IREM des Pays de la Loire

RAPPORT DE RECHERCHE

ANNÉE 2006 - 2007

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques

pour les élèves à la fin du lycée ou au début du supérieur ?

Groupe « ECCE maths »
INRP – IREM de Nantes
IUFM des Pays de la Loire – Université de Nantes

Juin 2009

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DES PAYS DE LA LOIRE

2, rue de la Houssinière • BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03
Tel. 02 51 12 59 41
Site : www.irem.sciences.univ-nantes.fr/

Qu'est-ce que chercher
un problème de mathématiques

Groupe « ECCE maths »
INRP – IREM de Nantes
IUFM des Pays de la Loire – Université de Nantes

JUIN 2009

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques

pour les élèves à la fin du lycée ou au début du supérieur ?

Rapport de recherche - Année 2006 - 2007

IREM
Des Pays de la Loire

ISBN10 : 2-86300-038-1
ISBN13 : 978-2-86300-038-0
EAN : 9782863000380

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée ou au début du supérieur ?

Présentation du groupe « ECCE maths »

« ECCE maths » signifie « Ecrire, Chercher, Concevoir, Echanger des mathématiques ».

La recherche « ECCE maths » est financée par l'Institut National de Recherche Pédagogique et effectuée en partenariat avec l'IREM de Nantes et l'IUFM des Pays de la Loire.
Elle est dirigée par Evelyne Barbin (Centre François Viète, Université de Nantes) et Magali Hersant (Centre de Recherche en Education Nantais, IUFM des Pays de la Loire et Université de Nantes).

Responsables

Evelyne Barbin, Centre François Viète, Université de Nantes
Magali Hersant, CREN, IUFM des Pays de la Loire, Université de Nantes

Membres en 2006 – 2007

Sylvie AUBRY, lycée de Grand Air, La Baule
Anne BOYÉ, lycée de Grand Air, La Baule, IREM des Pays de la Loire et CFV, Université de Nantes
Marie-Céline COMAIRAS, lycée Kastler, La Roche-sur-Yon, IREM des Pays de la Loire
Paul DELHUMEAU, PRAG, IUFM des Pays de Loire
Stéphane FAES, PRAG, IUFM des Pays de la Loire
Mireille GENIN, Lycée F. d'Amboise, Nantes, IREM des Pays de la Loire
Hélène GRENAPIN, Lycée Jean-Perrin, Rezé, IREM des Pays de la Loire
Stéphane GROGNET, Maître de conférences, IREM des Pays de Loire, Université de Nantes
Simon MOULIN, département de mathématiques, Université de Nantes
Jean-Luc PLANES, Lycée François Truffault, Challans
Xavier SAINT-RAYMOND, Professeur des universités, Université de Nantes
Arnaud SOURISSE, Département de mathématiques, Université de Nantes

Introduction

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour un élève ? Quelle(s) place(s) et quel(s) rôle(s) y ont l'écriture, les outils, les destinataires ? Quels types d'écrits sont produits ?

Dans cette brochure, qui constitue le rapport de la recherche « ECCE[1] maths » pour l'année 2006-2007, nous apportons des éléments de réponses à ces questions à partir d'une étude effectuée dans six classes de Tale S et trois groupes d'étudiants en sciences (niveau L1 ou première année d'IUT), soit 135 lycéens et 48 étudiants.

Dans ce texte, la plupart du temps, nous ne différencions pas les lycéens et les étudiants et les nommons « élèves ».

Notre objectif, dans cette recherche, était de recueillir des informations sur ce que représente, pour les élèves de la fin du lycée ou du début de l'université, la résolution d'un problème « ordinaire » de mathématiques : nous voulons accéder au sens « scolaire » qu'ils donnent à la résolution d'un problème en général ; il ne s'agit pas de proposer des problèmes ouverts ou des narrations de recherche, ni de travailler sur l'apprentissage d'une notion donnée. Aussi avons-nous demandé aux élèves, selon un calendrier précisément établi, de chercher les trois problèmes suivants, de rendre leur travail à leur professeur et puis de répondre à trois questionnaires (cf. annexe 1). Cette méthodologie nous permet de recueillir des données à la fois quantitatives et qualitatives.

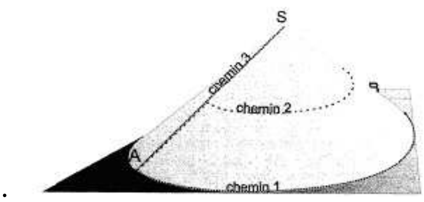
Problème 1 : le cône

Nous sommes une équipe de recherche composée d'enseignants de mathématiques et de chercheurs de l'Université de Nantes qui s'intéressent à la résolution de problème de mathématiques par les élèves et les étudiants. Pour nous aider, merci de bien vouloir chercher ce problème et de rendre à votre professeur le résultat de votre travail.

Vous avez 15 jours pour chercher ce premier problème. Au bout de cette période, votre professeur vous demandera de répondre par écrit à des questions sur la façon dont vous avez cherché. Il importe donc que vous vous souveniez des « grands » moments de la recherche de ce problème.

Nous vous proposerons ensuite, par l'intermédiaire de votre professeur, de résoudre deux autres problèmes dans les mêmes conditions.

Merci de votre participation et bon courage !



On donne un cône dont le rayon de la base est 1 et la hauteur est h. Les points A et B, diamétralement opposés sur la base du cône, peuvent être reliés par trois types de chemins. Le premier contourne la base, le second monte vers le sommet S, tourne autour du cône à l'altitude x, et redescend vers B, le troisième passe par le sommet S. Quel est le plus court des chemins reliant A et B ? (d'après les Olympiades de Mathématiques Nice)

[1] « ECCE Maths » signifie « Ecrire, Chercher, Concevoir, Echanger des mathématiques » et est une recherche financée par l'INRP, effectuée en partenariat avec l'IREM de Nantes, l'IUFM des Pays de la Loire. Elle est dirigée par Evelyne Barbin (Centre François Viète, Université de Nantes) et Magali Hersant (Centre de Recherche en Education Nantais, IUFM des Pays de la Loire et Université de Nantes). Cette recherche se poursuit actuellement.

<u>*Problème 2 : le dépassement*</u>

Voici le deuxième problème de la série. Comme pour le premier, vous avez 15 jours pour chercher. Au bout de cette période, votre professeur vous demandera de répondre par écrit à des questions sur la façon dont vous avez cherché. Il importe donc que vous vous souveniez des « grands » moments de la recherche de ce problème. Le troisième problème viendra ensuite.

Merci de votre participation et bon courage !

Pierre choisit un réel et le garde secret. Par ailleurs, Paul ajoute autant qu'il le veut des réels positifs de son choix. Etes-vous sûr que la somme obtenue par Paul finira par dépasser le nombre choisi par Pierre ?

<u>*Problème 3 : la fonction*</u>

Voici le dernier problème de la série. Comme pour les précédents, vous avez 15 jours pour chercher. Au bout de cette période, votre professeur vous demandera de répondre par écrit à des questions sur la façon dont vous avez cherché. Il importe donc que vous vous souveniez des « grands » moments de la recherche de ce problème.

Merci de votre participation et bon courage !

Soit f une fonction définie et continue sur [0;1] telle que pour tout x dans [0;1], $0 \leq f(x) \leq 1$. Comment justifier qu'il existe a dans [0;1] tel que $f(a)=a$.

A partir des productions des élèves à propos du premier problème, nous avons recensé les différentes méthodes de résolution utilisées et sélectionné des extraits de copies représentatifs de chacune des méthodes. En fin d'année, nous avons proposé une séance de « restitution » sur le problème « cône » (cf. annexe 2) : les élèves sont invités à prendre connaissance des extraits sélectionnés, à choisir une méthode, à l'analyser et à l'exposer à la classe. L'échange de mathématiques entre élèves s'effectue au cours de cette dernière phase.

Nous présentons ici nos résultats concernant l'analyse des copies d'élèves, des réponses aux questionnaires et la restitution. Les élèves ont répondu plus volontiers au premier questionnaire, les réponses aux deux autres sont plus partielles et plus difficiles à interpréter. Nous pensons que les élèves ont ressenti une certaine lassitude face aux questionnaires successifs, longs et qui comportaient des questions communes. Par ailleurs, les élèves ont achoppé sur le problème « dépassement ».

Les résultats présentés sont quantitatifs et qualitatifs : les chiffres indiqués sont issus du questionnaire (cf. annexe 2), les données qualitatives sont extraites des copies des élèves. Nous donnons des extraits de ces copies pour illustrer notre propos.

