(\vec{u}) + (\lambda\times\beta).f(\vec{v})$$

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha.\left[\lambda.\ f(\vec{u})\right] + \beta.\left[\lambda.f(\vec{v})\right]$$

$$(\lambda f)\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\left[(\lambda f)\ (\vec{u})\right] + \beta\left[(\lambda f)\ (\vec{v})\right]$$

donc (λf) est linéaire et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable pour la loi externe.

6-7 DISTRIBUTIVITE DE LA COMPOSITION SUR L'ADDITION DES APPLICATIONS LINEAIRES

6-7-1 Théorème 1

Si f, g, h sont trois applications d'un ensemble E dans lui-même :

$$(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h) \qquad (1)$$

mais, en général,

$$h \circ (g+f) \neq (h \circ g) + (h \circ f) \qquad (2)$$

* L'égalité (1) résulte immédiatement de la définition. Quel que soit l'élément x de E

$$\left[(f+g) \circ h\right]\ (x) = (f+g)\ \left[h(x)\right]$$

$$\left[(f+g) \circ h\right]\ (x) = f\left[h(x)\right] + g\left[h(x)\right]$$

$$\left[(f+g) \circ h\right]\ (x) = (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$

* En ce qui concerne (2), considérons les trois applications f, g, h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = 2x \quad ; \quad g(x) = x+2 \quad ; \quad h(x = 2x + 5$$

on a :

$$(g+f)(x) = 3x + 2 \quad \text{et} \quad h\left[(g+f)(x)\right] = 6x + 9$$

$$h\left[g(x)\right] = 2x + 9 \quad \text{et} \quad h\left[f(x)\right] = 4x + 5$$

donc : $(h \circ g)(x) + (h \circ f)(x) = 6x + 14$

et $x \in \mathbb{R}$, $\exists x$ $\left[h\circ(g \circ f)\right]\ (x) \neq (h \circ g)\ (x) + (h \circ f)\ (x)$.

6-7-2 Théorème 2

> Si f, g, h sont trois applications ~~linéaires~~ d'un espace vectoriel E dans lui-même, la loi de composition, notée O, est distributive sur l'addition.

En effet si f, g, h sont linéaires, quel que soit $\vec{u}$ élément de E.

$$[h \circ (g+f)](\vec{u}) = h\,[(g+f)(\vec{u})] = h[g(\vec{u}) + f(\vec{u})]$$

Or h étant linéaire :

$$[h \circ (g+f)](\vec{u}) = h[g(\vec{u})] + h[f(\vec{u})]$$

$$[h \circ (g+f)](\vec{u}) = (h \circ g)(\vec{u}) + (h \circ f)(\vec{u}).$$

Remarque : L'ensemble $[\mathcal{L}(E, E), +, O]$ a une structure d'anneau, non commutatif et unitaire.

6-8 ISOMORPHISMES D'ESPACES VECTORIELS

6-8-1 Théorème 11

> L'application réciproque d'un isomorphisme de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F est un isomorphisme de l'espace vectoriel F vers l'espace vectoriel E.
>
> Les espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes

Soit f une application linéaire bijective de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F et soit f^{-1} son application réciproque. Démontrons que f^{-1} est linéaire : soit $(\vec{u}', \vec{v}') \in F^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ quel que soit le couple $(\vec{u}', \vec{v}')$ il existe un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$f^{-1}(\vec{u}') = \vec{u}$ et $f^{-1}(\vec{v}') = \vec{v}$ ou ce qui est équivalent :

$\vec{u}' = f(\vec{u})$ et $\vec{v}' = f(\vec{v})$

Quel que soit le couple (α, β) de réels on a donc :

$$\alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}' = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$$

d'où : $f^{-1}(\alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}') = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha f^{-1}(\vec{u}') + \beta f^{-1}(\vec{v}')$

Il en résulte que f^{-1} est linéaire et bijective et est par conséquent un isomorphisme de F vers E.

6-8-2 Théorème 12

Soit f une application linéaire de E vers F espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace vectoriel E. Pour que f soit un isomorphisme de E vers F il faut et il suffit que l'image de la base $\mathcal{B}$ par f soit une base de F.

a) Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et soit f une application linéaire bijective de E vers F. Démontrons que $\mathcal{B}'= f(\mathcal{B})$ est une base de F.

- Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de F ; f étant surjective il existe un vecteur $\vec{u}$ de E tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$.

  $\mathcal{B}$ étant une base de E il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n)$.

  f étant linéaire $\vec{v} = f(\vec{u}) = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$.

  Ainsi $\{ f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ est une famille génératrice de F.
- $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est-elle une famille libre de F ?

  soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_F$

* f étant linéaire et $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ nous avons :

$$f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

* f étant injective il en résulte que $\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}_E$

* or $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

  Ainsi : $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ est une famille libre

  Ainsi $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ est une base de F.

b) Réciproquement : Soit $\mathcal{B}= (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et f une application linéaire de E vers F telle que $\mathcal{B}'= (f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$ soit une base de F.

Démontrons que f est bijective.

Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de F ; $\mathcal{B}$ étant une base de F il existe un n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ unique tel que $\vec{v} = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$

Donc $\vec{v} = f(\alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n)$.

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ étant une base de E, il existe un vecteur unique $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ de E tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$. Ainsi f est bijective.

6-8-3 Corollaire 1

> Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si leurs dimensions sont égales.

* Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$ est une base de l'espace vectoriel E et si f est un isomorphisme de E vers F alors $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une base de F. Donc dim E = dim F = n

* Réciproquement : Soit E et F 2 espaces vectoriels de même dimension n et de bases respectives :

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

$$\mathcal{B}' = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

D'après le théorème, il existe une application linéaire de E vers F notée f et définie par $\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1), \dots \vec{a}_n = f(\vec{e}_n)$. Elle est bijective car l'image de la base $\mathcal{B}$ de E est une base $\mathcal{B}'$ de F (voir théorème paragraphe 6-8-2) donc E et F sont isomorphes.

6-8-4 Corollaire 2 : Cas particulier

> Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

6-8-5 Théorème 13

> Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E, et soit E' un sous-espace vectoriel supplémentaire de N(f) dans E. E' et Im(f) sont isomorphes

D'après le théorème, nous savons que dim E' = dim Im(f).

On conclut d'après le corollaire 1 précédent.

6-8-6 Théorème 14

> Soit f un endomorphisme de l'espace E, rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Pour que f soit un automorphisme de E, il faut et il suffit que $(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ soit une famille libre.

En effet : $\left[\dim E = n \text{ et } (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) \text{ libre}\right] \Longleftrightarrow (f(\vec{e}_1), \dots f(\vec{e}_n))$ est une base de E

$\left[\dim E = n \text{ et } (f(e\ ), \dots, f(e_n)) \text{ libre}\right] \Longleftrightarrow$ f est bijective

6-8-7 Théorème 15

> Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est bijectif si et seulement si, $N(f) = \left\{\vec{0}_E\right\}$

f est injective si, et seulement si, $N(f) = \{\vec{0}_E\}$ (cf théorème 6-4-3)

f est surjective si, et seulement si, $Im(f) = E$

Or $\dim N(f) + \dim Im(f) = \dim E$

donc f est surjective si et seulement si $\dim N(f) = 0 \Longleftrightarrow N(f) = \{\vec{0}_E\}$

6-9 GROUPE LINEAIRE D'UN ESPACE VECTORIEL

- Dans l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E, la loi notée $\circ$, est une loi de composition interne (cf 6-3-2).

- Cette loi est associative (propriété générale des applications).

- Il existe un élément neutre : l'application identique de E (homothétie vectorielle de rapport 1).

- Tout automorphisme, f de E possède un symétrique pour la loi $\circ$: la bijection réciproque f^{-1} (cf Théorème 11 - paragraphe 6-8-1).

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel, muni de la loi $\circ$, est un groupe, appelé GROUPE LINEAIRE de cet espace vectoriel.

EXERCICES - CHAPITRE 6

Exercice 1 -

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$. On considère les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ définis par les égalités suivantes : $\vec{v}_1 = \vec{i} + 3\vec{j}$ $\quad \vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$

1°) Démontrer que ces deux vecteurs forment une base de $\mathcal{P}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans cette base ?

2°) On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ suivants :

$E_1 = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \in \mathcal{P} \quad \vec{u} = \lambda \vec{v}_1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$

$E_2 = \{ \vec{u} \mid \vec{u} \in \mathcal{P} \quad \vec{u} = \mu \vec{v}_2 \quad \mu \in \mathbb{R} \}$

Démontrer que $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$. Soit $\vec{u}_1$ un vecteur non nul de E_1, $\vec{u}_2$ un vecteur non nul de E_2, démontrer que : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ forme une base de $\mathcal{P}$. Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$?

3°) Soit f l'application linéaire de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, au vecteur $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ associe le vecteur

$$f(\vec{u}) = \frac{1}{5}(4y-7x)\vec{i} + \frac{1}{5}(7y-6x)\vec{j}$$

Déterminer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ et démontrer que ces deux vecteurs forment une base de $\mathcal{P}$.

Calculer $(f \circ f)(\vec{u})$. En déduire que f est bijective. Déterminer f^{-1}.

Démontrer l'équivalence suivante : $f(\vec{u}) = \vec{u} \iff y = 3x$. En déduire que $E_1 = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in \mathcal{P} \quad f(\vec{u}) = \vec{u}\}$

Démontrer l'équivalence suivante : $f(\vec{u}) = -\vec{u} \iff 2y = x$. En déduire que $E_2 = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in \mathcal{P} \quad f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

Si $\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$ déterminer $f(\vec{u})$ dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Retrouver que $f \circ f = id\, g$

Exercice 2 -

Un plan vectoriel est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit m un paramètre réel, on considère l'application linéaire f_m de E dans E définie par :

$$\begin{cases} f_m(\vec{i}) = \vec{i} - (m+3)\vec{j} \\ f_m(\vec{j}) = -2m\,\vec{i} - m\vec{j} \end{cases}$$

A - Première partie

1°) Etudier suivant les valeurs de m la dépendance linéaire des secteurs $f_m(\vec{i})$, $f_m(\vec{j})$.

2°) Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Calculer les composantes de $f_m(\vec{u})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

3°) Déterminer, suivant les valeurs de m, le noyau N_m de f_m.

B - Deuxième partie

On suppose dans cette partie que m = 0 et on considère l'application linéaire f_o de E dans E.

1°) Déterminer le noyau N_o de f_o et en préciser une base.

2°) On désigne par I_o l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de E qui sont l'image par f_o d'au moins un vecteur $\vec{u}$ de E.

a/ Déterminer I_o et en préciser une base

b/ Démontrer que tout élément $\vec{w}$ de I_o est invariant par f_o c'est-à-dire que : $w \in I_o$, $\forall \vec{w}$ $\quad f_o(\vec{w}) = \vec{w}$.

3°) Soit $\vec{i}' = \vec{j}$ et $\vec{j}' = \vec{i} - 3\vec{j}$

a/ Démontrer que $(\vec{i}', \vec{j}')$ est une base de E. En déduire que tout vecteur $\vec{u}$ de E peut s'écrire $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in N_o$ et $\vec{u}_2 \in I_o$.

b/ Calculer $f_o(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Donner une construction géométrique de $f_o(\vec{u})$ connaissant $\vec{u}$.

C - Troisième partie

Dans cette partie m = 1 et on considère l'application linéaire f_1 de E dans E.

1°) Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Calculer les composantes de $f_1(\vec{u})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit a un paramètre réel. On appelle D_a l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f_1(\vec{u}) = a\vec{u}$.

Déterminer D_a suivant les valeurs de a. A cet effet, on montrera qu'il existe deux valeurs distinctes de a que l'on notera a_1 et a_2 $(a_1 < a_2)$ pour lesquelles D_{a_1} et D_{a_2} sont des droites vectorielles que l'on préc et que, pour $a \neq a_1$ et $a \neq a_2$, D_a est réduit à $\{\vec{0}_E\}$.

3°) Soit $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$

a/ Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E et vérifier que $\vec{e}_1 \in D_{a_1}$, $\vec{e}_2 \in D_{a_2}$. En déduire que tout vect $\vec{u}$ de E peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{u} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \text{ avec } \vec{U}_1 \in D_{a_1} \text{ et } \vec{U}_2 \in D_{a_2}.$$

b/ En utilisant les résultats précédents, démontrer que : $f_1(\vec{u}) = -3\vec{U}_1 + 3\vec{U}_2$. Donner une construction géométrique de $f_1(\vec{u})$ connaissant $\vec{u}$.

Exercice 3 -

A - Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E. Soit f une application linéaire de E dans lui-même définie par : $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases}$

1°) Démontrer que f est un automorphisme de E.

2°) Soit I l'application identique de E. Démontrer qu'il existe des réels λ tels que le noyau E_λ de l'endomorphisme $f-\lambda I$ ne soit pas $\{\vec{0}\}$. Donner, pour chacun de ces réels λ, une base de E_λ.

3°) Déterminer $f^{-1}(\vec{e}_1)$ et $f^{-1}(\vec{e}_2)$.

B - On suppose que E est l'ensemble des fonctions polynômes t, de degré inférieur ou égal à 2, définis sur $\mathbb{R}$ par : $x \in \mathbb{R}$, $\forall x$ $t(x) = ax^2 + (2a+b)x + b$ où a et b sont des réels.

1°) Déterminer une base de E.

2°) Déterminer le transformé par f de l'élément t_o de E défini par : $x \in \mathbb{R}_1$ $\forall x$ $t_o(x) = 2x^2 + 5x + 1$

3°) On considère le sous-espace vectoriel Δ de E défini par $b = 3a$.

Démontrer que Δ est une droite vectorielle de E dont on donnera un vecteur directeur.

Exercice 4 -

Soit F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques définies dans $\mathbb{R}$. On désigne par f_o, f_1, f_2 les trois éléments de F respectivement définis pour tout x réel par : $f_o(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = xe^{-x}$, $f_2(x) = x^2e^{-x^2}$. P désignant un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'ensemble E des fonctions numériques définies, pour tout x réel, par : $f(x) = e^{-x}.P(x)$.

1°) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F et que (f_o, f_1, f_2) est une base de E.

2°) On considère l'application D qui, à toute fonction f de E, associe sa fonction dérivée $f' = D(f)$.

a) Démontrer que D est un automorphisme de E

b) Soit φ l'élément de E défini par : $\varphi = af_o + bf_1 - 2f_2$, a et b étant deux réels fixés.
Déterminer la fonction f de E telle que $D(f) = \varphi$.

3°) Soit E_1 le sous-ensemble de E formé des éléments $\varphi_{a,b} = af_o + bf_1 - 2f_2$ quand a et b décrivent $\mathbb{R}$.
E_1 est-il un sous-espace vectoriel de E ? E_1 est-il stable pour D ?

4°) On pose $D^2 = D\circ D$. Démontrer que E_1 est stable pour D^2. Existe-t-il des éléments de E_1 invariants par D^2 ?

5°) Soit Φ l'élément de E défini pour tout x réel par : $\Phi(x) = -2e^{-x}(1+x+x^2)$
On pose $\Phi_1 = D^2(\Phi)$ et pour tout entier naturel n non nul, $\Phi_{n+1} = D^2(\Phi_n)$.

a) Démontrer que, quel que soit n, Φ_n peut s'écrire : $\Phi_n = a_n f_o + b_n f_1 - 2f_2$ où a_n et b_n sont deux entiers relatifs.

b) Etablir les relations : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n - 4 \\ b_{n+1} = 8 + b_n \end{cases}$

c) Calculer b_n puis a_n en fonction de n.

Exercice 5 -

Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On rappelle que F, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel est un espace vectoriel.

Soit f_1 , f_2 , f_3 , f_4 les 4 éléments de F définis par :

$f_1(x) = e^x \cos x$ $\qquad$ $f_3(x) = x\, e^x \cos x$

$f_2(x) = e^x \sin x$ $\qquad$ $f_4(x) = x\, e^x \sin x$

e est la base de la fonction logarithme népérien.

A - Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x(a \cos x + b \sin x + c\, x \cos x + d\, x \sin x)$$

où a, b, c, d décrivent $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de F.

2. Démontrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.

(On pourra par exemple utiliser $f(0)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\pi)$, $f(\frac{3\pi}{2})$)

3. Démontrer que tout élément f de E possède une dérivée f' qui appartient aussi à E.

Exprimer les composantes (a', b', c', d') de f' dans la base B en fonction des composantes $(a, b, c,$ de f dans cette base.

4. Soit L l'application de E dans E qui, à tout élément f de E associe f', fonction dérivée de f

- Démontrer que L est un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.
- Déterminer le noyau de l'endomorphisme L et démontrer que L est bijectif.
- Déduire de ce qui précède que tout élément f de E admet une primitive φ et une seule appartenant à E

Exprimer les composantes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de φ dans la base B, en fonction des composantes (a, b, c, d) de f dans cette base.

En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} e^x(\cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x)\,dx$$

B - Soit E_1 l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x\,(a\cos x + b\sin x) \qquad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

1. Démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que $B_1 = (f_1, f_2)$ est une base de E_1.

2. Soit t un réel donné.

A tout élément f de E_1, on associe la fonction f_t définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_t(x) = f(x + t)$$

a) Démontrer que f_t est élément de E_1.

Exprimer les composantes (a', b') de f_t dans la base B_1 en fonction de t et des composantes (a, b) de f dans cette base.

b) Soit φ l'application de E_1 dans E_1 qui, à tout élément f de E_1, associe f_t.

Démontrer que φ est un endomorphisme de E_1.

c) Déterminer la matrice de φ dans la base B_1. L'endomorphisme φ est-il bijectif ?

CHAPITRE 7

MATRICE ASSOCIEE A UNE APPLICATION LINEAIRE

7-1 MATRICE ASSOCIEE A UNE APPLICATION LINEAIRE

7-1-2 Approche de la notion

Soit E et F deux espaces vectoriels réels,

$\mathcal{B} = (\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (\vec\varepsilon_1, \vec\varepsilon_2)$ une base de F.

Soit f l'application linéaire de E vers F

définie par :

$$\begin{cases} f(\vec e_1) = 5\,\vec\varepsilon_1 + 4\,\vec\varepsilon_2 \\ f(\vec e_2) = -\sqrt{2}\,\vec\varepsilon_1 + \vec\varepsilon_2 \\ f(\vec e_3) = \frac{7}{2}\,\vec\varepsilon_2 \end{cases}$$

On écrit, souvent, les composantes des vecteurs en colonne sous la forme :

$$f(\vec e_1)\ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad f(\vec e_2)\ \begin{bmatrix} -\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad f(\vec e_3)\ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Le tableau : $\begin{bmatrix} 5 & -\ 2 & 0 \\ 4 & 1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

est la "*matrice de f relativement au couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$*"

Notation : on notera cette matrice : $M\left[f, (\mathcal{B}, \mathcal{B}')\right]$

On dira qu'il s'agit d'une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

Il est très important de remarquer que la 1ère colonne correspond aux composantes de $f(\vec e_1)$, la 2ème colonne aux composantes de $f(\vec e_2)$, la 3ème colonne aux composantes de $f(\vec e_3)$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(\vec e_1) & f(\vec e_2) & f(\vec e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} \vec\varepsilon_1 \\ \vec\varepsilon_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

7-1-2 Exemples

* Soit E et F deux espaces vectoriels réels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$.

Soit f l'application linéaire de E vers F définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 2\,\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 \\ f(\vec{e}_2) = 3\,\vec{\varepsilon}_1 + 4\,\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{e}_3) = -\,\vec{\varepsilon}_2 - 2\,\vec{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$M\,[f,(\mathcal{B},\mathcal{B}')] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice à trois lignes et trois colonnes ; on dit qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre

* Soit E et F deux espaces vectoriels réels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$

Soit f l'application linéaire de E vers F définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = -\vec{\varepsilon}_1 + \sqrt{3}\;\vec{\varepsilon}_3 \\ f(\vec{e}_2) = 2\sqrt{3}\,\vec{\varepsilon}_2 + 4\,\vec{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$M\,[f,(\mathcal{B},\mathcal{B}')] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

C'est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes.

7-1-3 Remarque importante

Si E = F et si, de plus, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on notera $M(f,\mathcal{B})$, au lieu de $M\,[f,(\mathcal{B},\mathcal{B})]$ *la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$*

7-1-4 Composantes de l'image d'un vecteur

Soit E et F deux espaces vectoriels réels, par exemple de dimension 3.

Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E et $B' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ une base de F.

Une application linéaire f de E vers F a pour matrice relativement aux bases B et B' :

$$M(f, B, B') = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Le premier indice désigne le numéro de la ligne, le second indice le numéro de la colonne où se trouve le coefficient considéré.

Une telle matrice est parfois notée de façon abrégée :

$$M(f, B, B') = \begin{bmatrix} a_{i,j} \end{bmatrix}$$

Cette matrice signifie que :

$$f(\vec{e}_1) = a_{1,1}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,1}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,1}\,\vec{\varepsilon}_3$$
$$f(\vec{e}_2) = a_{1,2}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,2}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,2}\,\vec{\varepsilon}_3$$
$$f(\vec{e}_3) = a_{1,3}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,3}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,3}\,\vec{\varepsilon}_3$$

Soit $\vec{u}$ un vecteur de E tel que :

$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$; désignons par $f(\vec{u})$ son image par f telle que : $f(\vec{u}) = x'\vec{\varepsilon}_1 + y'\vec{\varepsilon}_2 + z'\vec{\varepsilon}_3$. La linéarité de f permet d'écrire :

$$f(\vec{u}) = x\, f(\vec{e}_1) + y\, f(\vec{e}_2) + z\, f(\vec{e}_3)$$

$$f(\vec{u}) = x\,(a_{1,1}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,1}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,1}\,\vec{\varepsilon}_3) + y\,(a_{1,2}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,2}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,2}\,\vec{\varepsilon}_3) + z\,(a_{1,3}\,\vec{\varepsilon}_1 + a_{2,3}\,\vec{\varepsilon}_2 + a_{3,3}\,\vec{\varepsilon}_3)$$

$$f(\vec{u}) = (a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z)\vec{\varepsilon}_1 + (a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z)\vec{\varepsilon}_2 + (a_{3,1}\,x + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z)\vec{\varepsilon}_3$$

d'où
$$\begin{cases} x' = a_{1,1}\,x + a_{1,2}\,y + a_{1,3}\,z \\ y' = a_{2,1}\,x + a_{2,2}\,y + a_{2,3}\,z \\ z' = a_{3,1}\,x + a_{3,2}\,y + a_{3,3}\,z \end{cases}$$

Les composantes de $f(\vec{u})$ constituent la matrice-colonne $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

Celles de $\vec{u}$ la matrice-colonne $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. On note alors le système ci-dessus sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

soit
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M(f, B, B') \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

<u>Nota</u> : La définition de la multiplication des matrices (paragraphe 7-3) permettra de justifier complètement cette notation.

7-2 ADDITION DES MATRICES CARREES D'ORDRE 2

7-2-1 <u>Définition</u>

Une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant choisie dans le plan vectoriel E, soit f et g deux endomorphismes de E. Désignons par A et B les matrices associées respectivement à f et g relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

Désignons par s l'application linéaire (f+g) :

$$s(\vec{e}_1) = (f + g)(\vec{e}_1) = f(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_1) \quad \text{donc} \quad s(\vec{e}_1) = (a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2) + (a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2)$$

soit $s(\vec{e}_1) = (a + a')\,\vec{e}_1 + (b + b')\,\vec{e}_2$

De même :

$$s(\vec{e}_2) = (f + g)(\vec{e}_2) = (c + c')\,\vec{e}_1 + (d + d')\,\vec{e}_2$$

La matrice de s, relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :

$$S = \begin{bmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$

> La matrice S est appelé "somme des matrices A et B".
> On écrit S = A + B.

Nous noterons donc : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$

7-2-2 Propriétés de l'addition

> L'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2 muni de l'addition a une structure de groupe abélien isomorphe à $[\mathcal{L}(E, E)\ +]$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ un élément de l'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2. Le plan vectoriel E_2 étant muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ il existe un, et un seul, endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$, est A.

La bijection de $\mathcal{L}(E, E)$ vers M_2 ainsi définie permet de munir M_2 d'une structure de groupe additif, isomorphe à celle de $\mathcal{L}(E, E)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}(E, E), +) \arrow[rr, leftrightarrow, "\theta"] & & (M_2, +) \\
f \arrow[rr, leftrightarrow, "\theta"] & & A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\
g \arrow[rr, leftrightarrow, "\theta"] \arrow[d, "\text{addition}"'] & & B = \begin{bmatrix} a & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \arrow[d, "\text{addition}"] \\
f + g \arrow[rr, leftrightarrow] & & A + B = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}
\end{tikzcd}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ appelée *matrice nulle* est élément neutre de $(M_2, +)$. La matrice $\begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$ est <u>l'opposée</u> de la matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

7-3 MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN REEL

7-3-1 Définition

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme f du plan vectoriel E, relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Nous nous proposons de définir la matrice, relativement à $\mathcal{B}$, de l'application λf (λ désignant un réel). Il suffit de déterminer les images par λf des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$(\lambda f)(\vec{e}_1) = \lambda.\ f(\vec{e}_1) = \lambda(a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2) = (\lambda a)\,\vec{e}_1 + (\lambda b)\,\vec{e}_2$$

$$(\lambda f)(\vec{e}_2) = \lambda.\ f(\vec{e}_2) = \lambda(c\,\vec{e}_1 + d\,\vec{e}_2) = (\lambda c)\,\vec{e}_1 + (\lambda d)\,\vec{e}_2$$

La matrice associée à (λf) relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}$$

Nous noterons donc :

$$\boxed{\lambda \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}}$$

7-3-2 Structure de l'ensemble $(M_2\ , +, .)$

La bijection définie au paragraphe 7-2-2 permet de munir $(M_2\ , +, .)$ d'une structure d'espace vectorie isomorphe à $(\mathcal{L}(E, E), +, .)$.

> L'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2 muni de l'addition et de la multiplication par un réel a une structure d'espace vectoriel réel isomorphe à $(\mathcal{L}(E, E), +, .)$.

7-4 MULTIPLICATION DES MATRICES CARREES D'ORDRE 2

7-4-1 Définition

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1\ , \vec{e}_2)$ est une base du plan vectoriel E et soit $A = M(f,\mathcal{B})$ et $B = M(g,\mathcal{B})$ les matri respectives de f et g relativement à la base $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$

Nous nous proposons de déterminer la matrice $C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ associée à g of. Il suffit de déterminer $(g \circ f)(\vec{e}_1)$ et $(g \circ f)(\vec{e}_2)$:

$$(g \circ f)(\vec{e}_1) = g\,[f(\vec{e}_1)] = g[a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2] = ag(\vec{e}_1) + bg(\vec{e}_2)$$

$$= a\,[a'\,\vec{e}_1 + b'\,\vec{e}_2] + b\,[c'\,\vec{e}_1 + d'\,\vec{e}_2]$$

$$= (aa' + bc')\,\vec{e}_1 + (ab' + bd')\,\vec{e}_2$$

$$(g \circ f)(\vec{e}_2) = g\,[f(\vec{e}_2)] = g\,[c\,\vec{e}_1 + d\,\vec{e}_2] = cg(\vec{e}_1) + dg(\vec{e}_2)$$

$$= c\,[a'\,\vec{e}_1 + b'\,\vec{e}_2] + d[c'\,\vec{e}_1 + d'\,\vec{e}_2]$$

$$= (ca' + dc')\,\vec{e}_1 + (cb' + dd')\,\vec{e}_2$$

La matrice C est $\begin{bmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix}$

Nous noterons donc :

$$\begin{bmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

La matrice C est appelée produit de la matrice B par la matrice A. On écrit $C = B \times A$ ou $C = BA$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemples

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

On constate qu'en général $\boxed{AB \neq BA}$

7-4-2 Propriété de la multiplication

L'ensemble M_2 des matrices carrées d'ordre 2 muni de l'addition et de la multiplication a une structure d'anneau non commutif, unitaire, non intègre.

L'ensemble des applications linéaires d'un plan vectoriel E_2 dans lui-même muni de l'addition et de la composition, a une structure d'anneau non commutatif et unitaire (Cf paragraphe 6-7-2).

E_2 étant muni d'une base B, il existe une, et une seule matrice, notée F, associée à un endomorphisme f de E_2 (cf paragraphe 7-1).

Des définitions de l'addition et de la composition des applications linéaires d'une part, de l'addition et de la multiplication des matrices d'autre part, il résulte l'isomorphisme d'anneaux schématisé comme suit :

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{L}(E_2, E_2), +, 0]} \arrow[rr, leftrightarrow, "\circ"] & & (M_2, +, \times) \\
f \arrow[rr, leftrightarrow, "\circ"] & & F \\
g \arrow[rr, leftrightarrow, "\circ"] \arrow[d, "\text{addition}"] \arrow[dd, bend right, "\text{loi notée } 0"'] & & G \arrow[d, "\text{addition}"'] \arrow[dd, bend left, "\text{multiplication}"] \\
f+g = g+f \arrow[rr, leftrightarrow, "\circ"] & & F+G = G+F \\
g \circ f \arrow[rr, leftrightarrow, "\circ"] & & G \times F
\end{tikzcd}$$

Remarque

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cet exemple montre que $(M_2, +, \times)$ est non intègre.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 7

Exercice 1

Le plan vectoriel P est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit f l'application linéaire de P dans lui-même dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

1° Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $f(\vec{u}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ et $(f \circ f)(\vec{u}) = x''\vec{i} + y''\vec{j}$. Calculer x', y' puis x'', y'' en fonction de x et y. Que peut-on en conclure ?

2° Déterminer l'ensemble I des vecteurs invariants par f, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de P tels que $f(\vec{u}) = \vec{u}$. Préciser une base de I.

3° Déterminer le noyau $\mathcal{N}$ de f, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de P tels que $f(\vec{u}) = \vec{O}$. Préciser une base de $\mathcal{N}$.

4° Soit $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} + 3\vec{j}$

a) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de P.

b) Ecrire la matrice F' de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

5° Faire une figure mettant en évidence I, $\mathcal{N}$, un vecteur arbitraire $\vec{u}$ et son transformé $f(\vec{u})$. Quelle est la nature géométrique de f ?

Exercice 2

Soit E un plan vectoriel et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E. Une application linéaire $f_{a,b}$ de E dans E admet pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{bmatrix}$$

où a et b sont des réels donnés.

1° Pour quelles valeurs de a et b, $f_{a,b}$ est-elle un automorphisme de E ? Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le noyau de $f_{a,b}$.

2° On se propose d'étudier l'ensemble P des vecteurs $\vec{u}$ de E vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$, où λ est un réel.

a) On suppose que $a = b$. Quelle est la nature de l'application $f_{a,a}$? Préciser alors λ et P.

b) On suppose que $a \neq b$. Démontrer que, pour deux valeurs λ_1 et λ_2 de λ, il existe des vecteurs $\vec{u}$ non nuls répondant à la question.
Soit D_1 l'ensemble des vecteurs $\vec{u}_1$ tels que $f(\vec{u}_1) = \lambda_1\vec{u}_1$ et D_2 l'ensemble des vecteurs $\vec{u}_2$ tels que $f(\vec{u}_2) = \lambda_2\vec{u}_2$.

Démontrer que D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E dont on indiquera une base.

3° Revenant au cas général, on pose $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$. Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E. Ecrire la matrice $M'_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

4° Déterminer la nature géométrique des applications $f_{0,1}$, $f_{1,0}$, $f_{1,1}$, $f_{1,-1}$, $f_{-1,1}$.

Exercice 3

Soit E un plan vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^3 = f \circ f \circ f = id_E$ (id_E est l'application identique de E) .

1° Calculer le déterminant de f . En déduire que f est un automorphisme de E .

2° Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$

a) Etant donné un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base de E , on pose $f(\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont réels.
Ecrire $f^2(\vec{v})$ sur la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Démontrer que s'il existe un vecteur $\vec{u}$, non nul, tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$, alors $f = id_E$.

3° On suppose $f \neq id_E$.

a) Démontrer que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, les vecteurs $\vec{u}, f(\vec{u})$ forment un système libre.

b) En déduire que si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, $(\vec{u}, f(\vec{u}))$ est une base de E .

c) Démontrer que relativement à cette base, la matrice de f est

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices M de la forme $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ où a et b sont des réels. Soit $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1° a) Démontrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels.

b) Démontrer que $\{I, A\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$.

c) Démontrer que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau unitaire. Est-ce un corps ?

2° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $M = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Déterminer, suivant les valeurs de a et b , l'image de f et le noyau de f , notés respectivement $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.

3° Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}$ vérifiant la relation $M \times M = M$.

Démontrer que la matrice $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ est la matrice, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ d'une projection vectorielle de direction D' sur une droite D . Déterminer les droites D et D' .

4° Déterminer les matrices M , telles que $M \times M = I$.

Démontrer que la matrice $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$ est la matrice, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ d'une symétrie vectorielle de direction Δ' , par rapport à une droite Δ . Déterminer les droites Δ et Δ' .

Exercice 5

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et f l'application linéaire de $\vec{P}$ dans lui-même dont la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1° Déterminer les réels α tels qu'il existe au moins un vecteur $\vec{u}$ non nul de $\vec{P}$ vérifiant $f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$.

2° Déterminer l'ensemble $\vec{E}_1$ des vecteurs $\vec{v}$ et l'ensemble $\vec{E}_2$ des vecteurs $\vec{w}$ qui vérifient respectivement :

$$f(\vec{v}) = -\vec{v} \quad \text{et} \quad f(\vec{w}) = 2\vec{w} .$$

3° On donne $\vec{e}_1 = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$. Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\vec{P}$. Ecrire la matrice B de f relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

4° Calculer B^2, B^3 puis par récurrence, pour tout n entier naturel non nul, B^n .

5° Soit g l'application linéaire de $\vec{P}$ dans lui-même qui transforme les vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ respectivement en les vecteurs de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $\mathbf{R}$ sa matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer $\mathbf{R}$ puis R^{-1}

b) Démontrer que : $A = RB\mathbf{R}^{-1}$

c) En déduire que : $A^n = \mathbf{R}B^nR^{-1}$

6° On considère la suite réelle (u_n) de terme général u_n définie par la donnée de u_o et u_1 et de la relation de récurrence : $n \in \mathbb{N}, \forall n \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$

Pour tout entier naturel n , on associe à u_n la matrice notée X_n définie par : $X_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$

a) Démontrer que : $n \in \mathbb{N}, \forall n \quad X_{n+1} = AX_n$

b) En déduire que : $n \in \mathbb{N}, \forall n \quad X_{n+1} = A^{n+1}X_o$

c) Calculer u_{n+2} en fonction de u_o, u_1 et n .

Exercice 6

Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par l'égalité : $x \in \mathbb{R}, \forall x$: $f(x) = (ax+b)e^{2x} + (cx+d)e^{-2x}$ où a, b, c, d sont des réels.

1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2° Démontrer que les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies par les égalités : $f_1(x) = xe^{2x}$, $f_2(x) = e^{2x}$, $f_3(x) = xe^{-2x}$ et $f_4(x) = e^{-2x}$ forment une base de l'espace vectoriel E .

3° Soit P l'ensemble des applications paires de E , soit I l'ensemble des applications impaires de E .

a) Déterminer les ensembles P et I .

b) Démontrer que les applications h_1 et h_2 définies par les égalités : $h_1(x) = xe^{2x} - xe^{-2x}$ et $h_2(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ forment une base de l'espace vectoriel P et que les applications h_3 et h_4 définies par les égalités : $h_3(x) = xe^{2x} + xe^{-2x}$ et $h_4(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ forment une base de l'espace vectoriel I .

4° Soit E_1 l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par l'égalité : $f(x) = (ax+b)e^{2x}$ où a et b sont réels.

a) Démontrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E .

b) Démontrer que les applications f_1 et f_2 forment une base de E_1.

c) Démontrer que pour tout élément f de E_1 , la fonction dérivée f' de f est aussi élément de E_1 .

Soit g l'application de E_1 dans lui-même telle que $g(f) = f'$. Démontrer que g est linéaire. Déterminer la matrice de g relativement à la base (f_1, f_2) . En déduire que g est un automorphisme de E_1 .

d) Soit g^{-1} l'application réciproque de g . Ecrire la matrice de g^{-1} relativement à la base (f_1, f_2) . En déduire $\varphi = g^{-1}(f)$. Que représente φ pour la fonction f ?

Exercice 7

Soit T l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. A toute fonction polynôme A de T on associe le polynôme $\varphi(A)$ tel que : $x \in \mathbb{R}$, $\forall x$ $[\varphi(A)](x) = A(x) + (x+1)A'(x)$ où A' désigne la fonction dérivée de A .

1° Démontrer que φ est un endomorphisme de T .

2° Soit f_1, f_2, f_3 les éléments de T définis tout x réel par : $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 1$. Déterminer $\varphi(f_1), \varphi(f_2), \varphi(f_3)$. En déduire $\varphi(A)$ lorsque A est définie pour tout x réel par : $A(x) = ax^2 + bx + c$. Quelle est la matrice Φ_1 associée à l'application linéaire φ dans la base (f_1, f_2, f_3) ?

3° On considère les fonctions polynômes P_1, P_2, P_3 de T définies pour tout x réel par :
$P_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $P_2(x) = x + 1$ et $P_3(x) = 1$

a) Démontrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de T .

b) Démontrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que : $\varphi(P_1) = \lambda_1 P_1$, $\varphi(P_2) = \lambda_2 P_2$, $\varphi(P_3) = \lambda_3 P_3$. Calculer les nombres réels α, β, γ tels que le polynôme A défini pour tout x réel par : $A(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrive : $A = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. Ecrire la matrice M de changement de base permettant d'obtenir les composantes (a, b, c) en fonction de (α, β, γ) .

c) Si $A = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, calculer $\varphi(A)$ en fonction de P_1, P_2, P_3 . Quelle est la matrice Φ_2 associée à l'endomorphisme φ dans la base (P_1, P_2, P_3) ?

Exercice 8

A - Il est rappelé que l'ensemble $\mathcal{M}_{2\times 2}$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que ce même ensemble muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire, la matrice unité étant

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On donne la matriee $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit E l'ensemble des matrices M de la forme $M = aA + bI$ où a et b sont des nombres réels arbitraires.

1\. a) Etablir que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension deux.

b) Démontrer la relation $A^2 - 2A + I = 0$,

où 0 désigne la matrice nulle.

En déduire que E est une partie stable de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ pour la multiplication et que E est muni d'une structure d'anneau commutatif unitaire.

c) Etablir que A est une matrice inversible et que la matrice inverse A^{-1} appartient à E. Toute matrice M est-elle inversible ?

2\. a) Résoudre dans E l'équation de la variable M: $M^2 = M$

b) Etablir que si M n'est pas inversible, $M^2 = 0$

3\. a) On pose $A^o = I$, $A^1 = A$

et pour tout n entier, $n \geqslant 2$, $A^n = A^{n-1} \times A$.

Calculer A^2, A^3, A^4 en fonction de A et de I.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$A^n = a_n A + b_n I$$

où a_n et b_n sont deux entiers relatifs que l'on déterminera.

c) A l'entier naturel non nul n on associe la matrice

$$B_n = \sum_{i=1}^{i=n} A^i = A^1 + A^2 + \ldots + A^i + \ldots + A^n$$

Donner en fonction de n, les coordonnées de B_n dans la base (A, I) de E.

B - Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

et l'on désigne par $f_{a,b}$ l'endomorphisme de P de matrice $M = aA + b\,I$ dans la base

1\. a) Comment faut-il choisir a et b pour que $f_{a,b}$ ne soit pas bijective ?

b) Démontrer que toutes les applications $f_{a,b}$ non bijectives, distinctes de $f_{0,0}$, admettent le mêm noyau K et le même ensemble image Im.

Déterminer K et Im ; que remarque-t-on pour ces deux ensembles ?