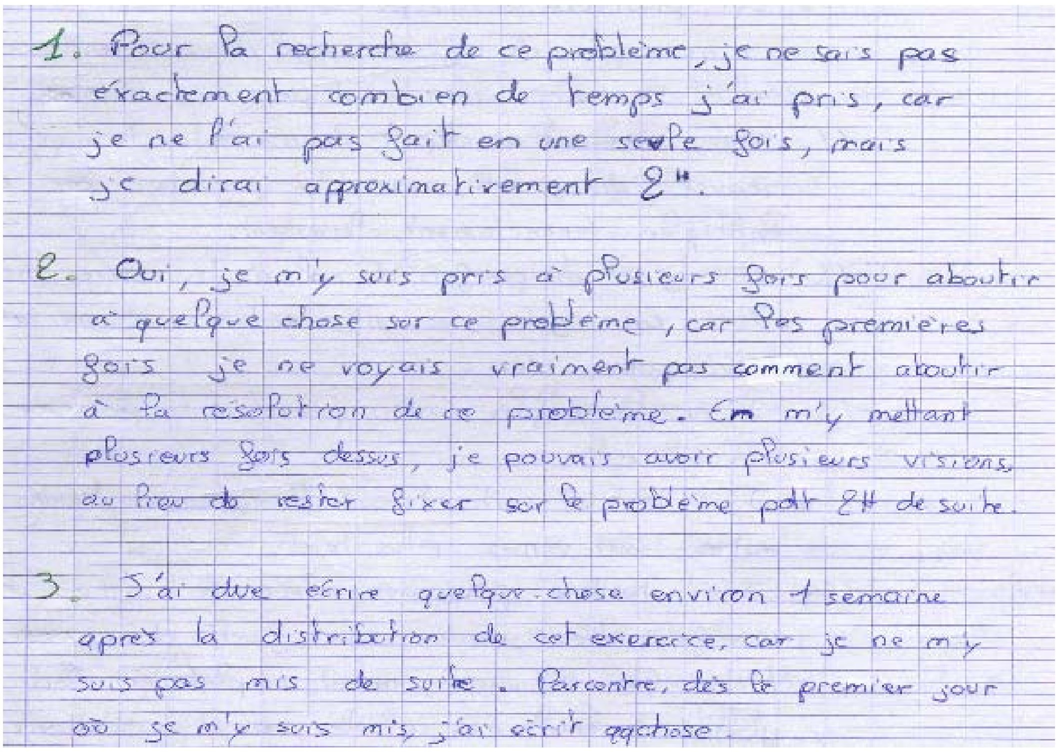
A. Chercher et écrire

Qu'est-ce que chercher un problème pour les élèves ?

Pour la plupart des élèves, « chercher un problème » tels que ceux proposés est une activité qui **prend du temps**, plus de temps qu'un exercice habituel d'application. Ce temps de recherche est relativement long pour eux, entre 1 h et 2 h 30 pour la majorité des élèves (cf. annexe 2). Un seul élève déclare avoir cherché deux ou trois jours, le problème lui a « trotté en tête ».
La recherche est effectuée **en plusieurs reprises**, soit justement par manque de temps, soit pour laisser mûrir la réflexion : deux reprises correspond à la fréquence la plus importante et à environ 50% des réponses, trois reprises à environ 25% des réponses.

« Je m'y suis repris à plusieurs fois car à chaque fois que je m'y remettais, mon raisonnement était plus clair »
« Je m'y suis repris trois fois, en général, les idées sont plus claires après un arrêt »
« Je m'y suis repris cinq ou six fois, j'avais d'autres choses à faire ... »

Même si le temps de recherche annoncé est relativement long, les élèves déclarent presque tous (180 élèves pour le cône) avoir écrit quelque chose et beaucoup le font **tout de suite**, presque dès la lecture du problème (83 élèves pour le cône).


1. Pour la recherche de ce problème, je ne sais pas exactement combien de temps j'ai pris, car je ne l'ai pas fait en une seule fois, mais je dirai approximativement 2 H.

2. Oui, je m'y suis pris à plusieurs fois pour aboutir à quelque chose sur ce problème, car les premières fois je ne voyais vraiment pas comment aboutir à la résolution de ce problème. En m'y mettant plusieurs fois dessus, je pouvais avoir plusieurs visions, au lieu de rester fixer sur le problème pdt 2H de suite.

3. J'ai due écrire quelque chose environ 1 semaine après la distribution de cet exercice, car je ne m'y suis pas mis de suite. Parcontre, dès le premier jour où je m'y suis mis, j'ai écrit qqchose.

« Dès la lecture du problème, j'ai refait un dessin et réécrit toutes les données »
« Oui, j'ai écrit quelque chose, des essais au bout de cinq minutes je pense »
« J'ai écrit quelque chose au bout de quelques minutes de réflexion »

Ce qui vient d'être dit convient plus aux problèmes sur le cône et sur les fonctions qu'à celui sur le dépassement. En effet, pour ce dernier, certains élèves déclarent avoir très **rapidement abandonné la recherche**, souvent n'arrivant pas à traduire l'énoncé de façon opérationnelle. Ils ne savent plus à quels outils mathématiques faire appel, leur principale préoccupation étant de « traduire » l'énoncé de façon à le rendre plus clair pour eux pour pouvoir trouver un début de piste de recherche.

L'énoncé nous dit que "Pierre choisit un réel et le garde secret". Nous pouvons donc en déduire que le réel choisit par Pierre peut être positif ou négatif, car l'énoncé du problème ne le précise pas.
En revanche, le problème nous révèle que "Paul ajoute autant qu'il veut des réels positifs de son choix". Nous pouvons donc en déduire que le résultat de Paul sera forcément positif et tendra vers +∞.

Là où le problème me semble ambigu, c'est sur la rédaction de la question, sur le verbe "dépasser".
En effet, lorsque nous comparons, additionnons ... des nom
nous partons toujours du 0.
Ici, deux cas de figure sont donc possibles :
① le verbe dépasser signifie : "plus grand que"
② le verbe dépasser signifie : "plus loin du départ (0) que

10. Oui, plusieurs autres pistes me sont venues à l'idée, mais avec plus de réflexion, je me suis rendu compte qu'elles ne correspondaient pas aux chemins indiqués.
11. Oui, surtout au début de ma recherche, je pensais trouver des pistes, mais ne parvenais pas à les expliquer correctement, clairement.

La majorité des élèves (101 pour le cône) explore une seule piste lors de la recherche d'un problème, les autres, lorsqu'ils sentent qu'ils peuvent « entrer » dans le problème, empruntent **plusieurs pistes**, mais ces pistes ne sont pas explicitées sur les copies et ils ne disent que très rarement pourquoi ils les ont abandonnées. De très rares élèves cherchent « au-delà » du problème proposé, cela a été le cas pour un autre chemin dans le problème du cône (5 élèves) :

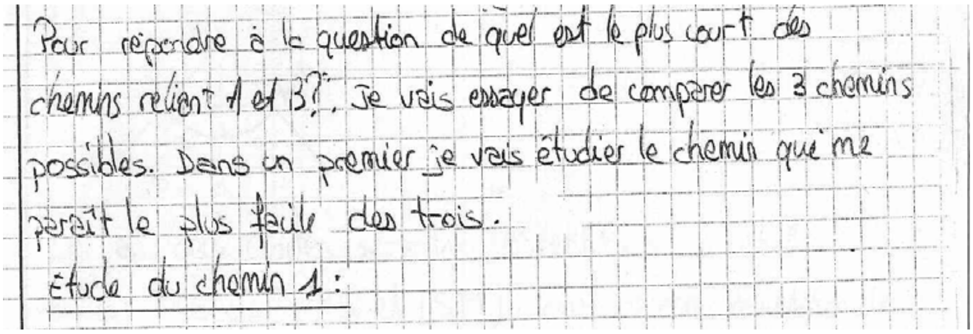
« Non j'ai conservé ma première piste »
« Oui, plusieurs pistes, j'en ai abandonné une au bout de vingt minutes »
« Oui, abandonnées lorsque je me suis rendu compte que cela était inutile, ne menait à rien

ou était faux ou lorsque je n'arrivais pas au bout de dix minutes »

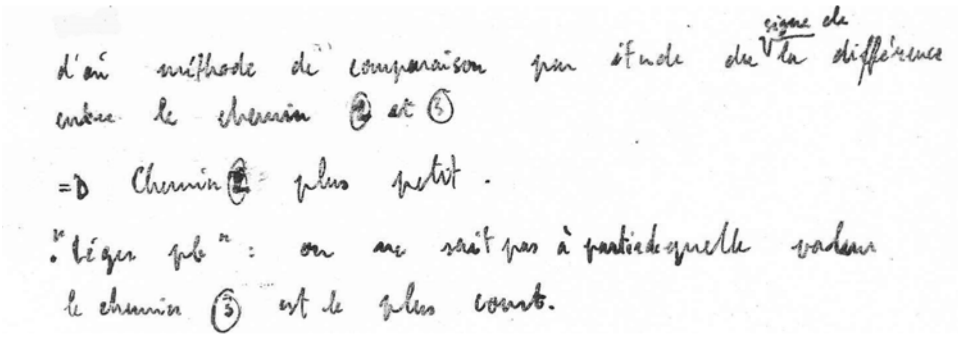
Il est à noter que **les écrits semblent évoluer au cours du temps** et des problèmes cherchés. Dans le problème sur le dépassement, un élève écrit à la fin de sa copie :

« Cela semble une mauvaise piste, je reviendrais plus tard sur cette piste ... »

Très peu d'élèves utilisent des écrits du type narration de recherche. Voici un exemple où l'élève « raconte » ce qu'il va faire ...


Pour répondre à la question de quel est le plus court des chemins reliant A et B?, je vais essayer de comparer les 3 chemins possibles. Dans un premier je vais étudier le chemin qui me parait le plus facile des trois.
Etude du chemin 1 :

De même, on peut remarquer qu'un grand nombre de devoirs finissent « brusquement », **sans aucune conclusion**, comme interrompus et non terminés, sans qu'il y ait des indications de fin ou non.


d'où méthode de comparaison par étude du signe de la différence
entre le chemin (2) et (3)
=> Chemin (2) plus petit.
"léger pb" : on ne sait pas à partir de quelle valeur
le chemin (3) est le plus court.

Pour terminer, chercher, dans le contexte que nous avons mis en place, est **rarement un acte solitaire**, au moins au début du processus : la grande majorité des élèves ont échangé des idées avec leurs camarades de classe, des membres de leur famille (parents, frères ou soeurs ...) (cf. annexe 2).