2. Soit $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ deux vecteurs de P.

a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P.

b) On considère l'application $f_{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}}$. Déterminer la matrice de cette application linéaire dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$.

c) Soit s et p les endomorphismes de P suivants : s est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite D de base $\vec{i}$; p est la projection vectorielle sur la droite D' de base $\vec{v}$ dans la direction de la droite D'' de base $\vec{U}$.

Etablir que : $f_{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}} = p \circ s$

(o désignant la loi de composition des applications).

Chapitre 8

PROJECTIONS VECTORIELLES

AUTOMORPHISMES INVOLUTIFS

8- 1 PROJECTIONS VECTORIELLES

8-1-1 Définition

E désignant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$

Exemples

L'application identique de E est un projecteur.

L'application nulle qui à tout élément $\vec{u}$ de E associe $\vec{0}_E$ est un projecteur.

8.1.2 Théorème

Si p est un projecteur de E, le noyau et l'image de p sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

On désigne respectivement par N(p) et p(E) le noyau et l'image de p.

* On sait que $\vec{0}_E \in N(p) \cap p(E)$. Soit $\vec{v} \in N(p) \cap p(E)$:

$$\vec{v} \in N(p) \Longleftrightarrow p(\vec{v}) = \vec{0}_E$$

$$\vec{v} \in p(E) \Longleftrightarrow [\exists \vec{u},\ p(\vec{u}) = \vec{v}]$$

Alors : $(p \circ p)(\vec{u}) = p[p(\vec{u})] = p(\vec{v}) = \vec{0}_E$

Or, par hypothèse, $p \circ p = p$, donc :

$$p(\vec{u}) = \vec{0}_E \quad \text{et par suite} \quad \vec{v} = \vec{0}_E$$

Il en résulte que : $N(p) \cap p(E) = \{\vec{0}_E\}$

D'autre part :

$$\vec{u} \in E,\ (\forall \vec{u}) \qquad \vec{u} = p(\vec{u}) + [\vec{u} - p(\vec{u})]$$

Posons $p(\vec{u}) = \vec{u}_1$ et $\vec{u} - p(\vec{u}) = \vec{u}_2$

Il est clair que $\vec{u}_1 \in p(E)$

De plus : $p\left[\vec{u} - p(\vec{u})\right] = p(\vec{u}) - (p \circ p)(\vec{u}) = \vec{0}_E$

donc $\vec{u}_2 \in N(p)$

En conclusion $N(p)$ et $p(E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

* La réciproque est en général fausse.

8.1.3 Théorème

> Un endomorphisme p de l'espace vectoriel E est un projecteur de E si, et seulement si, l'ensemble I des vecteurs invariants par p est l'ensemble image $p(E)$

* Démontrons que si p est un projecteur de E, $I = p(E)$

. Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de I, $p(\vec{u}) = \vec{u}$ donc $\vec{u} \in p(E)$

. Quel que soit l'élément $\vec{v}$ de $p(E)$, il existe $\vec{w}$ élément de E, tel que $p(\vec{w}) = \vec{v}$

Alors $p(\vec{v}) = (p \circ p)(\vec{w}) = p(\vec{w}) = \vec{v}$ donc $\vec{v} \in I$

* Réciproquement :

Démontrons que si $I = p(E)$ alors p est un projecteur de E

Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, $p(\vec{u}) \in p(E)$

Or si $p(E) = I$, $p(\vec{u}) \in I$ donc $(p \circ p)(\vec{u}) = p(\vec{u})$ et p est un projecteur de E.

8.1.4 Théorème

> Etant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, notés E_1 et E_2, il existe un, et un seul, projecteur p de E tel que :
>
> $$p(E) = E_1 \quad \text{et} \quad N(p) = E_2$$

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E il existe un couple unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de $E_1 \times E_2$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Soit p l'application de E dans E qui à $\vec{u}$ associe $\vec{u}_1$

* p est linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de E. Il existe un élément unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et un élément unique $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $E_1 \times E_2$ tels que :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Alors quels que soient les réels α et β

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \beta(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

soit : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1) + (\alpha\vec{u}_2 + \beta\vec{v}_2)$

D'où : $p(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1 = \alpha p(\vec{u}) + \beta p(\vec{v})$

* Noyau de p

Soit $\vec{u}$ élément de E tel que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ élément de $E_1 \times E_2$.

$\vec{u} \in N(p) \Longleftrightarrow p(\vec{u}) = \vec{0}$

$\vec{u} \in N(p) \Longleftrightarrow \vec{u}_1 = \vec{0}$

$\vec{u} \in N(p) \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{u}_2$ donc $N(p) = E_2$

* Image de p

Soit $\vec{v} \in p(E)$, il existe $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in E_1 \times E_2$ tel que : $p(\vec{u}) = p(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{u}_1 = \vec{v}$

donc $\vec{v} \in E_1$

Réciproquement, si $\vec{v} \in E_1$, $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ et $p(\vec{v}) = \vec{v}$

donc $\vec{v} \in p(E)$

Par suite : $p(E) = E_1$

* p est un projecteur

Soit $\vec{u} \in E$. Il existe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ élément de $E_1 \times E_2$ tel que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Alors :

$p(\vec{u}) = \vec{u}_1$ (par définition)

et $(p \circ p)(\vec{u}) = p(\vec{u}_1) = p(\vec{u}_1 + \vec{0}) = \vec{u}_1 = p(\vec{u})$

donc $p \circ p = p$

* p est unique

Supposons qu'il existe un projecteur p' tel que $p'(E) = E_1$ et $N(p') = E_2$. Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, il existe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ élément de $E_1 \times E_2$ tel que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Alors :

$$p'(\vec{u}) = p'(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = p'(\vec{u}_1) + p'(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{0} = p(\vec{u})$$

donc $p' = p$

8.1.5 Projections vectorielles

a/ Définition

Etant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, E_1 et E_2, d'un espace vectoriel E, on appelle projection vectorielle de E sur E_1 de direction E_2 le projecteur p de E tel que $p(E) = E_1$ et $N(p) = E_2$

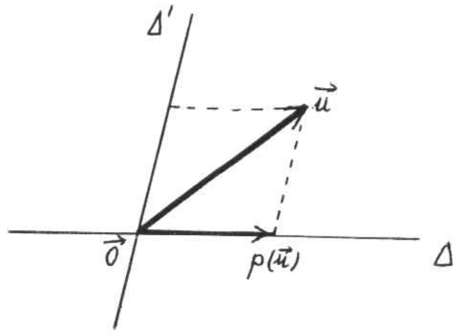
<u>Rappel</u> : p(E) est l'ensemble des vecteurs invariants par p (Cf 9.1.3).

b/ <u>Projections vectorielles dans un espace vectoriel de dimension 1</u>

p(E)	N(p)	Caractérisation de p
E	$\{\vec{0}\}$	$p = Id_E$
$\{\vec{0}\}$	E	$p : \vec{u} \longrightarrow \vec{0}$

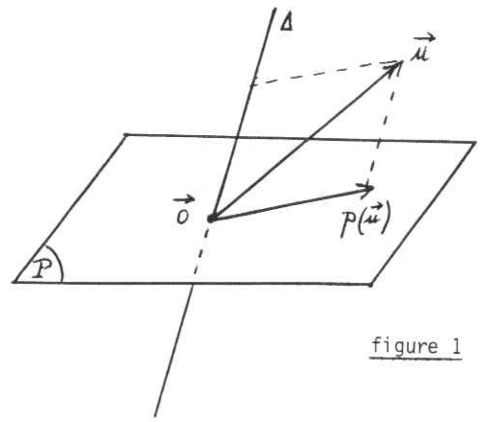
c/ <u>Projections vectorielles dans un espace vectoriel de dimension 2</u>

p(E)	N(p)	Caractérisation de p
E	$\{\vec{0}\}$	$p = Id_E$
$\{\vec{0}\}$	E	$p : \vec{u} \longrightarrow \vec{0}$
droite vectorielle Δ	droite vectorielle $\Delta' \neq \Delta$	p : projection vectorielle de E sur Δ de direction Δ' (figure ci-contre)

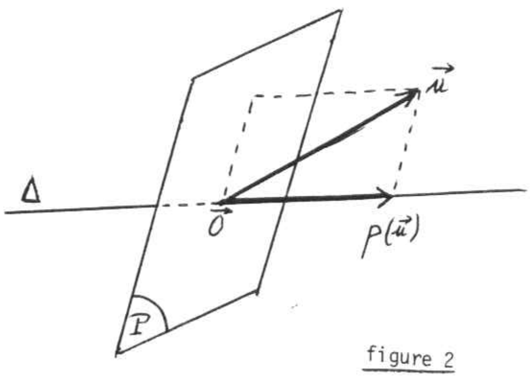


d/ <u>Projections vectorielles dans un espace de dimension 3</u>

p(E)	N(p)	Caractérisation de p
E	$\{\vec{0}\}$	$p = Id_E$
$\{\vec{0}\}$	E	$p : \vec{u} \longrightarrow \vec{0}$
plan vectoriel $\mathcal{P}$	droite vectorielle $\Delta \not\subset \mathcal{P}$	p : projection vectorielle de E sur $\mathcal{P}$ de direction Δ (figure 1 ci-contre)
droite vectorielle Δ	plan vectoriel $\mathcal{P}(\Delta \not\subset \mathcal{P})$	p : projection vectorielle de E sur Δ de direction P (figure 2 ci-contre)



<u>figure 1</u>



<u>figure 2</u>

8.2 AUTOMORPHISMES INVOLUTIFS

8.2.1 Définition

On appelle automorphisme involutif d'un espace vectoriel E tout automorphisme de E tel que $f \circ f = Id_E$

Exemples

L'application identique de E est un automorphisme involutif de E.

L'homothétie vectorielle de E de rapport (-1) est un automorphisme involutif de E.

8.2.2 Composé de deux automorphismes involutifs de E

Le composé de deux automorphismes involutifs d'un espace vectoriel E est un automorphisme qui n'est pas nécessairement involutif

Exemple

Soit f et g deux endomorphismes du plan vectoriel E_2 muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, définis par leurs matrices $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

On vérifie aisément que f et g sont deux automorphismes involutifs de E_2 et que $g \circ f$ a pour matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

Le fait que $A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ prouve que $(g \circ f)$ n'est pas involutif

8.2.3 Théorème

Si f est un automorphisme involutif de E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, le sous-ensemble E_1 des vecteurs de E invariants par f et le sous-ensemble E_2 des vecteurs de E se transformant en leurs opposés par f sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

* E_1 est un sous-espace vectoriel de E

$E_1 \neq \emptyset$ car $\vec{0} \in E_1$

Quels que soient α, β, réels, $\vec{u}$, $\vec{v}$, éléments de E_1 :

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

donc $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in E_1$

* E_2 est un sous-espace vectoriel de E

$E_2 \neq \emptyset$ car $0 \in E_2$

Quels que soient α, β, réels, $\vec{u}$, $\vec{v}$, éléments de E_2 :

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha(-\vec{u}) + \beta(-\vec{v})$

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = -(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$

donc $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \in E_2$

* $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ car $\vec{0} \in E_1 \cap E_2$. Soit $\vec{u} \in E_1 \cap E_2$:

$\vec{u} \in E_1 \Longrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$
$\vec{u} \in E_2 \Longrightarrow f(\vec{u}) = -\vec{u}$
d'où $\vec{u} = \vec{0}$ et $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

D'autre part :

$\vec{u} \in E$, $(\forall \vec{u})$ $\vec{u} = \frac{1}{2}\left[\vec{u} + f(\vec{u})\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{u} - f(\vec{u})\right]$

Posons $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\left[\vec{u} + f(\vec{u})\right]$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{2}\left[\vec{u} - f(\vec{u})\right]$

$f(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{u}) + (f \circ f)(\vec{u})\right] = \frac{1}{2}\left[f(\vec{u}) + \vec{u}\right] = \vec{u}_1$ car fof = f et $f(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{u}) - (fof)(\vec{u})\right] = \frac{1}{2}\left[f(\vec{u}) - \vec{u}\right] =$

Par suite E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

8.2.4 Théorème

> Etant donnés deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 supplémentaires d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, il existe un, et un seul, automorphisme involutif de E, dont la restriction à E_1 soit l'identité et la restriction à E_2 l'homothétie vectorielle de rapport (-1)

Puisque E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, il existe un couple unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de $E_1 \times E_2$ tel que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$

Soit f l'application de E dans lui même qui au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$

* f est un endomorphisme de E

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux éléments de E. Il existe un élément unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et un élément unique $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $E_1 \times E_2$ tels que : $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Alors étant donnés deux réels quelconques α, β

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \beta(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1) + (\alpha\vec{u}_2 + \beta\vec{v}_2)$$

d'où $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = (\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{v}_1) - (\alpha\vec{u}_2 + \beta\vec{v}_2)$

et $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + \beta(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

soit $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

✱ La restriction de f à E_1 est l'identité

Soit $\vec{u}_1 \in E_1$, $\vec{u}_1 \in E$ et on peut écrire :

$\vec{u}_1 = \vec{u}_1 + \vec{0}$ d'où $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 - \vec{0} = \vec{u}_1$

✱ La restriction de f à E_2 est l'homothétie vectorielle de rapport (-1)

Soit $\vec{u}_2 \in E_2$, $\vec{u}_2 \in E$ et on peut écrire :

$\vec{u}_2 = \vec{0} + \vec{u}_2$ d'où $f(\vec{u}_2) = \vec{0} - \vec{u}_2 = -\vec{u}_2$

✱ f est involutif

Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, il existe un élément unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de $E_1 \times E_2$ tel que :

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Alors :

$f(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ (par définition)

et $(fof)(\vec{u}) = f(\vec{u}_1) - f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - (-\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}$

donc $fof = Id_E$

✱ f est unique

Supposons qu'il existe g automorphisme involutif tel que la restriction de g à E_1 soit l'identité et la restriction de g à E_2,soit l'homothétie vectorielle de rapport (-1). Alors, quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E, il existe $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ élément de $E_1 \times E_2$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ d'où :

$g(\vec{u}) = g(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = g(\vec{u}_1) + g(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = f(\vec{u})$ et par suite $g = f$

8.2.5 Symétries vectorielles

a/ Définition

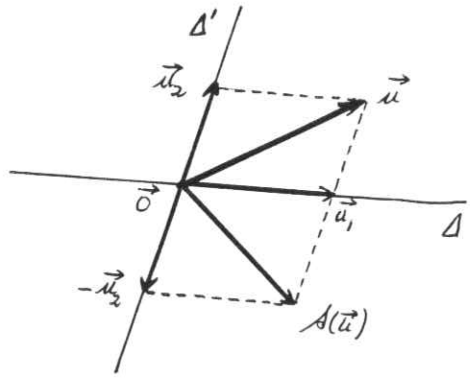
> Etant donnés deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E, on appelle symétrie vectorielle de E, par rapport à E_1, de direction E_2, l'automorphisme involutif λ de E tel que E_1 soit le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par λ et E_2 le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés par λ en leurs opposés

b/ Symétries vectorielles dans un espace vectoriel de dimention 1

E_1: vecteurs invariants	E_2 : vecteurs transformés en leurs opposés	Caractérisation de λ
E	{0}	$\lambda = Id_E$
{0}	E	$\lambda = h_{-1}$ (homothétie vectorielle de rapport -1)

c/ Symétries vectorielles dans un espace vectoriel de dimension 2

E_1	E_2	Caractérisation de s
E	$\{\vec{0}\}$	$s = Id_E$
$\{\vec{0}\}$	E	$s = h-1$
droite vectorielle Δ	droite vectorielle $\Delta'(\Delta' \neq \Delta)$	s : symétrie vectorielle de E par rapport à Δ de direction Δ' (figure ci-contre)



d/ symétries vectorielles dans un espace vectoriel de dimension 3

E_1	E_2	Caractérisation de s
E	{0}	$s = Id_E$
{0}	E	$s = h_{-1}$
plan vectoriel P	droite vectorielle $\Delta (\Delta \not\subset P)$	s : symétrie vectorielle de E par rapport à P de direction Δ (figure 1)
droite vectorielle Δ	plan vectoriel $P(\Delta \not\subset P)$	s : symétrie vectorielle de E par rapport à Δ de direction P (figure 2)

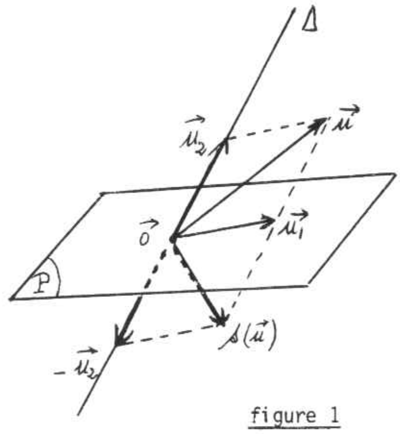


figure 1

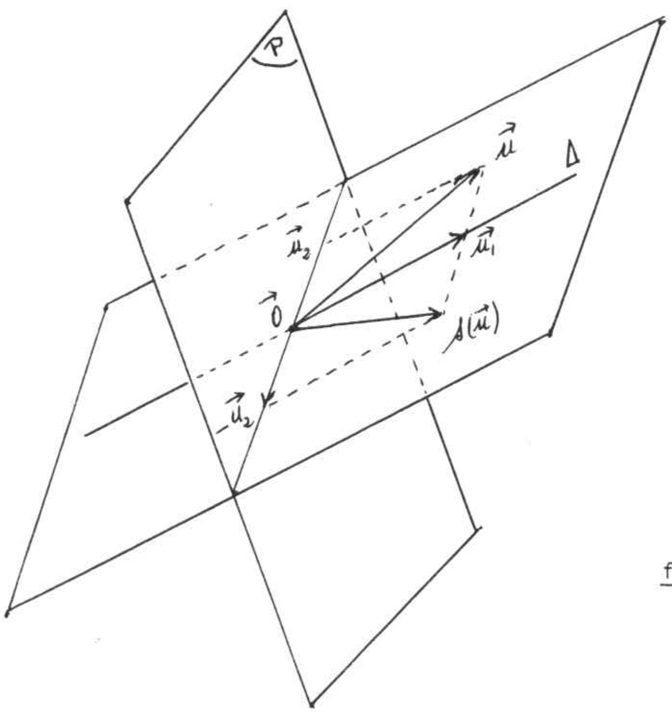


figure 2

Exercices sur le chapitre 8

Exercice 1

1°) Soit le plan vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et p l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{2}{3} \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Démontrer que p est une projection vectorielle de E dont on précisera les éléments caractéristiques.

2°) Plus généralement, soit f un endomorphisme de E distinct de l'identité et de l'application nulle dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$F = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Démontrer que f est un projecteur si, et seulement si,

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ \text{et} \\ ad = bc \end{cases}$$

3°) On désigne par Id_E l'application identique de E. Démontrer que :

a/ un endomorphisme f de E est un projecteur de E si, et seulement si $(Id_E - f)$ est un projecteur de E

b/ un endomorphisme f de E est une projection vectorielle de E si, et seulement si $(2f - Id_E)$ est une symétrie vectorielle de E.

Exercice 2

Soit le plan vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$F = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

1°) Comment doit-on choisir les réels a, b, c, d pour que f soit un automorphisme involutif de E ?

2°) m désignant un nombre réel, on considère l'ensemble des endomorphismes $\mathcal{S}_m$ de E dont les matrices relativement à la base $\mathcal{B}$ sont :

$$S_m = \begin{bmatrix} m & 1+m \\ 1-m & -m \end{bmatrix}$$

Démontrer que, quel que soit m, $\mathcal{S}_m$ est un automorphisme involutif de E.

Exercice 3

E désignant un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E. On considère la famille $\mathcal{F}$, des endomorphismes, f_m, de E dont les matrices, relativement à B, sont de la forme $\begin{bmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ où m est un réel.

1°) Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de E.

2°) Déterminer le noyau et l'image de chacun des endomorphismes de $\mathcal{F}$ qui ne sont pas des automorphismes de E.

3°) Déterminer et préciser la nature de tout endomorphisme involutif appartenant à $\mathcal{F}$

Exercice 4

L'espace vectoriel E est muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application linéaire, f, de E dans lui-même qui à tout vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur $\vec{u}'$ tel que $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

avec
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{cases}$$

1°) Quel est le noyau de f ? Qu'en déduit-on ?

2°) Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f

3°) Déterminer l'image, f(E), de E par f. En déduire la nature de f dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E. On considère l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \\ f(\vec{k}) = -\vec{k} \end{cases}$$

Déterminer la nature de f est préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 6

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.

Pour tout couple de réels (a, b) on définit un endomorphisme de $\mathcal{V}$, noté $\varphi_{(a, b)}$ dont la matrice relativement à la base B est :

$$M_{(a, b)} = \begin{bmatrix} 1+a & 1 \\ ab & 1+b \end{bmatrix}$$

On appelle Δ_1 la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\vec{i} - a\vec{j})$ et Δ_2 la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\vec{i} + b\vec{j})$.

1°) Démontrer que Δ_1 et Δ_2 sont distinctes si, et seulement si : $a + b \neq 0$.

2°) A quelle condition $\varphi_{(a, b)}$ est-il bijectif ? Dans le cas où il ne l'est pas, déterminer son noyau et son image.

3°) Calculer la matrice, relativement à la base B, de $\varphi_{(a,b)} \circ \varphi_{(a,b)}$.

Existe-t-il des endomorphismes $\varphi_{(a,b)}$ involutifs ?

4°) λ étant un réel, on appelle $\mathcal{V}_\lambda$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\mathcal{V}$ tels que $\varphi_{(a,b)}(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. Démontrer que pour deux valeurs de λ notées λ_1 et λ_2 distinctes ou confondues, $\mathcal{V}_\lambda$ contient des vecteurs non nuls. Déterminer $\mathcal{V}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{V}_{\lambda_2}$

5°) On suppose : $a + b + 2 = 0$. Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est alors la symétrie vectorielle par rapport à Δ_1 dans la direction de Δ_2

6°) On suppose : $a + b + 1 = 0$. Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est alors la projection vectorielle sur Δ_1 dans la direction de Δ_2

Exercice 7

Pour chaque couple (a, b) de R^2 distinct de (0, 0), on considère l'endomorphisme d'un espace vectoriel E, notée $\varphi_{(a,b)}$ dont la matrice, relativement à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ s'écrit :

$$M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & a+2b \end{bmatrix}$$

1°) Démontrer que $\varphi_{(a,b)}$ est bijectif si, et seulement si, (a-b) (a+3b) n'est pas nul.

2°) Si $\vec{v}$ est un vecteur de E, écrire, relativement à la base $(\vec{i},\vec{j})$, les composantes de $\varphi_{(a,b)}(\vec{v})$ en fonction de celles de $\vec{v}$.

Discuter suivant les valeurs de a et b la nature du noyau Ker $\varphi_{(a,b)}$ et de l'image Im $\varphi_{(a,b)}$. Donner, dans chaque cas, une base de Ker $\varphi_{(a,b)}$ et une base de Im $\varphi_{(a,b)}$.

3°) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) tels que $\varphi_{(a,b)}$ soit une homothétie vectorielle de E.

4°) On étudie l'endomorphisme $\varphi_{(a,b)}$ dans le cas : $a = b = \frac{1}{4}$.

Démontrer que les deux vecteurs $\vec{e}_1 = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} + 3\vec{j}$ forment une base de E.

Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme $\varphi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})}$ relativement à cette nouvelle base.

En déduire que $\varphi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})}$ est une projection vectorielle dont on précisera les éléments.

5°) On considère maintenant l'endomorphisme $\varphi_{(a,b)}$ dans le cas : a = 2, b = 1.

Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ non nuls tels qu'il existe en réel k vérifiant :

$$\varphi_{(2,1)}(\vec{u}) = k\vec{u}.$$

Exercice 8

Soit E un plan vectoriel et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E. λ désignant un nombre réel, soit φ_λ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base B est :

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 2-\lambda \\ \frac{\lambda+1}{2} & \lambda \end{bmatrix}$$

A) 1 - Pour quelles valeurs de λ, φ_λ est-elle bijective ?

2 - Déterminer suivant les valeurs de λ, le noyau de φ_λ, noté N_λ. Lorsque le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, en donner une base.

3 - Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'image de φ_λ, notée $\varphi_\lambda(E)$. En donner une base.

4 - Pour quelle valeur de λ, φ_λ est-elle involutive ?

5 - Déterminer, suivant les valeurs de λ, l'ensemble des vecteurs invariants par φ_λ. Lorsque cet ensemble est une droite vectorielle, en donner une base.

B) Etude de φ_λ pour $\lambda = -1$.

1- Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $\varphi_\lambda(\vec{u}) = -\vec{u}$.

2- Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{U}$ et N_{-1} sont supplémentaires dans E.

3- En déduire que φ_{-1} est la composée d'une projection vectorielle et d'une homothétie vectorielle que l'on déterminera.

C) Etude de φ_λ pour $\lambda = 3$.

1- Déterminer les réels k pour chacun desquels il existe un vecteur $\vec{V}$, non nul, tel que $\varphi_3(\vec{V}) = k\vec{V}$

2- Pour chaque réel k trouvé en (C - 1) déterminer l'ensemble P_k des vecteurs de E tels que $\varphi_3(\vec{V}) = k\vec{V}$. En donner une base.

3- Soit $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - 2\vec{j}$. Démontrer que $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est une base de E. Ecrire la matrice M'_3 de φ_3 relativement à la base $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$. En déduire une construction de $\varphi_3(\vec{u})$ connaissant $\vec{u}$.

D) Etude de φ_λ pour $\lambda = 0$.

Démontrer que φ_0 est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

CHAPITRE 9

FORMES MULTILINEAIRES ALTERNEES
DETERMINANTS

Nota : Nous nous contenterons dans ce chapitre, d'étudier les formes bilinéaires et trilinéaires. Les résultats établis ici demeurent vrais pour des formes p-linéaires.

9-1 FORMES BILINEAIRES

9-1-1 Définition

Soit E un espace vectoriel réel. Une application φ de E^2 vers $\mathbb{R}$ qui, au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ associe $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$, est bilinéaire si, et seulement si, elle est linéaire par rapport à $\vec{u}$ et par rapport à $\vec{v}$.

Dire que φ est linéaire par rapport à $\vec{u}$ signifie que, quels que soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ éléments de E, quels que soient les réels α, β :

$$\varphi(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}_1, \vec{v}) + \beta\varphi(\vec{u}_2, \vec{v})$$

On exprimerait de même la linéarité par rapport à $\vec{v}$ par :

$$\varphi(\vec{u}, \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda\varphi(\vec{u}, \vec{v}_1) + \mu\varphi(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

Une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel réel E est *alternée* si, et seulement si, quels que soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, éléments de E : $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}) = 0$

Remarque La condition ci-dessus est bien sûr équivalente $\varphi(\vec{v}, \vec{u}) = -\varphi(\vec{u}, \vec{v})$

9-1-2 Propriétés

P_1 Si φ est une forme bilinéaire sur E, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E

$$\varphi(\vec{0}, \vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \vec{0}) = 0$$

En effet : $\varphi(\vec{0}, \vec{v}) = \varphi(0.\vec{u}, \vec{v})$

donc : $\varphi(\vec{0}, \vec{v}) = 0\,\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ (par linéarité)

d'où $\varphi(\vec{0}, \vec{v}) = 0$

P_2 | Une forme bilinéaire φ définie sur E est alternée si, et seulement si, quel que soit $\vec{u}$ élément de E, $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

* Si φ est bilinéaire alternée

$\forall \vec{u} \quad \varphi(\vec{u}, \vec{u}) + \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \qquad$ donc $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

* Si φ est bilinéaire telle que $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0$

alors : $(\forall \vec{u})\ (\forall \vec{v}) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

donc $\quad (\forall \vec{u})\ (\forall \vec{v}) \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}) + \varphi(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}) = 0$

Soit $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}) + \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

et, puisque par hypothèse $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = \varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

il vient : $\varphi(\vec{v}, \vec{u}) + \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

donc φ est alternée.

9-1-3 Formes bilinéaires alternées sur un espace de dimension 2

Soit E un plan vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

9-1-3-1 Théorème

Toute forme bilinéaire alternée définie sur un plan vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est déterminée par la donnée du réel $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Si $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ nous avons :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2)$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = xx'\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + xy'\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + yx'\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + yy'\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

Or φ étant alternée, $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$

donc : $\boxed{\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - yx')\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}$

Nous admettrons la réciproque dont la démonstration, au demeurant simple, demande un calcul assez long.

9-1-3-2 Théorème

L'ensemble Φ des formes bilinéaires alternées définies sur un plan vectoriel réel E, a une structure d'espace vectoriel de dimension 1.

On démontre aisément que $(\Phi, +, \cdot)$ a une structure d'espace vectoriel réel. De plus, si φ_1 est une forme bilinéaire alternée, non nulle, et si φ_2 est une autre forme bilinéaire alternée, quels que soient $\vec{u}, \vec{v}$ éléments de E :

$$\varphi_1(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - yx') \quad \varphi_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \neq 0$$

$$\varphi_2(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - yx') \quad \varphi_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

donc il existe un réel α tel que

$$\varphi_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \alpha \varphi_1(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

et par suite $\quad \varphi_2 = \alpha \varphi_1$

$\{\varphi_1\}$ est une base de $(\Phi, +, \cdot)$

donc $\dim \Phi = 1$.

9-1-4 Théorème

> φ désignant une forme bilinéaire alternée, non nulle, sur un plan vectoriel E, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont linéairement dépendants si, et seulement si :
>
> $$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

* Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont linéairement dépendants, l'un d'eux est combinaison linéaire de l'autre. Par exemple, il existe un réel α tel que :

$\vec{v} = \alpha\vec{u}$. Mais alors :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \alpha\vec{u}) = \alpha\, \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

* Réciproquement, si $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 \quad$ et $\quad \vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - yx')\ \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Donc $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Longrightarrow xy' - yx' = 0$

- Supposons x, y nuls, alors $\vec{u} = \vec{0}$ et le système $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié
- Supposons que l'un des nombres x, y soit non nul. Par exemple $x \neq 0$: posons $\frac{x'}{x} = \alpha$.

  Si $xy' - yx' = 0 \quad$ alors $\quad xy' - \alpha xy = 0$

  Soit $x(y' - \alpha y) = 0 \quad$ d'où $\quad y' = \alpha y$

Par suite : $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié

Remarque

> Il résulte immédiatement de ce théorème que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si, $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

9-2 DETERMINANTS D'ORDRE DEUX

9-2-1 Définition

Le déterminant, par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un plan vectoriel réel E, est la forme bilinéaire alternée définie par $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$

Si $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\,\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$

le déterminant du bivecteur $(\vec{u}, \vec{v})$ est le réel, noté $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})$, tel que :

$$\boxed{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}$$

Remarque : Par abus de langage on confond la forme bilinéaire et l'image de $(\vec{u}, \vec{v})$ par cette forme.

9-2-2 Dépendance ou indépendance linéaire de deux vecteurs

Théorème 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un plan vectoriel sont linéairement dépendants si, et seulement si, $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Ceci résulte immédiatement du théorème (9-1-4).

Remarque

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un système libre si, et seulement si : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E.

Deux vecteurs $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ sont linéairement dépendants si, et seulement si, les trois déterminants $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ sont nuls.

* $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié si, et seulement si l'un des deux vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire de l'autre. Par exemple $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. Alors :

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} xy' - yx' = x(\alpha y) - y(\alpha x) = 0 \\ yz' - zy' = y(\alpha z) - z(\alpha y) = 0 \\ zx' - xz' = z(\alpha x) - x(\alpha z) = 0 \end{cases}$$

* Réciproquement, supposons
$$\begin{cases} xy' - yx' = 0 \\ yz' - y'z = 0 \\ zx' - xz' = 0 \end{cases}$$

• Supposons que $x = y = z = 0$. Alors $\vec{u} = \vec{0}$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

• Si l'un des nombres x, y, z est non nul, par exemple $x \neq 0$.

Posons $\frac{x'}{x} = \alpha$. Alors :

$$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ x'z - xz' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(y' - \alpha y) = 0 \\ x(\alpha z - z') = 0 \end{cases}$$

donc $y' = \alpha y$ et $z' = \alpha z$.

Par suite $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ et le système $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié.

Remarque :

Deux vecteurs $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ forment un système libre si, et seulement si, l'un au moins des déterminants $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$ est non nul.

9-3 FORMES TRILINEAIRES

9-3-1 Définition

Soit E un espace vectoriel réel. Une application φ de E^3 vers $\mathbb{R}$ qui au triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ associe le réel noté $\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est trilinéaire si, et seulement si, elle est linéaire par rapport à chacun des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

La linéarité par rapport à $\vec{u}$ s'exprime par le fait que, quels que soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, quels que soient α, β réels :

$$\varphi(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha\,\varphi(\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + \beta\,\varphi(\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$$

On exprimerait de même la linéarité par rapport à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$:

$$\varphi(\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}) = \alpha\,\varphi(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}) + \beta\,\varphi(\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w})$$

et $$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2) = \alpha\,\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1) + \beta\,\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2)$$

9-3-2 Forme trilinéaire alternée

> Une forme trilinéaire φ définie sur un espace vectoriel réel E est alternée si, et seulement si, quels que soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, éléments de E :
>
> $$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = 0$$
>
> $$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = 0$$
>
> $$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$$

9-3-3 Propriétés

P_1

> Si φ est une forme trilinéaire sur E, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de E :
>
> $$\varphi(\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{0}, \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}) = 0$$

En effet, par exemple, $\varphi(\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{0}.\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et par linéarité $\varphi(\vec{0}.\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \times \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

P_2

> Une forme trilinéaire φ définie sur E est alternée si, et seulement si, elle est nulle pour tout triplet dont deux vecteurs sont égaux.

* Si φ est une forme trilinéaire alternée, nous avons par exemple :

$$\forall \vec{u}, \quad \forall \vec{w} \qquad \varphi(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) + \varphi(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$$

d'après la définition du paragraphe 9-2-2 donc $\varphi(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$

* Réciproquement, si φ est trilinéaire et nulle pour tout triplet dont deux vecteurs sont égaux, quels que soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, nous avons par exemple :

$$\varphi(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) + \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Or $\varphi(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = \varphi(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Donc $\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 0$. On démontrerait de même les deux autres relations.

9-3-3 Formes trilinéaires alternées sur un espace de dimension 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

9-3-3-1 Théorème

> Toute forme trilinéaire alternée φ définie sur E, espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est déterminée par la donnée du réel $\underline{\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$

* Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E et

$$\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \quad ; \quad \vec{v} = x'\,\vec{e}_1 + y'\,\vec{e}_2 + z'\,\vec{e}_3$$

$\vec{w} = x''\,\vec{e}_1 + y''\,\vec{e}_2 + z''\,\vec{e}_3$, trois éléments de E. Donc :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3,\ x'\,\vec{e}_1 + y'\,\vec{e}_2 + z'\,\vec{e}_3,\ x''\,\vec{e}_1 + y''\,\vec{e}_2 + z''\,\vec{e}_3)$$

Il résulte des propriétés précédentes que :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (x\,y'\,z'' + x'\,y''\,z + x''\,y\,z' - x''\,y\,z' - x\,y''\,z' - x'\,y\,z'').\ \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

* Réciproquement, on démontre par un calcul assez long mais facile, que l'application qui à $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ associe $(x\,y'\,z'' + x'\,y''\,z + x''\,y\,z' - x''\,y\,z' - x\,y''\,z' - x'\,y\,z'').\ \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une forme trilinéaire alternée.

9-3-3-2 Théorème

> L'ensemble Φ des formes trilinéaires alternées définies sur un espace vectoriel E de dimension 3, a une structure d'espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration analogue à celle de 9-1-3-2.

9-4 DETERMINANTS D'ORDRE 3

9-4-1 Définition

> Le déterminant, par rapport à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace vectoriel E, est la forme trilinéaire alternée définie par $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$.

Si $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$, $\vec{v} = x'\,\vec{e}_1 + y'\,\vec{e}_2 + z'\,\vec{e}_3$, $\vec{w} = x''\,\vec{e}_1 + y''\,\vec{e}_2 + z''\,\vec{e}_3$

$\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - x'yz'' - xy''z'$ que l'on note :

$$\text{dét}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Remarque 1 : Par abus de langage on confond la forme trilinéaire et l'image de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par cette forme.

Remarque 2

Toute forme trilinéaire alternée φ définie sur E_3 est donc telle que, quel que soit le trivecteur $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\boxed{\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \times \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

9-4-2 Règle de Sarrus

Une règle simple (connue sous le nom de règle de Sarrus) permet de calculer aisément un déterminant d'ordre trois. Si :

$$\text{dét}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

on écrit sous le ' déterminant ses deux premières lignes

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{matrix}$$

Les produits des éléments des trois diagonales "descendantes" sont affectés du signe +

Les produits des éléments des trois diagonales "ascendantes" sont affectés du signe -

$$\text{dét}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'') - (x''y'z + xy''z' + yx'z'').$$

9-4-3 Développement d'un déterminant d'ordre 3 par rapport à une colonne

✱ Soit $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$, $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$, $\vec{w} = x''\vec{e}_1 + y''\vec{e}_2 + z''\vec{e}_3$. Soit à calculer l'image de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par la forme trilinéaire alternée φ telle que $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3\,, \vec{v}, \vec{w})$$
$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w}) + y\,\varphi(\vec{e}_2, \vec{v}, \vec{w}) + z\,\varphi(\vec{e}_3, \vec{v}, \vec{w})$$

✱ Calculons : $\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w})$

$$\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{e}_1, x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3\ ,\ x''\vec{e}_1 + y''\vec{e}_2 + z''\vec{e}_3)$$
$$\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w}) = y'z''\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + z'y''\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$$
$$\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w}) = (y'z'' - z'y'')\ \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$
$$\varphi(\vec{e}_1, \vec{v}, \vec{w}) = y'z'' - z'y''$$

Nous constatons que le nombre $\Delta_1 = y'z'' - y''z'$ est le déterminant obtenu en supprimant la 1ère ligne et la 1ère colonne du déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boxed{x} & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Δ_1 est appelé mineur de Δ relatif à x

* De même :

$$\varphi(\vec{e}_2, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{e}_2, x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 , x''\vec{e}_1 + y''\vec{e}_2 + z''\vec{e}_3)$$

$$\varphi(\vec{e}_2, \vec{v}, \vec{w}) = x'z'' \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) + z'x'' \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$$

$$\varphi(\vec{e}_2, \vec{v}, \vec{w}) = -(x'z'' - x''z') \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$\varphi(\vec{e}_2, \vec{v}, \vec{w}) = - \Delta_2$$

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ \boxed{y} & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

où Δ_2 désigne le mineur de relatif à y

* Enfin, un calcul analogue conduit à :

$$\varphi(\vec{e}_3, \vec{v}, \vec{w}) = (x'y'' - x''y') \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$\varphi(\vec{e}_3, \vec{v}, \vec{w}) = \Delta_3$$

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ \boxed{z} & z' & z'' \end{vmatrix}$$

où Δ_3 désigne le mineur de relatif à z

En conclusion :

$$\text{dét } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x \Delta_1 - y \Delta_2 + z \Delta_3$$

soit :

$$\boxed{\text{dét } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}$$

Remarque 1

On peut développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne où n'importe quelle colonne suivant une méthode analogue à condition d'affecter le mineur de chaque élément du signe indiqué à sa place dans le tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

* En développant par rapport à la 2è colonne :

$$\Delta = -3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-3)(2) + 4(6) - 5(-4) = 38$$

* En développant par rapport à la 3è ligne :

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2(-5) - 5(-4) + 4(7) = 38$$

9-5 PROPRIETES DES DETERMINANTS D'ORDRE 3

9-5-1 Propriété 1

Un déterminant est nul si deux colonnes sont égales.

Cette propriété résulte immédiatement de la propriété P_2 du paragraphe 9-3-3.

9-5-2 Propriété 2

Un déterminant dont une colonne ne contient que des zéros est nul.