« J'en ai discuté à plusieurs reprises avec d'autres camarades de la classe »
« J'ai discuté avec B. au bout d'une semaine environ et avec mes parents dès le début »
« J'en ai discuté avec une personne d'un plus haut degré scolaire que moi mais je suis resté sur mon idée. »

Quel rôle joue l'écrit dans cette recherche ? A quoi sert le brouillon ?

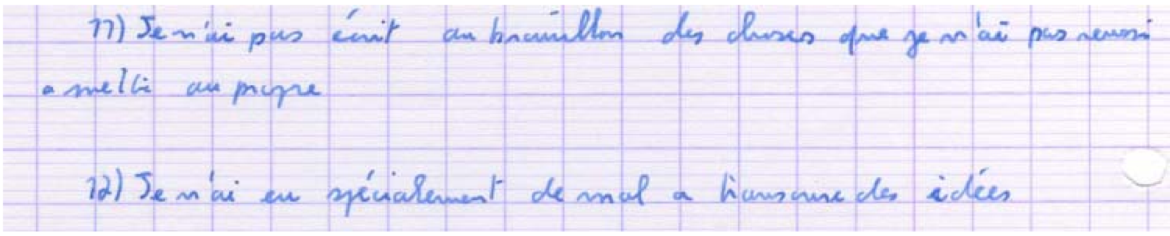
Les devoirs rendus vont du « brouillon-brouillon » à un devoir style « devoir maison », bien écrit et organisé. Les traces de recherche apparaissent parfois, mais peu. Pour le problème du cône, qui semblait moins « scolaire » aux élèves, il y a tout de même quelques copies que l'on pourrait qualifier de « narration de recherche policée ».

Les élèves disent avoir écrit assez vite quelque chose mais il est difficile de savoir si c'est au brouillon. En effet, malgré un encouragement de la part des enseignants, les élèves ne rendent pas leur brouillon qui semble demeurer **un écrit plutôt « privé »**. Ils semblent qu'**ils n'osent pas écrire des choses qui leur semblent « fausses »**, même au brouillon.

Le brouillon sert à faire les calculs, éventuellement à écrire la formule dont on va se servir, pour s'en rappeler, à faire éventuellement un petit dessin mais que l'on recopiera rarement sur la feuille qui sera rendue, sauf si c'est LE dessin sur lequel on s'appuiera. (Triangles et cônes, éventuellement graphiques de fonctions pour le problème 1, graphiques de fonctions pour le problème 3).

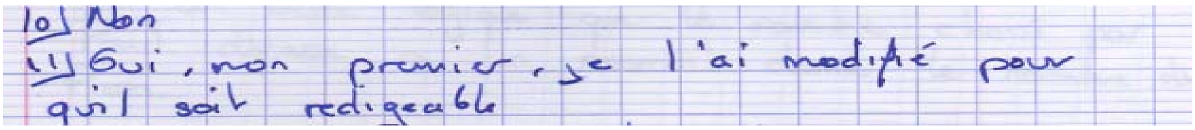
En fait, **l'utilisation du brouillon est donc clairement modifiée par le type de contrat passé avec l'élève** : s'il devient public, le brouillon rendu est souvent un deuxième brouillon. Nous n'avons pas eu accès à ces premiers jets, même si, comme nous l'avons précisé précédemment, tous les devoirs rendus n'étaient pas présentés comme des devoirs habituels.
Dans le supérieur, comme au lycée d'ailleurs, les étudiants utilisent peu leur brouillon car le professeur y a facilement accès. En examen, il n'est pas rare de voir les élèves demander plus feuilles de brouillon que d'intercalaires supplémentaires, c'est ce qu'on constate aussi le jour du Bac. Les élèves souhaitent garder à tout prix **un espace privé et s'il ne peut pas être écrit, il reste alors « mental »** ... d'où la posture de plus en plus fréquente de beaucoup d'élèves qui « réfléchissent sans écrire ».

Plus de la moitié des élèves n'ont pas écrit au brouillon une idée qu'il n'ont pas réussi à mettre au propre sûrement parce que les idées ou les pistes sont très vite abandonnées et qu'ils se consacrent davantage non pas à la recherche mais à la « mise au propre » de ce qui leur paraît une bonne idée ... Cela recoupe aussi le fait que les élèves n'explorent pas en général des pistes différentes ni des pistes au-delà de celles proposées dans le problème.


11) Je n'ai pas écrit au brouillon des choses que je n'ai pas réussi a mettre au propre

12) Je n'ai eu spécialement de mal a trouver des idées

Il ressort de l'examen des copies et des questionnaires que le brouillon est plus un « passage » vers le propre qui « satisfera » l'enseignant qu'un outil permettant la recherche.


10) Non
11) Oui, mon premier, je l'ai modifié pour qu'il soit redigeable

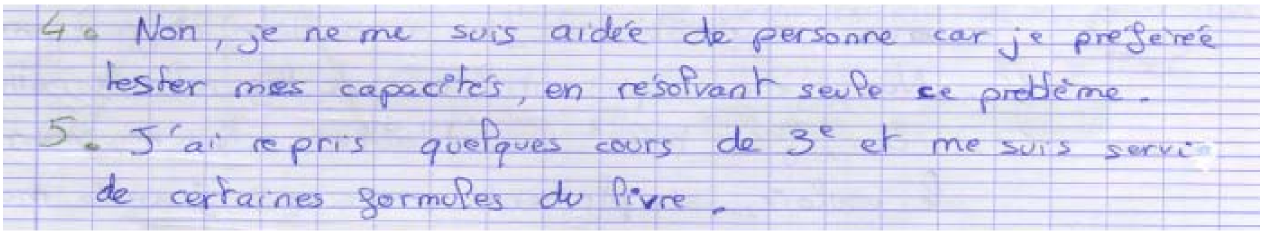
Le passage par le brouillon nous semble donc plus lié à une volonté de rendre un écrit lisible par l'enseignant qu'à une pratique de la recherche.

B. Chercher et concevoir

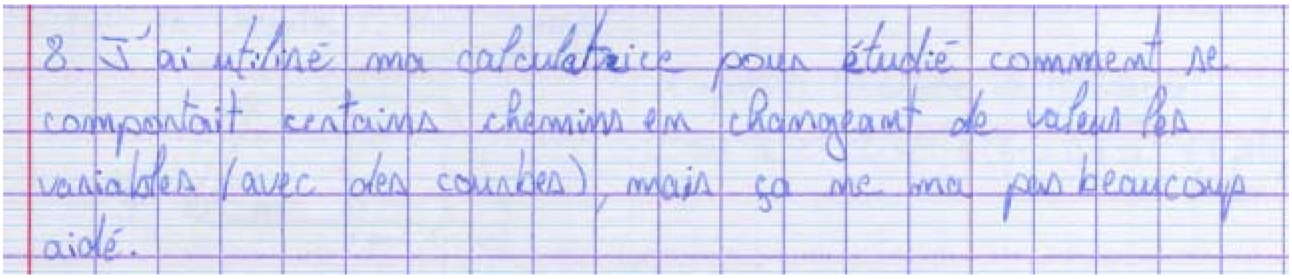
Quels outils sont utilisés lors de la recherche ? Quel est le lien avec l'idée d'expérimenter ?

Les élèves n'ont quasiment pas utilisé l'ordinateur (logiciels, internet) pour leur recherche, sauf pour rechercher « extraordinairement » des formules sur le périmètre du cercle ou le cône.
Certains ont cependant proposé le problème 2 sur un forum de discussion.
Quant aux outils classiques de documentation tels que les manuels, leur cours de l'année ou des années antérieures, des revues, cela dépend du problème posé : pour le problème du cône, peu de recherche ; en revanche, pour le problème du dépassement, certains élèves ont fait le lien avec le cours sur les suites vu en début d'année de terminale :

« Oui j'ai cherché sur Internet, dans mes cours de seconde au bout d'une semaine et demi. J'espérais y trouver des indications mais je n'ai rien trouvé » (problème du cône)
« Oui après une demi heure dans mes cours, mon manuel et un « Sciences et avenir » sur les paradoxes. » (problème du dépassement)


4. Non, je ne me suis aidée de personne car je préféré tester mes capacités, en résolvant seule ce problème.
5. J'ai repris quelques cours de 3e et me suis servi de certaines formules du livre.

La calculatrice leur est plus familière. Mais, pour ces problèmes, **elle ne semble pas leur avoir servi dans un processus « exploratoire »**, tout juste à faire les calculs écrits sur leur feuille.

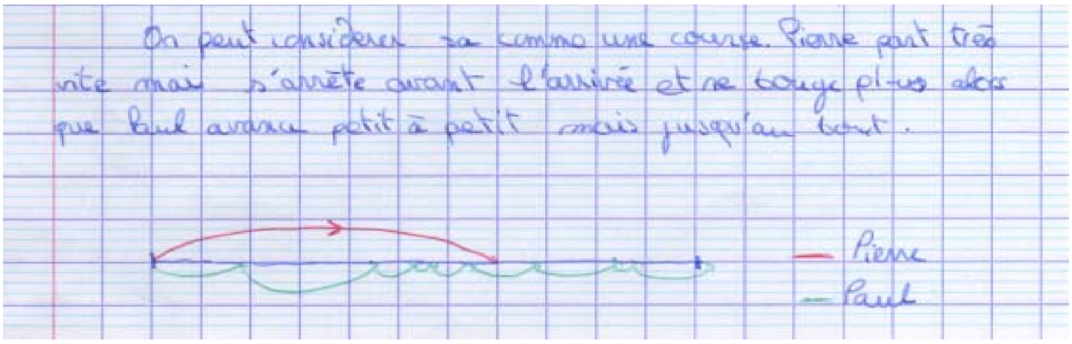

8. J'ai utilisé ma calculatrice pour étudié comment se comportait certains chemins en changeant de valeur les variables (avec des courbes), mais ça ne m'a pas beaucoup aidé.