Cette propriété résulte de la propriété P_1 du paragraphe 9-3-3

9-5-3 Propriété 3

Un déterminant est changé en son opposé si on échange deux colonnes.

Cette propriété résulte de la définition même d'une forme trilinéaire alternée.

9-5-4 Propriété 4

Si on multiplie par un réel α les éléments d'une colonne d'un déterminant, ce déterminant est multiplié par α

Cette propriété résulte du fait que quelle que soit la forme trilinéaire alternée φ :

$$\varphi(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha\, \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

9-5-5 Propriété 5

On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

Ceci résulte de la propriété :

$$\varphi(\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$ des formes trilinéaires alternées.

9-5-6 Propriété 6

On ne change pas la valeur d'un déterminant en échangeant lignes et colonnes

On constate ce résultat par un calcul direct

Conséquence

Toutes les propriétés précédentes relatives aux colonnes sont aussi valables pour les lignes.

9-6 DETERMINANT ASSOCIE A UNE MATRICE CARREE

9-6-1 Définition

Soit f un endomorphisme de E_3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$

On rappelle que : $f(\vec{e}_1) = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3$, $f(\vec{e}_2) = a'\vec{e}_1 + b'\vec{e}_2 + c'\vec{e}_3$ et $f(\vec{e}_3) = a''\vec{e}_1 + b''\vec{e}_2 + c''\vec{e}_3$

Le déterminant $\text{dét}\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

est appelé déterminant de la matrice A et noté $\text{dét}\, A$ ou $|A|$

Remarque 1

De la remarque 2 du paragraphe 9-4-1 il résulte que, quelle que soit la forme trilinéaire alternée φ définie sur E_3 :

$$\varphi\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] = \text{dét}\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

soit $$\boxed{\varphi\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] = |A|\, \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

Remarque 2

Plus généralement, quelle que soit la forme trilinéaire alternée φ définie sur E, pour tout trivecteur $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$\boxed{\varphi[f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w})] = |A| \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

En effet, désignons par Φ la forme trilinéaire alternée définie sur E_3 par :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \varphi[f(\vec{u}), f(\vec{v}), f(\vec{w})]$$

De la remarque 2 du paragraphe 9-4-1 il résulte que :

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \times \Phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Or d'après la remarque 1 ci-dessus

$$\Phi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \varphi[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)] = |A| \times \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

donc $\Phi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \times |A| \times \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Mais $\varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \times \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

donc $\Phi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |A| \times \varphi(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

9-6-2 Théorème

> Si f et g sont deux endomorphismes de E_3 dont les matrices relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont respectivement A et B alors :
>
> $$|BA| = |B| \times |A|$$

En effet, posons $f(\vec{e}_1) = \vec{e}\,'_1$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}\,'_2$, $f(\vec{e}_3) = \vec{e}\,'_3$

et $g(\vec{e}\,'_1) = \vec{e}\,''_1$, $g(\vec{e}_2) = \vec{e}\,''_2$, $g(\vec{e}_3) = \vec{e}\,''_3$

La matrice associée à l'endomorphisme $(g \circ f)$ est BA relativement à la base $\mathcal{B}$

Par définition :

$$|BA| = \text{dét}(\vec{e}\,''_1, \vec{e}\,''_2, \vec{e}\,''_3) = \text{dét}[g(\vec{e}\,'_1), g(\vec{e}\,'_2), g(\vec{e}\,'_3)]$$

D'après la remarque 2 ci-dessus :

$$\text{dét}[g(\vec{e}\,'_1), g(\vec{e}\,'_2), g(\vec{e}\,'_3)] = |B| \ \text{dét}(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$$

d'où : $|BA| = |B| \ \text{dét}(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$

Or $\text{dét}(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = |A|$ par définition. Donc :

$$|BA| = |B| \times |A|$$

Remarque

Si on considère l'endomorphisme (f o g), il a pour matrice associée, relativement à la base $\mathcal{B}$, AB

On a donc :

$$|AB| = |A| \times |B|$$

La multiplication dans $\mathbb{R}$ étant commutative, il en résulte que :

$$|AB| = |BA|$$

bien qu'en général les matrices AB et BA soient distinctes.

Remarque

Nous savons qu'une matrice d'ordre 3, A, est inversible si, et seulement si, il existe une matrice A^{-1} telle que :

$$A \times A^{-1} = I \quad \text{où} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après le théorème précédent :

$$\text{dét } A \times \text{dét } A^{-1} = 1 \quad \text{donc dét } A \neq 0 \text{ et de plus}$$

$$\boxed{\text{dét } A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A}}$$

> Si une matrice A est inversible alors son déterminant est non nul.

9-6-3 Critère d'indépendance de 3 vecteurs de E_3

> Trois vecteurs d'un espace vectoriel réel, E_3, de dimension 3 sont linéairement indépendants si, et seulement si, le déterminant de ces trois vecteurs relativement à une base quelconque de E_3 est non nul.

* Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment une partie liée de E_3, alors l'un au moins d'entre eux s'écrit comme combinaison liné[aire] des deux autres. Par exemple, il existe α, β réels tels que : $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E_3, l'application de E_3 dans $\mathbb{R}$ qui, à $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ associe $\text{dét}_{\mathcal{B}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est trilinéaire alternée donc :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}_{\mathcal{B}} (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \vec{v}, \vec{w})$$

$\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha\ \text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) + \beta\ \text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une partie liée, $\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ou par contraposition :

Si $\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ alors $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une partie libre.

* Réciproquement :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E_3 et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ une partie libre de E_3. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de E_3. Il existe un automorphisme f, et un seul de E_3 défini par :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{u} \quad ; \quad f(\vec{e}_2) = \vec{v} \quad ; \quad f(\vec{e}_3) = \vec{w}$$

La matrice A de f, relativement à la base $\mathcal{B}$, a donc pour colonnes les composantes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Par conséquent : $|A| = \text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Comme f est bijective, A est inversible et d'après la remarque du paragraphe (9-6-2) $|A| \neq 0$ donc $\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

9-6-4 Théorème

> Une matrice A est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Soit A la matrice d'un endomorphisme f de E_3 relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. f est un automorphisme si, et seulement si, $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ est libre donc :

$$A \text{ inversible} \iff \left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] \text{ libre}$$

$$A \text{ inversible} \iff \text{dét}_{\mathcal{B}}\left[f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)\right] \neq 0$$

$$A \text{ inversible} \iff |A| \neq 0$$

9-7 RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE

Soit le système de trois équations à trois inconnues réelles x, y, z tel que :

$$(S) \qquad \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = \alpha \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = \beta \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z = \gamma \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs dont les composantes relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'un espace vectoriel réel de dimension 3 sont respectivement :

$$\vec{u} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{v} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{w} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

et $\vec{V}$ le vecteur dont les composantes relativement à $\mathcal{B}$ sont : $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

Le système (S) s'écrit vectoriellement :

$$\boxed{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V}}$$

Nous constatons alors que : $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{V}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}, \vec{v}, \vec{w})$

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{V}, \vec{v}, \vec{w}) = x\ \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = x\ |A|$$

De même :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{V}, \vec{w}) = y\ |A| \quad \text{et} \quad \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{V}) = z\ |A|$$

✱ Si $|A| \neq 0$: le système (S) est appelé système de CRAMER et admet une solution unique (x, y, z) telle que :

$$x = \frac{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{V}, \vec{v}, \vec{w})}{|A|} \quad ; \quad y = \frac{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{V}, \vec{w})}{|A|} \quad ; \quad z = \frac{\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{V})}{|A|}$$

✱ Si $|A| = 0$: le système n'aura des solutions que si :

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{V}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{V}, \vec{w}) = \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{V}) = 0$$

Nota Une étude plus complète de cette question est faite au chapitre 18.

9-8 INVERSION D'UNE MATRICE CARREE INVERSIBLE

Soit E_3 un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E_3, f un automorphisme de E_3 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

Le terme a_{ij} est le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Nous nous proposons de déterminer la matrice $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ telle que :

$$A \times B = I \qquad \text{où } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous sommes amenés à résoudre trois systèmes linéaires d'inconnues :

$b_{1,1}$ $b_{2,1}$ $b_{3,1}$ pour le premier

$b_{1,2}$ $b_{2,2}$ $b_{3,2}$ pour le second

$b_{1,3}$ $b_{2,3}$ $b_{3,3}$ pour le troisième

Le premier s'écrit :

$$\begin{cases} a_{1,1}\, b_{1,1} + a_{1,2}\, b_{2,1} + a_{1,3}\, b_{3,1} = 1 \\ a_{2,1}\, b_{1,1} + a_{2,2}\, b_{2,1} + a_{2,3}\, b_{3,1} = 0 \\ a_{3,1}\, b_{1,1} + a_{3,2}\, b_{2,1} + a_{3,3}\, b_{3,1} = 0 \end{cases}$$

Si nous désignons par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ les vecteurs dont les composantes relativement à la base $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$\vec{u} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix}, \quad \vec{v} \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{bmatrix}, \quad \vec{w} \begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ce système s'écrit vectoriellement : $b_{1,1}\,\vec{u} + b_{2,1}\,\vec{v} + b_{3,1}\,\vec{w} = \vec{e}_1$ et a pour solutions :

$$b_{1,1} = \frac{\text{dét}(\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{v})}{|A|} \quad ; \quad b_{2,1} = \frac{\text{dét}(\vec{u}, \vec{e}_2, \vec{w})}{|A|} \quad ; \quad b_{3,1} = \frac{\text{dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_3)}{|A|}$$

soit :

$$b_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{3,3} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$b_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & 1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$b_{3,1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}}{|A|}$$

On procède de la même façon pour les 2 autres systèmes.

Remarque 1

Ces résultats sont aussi obtenus de la façon suivante :

* On transpose $A = [a_{ij}]$ soit $A^t = [t_{ij} = a_{ji}]$

* On remplace t_{ij} par $(-1)^{i+j}\ \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} est le mineur relatif à t_{ij}

* On divise par $|A|$ le résultat obtenu.

On peut vérifier cette méthode à l'aide des résultats obtenus ci-dessus : $b_{1,1}$; $b_{2,1}$; $b_{3,1}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} ; A^t = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{bmatrix} ; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \overbrace{a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,3}}^{b_{1,1}} & \text{——} & \text{——} \\ \text{——} & & \text{——} \\ \text{——} & & \text{——} \end{bmatrix}$$

Remarque 2

Cette méthode peut être étendue à toute matrice carrée inversible.

Exercice : Déterminer A^{-1} lorsque A est donnée :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & +1 \\ -1 & 2 & 6 \\ +1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ d'où $|A| = +9$ donc A est inversible, on transpose A

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ +1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{donc } A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 10 & 8 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \\ -12 & -15 & 3 \end{bmatrix}$$

Remarque 3

Dans le cas d'une matrice 2×2 le résultat est obtenu de la façon suivante :

* On transpose A soit $A^t = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

* On calcule le déterminant mineur relatif à chaque élément de la matrice :

$$a_1 \longrightarrow b_2$$
$$a_2 \longrightarrow b_1$$
$$b_1 \longrightarrow a_2$$
$$b_2 \longrightarrow a_1$$

* On remplace chaque élément de A^t par son mineur multiplié par $(-1)^{i+j}$ où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonnes (cette multiplication par $(-1)^{i+j}$ est liée aux propriétés des permutations des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de E_2).

Soit $\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$

On divise la matrice obtenue par $|A|$ soit

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

<u>Exemple</u> : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $|A| = 1$ donc A^{-1} existe

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

On remplace chaque terme par son mineur multiplié par $(-1)^{i+j}$

Soit $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Comme $A = 1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

9-9 GROUPE DES MATRICES D'ORDRE 3 INVERSIBLES

> L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à déterminant non nul, muni de la multiplication, est un groupe isomorphe avec groupe linéaire $GL(E_3)$.

Nous savons que l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E_3, muni de la loi 0, est un groupe appelé groupe linéaire de E_3

Si A et B désignent les matrices associées respectivement à deux automorphismes f et g de E_3, (1) la matrice BA est associée à l'automorphisme (g o f).

Par hypothèse $|A| \neq 0$ et $|B| \neq 0$ donc $|BA| \neq 0$. La multiplication est donc interne dans l'ensemble M_3 des matrices carrées d'ordre 3 à déterminant non nul.

La multiplication associative dans l'ensemble M_3, des matrices carrées d'ordre 3 l'est à fortiori dans M'_3

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à M'_3 et est élément neutre pour la multiplication.

Si A appartient à M'_3, A est inversible ; soit A^{-1} son inverse : $AA^{-1} = I \Longrightarrow |A|\ |A^{-1}| = 1$ donc $|A^{-1}| \neq 0$ et A^{-1} appartient à M'_3.

(1) relativement à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

9-10 ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL

L'espace vectoriel E_3 est muni d'une base $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Désignons par $\mathbb{B}$ l'ensemble des bases de E_3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ deux bases de E_3

✱ Sur $\mathbb{B}$, désignons par r la relation définie par :

$$\mathcal{B} \; r \; \mathcal{B}' \Longrightarrow \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \times \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) > 0$$

Cette relation est évidemment réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

✱ Démontrons que cette relation d'équivalence est indépendante de la base $\mathcal{B}_0$ choisie. Soit, en effet une base $\mathcal{B}_1 = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. D'après le paragraphe 9-3-3-2, il existe λ réel non nul tel que :

$$\det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \lambda \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$\det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = \lambda \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

Par suite :

$$\det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \times \det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = \lambda^2 \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \times \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$$

donc si : $\det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \times \det_{\mathcal{B}_0} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) > 0$

Il en est de même de $\det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \times \det_{\mathcal{B}_1} (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$

✱ Il est clair qu'il existe deux classes d'équivalence et deux seulement : la classe de $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et celle de $\mathcal{B}'_0 = (\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ par exemple.

> Orienter l'espace vectoriel E_3 c'est privilégier l'une de ces deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$ que l'on qualifie de <u>base directe</u> ou <u>positive</u>.

Si l'on choisit, par exemple, $\mathcal{B}_0$ pour base directe alors toute base appartenant à la classe de $\mathcal{B}_0$ <u>est direc</u>
Toute base appartenant à la classe de $\mathcal{B}'_0$ est dite <u>rétrograde ou indirecte ou négative</u>.

<u>Nota</u> : Il est important de remarquer que la notion d'orientation n'est pas une notion euclidienne...
Comme pourrait le laisser croire la présentation actuelle des programmes de première.
La présentation proposée aux élèves de cette classe est exposée au chapitre 14.

CHAPITRE 10

CHANGEMENT DE BASE ET REDUCTION DE MATRICES

Nota : Pour ne pas introduire des difficultés de notation, tous les résultats de ce chapitre ont été établis en dimension 3. Ils demeurent vrais dans tout espace de dimension finie.

10-1 CHANGEMENT DE BASE

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E. Soit $B' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ une autre base de E telle que :

$$(1) \quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \alpha_1 \vec{e}_1 + \beta_1 \vec{e}_2 + \gamma_1 \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \alpha_2 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \gamma_2 \vec{e}_3 \\ \vec{\varepsilon}_3 = \alpha_3 \vec{e}_1 + \beta_3 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 \end{cases}$$

Soit $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Nous nous proposons de calculer les composantes (X, Y, Z) du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base B', c'est-à-dire de calculer X, Y, Z tels que : $\vec{u} = X\,\vec{\varepsilon}_1 + Y\,\vec{\varepsilon}_2 + Z\,\vec{\varepsilon}_3$. (2)

Compte tenu des relations (1) et (2) nous pouvons écrire :

$$\vec{u} = X(\alpha_1\vec{e}_1 + \beta_1\vec{e}_2 + \gamma_1\vec{e}_3) + Y(\alpha_2\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \gamma_2\vec{e}_3) + Z(\alpha_3\vec{e}_1 + \beta_3\vec{e}_2 + \gamma_3\vec{e}_3)$$

soit :

$$\vec{u} = (\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z)\vec{e}_1 + (\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z)\vec{e}_2 + (\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z)\vec{e}_3$$

On sait que la décomposition d'un vecteur relativement à une base est unique, donc :

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z \\ y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z \\ z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z \end{cases}$$

$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ étant une base, le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

est non nul. Les formules (3) permettent de déterminer de façon unique X, Y, Z.

En utilisant une notation matricielle, les relations (3) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

La matrice $P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ est appelée matrice de passage de B à B'.

Remarque De la formule $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ donnant les "anciennes" composantes en fonction des "nouvelles" on déduit : $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ donnant les "nouvelles" composantes en fonction des "anciennes".

10-2 CHANGEMENT DE BASE ET MATRICE ASSOCIEE A UNE APPLICATION LINEAIRE

Soit f un endomorphisme d'un vectoriel E.

* Dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E, désignons par A la matrice de f. A tout vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ f associe le vecteur $\vec{u}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ tel que :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

* Dans la base $B' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ de E, désignons par A' la matrice de f. Au vecteur $\vec{u} = X\vec{\varepsilon}_1 + Y\vec{\varepsilon}_2 + Z\vec{\varepsilon}_3$ f associe le vecteur $\vec{u}' = X'\vec{\varepsilon}_1 + Y'\vec{\varepsilon}_2 + Z'\vec{\varepsilon}_3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Soit $\mathcal{P}$ la matrice de passage définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{et aussi} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

(4) s'écrit : $P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ ou encore :

$$(P^{-1} P)\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = (P^{-1} AP)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$ soit (comme $P\,P^{-1} = I$)

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = P^{-1} AP \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$ et en comparant avec (5) : on a $\boxed{A' = P^{-1} AP}$

10-3 MATRICE DIAGONALISABLE, MATRICE TRIGONALISABLE

10-3-1 Matrice diagonale

* La diagonale (principale) d'une matrice carrée est constituée des coefficients qui ont même numéro de ligne et de colonne.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ a pour diagonale $\{a, e, i\}$

* Les coefficients de la diagonale sont les coefficients diagonaux.

Par définition :

> Une matrice est dite "diagonale" si les coefficients NON diagonaux sont nuls.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ et $$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ sont diagonales

mais $$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ n'est pas diagonale.

* Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et si

$$A = \begin{bmatrix} a & o & o \\ o & b & o \\ o & o & c \end{bmatrix} \text{ et } A' = \begin{bmatrix} a' & o & o \\ o & b' & o \\ o & o & c' \end{bmatrix} \quad \text{alors } A.A' = \begin{bmatrix} aa' & o & o \\ o & bb' & o \\ o & o & cc' \end{bmatrix}$$

10-3-2 Matrice triangulaire

Une matrice est "triangulaire" (supérieure) si les coefficients "sous" la diagonale sont nuls

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{est triangulaire}$$

Remarque : Une matrice diagonale est triangulaire, la réciproque est fausse

* Le produit de deux matrices triangulaires est une matrice triangulaire.

Cela résulte du calcul.

* Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

$$\text{Si} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{bmatrix} \quad \text{alors } \det A = a \begin{vmatrix} d & e \\ o & f \end{vmatrix} = a.\ d.\ f$$

en développant selon la première colonne.

10-3-3 Matrices semblables

* Deux matrices M et M' sont semblables si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $M = P^{-1}\ M'\ P$.

Exemple

Si f est une application linéaire de E dans E

M sa matrice relative à une base (B)

M' sa matrice relative à une base (B')

M et M' sont semblables d'après (10-2)

* Si M et M' sont semblables, pour tout entier n, M^n et M'^n sont semblables et de plus

si $M = P^{-1}\ M'\ P$ alors $M^n = P^{-1}\ M'^n\ P$

Démonstration par récurrence

- c'est vrai pour $n = 1$ par définition
- supposons vrai au rang $(n - 1)$: $M^{n-1} = P^{-1}\ M'^{n-1}\ P$
- au rang n, $M^n = M^{n-1}\ M$

Mais $M^{n-1} = P^{-1}\ M'^{n-1}\ P$ (hypothèse de récurrence) et $M = P^{-1}\ M'\ P$ d'où

$$\begin{aligned} M^n = (P^{-1}\ M'^{n-1}\ P)\ (P^{-1}\ M'\ P) &= P^{-1}\ M'^{n-1}\ (P\ P^{-1})\ M'\ P \\ &= P^{-1}\ M'^{n-1}\ M'\ P \\ &= P^{-1}\ M'^n\ P \end{aligned}$$

* Si M et M' sont des matrices semblables alors pour tout réel λ , $M - \lambda I$ et $M' - \lambda I$ sont semblables et si $M = P^{-1} M' P$

alors $M - \lambda I = P^{-1} (M - \lambda I) P$

I étant la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ élément neutre de la multiplication des matrices

En effet : $M - \lambda I = M - \lambda(P^{-1} P) = M - \lambda(P^{-1} I P)$

d'où $M - \lambda I = (P^{-1} M' P) - \lambda(P^{-1} I P)$

$= P^{-1} (M' - \lambda I) P$

* Deux matrices semblables ont même déterminant

En effet : $\text{dét } M = \det (P^{-1} M' P)$

$= [\det P^{-1}] [\det M'] [\det P]$

comme $[\det P^{-1}] [\det P] = 1$ on a bien :

$$\boxed{\det M = \det M'}$$

Remarque

Comme les matrices associées à un même endomorphisme f sont semblables d'après (10-2) toutes ces matrices ont même déterminant (10-3-3). Ce déterminant caractérise f on le note det f.

10-3-4 Matrice trigonalisable, Matrice diagonalisable

* Une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Une matrice est diagonalisable si il existe une matrice diagonale à laquelle elle soit semblable.

Exemple

$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car elle est semblable à M'

telle que $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = -\dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -9 & -3 & 3 \\ 16 & 12 & -8 \end{pmatrix}$.

Le calcul de M^7 par exemple, pénible en soi, devient très simple en utilisant ce qui précède et on a $M^7 = P^{-1} M'^7 P$ où le calcul de M'^7 est instantané car M' est diagonale.

D'où un intérêt de savoir à quelles conditions une matrice est trigonalisable, voire diagonalisable

10-4 VALEURS PROPRES - VECTEURS PROPRES - POLYNOME CARACTERISTIQUE

10-4-1 Introduction

* f étant un endomorphisme nous allons chercher les vecteurs $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ (λ réel donné).

* Intérêt du problème

Supposons qu'il existe une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ telle que : $f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$, $f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2$ $f(\vec{u}_3) = \lambda_3 \vec{u}_3$; dans cette base f a pour matrice :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{(matrice diagonale)}$$

donc toute matrice de f est diagonalisable ; on dit que f est diagonalisable.

Réciproquement si f est diagonalisable, il existe une base formée de vecteurs répondant à la questi

10-4-1 Vecteur propre - Valeur propre

> f étant un endomorphiseme de E_3 un vecteur non nul $\vec{u}$ est dit vecteur propre de f si, et seulement si, il existe un réel λ (appelé valeur propre) tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$
> $\vec{u}$ est un vecteur propre associé à λ.

Exemples : 1) Si f est une homothétie vectorielle de rapport λ, λ est valeur propre et, tout vecte non nul de E_3 est vecteur propre.

2) Si f est non injective, il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{0} = 0.\vec{u}$; 0 est valeur propre et les vecteurs non nuls du noyau sont vecteurs propres associés à 0.

10-4-3 Sous espace propre

* Définition

> Soit λ une valeur propre de f. Soit N_λ le sous espace vectoriel de E_3 engendré par les vecteurs propres associés à λ ; N_λ est dit sous espace propre de f associé à λ.

* Théorème

> Tout vecteur non nul de N_λ est un vecteur propre associé à λ.

Tout élément de N_λ est une combinaison linéaire de vecteurs propres associés à λ

Soit $\vec{u}$ élément de N_λ, $\vec{u}$ non nul.

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \quad \text{où } \vec{u}_1, \dots \vec{u}_n \text{ sont des vecteurs propres associés à}$$

$$f(\vec{u}) = f(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n)$$

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \alpha_2 f(\vec{u}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{u}_n) \quad \text{(f est linéaire)}$$

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 \lambda \vec{u}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \lambda \vec{u}_n$$

$$f(\vec{u}) = \lambda(\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n)$$

$$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u} \qquad \text{donc } \vec{u} \text{ appartient à } N_\lambda$$

* Théorème

N_λ est le noyau de $(f - \lambda I)$

soit $\vec{u}$ un élément de N_λ. Par définition :

$f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ donc

$$\vec{u} \in N_\lambda \iff (f(\vec{u}) - \lambda(\vec{u}) = \vec{0})$$

$$\vec{u} \in N_\lambda \iff (f - \lambda Id)\ (\vec{u}) = \vec{0}$$

$$\vec{u} \in N_\lambda \iff \vec{u} \in Ker(f - \lambda Id)$$

Remarque

N_λ est donc l'ensemble des vecteurs de E_3 tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ ($\vec{0}$ appartient à N_λ mais n'est pas vecteur propre)

* Théorème

Si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes alors $N_{\lambda_1} \cap N_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$

Soit $\vec{u}$ élément de l'intersection $N_{\lambda_1} \cap N_{\lambda_2}$

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = \lambda_1 \vec{u} \iff (\vec{u} \in N_{\lambda_1}) \\ f(\vec{u}) = \lambda_2 \vec{u} \iff (\vec{u} \in N_{\lambda_2}) \end{cases} \qquad \text{d'où } (\lambda_1 - \lambda_2)\ \vec{u} = \vec{0}$$

comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a $\vec{u} = \vec{0}$

10-4-4 Polynôme caractéristique

Théorème fondamental — Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

P_1	λ est valeur propre de f
P_2	$f - \lambda Id$ a zéro pour valeur propre
P_3	$\dim \mathcal{N}(f - \lambda Id) \geqslant 1$
P_4	$\det(f - \lambda Id) = 0$
P_5	λ est solution de l'équation en x ; $\det(f - xId) = 0$

$\boxed{P_1} \Longleftrightarrow \boxed{P_2}$ $f(\vec{u}) = \lambda(\vec{u})$ (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$)

$f(\vec{u}) - \lambda\vec{u} = \vec{0}$ d'où $(f - \lambda I)(\vec{u}) = 0\,\vec{u}$

Comme $\vec{u}$ est non nul, 0 est valeur propre de $f - \lambda Id$, ce qui équivaut encore au fait que f soit non injective

$\boxed{P_2} \Longleftrightarrow \boxed{P_3}$ d'après 6-4-2 et 6-4-3

$\boxed{P_3} \Longleftrightarrow \boxed{P_4}$ d'après 9-4-8

$\boxed{P_4} \Longleftrightarrow \boxed{P_5}$ évident.

Les valeurs propres sont donc solutions de l'équation $\det(f - xId) = 0$ et réciproquement.

Soit M une matrice de f, $M - xI$ est une matrice de $f - xId$, calculons dét $(M - xI)$

$$\text{si } M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad \text{dét}(M - xI) = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - x & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - x \end{vmatrix}$$

Le résultat est un polynôme de degré 3 noté $P(x)$ et

$$P(x) = -x^3 + x^2[a_1 + b_2 + c_3] + x[c_2 b_3 + b_1 a_2 + c_1 a_3 - a_1 b_2 - a_1 c_3 - b_2 c_3] + \det M$$

le terme constant est égal à dét M car $P(0) = \text{dét}(M - 0I) = \det M$

Si M' est une autre matrice de f, $M - xI$ et $M' - xI$ sont semblables d'après 10-3-3 et ont donc même déterminant $P(x)$. Ce polynôme P caractérise donc f ; on l'appelle le <u>polynôme caractéristique</u> de f.

<u>Remarques</u>

Les zéros de P sont donc les valeurs propres de f et réciproquement

✱ En dimension 3 $P(x)$ a au plus trois racines réelles (étant de degré 3) mais au moins une racine réelle. En effet $P : x \longmapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires P s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$

✱ Si f est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres telle que f ait pour matrice :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \text{d'où } P(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x)$$

donc $P(x)$ a tous ses zéros réels ; réciproquement s'il est nécessaire que $P(x)$ ait toutes ses racines réelles pour que f soit diagonalisable, ce n'est pas suffisant comme nous le verrons plus loin.

Exemples

Exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} - & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2- \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Ainsi $P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

* 1, - 1, 2 sont donc <u>trois valeurs propres simples</u>

Exemple 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$$

Ainsi $P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2$ ou $\lambda = 4$

* <u>2 est une valeur propre double, 4, une valeur propre simple</u>

Exemple 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -24 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 20 & -24 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -24 & 9-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24 + 20$$

$$P(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 5)$$

Ainsi $P(\lambda) = 0 \qquad \lambda = 2$ ou $\lambda = 5$

* <u>2 est une valeur propre double, 5 une valeur propre simple</u>

<u>Remarque</u> : Ces trois exemples nous conduiront ultérieurement à une étude différente.

10-5 DIAGONALISATION

Soit f un endomorphisme de E

10-5-1 Théorème

> Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de f sont linéairement indépendants.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres distinctes

$\vec{u}_1 \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres.

Considérons la famille $H_p = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ (p |1, n| N) de vecteurs propres. Démontrons par une récurrence sur l'indice p que H_n est libre.

$H_1 = (\vec{u}_1)$ est libre car $\vec{u}_1$ est non nul.

Supposons que H_{p-1} soit libre et démontrons que H_p l'est aussi. Dans le cas contraire $\vec{u}_p$ est combinais linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{p-1}$ soit $\vec{u}_p = a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_{p-1} \vec{u}_{p-1}$
Comme $\vec{u}_p$ est non nul l'un des coefficients est non nul (a_1 par exemple) et :

$$f(\vec{u}_p) = a_1 f(\vec{u}_1) + \dots + a_{p-1} f(\vec{u}_{p-1})$$
$$= a_1 \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + a_{p-1} \lambda_{p-1} \vec{u}_{p-1} \quad (1)$$

or $f(\vec{u}_p) = \lambda_p \vec{u}_p$, donc : $\quad f(\vec{u}_p) = \lambda_p a_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p a_{p-1} \vec{u}_{p-1} \quad (2)$

H_{p-1} étant libre il résulte de (1) et (2), en particulier, que $a_1 \lambda_1 = a_1 \lambda_p$; comme $a_1 \neq 0$ on obtient $\lambda_1 = \lambda_p$ ce qui est contraire à l'hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_p$. Ainsi H_p est une famille libre.

Par conséquent quel que soit p (p |1, n| N) H_p est libre et en particulier $H_n = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

<u>Remarque</u> : En dimension 3, si f a trois valeurs propres <u>distinctes</u>, les vecteurs propres assoc forment une base de E (un système libre de 3 vecteurs en dimension 3 est une base (4-3-3)).

Relativement à une base formée de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale car :

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1 \qquad f(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2 \qquad f(\vec{e}_3) = \lambda_3 \vec{e}_3 \qquad \text{d'où} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

10-5-2 Exemple 1

Nous reprenons l'exemple 1 étudié précédemment :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Les valeurs propres trouvées sont : 1, -1, 2.

et par conséquent :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Vecteurs propres

Soit $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ un vecteur propre

* Vecteur propre $\vec{u}_1$ associé à $\lambda_1 = 1$: $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1$

$$f(\vec{u}_1) - \vec{u}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow (S_1) \quad \begin{cases} -x + 7y - 6z = 0 \\ -x + 3y \qquad = 0 \\ \qquad 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

(S_1) ayant pour déterminant 0, fixons arbitrairement $\boxed{z = 2}$ (par exemple) pour déterminer un vecteur $\vec{u}_1$ non nul:

$$\text{alors : } \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_1 : \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$$

* Vecteur propre $\vec{u}_2$ associé à $\lambda_2 = -1$: $f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$

$$f(\vec{u}_2) - \vec{u}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow (S_2) \quad \begin{cases} 2x + 7y - 6z = 0 \\ -x + 5y \qquad = 0 \\ \qquad 2y - z \quad = 0 \end{cases}$$

fixons $\boxed{z = 2}$

$$\text{alors : } \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_2 : \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$$

$\ast$ Vecteur propre $\vec{u}_3$ associé à $\lambda_3 = 2$: $f(\vec{u}_3) = 2\vec{u}_3$

$$f(\vec{u}_3) - 2\vec{u}_3 = \vec{0} \Longleftrightarrow (S_3) \quad \begin{cases} -2x + 7y - 6z = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

fixons $\boxed{z = 1}$ alors : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

et $\boxed{\vec{u}_3 : \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

$\ast$ La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donc :

$$P = \left[\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3\right] = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\ast$ Déterminons maintenant P^{-1}

$$\text{Det } P = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

donc

$$P^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -6 \\ 4 & -8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & +1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & +1 \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément que :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1} \times A \times P = A'}$$

Exemple 2

Soit $\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1/2 & 2 & 3/2 \end{bmatrix}$ la matrice relativement à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

d'un endomorphisme f. Son polynôme caractéristique est après factorisation :

$P(\lambda) = (2-\lambda)^2\,(1-\lambda)$ d'où les valeurs propres 2 et 1

N_1 est la droite vectorielle de base $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$

N_2 est aussi une droite vectorielle de base $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

On ne peut donc trouver 3 vecteurs propres linéairement indépendants donc on ne peut trouver de base dans laquelle la matrice de f soit diagonale.

Remarquons que N_2 est de dimension 1 alors que l'ordre de multiplicité de la racine est 2.

10-5-3 Théorème

Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique a toutes ses racines réelles dont p valeurs propres deux à deux distinctes, d'espaces propres associés N_1, N_2, ... N_p.
Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit que la dimension de chaque espace propre N_i soit égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre i pour i = 1, 2,..., p. Nous avons alors.

$$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_p.$$

Une démonstration de ce théorème sera donnée à la fin de ce chapitre.

Exemple Reprenons l'exemple 2 du paragraphe 10-4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4$ simple
$\lambda_2 = 2$ double

Vecteurs propres

* Vecteurs propres $\vec{u}_1$ associés à $\lambda_1 = 4$

$$f(\vec{u}_1) = 4\vec{u}_1 \iff \left\{\begin{array}{l} -x - y + z = 0 \\ \quad -2y \quad = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right. \quad (S_1)$$

(S_1) a pour déterminant 0 et est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} -x - y + z = 0 \\ \quad -2y \quad = 0 \end{array}\right.$$

(1, 0, 1) est une solution de ce système

donc : $\boxed{\vec{u}_1 : \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

✱ Etude des vecteurs propres pour $\lambda_2 = 2$

$$f(\vec{u}) = 2\vec{u} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ ox + oy + oz = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad (S_2)$$

(S_2) est donc équivalent à : $x - y + z = 0$ et N_2 espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est donc un plan vectoriel. Choisissons 2 vecteurs linéairement indépendants de N_2 :

$\vec{u}_2 : \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$	$\vec{u}_3 : \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

Nous savons donc que

$\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E_3 et nous pouvons donc diagonaliser la matrice A sous la forme

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice de passage } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10-6 REDUCTION A LA FORME TRIANGULAIRE

D'après le théorème 10-5-3 une matrice n'est diagonalisable que si la dimension de l'espace propre associé à une valeur propre λ est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre. (Le polynôme caractéristique ayant toutes ses racines réelles).

10-6-1 Théorème

Si $P(x)$ a toutes ses racines réelles on peut affirmer que f est trigonalisable (et réciproquement). Ceci signifie que toute matrice de f est semblable à une matrice de la forme

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres

Nota : (on trouvera la démonstration de ce théorème en fin de chapitre).

Si λ_2 est, par exemple, une valeur propre double ($\lambda_2 = \lambda_3$) nous chercherons une forme triangulaire simplifiée, appelée, matrice de JORDAN

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

* Méthode utilisée

Nous devons donc chercher une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de E_3, telle que, pour l'endomorphisme f de E_3,

$$f(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1 \quad ; \quad f(\vec{u}_2) = \lambda_2 \vec{u}_2 \quad ; \quad f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \lambda_2 \vec{u}_3$$

Soit λ_1 une valeur propre simple de f et $\vec{u}_1$ un vecteur propre associé à λ_1 et soit λ_2 une valeur propre double et $\vec{u}_2$ un vecteur propre associé à λ_2. Ces deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement indépenda car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Supposons l'existence d'un vecteur $\vec{u}_3$ tel que $f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \lambda_2 \vec{u}_3$. Démontrons que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants.

Sinon il existe 2 réels a et b tels que $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ d'où $f(\vec{u}_3) = a\, f(\vec{u}_1) + b\, f(\vec{u}_2)$

$$f(\vec{u}_3) = (\lambda_1 a)\vec{u}_1 + (\lambda_2 b)\vec{u}_2 \quad (1)$$

$$\text{or } f(\vec{u}_3) = f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + \lambda_2 \vec{u}_3$$

$$f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + (\lambda_2 a)\vec{u}_1 + (\lambda_2 b)\vec{u}_2$$

$$f(\vec{u}_3) = (\lambda_2 a)\vec{u}_1 + (1 + \lambda_2 b)\vec{u}_2 \quad (2)$$

$\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant linéairement indépendants nous avons :

$$\begin{cases} \lambda_2 a = \lambda_1 a \\ \lambda_2 b = 1 + \lambda_2 b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(ce qui est impossible)}$$

d'où le résultat : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E_3.

Etude de l'exemple 3 :

Soit f un endomorphisme de matrice A relativement à une base $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -24 & 9 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de f sont : 5 valeur propre simple

2 valeur propre double

Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 2

Soit $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de cet espace propre.

$$f(\vec{u}) = 2\vec{u} \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ - 2y + z = 0 \\ 20x - 24y + 7z = 0 \end{cases} \qquad (S)$$

Le déterminant de ce système étant nul prenons x pour paramètre d'oũ $\begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \end{cases}$

Ainsi la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre + 2 est égale à 1, et la matrice A n'est pas diagonalisable.

<u>Remarque</u> : Le vecteur $\boxed{\vec{u}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$ est un vecteur de cet espace propre.

ii) Nous trigonaliserons la matrice A sous la forme :

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(matrice de Jordan)}$$

et chercherons trois vecteurs linéairement indépendants tels que
$$f(\vec{u}_1) = 5\vec{u}_1$$
$$f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_2$$
$$f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$$

* Nous connaissons déjà $\vec{u}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

* Cherchons $\vec{u}_3$ tel que :

$$\begin{cases} f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y = 1 \\ - 2y + z = 2 \\ 20x - 24y + 7z = 4 \end{cases} \qquad (S_1)$$

$$(S_1) \iff \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 4x + 4 \end{cases}$$

<u>fixons $x = 1$</u> d'oũ $\boxed{\vec{u}_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

* Cherchons $\vec{u}_1$ tel que

$$\begin{cases} f(\vec{u}_1) = 5\vec{u}_1 \\ \vec{u}_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{cases} \iff \begin{cases} -5x + y = 0 \\ - 5y + z = 0 \\ 20x - 24y + 4z = 0 \end{cases} \qquad (S_2)$$

$$(S_2) \iff \begin{cases} y = 5x \\ z = 5y = 25x \end{cases}$$

<u>fixons $x = 1$</u> d'oũ $\boxed{\vec{u}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$

Nous pourrons trigonaliser la matrice A sous la forme

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ la matrice de passage } P \text{ étant } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 25 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

10-7 UNE APPLICATION DE LA REDUCTION DES MATRICES : LA RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

10-7-1 Définition :

On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants tout système de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases} \qquad (S)$$

où , x, y, z, d_1 , d_2 , d_3 sont des fonctions de la variable t et a_1 , a_2 , ... c_2 , c_3 des constantes réelles.

10-7-2 Interprétation

Considérons les matrices colonnes suivantes :

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \frac{dY}{dt} : \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix} \qquad B : \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

et la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Le système (S) a alors l'écriture matricielle $\boxed{\dfrac{dY}{dt} = AY + B}$

10-7-3 Système homogène à coefficients constants

Dans ce cas $d_1 \equiv 0$; $d_2 \equiv 0$; $d_3 \equiv 0$

et nous avons : $$\boxed{\frac{dY}{dt} = AY} \qquad (1)$$

* Soit A' une matrice semblable à A. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1} AP$.

Il en résulte que :

$$P^{-1} \frac{dY}{dt} = P^{-1} A(P P^{-1}) Y = A'(P^{-1}Y)$$

* Posons $\mathcal{U} = P^{-1} Y$ $\qquad \frac{d\mathcal{U}}{dt} = P^{-1} \frac{dY}{dt}$

(1) est donc équivalent à :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{U}}{dt} = A' \mathcal{U}} \qquad (2)$$

a) La matrice A est diagonalisable

On peut alors écrire A' matrice semblable à A sous la forme :

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de la matrice A. Si nous posons

$$U = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \text{et} \quad \frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \end{bmatrix}$$

(2) s'écrit alors : $$\boxed{\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \lambda_1 \alpha \\ \frac{d\beta}{dt} = \lambda_2 \beta \\ \frac{d\gamma}{dt} = \lambda_3 \gamma \end{cases}}$$

Rappel

> Les solutions de l'équation différentielle de la forme $\frac{dv}{dt} = \lambda v$ sont de la forme $v : t \longrightarrow v(t) = C e^{\lambda t}$ où C est une constante arbitraire.

dans le cas présent nous obtiendrons donc : $$\begin{cases} \alpha : t \longrightarrow \alpha(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta : t \longrightarrow \beta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \gamma : t \longrightarrow \gamma(t) = C_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases} \qquad \text{donc} \quad U = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Or $\quad U = P^{-1}\,Y \Longleftrightarrow \boxed{Y = P\,U}$ $\quad$ d'où le résultat

Exemple : soit, à résoudre, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7\,y - 6\,z \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x- + 4y \\[2mm] \dfrac{dz}{dt} = 2y - 2z \end{cases}$$

Ainsi $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (exemple 1)

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ et la matrice P de passage est :

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

* d'après ce qui précède l'énoncé de cet exemple

$$\alpha(t) = C_1\,e^{t} \quad , \quad \beta(t) = C_2\,e^{-t} \quad , \quad \gamma(t) = C_3\,e^{2t}$$

* pour déterminer $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ il suffit maintenant d'effectuer le calcul

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \qquad \text{soit :}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\,e^{t} \\ C_2\,e^{-t} \\ C_3\,e^{+2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9C_1\,e^{t} + 5C_2\,e^{-t} + 4C_3\,e^{2t} \\ 3C_1\,e^{t} + C_2\,e^{-t} + 2C_3\,e^{2t} \\ 2C_1\,e^{t} + 2C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{2t} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 9C_1\,e^{t} + 5C_2\,e^{-t} + 4C_3\,e^{2t} \\ y(t) &= 3C_1\,e^{t} + C_2\,e^{-t} + 2C_3\,e^{2t} \\ z(t) &= 2C_1\,e^{t} + 2C_2\,e^{-t} + C_3\,e^{2t} \end{aligned}}$$

b) La matrice A n'est pas diagonalisable

Nous écrirons alors la matrice A' semblable à A sous une forme triangulaire (de JORDAN) par exemple

Exemple : Soit, à résoudre, le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} dx = y \\ dy = z \\ \dfrac{dz}{dt} = 20x - 24y + 9z \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 20 & -24 & 9 \end{bmatrix}$$; les valeurs propres sont : $\lambda = 2$ double ; $\lambda = 5$ simple

La matrice A n'est pas diagonalisable (exemple 3), mais on peut écrire une matrice semblable A', avec

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$; la matrice de passage étant $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 25 & 4 & 8 \end{bmatrix} = P$

Posons $U = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ et $\dfrac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \dfrac{d\beta}{dt} \\ \dfrac{d\gamma}{dt} \end{bmatrix}$

Alors $\dfrac{dU}{dt} = A'\,U$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \dfrac{d\beta}{dt} \\ \dfrac{d\gamma}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 2\beta + \gamma \\ 2\gamma \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 5\alpha \quad ; \quad \frac{d\beta}{dt} = 2\beta + \gamma \quad ; \quad \frac{d\gamma}{dt} = 2\gamma$$

(1) (2) (3)

* Les équations (1) et (3) ont pour solutions respectives :

$\underline{\alpha : t \longrightarrow \alpha(t) = C_1\, e^{5t}}$ et $\underline{\gamma = t \longrightarrow C_3\, e^{2t}}$

* La résolution de l'équation (3) se fait de la manière suivante :

i) Nous déterminons d'abord une <u>solution générale de l'équation homogène</u> $\dfrac{d\beta}{dt} = 2\beta$ soit :

$$t \longmapsto \beta(t) = C_2\, e^{2t}$$

ii) Nous cherchons une solution particulière de l'équation (2) $\frac{d\beta}{dt} = 2\beta + \gamma$ en utilisant la méthode dite "de variation de la constante" ; où la constante C est alors considérée comme fonction de t.

$$\frac{d\beta}{dt} = 2\,C_2(t)\,e^{2t} + C_2'(t)\,e^{2t} = 2C_2(t)\,e^{2t} + C_3\,e^{2t}$$

d'où : $C_2'(t) = C_3$ et $C_2(t) = C_3\,t$

Une solution particulière est donc $t \longrightarrow C_3\,t\,e^{2t}$

iii) Une solution générale est la somme d'une solution du système homogène et d'une solution particulière soit :

$$\beta : t \longrightarrow C_2\,e^{2t} + C_3\,t\,e^{2t}$$

* Pour déterminer les fonctions x, y, z il ne reste plus qu'à effectuer le calcul matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 25 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\,e^{5t} \\ C_2\,e^{2t} + C_3\,t\,e^{2t} \\ C_3\,e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\,e^{5t} + C_2\,e^{2t} + C_3\,(1+t)\,e^{2t} \\ 5C_1\,e^{5t} + 2C_2\,e^{2t} + C_3(3+2t)\,e^{2t} \\ 25C_1\,e^{5t} + 4C_2\,e^{2t} + C_3\,(8+4t)\,e^{2t} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} x &: t \longmapsto C_1\,e^{5t} + C_2\,e^{2t} + C_3(1+t)\,e^{2t} \\ y &: t \longmapsto 5C_1\,e^{5t} + 2C_2\,e^{2t} + C_3(3+2t)\,e^{2t} \\ z &: t \longmapsto 25C_1\,e^{5t} + 4C_2\,e^{2t} + C_3(8+4t)\,e^{2t} \end{aligned}}$$

10-7-4 Système non homogène à coefficients constants

Nous avons alors $\boxed{\frac{dY}{dt} = AY + B}$

Le système sera résolu de la façon suivante :

a) On résoudra d'abord le système homogène : $\frac{dY}{dt} = AY$

b) Puis on cherchera une solution particulière de l'équation totale $\frac{dY}{dt} = AY + B$.

c) Une solution générale sera par conséquent la somme d'une solution du système homogène et d'une solution particulière.

Remarque :

Cependant la résolution de tels systèmes nécessitent la connaissance de certaines méthodes de calcul intégral.

ANNEXE

Démonstration des théorèmes

I Rappel du théorème : DIAGONALISATION

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E ayant p valeurs propres, deux à deux distinctes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ d'espaces propres associés respectifs $N_1, \ldots, N_p$. Pour qu'une matrice associée à f soit diagonalisable il faut et il suffit que la dimension de chaque espace propre N_i associé à la valeur propre λ_i soit égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Notations adoptées :

Soit n la dimension de E.

* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres $(p \leqslant n)$
* $N_1, N_2, \ldots, N_p$ sont les p espaces propres associés
* $k_1, k_2, \ldots k_p$ sont les ordres de multiplicités des valeurs propres : $(k_1 + \ldots + k_p = n)$.

Rappel : Pour que la matrice de f endomorphisme de E soit diagonalisable il faut et il suffit qu'il existe dans E une base de vecteurs propres de f.

A - Condition nécessaire

Si la matrice A associée à f est diagonalisable il existe un ensemble $B = \{\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n\}$ de vecteurs propres de f constituant une base de l'espace vectoriel E.

a) On désigne par B_i la partie de B constituée des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i. Nous avons donc Card $B_i = k_i$, et les vecteurs de B_i sont linéairement indépendants.

Il faut donc démontrer que B_i est une partie génératrice de N_i.

b) • Soit $\vec{u}$ un vecteur de N_i. Donc :

$$f(\vec{u}) = \lambda_i \vec{u} \qquad (1)$$

• $\vec{u}$ est bien entendu un vecteur de E et son écriture relativement à la base B est donc

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n \qquad (2)$$

• de (1) et (2) nous déduisons :

$$\lambda_i(\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n) = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{u}_n) \qquad (3)$$

Or nous savons :

Si $\vec{u}_j \in B_i$ alors $f(\vec{u}_j) = \lambda_i \vec{u}_j$

Si $\vec{u}_j \notin B_i$ alors $f(\vec{u}_j) = \mu_j \vec{u}_j$ avec $(\lambda_i \neq \mu_j)$

• <u>En remplaçant dans (3)</u>

$$(\lambda_i \alpha_1)\vec{u}_1 + \dots + (\lambda_i \alpha_n)\vec{u}_n = (\alpha_1 \mu_1)\vec{u}_1 + \dots + (\alpha_n \mu_n)\vec{u}_n$$

Or $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base donc :

Si $\vec{u}_j \in B_i$ alors $\lambda_i \alpha_j = \lambda_i \alpha_j$

Si $\vec{u}_j \notin B_i$ alors $\lambda_i \alpha_j = \mu_j \alpha_j$ avec $(\lambda_i \neq \mu_j)$

Il résulte de ce dernier cas que $\alpha_j = 0$

Par conséquent $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_j$ où $\vec{u}_j \in B_i$.

Ainsi les vecteurs de B_i forment une base de N_i et $\dim N_i = \text{Card } B_i = k_i$

B - CONDITION SUFFISANTE

Supposons que pour $i = 1, \dots, p$ $\dim N_i = k_i$ Nous savons donc que

$$\dim N_1 + \dim N_2 + \dots + \dim N_p = n$$

et aussi que pour $i \neq j$ $N_i \cap N_j = \{\vec{0}_E\}$

Par conséquent : $N_1, \dots, N_p$ sont en <u>somme directe</u> et

$$\dim N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_p = \dim N_1 + \dots + \dim N_p = n = \dim E.$$

ce qui entraîne que $\boxed{N_1 \oplus \dots \oplus N_p = E}$

Si B_i est une base de N_i alors B formée des $B_1, B_2, \dots, B_p$ soit $(B_1, \dots B_p)$ est une base de <u>vecteurs propres de f</u>, et f est alors diagonalisable.

II $\boxed{\text{DEMONSTRATION DU THEOREME DE TRIGONALISATION}}$ (dimension 3)

Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique a toutes ses racines réelles, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (pas nécessairement distinctes) $P(n) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x)$

Soit $\vec{e}_1$ un vecteur propre associé à λ_1, soit alors $(\vec{e}_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ une base de E_3. La matrice de f est donc de la forme.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & f' & g' \end{pmatrix}$$

· Soit E_1 le sous-espace engendré par $\vec{e}_1$ et F le sous-espace engendré par $\vec{e}'_2$ et $\vec{e}'_3$; on a $E = E_1 \oplus F$ Soit p la projection sur F parallèlement à E_1 ; si $\vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}'_2 + \alpha_3 \vec{e}'_3$, alors $p(\vec{u}) = \alpha_2 \vec{e}'_2 + \alpha_3 \vec{e}'_3$

Soit alors φ l'endomorphisme de F défini par p o f $F \longrightarrow F$

$$\vec{u} \longmapsto (p \circ f)(\vec{u}) = p\left[f(\vec{u})\right]$$

$(\vec{u} \in F$, $f(\vec{u}) \in E$ mais $p\left[f(\vec{u})\right] \in F)$

φ est donc un endomorphisme de F et $\varphi(\vec{e}\,'_2) = d'\vec{e}\,'_2 + f'\vec{e}\,'_3$
et $\varphi(\vec{e}\,'_3) = e'\vec{e}\,'_2 + g'\vec{e}\,'_3$

donc la matrice de φ dans la base $(\vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3)$ est $\begin{pmatrix} d' & f' \\ e' & g' \end{pmatrix}$

Soit Q le polynôme caractéristique de φ on a ; $P(x) = (\lambda_1 - x)\ Q(x)$ d'après le développement de

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - x & b' & e' \\ 0 & d'-x & f' \\ 0 & e' & g'-x \end{vmatrix}$$

Comme $P(x)$ a toutes ses racines réelles, $Q(x)$ aussi et $Q(x) = (\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x)$. Soit $\vec{e}_2$ un vecteur de F associé à λ_2. Complétons en une base de F par $\vec{e}_3$. Dans la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, φ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_2 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$

mais $d = \lambda_3$ car $(\lambda_2 - x)\ (d - x) = (\lambda_2 - x)\ (\lambda_3 - x)$

Considérons maintenant la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de E nous avons $f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$, $f(\vec{e}_2) = a\vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_3) = b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$ d'où la matrice de f est dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & c \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

EXERCICE SUR LE CHAPITRE 10

EXERCICE 1 :

Démontrer les valeurs propres et les vecteurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

Indiquer les matrices de passage permettant la diagonalisation.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 2 :

Même questions pour la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 3 :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, de matrice A relativement à une base B, de valeurs propr λ_i $(i = 1, \ldots, p)$ et de vecteurs propres associés $\vec{X}_i$.

a) Quelles sont les valeurs propres de $f \circ f = f^2$? Quels sont les vecteurs propres associés ?

b) Application :

Soit $A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$

Réduire la matrice A

Quelle est une matrice de passage ?

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A^2.

EXERCICE 4 :

A quelles conditions la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$ est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 5 :

a) Diagonaliser la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer la matrice P de passage

c) Calculer A^n. pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6 :

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y - 3z \end{cases}$$

EXERCICE 7 :

a) Réduire la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer la matrice de passage

c) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

EXERCICE 8 :

Déterminer, en utilisant la trigonalisation des matrices, les puissances $p^{\text{ièmes}}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 11

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

11-1 FORMES BILINEAIRES SYMETRIQUES

11-1-1 Définition

Une forme bilinéaire φ définie sur un espace vectoriel E est symétrique si, et seulement si quels que soient les éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E.

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$$

Exemple

Soit E un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base de E. Soit φ l'application de $E \times$ vers $\mathbb{R}$ qui au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\,\vec{e}_1 + y'\,\vec{e}_2$, associe le réel : $xx' - 2yy'$.

On vérifiera aisément que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

11-1-2 Conséquences

Il résulte de la définition que :

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n)$ est une base d'un espace vectoriel réel E, toute forme bilinéaire φ définie sur E est parfaitement déterminée par la connaissances des nombres

$$\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad \text{où} \quad i \in \{1, 2, \dots n\} \quad \text{et} \quad j \in \{1, 2, \dots n\}$$

Exemple

Soit φ la forme bilinéaire symétrique définie sur E plan vectoriel réel par :

$$\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 8 \quad , \quad \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 4 \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 3$$

Alors si $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2\ ,\ x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2)$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = xx'\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + (xy' + yx')\,\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + yy'\,\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 8xx' + 4(xy' + yx') + 3\,yy'$$

11-1-3 Forme quadratique associée à une forme bilinéaire

Soit φ une forme bilinéaire définie sur un espace vectoriel réel E. On appelle forme quadratique associée à φ l'application ψ de E vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\vec{u} \in E\ (\forall\,\vec{u}) \qquad \psi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}, \vec{u})$$

Exemple

La forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ définie au paragraphe 11-1-2 est l'applicatio ψ de E vers $\mathbb{R}$ qui à $\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$ associe le réel $\psi(\vec{u}) = 8x^2 + 8xy + 3y^2$

11-1-4 Forme quadratique positive

> Soit ψ une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel E. ψ est dite positive si, et seulement si :
>
> $$\vec{u} \in E - \{\vec{0}\}\ ,\quad (\forall\vec{u})\qquad \psi(\vec{u}) > 0$$

Remarque Quelle que soit la forme quadratique ψ

$$\vec{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow \psi(\vec{0}) = \varphi(\vec{0}, \vec{0}) = \varphi(0\vec{u}, 0\vec{u}) = 0 \times \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

Si de plus ψ est positive : $\psi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Exemple

La forme quadratique définie au paragraphe 11-1-3 est positive car :

$$\psi(\vec{u}) = 8(x^2 + xy + \frac{3}{8}y^2) = 8\left[(x + \frac{1}{2}y^2) + \frac{1}{8}y^2)\right]$$

11-2 PRODUIT SCALAIRE

11-2-1 Définition

> On appelle produit scalaire défini sur un espace vectoriel réel E, toute forme bilinéaire symétrique définie sur E et dont la forme quadratique associée est positive.

Remarques

* On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel E sur lequel on a défini un produi scalaire.

* De la définition, il résulte que l'on peut définir sur un espace vectoriel E plusieurs produits scalaires.

* Lorsque l'espace vectoriel E est muni d'un seul produit scalaire, nous noterons :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \quad \text{ou} \quad \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \text{ le produit scalaire.}$$

* Le produit scalaire n'est pas une loi de composition interne : à deux vecteurs il associe un réel Ce n'est pas non plus une loi de composition externe.

11-2-2 Carré scalaire

Soit E un espace vectoriel euclidien réel. On appelle carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ le réel $\vec{u}.\vec{u}$ noté très abusivement $\vec{u}^2$

Il résulte des propriétés du produit scalaire que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

11-3 NORME EUCLIDIENNE

11-3-1 Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien réel. On appelle norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ tel que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

11-3-2 Propriétés de la norme euclidienne

P_1 $\vec{u} \in E, \quad (\forall \vec{u}) \quad \left[(\|\vec{u}\| \geqslant 0) \wedge (\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0})\right]$

Cette propriété résulte immédiatement de la définition de la norme euclidienne et de la remarque du paragraphe 11-1-4.

P_2 $(\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times E, \quad \forall(\alpha, \vec{u}) \quad \|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$

Cette propriété résulte immédiatement de la bilinéarité du produit scalaire :

$$\|\alpha\vec{u}\| = \sqrt{(\alpha\vec{u}) \cdot (\alpha\vec{u})} = \sqrt{\alpha^2 \times (\vec{u}.\vec{u})} = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$$

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

P_3 E étant un espace vectoriel euclidien réel :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \qquad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \qquad |\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Remarques : Cette inégalité peut encore s'écrire pour tout couple de vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls :

$$-1 \leqslant \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \leqslant +1$$

Démonstration

* Si l'un des vecteurs est nul ($\vec{u}$ par exemple) :

$$|\vec{0}.\vec{v}| = \|\vec{0}\| \times \|\vec{v}\| = 0$$

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, quel que soit le réel λ $(\lambda\vec{u} + \vec{v})^2 \geqslant 0$.

Or, $(\lambda\vec{u} + \vec{v})^2 = \lambda^2\vec{u}^2 + 2\lambda\,(\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$ est un polynôme du second degré en λ , qui garde un signe constant si, et seulement si son discriminant réduit, est négatif ou nul :

$$\Delta' = (\vec{u}.\vec{v})^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \leqslant 0$$

d'où $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2$ et par suite :

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Remarque

$$\boxed{|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \iff \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ lié}}$$

En effet si $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ le discriminant du polynôme du second degré en λ est nul, ce qui signi qu'il existe un réel λ_0, solution de l'équation $(\lambda\,\vec{u} + \vec{v})^2 = 0$.

Or $(\lambda_0\vec{u} + \vec{v})^2 = 0 \iff \lambda_0\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ (remarque du paragraphe 11-1-4)

Par suite le système $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est lié

* Réciproquement, si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lié
  - avec $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ $|\vec{u}.\vec{0}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{0}\| = 0$ ou $|\vec{0}.\vec{v}| = \|\vec{0}\| \times \|\vec{v}\| = 0$
  - avec $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$

Alors il existe α réel tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$. $|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}.\alpha\vec{u}| = |\alpha(\vec{u}.\vec{u})| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|^2$

et $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|^2$ Dans tous les cas si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lié, $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

P_4 Inégalité de MINKOVSKI

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$$

Démonstration

* Si l'un au moins des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ est nul (par exemple $\vec{u}$)
  alors $\|\vec{0} + \vec{v}\| = \|\vec{0}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

* Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}.\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

ou en multipliant par 2 les membres de cette double inégalité ; puis en ajoutant $(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)$ à chacun de ceux ci :

$$\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) \leqslant \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

soit

$$(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2 \leqslant (\vec{u} + \vec{v})^2 \leqslant (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

et finalement

$$\boxed{\big|\,\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\,\big| \leqslant \|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|}$$

Remarque

Cette double inégalité est connue sous le nom d'inégalité triangulaire. Nous allons démontrer que :

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Longleftrightarrow \left[(\alpha \in \mathbb{R}^+ \ \exists \alpha \ , \ \vec{v} = \alpha\vec{u}\ ) \text{ ou } (\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0})\right.}$$

* Si l'un au moins des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ est nul, la proposition est évidente.

* Si les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont non nuls :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

et $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$. Il résulte de ces 2 relations que

si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad (\text{avec nécessairement } \vec{u}.\vec{v} > 0)$$

Or d'après la remarque du paragraphe 11-3-2, ceci implique $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lié. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\vec{v} = \alpha\vec{u}$$

* Réciproquement :

Si $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, avec $\alpha > 0$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} + \alpha\vec{u}\| = (\alpha + 1) \times \|\vec{u}\|$$

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \alpha \|\vec{u}\| = (\alpha + 1) \times \|\vec{u}\|$$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

11-3-4 Relation entre norme euclidienne et produit scalaire

De la relation :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$$

Il résulte que :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

11-3-5 Vecteurs unitaires

Soit E un espace vectoriel euclidien réel. Tout vecteur $\vec{u}$ de E tel que $\|\vec{u}\| = 1$ est dit uni

Remarque

Etant donné un vecteur $\vec{v}$ non nul de E, il existe deux vecteurs unitaires $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, opposés appartenant à la droite vectorielle D engendré par $\vec{v}$.

En effet, soit $\vec{u}$ un élément de D. Il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Alors $\|\vec{u}\| = |\alpha| \ . \|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}\| = 1 \Longleftrightarrow |\alpha| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$. Par suite les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ et $\vec{u}_2 = \frac{-1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ sont unitaires et appartiennent à D.

11-4 ORTHOGONALITE DANS UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

11-4-1 Vecteurs orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien réel. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Remarque

Il résulte de la définition que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur $\vec{v}$ de E.

11-4-2 Théorème de PYTHAGORE

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace vectoriel euclidien réel E sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

D'après le paragraphe 11-3-4, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, espace vectoriel euclidien réel :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|)^2$$

donc

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|$$

11-4-3 Orthogonalisation de SCHMITT

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3 et soit $B = (\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ une base de E_3 .

* On se propose de déterminer un vecteur $\vec{\varepsilon}_2$ non nul tel que $\begin{cases} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_1 & \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{e}_1 . \vec{\varepsilon}_2 = 0 \end{cases}$

Ces deux conditions impliquent :

$$\vec{e}_1 . (\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_1) = 0 \Longleftrightarrow (\vec{e}_1 . \vec{e}_2) + \lambda\|\vec{e}_1\|^2 = 0$$

$$\vec{e}_1 . (\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{\vec{e}_1 . \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}$$

Par suite : $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2 - \left(\frac{\vec{e}_1 . \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2}\right) \vec{e}_1$

Ce vecteur $\vec{\varepsilon}_2$ n'est pas nul car, s'il l'était, on aurait $\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_1 = \vec{0}$ ce qui est impossible car $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ est un système libre (sous-système de B qui est lui-même libre).

* On se propose maintenant de déterminer un vecteur $\vec{\varepsilon}_3$ non nul tel que :

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_3 = 0 \\ \vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_3 = 0 \end{cases}$$

Ces trois conditions impliquent d'une part :

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + \alpha\|\vec{e}_1\|^2 + \beta(\vec{e}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)$$

Or $\vec{e}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$, donc :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_3 = 0 \iff \alpha = -\frac{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)}{\|\vec{e}_1\|^2}$$

Elles impliquent d'autre part :

$$\vec{\varepsilon}_2 \cdot (\vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2) = (\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_3) + \alpha(\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_1) + \beta\|\vec{\varepsilon}_2\|^2$$

Or $\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$, donc :

$$\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{\varepsilon}_3 = 0 \iff \beta = -\frac{(\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_3)}{\|\vec{\varepsilon}_2\|^2}$$

Finalement : $$\vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_3 - \left(\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{\|\vec{e}_1\|^2}\right)\vec{e}_1 - \left(\frac{\vec{\varepsilon}_2 \cdot \vec{e}_3}{\|\vec{\varepsilon}_2\|^2}\right)\vec{\varepsilon}_2$$

* Démontrons que le vecteur $\vec{\varepsilon}_3$ ainsi obtenu n'est pas nul. S'il l'était :

$$\vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2 = \vec{0} \iff \vec{e}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta(\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_1) = \vec{0}$$

soit : $\vec{e}_3 + \beta\vec{e}_2 + (\alpha + \lambda\beta)\vec{e}_1 = \vec{0}$. Ceci est impossible car $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ est une base de E.

Les vecteurs $\vec{e}_1 , \vec{\varepsilon}_2 , \vec{\varepsilon}_3$ sont deux à deux orthogonaux.

* Démontrons que trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non nuls, deux à deux orthogonaux forment une base de E_3 . Il suffit de démontrer que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre. Or :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{u}.(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) = a\|\vec{u}\|^2 = 0 \\ \vec{v}.(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) = b\|\vec{v}\|^2 = 0 \\ \vec{w}.(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) = c\|\vec{w}\|^2 = 0 \end{cases}$$

d'où : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow a = b = c = 0$

et le système $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre.

En conclusion :

Le procédé ci-dessus permet de déduire d'une base quelconque $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ une base $(\vec{e}_1 , \vec{\varepsilon}_2 , \vec{\varepsilon}_3)$ dont les éléments sont deux à deux orthogonaux. Ce procédé est appelé <u>procédé d'orthogonalisation de SCHMITT</u>.

La base $(\vec{e}_1 , \vec{\varepsilon}_2 , \vec{\varepsilon}_3)$ est dite <u>orthogonale</u>

11-4-4 Bases orthonormées de E_3

✱ Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthogonale de E_3 . Nous savons qu'il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{i}$ qui sont :

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\|\vec{i}\|}\,\vec{i} \quad \textbf{et} \quad \vec{\varepsilon}_1' = -\frac{1}{\|\vec{i}\|}\,\vec{i}$$

De même les vecteurs $\vec{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\|\vec{j}\|}\,\vec{j}$ et $\vec{\varepsilon}_3 = \frac{1}{\|\vec{k}\|}\,\vec{k}$

sont unitaires et colinéaires respectivement à $\vec{j}$ et $\vec{k}$

> On appelle base orthonormée de E_3 toute base $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3)$
> telle que $\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\varepsilon}_2\cdot\vec{\varepsilon}_3 = 0 \\ \|\vec{\varepsilon}_1\| = \|\vec{\varepsilon}_2\| = \|\vec{\varepsilon}_3\| = 1 \end{cases}$

✱ Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ une base orthonormée de E_3 et soit

$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ et $\vec{v}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$

$$\vec{v}\cdot\vec{v}' = xx'\,\vec{e}_1^{\,2} + (xy'+yx')\,(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + (xz'+zx')\,(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + (yz'+zy')\,(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) + yy'\vec{e}_2^{\,2} + zz'\vec{e}_3^{\,2}$$

La base étant orthonormée,

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{v}' = xx'+yy'+zz'} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

11-5 SOUS ESPACES VECTORIELS ORTHOGONAUX

✱ Définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien réel.

D_1

> Un vecteur $\vec{u}$ de E est orthogonal à un sous-espace vectoriel F de E, si, et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{v}$ de F.

D_2

> Deux sous-espaces vectoriels F et F' de E sont orthogonaux si, et seulement si, tout vecteur $\vec{u}$ de F est orthogonal à tout vecteur $\vec{u}'$ de F'

✱ Conséquences

C_1

> Un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à une droite vectorielle D si, et seulement si, il est orthogonal à une base $(\vec{e}_1)$ de D.

Si $\vec{u}$ est orthogonal à D, d'après la définition D_1 il est orthogonal à tout vecteur de D donc en particulier à $\vec{e}_1$.

Réciproquement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{e}_1$, tout vecteur $\vec{v}$ de D s'écrivant $\vec{v} = \alpha\vec{e}_1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{e}_1) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) = 0$$

C_2

> Un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un plan vectoriel P si, et seulement si, $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ d'une base de P.

Si $\vec{u}$ est orthogonal à P il est en particulier orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ d'une base de P.

Réciproquement, si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, tout vecteur $\vec{v}$ de P s'écrit :

$\vec{v} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{e}_1) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{e}_2) = 0$$

C_3

> Deux droites vectorielles sont orthogonales si, et seulement si, une base de l'une est orthogonale à une base de l'autre.

Soit D et D' deux droites vectorielles orthogonales de bases respectives $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. D'après (D_2) : $\vec{u} \perp \vec{u}'$

Réciproquement, si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, tout vecteur $\vec{v}$ de D s'écrit $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et tout vecteur $\vec{v}'$ de D' s'écrit $\vec{v}' = \beta\vec{u}'$ $(\beta \in \mathbb{R})$, et par suite :

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = (\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{u}') = (\alpha\beta)(\vec{u} \cdot \vec{u}') = 0$$

C_4

> Une droite vectorielle D de $\vec{i}$ et un plan vectoriel P dont une base est $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont orthogonaux si, et seulement si :
>
> $$\vec{i} \cdot \vec{e}_1 = \vec{i} \cdot \vec{e}_2 = 0$$

Si D et P sont orthogonaux tout vecteur de D est orthogonal à tout vecteur de P donc en particulier

$$\vec{i} \perp \vec{e} \qquad \text{et} \quad \vec{i} \perp \vec{e}_2$$

Réciproquement, si $\vec{i}$ est orthogonal à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ tout vecteur de D s'écrit $\vec{u} = \alpha\vec{i}$ et tout vecteur de P s'écrit $\vec{v} = \beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\alpha\vec{i}) \cdot (\beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2) = (\alpha\beta)\ (\vec{i} \cdot \vec{e}_1) + (\alpha\gamma)\ (\vec{i} \cdot \vec{e}_2) = 0$$

11-6 ORTHOGONAL D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien réel et F un sous-espace E. On appelle orthogonal de F, l'ensemble, noté $F^{\perp}$, des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de F.

$$F^{\perp} = \{\vec{u} \mid \vec{u} \in E \mid \vec{v} \in F ,\ \forall \vec{v}\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$$

Remarque   De cette définition il résulte que $E^{\perp} = \{\vec{0}_E\}$ et $\{\vec{0}_E\}^{\perp} = E$.

Conséquences

C_1 $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux éléments de $F^{\perp}$ et α, β deux réels. Quel que soit l'élément $\vec{v}$ de F :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u}' \cdot \vec{v} = 0$. Par suite :

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}').\vec{v} = (\alpha\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\beta\vec{u}' \cdot \vec{v})$$

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}').\vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u}' \cdot \vec{v}) = 0$$

donc $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}') \in F^{\perp}$.

$F^{\perp}$ stable pour les combinaisons linéaires est donc un sous-espace vectoriel de E

C_2 F et $F^{\perp}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

Donnons la démonstration dans E_3 , espace vectoriel euclidien réel de dimension 3.

Si F est un plan vectoriel de base $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2)$ $F^{\perp}$ est une droite vectorielle de base $\vec{e}_3$, telle que : $\vec{e}_3$ est orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Donc $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ est une base de E_3. Il en résulte que tout vecteur $\vec{u}$ de E_3 peut s'écrire de façon unique : $\vec{u} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) + z\vec{e}_3$

où $(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \in F$ et $(z\vec{e}_3) \in F^{\perp}$

D'où F et $F^{\perp}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E_3.

Nota   Le résultat est immédiat si $F = \{\vec{0}_E\}$ et $F^{\perp} = E_3$ ou inversement.

Remarque

Dans un espace vectoriel de dimension 3, il n'existe pas de plans vectoriels $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ tels que tout vecteur de l'un soit orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Exercices sur le chapitre 11

Exercice 1

L'espace vectoriel $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \binom{1}{0}$ et $\vec{e}_2 = \binom{0}{1}$

1°) On considère la forme bilinéaire symétrique f définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par : $f(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1) = 16$
$f(3\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 12$, $f(5\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 15$ Soient $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\vec{u}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$
calculer $f(\vec{u}, \vec{u}')$ en fonction de x, y, x', y'
En déduire que, quelque soit le vecteur non nul $\vec{u}$, $f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$

La forme bilinéaire f définit un produit scalaire, noté $f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$, que l'on utilisera dans toute la suite du problème.

2°) On considère le système $\mathcal{S} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ où $\vec{i} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $\vec{j} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Démontrer que $\mathcal{S}$ est une base de $\mathcal{V}$.

3°) Démontrer qu'il est possible de déterminer un vecteur non nul $\vec{J} = \vec{j} + \alpha\vec{i}$ (où λ est un réel) tel que : $\vec{i}.\vec{J} = 0$
Démontrer que $\mathcal{B}_1 = \{\vec{i}, \vec{J}\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{V}$.

4°) Déterminer un vecteur $\vec{\varepsilon}_1$ unitaire et colinéaire à $\vec{i}$ puis un vecteur $\vec{\varepsilon}_2$ unitaire et colinéaire à $\vec{J}$.
La base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ ainsi déterminée est une base orthonormée de $\mathcal{V}$ muni du produit scalaire f

Exercice 2

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base d'un plan vectoriel euclidien, telle que $\|\vec{e}_1\| = 3$, $\|\vec{e}_2\| = 4$
et $\vec{e}_1.\vec{e}_2 = 6$

1°) On considère le vecteur $\vec{U} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$
Déterminer un vecteur $\vec{U}'$ normé, colinéaire au vecteur $\vec{U}$
Déterminer une base $(\vec{U}', \vec{V}')$ orthonormée de ce plan vectoriel.

2°) Soient les vecteurs $\vec{i} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{j} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$
Calculer, dans la base $\mathcal{B}$, le produit scalaire $\vec{i}.\vec{j}$

3°) On considère les vecteurs : $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\varepsilon_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$
Calculer, dans la base $\mathcal{B}$, $\|\vec{\varepsilon}_1\|$, $\|\vec{\varepsilon}_2\|$ et $\vec{\varepsilon}_1.\vec{\varepsilon}_2$
Démontrer que $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ est une base du plan vectoriel
Calculer, dans la base $\mathcal{B}'$, les composantes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ puis le produit scalaire $\vec{i}.\vec{j}$

Exercice 3

Dans tout le problème, l'espace vectoriel E_3, de dimension 3, est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1°) On considère les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tels que :
$\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{e}_3 = \vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$
où m est un paramètre réel.
Discuter suivant les valeurs de m la dépendance linéaire de ces trois vecteurs.

2°) On considère l'application φ de $E_3 \times E_3$ dans $\mathbb{R}$, telle que si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}') = xx' + yy' + zz'$$

Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E_3 . Que peut-on dire de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour ce produit scalaire ?

3°) On désigne par $\mathcal{P}$ le plan vectoriel dont $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ constituent une base.
Peut-on déterminer m de façon que le vecteur $\vec{e}_3$ soit orthogonal à $\mathcal{P}$?

4°) Soit $\vec{\varepsilon}_1 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$
Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ du plan vectoriel $\mathcal{P}$ sachant que :

- La base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ est orthonormée
- $\vec{\varepsilon}_1$ est colinéaire à $\vec{e}_1$ et de même sens
- α est négatif.

5°) Calculer les composantes des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathcal{P}$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques f définies pour tout x réel par :

$f(x) = a \cos 2x + b \sin 2x + c$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

A 1-a Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$

1-b Soient f_1, f_2, f_3 les trois éléments de $\mathcal{F}$ définis par :

$f_1(x) = \cos 2x \quad ; \quad f_2(x) = \sin 2x \quad ; \quad f_3(x) = 1$

Démontrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ constitue une base de $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{B}$.

2-a Démontrer que tout élément f de $\mathcal{F}$ est intégrable sur $[o,\pi]$ Calculer $\int_0^\pi f_i(x)\, f_j(x)\, dx$ pour $i \in \{1,2,3\}$ et $j \in \{1,2,3\}$

2-b Soit f et g deux éléments de $\mathcal{F}$ de composantes respectives (a,b,c) et (a',b',c') dans la base $\mathcal{B}$. On considère l'application $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{I}(f,g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) g(x)\, dx$$

Exprimer $\mathcal{I}(f,g)$ puis $\mathcal{I}(f,f)$ en fonction des composantes de f et de g dans la base $\mathcal{B}$.

2-c Déduire des résultats précédents que l'application $\mathcal{I}$ définit sur $\mathcal{F}$ un produit scalaire. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de $\mathcal{F}$. Est-elle orthonormée ?

B 1 Démontrer par récurrence que, quel que soit n, élément de $\mathbb{N}$, tout élément f de $\mathcal{F}$ possède une dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, qui appartient aussi à $\mathcal{F}$ (par convention $f^{(o)} = f$).
Démontrer que l'application qui, à tout élément f de $\mathcal{F}$ associe $f^{(n)}$ est un eudomorphisme de $\mathcal{F}$. Est-ce un automorphisme de $\mathcal{F}$?

2 $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire $\mathcal{I}$ est un espace vectoriel euclidien. Soit $\mathcal{F}'$ le plan vectoriel engendré par f_1, f_2 qui en constituent une base orthonormée $\mathcal{B}'$.
On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\varphi(f) = f^{(2)} = f''$$

Montrer que φ est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle orthogonale sur $\mathcal{F}'$.

C Soit φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{F}'$ défini par $\varphi_n(f) = \dfrac{1}{2^n} f^{(n)}$

On pose $\Phi = \{\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

1- Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathcal{F}'$ pour n = o , 1, 2, 3.

2- Ecrire les matrices respectives de $\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Reconnaitre ces automorphismes.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i},\vec{j})$

1°) Soit F un endomorphisme de E. On note $(\vec{u}.\vec{v})$ le produit scalaire de deux vecteurs quelconques de E.
Soit φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u} \,.\, F(\vec{v}) + \vec{v} \,.\, F(\vec{u})$$

Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

2°) Soit $F_{k,a}$ l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} F_{k,a}(\vec{i}) = \dfrac{k+1}{a}\, \vec{i} + \dfrac{k-1}{a}\, \vec{j} \\[2ex] F_{k,a}(\vec{j}) = \dfrac{k-1}{a}\, \vec{i} + \dfrac{k+1}{a}\, \vec{j} \end{cases}$$

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur de E. Si $F = F_{k,a}$

Calculer $\varphi(\vec{u},\vec{u})$ en fonction de x, y, k, a.

3°) On suppose que : $F = F_{1,a}$. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles φ est un produit scalaire ? Si oui, les déterminer.

4°) On suppose que : $F = F_{-1,a}$. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles φ est un produit scalaire ? Si oui, les déterminer.

EXERCICE 6

Soit E_3 un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls de E_3 tels que : $\vec{a}.\vec{b} = 0$

1°) Démontrer que $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ est un système libre de E_3

2°) Soit f l'application de E_3 dans lui-même définie par :

$$\vec{u} \in E_3 \ , \ \forall \vec{u} \quad f(\vec{u}) = (\vec{u}.\vec{a})\ \vec{b} + (\vec{u}.\vec{b})\vec{a}$$

Démontrer que f est un endomorphisme de E_3

3°) Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E_3 ,
$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{k}$ deux éléments de E_3

a/ Déterminer le noyau, N, de f

b/ Déterminer l'image, I, de f

c/ Démontrer que $N \cap I = \{\vec{0}\}$

4°) Soit $\vec{c}$ une base de N. Démontrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de E_3.

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $f(\vec{u}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

Exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z.

EXERCICE 7

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f_{a,b}(x) = a + \frac{b}{x-2} \quad , \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

A - 1 On considère l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R} - \{2\}$, muni des lois usuelles d'addition de deux fonctions et de multiplication d'une fonction par un réel.
Montrer que E en est un sous-espace vectoriel.