Il est à noter que lors de la restitution que nous aborderons en détails dans la partie E, certains ont découvert que le tableur aurait peut-être permis d'avoir une idée. Mais comme ils ont conclu que cela ne démontrait rien et qu'ils ne savaient toujours pas comment faire pour démontrer, il n'est pas sûr qu'ils réutilisent cet outil lors d'une prochaine recherche.

Dans les questionnaires, presque tous les élèves affirment avoir fait des schémas, des dessins ou des figures (beaucoup dans les problèmes 1 et 3 et assez peu dans le problème 2) mais quels genres de schémas ?
Ceux que nous avons vus sur les copies pour le problème du cône sont des schémas classiques pour **visualiser les théorèmes** de Thalès et de Pythagore mais nous n'avons certainement pas eu accès aux schémas ayant permis aux élèves d'entamer leur recherche.

Une élève a fait une vue de dessus mais cela ne l'a pas aidée dans la mesure où elle a confondu la distance et l'altitude.

Pour le problème du dépassement, il y a eu très peu de schémas, en voici un représentatif de la démarche de certains.



Quant au troisième problème, les quelques élèves qui l'ont abordé ont fait des dessins qui ont souvent tenu lieu de démonstration.

En fait, il semble que très peu d'élèves aient l'idée que, en mathématiques, on peut faire des dessins, des figures, des essais, des tests. Pour ceux qui déclarent que cela les a aidés, et cela est confirmé par l'étude des copies, **ces démarches relèvent en fait moins de l'expérimentation dans la recherche que de l'heuristique**. On peut noter qu'un seul élève a réalisé une maquette du cône utile au problème 1, ce qui s'apparente probablement plus là à une forme d'expérimentation.
Il est vrai qu'ils n'ont pas été habitués à ce genre de pratique au cours de leur scolarité.

Raisonner sur un cas particulier ou un exemple numérique peut-il fournir une démarche générale ?

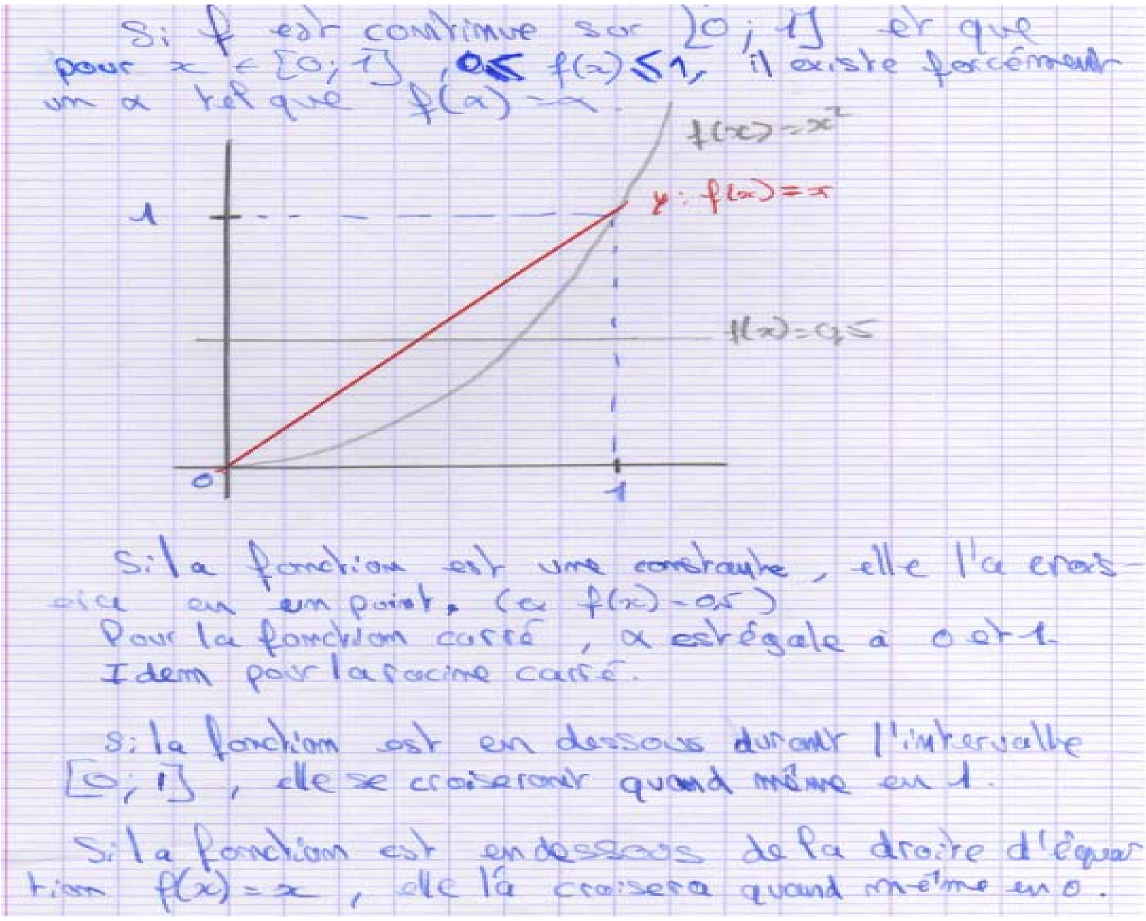
Les élèves disent avoir expérimenté sur des exemples numériques particuliers pour les problèmes 1 et le 2 mais ils ne donnent pas, sauf exception, ces essais. **Cela pourrait donner parfois l'idée d'une démarche générale, mais les élèves n'en ont pas souvent conscience**. Du moins, lorsqu'ils disent que cela les a aidés, on ne sait trop comment et l'on n'en voit pas de traces.

Pour le problème du cône, plusieurs élèves ont raisonné sur un cas numérique particulier, et ont conclu, sans discussion. Certains, à l'aide d'un logiciel, présentent un tableau avec un nombre très important d'exemples numériques et ne vont pas plus loin.

Pour le problème sur le dépassement, certains élèves ont utilisé des exemples numériques pour justifier leurs affirmations :

« Par exemple, Pierre choisit 20, Paul lui additionne 13+5=18<20. Mais il peut aussi additionner 13+5+3=21>20. Or Pierre peut avoir choisi 35. Dans ce cas, 21<35. »

Pour le problème de la fonction, ils sont nombreux à traiter trois cas : la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x$ donc, dans ce cas, il existe α tel que $f(\alpha) = \alpha$; puis f telle que $f(x) = x^2$; puis un schéma qu'ils pensent général d'une fonction souvent monotone, ou bien dont l'ensemble image est [0;1] ; puis ils concluent.

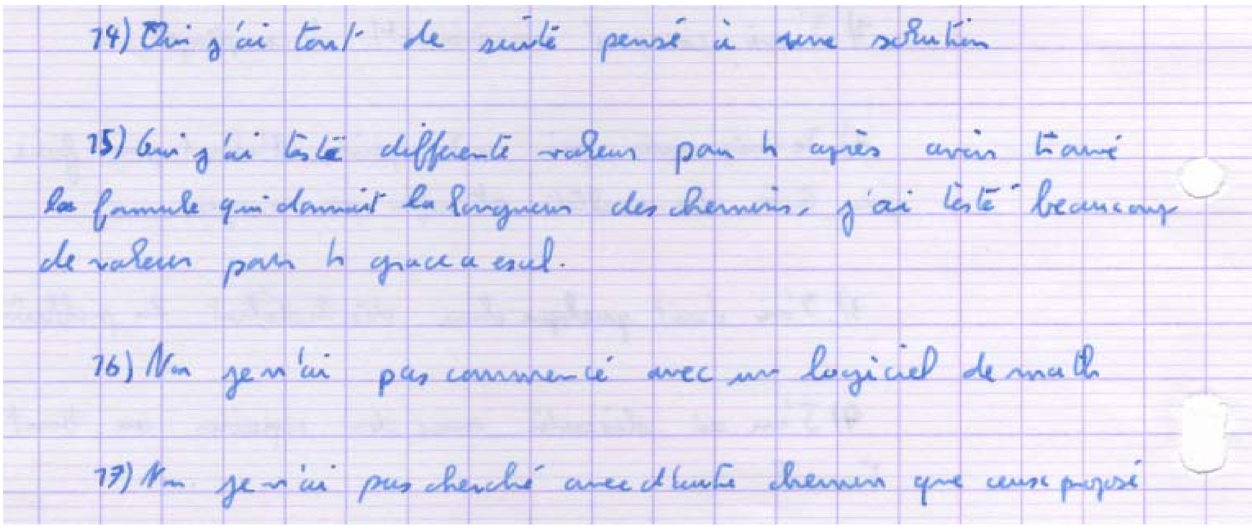

Si f est continue sur [0 ; 1] et que pour $x \in [0;1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, il existe forcément un α tel que f(α) = α.

Si la fonction est une constrante, elle l'a exercice en un point. (ex f(x) = 0,5)
Pour la fonction carré, α est égale à 0 et 1.
Idem pour la racine carré.

Si la fonction est en dessous durant l'intervalle [0 ; 1], elle se croiseront quand même en 1.

Si la fonction est en dessous de la droite d'équation f(x) = x, elle la croisera quand même en 0.

Les élèves interrogés ne voient pas de rapport entre ce qu'ils appellent de façon courante « expérience » en physique ou en SVT et ces essais qui pourraient être faits en mathématiques. Tout se passe comme s'ils pensaient qu'en physique on a des formules que l'on applique dans les « applications numériques » ou que l'on vérifie dans des « expériences ». Autrement dit pour eux, l'expérience vient après, pour valider ce qui est


14) Oui j'ai tout de suite pensé à une solution

15) Oui j'ai testé différente valeur pour h après avoir trouvé la formule qui donnait la longueur des chemins, j'ai testé beaucoup de valeur pour h grace a excel.