2. Montrer que $(f_{1,0} , f_{0,1})$ est une base de E, notée B.
Donner les coordonnées de $f_{a,b}$ dans cette base B.

3. Montrer que les fonctions g définies sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$g(x) = \frac{cx + d}{x-2} \quad \text{avec } (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

sont des éléments de E. Trouver leurs coordonnées dans la base B.

4. $f_{a,b}$ étant un élément quelconque de E et $f^{(n)}_{a,b}$ sa dérivée d'ordre n, n étant un élément de $\mathbb{N}^*$, déterminer par récurrence $f^{(n)}_{a,b}$ et montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$h(x) = (x - 2)^n f^{(n)}_{a,b}(x)$$

est élément de E. Trouver ses coordonnées dans la base B.

B - Pour tout couple de réels (α, β) on désigne par : $\varphi_{\alpha,\beta}$ l'application de E dans E telle que $\varphi_{\alpha,\beta}(f_{a,b})$ est définie par :

$$\varphi_{\alpha,\beta}(f_{a,b}) : x \longrightarrow \alpha f_{a,b}(x) + \beta(x - 2) f'_{a,b}(x)$$

1. Montrer que $\varphi_{\alpha,\beta}$ est un endomorphisme de E et trouver sa matrice dans la base $B = (f_{1,0} , f_{0,1}$

2. Calculer α et β pour que $\varphi_{\alpha,\beta}$ soit un endomorphisme involutif et dans chacun des cas préciser la nature de $\varphi_{\alpha,\beta}$ et ses éléments remarquables.

C- 1. Montrer que, quel que soit le couple (a, b) de nombres réels, l'intégrale $\int_0^1 (f_{a,b}(x))^2 \, dx$ est positive ou nulle. On admettra que cette intégrale est nulle si, et seulement si,

$$(a, b) = (0, 0).$$

Calculer cette intégrale. En déduire que $1 - 2\mathrm{Log}^2\, 2 > 0$.

2. Soit Φ l'application de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi\,(f_{a,b}\ ,\ f_{a',b'}) = \int_0^1 f_{a,b}(x)\quad f_{a',b'}(x)\ dx$$

Montrer que Φ définit un produit scalaire sur E.

On suppose dans les deux questions suivantes que E est muni de ce produit scalaire.

3. Calculer $\|f_{1,0}\|$

Déterminer $f_{a,b}$ telle que $(f_{1,0}\ ,\ f_{a,b})$ soit une base orthonormée B de E et que b soit positi

4. Soit μ l'application de E dans E telle que : $\mu(f_{a,b})$ est définie par :

$$\mu(f_{a,b})\ :\ x \longrightarrow 2b\ \mathrm{Log}\ 2 - a + \frac{b}{x-2}$$

Montrer que μ est une isométrie vectorielle de E. Déterminer les éléments de E invariants par μ.
Quelle est la matrice de μ dans la base B' ?

EXERCICE 8

B. On associe à tout entier naturel n la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin nx$.

1. Montrer que l'intégrale $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_p(x).\,f_q(x)\ dx$ est égale à 0 si p et q sont deux entiers naturels distincts, et égale à 1 si p et q sont deux entiers naturels égaux et non nuls.

2. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels a, b, c des fonctions f_1, f_2 et f_3. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que le triplet $(f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3)$ en est une bas notée $\mathcal{B}$ dans ce qui suit.

3. On considère l'application φ de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f,\ g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x).g(x)\ dx.$$

Exprimer $\varphi(f,\ g)$ à l'aide des coordonnées a, b, c de f et des coordonnées a', b', c' de g dans la base $\mathcal{B}$

Montrer que φ est un produit scalaire et que $\mathcal{F}$, muni de ce produit scalaire, est un espace vectoriel euclidien dont $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

Deux fonctions f et g telles que $\varphi(f, g) = 0$ seront dites 'orthogonales", dans ce qui suit.

C. On considère les fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2} \quad \text{et} \quad v(x) = 4 \cos^2 \frac{x}{2} \sin 2x$$

1. Montrer que u et v appartiennent à $\mathcal{F}$. Quelles sont leurs coordonnées dans la base ?

2. Soit $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par u et v. Montrer que la fonction $f = a f_1 + b f_2 + c f_3$ appartient à $\mathcal{G}$ si et seulement si $a - b + c = 0$.

3. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}$ orthogonales à u et à v. Donner la forme générale des fonctions f appartenant à $\mathcal{H}$.

4. Montrer que toute fonction f de $\mathcal{F}$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $f = g + h$, g appartenant à $\mathcal{G}$ et h appartenant à $\mathcal{H}$.

On désigne par p l'application de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$ dans laquelle f a pour image $p(f)$ sa composante g suivant $\mathcal{G}$. Justifier le nom de "projection orthogonale de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$ " que l'on peut donner à p.

5. Calculer $p\,(5 f_1 + 2 f_2 + 4 f_3)$; le résultat peut-il se déduire du 1, 2 ?

6. On donne les fonctions $k = f_1 - f_2 - 2f_3$ et $l = 3 f_1 - f_2 + 2 f_3$.

Vérifier que k appartient à $\mathcal{G}$ et que l n'appartient pas à $\mathcal{G}$.

Calculer $\varphi(k, l)$ et $\varphi(p(k), p(l))$, et donner un interprétation géométrique du résultat.

Chapitre 12

ISOMETRIES VECTORIELLES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

12-1 ISOMETRIES VECTORIELLES

12-1-1 **Définition**

On appelle isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E, toute application linéaire de E dans lui-même, telle que :

$$\vec{u} \in E \ , \ \forall \vec{u} \qquad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \qquad (1)$$

Remarque On dit que f "conserve la norme"

12-1-2 Propriétés caractéristiques

P_1 Une application linéaire f de E dans lui-même est une isométrie vectorielle si, et seulement si :

$$\left.\begin{matrix}\vec{u} \in E \\ \vec{u} \in E\end{matrix}\right| \quad (\forall \vec{u}) \ (\forall \vec{v}) \qquad f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (2)$$

En effet si dans (2) $\vec{u} = \vec{v}$ il vient :

$$\|f(\vec{u})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \qquad \text{d'où} \qquad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$$

Réciproquement,

$$\left.\begin{matrix}\vec{u} \in E \\ \vec{u} \in E\end{matrix}\right| \quad (\forall \vec{u}) \ (\forall \vec{v}) \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

et $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\|f(\vec{u}) + f(\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u})\|^2 - \|f(\vec{v})\|^2\right)$

Mais f étant linéaire : $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(\vec{u}+\vec{v})$

alors : $f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\|f(\vec{u}+\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u})\|^2 - \|f(\vec{v})\|^2\right)$

et si f conserve la norme :

$$f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Remarque On dit que f "conserve le produit scalaire"

P_2 Une application linéaire f de E dans lui-même est une isométrie vectorielle si, et seulement si, elle transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E

Par hypothèse, quels que soient les entiers distincts i et j compris entre 1 et n :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$$

et quel que soit i, $\|\vec{e}_i\| = 1$

Il en résulte que si f est une isométrie vectorielle :

$$f(\vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = 0 \qquad \text{(conservation du produit scalaire)}$$

$$\text{et} \quad \|f(\vec{e}_i)\| = 1 \qquad \text{(conservation de la norme)}$$

Donc la base $\mathcal{B}' = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une base orthonormée de E.

. Réciproquement, s'il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ dont l'image par f, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base orthonormée, soit $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots x_n \vec{e}_n$,

et $f(\vec{v}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) = x\vec{e}'_1 + x_2 \vec{e}'_2 + \ldots + x_n \vec{e}'_n$

alors $\| f(\vec{v})\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \|\vec{v}\|^2$ puisque les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ sont orthonormées.

12-2 **REMARQUES**

12-2-1 Une application d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même, qui "conserve la norme", n'est pas nécessairement linéaire.

Exemple : soit P un plan vectoriel euclidien et une droite vectorielle D incluse dans P.
soit f l'application de P dans P telle que :

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = -\vec{u} & \text{si } \vec{u} \in D \\ f(\vec{v}) = \vec{v} & \text{si } \vec{v} \in P-D \end{cases}$$

De la définition de f, il résulte :

$$\vec{u} \in P \ , \quad \forall \vec{u} \ , \quad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$$

f "conserve donc la norme". Elle "ne conserve pas le produit scalaire" ; en effet :

$$(\vec{u} \in D \text{ et } \vec{v} \in P-D) \Longrightarrow (f(\vec{u}).f(\vec{v}) = -\vec{u}.\vec{v})$$

Or, $-\vec{u}.\vec{v}$ est en général distinct de $\vec{u}.\vec{v}$. Il en résulte que f n'est pas linéaire (cf. propriété P_1, § 11-1-2)

12-2-2 Soit f une application d'un espace vectoriel euclidien E dans lui-même. Si f "conserve le produit scalaire", alors elle transforme une base orthonormée en une base orthonormée ; de plus f est linéaire.

- Soit une base orthonormée de E : $\beta = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Quels que soient les naturels i et j compris entre 1 et n, on a par hypothèse :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_i) \, . f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i . \vec{e}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \\ \quad [f(\vec{e}_i)]^2 = (\vec{e}_i)^2 = 1 \end{cases}$$

Il en résulte que β a pour image par f la base orthonormée $\beta' = (f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$

- Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ avec $x_i = \vec{u}.\vec{e}_i$

β' étant une base de E, il existe un n-uplet $(x'_1, \ldots, x'_n)$ unique, tel que :

$$f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} x'_i f(\vec{e}_i)$$

D'où $x'_i = f(\vec{u}).f(\vec{e}_i) = \vec{u}.\vec{e}_i$
(conservation du produit scalaire)

donc : $\forall i \ , \ x'_i = x_i$

L'application f associe donc à tout vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, le vecteur $f(\vec{u}) = \sum x_i f(\vec{e}_i)$

f est donc linéaire.

12-2-3 Si une application d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même transforme une base orthonormée en une base orthonormée, elle n'est pas nécessairement linéaire.

En effet, reprenons l'exemple du paragraphe 11-2-1

Il est possible de choisir dans P une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$ telle que :

$$\vec{u} \in D \quad \text{et} \quad \vec{v} \in P-D$$

$(\vec{u},\vec{v})$ a pour image par f la base orthonormée $(-\vec{u},\vec{v})$. Cependant, f n'est pas linéaire.

12-3 GROUPE ORTHOGONAL D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN REEL

Désignons par $\mathcal{J}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

* Soit f et g deux isométries de E ; démontrons que $(g \circ f)$ est une isométrie de E :

$$\vec{u} \in E \quad (\forall \vec{u}) \quad \|(g \circ f)(\vec{u})\| = \|g\,[f(\vec{u})]\| = \|f(\vec{u})\|$$

puisque g est une isométrie, mais alors :

$$\|(g \circ f)(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \quad \text{puisque } f \text{ est une isométrie.}$$

Donc $g \circ f$ conserve la norme : c'est une isométrie de E.

* Une isométrie f de E transforme une base de E en une base de E (cf paragraphe 12-2-2). Il en résu[lte] (cf chapitre 6-7-2 théorème 12) que f est un automorphisme de E et admet une application réciproque f^{-1}.

Démontrons que f^{-1} est une isométrie :

$$\vec{v} = f^{-1}(\vec{u}) \Longleftrightarrow \vec{u} = f(\vec{v})$$

$\|\vec{u}\| = \|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ puisque f conserve la norme donc

$$\|f^{-1}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \quad \text{et } f^{-1} \text{ est une isométrie.}$$

* En conclusion : $\mathcal{J}(E)$ est un sous groupe du groupe linéaire de E (groupe des automorphismes de E)

> L'ensemble $\mathcal{J}(E)$ des isométries d'un espace vectoriel euclidien réel E, muni de la loi O, est un groupe appelé <u>groupe orthogonal de E</u>

12-4 VALEURS PROPRES ET ESPACES PROPRES ASSOCIES A UNE ISOMETRIE VECTORIELLE DE E

12-4-1 <u>Valeurs propres d'une isométrie vectorielle</u>

Sous réserve d'existence, soit λ une valeur propre de l'isométrie f de E et soit $\vec{u}$ un vecteur propre associé $(\vec{u} \neq \vec{0})$: $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$

f conservant la norme :

$$\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \Longrightarrow \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$$

soit $\quad |\lambda| \; \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| \Longrightarrow |\lambda| = 1$

donc : $\quad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \Longrightarrow (\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1)$

Si elles existent les valeurs propres d'une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien réel sont égales à + 1 ou à - 1.

12-4-2 Espaces propres associés à une isométrie vectorielle

Sous réserve d'existence, désignons par N_1 et N_2 les espaces propres associés respectivement aux valeurs propres + 1 ou - 1. Donc :

$$\vec{u} \in N_1 \quad (\forall \vec{u}) \qquad f(\vec{u}) = \vec{u}$$
$$\vec{v} \in N_2 \quad (\forall \vec{v}) \qquad f(\vec{v}) = -\vec{v}$$

Or f conserve le produit scalaire, donc quel que soit $(\vec{u}, \vec{v})$ élément de $N_1 \times N_2$:

$$f(\vec{u}) \,.\, f(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \iff \vec{u}.(-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$$
$$f(\vec{u}) \,.\, f(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$$

S'ils existent, les espaces propres associés aux valeurs propres + 1 et - 1 d'une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien réel sont orthogonaux.

12-5 ISOMETRIES VECTORIELLES DE LA DROITE VECTORIELLE

Soit E_1 une droite vectorielle $\mathcal{B} = (\vec{e}_1)$ une base de E_1 et f une isométrie vectorielle de E_1 dans lui-même. Alors :

$$\|f(\vec{e}_1)\| = \|\vec{e}_1\| \iff \left[f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad \text{ou} \quad f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1\right]$$

1er cas Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E_1 : $\vec{u} = x\,\vec{e}_1$

donc $f(\vec{u}) = x\,f(\vec{e}_1) = x\,\vec{e}_1 = \vec{u}$

f est l'identité

2ème cas Quel que soit l'élément $\vec{u}$ de E_1 :

$$f(\vec{u}) = x\,f(\vec{e}_1) = -x\,\vec{e}_1 = -\vec{e}_1$$

f est l'homothétie vectorielle de rapport (-1)

Chapitre 13

ISOMETRIES VECTORIELLES DU PLAN VECTORIEL

13-1 MATRICE D'UNE ISOMETRIE VECTORIELLE DANS UNE BASE ORTHONORMEE D'UN PLAN E_2

* Soit une isométrie vectorielle f de E_2 dont la matrice relativement à une base orthonormée

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{est :} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$

La base $\left[f(\vec{e}_1)\ ,\ f(\vec{e}_2)\right]$ est orthonormée et par suite :

$\|f(\vec{e}_1)\| = a^2+b^2 = 1 \qquad \|f(\vec{e}_2)\| = c^2+d^2 = 1$

$f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) = ac + bd = o$

Cette dernière relation s'écrit : $ac = -bd$ ou $a^2\ c^2 = b^2\ d^2$

Soit : $a^2\ c^2 = (1-a^2)\ (1-c^2) = 1-a^2-c^2+a^2c^2$ d'où il vient $a^2 + c^2 = 1$

Alors $\begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (c = b \text{ ou } c = -b)$

et $\begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ c^2+d^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (d = a \text{ ou } d = -a)$

Or si $d = a$, comme $ac + bd = o$ c'est que : $c = -b$

Si $d = -a$, c'est que $c = b$

Donc la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathcal{V}_2$ relativement à une base orthonormée est de l'une des formes :

$$(\mathcal{R}) : \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (\mathcal{S}) : \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

avec $a^2+b^2 = 1$

* Réciproquement soit f une application linéaire de E_2 dans lui-même et F la matrice associée relativement à la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

. Si $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $f(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = -b\vec{e}_1+a\vec{e}_2$

avec $a^2+b^2 = 1$ $\qquad \|f(\vec{e}_1)\| = \|f(\vec{e}_2)\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

et $f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) = 0$

. Si $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $f(\vec{e}_1) = a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_2) = b\vec{e}_1-a\vec{e}_2$

avec $a^2+b^2 = 1$ $\qquad \|f(\vec{e}_1)\| = \|f(\vec{e}_2)\| = 1$

et $f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) = 0$

f est donc une isométrie vectorielle (l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée).

La matrice d'une isométrie vectorielle du plan vectoriel euclidien E_2 dans lui-même, relativement à une base orthonormée de E_2 se présente sous une des deux formes :

$$(\mathcal{R}) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad (S) \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux nombres réels tels que : $a^2 + b^2 = 1$

<u>Remarque</u> Une matrice A telle que $\det A = 1$ ne caractérise pas nécessairement une isométrie :

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice d'une isométrie

13-2 GROUPE DES ISOMETRIES DE DETERMINANT +1

Désignons par $O^+(E_2)$ l'ensemble des isométries vectorielles de déterminant +1 du plan vectoriel E_2.

* Soit f et g deux isométries vectorielles de déterminant +1

$$\text{dét}(g \circ f) = \text{dét}\, g \times \text{dét}\, f = 1$$

$$\text{donc} \quad (g \circ f) \in O^+(E_2)$$

* Si f est une isométrie vectorielle de E_2, il en est de même de f^{-1} et : $\text{dét}\, f^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét}\, f} = 1$

donc $f^{-1} \in O^+(E_2)$

* De plus f et g commutent :

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{la matrice de } f$$

$$\text{et } A' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \quad \text{avec } a'^2 + b'^2 = 1 \qquad \text{la matrice de } g$$

$$M(g \circ f) = M(f \circ g) = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{bmatrix}$$

L'ensemble $O^+(E_2)$ des isométries vectorielles de déterminant +1 du plan vectoriel E_2, muni de la loi O, est un groupe commutatif

<u>Remarque</u>

La composée de deux isométries vectorielles de type S (déterminant égal à +1) est une isométr vectorielle de type R.

13-3 ROTATIONS VECTORIELLES DU PLAN VECTORIEL EUCLIDIEN

13-3-1 Valeurs propres d'une isométrie de type R.

Soit f une isométrie de type (R) : la matrice A est de la forme $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

'il existe des valeurs propres, il existe des réels λ tels que : $\text{dét}(A - \lambda I) = 0$

$$\text{dét}\,(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \iff (a - \lambda)^2 + b^2 = 0$$

Cette dernière égalité n'est vérifiée, que si $\lambda = a$ et $b = 0$. Ceci implique $a = 1$. La seule isométrie de type (R) qui admette des valeurs propres est l'application identique : elle admet 1 pour valeur propre double.

> Toute isométrie vectorielle de type (R) d'un plan vectoriel euclidien réel E_2, distincte de l'identité, n'admet aucune valeur propre.

13-3-2 Théorème fondamental

> Si une isométrie vectorielle f a, dans une base orthonormée une matrice de type R :
> $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
> Elle a, dans TOUTE BASE ORTHONORMEE, une matrice de type R, où a et $|b|$ sont conservés.

Le plan vectoriel euclidien E_2 étant rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, f a dans cette base pour matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

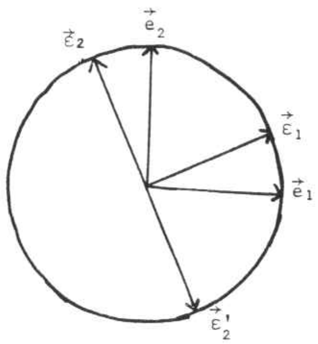
Soit $\mathcal{B}'$ une autre matrice orthonormée de E_2. Il existe une isométrie vectorielle g et une seule transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. Cette isométrie vectorielle a, dans la base $\mathcal{B}$, une matrice de la forme :

$$(R) \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{ou (S)} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

En d'autres termes :

$$\begin{cases} g(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_1 \\ g(\vec{e}_2) = -\beta\vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} g(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_1' = \vec{\varepsilon}_1 \\ g(\vec{e}_2) = \beta\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2' = -\vec{\varepsilon}_2 \end{cases}$$



1er Cas

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Les matrices A et P étant toutes deux de type (R) commutent.

La matrice A_1 de f dans la base $\mathcal{B}'$ est telle que :

$A_1 = P^{-1} A P = (P^{-1}P) A = IA = A.$

Donc $A_1 = A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1) = a\vec{\varepsilon}_1 + b\vec{\varepsilon}_2 \\ f(\vec{\varepsilon}_2) = -b\vec{\varepsilon}_1 + a\vec{\varepsilon}_2 \end{cases}$

2ème cas

La matrice de passage est $P' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

Des relations : $\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1' = \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2' = -\vec{\varepsilon}_2 \end{cases}$ il résulte que :

$$\begin{cases} f(\vec{\varepsilon}_1') = f(\vec{\varepsilon}_1) = a\vec{\varepsilon}_1 + b\vec{\varepsilon}_2 = a\vec{\varepsilon}_1' - b\vec{\varepsilon}_2' \\ f(\vec{\varepsilon}_2') = -f(\vec{\varepsilon}_2) = b\vec{\varepsilon}_1 - a\vec{\varepsilon}_2 = b\vec{\varepsilon}_1' + a\vec{\varepsilon}_2' \end{cases}$$

La matrice A_1' de f dans la base $\mathcal{B}'$ est alors :

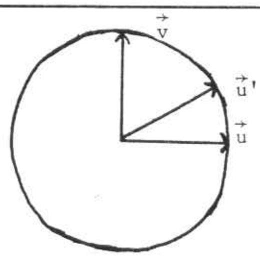
$A_1' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ Elle est du type (R) mais b est changé en (-b).

13-3-3 Définition

On appelle rotation vectorielle toute isométrie vectorielle ayant dans une base orthonormée une matrice de type (R) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2+b^2 = 1$

13-3-4 Théorème

Etant donnés deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ il existe une rotation vectorielle f et une seule telle que : $f(\vec{u}) = \vec{u}'$



Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$. Soient $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les composants de $\vec{u}'$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

$\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v}$

S'il existe une rotation vectorielle f telle que $\vec{u}' = f(\vec{u})$ elle a nécessairement pour matrice dans la base $(\vec{u},\vec{v})$: $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Or il existe une et une seule application linéaire ayant pour matrice F dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

13-4 SYMETRIES VECTORIELLES ORTHOGONALES DU PLAN VECTORIEL

13-4-1 Définition

On appelle symétrie vectorielle orthogonale toute isométrie vectorielle de déterminant (-1)

Remarque La matrice associée à une symétrie vectorielle orthogonale s dans une base orthonormée est :

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a^2+b^2 = 1$$

On constate aisément que $S^2 = I$ et que s est involutive. De plus s est bijective donc s est un automorphisme du plan vectoriel E_2

13-4-2 Valeur propre d'une isométrie de type (S)

Soit f une isométrie vectorielle de type (S) : sa matrice A est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

S'il existe des valeurs propres, λ, elles vérifient l'équation : $\text{dét}(A - \lambda I) = 0$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

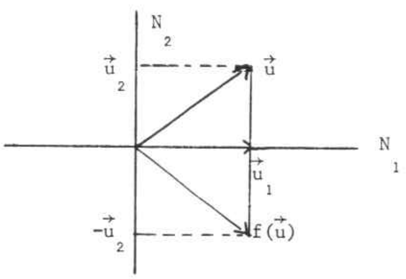
$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \iff -a^2 + \lambda^2 - b^2 = 0$$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 = a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{dét}(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1$$

Les deux valeurs propres +1 et (-1) sont associées à deux espaces propres orthogonaux N_1 et N_2 (cf 12-4-2). La restriction de f à N_1 est l'identité ; la restriction de f à N_2 est l'homothétie vectorielle de rapport (-1). Il existe donc une base orthonormée de E_2 telle que la matrice de f relativement à cette base s'écrive :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Toute isométrie vectorielle de type (S) d'un plan vectoriel euclidien réel E_2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.

13-4-3 Théorème

> Quels que soient les vecteurs normés $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ il existe une symétrie vectorielle orthogonale, et une seule, $\mathcal{S}$, telle que :
> $$\vec{u}' = \mathcal{S}(\vec{u}).$$

Démonstration Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les composantes de $\vec{u}'$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$: $\vec{u}' = a\vec{u} + b\vec{v}$. S'il existe une symétrie vectorielle $\mathcal{S}$ telle que $\vec{u}' = \mathcal{S}(\vec{u})$ elle a nécessairement pour matrice, relativement à la base $(\vec{u},\vec{v})$, $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$. Or il existe une, et une seule, application linéaire ayant S pour matrice, relativement à la base $(\vec{u}, \vec{v})$

EXERCICES SUR LES CHAPITRES 12 et 13

EXERCICE 1

Le plan vectoriel euclidien P est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$

1°) On désigne par p l'application de P vers lui-même définie par :

$$\vec{u} \in P, \qquad \forall \vec{u} \qquad p(\vec{u}) = (\vec{u}.\vec{i})\,\vec{i}$$

a) Démontrer que p est linéaire.

b) Ecrire la matrice de l'application p dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

c) On considère les vecteurs $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{b} = \vec{i}-\vec{j}$

Vérifier que : $p(\vec{a}).p(\vec{b}) \neq \vec{a}.\vec{b}$

Comment peut-on énoncer ce résultat ?

2°) On désigne par s l'application de P vers lui-même définie par :

$$\vec{u} \in P\ , \qquad \forall \vec{u}\ : \qquad s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}$$

a) Démontrer que s est linéaire

b) Ecrire la matrice de l'application s dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

c) Démontrer que :

$$(\vec{u},\vec{v}) \in P^2\ , \quad \forall(\vec{u},\vec{v})\ : \qquad s(\vec{u})\ .\ s(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$$

Comment peut-on énoncer ce résultat ?

EXERCICE 2

Soit f l'application linéaire du plan vectoriel euclidien P vers lui-même, dont la matrice dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ de P est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

1°) Démontrer que :

$$\vec{u} \in P\ , \qquad \forall \vec{u} \qquad \|f(\vec{u})\| = 2\,\|\vec{u}\|$$

2°) Soit h l'homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{2}$

Démontrer que : hof = foh

et que, si l'on pose φ = hof :

$$(\vec{u},\vec{v}) \in P^2\ , \quad \forall(\vec{u},\vec{v})\ : \qquad \varphi(\vec{u})\ .\ \varphi(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$$

Comment peut-on énoncer ce résultat ?

EXERCICE 3

Le plan vectoriel euclidien E_2 est muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle que :

$$\vec{e}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_2^{\,2} = 3 \quad , \quad \vec{e}_1 . \vec{e}_2 = 1$$

1°) On considère l'endomorphisme f de E_2 dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

f est-elle une isométrie vectorielle de E_2 ?

2°) Soit $e_2' = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

Déterminer a et b tels que la base $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ soit orthonormée.

3°) Déterminer la matrice F' de l'application linéaire f relativement à $\mathcal{B}'$. Retrouver alors le résultat de la première question.

EXERCICE 4

Le plan vectoriel euclidien E_2 est muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Etant donnés deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\vec{u}' = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$, on définit l'application bilinéaire φ de $E_2 \times E_2$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}') = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$$

1°) Démontrer que φ définit sur E_2 un produit scalaire et que $\mathcal{B}$ est une base normée de E_2

$\mathcal{B}$ est-elle orthonormée ?

2°) Démontrer qu'il existe deux isométries vectorielles de E_2, dont on précisera les matrices relativement à la base $\mathcal{B}$, transformant $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_2$

EXERCICE 5

Soit E un plan vectoriel euclidien et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Une application linéaire, f, de E dans lui-même a pour matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

où a et b sont des réels donnés.

1°) Déterminer l'ensemble (Δ) des vecteurs de E invariants par f. Lorsque (Δ) est une droite vectorielle on en précisera une base.

2°) Déterminer le noyau , N, de f. Lorsque N est une droite vectorielle on en précisera une base.

3°) On suppose que $a = b$

a/ Démontrer que (Δ) et N sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de E. Définir géométriquement l'application F.

b/ On suppose, de plus, que $a = b = \frac{1}{2}$. Démontrer que f est la projection orthogonale sur (Δ).

c/ On désigne par g la projection orthogonale sur N et par h la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à (Δ). Soit $\vec{v}$ un élément quelconque de E, quelles relations simples peut-on établir entre $\vec{v}$, $f(\vec{v})$, $g(\vec{v})$ et $h(\vec{v})$?

En déduire les matrices, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de g et de h.

4°) On suppose, dans cette question ;

$$(a-b)\ (a-b-1)\ (a-1)\ b \neq 0$$

On se propose d'étudier les vecteurs $\vec{u}$ non nuls de E vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda\, \vec{u}$, ou λ est un réel

a/ Démontrer qu'il existe deux valeurs λ_1 et λ_2 de λ répondant à cette question.

b/ Démontrer que les vecteurs $\vec{u}_1$ associés à λ_1 et les vecteurs $\vec{u}_2$ associés à λ_2 sont les vecteurs de deux sous espaces vectorielles D_1 et D_2 de E

Indiquer une base de D_1 et une base de D_2

Démontrer que D_1 et D_2 sont supplémentaires.

c/ Démontrer que, à tout vecteur $\vec{v}$ de E, on peut associer un élément $\vec{v}_1$ de D_1 et un élément $\vec{v}_2$ de D_2 tels que $f(\vec{v}) = \lambda_1\, \vec{v}_1 + \lambda_2\, \vec{v}_2$

d/ Dans le cas particulier où $a = -1$ et $b = 2$, préciser D_1, D_2 et $f(\vec{v})$

CHAPITRE 14

ORIENTATION D'UN PLAN VECTORIEL - ANGLES

14-1 ORIENTATION D'UN PLAN VECTORIEL

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des bases orthonormées du plan vectoriel euclidien E . Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ deux éléments de $\mathbb{B}$.

14-1-1 Rappel

Etant données deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ d'un plan vectoriel euclidien E_2, il existe une, et une seule, isométrie, f, telle que :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i}' \\ f(\vec{j}) = \vec{j}' \end{cases}$$

Cette isométrie est une rotation si, et seulement si, son déterminant est +1 ; c'est une symétrie orthogonale si, et seulement si son déterminant est (-1).

Or dét f = $\text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}')$. En conclusion :

f est une rotation $\Longleftrightarrow \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}') = +1$
f est une symétrie orthogonale $\Longleftrightarrow \text{dét}_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}') = -1$

14-1-2 Relation d'équivalence sur $\mathbb{B}$

On définit, dans $\mathbb{B}$, la relation binaire, notée R, suivante :

"$\mathcal{B} R \mathcal{B}'$ si, et seulement si, il existe une rotation vectorielle φ telle que $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$ et $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}'$ "

Démontrons que cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathbb{B}$.

- Soit Id l'identité sur E_2. Nous avons :
  $Id(\vec{i}) = \vec{i}$ et $Id(\vec{j}) = \vec{j}$. Or Id est une rotation vectorielle donc, quelle que soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} R \mathcal{B}$: R est réflexive

- Si $\mathcal{B} R \mathcal{B}'$, il existe une rotation vectorielle φ telle que $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$ et $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}'$. Mais alors : $\varphi^{-1}(\vec{i}') = \vec{i}$ et $\varphi^{-1}(\vec{j}') = \vec{j}$. Or φ^{-1} est une rotation vectorielle donc $\mathcal{B}' R \mathcal{B}$; R est symétrique.

- Si $\mathcal{B} R \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' R \mathcal{B}''$ il existe une rotation vectorielle φ telle que $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$ et $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}'$ et une rotation vectorielle Ψ telle que $\Psi(\vec{i}') = \vec{i}''$ et $\Psi(\vec{j}') = \vec{j}''$ Mais alors :

$$(\Psi \circ \varphi)(\vec{i}) = \Psi(\vec{i}') = \vec{i}''$$
$$\text{et } (\Psi \circ \varphi)(\vec{j}') = \Psi(\vec{j}') = \vec{j}''$$

Or $(\Psi \circ \varphi)$ est une rotation vectorielle donc $\mathcal{B} R \mathcal{B}''$: R est transitive.

14-1-3 Théorème

Deux bases orthonormées $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ ont même orientation si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}') = 1$

Ce théorème résulte immédiatement des deux paragraphes précédents.

14-1-4 Recherche des classes d'équivalence

* Il existe au moins deux classes d'équivalence.

En effet soit $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}_1 = (\vec{i}, -\vec{j})$ deux bases orthonormées de E_2 :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}, -\vec{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Donc $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ n'ont pas même orientation.

* Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ une base orthonormée quelconque de E_2. Soit $D = \det_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}')$. Deux cas peuvent se présenter :

- $D = 1$ alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation
- $D = -1$ alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ n'ont pas même orientation. Mais alors :

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\vec{i}', \vec{j}') = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{i}', \vec{j}') = -(-1) = +1$$

donc $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation.

En conclusion $\mathcal{B}'$ appartient soit à la classe de $\mathcal{B}_0$, soit à la classe de $\mathcal{B}_1$.

Théorème

L'ensemble des classes d'équivalence contient deux éléments et deux seulement : la classe de $(\vec{i}, \vec{j})$ et celle de $(\vec{i}, -\vec{j})$.

14-1-5 Définition

Orienter le plan vectoriel euclidien E_2 c'est privilégier l'une des deux bases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$ que l'on qualifie de base orthonormée directe (ou positive)

Choisissons, par exemple, $\mathcal{B}$ directe. Toute base appartenant à la classe de $\mathcal{B}$ est dite directe. Toute base appartenant à la classe de $\mathcal{B}'$ est dite rétrograde ou indirecte ou négative.

14-1-6 MATRICE D'UNE ROTATION VECTORIELLE DANS DEUX BASES ORTHONORMEES DE MEME ORIENTATION

Soit $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ la matrice d'une rotation vectorielle r relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée directe. Soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ une autre base orthonormée directe de E_2. Il existe une rotation vectorielle φ de E_2 telle que $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$ et $\varphi(\vec{j}) = j'$: la matrice de cette rotation relativement à $\mathcal{B}$ est désignée par $P = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

La matrice de r relativement à $\mathcal{B}'$ est donc :

$M' = P^{-1} MP$ Or P et M (matrices de rotations vectorielles) commutent, donc : $M' = M$

La matrice d'une rotation vectorielle est indépendante de la base orthonormée directe choisie.

14-2 COSINUS ET SINUS D'UNE ROTATION VECTORIELLE

Il résulte du théorème ci-dessus que si la matrice d'une rotation vectorielle r, relativement à une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ est $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ les réels a et b sont caractèristiques de la rotation r.

14-2-1 DEFINITION

a est appelé Cosinus de la rotation r et noté Cos r
b est appelé Sinus de la rotation r et noté Sin r

14-2-2 REMARQUE IMPORTANTE

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur unitaire de E_2 :

$r(\vec{u}) = (ax - by)\,\vec{i} + (bx + ay)\,\vec{j}$

d'où : $\vec{u}.r(\vec{u}) = x(ax - by) + y(bx + ay)$ $\quad \vec{u}.r(\vec{u}) = a(x^2 + y^2) = a$

donc : $\boxed{\text{Cos } r = \vec{u}.r(\vec{u})}$

D'autre part, désignons par $\text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{u}, r(\vec{u})\right]$ le déterminant, relativement à $\mathcal{B}$, des vecteurs $\vec{u}$, $r(\vec{u})$:

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{u}, r(\vec{u})\right] = \begin{vmatrix} x & ax - by \\ y & bx - ay \end{vmatrix} = x(bx - ay) - y(ax - by)$$

$$\text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{u}, r(\vec{u})\right] = b(x^2 + y^2) = b$$

donc $\boxed{\text{Sin } r = \text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{u}, r(\vec{u})\right]}$

14-2-3 PROPRIETES

. Il résulte de la définition que :

$\boxed{\text{Cos}^2 r + \text{Sin}^2 r = 1}$

. Si r et r' sont deux rotations vectorielles dont les matrices relativement à une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$$

(ror') est une rotation vectorielle dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$M \times M' = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -(ba' + ab') \\ ba' + ab' & aa' - bb' \end{bmatrix}$$

Il en résulte que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Cos (ror')} = \text{Cos } r \text{ Cos } r' - \text{Sin } r \text{ Sin } r' \\ \text{Sin (ror')} = \text{Sin } r \text{ Cos } r' + \text{Sin } r' \text{ Cos } r \end{array}}$$

• En particulier si $r' = r$ et si l'on pose $r^2 = ror$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Cos } (r^2) = \text{Cos}^2 r - \text{Sin}^2 r \\ \text{Sin } (r^2) = 2 \text{ Sin } r \text{ Cos } r \end{array}}$$

• En fin, si r est la rotation vectorielle définie ci-dessus, r^{-1} est la rotation vectorielle dont la matrice, relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$ Il en résulte que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Cos } r^{-1} = \text{Cos } r \\ \text{Sin } r^{-1} = - \text{Sin } r \end{array}}$$

14-3 ANGLES DE DEUX VECTEURS UNITAIRES

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien E_2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux éléments de $\mathcal{U}$: il existe une rotation vectorielle r, et une seule, telle que $\vec{u}' = r(\vec{u})$.

Si $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des rotations vectorielles de E_2 désignons par Φ l'application de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{R}$ qui, au couple $(\vec{u}, \vec{u}')$ associe la rotation r.

14-3-1 RELATION D'EQUIVALENCE SUR $\mathcal{U}^2$

On définit, dans $\mathcal{U}^2$, la relation binaire, notée $\sim$, suivante :

" $(\vec{u},\vec{u}') \sim (\vec{v},\vec{v}')$ si, et seulement si, $\Phi(\vec{u},\vec{u}') = \Phi(\vec{v},\vec{v}')$ "

en d'autres termes :

" $(\vec{u},\vec{u}') \sim (\vec{v}, \vec{v}')$ si, et seulement si, il existe une rotation r telle que :

$\vec{u}' = r(\vec{u})$ et $\vec{v}' = r(\vec{v})$ "

Il résulte immédiatement des propriétés de l'égalité dans $\mathcal{R}$ que la relation notée r est une relation d'équivalen

14-3-2 DEFINITION

Chaque classe d'équivalence est un angle.

L'angle dont $(\vec{u},\vec{u}')$ est un représentant est noté $\widehat{(\vec{u},\vec{u}')}$.

L'ensemble des angles sera, dans la suite de ce cours, noté $\mathcal{A}$.

14-3-3 GROUPE ADDITIF DES ANGLES

Par définition, à tout angle $\widehat{\varphi}$ est associée la rotation vectorielle unique r telle que $\vec{u}' = r(\vec{u})$, où $(\vec{u},\vec{u}')$ est un représentant quelconque de $\widehat{\varphi}$.

Réciproquement, à r est associé l'angle unique $\widehat{\varphi}$ de représentant $[\vec{u}, r(\vec{u})]$

Le schéma ci-dessous montre comment on peut munir $\mathcal{A}$ d'une loi interne appelée addition et notée +

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Ensemble des rotations} & & \text{Ensemble des angles} \\
\mathcal{R} & \xleftrightarrow{\quad\text{bijection}\quad} & \mathcal{A} \\
r & \longleftrightarrow & \widehat{\varphi} \\
r' & \longleftrightarrow & \widehat{\theta} \\
\text{loi o}\ \big\downarrow & & \big\downarrow\ \text{loi +} \\
ror' = r'or & \longleftrightarrow & \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi} + \widehat{\theta}
\end{array}
$$

$(\mathcal{R}, o)$ étant un groupe commutatif, il résulte de l'isomorphisme ainsi défini que :

> L'ensemble des angles, muni de l'addition, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe (O_+^2, o) des rotations vectorielles et au groupe $([O_+^2], \times)$ des matrices orthogonales à déterminant +1

- L'élément neutre est <u>l'angle nul</u>, noté $\widehat{0}$, associé à l'application identique. Un représentant de $\widehat{0}$ est $(\vec{u}, \vec{u})$.
- Le symétrique de $\widehat{\varphi}$ associé à la rotation r est l'angle noté $(-\widehat{\varphi})$ associé à la rotation r^{-1}. Si $(\vec{u}, \vec{u}')$ est un représentant de $\widehat{\varphi}$, $(\vec{u}', \vec{u})$ est un représentant de $(-\widehat{\varphi})$

14-4 ANGLES DE DEUX VECTEURS QUELCONQUES

14-4-1 DEFINITION

> Etant donnés deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ non nuls d'un plan vectoriel euclidien E_2, désignons par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ et $\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}'$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont unitaires.
>
> L'angle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ est par définition, l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

On note $\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} = \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$

14-4-2 RELATION DE CHASLES

Soit $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ trois vecteurs non nuls de E_2 et soit

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 \quad , \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \quad , \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3$$

posons $\widehat{\varphi} = \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}$ et $\widehat{\varphi}' = \widehat{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)}$

Soit r et r' les rotations vectorielles associées respectivement aux angles $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\varphi}'$. Nous avons :

$$\vec{u}_2 = r(\vec{u}_1) \text{ et } \vec{u}_3 = r'(\vec{u}_2) \text{ d'où : } \vec{u}_3 = (r'or)(\vec{u}_1)$$

Or l'angle associé à $(r'or)$ est $\widehat{\varphi}' + \widehat{\varphi}$ donc :

$\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_3)} = \widehat{\varphi}' + \varphi$. Il en résulte que :

$\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} + \widehat{(\vec{u}_2, \vec{u}_3)} = \widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_3)}$ et donc que :

$$\boxed{\widehat{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)} + \widehat{(\vec{v}_2, \vec{v}_3)} = \widehat{(\vec{v}_1, \vec{v}_3)}}$$

Cette relation est connue sous le nom de relation de CHASLES.