16) Non je n'ai pas commencé avec un logiciel de math

17) Non je n'ai pas cherché avec d'autre chemin que ceux proposé

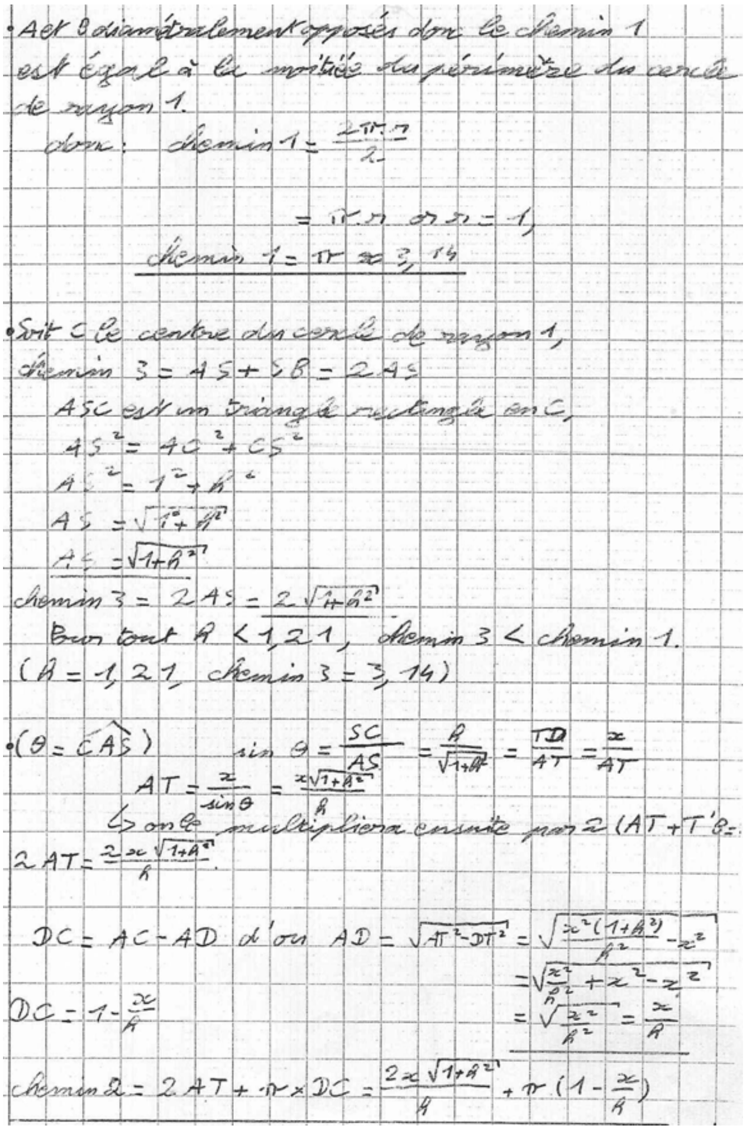
exact.

C. Chercher et justifier

Deux genres d'écrits : explications et démonstrations

Les rédactions des réponses aux problèmes proposés n'apparaissent pas comme des démonstrations. Aucun élève ne dit clairement dès le début où il veut aboutir (en commençant par exemple par « Montrons que ...).
Il est vrai qu'aucun énoncé ne demandait une démonstration et **il est certainement naturel pour les élèves qu'une réponse avec des éléments de justification apparaisse comme suffisante.**

Le problème sur le cône a donné lieu à des écrits assez classiques, caractéristiques de ce que les élèves font en devoir maison.
Les élèves débutent facilement la rédaction de leur réponse, en calculant la longueur des chemins 1 et 3 (en illustrant leurs calculs par des schémas utilisant Pythagore ou Thalès)
Le calcul de la longueur du chemin 2 amène les premières difficultés : certains alors s'obstinent et cherchent à en venir à bout, d'autres laissent tomber leur recherche et du coup n'arrivent pas à l'objectif de l'exercice qui était la comparaison de ces chemins.
Les difficultés rencontrées dans le calcul de ce chemin 2 conduisent alors à **une absence de rédaction**, des suites de calculs et parfois aboutissent à des inégalités qui semblent **perdre tout sens pour l'élève.**


•A et B diamétralement opposés donc le chemin 1 est égal à la moitié du périmètre du cercle de rayon 1.

donc : chemin 1 $= \frac{2\pi . r}{2}$

$= \pi . r$ or $r = 1$,

chemin 1 $= \pi \approx 3,14$

•Soit C le centre du cercle de rayon 1,

chemin 3 $= AS + SB = 2AS$

ASC est un triangle rectangle en C,

$AS^2 = AC^2 + CS^2$

$AS^2 = 1^2 + h^2$

$AS = \sqrt{1^2 + h^2}$

$AS = \sqrt{1+h^2}$

chemin 3 $= 2AS = 2\sqrt{1+h^2}$

Pour tout $h < 1,21$, chemin 3 < chemin 1.

($h = 1,21$, chemin 3 $= 3,14$)

•($\theta = \widehat{CAS}$) $\sin\theta = \frac{SC}{AS} = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{TD}{AT} = \frac{x}{AT}$

$AT = \frac{x}{\sin\theta} = \frac{x\sqrt{1+h^2}}{h}$

↳ on le multiplie ensuite par 2 ($AT + T'B =$

$2AT = \frac{2x\sqrt{1+h^2}}{h}$

$DC = AC - AD$ d'où $AD = \sqrt{AT^2 - DT^2} = \sqrt{\frac{x^2(1+h^2)}{h^2} - x^2}$

$= \sqrt{\frac{x^2}{h^2} + x^2 - x^2}$

$= \sqrt{\frac{x^2}{h^2}} = \frac{x}{h}$

$DC = 1 - \frac{x}{h}$

chemin 2 $= 2AT + \pi \times DC = \frac{2x\sqrt{1+h^2}}{h} + \pi\left(1 - \frac{x}{h}\right)$

Le fait que le destinataire soit une équipe de professeurs a poussé certains élèves à **« singulariser » leur rédaction par l'emploi du « je ».**

Je sais que le chemin 2 est le plus long.
De plus, considérons que $g(h) = ch_3 - ch_1$
et pour étudier les variations de $g(h)$, il me suffit
d'étudier le signe de sa dérivée.

$$g'(h) = (2\sqrt{h^2+1})' - (\pi)'$$

$$g'(h) = \cancel{2} \times \frac{2h}{\cancel{2}\sqrt{h^2+1}}$$

$$g'(h) = \frac{2h}{\sqrt{h^2+1}}$$

De plus je sais qu'une racine existe si elle est positive
ou nulle et un quotient existe si son dénominateur est différent
de zéro, alors $\sqrt{h^2+1}$ et positif et le signe de $g'(h)$ dépend
de $2h$.

Pour ce problème du cône, lorsque les trois chemins ont été calculés (le chemin 2 donc en général incorrect), **la comparaison s'appuie sur des égalités, pour conclure à des inégalités sans justification**. Par ailleurs, certains élèves ont repensé à des techniques du cours utilisant les fonctions, pour comparer des expressions, mais ici sans succès, à cause du problème des deux « inconnues ».

Une autre technique, mais cette fois « élève », pour trouver le signe d'une expression est la recherche des limites (ici, quand h tend vers 0 ou vers l'infini). Il semble que ce soit une technique utilisée couramment en physique. Ils sont donc un peu déroutés devant notre non-acceptation.

Le problème sur le dépassement, beaucoup plus inhabituel pour les élèves dans sa forme et dans son fond, a surpris. Les élèves se sont rabattus sur **des écrits « explicatifs »** visant en fait à récrire l'énoncé pour se l'approprier ...

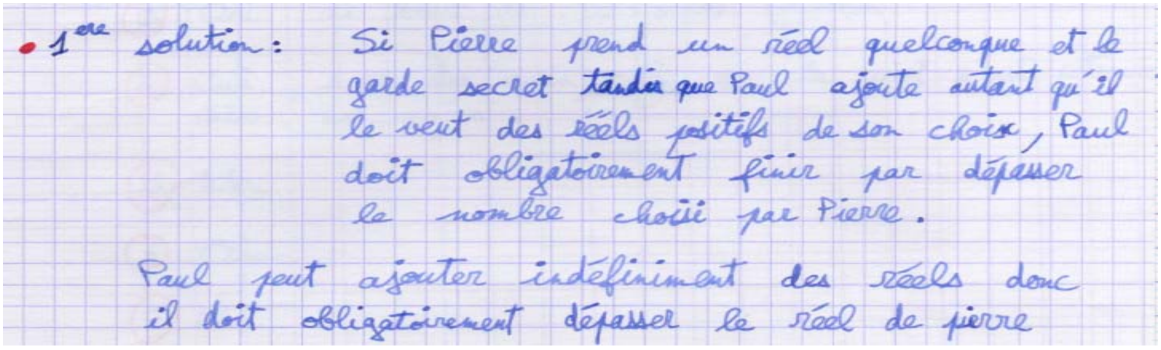
Un **vocabulaire « mal adapté »** s'est aussi greffé aux écrits des élèves faisant appel à la notion de « chance » ainsi que l'idée de « temps qu'il faudra » pour dépasser.

- Pour que paul depasse le chiffre de pierre
cela risque de prendre du temps
Si pierre choisis un chifre de type 9.10^{99}
et que paul part de 1000 et ajoute de 10000 en 10000
au bout d'un moment le chiffre sera dépassé car il n'y
a pas de limite aux nombres

donc en faite le chiffre choisis par pierre sera depassé
mais le temps qu'il mettra pour le regoindre et
le dépasse sera d'autan plus long que le chiffre
sera long

Les élèves savent que souvent on nomme les inconnues. Donc pour ce problème 2, ils ont introduit une lettre pour le nombre choisi par Pierre, et une autre lettre pour la somme de Paul. Ce choix est devenu un obstacle, **ne sachant pas quelle question vraiment se poser** sur les « équations » ou « inéquations » obtenues.

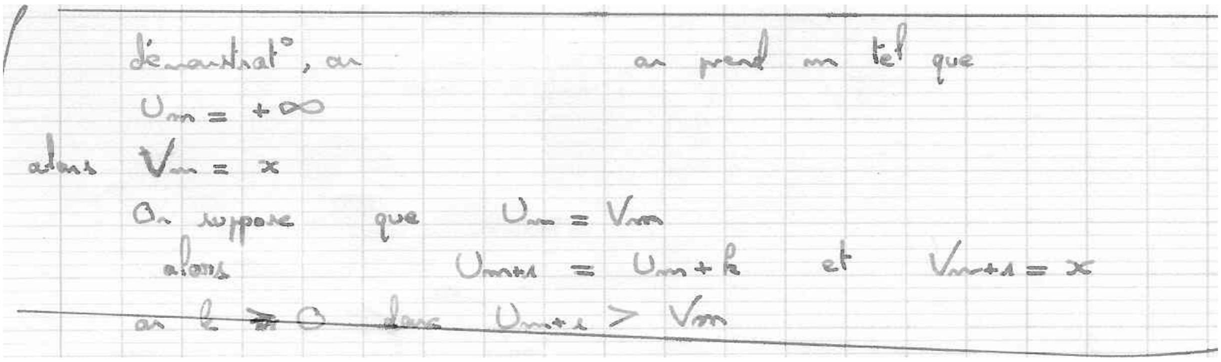
La notion de condition nécessaire est envisagée par les élèves et se traduit par l'apparition du mot **« obligatoirement »** qui peut aussi se comprendre comme un aveu d'impuissance quand l'élève ne sait plus comment faire pour achever sa démonstration.


• 1ère solution : Si Pierre prend un réel quelconque et le garde secret tandis que Paul ajoute autant qu'il le veut des réels positifs de son choix, Paul doit obligatoirement finir par dépasser le nombre choisi par Pierre.

Paul peut ajouter indéfiniment des réels donc il doit obligatoirement dépasser le réel de pierre

Pour les élèves, le caractère certain d'une chose n'est pas lié à une preuve rigoureuse et donc ils n'ont pas jugé nécessaire d'écrire une preuve mais **ils ont cherché seulement à « convaincre ».** De plus, le problème étant un problème de mathématiques, posé par des professeurs de mathématiques, certains ont pensé qu'il était absolument nécessaire d'utiliser des notations mathématiques, ce qui a pu donner lieu à des résultats parfois pour le moins surprenants.

En fait, lorsqu'on ne sait pas, il faut absolument donner l'apparence du mathématique.


démonstrat°, on on prend m tel que

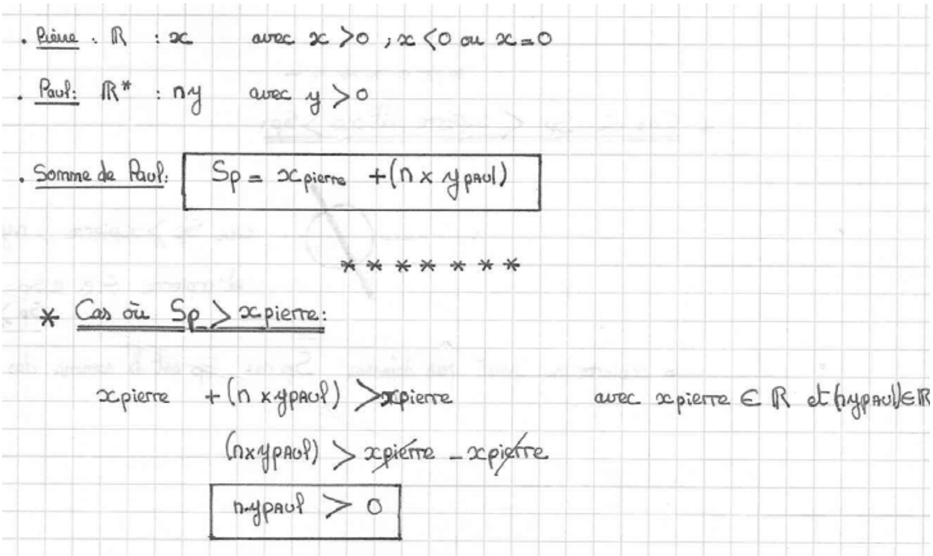
$U_m = +\infty$

alors $V_m = x$

On suppose que $U_m = V_m$

alors $U_{m+1} = U_m + k$ et $V_{m+1} = x$

or $k \geq 0$ donc $U_{m+1} > V_m$



. Pierre . $\mathbb{R}$: x avec $x > 0$; $x < 0$ ou $x = 0$

. Paul: $\mathbb{R}^*$: ny avec $y > 0$

. Somme de Paul: $\boxed{S_p = x_{pierre} + (n \times y_{paul})}$

****

* Cas où $S_p > x_{pierre}$:

$x_{pierre} + (n \times y_{paul}) > x_{pierre}$ avec $x_{pierre} \in \mathbb{R}$ et $(n y_{paul}) \in \mathbb{R}$

$(n \times y_{paul}) > \cancel{x_{pierre}} - \cancel{x_{pierre}}$

$\boxed{n y_{paul} > 0}$

Pour le problème 3, l'énoncé « Justifier que ... » plutôt que « Prouver que ... » appelle vraisemblablement pour les élèves **une explication plus qu'une démonstration.**
De plus, les élèves ont aussi tendance à ajouter des hypothèses non données pour se retrouver dans un cadre plus simple ou plus connu, comme la croissance de la fonction dans ce problème.

Le besoin d'une preuve

« Pour tous ces grands mathématiciens, faire des mathématiques c'est avant tout mettre en association des images, des concepts, etc... qui peuvent, à première vue, paraître éloignés : les aspects démonstration, rédaction sont très secondaires et ne leur sont utiles que pour communiquer leurs résultats. Or dans notre enseignement (...) n'est ce pas surtout cet aspect qui est développé ? » (J. Nimier)

On peut distinguer au moins trois situations dans lesquelles un individu en cours d'activité mathématique ressent ce que l'on peut appeler un « besoin de preuve » :

1. lorsque **le sujet veut se convaincre** de la véracité de sa conjecture
2. lorsque **le sujet cherche à convaincre les autres** (la communauté mathématique) que sa conjecture est vraie
3. lorsque **le sujet veut se convaincre de l'exactitude de la conjecture ou des résultats d'autres** que lui.

On peut remarquer que convaincre les autres diffère selon que l'on cherche à convaincre les autres élèves ou le professeur.

Pour les élèves, la preuve est souvent envisagée uniquement pour convaincre le professeur de l'habileté d'une démarche ou d'un raisonnement.

Validation de la démonstration

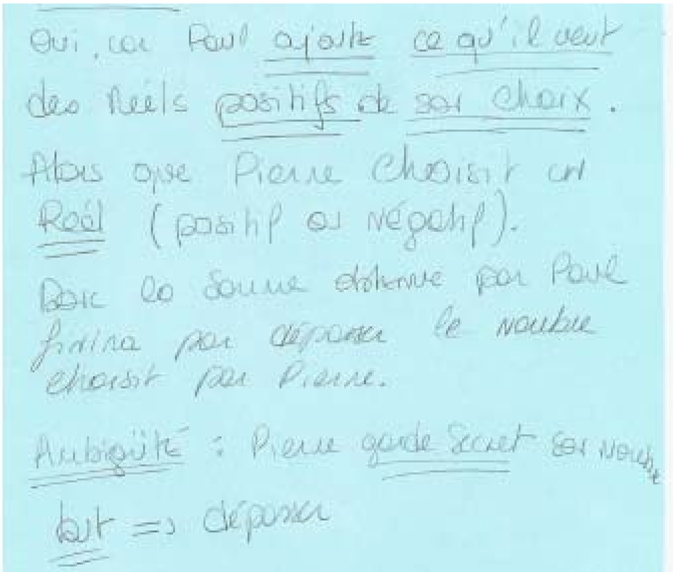
Les élèves ont bien intégré que c'est le professeur qui valide leurs écrits. Pour les problèmes de recherche proposés, la validation était peut-être sentie comme plus lointaine ou ne portant pas sur les mêmes critères, ce qui a généré sans doute **des écrits plus libres du point de vue de la rigueur.**

Les étudiants par contre s'interrogent peu sur la validation des théorèmes qu'on leur présente ou sur la validation des nouveaux théorèmes produits par les mathématiciens. Ils ont peu de critère de validation par rapport à leur propre travail et ils ne sont pas toujours convaincus de la validation faite par leur professeur.

Démonstration *vs* vérifications expérimentales

La démonstration semble donc surtout commandée par un désir de répondre aux exigences du professeur.

Le désir de répondre aux attentes de rigueur du professeur peut ainsi expliquer les réponses au problème 2. Dans la majorité des cas, les élèves répondent tout de suite à la question mais ont du mal ensuite à se justifier. Ils écrivent alors plusieurs fois les mêmes arguments, en en changeant la forme, et utilisent aussi des techniques de persuasion éloignées des preuves habituelles.