14-4-3 COSINUS ET SINUS DE L'ANGLE DE DEUX VECTEURS

Le plan vectoriel euclidien E_2 étant rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ soit $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs non nuls de E_2 et soit $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ et $\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}'$. Il existe une rotation vectorielle unique r telle que : $\vec{u}' = r(\vec{u})$

soit $\widehat{\varphi} = \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$

Par définition :

> On appelle Cosinus de l'angle $\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$ le cosinus de la rotation r :
>
> $$\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \text{Cos } r$$

Il résulte du paragraphe 13-2-2 que :

$$\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \text{Cos } r = \vec{u}.\vec{u}' = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right).\left(\frac{1}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}'\right)$$

Soit $$\boxed{\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \frac{\vec{v}.\vec{v}'}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\|}}$$

$$\text{Sin}\,\widehat{\varphi} = \text{Sin } r = \text{dét}_{\mathcal{B}}\left[\vec{u}, \vec{u}'\right] = \frac{1}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\|}\,\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{v}, \vec{v}')$$

$$\boxed{\text{Sin}\,\widehat{\varphi} = \frac{\text{dét}_{\mathcal{B}}\,(\vec{v},\vec{v}')}{\|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\|}}$$

Si $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, $\vec{v}.\vec{v}' = xx' + yy'$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\|\vec{v}'\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

et il vient $$\boxed{\text{Cos}\,\widehat{\varphi} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{et } \text{Sin}\,\widehat{\varphi} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}}}$$

14-4-4 FORMULES D'ADDITION ET DE DUPLICATION

Des formules démontrées au paragraphe 13-2-3 donnant le Cosinus et le Sinus de la rotation composée des deux rotations r et r', il résulte que, si $\widehat{\varphi}$ est l'angle associé à r et $\widehat{\theta}$ l'angle associé à r' :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\,(\widehat{\varphi}+\widehat{\theta}) &= \text{Cos}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,\widehat{\theta} - \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Sin}\,\widehat{\theta} \\ \text{Sin}\,(\widehat{\varphi}+\widehat{\theta}) &= \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,\widehat{\theta} + \text{Sin}\,\widehat{\theta}\ \text{Cos}\,\widehat{\varphi} \end{aligned}}$$

- En particulier si $\widehat{\theta} = \widehat{\varphi}$ en notant $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = 2\widehat{\varphi}$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\ 2\widehat{\varphi} &= \text{Cos}^2\widehat{\varphi} - \text{Sin}^2\widehat{\varphi} \\ \text{Sin}\ 2\widehat{\varphi} &= 2\ \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,\widehat{\varphi} \end{aligned}}$$

- Si $\widehat{\varphi}$ est associé à r, $(-\widehat{\varphi})$ est associé à r^{-1} d'où

$$\boxed{\text{Cos}\,(-\widehat{\varphi}) = \text{Cos}\,\widehat{\varphi} \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,(-\widehat{\varphi}) = -\,\text{Sin}\,\widehat{\varphi}}$$

- Par suite

$$\text{Cos}\,(\widehat{\varphi}-\widehat{\theta}) = \text{Cos}\left[\widehat{\varphi} + (-\widehat{\theta})\right] = \text{Cos}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,(-\widehat{\theta}) - \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Sin}\,(-\widehat{\theta})$$

soit : $$\boxed{\text{Cos}\,(\widehat{\varphi}-\widehat{\theta}) = \text{Cos}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,\widehat{\theta} + \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Sin}\,\widehat{\theta}}$$

de même $$\text{Sin}\,(\widehat{\varphi}-\widehat{\theta}) = \text{Sin}\left[\widehat{\varphi} + (-\widehat{\theta})\right] = \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,(-\widehat{\theta}) + \text{Sin}\,(-\widehat{\theta})\ \text{Cos}\,\widehat{\varphi}$$

Soit $$\boxed{\text{Sin}\,(\widehat{\varphi}-\widehat{\theta}) = \text{Sin}\,\widehat{\varphi}\ \text{Cos}\,\widehat{\theta} - \text{Sin}\,\widehat{\theta}\ \text{Cos}\,\widehat{\varphi}}$$

14-5 ANGLES REMARQUABLES

Le plan vectoriel euclidien E_2 est rapporté à une base orthonormée <u>directe</u> $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

14-5-1 ANGLE NUL

> L'angle nul, noté $\widehat{0}$, élément neutre de $(\mathcal{A}, +)$ est par définition l'angle de représentant $(\vec{u}, \vec{u})$ associé à l'application identique de E_2:
>
> $$\operatorname{Cos} \widehat{0} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin} \widehat{0} = 0$$

14-5-2 ANGLE PLAT

Cherchons à résoudre dans $(\mathcal{A}, +)$ l'équation :
$\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = \widehat{0}$, $\widehat{\varphi}$ étant l'inconnue. Soit $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ la matrice associée à $\widehat{\varphi}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

$\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = \widehat{0}$ se traduit **par** $A \times A = I$ soit :

$$\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ ab = 0 \end{cases}$

a ne peut être nul car alors on aurait $b^2 = -1$ donc $b = 0$ et, $a = 1$ ou $a = -1$. Ceci conduit aux deux matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarquons que la matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ est associée à l'homothétie vectorielle de rapport (-1)

> L'angle plat, noté $\widehat{p}$ est par définition l'angle de représentant $(\vec{u}, -\vec{u})$ associé à l'homothétie vectorielle de rapport (-1)
>
> $$\operatorname{Cos} \widehat{p} = -1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin} \widehat{p} = 0$$

14-5-3 ANGLES DROITS

Cherchons à résoudre dans $(\mathcal{A}, +)$ l'équation $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = \widehat{p}$ où $\widehat{\varphi}$ est l'inconnue.
Si $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ l'équation proposée se traduit par :

$$\begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = 0 \end{cases}$

b ne peut être nul car alors on aurait $a = -1$, donc $a = 0$ et, $b = 1$ ou $b = -1$. Ceci conduit aux deux matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons qu'au vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ la rotation vectorielle associée à A_1 fait correspondre le vecteur $\vec{u}' = -y\vec{i} + x\vec{j}$; la rotation vectorielle associée à A_2 fait correspondre, à $\vec{u}$, le vecteur $\vec{u}'' = y\vec{i} - x\vec{j} = -\vec{u}'$. De plus $\vec{u}.\vec{u}' = \vec{u}.\vec{u}'' = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$ sont tous deux orthogonaux à $\vec{u}$.

L'angle défini par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est appelé angle droit positif et noté $\widehat{d}^+$, l'angle défini par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ est appelé angle droit négatif et noté $\widehat{d}^-$. Ces deux angles sont opposés et $2\widehat{d}^+ = 2\widehat{d}^- = \widehat{p}$

CHAPITRE 15

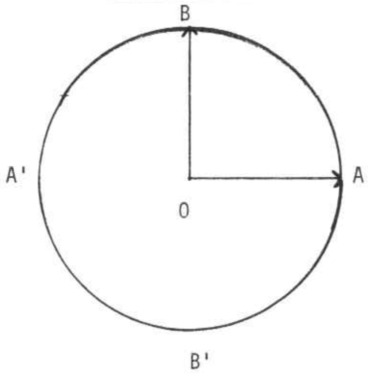
MESURE DES ANGLES

15-1 CERCLE TRIGONOMETRIQUE

Soit E_2 un plan vectoriel euclidien orienté, et soit P un plan affine associé au plan vectoriel euclidien orienté E_2 .

15-1-1 Définition

On appelle cercle trigonométrique de P tout couple (C, A) où C est un cercle de rayon 1 inclus dans P et A un point de C.



On désigne par

a) O le centre du cercle C

b) $\vec{i}$ le vecteur unitaire $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{j}$ le vecteur unitaire $\overrightarrow{OB}$ tel que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé direct de P.

c) A' et B' les points diamétralement opposés à A et B

15-1-2 Remarque 1

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles. A tout élément $\widehat{\varphi}$ de $\mathcal{A}$ est associée la rotation vectorielle φ . Le transformé par la rotation vectorielle φ du vecteur unitaire $\vec{i}$ est un vecteur unitaire. Il en résulte que le point M du plan P défini par $\overrightarrow{OM} = \varphi(\vec{i})$ appartient au cercle C.

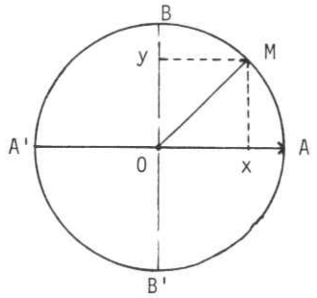
Soit $f : \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow C \\ \widehat{\varphi} \longmapsto M \end{array}$

f est une bijection car $f(\widehat{\varphi}) = M \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \varphi(\vec{i})$

Théorème

Soit (C, A) un cercle trigonométrique de centre O. L'application f, qui à tout angle $\widehat{\varphi}$ fait correspondre le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \varphi(\overrightarrow{OA})$ est une bijection de $\mathcal{A}$ sur C.

15-1-3 Remarque 2



* l'image de l'angle nul O est A ;

l'image de l'angle plat $\widehat{p}$ est A' ; enfin $\widehat{\varphi} = \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})}$

* Si le point M a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan P alors

$$\text{Cos } \widehat{\varphi} = \text{Cos } \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \frac{\vec{OA}.\vec{OM}}{\|\vec{OA}\|\,\|\vec{OM}\|} = x$$

$$\text{Sin } \widehat{\varphi} = \text{Sin } \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \frac{\text{dét}_{(\vec{i},\vec{j})}\,(\vec{OA}, \vec{OM})}{\|\vec{OA}\|\,\|\vec{OM}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OM}\|} = y$$

* Réciproquement :

Tout point M dont les coordonnées sont $\text{Cos } \widehat{\varphi}$ et $\text{Sin } \widehat{\varphi}$ appartient à C car $\text{Cos}^2 \widehat{\varphi} + \text{Sin}^2 \widehat{\varphi} = 1$; M est le point tel que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \widehat{\varphi}$.

15-2 APPLICATIONS CANONIQUE θ DE $\mathbb{R}$ VERS $\mathcal{A}$

15-2-1 Axiomes de définition de θ

Axiome 1 : Il existe une application θ de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{A}$ telle que :

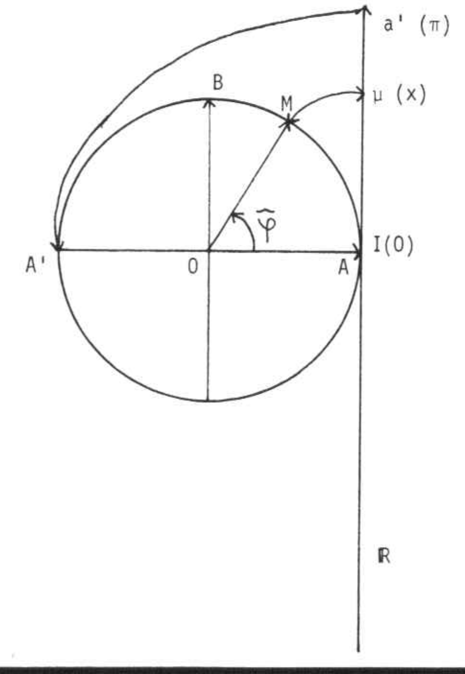
$$(x, x') \in \mathbb{R}^2 \text{ , } \forall (x, x') \quad [\theta(x + x') = \theta(x) + \theta(x')]$$

Axiome 2 : Il existe un réel strictement positif, noté π, tel que $\theta(\pi) = \widehat{p}$

La restriction de θ à $]-\pi , \pi]$ est une bijection de $]-\pi , \pi]$ sur $\mathcal{A}$.

15-2-2 Interprétation intuitive de θ

On peut "assimiler" θ à un enroulement d'un fil autour d'un cylindre.



$$x \longmapsto \widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} = \widehat{\varphi} = \theta(x)$$

$$\pi \longmapsto \widehat{(\vec{OA}, \vec{OA'})} = \widehat{p} = \theta(\pi)$$

15-2-3 Conséquences

* $(x \in \mathbb{R})\ (\forall x)\quad \theta(x + 0) = \theta(x) + \theta(0) = \theta(x)$

donc $\boxed{\theta(0) = \widehat{0}}$

* $(x \in \mathbb{R})\ (\forall x)\qquad \widehat{0} = \theta(x - x) = \theta\left[(x) + (-x)\right] = \theta(x) + \theta(-x)$

donc $\boxed{\theta(-x) = -\theta(x)}$

* $(x \in \mathbb{R})\ (\forall x)$

$\theta(2x) = \theta(x + x) = \theta(x) + \theta(x) = 2\,\theta(x)$

Par récurrence nous obtenons

$(n \in \mathbb{N})\ \theta(nx) = n\,\theta(x)$ et plus généralement d'après la conséquence précédente :

$(k \in \mathbb{Z})\quad \theta(kx) = k\,\theta(x)$

$$\boxed{x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\quad (\forall x)\ (\forall k)\quad \theta(kx) = k\,\theta(x)}$$

* $\theta(2\pi) = 2\,\theta(\pi) = 2\,\widehat{p}$

Or nous savons que $2\,\widehat{p} = \widehat{0}$

donc $\boxed{\theta(2\pi) = \widehat{0}}$

et $\boxed{(k \in \mathbb{Z})\ (\forall k)\quad \theta(2k\pi) = k\,\theta(2\pi) = \widehat{0}}$

$$\boxed{x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\quad (\forall x)\ (\forall k)\quad \theta(x + 2k\pi) = \theta(x)}$$

$\widehat{p} = \theta(\pi) = \theta(2\,\frac{\pi}{2}) = 2\,\theta(\frac{\pi}{2})$

Ainsi $\theta(\frac{\pi}{2})$ est solution de l'équation définie par $2\widehat{\varphi} = \widehat{p}$. Nous savons que ces solutions sont $\widehat{d}^+$ et $\widehat{d}^-$. Nous aurons ainsi $\boxed{\theta(\frac{\pi}{2}) = \widehat{d}^+}$

15-3 GROUPE ADDITIF $(\mathbb{R}/_{2\pi Z}, +)$

15-3-1 Définition

Nous savons que

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right|\ (\forall x)\ (\forall k)\quad \theta(x + 2k\pi) = \theta(x).$$

Ainsi si 2 nombres réels x et x' sont tels que $x' - x = k(2\pi)$ alors $\theta(x) = \theta(x')$.

Considérons la relation binaire définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $x\ \mathcal{R}\ x' \Longleftrightarrow x' - x = k(2\pi)\ \ (k \in \mathbb{Z})$.

* Elle est réflexive   Quel que soit le réel x :

$x - x = 0 = 0 \times 2\pi$

* Elle est symétrique   Quels que soient les réels x et x'

$|x - x' = 2k\pi \Longleftrightarrow x' - x = -2k\pi = (-k)\,(2\pi)\ (k \in \mathbb{Z})$

* Elle est transitive   Quels que soient les réels x, x' et x''

$$\left\{\begin{array}{l} x - x' = k(2\pi) \\ x' - x'' = k'(2\pi) \end{array}\right\} \Longrightarrow (x - x') + (x' - x'') = (x - x'') = (k + k')(2\pi)$$

$$(k \in \mathbb{Z}\ ,\ k' \in \mathbb{Z}\ ,\ k + k' \in \mathbb{Z}).$$

Conclusion :

La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$; on l'appelle congruence modulo 2π

On notera $x \mathcal{R} x'$ par $x \equiv x'\ (2\pi)$

Définition

L'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et on l'appelle ensemble des réels modulo 2π

Remarque

Toute classe d'équivalence a un représentant et un seul dans $]-\pi\ ,\ \pi]$

$\dot{x} = \{x_k\ ,\ x_k = x + k(2\pi)\ \ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, x, x + 2\pi, \ldots\}$

On identifiera souvent une classe $\dot{x}$ d'équivalence à son représentant x dans $]-\pi\ ,\ \pi]$.

15-3-2 Structure de $(\mathbb{R}/_{2\pi Z}, +)$

Soit $\dot{x} \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et $\dot{y} \in \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$

Quels que soient les éléments x et x' de $\dot{x}$, il existe k tel que $x' = x + k2\pi$ et quels que soient les éléments y et y' de $\dot{y}$ il existe k' tel que $y' = y + k'2\pi$

Ainsi $x' + y' = x + y + (k+k')(2\pi)$ avec $k + k' \in \mathbb{Z}$

Donc $x' + y' \in \dot{\widehat{x + y}}$

Par définition : $\dot{x} + \dot{y} = \dot{\widehat{x + y}}$

L'addition dans $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ est associative et commutative.

. De plus : $\dot{0} + \dot{x} = \dot{\widehat{0 + x}} = \dot{x}$

Donc $\dot{0}$ est élément neutre de $(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}, +)$

. $x \in \mathbb{R}$, $(\forall x)$ $\dot{0} = \dot{\widehat{x + (-x)}} = \dot{x} + \dot{\widehat{(-x)}}$ donc $-\dot{x} = \dot{\widehat{(-x)}}$

Tout élément de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ admet un opposé dans $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$

Théorème

$\boxed{(\mathbb{R}/_{2\pi Z}, +) \text{ est un groupe commutatif}}$

15-4 MESURE DES ANGLES

15-4-1 Introduction

a) Soit $f : \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow]-\pi , \pi]$

$$\dot{x} \longrightarrow x.$$

f est bijective d'après la remarque du paragraphe 15-3-1

b) La restriction de θ à $]-\pi , \pi] = I$ est bijective d'après l'axiome 2

$$\theta/_I \ : \ ]-\pi , \pi] \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$x \longrightarrow \theta(x) = \hat{\varphi}$$

Nous en déduisons que $(\theta \circ f)$ est bijective de $R/_{2\pi Z}$ dans $\mathcal{A}$

Soit $\dot{x}$ un élément de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ de x représentant x dans $]-\pi, \pi]$
et soit $\dot{y}$ un élément de $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ de y représentant y dans $]-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}(\theta \circ f)(\dot{x} + \dot{y}) &= \theta[f(\dot{x}+\dot{y})] = \theta[f(\dot{\overline{x+y}})] = \theta(x + y)\\ &= \theta(x) + \theta(y) = \theta[f(\dot{x})] + \theta[f(\dot{y})]\\ &= (\theta \circ f)(\dot{x}) + (\theta \circ f)(\dot{y})\end{aligned}$$

Donc : $(\theta \circ f)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} , +)$ vers $(G, +)$

On peut schématiser cette démonstration :

$$\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \xrightarrow{\quad f \quad}]-\pi, +\pi] \xrightarrow{\quad \theta \quad} \mathcal{A}$$

$$\dot{x} \longrightarrow x \longrightarrow \widehat{\varphi} = \theta(x)$$

$$\dot{y} \longrightarrow y \longrightarrow \widehat{\varphi}' = \theta(y)$$

addition (à gauche) — addition (à droite)

$\dot{x} + \dot{y} \longrightarrow$

l'addition n'est pas interne dans $]-\pi, +\pi]$.
Toutefois il existe un représentant $(x+y)$ de $\dot{x} + \dot{y}$ dans $]-\pi, +\pi]$

$\longrightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}' = \theta(x) + \theta(y)$

$\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}' = \theta(x+y)$

15-4-2 Théorème et définition

D'après l'étude précédente.

a) Il existe un isomorphisme du groupe commutatif $(\mathbb{R}/_{2\pi}\ \mathbb{Z}, +)$ sur le groupe commutatif $(\mathcal{A}, +)$

b) L'élément de $\mathbb{R}/_{2\pi}\ \mathbb{Z}$ ainsi associé à un angle est appelé *mesure* de cet angle.

Remarques : • La mesure d'un angle $\widehat{\varphi}$ est donc *un réel x modulo* 2π ou encore $\dot{x}$

Ainsi : mes $\widehat{\varphi} = \dot{x} = \{x \ ; \ x \in \mathbb{R} \ / \ \theta(x) = \widehat{\varphi}\}$.

• Tout représentant de mes $\widehat{\varphi}$ s'appelle *détermination* de $\widehat{\varphi}$

• Le représentant appartenant à $]-\pi, +\pi]$ s'appelle *détermination principale* de $\widehat{\varphi}$.

• Exemples : mes $\widehat{p} = (\dot{\pi}) = \{x/x = \pi + 2k\pi\}$

mes $\widehat{d^+} = (\dot{\frac{\pi}{2}}) = \{x/x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

• Par abus de langage on confond souvent *détermination* et *mesure* d'un angle. (Par exemp on dit souvent "soit un angle de mesure $\frac{\pi}{6}$" au lieu de "soit un angle de mesure $(\dot{\frac{\pi}{6}})$".

15-4-3 Autres systèmes de mesures

L'existence de θ étant admise il existe d'autres applications de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{A}$ possédant des propriété analogues à celles de θ.

Soit α : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$

$x \longmapsto \alpha(x) = \theta(\lambda x)$ où λ est un réel fixé

Nous avons alors :

$(\forall x)\ (x \in \mathbb{R})$
$(\forall x')\ (x' \in \mathbb{R})$ $\quad \alpha(x + x') = \theta[\lambda(x + x')] = \theta(\lambda x + \lambda x') = \theta(\lambda x) + \theta(\lambda x') = \alpha(x) + \alpha(x')$

a) $\boxed{\text{Si } \lambda = \frac{\pi}{180}}$ désignons par α_{180} l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ telle que

$(\forall x)\ (x \in \mathbb{R})\ \alpha_{180}(x) = \theta(\frac{\pi}{180}x)$

donc α_{180} est une fonction de période 360.

. Nous sommes conduits à étudier la relation

$$x \mathcal{R} x' \Longleftrightarrow x - x' = 360\,k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

qui est une relation d'équivalence.

. L'ensemble des classes d'équivalence est $\mathbb{R}/_{360\,\mathbb{Z}}$ et il existe un isomorphisme entre $(\mathbb{R}/_{360\,\mathbb{Z}}, +)$ et $(\mathcal{A}, +)$

. Nous avons ainsi déterminé un autre système de mesure des angles.

b) Si $\lambda = \frac{\pi}{200}$ soit $\alpha_{200} : x \longrightarrow \alpha_{200}(x) = \theta(\frac{\pi}{200})\,x)$.

On définit aussi un autre système de mesure

15-4-4 Unités d'angles

a) La mesure d'un angle dans chacun de ces systèmes est un élément de $R/_{2\pi\,\mathbb{Z}}$; $R/_{360\,\mathbb{Z}}$; $R/_{400\,\mathbb{Z}}$

b) . On appelle *radian* l'angle $\theta(1)$ image du nombre réel 1 par θ.

. On appelle *degré* l'angle $\alpha_{180}(1)$

. On appelle *grade* l'angle $\alpha_{200}(1)$

le *radian*, le *degré*, le *grade* sont donc les unités d'angles des trois systèmes considérés.

c) On sait que $\theta(\pi) = \hat{p}$

D'après les définitions de α_{180} et α_{200} nous avons :

$$\alpha_{180}\,(180) = \theta(\frac{\pi}{180} \times 180) = \theta(\pi) = \hat{p}$$

$$\alpha_{200}\,(200) = \theta(\frac{\pi}{200} \times 200) = \theta(\pi) = \hat{p}$$

Ainsi $\boxed{\hat{p} = \theta(\pi) = \alpha_{180}\,(180) = \alpha_{200}\,(200)}$

Les mesures de $\hat{p}$ dans les systèmes précédents sont respectivement : $\dot{\pi}$, $\dot{180}$, $\dot{200}$.

Les déterminations principales de $\hat{p}$ sont donc respectivement π, 180, 200.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 15

EXERCICE 1

Un plan vectoriel euclidien P est orienté et rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ telle que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et une détermination de $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$ est α où α $]0, \pi[$

Calculer, en fonction de $\cos \alpha$, la matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, de la rotation vectorielle f telle que $f(\vec{i}) = \vec{j}$.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle $]-2 ; +2[$. On rappelle que E, muni de l'addition, et de la multiplication externe par les réels, ainsi définies :

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x) \qquad \text{pour tout } (f, g) \in E \times E$$

$$\lambda f : x \longmapsto \lambda f(x) \qquad \text{pour tout } (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux fonctions f_1, f_2, ainsi définies :

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pour tout $x \in]-2 ; +2[$

Montrez que (f_1, f_2) est une base de F.

2. Soit P le plan vectoriel euclidien orienté et soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de P. On désigne par T l'ensemble des transformations orthogonales de P, dont la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$, vérifie $(a - b)^2 = 1$. Déterminer tous les éléments de T (préciser les angles de rotation, et les axes de symétries).

3. Soit φ l'endomorphisme de F, dont la matrice par rapport à la base (f_1, f_2) est la matrice A, représentant la rotation vectorielle d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans P, par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'image par φ de la fonction $g = 2f_1 + f_2$.

CHAPITRE 16

ISOMETRIES VECTORIELLES D'UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$ DE DIMENSION 3

16-1 PROPRIETES GENERALES - RAPPELS

16-1-1 Définition

Une application f de E_3 sur E_3 , espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension 3 est une isométrie de E_3 si f conserve le produit scalaire défini sur E_3 c'est-à-dire :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E_3 \times E_3 \qquad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \qquad f(\vec{u}) \cdot f(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$$

16-1-2 Conséquences (cf chapitre 11)

* f est un endomorphisme de E_3
* f est une isométrie si, et seulement si, f est un endomorphisme conservant la norme
* f est une isométrie si, et seulement si, l'image d'une base orthonormée par l'endomorphisme f est une base orthonormée
* L'ensemble $O(E_3)$ des isométries de E est un groupe, appelé groupe orthogonal de E

16-2 MATRICES ASSOCIEES A UNE ISOMETRIE DE E_3

16-2-1 Matrice d'une isométrie

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E_3 . L'image par l'isométrie f de E_3 de la base $\mathcal{B}$ est une base orthonormée

donc : $[f(\vec{i})]^2 = 1$; $[f(\vec{j})]^2 = 1$; $[f(\vec{k})]^2 = 1$

$f(\vec{i}) \cdot f(\vec{j}) = 0$; $f(\vec{i}) \cdot f(\vec{k}) = 0$; $f(\vec{j}) \cdot f(\vec{k}) = 0$

Ainsi la matrice d'une isométrie f de E_3 est de la forme suivante :

$$A = M(f,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec les conditions suivantes :}$$

$$(C)\quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \end{cases}$$

Une telle matrice est appelée <u>matrice orthogonale</u>.

16-2-2 Déterminant et inverse de la matrice d'une isométrie de E_3

Soit A la matrice orthogonale d'une isométrie f et soit A^t sa matrice transposée.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Les conditions (C) précédentes étant vérifiées, <u>calculons $A^t \times A$</u> ; les conditions (C) étant remplies :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il résulte de ce calcul que $A^t.A = I$ où I est la matrice carrée unité d'ordre 3.

Nous en déduisons donc que :

* A est inversible et $A^{-1} = A^t$

* dét $A \times$ dét $A^t = 1$. Or dét A^t = dét A, donc (dét $A)^2 = 1$, ainsi (dét $A = 1$ ou dét $A = -1$).

> Le déterminant d'une isométrie vectorielle de E_3 est égal à +1 ou -1.

16-2-3 Définition

> On appelle <u>rotation vectorielle de E_3 (ou isométrie directe ou positive)</u> toute isométrie de E_3 de déterminant +1. L'ensemble des rotations est noté $O^+(E_3)$.
>
> On appelle <u>isométrie indirecte ou négative</u> toute isométrie de E_3 de déterminant -1. L'ensemble des isométries négatives est noté $O^-(E_3)$.

16-2-4 Le sous groupe $O^+(E_3)$

Nous savons que $(O(E_3), \circ)$ est un groupe.

* $O^+(E_3)$ est non vide car IdE_3 est élément de $O^+(E_3)$

* Si f et g sont éléments de $O^+(E_3)$ alors dét $f = +1$, dét $g = +1$. Or dét$(g \circ f)$ = dét $g \times$ dét f donc dét $(g \circ f) = +1$ et $O^+(E_3)$ est stable pour la loi O.

* Si f est élément de $O^+(E_3)$ alors f^{-1} existe et le déterminant de f^{-1} est $\dfrac{1}{\text{dét } f} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc f^{-1} est élément de $O^+(E_3)$.

> L'ensemble des rotations de E_3 est un sous-groupe du groupe orthogonal de E_3

Remarque : Si $f \in O^-(E_3)$ et si $g \in O^-(E_3)$ alors dét$(g \circ f)$ = dét $g \times$ dét $f = (-1)\ (-1) = 1$ donc $O^-(E_3)$ n'est pas stable pour la loi O. Mais :

> La composée de 2 isométries négatives est une rotation.

16-3 DETERMINATION DES VALEURS PROPRES D'UNE ISOMETRIE. SOUS-ESPACES INVARIANTS.

16-3-1 Valeur propre d'une rotation de E_3

Démontrons que 1 est valeur propre d'une rotation f de E_3. Calculons dét$(A - I)$ où A est la matri[c]e de la rotation f relativement à une base orthonormée. Nous savons que $AA^t = I$ et que dét $A = 1$

Il en résulte que : dét$(A - I)$ = dét$(A - AA^t)$ = dét $A \times$ dét$(I - A^t)$

or $I - A^t = (I - A)^t$ donc dét$(I - A)^t$ = dét$(I-A)$ Par suite :

dét$(A - I) = 1 \times$ dét$(I - A) = (-1)^3$ dét$(A - I)$ = - dét$(A-I)$

d'où dét$(A - I)$ = - dét$(A - I) = 0$.

> 1 est valeur propre de toute rotation de E_3.

16-3-2 Valeur propre d'une isométrie indirecte ou négative de E_3

Par un raisonnement analogue on démontre que - 1 est valeur propre de toute isométrie négative.

> -1 est valeur propre de toute isométrie négative de E_3.

16-3-3 Théorème

> Pour toute isométrie vectorielle f de E_3, il existe une droite vectorielle Δ globalement invariante par f. Le plan vectoriel π, orthogonal à Δ, est également globalement invariant

* 1 est valeur propre de toute rotation. Soit $\vec{a}$ un vecteur propre associé à +1 et soit Δ la droite vectorie[l] engendrée par $\vec{a}$.

Quel que soit $\vec{u}$, élément de Δ ,il existe α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{a}$ alors :

$$f(\vec{u}) = f(\alpha\vec{a}) = \alpha\, f(\vec{a}) = \alpha\vec{a} = \vec{u}$$

En conclusion : si $\vec{u} \in \Delta$ $f(\vec{u}) \in \Delta$

* (-1) est valeur propre de toute isométrie négative. Soit $\vec{a}'$ un vecteur propre associé et soit Δ' la droite vectorielle engendrée par $\vec{a}'$

$$\vec{u}' \in \Delta' \quad (\forall \vec{u}') \qquad f(\vec{u}') = -\vec{u}'$$

En conclusion si $\vec{u}' \in \Delta$, $f(\vec{u}) \in \Delta'$.

* Soit π le sous-espace vectoriel de E_3 orthogonal à Δ, droite vectorielle globalement invariante

Soit $\vec{x}$ un vecteur de π et $\vec{u}$ un vecteur de Δ :

$$\vec{x}.\vec{u} = 0 \text{ , donc } f(\vec{x}) \,.\, f(\vec{u}) = \vec{x}.\vec{u} = 0$$

puisque f conserve le produit scalaire. Or $f(\vec{u})$ appartient à Δ donc $f(\vec{x})$ est élément de π.

Remarque importante

> Il résulte de ce théorème que la restriction de f au plan vectoriel π est une isométrie de π

16-4 ETUDE DES ROTATIONS VECTORIELLES DE E

Nous savons que 1 est valeur propre de toute rotation vectorielle f de E_3 et qu'il existe une droite vectorielle Δ dont tout vecteur est invariant par f. De plus, la restriction de f à $\Delta^{\perp} = \pi$ est une isométrie de π (cf 16-3-1 et 16-3-3), soit B une base orthonormée directe de E_3 , formée d'un vecteur normé $\vec{e}_1$ de Δ et de deux vecteurs normés orthogonaux, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, de π.

Relativement à B la matrice A de f s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix}$}} \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

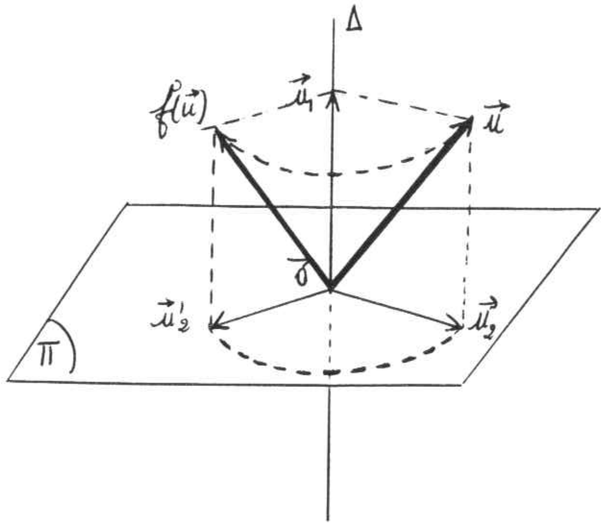
où A_1 est la matrice de $f/_{\pi}$ relativement à la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Le déterminant de A étant + 1, celui de A_1 est nécessairement égal à + 1 et la restriction de f à π est une rotation vectorielle, donc :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$



Théorème

Pour toute rotation vectorielle de E_3, il existe une base orthonormée de E_3 relativement à laquelle la matrice A de la rotation s'écrit : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

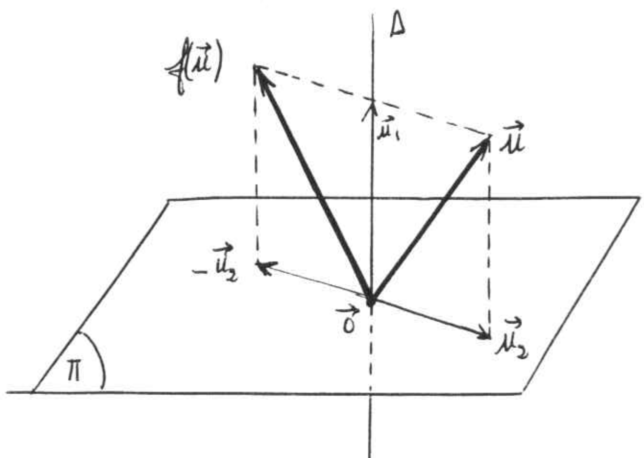
Cas particuliers

* Si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f est l'identité de E_3

* Si $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ alors $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

f est la symétrie orthogonale par rapport à Δ.



16-5 ETUDE DES ISOMETRIES NEGATIVES DE E_3

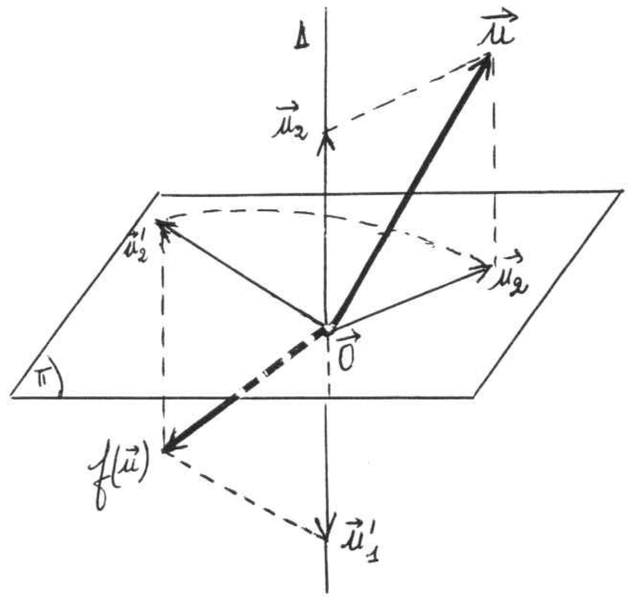
Nous savons que (-1) est valeur propre de toute isométrie négative f de E_3 et qu'il existe une droite vectorielle Δ invariante par f, dont tout vecteur est transformé en son opposé. De plus la restriction de f à $\Delta^\perp = \pi$ est une isométrie de π. (cf 16-3-1 et 16-3-3).

Soit B une base orthonormée directe de E_3 formée d'un vecteur normé $\vec{e}_1$ de Δ et de deux vecteurs normés et orthogonaux, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de π. Relativement à cette base la matrice A de f s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$[A_1]$}} \\ 0 & & \end{bmatrix}$$ où A_1 est la matrice de f/π relativement à la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Le déterminant de A étant (-1) celui de A_1 est nécessairement égal à +1 et f/π est une rotation d'où

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$



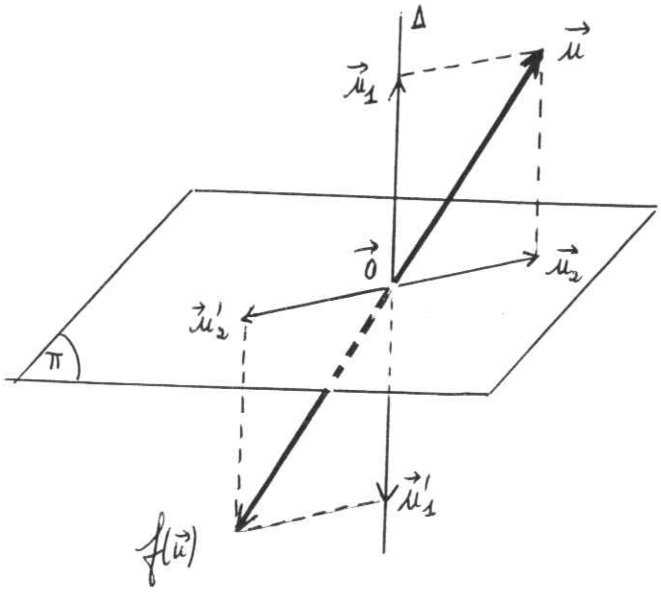
Théorème

> Pour toute isométrie vectorielle négative f de E_3 il existe une base orthonormée de E_3 relativement à laquelle la matrice A de f s'écrit :
>
> $$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

Cas particuliers

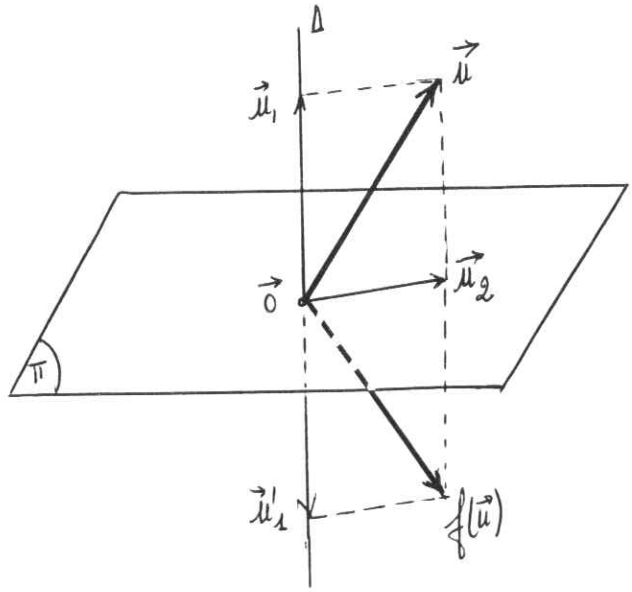
* Si $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ alors $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

f est l'homothétie vectorielle de rapport (-1)



Si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alors $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f est la symétrie orthogonale par rapport à π.