Oui, car Paul ajoute ce qu'il veut
des réels positifs de son choix.
Alors que Pierre choisit un
Réel (positif ou négatif).
Donc la somme obtenue par Paul
finira par dépasser le nombre
choisit par Pierre.
Ambiguïté : Pierre garde secret son nombre
but => dépasser

Par ailleurs, la démonstration apparaît souvent de manière stéréotypée dans le problème 3 où des théorèmes faux sont invoqués dans bien des cas.
Les élèves regardent souvent quelques cas particuliers de fonction puis concluent pour le cas général. Même s'ils savent qu'ils ne peuvent pas généraliser à partir d'exemples, ils utilisent dans leur démonstration des propriétés (des lemmes « cachés ») des fonctions particulières qui n'ont pas lieu d'être pour une fonction générique.

En mathématiques, l'expérimentation précède le plus souvent une conjecture puis les tentatives de preuves, contribue à la recherche de contre-exemples et n'a valeur de preuve que par la négative (lorsqu'un contre-exemple explicite vient réfuter la conjecture), en sciences expérimentales, l'expérimentation permet de formuler une loi, puis éventuellement de l'invalider ou d'en préciser le domaine d'application.
En mathématiques, l'accumulation de résultats expérimentaux contribue à renforcer la conviction des chercheurs et autorise certaines fois l'utilisation de conjectures comme bases pour d'autres résultats.
Pour les élèves, l'accumulation de vérifications dans des cas particuliers pour le problème 3 contribue à renforcer leur conviction. Mais ils ont alors souvent des difficultés à se détacher de cette conviction pour écrire la preuve ou pour penser à l'éventualité d'un contre-exemple.

Problème 3 : la fonction

Pour les fonctions de références definies sur $[0;1]$

. la fonction linéaire,

telle que $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$

On sait qu'elle passe par l'origine donc $f(0) = 0$

Avec $a = 0$, on a $f(x) = x$

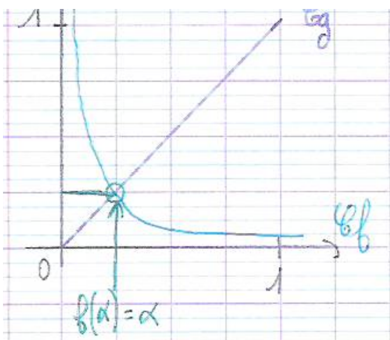
alors pour tout $x \in [0;1]$

$f(x) = x$ et donc $f(\alpha) = \alpha$

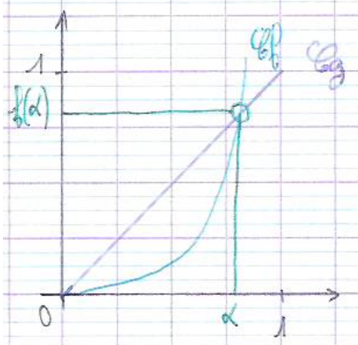
- $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = \sin x \\ f(x) = \tan x \end{array}\right\}$ passent par l'origine donc elles admettrent une solutio avec $\alpha = 0$, $f(0) = 0$

. On connait les représentations graphiques de toutes les fonctions de références.

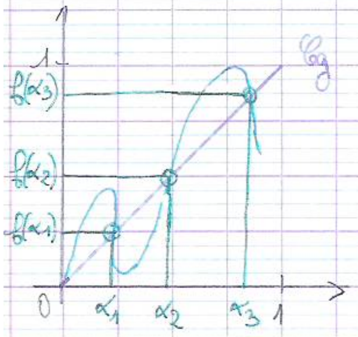
On peut emmettrent des conjectures à partir de ces representation puis on verifie par le calcule



Exemple de fonction décroissante définie sur $[0\,;1]$
↳ elle recoupera $\mathcal{C}g$ sur $[0\,;1]$

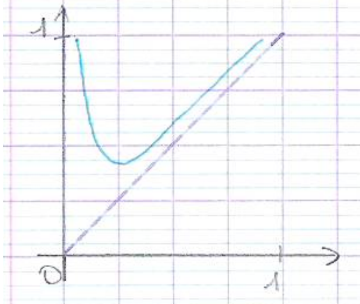


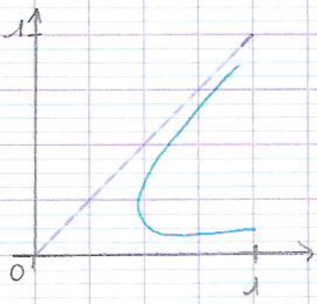
Exemple de fonction croissante définie sur $[0\,;1]$
↳ elle recoupera $\mathcal{C}g$ sur $[0\,;1]$



Exemple de fonction "oscillante" définie sur $[0\,;$
↳ elle recoupera plusieurs fois $\mathcal{C}g$ sur $[0\,;1$
donc il y aura plusieurs solutions

Mais :





Si $f(x)=\alpha$ représente 1 asymptote oblique ?

Les résultats évidents, trop « lisibles » pour celui qui cherche induisent rarement un besoin de démonstration. Ceci amène à poser la question suivante :

A quoi bon vouloir donner une preuve mathématique d'une conjecture lorsque celle-ci semble raisonnable à tous et peut être vérifiée dans un très grand nombre de cas ?

Des exemples historiques permettent d'entrevoir pourquoi un chercheur et la communauté des mathématiciens ne peuvent se contenter de vérifications expérimentales, aussi convaincantes et nombreuses soient-elles. Pensons par exemple aux recherches autour du théorème des nombres premiers, qui est lui-même issu largement de l'expérimentation. Les mathématiciens avaient constaté, expérimentalement , jusque pour des valeurs très avancées de n, que $\pi(n)$, le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n, était toujours inférieur à li(n), le logarithme intégral de n, c'est-à-dire $\int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}$. Ainsi, il était quasi certain que pour toust nombre, on avait $\pi(n) < \mathrm{li}(n)$, lorsqu'en 1914 Jacques Hadamard présenta à l'Académie des sciences une note de John Littlewood qui établissait que $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ change de signe une infinité de fois (le premier changement de signe ne se situe probablement pas avant 10^{371} ![2]

D. Chercher et apprendre

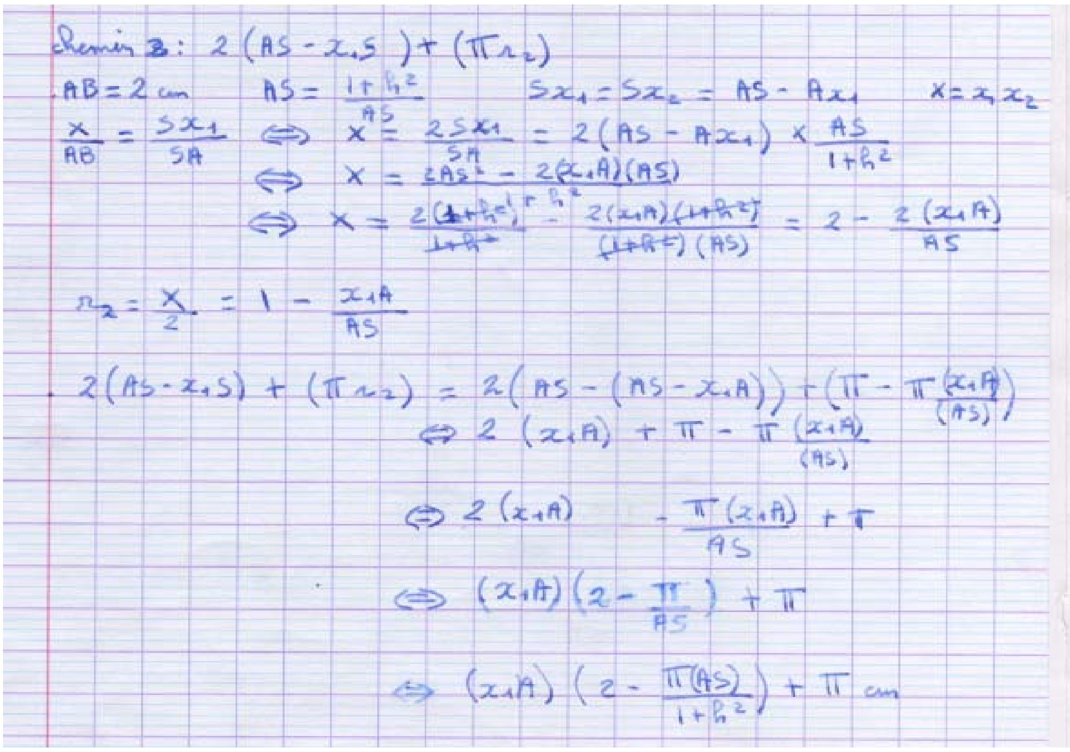
Adéquation ou inadéquation des savoirs des élèves aux problèmes proposés

Les recherches de problèmes permettent de donner pleinement aux savoirs leurs statuts d'instruments de compréhension et de maîtrise de situations mathématiques ou mathématisables. L'adéquation ou l'inadéquation des savoirs des élèves aux problèmes est source de conflits et de difficultés. En effet, nous avons trouvé des erreurs ou des difficultés récurrentes dans de nombreuses copies à notre disposition, que nous mentionnons maintenant.

Dans le problème sur le cône, c'est le calcul du chemin 2 qui a gêné beaucoup d'élèves : la « coexistence » de plusieurs « lettres » dans un même calcul n'est pas facile et le recours à leurs connaissances en la matière n'est pas aisé ... cela amène des calculs qui finalement n'ont plus aucun sens pour les élèves :

---

[2] Voir : Boyé Anne, « Les logarithmes se mêlent aussi des nombres premiers », in *Histoires de logarithmes*, Ellipses, 2006, pp. 317-331.