16-6 DECOMPOSITION D'UNE ROTATION VECTORIELLE DE E

16-6-1 Composée de 2 symétries orthogonales par rapport à deux plans vectoriels distincts.

Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel π_1

et soit s_2 la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel π_2

* $s_2 \circ s_1$ est nécessairement une rotation vectorielle, étant composée de 2 isométries négatives (cf 16-2-4 remarques).

* π_1 est invariant par s_1, π_2 est invariant par s_2 donc $\pi_1 \cap \pi_2$ est invariant par $s_2 \circ s_1$.
Comme π_1 et π_2 sont distincts $\pi_1 \cap \pi_2$ est une droite vectorielle Δ, ensemble des vecteurs invariants par la rotation $r = s_2 \circ s_1$: r est la rotation d'axe la droite vectorielle Δ.

Théorème

> La composée de deux symétries vectorielles orthogonales par rapport à deux plans vectoriels distincts est la rotation vectorielle ayant pour axe l'intersection de ces 2 plans.

16-6-2 Décomposition d'une rotation vectorielle

* Soit une rotation f d'axe Δ, droite vectorielle de base normée $(\vec{e}_1)$ et soit le plan P contenant $\vec{e}_1$ et soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée de P. Complétons cette base pour obtenir une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée de E_3. La matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

La matrice de la symétrie orthogonale par rapport à P, s_p, est relativement à cette base est : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

* Donc la matrice de $f \circ s_p$ est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$

cette dernière matrice peut être diagonalisée sous la forme
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

C'est alors la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à 1 plan vectoriel P'

* Il résulte donc que $f \circ s_p = s_{p'}$ or toute symétrie est involutive donc

$f = f \circ (s_p \circ s_p) = s_{p'} \circ s_p$. De plus comme $s_p' = f \circ s_p$ P', est nécessairement unique.

Théorème

> Toute rotation vectorielle est la composée de deux symétries orthogonales par rapport respectivement à deux plans vectoriels.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 16

EXERCICE 1

L'espace vectoriel euclidien E_3 est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Soit s_1 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel d'équation : $x + y - 2z = 0$ soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un élément de E_3 et $s_1(\vec{v}) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$. Calculer x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z

2°) Soit r l'endomorphisme de E_3 défini par : $r(\vec{i}) = \vec{j}$; $r(\vec{j}) = \vec{k}$; $r(\vec{k}) = \vec{i}$.

Démontrer que r est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe et la mesure de l'angle.

3°) Démontrer qu'il existe une symétrie vectorielle orthogonale s_2 par rapport à un plan vectoriel P_2 telle que $s_2 \circ s_1 = r$. Donner une équation cartésienne de P_2.

EXERCICE 2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E, r_1 la rotati vectorielle de E dont l'axe est la droite vectorielle engendrée par $\vec{i}$ et telle que $r_1(\vec{j}) = \vec{k}$, r_2 la rotatio vectorielle dont l'axe est la droite vectorielle engendrée par $\vec{j}$ et telle que $r_2(\vec{k}) = \vec{i}$.

1°) On pose : $r = r_2 \circ r_1$, $r^2 = r \circ r$, $r^3 = r \circ r^2$. Déterminer les images de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par r, par r^2, par r^3. Qu'en déduit-on en ce qui concerne l'angle de la rotation vectorielle r ?

2°) Soit $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un élément de E et $r(\vec{V}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + x'\vec{k}$. Calculer x', y', z' en fonctic de x, y, z. Déterminer les vecteurs de E invariants par r.

3°) Soit r_3 la rotation vectorielle dont l'axe est la droite vectorielle engendrée par $\vec{k}$ et telle que $r_3(\vec{i}) = \vec{j}$. Déterminer les images de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ par la rotation vectorielle $r \circ r_3$. Qu'en déduit-on pour cette rotation ?

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a et b deux réels ; on désigne par $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme E défini par :

$$\begin{cases} \varphi_{a,b}(\vec{i}) = (a-b)\,\vec{i} + b\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{j}) = b\vec{i} + (a-b)\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{k}) = \vec{k} \end{cases}$$

A. 1°) Montrer que $\varphi_{a,b}$ est bijectif si, et seulement si, $a(a-2b) \neq 0$

2°) Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$ lorsque $a(a-2b) = 0$ (on distinguera 3 cas).

3°) Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est-il une isométrie vectorielle ? Soit G l'ensemble de ces isométries.

a/ Caractériser les éléments de G.

b/ Dresser la table de composition des éléments de G.

Qu'en déduit-on quant à la structure de (G, 0) ?

B. On considère désormais le cas particulier $a = 2$, $b = 3$ et l'on pose $\varphi = \varphi_{2,3}$

Démontrer qu'il existe des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et des réels λ_1, λ_2 tels que :

$$\begin{cases} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k}) \text{ est une base orthonormée de } E \\ \varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2 \\ \lambda_1 > \lambda_2 \end{cases}$$

On montrera que ces conditions déterminent λ_1 et λ_2 de manière unique.

Démontrer que si l'on impose la condition supplémentaire $\vec{e}_1 \cdot \vec{i} > 0$ et $\vec{e}_2 \cdot \vec{i} > 0$ les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont alors uniques.

EXERCICE 4

Soit E un espace vectoriel euclidien réel dont la dimension est 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée direc de E. On considère les vecteurs de E définis par : $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$.

On désigne par D la droite vectorielle de E dont $\vec{e}_1$ est une base et par P le plan vectoriel de E orthogo à D.

1°) Démontrer que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont unitaires ; en déduire qu'il existe une rotation vectorielle de E q transforme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$.

Si D est orientée par $\vec{e}_1$, démontrer que $(\vec{e}_2, k)$ est une base orthonormée directe de P.

2°) Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = 3\vec{i} + \vec{j} - \sqrt{6}\,\vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{6}\,\vec{k} \\ f(\vec{k}) = \sqrt{6}\,\vec{i} - \sqrt{6}\,\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

a - Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un élément de E et $f(\vec{u}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z.

b - Démontrer que f est bijective

c - Démontrer que D est globalement invariante par f. Soit h la restriction de f à D.

d - La restriction de f à P est notée s ; démontrer que s est définie par :

$$s(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_2 + 2\sqrt{3}\,\vec{k} \quad \text{et} \quad s(\vec{k}) = -2\sqrt{3}\,\vec{e}_2 + 2\vec{k}$$

Démontrer que s est la composée dans un ordre arbitraire d'une rotation vectorielle et d'une homothétie vectorie de P.

e - Déduire des questions précédentes que f est la composée dans un ordre arbitraire d'une homothétie vectoriel d'une rotation vectorielle r de E.

3°) Soit g l'endomorphisme de P défini par :

$$g(\vec{e}_2) = \frac{1}{8}\,(\vec{e}_2 + \sqrt{3}\,\vec{k}) \quad \text{et} \quad g(k) = \frac{1}{8}\,(\sqrt{3}\,\vec{e}_2 - \vec{k})$$

a - L'équation $g(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ (où λ est un réel) admet la solution $\vec{u} = \vec{0}$ pour toute valeur de λ. Démontrer qu'il existe deux valeurs particulières de λ, et deux seulement, pour lesquelles cette équation admet d'autres solutions que $\vec{u} = \vec{0}$.

En déduire que g laisse globalement invariantes deux droites vectorielles D_1 et D_2 de P que l'on précisera.

Démontrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de P.

b - Utiliser les résultats précédents pour démontrer que g s'écrit comme la composée dans un ordre arbitraire homothétie vectorielle, k, et d'une symétrie vectorielle orthogonale, a que l'on précisera.

c - Démontrer qu'il existe dans P une droite vectorielle Δ telle que si a' désigne la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à Δ, on a la relation : $s = k^{-1} \circ a \circ a'$

Déterminer alors : $g \circ s$.

d - Démontrer que l'endomorphisme u de E dont les restrictions à D et à P sont respectivement h^{-1} et est le composé d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vecto que l'on précisera.

CHAPITRE 17

ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

17-1 UN PEU D'HISTOIRE

C'est pour étudier des équations du troisième et du quatrième degré que les algébristes italiens du XVIè siècle dont CARDAN, TARTAGLIA, BOMBELLI et FERRARI, ont été amenés à considérer des nombres dont le carré est négatif.

A cette époque ces nombres ne correspondent à rien de concret. C'est pourquoi les mathématiciens du XVIIè siècle les baptisèrent "nombres imaginaires".

EULER, vers 1750, introduit la notation i, pour désigner le nombre dont le carré est (-1), puis ARGAND, en 1806, donne une interprétation géométrique de ces nombres que GAUSS, en 1831, appelle "nombres complexes". Il introduit, alors, l'écriture $z = a + bi$ où a et b sont des réels et i le symbole d'EULER.

C'est en 1835 que le génial mathématicien Irlandais HAMILTON donne une théorie complète des nombres complexes.

Nous donnons ici une introduction "moderne" de ces nombres complexes liée à l'algèbre linéaire.

17-2 ENSEMBLE DES COMPLEXES

17-2-1 Définition

On appelle ensemble des complexes l'ensemble, noté $\mathbb{C}$, des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Remarque : dans tout ce chapitre la matrice $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ sera notée $z = M(a, b)$ et appelée *écriture matricielle* du complexe z.

17-2-2 Théorème

> L'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes muni de l'addition et de la multiplication a une structure de corps commutatif.

1°) $(\mathbb{C}, +)$ est un sous-groupe de $(M_2, +)$ ensemble des matrices d'ordre 2.

* $\mathbb{C}$ est non vide : la matrice nulle et la matrice unité appartiennent à $\mathbb{C}$.

* $\mathbb{C}$ est stable pour l'addition

Soit $A = M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $B = M(a', b') = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$ $a+B = \begin{bmatrix} a+a' & -(b+b') \\ b+b' & a+a' \end{bmatrix}$ d'où

$$\boxed{M(a, b) + M(a'+b') = M(a+a', b+b')}$$

* L'opposé de tout élément de $\mathbb{C}$ est élément de $\mathbb{C}$

Si $A = M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, opp $A = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$ donc (opp A) $\in \mathbb{C}$.

Remarque : Dans la suite du cours l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de la matrice nulle sera noté $\mathbb{C}^*$

2°) $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(M_2', \times)$, ensemble des matrices d'ordre 2 inversibles

Remarque Si $A \in \mathbb{C}$ et $A = M(a, b)$, dét $A = a^2 + b^2$ donc dét $A = 0 \Longleftrightarrow A = 0$. Il en résulte que

$$\mathbb{C}^* \subset M_2'$$

* $\mathbb{C}^*$ est non vide : la matrice unité est élément de $\mathbb{C}^*$

* $\mathbb{C}^*$ est stable pour la multiplication :

Si $A = M(a, b)$ et $B = M(a', b')$

$$A \times B = \begin{bmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{bmatrix}$$

d'où : $\boxed{M(a, b) \times M(a', b') = M(aa' - bb', ab' + ba')}$

* l'inverse de tout élément de $\mathbb{C}^*$ est élément de $\mathbb{C}^*$: En effet,

Si $A = M(a, b)$, $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & \dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} & \dfrac{-a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix}$$

donc $\quad A^{-1} = M\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$

et $A^{-1} \in \mathbb{C}^*$

3°) La multiplication distributive sur l'addition dans M_2 l'est, à fortiori, dans $\mathbb{C}$

4°) De plus : $M(a, b) \times M(a', b') = M(a', b') \times M(a, b)$

17-2-3 Isomorphisme fondamental

Soit $\mathbb{C}_1$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$

Il est clair que $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}$

Nous pouvons mettre en évidence l'isomorphisme suivant de $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +, \times)$:

$$\begin{tikzcd}
(C_1, +, x) \arrow[r, leftrightarrow, "o"] & (\mathbb{R}, +, x) \\
M(a, o) \arrow[r, leftrightarrow, "o"] & a \\
M(a', o) \arrow[r, leftrightarrow, "o"] \arrow[d, "\text{addition}"] \arrow[dd, bend right, "\text{multiplication}"'] & a' \arrow[d, "\text{addition}"'] \arrow[dd, bend left, "\text{multiplication}"] \\
M(a+a', o) \arrow[r, leftrightarrow, "o"] & a+a' \\
M(aa', o) \arrow[r, leftrightarrow, "o"] & aa'
\end{tikzcd}$$

Il résulte de cet isomorphisme que $(\mathbb{C}_1, +, \times)$ est un corps commutatif

Notations

En raison de cet isomorphisme il apparait immédiat de noter : a la matrice $M(a, o)$

En particulier la matrice nulle $M(o, o)$ est notée o et la matrice unité $M(1,o)$ est notée 1.

17-2-4 Théorème

> $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel (loi externe) est un sous-espace vectoriel de $(M_2, +, .)$, de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

* $\mathbb{C}$ est non vide
* $\mathbb{C}$ est stable pour les combinaisons linéaires.

Etant donnés les réels α, β et les matrices $M(a, b)$ et $M(a', b')$:

$$\alpha M(a, b) + \beta M(a', b') = M(\alpha a + \beta a'\ ,\ \alpha b + \beta b')$$

* D'autre part quelle que soit la matrice $M(a, b)$:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si on pose $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

il est clair que $\{U, I\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{C}$

De plus $\alpha\mathcal{U} + \beta I = o \Longrightarrow \alpha = \beta = o$ donc

$\{U, I\}$ est un système libre de $\mathbb{C}$

<u>Conclusion</u> (U, I) est une base de $\mathbb{C}$ et, par suite, $\mathbb{C}$ est un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.

<u>Notations définitives</u>

Remarquons que : $I^2 = M(-1, o)$. Des notations données au paragraphe 16-2-3, il résulte que I^2 sera notée (-1)

Désormais on posera $I = i$ et par conséquent $z = M(a, b) = a\mathcal{U} + bI$ sera noté $z = M(a, b) = a + bi$

$a + bi$ est la <u>notation algébrique</u> du complexe z.
a est la partie réelle du complexe z.
b est la partie imaginaire du complexe z.

17-3 REGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

<u>17-3-1 Egalité</u>

Les deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ sont égaux si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$

Ceci résulte immédiatement de l'égalité des matrices $M(a, b)$ et $M(a', b')$

<u>17-3-2 Addition</u>

Etant donnés les deux complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on appelle somme des complexes z et z' , le complexe $z + z' = (a + a') + (b + b')\,i$

Ceci résulte immédiatement du fait que :

$$M(a, b) + M(a', b') = M(a+a', b+b')$$

<u>17-3-3 Multiplication</u>

Etant donnés les deux complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, on appelle produit des complexes z et z', le complexe $zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,i$

Ceci résulte immédiatement du fait que :

$$M(a, b) \times M(a', b' = M(aa' - bb', ab' + ba')$$

Remarque : Le produit zz' s'obtient en effectuant le développement de $(a + bi)\,(a' + b'i)$ dans lequel on remplace i^2 par (-1)

17-3-4 Conjugué d'un nombre complexe

1°) Définition

> Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, on appelle conjugué de z le complexe, noté $\bar{z}$, tel que : $\bar{z} = a - bi$

Remarques $z + \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ autrement dit $\boxed{z + \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}}$

$z = \bar{z} \Longleftrightarrow b = 0$ autrement dit $\boxed{z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}}$

2°) Théorème

> L'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui, à $z = a + bi$, associe $\bar{z} = a - bi$, est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

* Il est clair que f est une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même.
* Le diagramme ci-dessous montre, à l'évidence que :

$$f(z + z') = f(z) + f(z') \quad \text{et} \quad f(zz') = f(z) \times f(z')$$

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}, +, \times) & \xleftrightarrow[\;o\;]{f} & (\mathbb{C}, +, \times) \\
z = a + bi & \xleftrightarrow{\;o\;} & \bar{z} = a - bi \\
z' = a' + b'i & \xleftrightarrow{\;o\;} & \bar{z'} = a' - b'i \\
\downarrow \text{addition} & & \downarrow \text{addition} \qquad \downarrow \text{multiplication} \\
z + z' = (a+a') + (b+b')i & \xleftrightarrow{\;o\;} & \bar{z} + \bar{z}' = (a+a') - (b+b')i \\
\text{multiplication} \downarrow & & \\
z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')\,i & \xleftrightarrow{\;o\;} & \bar{z} \times \bar{z}' = (aa' - bb') - (ab' + ba')\,i
\end{array}$$

Les deux résultats obtenus peuvent s'énoncer de la façon suivante :

> Le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
>
> Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

* De plus : $z \in \mathbb{C}$, $(\forall z)$ $(f \circ f)(z) = z$

On peut énoncer ce résultat en disant que :

> Le conjugué du conjugué d'un nombre complexe z est ce nombre lui-même

Remarques

Des propriétés ainsi démontrées il résulte que :

* $z \in \mathbb{C}$, $(\forall z)$ $\overline{(z^2)} = (\bar{z})^2$

* Si on désigne par $R(z)$ la partie réelle du complexe $z = a + bi$ et par $Im(z)$ sa partie imaginaire :

$$\boxed{\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{aligned}}$$

* Enfin, si $z = a + bi$

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2 \quad \text{donc} \left(z.\bar{z}\right) \in \mathbb{R}$$

17-3-5 Quotient de deux nombres complexes

Soit z un complexe non nul, tel que $z = a + bi$

L'inverse de z est : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2 + b^2}$

$$\boxed{z = a + bi \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i}$$

Il en résulte que si $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, tels que $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$:

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = (a + bi)\left(\frac{a'}{a'^2 + b'^2} - \frac{b'}{a'^2 + b'^2}\, i\right)$$

$$\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\, i}$$

17-3-6 Module d'un nombre complexe

1°) Définition

> Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, on appelle module de ce nombre complexe le réel, noté $|z|$, tel que :
>
> $$|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque si $z \in \mathbb{R}$, le module de z n'est autre que la valeur absolue de z et $z^2 = |z|^2$

Mais si $z \in \mathbb{C}$ et que $z = a + bi$, $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$.

2° Théorème

> L'application m de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{R}^+$ qui, à $z = a + bi$, associe $|z|$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^+, \times)$.

Ce résultat est mis en évidence à l'aide du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}, \times) \arrow[r, "m"] & (\mathbb{R}^+, \times) \\
z = a + bi \arrow[r, mapsto, "m"] & |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\
z' = a' + b'i \arrow[r, mapsto, "m"] \arrow[d, "\text{multiplication}"] & |z'| = \sqrt{a'^2 + b'^2} \arrow[d, "\text{multiplication}"] \\
zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i \arrow[r, mapsto, "m"] & |z| . |z'| = \sqrt{a^2 + b^2} . \sqrt{a'^2 + b'^2}
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de démontrer que $|zz'| = |z| . |z'|$

Or : $|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2}$

$$|zz'| = \sqrt{a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a^2b'^2 + 2aa'bb' + b^2a'^2}$$

$$|zz'| = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2)}$$

$$|zz'| = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$$

$$|zz'| = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

d'où $\boxed{|z \times z'| = |z| \times |z'|}$

Cas particulier

$$z \in \mathbb{C}, (\forall z) \qquad |z^2| = |z|^2$$

Remarque

Le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble

$$N(m) = \{ z \mid z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1 \}$$

c'est-à-dire l'ensemble, noté $\mathcal{U}$, des complexes de module 1. C'est évidemment un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Si nous revenons à l'écriture matricielle des nombres complexes, tout élément de $\mathcal{U}$ peut s'écrire sous la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Il en résulte que :

3°) Théorème

> L'ensemble noté $\mathcal{U}$, des complexes de module 1 est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, isomorphe au groupe (O_2^+) des rotations vectorielles d'un plan vectoriel.

4°) Autres propriétés

* Deux complexes conjugués ont même module

Si $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ alors :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$ donc $|\bar{z}| = |z|$.

* Quel que soit le complexe z : $R(z) \leq |z|$

Soit $z = a + bi$. Notons $R(z)$ la partie réelle de z c'est-à-dire : $R(z) = a$

$R(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

*

> Le module de la somme de deux complexes est inférieur ou égal à la somme des modules de ces deux nombres complexes:
>
> $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ $(\forall z)$ $(\forall z')$ $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

Démonstration

$|z+z'|^2 = (z+z')\,(\overline{z+z'}) = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}')$

$|z+z'|^2 = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}'$

Or $z'\bar{z}$ est conjugué de $\bar{z}'z$ car $\overline{z'\bar{z}} = \bar{z}'.\,\bar{\bar{z}} = \bar{z}'z$

Donc $z\bar{z}' + z'\bar{z} = 2R(z\bar{z}')$

Par suite :

$|z+z'|^2 = z\bar{z} + 2R(z\bar{z}') + z'\bar{z}'$ et $|z+z'|^2 \leq z\bar{z} + 2|z\bar{z}'| + z'\bar{z}'$

soit $|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z|\,|z'| + |z'|^2$. Finalement : $|z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$

d'où $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

17-3-7 Relations d'ordre sur $\mathbb{C}$

Théorème

> $\mathbb{C}$ ne peut, d'aucune façon, être muni d'une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps.

* Supposons, en effet, qu'il existe dans le corps ($\mathbb{C}$, +, $\times$) une relation d'ordre total notée α et lue "antérieur à ..."

- Cette relation d'ordre est compatible avec l'addition si, et seulement si :

$$C_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Quels que soient les complexes } z, z', z'' \\ \qquad z \,\alpha\, z' \Longrightarrow (z + z'') \,\alpha\, (z' + z'') \end{array} \right.$$

- Cette relation est compatible avec la multiplication si, et seulement si :

$$C_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Quels que soient les complexes } z, z', z'' \\ \quad (z \,\alpha\, z' \text{ et } o \,\alpha\, z'') \Longrightarrow (zz'') \,\alpha\, (z'z'') \end{array} \right.$$

* Si α est compatible avec l'addition et la multiplication alors : $z \in \mathbb{C} (\forall z)$ $o \,\alpha\, z^2$

- Si $z = o$ ceci est évident car la relation notée α est reflexive.
- Si $z \neq o$ et $o \,\alpha\, z$, d'après (C_2) :

$$oz \,\alpha\, z^2 \quad \text{donc} \quad o \,\alpha\, z^2$$

- Si $z \neq o$ et $z \,\alpha\, o$, d'après (C_1) :

$$[z + (-z)] \,\alpha\, [o + (-z)] \quad \text{soit :} \quad o \,\alpha\, (-z)$$

et d'après (C_2) : $[o.(-z)] \,\alpha\, (-z)^2$ soit encore : $o \,\alpha\, z^2$.

* Puisque $1 = (1)^2$ et $-1 = (i)^2$ il résulte de ce qui précède que : $0 \,\alpha\, 1$ et $0 \,\alpha\, (-1)$
D'après (C_1) : $(0 \,\alpha\, 1) \Longrightarrow [0 + (-1)] \,\alpha\, [1 + (-1)]$ soit $(-1) \,\alpha\, 0$.

Par suite $0 \,\alpha\, (-1)$ et $(-1) \,\alpha\, 0$ conduit au résultat absurde $-1 = 0$ en raison de l'antisymétrie de la relation notée α.

17-4 $\mathbb{C}$ espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$

17-4-1 Lemme

> Etant donnés deux complexes z et z', le nombre $u = \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')$ est réel.

En effet : $\overline{u} = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}') = u$

donc $u \in \mathbb{R}$.

17-4-2 Théorème

> L'application φ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
>
> $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\forall (z, z')$ $\left[\varphi(z, z') = \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')\right]$
>
> est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$

* φ est symétrique

$(\forall z)\ (\forall z')\quad \varphi(z', z) = \frac{1}{2}(z'\bar{z} + \bar{z}'z)$

$(\forall z)\ (\forall z')\quad \varphi(z', z) = \varphi(z, z')$

* φ est bilinéaire

- Quels que soient les complexes z_1, z_2, z'

$\varphi(z_1 + z_2, z') = \frac{1}{2}\left[(z_1 + z_2)\bar{z}' + (\overline{z_1 + z_2})z'\right]$

$\varphi(z_1 + z_2, z') = \frac{1}{2}\left[z_1\bar{z}' + \bar{z}_1 z'\right] + \frac{1}{2}\left[z_2\bar{z}' + \bar{z}_2 z'\right]$

$\varphi(z_1 + z_2, z') = \varphi(z_1, z') + \varphi(z_2, z')$

- Quel que soit le réel α, quels que soient les complexes z et z'

$\varphi(\alpha z, z') = \frac{1}{2}\left[(\alpha z)\bar{z}' + (\overline{\alpha z})z'\right]$

$\varphi(\alpha z, z') = \frac{1}{2}(\alpha z\bar{z}' + \alpha\bar{z}z')$

$\varphi(\alpha z, z') = \alpha\left[\frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')\right]$

$\varphi(\alpha z, z') = \alpha \times \varphi(z, z')$

Compte tenu de ces deux résultats la bilinéarité résulte de la symétrie.

* La forme quadratique associée à φ est positive

$z \in \mathbb{C}^*$, $(\forall z)\quad \varphi(z, z) = \frac{1}{2}(z\bar{z} + \bar{z}z)$

$z \in \mathbb{C}^*$, $(\forall z)\quad \varphi(z, z) = z\bar{z} = |z|^2$

$z \in \mathbb{C}^*$, $(\forall z)\quad \varphi(z, z) > 0$.

17-4-3 Théorème

> Si l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni du produit scalaire φ, la base $(1, i)$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}$

En effet : $\varphi(1, 1) = |1|^2 = 1$

$\varphi(i, i) = |i|^2 = 1$

et $\varphi(1, i) = \varphi(i, 1) = \frac{1}{2}(-i+i) = 0$

17-5 FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

17-5-1 Théorême préliminaire

> Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = z_0\ |z|$ où $|z|$ est le module de z et z_0 un nombre complexe de module 1.

Démonstration

Soit z un nombre complexe non nul de module z et soit $z_0 = \frac{z}{|z|}$. Donc :

$$z = z_0\ |z| \quad \text{et} \quad |z_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

17-5-2 Introduction

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est le groupe multiplicatif, commutatif $(\mathbb{U}, \times)$ des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

a) Nous savons qu'il existe un isomorphisme f du groupe additif $(\mathcal{A}, +)$, des angles d'un plan vectoriel, sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, \times)$

$$f : (\mathcal{A}, +) \longrightarrow (\mathbb{U}, \times)$$

$$\widehat{\varphi} \longmapsto z_0 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$

où $\begin{cases} a = \text{Cos}\ \widehat{\varphi} \\ b = \text{Sin}\ \widehat{\varphi} \end{cases}$

Ainsi tout angle $\widehat{\varphi}$ est associé à un nombre complexe z_0 de module 1 et un seul (cf

b) Nous savons également (cf 15-) qu'il existe un homomorphisme surjectif θ de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$

$$\theta : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathcal{A}, +)$$

$$\alpha \longmapsto \theta(\alpha) = \widehat{\varphi}$$

Nous savons de plus que :

$$\boxed{\theta(\alpha) = \theta(\alpha') \Longleftrightarrow (k \in \mathbb{Z})\ (\exists . k) \quad \alpha' = \alpha + k(2\pi)} \quad (\mathrm{I})$$

Remarque 1 :

- Tout réel α ayant pour image l'angle $\widehat{\varphi}$ est une détermination de l'angle $\widehat{\varphi}$, et toute détermination de $\widehat{\varphi}$ est un réel égal à α modolo 2π (c'est-à-dire de la forme $\alpha + k(2\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$).

- Si $\widehat{\varphi} = \theta(\alpha)$ et si nous posons :

$$\cos\alpha = \text{Cos}\left[\theta(\alpha)\right] \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \text{Sin}\left[\theta(\alpha)\right] \quad \text{nous obtenons :}$$

$$\begin{cases} a = \text{Cos}\ \widehat{\varphi} \\ b = \text{Sin}\ \widehat{\varphi} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases}}$$

c) Considérons l'application $\theta \circ f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{U}$. θ étant un homomorphisme <u>surjectif</u> de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{A}, +)$ et f étant un isomorphisme de $(\mathcal{A}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$, $\theta \circ f$ est un <u>homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$</u>

Nous obtenons donc :

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\quad\theta\quad} (\mathcal{A}, +) \xrightarrow{\quad f\quad} (\mathbb{U}, \times)$$

$$\alpha \longmapsto \theta(\alpha) = \widehat{\varphi} \longmapsto z_0 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

<u>Remarque 2</u>

D'après la remarque précédente, si α a pour image par $\theta \circ f$, le nombre complexe z_0 de module 1, alors tout réel égal à $\alpha + k(2\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ a, aussi, pour image z_0.

d) <u>Définition</u>

> Tout nombre complexe z_0 de module 1 peut s'écrire sous la forme
>
> $$z_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un réel modulo } 2\pi.$$
>
> Ce réel modulo 2π , s'appelle <u>argument</u> de z_0, l'angle associé $\widehat{\varphi}$ s'appelle <u>Argument</u> de z_0.

e) <u>autre notation</u> :

La notation matricielle de la définition précédente est équivalente à la notation suivante

$$\boxed{z_0 = \cos\alpha + i \sin\alpha}$$

où α est un réel modulo 2π .

17-5-4 <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe</u>

Soit z un nombre complexe $\boxed{\text{non nul}}$ de module ρ. D'après le théorème préliminaire (16-4-1) $z = \rho\, z_0$ où z_0 est un nombre complexe de module 1 ; Nous dirons par définition que l'argument de z est égal à l'argument de z_0. Par conséquent z peut s'écrire $z = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ où $\begin{cases} \rho \text{ est le module de } z \\ \alpha \text{ est l'argument de } z. \end{cases}$

<u>Théorème</u>

> Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire $z = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$
>
> ρ est le module, α l'argument de z et cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

Remarque

Nombre complexe nul : Le module du nombre complexe nul est 0. L'écriture précédente reste valable mais nous ne pourrons cependant pas déterminer l'argument de 0.

17-5-5 Opérations sur la forme trigonométrique

A - Relations entre forme algébrique et forme trigonométrique

a) soit le nombre complexe z d'écriture algébrique $z = a + ib$ et d'écriture trigonométrique

$z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

De l'égalité $a + ib = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ nous déduisons : $\boxed{\begin{array}{l} a = \rho \cos \alpha \\ b = \rho \sin \alpha \end{array}}$

b) L'argument α d'un nombre complexe non nul est défini par son sinus et son cosinus :

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{a}{\rho} \qquad \sin \alpha = \frac{b}{\rho}}$$

c) Remarque

Nous pouvons aussi écrire , si $a \neq 0$. $\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}}$

Cependant cette formule ne permet de calculer α qu'à $(k\pi)$ près $(k \in Z)$

B - Egalité de 2 nombres complexes non nuls

Soit $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = \rho'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$

$$z = z' \iff \begin{cases} \rho \cos \alpha = \rho' \cos \alpha' \\ \rho \sin \alpha = \rho' \sin \alpha' \end{cases}$$

La somme des carrés donne : $\rho^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho'^2 (\cos^2 \alpha' + i \sin^2 \alpha')$

d'où $\rho^2 = \rho'^2$

comme $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}^+)^2$ nous en déduisons $\boxed{\rho = \rho'}$ On a alors :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \alpha' \\ \sin \alpha = \sin \alpha' \end{cases} \iff \boxed{\alpha = \alpha' + k(2\pi)} \qquad (k \in Z)$$

Théorème

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si,et seulement si, ils ont même module et même argument (modulo 2π).

C - Nombres complexes conjugués :

Soit $z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ alors $\bar{z} = \rho(\cos \alpha - i \sin \alpha)$

ou mieux $\bar{z} = \rho\left[\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)\right]$

D'où :

Théorème

> Deux nombres complexes conjugués ont même module et des arguments opposés (modulo 2π)

D - Produit de deux nombres complexes

Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z' = \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$

$$zz' = \rho\rho'\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha' + i\sin\alpha')\right]$$

$$zz' = \rho\rho'\left[(\cos\alpha.\cos\alpha' - \sin\alpha.\sin\alpha') + i(\sin\alpha.\cos\alpha' + \sin\alpha'.\cos\alpha)\right]$$

$$zz' = \rho\rho'\left[(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')\right]$$

Théorème

> Le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe ayant pour module le produit des modules pour argument la somme des arguments. (modulo 2π)
>
> $$\arg zz' = \arg z + \arg z' + k(2\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$
>
> $$|zz'| = |z| \,.\, |z'|$$

E - Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \times \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{1}{\rho}\ \frac{(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$ et par suite :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \times \left[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right]$$

donc $$\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \rho \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

Théorème

> L'inverse d'un nombre complexe non nul a pour module l'inverse du module et pour argument l'opposé de l'argument de ce nombre complexe (modulo 2π)

F - Quotient de 2 nombres complexes

Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z' = \rho'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $(\rho' \neq 0)$.

$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z}$. On utilise les résultats précédents donc :

$$\begin{cases} \left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \\ \arg\ \frac{z}{z'} = \arg(z \times \frac{1}{z'}) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Théorème

> Le quotient de 2 nombres complexes est un nombre complexe ayant pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments (modulo 2π)
>
> $$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k(2\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

G - Formule de MOIVRE

Soit $z_0 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, nombre complexe de module 1.

i) soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad z_0^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

En appliquant les résultats de (D) nous obtenons $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ (1)

ii) soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$. Posons $n' = -n$ donc $z_0^n = z_0^{-n'} = \dfrac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n'}}$

Appliquons le résultat (1). Donc :

$$z_0^n = \frac{1}{(\cos n'\alpha) + i\sin n'\alpha)}$$

D'après (E), nous obtenons aussi : $\quad z_0^n = \cos(-n'\alpha) + i\sin(-n'\alpha)$

d'où $\quad z_0^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

La formule (1) reste donc valable pour un entier relatif négatif.

iii) $n = 0$

$$(z_0)^0 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^0 = \cos(0\alpha) + i\sin(0\alpha) = 1$$

La formule est encore valable.

Théorème

> Pour tout entier relatif n et pour tout réel α
>
> $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$
>
> Cette formule s'appelle "formule de MOIVRE"

Remarque

Une application de la formule de MOIVRE : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Méthode : posons $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$\frac{1}{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

donc

$$\boxed{\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \end{cases}} \qquad (1)$$

D'après la formule de MOIVRE

$$z^n = \cos n\,\alpha + i \sin n\,\alpha$$

$$\frac{1}{z^n} = \cos n\,\alpha - i \sin n\,\alpha$$

donc $$\boxed{\begin{cases} 2 \cos n\,\alpha = z^n + \dfrac{1}{z^n} \\ 2\,i \sin n\,\alpha = z^n - \dfrac{1}{z^n} \end{cases}} \qquad (2)$$

Exemple Linéariser $\boxed{\cos^6 \alpha}$

$$\cos^6 \alpha = \frac{1}{2^6}\left(z + \frac{1}{z}\right)^6$$

Utilisons la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal pour calculer $(z + \frac{1}{z})^6$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

donc :

$$(z + \frac{1}{z})^6 = z^6 + 6\,z^5\,\frac{1}{z} + 15\,z^4\,\frac{1}{z^2} + 20\,z^3\,\frac{1}{z^3} + 15\,z^2\,\frac{1}{z^4} + 6z\,\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\,(z + \frac{1}{z})^6 = (z^6 + \frac{1}{z^6}) + 6(z^4 + \frac{1}{z^4}) + 15(z^2 + \frac{1}{z^2}) + 2$$

Nous déduisons des formules (2) $(z + \frac{1}{z})^6 = 2 \cos 6\,\alpha + 12 \cos 4\,\alpha + 30 \cos 2\,\alpha + 20.$

et par conséquent

$$\boxed{\cos^6 \alpha = \frac{1}{32} \cos 6\,\alpha + \frac{3}{16} \cos 4\,\alpha + \frac{15}{32} \cos 2\,\alpha + \frac{5}{16}}$$

17-6 IMAGE GEOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

17-6-1 Introduction

Nous savons que $(\mathbb{C}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ; il est donc isomorphe à tout plan vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$. Munissons E_2 d'un produit scalaire et considérons une base $(\vec{u}, \vec{v})$ orthonormée de E

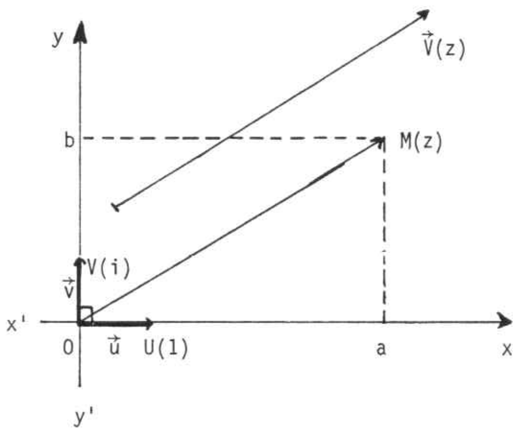
a) nous pouvons ainsi établir l'isomorphisme suivant entre $\mathbb{C}$ et E_2

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathbb{C}, +, .) & \longrightarrow & (E_2, +, .) \\
1 & \longmapsto & \vec{u} \\
i & \longmapsto & \vec{v} \\
z = a + ib & \longmapsto & a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = \vec{V}
\end{array}
$$

Nous dirons que z est $\boxed{\text{l'affixe}}$ de $\vec{V}$ ou encore que $\vec{V}$ $\boxed{\text{le vecteur-image}}$ de z

b) Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien, muni du repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Compte tenu de l'isomorphisme précédent nous pouvons établir la bijection suivante :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{C} & \longrightarrow & P \\
z = a + ib & \longmapsto & M \quad \text{tel que} \quad \vec{OM} = \vec{V} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}
\end{array}
$$



M est le $\boxed{\text{point-image}}$ de z et $\boxed{z \text{ est l'affixe}}$ de M

17-6-2 Conséquences

a) Soit $z = a + ib = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$

- $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\vec{V}\| = d(0, M)$
- de plus $\begin{cases} a = \rho\cos\alpha = d(0, M).\cos\alpha \\ b = \rho\sin\alpha = d(0, M).\sin\alpha \end{cases}$

démontre que α est une détermination de l'angle $\widehat{(\vec{OU}, \vec{OM})}$ appelé angle polaire du vecteur $\vec{V}$ image du complexe

Théorème

> Le module d'un nombre complexe est la norme de son vecteur-image. L'argument du nombre complexe est une détermination de l'angle polaire du vecteur-image.

b) Deux nombres complexes égaux ont :

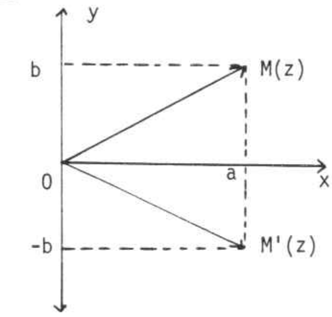
- même point-image
- même vecteur-image

c) Images de deux nombres complexes conjugués

Si $z = a + ib$ alors

Les points images de z et $\bar{z}$

sont symétriques par rapport à (0x).



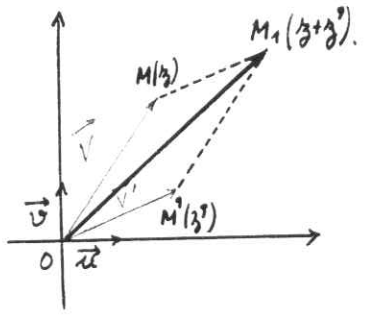
Théorème

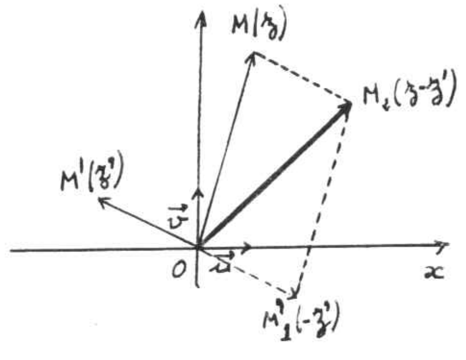
> Les points images de 2 nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à (0x)

d) Vecteur image de la somme ou de la différence de deux nombres complexes

Utilisons l'isomorphisme initial (§ 17-6-1 a)

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}, +) & \text{———} & (E_2, +) \\
z & \text{———} & \vec{V} \\
z' & \text{———} & \vec{V}' \\
\downarrow \text{addition} & & \downarrow \text{addition} \\
z + z' & \text{———} & \vec{V} + \vec{V}' \\
\downarrow \text{sous traction} & & \downarrow \text{sous traction} \\
z - z' & \text{———} & \vec{V} - \vec{V}'
\end{array}$$





Théorème

> Si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont les vecteurs-images respectifs des nombres complexes z et z' alors :
>
> $\vec{V} + \vec{V}'$ est le vecteur-image de $z + z'$
>
> $\vec{V} - \vec{V}'$ est le vecteur-image de $z - z'$

17-7 RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

17-7-1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe $(n \in \mathbb{N}^*)$

Soit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$

Posons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Donc $r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

En utilisant la formule de MOIVRE on obtient : $\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc :

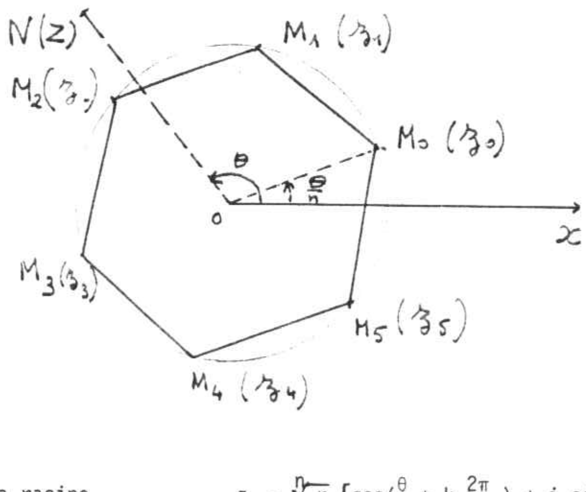
$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par suite : $$\boxed{z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient n valeurs de z. La période du sinus et du cosinus étant 2π nous avons toutes les valeurs.

Théorème

> Tout nombre complexe non nul admet n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes ; ces n racines ont même module et des arguments différents de $k\frac{2\pi}{n}$ où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$



Exemple $n = 6$

M_k est le point image de la racine $z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$

où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

17-7-2 Racines n-ièmes de l'unité

Si $Z = 1$ on a $r = 1$ et $\theta = 0$ donc l'équation $z^n = 1$ admet pour solutions

$z_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i \sin k\frac{2\pi}{n}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

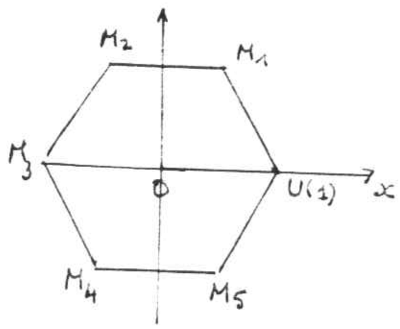
par exemple : si $n = 6$

$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$\vdots$

$z_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$



17-7-3 Racines cubiques de l'unité

En faisant $n = 3$ on peut dire que $z^3 = 1$ admet trois solutions :

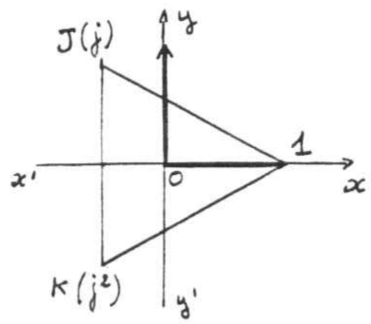
$$z = \cos \frac{k\,2\pi}{3} + i \sin \frac{k\,2\pi}{3} \quad \text{où} \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

* à $k = 0$ correspond $z_0 = 1$
* à $k = 1$ correspond $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

On convient de poser $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

* à $k = 2$ correspond $z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})^2$

donc $z_2 = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$



Théorème

Le nombre 1 a trois racines cubiques $1, j, j^2$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Remarques

* $j^3 = 1$
* $1 = j + j^2 = 0$
* $j^2 = \bar{j}$

17-8 EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$

17-8-1 Somme et produit des racines

Soit à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E) $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$

où a est un complexe non nul, b et c deux complexes quelconques.

* S'il existe une racine α de l'équation (E) : $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

Il en résulte que, quel que soit le complexe z :

$$(E) \iff az^2 + bz + c = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$(E) \iff a(z^2 - \alpha^2) + b(z - \alpha) = 0$$

$$(E) \iff (z - \alpha)\ [a(z + \alpha) + b] = 0$$

Par suite : Si l'équation (E) a une racine α elle en a une seconde $(-\alpha - \frac{b}{a})$ et elle n'en a pas d'autre (en raison de la structure de corps de $\mathbb{C}$).

* Désignons par z_1 et z_2 les racines, si elles existent de l'équation (E) :

$$z_1 + z_2 = \alpha + (-\alpha - \frac{b}{a}) \iff z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

et

$$z_1 z_2 = \alpha(-\alpha - \frac{b}{a}) = \frac{-a\alpha^2 - b\alpha}{a}$$

donc, puisque $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Si une équation du second degré a une racine, notée z_1, elle en a une seconde, notée z_2, telle que : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

17-8-2 Résolution d'une équation du second degré

Soit (E) : $z \in \mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$ est un complexe non nul, b et c deux complexes quelconques.

Quel que soit z :

$$(E) \iff 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0$$

$$(E) \iff (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

Désignons par Δ le nombre $(b^2 - 4ac)$. Ce nombre est appelé discriminant de l'équation (E)

Nous savons qu'il existe deux nombres complexes opposés δ et $(-\delta)$ dont le carré est Δ. Alors, quel que soit z:

$$(E) \iff (2az + b)^2 - \delta^2 = 0$$

$$(E) \iff (2az + b + \delta)(2az + b - \delta) = 0$$

$$(E) \iff \left(z = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b + \delta}{2a}\right)$$

Toute équation du second degré a, dans $\mathbb{C}$, deux racines $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$

où δ est un complexe tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$.

Remarque

Une équation du second degré peut elle avoir deux racines égales ?

Ceci a lieu si, et seulement si :

$$\frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-b + \delta}{2a} \iff \delta = 0$$

Une équation du second degré dont le discriminant est nul a deux racines égales. On dit qu'elle a une racine double. Celle ci est égale à : $\frac{-b}{2a}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 17

EXERCICE N° 1

L'ensemble C des nombres complexes étant considéré comme un espace vectoriel sur le corps R des réels, on note B la base de cet espace constituée des complexes 1 et i.
Pour tout nombre réel a, on considère l'application f_a de C dans C définie par :

$$f_a(z) = (1 - ia)z + ia\bar{z}$$

Soit F l'ensemble des f_a.

1)Montrer que f_a est linéaire et déterminer sa matrice dans la base B.

2)Montrer que F muni de la loi de composition des applications est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$. Calculer l'image du nombre complexe z par l'application réciproque f_a^{-1}.

3)Etudier suivant les valeurs de a l'ensemble des éléments de C invariant par f_a. Lorsque $a \neq 0$ définir le noyau et l'image de $f_a - f_0$.

EXERCICE N° 2

On associe, à tout couple (a, b) de nombres complexes, l'application $f_{a,b}$ de C dans C définie par :

$$f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$$

où $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

1) Démontrer que l'application $f_{a,b}$ est linéaire, C étant considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On rappelle que :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda z} = \lambda\bar{z} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2) a) Démontrer que si le nombre $Az + B\bar{z}$ (A et B deux nombres complexes est nul pour tout z, alors A = B = 0 (on pourra pour cela donner à z les valeurs 1 et i).

b) Traduire alors par un système de 2 relations entre a, b, $\bar{a}$ et $\bar{b}$ la condition pour que $f_{a,b}$ soit involutive.

c) Que deviennent ces relations pour b = 0 (on montrera qu'il existe deux applications $f_{a,o}$ involutiv

EXERCICE N° 3

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on définit l'opération T de la façon suivante :

si $z = \alpha + i\beta$ et $z' = \alpha' + i\,\beta'$ sont deux éléments quelconques de C,

$$z \mathbin{T} z' = \alpha\alpha' + i(\alpha\beta' + \beta\alpha')$$

1) Montrer que (C, +, T) est un anneau commutatif.

2) Si $u = \gamma + i\delta$ et $u' = \gamma' + i\,\delta'$ sont deux nombres complexes donnés, résoudre et discuter l'équation d'inconnue z :

$$(1) \qquad u \,T\, z = u' \quad \text{où} \quad z \in C$$

On montrera que si u est imaginaire pur, l'équation est impossible ou indéterminée. Lorsqu'il y a indétermination, donner toutes les solutions.

3) Pour tout nombre complexe z, on pose $z^{[o]} = 1$ et on définit par récurrence $z^{[n]} = z \,T\, z^{[n-1]}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Calculer a) $i^{[n]}$

b) $(\alpha + i\beta)^{[n]}$

puis résoudre et discuter l'équation : $z^{[n]} = u'$

où u' est un complexe donné, z l'inconnue complexe et $n \geqslant 2$.

4) On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices de la forme $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ o & \alpha \end{bmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices.

Démontrer que $(\mathcal{M}, +, \times)$ est un anneau isomorphe à $(\mathbb{C}, +, T)$.

B - Soit E un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On note $\vec{0}_E$ le vecteur nul de E.

Soit $f_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ o & \alpha \end{bmatrix}$

1) Quelles sont les applications $f_{\alpha,\beta}$ involutives ?

2) a/ Discuter suivant les valeurs de α et β la nature du noyau de $f_{\alpha,\beta}$.

b/ Pour quelles valeurs de α et β, $f_{\alpha,\beta}$ est-elle bijective ?

3) Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$.

a/ Ecrire la matrice M sous la forme I + A où $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b/ Démontrer que A est la matrice de l'application $p \circ s$ où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et où p est la projection orthogonale sur une droite vectorielle que l'on précisera.

EXERCICE N° 4

On désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, muni de l'addition et de multiplication des matrices, ainsi que de la multiplication des matrices par un nombre réel. On rappelle que $\mathcal{M}$ est à la fois un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un anneau.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$, où a et b sont des réels.

1) Démontrer que est un sous-anneau de $\mathcal{M}$.

Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$; déterminer une base de $\mathcal{E}$; en déduire sa dimension.

2) Démontrer que l'application f de $\mathbb{C}$, corps des complexes, dans $\mathcal{E}$ définie pour tout élément $a + ib$ de $\mathbb{C}$ par : $f(a + ib) = M(a, b)$ est un isomorphisme de groupes additifs.

3) On définit sur $\mathbb{C}$ une nouvelle loi de composition, notée $*$, en posant pour tout couple (z, z') d'éléments de $\mathbb{C}$:

$$z * z' = f^{-1}\left[f(z) \quad f(z')\right]$$

f^{-1} représente la bijection réciproque de la bijection f définie dans la deuxième question.

a) Calculer $(a + ib) * (a' + ib')$ avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

b) Démontrer que la loi notée $*$ est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.

c) Déterminer l'élément neutre et les éléments symétrisables pour la loi interne notée $*$.

Quelle est la structure de $\mathbb{C}$ muni de l'addition des nombres complexes et de la loi notée $*$?

EXERCICE N°5

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, par j le nombre complexe de modul 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. On rappelle que $\mathcal{B} = (1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$, ensemble des complexes qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer : $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \bar{j}$, où $\bar{j}$ désigne le conjugué de j.

2) Démontrer que : $\mathcal{B}' = (1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$.

Ecrire le nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) sous la forme $z = a + bj$ (a et b réels).

En déduire les matrices P et P^{-1} définies par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quelles sont les composantes du nombre complexe i dans la base $\mathcal{B}'$?

3) Calculer, en fonction de a et b, le carré du module du nombre complexe $z = a + bj$. Déterminer les composantes, dans la base $\mathcal{B}'$, des nombres complexes suivants :

a) le conjugué $\bar{z}$ du nombre complexe $z = a + bj$;

b) l'inverse $\frac{1}{z}$ du complexe z supposé non nul ;

c) les produits jz et j^2z ;

d) le produit des nombres complexes $z = a + bj$ et $z' = a' + b'j$.

4) Démontrer que l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui, au nombre complexe z, associe son conjugué $\bar{z}$, est un automorphisme involutif de $\mathbb{C}$. Ecrire les matrices A et A' associées à cet automorphisme dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$.

5) A tout nombre complexe $z = a + bj$ (a et b réels), on associe la matrice $M(z) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$

a) Pour quels complexes $z = a + bj$ la matrice $M(z)$ est-elle inversible ?

b) Calculer la somme et le produit des matrices $M(z)$ et $M(z')$ associées aux complexes z et z'. Comparer les matrices obyenues aux matrices $M(z + z')$ et $M(zz')$. Qu'en déduit-on ?

EXERCICE N° 6

C désigne l'ensemble des nombres complexes.

A - On désigne par P_0 un plan vectoriel euclidien orienté et par $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée directe de P_0. A tout vecteur $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$, appelé affixe de $\vec{V}$.

On pose $$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$\bar{j}$ désigne le nombre complexe conjugé de j. α, β, γ désignent trois nombres réels.

1) Calculer $j + \bar{j}$. Vérifier que $j^2 = \bar{j}$.
Montrer que $(j, \bar{j})$ est une base de C, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\alpha + \beta j + \gamma\bar{j}$?
Quel est l'ensemble des éléments (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que $\alpha + \beta j + \gamma\bar{j} = 0$?

2) On pose $z' = (\alpha + \beta j + \gamma\bar{j})z$, et on désigne par φ l'application qui à tout vecteur $\vec{V}$ de P_0, d'affixe z, associe le vecteur $\vec{V}'$ d'affixe z'.

a) Montrer que φ est involutive si et seulement si φ est l'application identique ou l'homothétie vectorielle de rapport -1.

Montrer que ces deux cas correspondant respectivement aux hypothèses $\beta = \gamma = \alpha - 1$ et $\beta = \gamma = \alpha + 1$.

b) Soit r la rotation vectorielle dont l'angle a pour mesure en radians θ . Quelles sont les coordonnées, dans la base $(j, \bar{j})$ de C, du nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$?

Peut-on choisir α, β, γ, pour que l'application φ coïncide avec r ?

B - E désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Soit Id l'application identique de E et f l'application linéaire de E dans E, telle que :

$$f(\vec{I}) = \vec{K} \qquad f(\vec{J}) = -\vec{I} \qquad f(\vec{K}) = -\vec{J}$$

On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

1) Montrer que f et f^2 sont des rotations vectorielles de même axe D engendré par $\vec{I} - \vec{J} + \vec{K}$.

Montrer que l'angle $\widehat{\theta}$ de chacune des rotations vectorielles f et f^2 vérifie $\widehat{\theta} + \widehat{\theta} + \widehat{\theta} = \widehat{0}$ ($\widehat{0}$ désignant l'angle nul).

P désignant le plan vectoriel orthogonal à D, en déduire qu'on peut orienter le plan de façon qu'une mesur en radians de l'angle de f soit $\frac{2\pi}{3}$.

2) (α, β, γ) étant un élément de $\mathbb{R}^3$, on définit l'application $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ de E dans E par :

$$\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \alpha \, \mathrm{Id} + \beta f + \gamma f$$

On rappelle que, f étant une application linéaire de E dans E, et λ un nombre réel, λf désigne l'applica de E dans E définie par :

$$\forall \vec{V} \in E \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ : \ (\lambda f)(\vec{V}) = \lambda f(\vec{V})$$

$\mathcal{L}(E)$ désignant l'ensemble des applications linéaires de E dans E, on admettra que l'addition dans E et la multiplication par un réel définie ci-dessus donnent à $\mathcal{L}(E)$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ avec (α, β, γ) élément de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de (E). Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$? (On pourra calculer $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{I})$.

3) D désigne toujours l'axe des rotations vectorielles f et f^2, et P le plan vectoriel orthogonal à

a) Montrer que $\forall \vec{V} \in D \quad , \quad \Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{V}) = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{V}$

et $\forall \vec{V} \in P \quad , \quad \Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{V}) \in P$

b) Le plan P étant orienté de façon à ce qu'une mesure en radians de l'angle de f soit $\frac{2\pi}{3}$, on con désormais de l'identifier au plan P_0 orienté de la partie A.

Montrer que la restriction de $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ à P est l'application φ définie dans A - 2.

4) Quel est l'ensemble des éléments (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tels que $\Phi_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ soit :

a) involutive ? Préciser dans chaque cas la nature de l'application et l'ensemble des vecteurs invaria

b) une rotation vectorielle ?

EXERCCICE N°7

A - Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

On note respectivement O et I les matrices nulles et unité d'ordre 2 ; on pose

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1) Démontrer que E, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel.
Etablir que (I, J) est une base de E et déterminer les composantes d'une matrice de E dans cette base.

2) Calculer J^2. En déduire que la multiplication des matrices est une loi de composition interne dans E. Démontrer que E, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, a une structure d'anneau. Cet anneau est-il commutatif ? unitaire ? Admet-il des diviseurs de zéro ?
Quels sont les éléments inversibles de E ?

3) Soit M un élément de E. On pose

$$M^1 = M \qquad \text{et} \qquad M^n = M.M^{n-1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ les composantes de M^n dans la base (I, J) sont $(a^n, na^{n-1} b)$.
Déterminer la matrice $M + M^2 + \dots + M^n$ à l'aide de ses composantes dans la base (I, J).

B - Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$ et P le plan affine associé à $\mathcal{P}$, rapporté au repère cartésien $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f un endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est un élément de E.

1) A quelle condition f est-il un automorphisme de $\mathcal{P}$? f peut-il être involutif ?

2) Déterminer le noyau et l'image de f. A quelles conditions a-t-on l'égalité entre ces deux ensembles ?
Dans ce cas, que peut-on dire de f o f ?

3) Trouver les vecteurs de $\mathcal{P}$ invariants par f.

4) Déterminer les droites vectorielles de $\mathcal{P}$ invariantes par f.

5) On désigne par φ l'application affine de P, associée à f et laissant le point 0 invariant. Quels sont les points de P invariants par φ ? Trouver les droites affines de P parallèles à leur transformée par φ

6) On note M_0 le point de coordonnées (1 ; -1) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, puis

$$M_1 = \varphi(M_0),\ M_n = \varphi(M_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N} ,\ n \geqslant 1.$$

Soit (x_n, y_n) les coordonnées de M_n dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer x_n et y_n. Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles convergentes ?

C - Soit θ l'application de E dans C qui, à une matrice M de E de composantes a et b dans la base (I, J) associe le nombre complexe $Z = a + ib$.

1) Démontrer que θ est une application linéaire, bijective, de E sur C.

2) Si $Z = \theta(M)$ et $Z' = \theta(M')$, on pose $Z \ast Z' = \theta(M.M')$. Déterminer $(a + ib) \ast (a' + ib')$ où a, b, a', b' sont des réels.

Quelle est la structure de $(C, +, \ast)$?

3) Quels sont les nombres complexes admettant un symétrique pour la loi $*$?

4) On pose, pour $Z \in C$: $Z^{(1)} = Z$, $Z^{(n)} = Z * Z^{(n-1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Calculer $Z^{(n)}$.

Résoudre l'équation $Z^{(n)} = 1$

Résoudre l'équation $Z^{(2)} - 5Z + \frac{25}{4} = 0$.

CHAPITRE 18

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Nous traiterons les systèmes de 3 équations linéaires à 3 inconnues, pour ne pas alourdir l'écriture, mais par des méthodes facilement généralisables aux systèmes de n équations linéaires à n inconnues (ou même n équations à p inconnues, avec $n \neq p$).

Un tel système sera du type :

$$\left|\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array}\right.$$

Résoudre ce système, c'est trouver l'ensemble des triplets (x, y, z) qui vérifient simultanément ces trois équations, dont tous les coefficients sont, par hypothèse, constants.

18-1 METHODE DE GAUSS

C'est une méthode élémentaire, qui n'utilise pratiquement pas l'algèbre linéaire, et qui permet de résoudre effectivement et rapidement un système numérique.

Nous la décrivons sur des exemples

18-1-1 Exemple 1

$$\text{Soit le système (I)} \quad \left|\begin{array}{ll} 2x - 3y + 2z = 2 & (1) \\ -2x + 2y - 3z = 0 & (2) \\ 6x + y - z = -1 & (3) \end{array}\right.$$

Ajoutons l'équation (1) à l'équation (2) pour faire disparaître les termes en x ; on obtient :

$$(4) \quad - y - z = 2$$

Multiplions (1) par -3 et ajoutons à (3), toujours pour faire disparaître les termes en x :

$$(5) \quad 10\, y - 7\, y = -7$$

$$\text{On a donc : (I)} \Longrightarrow \text{(II)} \quad \left|\begin{array}{ll} 2x - 3y + 2z = 2 & (1) \\ - y - z = 2 & (4) \\ 10\, y - 7z = -7 & (5) \end{array}\right.$$

Réciproquement, il n'est pas difficile d'obtenir (I) à partir de (II) : on obtient (2) en retranchant (1) de (4), et on obtient (3) en multipliant (1) par 3 et en l'ajoutant à (5).

Donc $(I) \Longleftrightarrow (II)$

Pour résoudre (II), on fait disparaître de même le terme en y entre (4) et (5). On obtient :

$$(II) \Longleftrightarrow (III) \quad \left| \begin{array}{lr} 2x - 3y + 2z = 2 & (1) \\ \quad - y - z = 2 & (4) \\ \qquad - 17z = 13 & (6) \end{array} \right.$$

(on a multiplié (4) par 10 et on l'a ajoutée à (5) pour obtenir (6)).

On dit que le système (III) est <u>triangularisé</u>. Sa résolution est évidente : on tire z de (6), on reporte cette valeur dans (4) et on obtient y, on reporte les valeurs de y et z dans (1) et on obtient x. En particu (I) admet donc un triplet (x, y, z) de solutions et un seul.

18-1-2 <u>Exemple 2</u>

soit le système (IV) (où a est un paramètre)

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 5 \\ 8x - y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = a \end{array} \right.$$

et appliquons-lui le même traitement. On obtient :

$$(IV) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 5 \\ \quad 3y - 5z = -18 \\ \quad 3y - 5z = -10 + a \end{array} \right. \quad (V)$$

puis, en éliminant les termes en y entre les deux dernières équations :

$$(V) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 5 \\ \quad 3y - 5z = -18 \\ \qquad 0 = 8 + a \end{array} \right. \quad (VI)$$

A la différence de l'exemple 1, la dernière équation ne contient plus d'inconnue.

- ou bien $a \neq -8$, et la dernière équation n'a pas de solution, ni du coup le système (IV)
- ou bien $a = -8$ et la dernière équation est toujours vérifiée. Donc dans ce cas :

$$(IV) \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{lr} 2x - y + z = 5 & (7) \\ \quad 3y - 5z = -18 & (8) \end{array} \right.$$

Le système admet cette fois une infinité de solutions, car on peut donner une valeur arbitraire à z : (8) fourni alors la valeur de y, et (7) celle de x :

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{5}{3} z - 6 \\ x = \frac{1}{3} z = 1/2 \end{array} \right.$$

On voit donc que l'ensemble S des solutions(1) d'un système de 3 équations à 3 inconnues peut, selon les cas, êtr de nature variée : S est réduit à un élément dans l'exemple 1 (c'est le cas le plus fréquent), mais dans l'exempl 2 S est tantôt vide, tantôt infini.

La méthode de Gauss ne permet guère, au premier abord, de comprendre la raison profonde de ces variations. C'est ici que l'algèbre linéaire est éclairante, comme nous allons le voir. En revanche, ce qui suit ne fournit pas de méthode vraiment pratique pour la résolution effective des systèmes d'équations.

18-2 COMBINAISONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^3$

Considérons le système (I)
$$\left|\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array}\right.$$

En notant $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le système (I) peut s'écrire , par définition des opérations dans $\mathbb{R}^3$:

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

On voit que résoudre le système (I) revient à décomposer le vecteur $\vec{D} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaires des vecteurs $\vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

$$(I) \Longleftrightarrow \boxed{\vec{D} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}}$$

La théorie nous permet alors de distinguer fondamentalement deux cas :

18-2-1 <u>1er Cas</u> <u>$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sont indépendants</u>

Ils forment alors une base de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, et tout vecteur D s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme :

$$\vec{D} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$$

Le système (I) a une solution et une seule. (Remarquons que si $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, la solution évidente $x = y = z = 0$ est donc la seule).

18-2-2 <u>2ème Cas</u> <u>$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sont liés</u>

Ils engendrent alors un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^3$, avec $\dim E \leqslant 2$.

(1) On appelle solution tout <u>triplet</u> (x, y, z) qui vérifie les équations du système.

Ou bien $\vec{D} \notin E$, et $\vec{D}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$: le système (I) n'a pas de solution.

Ou bien $\vec{D} \in E$, et le système (I) a au moins une solution ; en fait, cette solution n'est pas unique, car $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ne forment pas une base de E.

Le point de vue des combinaisons linéaires dans R^3 nous a donc permis de distinguer deux grandes classes de systèmes d'équations, le critère pratique d'indépendance de A, B, C étant leur déterminant.

$$\text{SI} \quad \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

on est dans le premier cas : le système a une solution et une seule ; on dit qu'il est régulier.

L'étude du 2ème cas sera mieux éclaircie par le paragraphe suivant :

18-3 ENDOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^3$

L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{bmatrix}$$

est un endomorphisme, dont la matrice par rapport à la base naturelle de R^3 est justement :

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

En posant $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\vec{D} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ le système (I) s'écrit donc :

$$\boxed{\varphi(\vec{X}) = \vec{D}}$$

On retrouve alors les deux classes de systèmes.

18-3-1 <u>1er Cas</u> <u>φ est bijectif</u>

autrement dit, sa matrice est régulière et son déterminant est différent de 0.

Dans ce cas (I) possède une solution et une seule.

18-3-2 <u>2ème Cas</u> <u>φ n'est pas bijectif</u>

Son image (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\varphi(\vec{u})$ quand $\vec{u}$ décrit $\mathbb{R}^3$) est un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^3$, avec dim $E \lesssim 2$.

Si $\vec{D} \notin E$, le système (I) n'a pas de solution.

Si $\vec{D} \in E$, le système (I) admet au moins une solution $\vec{X}_0$: $\varphi(\vec{X}_0) = \vec{D}$

On a alors :

$$\varphi(\vec{X}) = \vec{D} \Longleftrightarrow \varphi(\vec{X}) = \varphi(\vec{X}_0) \Longleftrightarrow \varphi(\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{0}$$

où $\vec{0}$ désigne l'élément neutre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\varphi(\vec{X}) = \vec{D} \Longleftrightarrow (\vec{X} - \vec{X}_0) \in \operatorname{Ker} \varphi$, où $\operatorname{Ker} \varphi$ désigne le noyau de φ. $\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-espace de $\mathbb{R}$ de dimension supérieure ou égale à 1 (car φ n'est pas bijectif).

L'ensemble des solutions de (I) est donc :

$$S = \{\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{U} \; ; \; \vec{U} \in \operatorname{Ker} \varphi\}$$

si $\operatorname{Ker} \varphi$ est une droite (resp. un plan) vectorielle, S est une droite (resp. un plan) affine (c'était le cas à l'exemple 2 du paragraphe 18-1-2 dans le cas $a = -8$).

18-4 DETERMINANTS - FORMULES DE CRAMER

Nous avons vu qu'un système est régulier (c'est-à-dire admet une solution et une seule) si et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ est différent de 0.

Reprenons les notations du paragraphe 18-2 dans ce cas. Si (x, y, z) est la solution de (I), on a :

$$\vec{D} = x\,\vec{A} + y\,\vec{B} + z\,\vec{C}$$

Donc $\det(\vec{D}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}, \vec{B}, \vec{C}) = x \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) + y \det(\vec{B}, \vec{B}, \vec{C}) + z \det(\vec{C}, \vec{B}, \vec{C})$

$$= x \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$$

D'où la formule : $$x = \frac{\det(\vec{D}, \vec{B}, \vec{C})}{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

on aura de même : $y = \dfrac{\det(\vec{A}, \vec{D}, \vec{C})}{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})}$ $\qquad z = \dfrac{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{D})}{\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})}$

Ces formules sont appelées formules de Cramer. Elles ont un intérêt théorique, mais en pratique, pour résoud un système numérique donné, la méthode de Gauss est beaucoup plus rapide (surtout si on passe à des systèmes plus importants de n équations à n inconnues).

De même, dans le cas où le système n'est pas régulier, on peut employer des déterminants pour savoir (avec les notations des paragraphes 18-2 et 18-3 si $\vec{D}$ appartient ou non à E ; en effet E, qui est de dimension < 2 ; est engendré par deux des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, par exemple par $\vec{A}$ et $\vec{B}$; donc dans ce cas,

$$\vec{D} \in E \Longleftrightarrow \text{dét}\,(\vec{A}, \vec{B}, \vec{D}) = 0$$

Mais en pratique la méthode de Gauss est beaucoup plus efficace.

REMARQUE

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe 18-1. Le déterminant du système (I) vaut :

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne : $\delta = 2 \times 1 + 2 \times 1 + 6 \times 5 = 34$

Or le produit des coefficients situés sur la diagonale du système triangulaire (III) transformé de (I) par la méthode de Gauss vaut 34. Pourquoi ?

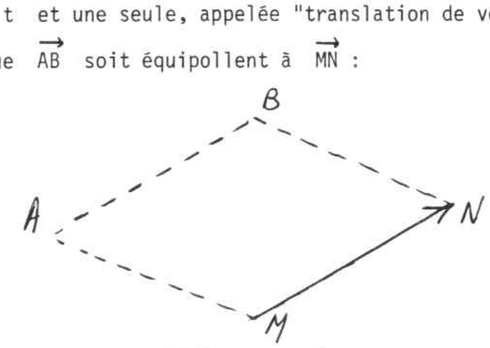
ANNEXE

GEOMETRIE "NAIVE" ET VECTEURS

par J. BETREMA

Nota : On entend par géométrie "naïve" les éléments de base de géométrie tels que se les représente quiconque l'a pratiquée, par quelque présentation que ce soit (points, droites, parallélisme, etc...).

Le programme actuel de la classe de quatrième permet de définir, dans le plan, les notions de bipoints équipollents et de translation. La classe des bipoints équipollents à un bipoint donné (A, B) est notée $\overrightarrow{AB}$; il lui correspond une translation t et une seule, appelée "translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$". t est la translation qui à tout point M associe N tel que $\overrightarrow{AB}$ soit équipollent à $\overrightarrow{MN}$:



Le quadruplet (A B N M) est un parallélogramme. Inversement, à toute translation t est associée la classe d'équipollence $\vec{u}$ définie par : $\vec{u} = \{(M, N) \mid N = t(M)\}$

Il existe donc une bijection Φ entre l'ensemble E des classes d'équipollence et l'ensemble T des translations.
Le programme de quatrième permet ensuite de définir la somme de deux classes d'équipollence $\vec{u}$ et $\vec{v}$: si $\vec{u}$ correspond à la translation t_1 et $\vec{v}$ à la translation t_2 , $(\vec{u} + \vec{v})$ est, par définition, la classe correspondant à la translation $(t_1 \circ t_2)$. On peut alors démontrer que E, muni de cette addition, est un groupe commutatif (de même que T est un groupe commutatif pour la loi o). Les groupes (E, +) et (T, O) sont isomorphes.

Enfin, le programme de quatrième définit le produit d'un élément $\vec{u}$ de E par un réel λ , et n peut alors vérifier les quatre derniers axiomes des espaces vectoriels (cf chapitre 1, axiomes E_1 à E_4).

L'ensemble E des classes d'équipollence est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel. Cette structure peut être transportée sur T par la bijection Φ de E vers T de la façon suivante :
si t et t' sont deux translations telles que : $t = \Phi(\vec{u})$ et $t' = \Phi(\vec{u}')$
et si λ est un réel, on pose, par définition :

$$(1) \quad t + t' = \Phi(\vec{u} + \vec{u}')$$

$$(2) \quad \lambda t = \Phi(\lambda\vec{u})$$

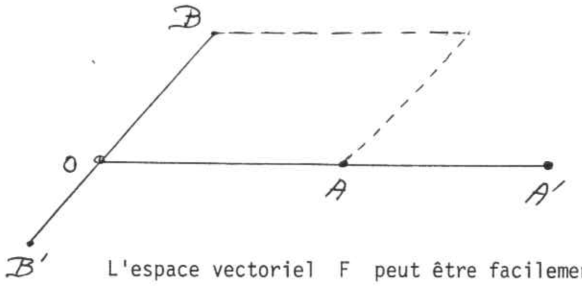
La définition (1) revient à, vu la définition de $(\vec{u} + \vec{u}')$, $t + t' = t \circ t'$

T est alors muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à E.

Le chapitre 6 (paragraphe 6-8) développe la notion d'isomorphisme, mais retenons que, comme on peut le prévoir toutes les propriétés, concernant les opérations addition et produit par un réel, de l'espace vectoriel E sont, aussi, valables dans T et vice-versa.

Il existe un troisième espace vectoriel isomorphe à E et T, et commode par les dessins : pour cela il suffit de choisir dans le plan un point O, et de considérer l'ensemble F des bipoints d'origine O, c'est-à-dire du type (O, M). Il est clair qu'il existe une bijection entre E et F : toute classe d'équipollence contient, un, et un seul, représentant d'origine O.

Grâce à cette bijection, transportons la structure d'espace vectoriel de E sur F. Dans F les opérations sont alors définies comme indiqué sur la figure suivante :

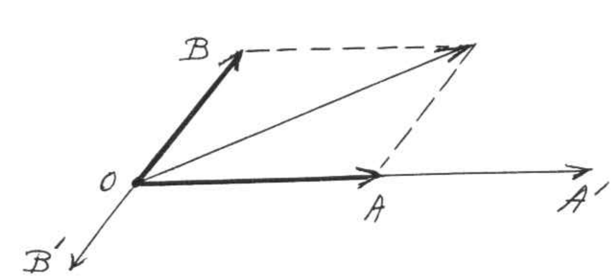


$(O, C) = (O, A) + (O, B)$

$(O, A') = \lambda(O, A)$ (avec $\lambda > 0$)

$(O, B') = \mu(O, B)$ avec $\mu < 0$)

L'espace vectoriel F peut être facilement représenté. Une convention est celle de la figure ci-dessus. Une autre, fréquente, mais qui aboutit à une certaine surcharge graphique, est celle de la figure ci-dessous :



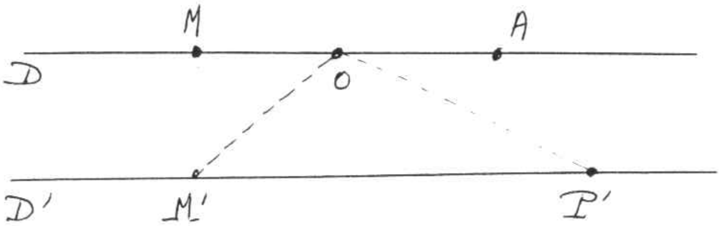
On ne peut représenter directement un élément de E (c'est-à-dire une classe d'équipollence) ou un élément de T (c'est-à-dire une translation), mais les dessins faits dans F représentent, en raison de l'isomorphisme, ce qui se passe dans E ou dans T.

Le chapitre 4 montre, en outre, que F est un espace de dimension 2. Or tous les espaces de dimension 2 sont isomorphes (cf 6-8-3). Les illustrations réalisées à l'aide de F permettent d'entrevoir correctement ce qui se passe dans tout espace de dimension 2.

On peut aussi faire, sur le même principe, des dessins qui représentent des situations "dans l'espace" et qui visualisent les espaces vectoriels de dimension 3 (cf en particulier chapitres 5 et 16).

Soit $\vec{u} = (O, A)$ un vecteur de F. La droite vectorielle D engendrée par $\vec{u}$ (cf chapitre 4) c'est-à-dire : $\{(O, M) \mid (O, M) = \lambda(O, A)\}$

est alors représentée comme sur la figure ci-dessous (elle passe par O) :



Par contre, la droite (D') ne représente pas une droite vectorielle : les éléments (O, M') et (O, P') ne sont pas "proportionnels".

Terminons par quelques précisions sur les axiomes de la géométrie. Comme nous l'avons dit, les programmes d quatrième (et surtout leurs commentaires officiels de 1971) proposent une certaine axiomatique de la géométrie à partir de laquelle on peut définir l'ensemble T des translations, les opérations dans T, et montrer alors que T est un espace vectoriel.

D'autres systèmes d'axiomes ont été proposés, notamment par certaines équipes de l'I.R.E.M. de Nantes (cf Nanta Iremica "Axiomatique et Géométrie") qui permettent d'arriver au même résultat de façon peut être plus élégan

Il reste que le système d'axiomes le plus simple (mais peut être le plus "tiré par les cheveux") est le suivant :

> il existe dans le plan (ou dans l'espace) un groupe commutatif T de transformations, appelées translations, et une application de $R \times T$ dans T, appelée "produit par un scalaire" tels que :
>
> (i) T est un espace vectoriel pour la loi O et le produit par un scalaire.
>
> (ii) pour tout couple (A, B) de points il existe une translation t T et une seule, telle que : $t(A) = B$.

En suivant cette axiomatique, on peut par exemple noter $\overrightarrow{AB}$ l'unique élément t T tel que : $t(A) = B$ Cette convention est donc légèrement différente de la convention habituelle, où t est appelée "translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$", et noter, comme d'habitude, + la loi interne, au lieu de O. On en déduit alors :

(iii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (formule de Chasles, qui décodée, signifie donc : la composée de la translation q tansforme A en B et de la translation qui transforme B en C est la translation qui transforme A en C).

On définit ensuite l'équipollence par : (A, B) équipollent à (C, D) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

On définit l'alignement de A, B, C ($A \neq B$) par :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

puis les notions de droite (affine) de parallélisme, etc... ; on démontre le théorème de Chalès, etc...

Enfin pour distinguer le plan (usuel) de "l'espace" (usuel), il suffit de poser à priori que pour l'un, l'espace T des translations est de dimension 2, et pour l'autre de dimension 3.

Une autre question, pédagogique celle-ci, est de savoir quelle est "la meilleure axiomatique" pour les élèves cette question est ouverte. L'axiomatique "vectorielle" donnée ci-dessus est celle en usage dans le 2è cycle des lycées actuellement. Pour le 1er cycle, il est fortement question de renoncer à toute présentation axiomatique de la géométrie, mais même dans ce cas, il est nécessaire que l'enseignant sache que l'axiomatique "vectorielle" perme de reconstituer toute la géométrie "affine" (c'est-à-dire à l'exclusion des questions de distance et d'angle, liées à l'introduction du produit scalaire).

Signalons enfin que les "vecteurs" définis par le programme de 4è, c'est-à-dire les classes d'équipollence de bipoints, sont loin d'être les vecteurs "par excellence", à tel point qu'on pourrait franchement les ignorer : la notion de classe d'équipollence n'est ni facile ni vraiment utile ; la notion fondamentale est celle de translat (car les translations sont des transformations) et, pour réaliser des illustrations, il faut choisir un point O et se placer dans l'espace des bipoints d'origine O (et non dans l'espace des classes d'équipollence, car qui en a jamais vu ?)

TABLE DES MATIERES