Chemin 3 : $2(AS - x_1S) + (\pi r_2)$

AB = 2 cm $AS = \frac{1+h^2}{AS}$ $Sx_1 = Sx_2 = AS - Ax_1$ $x = x_1x_2$

$\frac{x}{AB} = \frac{Sx_1}{SA} \Leftrightarrow x = \frac{2Sx_1}{SA} = 2(AS - Ax_1) \times \frac{AS}{1+h^2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2AS^2 - 2(x_1A)(AS)}{1+h^2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2(1+h^2)}{1+h^2} - \frac{2(x_1A)(1+h^2)}{(1+h^2)(AS)} = 2 - \frac{2(x_1A)}{AS}$

$r_2 = \frac{x}{2} = 1 - \frac{x_1A}{AS}$

$2(AS - x_1S) + (\pi r_2) = 2(AS - (AS - x_1A)) + \left(\pi - \pi\frac{(x_1A)}{(AS)}\right)$

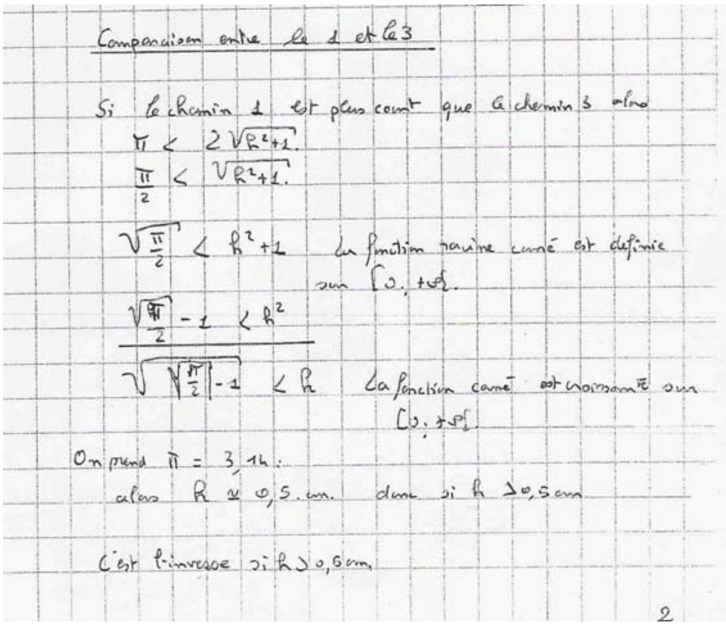
$\Leftrightarrow 2(x_1A) + \pi - \pi\frac{(x_1A)}{(AS)}$

$\Leftrightarrow 2(x_1A) - \frac{\pi(x_1A)}{AS} + \pi$

$\Leftrightarrow (x_1A)\left(2 - \frac{\pi}{AS}\right) + \pi$

$\Leftrightarrow (x_1A)\left(2 - \frac{\pi(AS)}{1+h^2}\right) + \pi$ cm

Un nombre significatif d'élèves a choisi de remplacer π par 3,14 pour « y voir plus clair » et le rôle de x et de h reste toujours très mal perçu.
Les synthèses en fin de devoirs sont très rares.



Comparaison entre le 1 et le 3

Si le chemin 1 est plus court que le chemin 3 alors

$\pi < 2\sqrt{h^2+1}$

$\frac{\pi}{2} < \sqrt{h^2+1}$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} < h^2+1$ La fonction racine carré est définie sur $[0, +\infty[$.

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 < h^2$

$\sqrt{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1} < h$ La fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$.

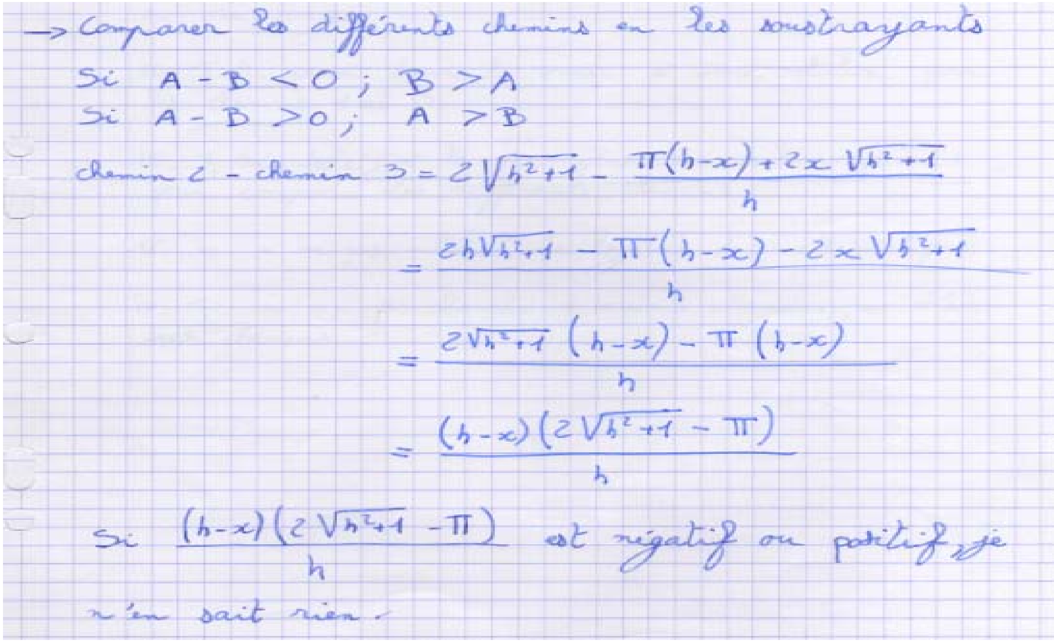
On prend π = 3,14 :

alors h ≈ 0,5 cm. donc si h ≥ 0,5 cm

C'est l'inverse si h ≤ 0,5 cm.

2

De même, la comparaison des chemins a été rendue très difficile par la présence de ces lettres :


→ Comparer les différents chemins en les soustrayants

Si $A - B < 0$; $B > A$

Si $A - B > 0$; $A > B$

chemin 2 − chemin 3 $= 2\sqrt{h^2+1} - \dfrac{\pi(h-x)+2x\sqrt{h^2+1}}{h}$

$$= \frac{2h\sqrt{h^2+1} - \pi(h-x) - 2x\sqrt{h^2+1}}{h}$$

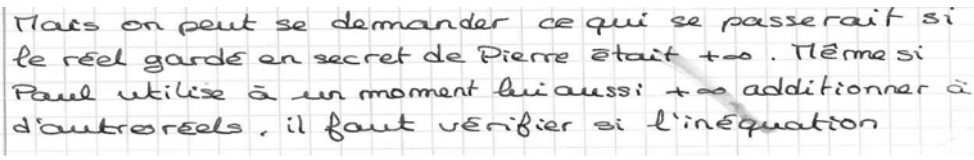
$$= \frac{2\sqrt{h^2+1}\,(h-x) - \pi\,(h-x)}{h}$$

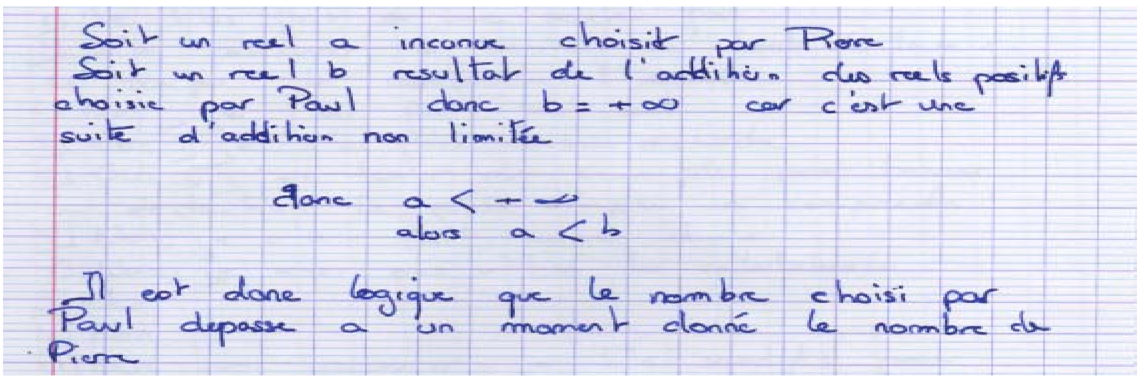
$$= \frac{(h-x)(2\sqrt{h^2+1}-\pi)}{h}$$

Si $\dfrac{(h-x)(2\sqrt{h^2+1}-\pi)}{h}$ est négatif ou positif, je n'en sait rien.

Les élèves ont des techniques, mais qu'ils appliquent maladroitement, ou hors de propos.
Pour comparer deux nombres on étudie la différence. Puis souvent on cherche les valeurs qui annulent, très difficilement puisqu'il y a deux « inconnues », donc lorsque par hasard on pense les avoir trouvées, on conclut directement sur le signe. Il n'est pas flagrant que dans les copies des élèves cela provienne d'une incertitude sur le mot « comparer », mais il s'agit plutôt ici d'une sorte d'habitude.

C'est « la notion d'infini » qui a perturbé les élèves dans le problème sur le dépassement : cette notion qu'ils utilisent sans trop de difficultés, par exemple dans la découverte de limite de fonctions, les a laissés sans « réaction » sur ce problème, les amenant même à envisager le cas où l'infini serait un nombre ...


Mais on peut se demander ce qui se passerait si le réel gardé en secret de Pierre était $+\infty$. Même si Paul utilise à un moment lui aussi $+\infty$ additionner à d'autres reels, il faut vérifier si l'inéquation

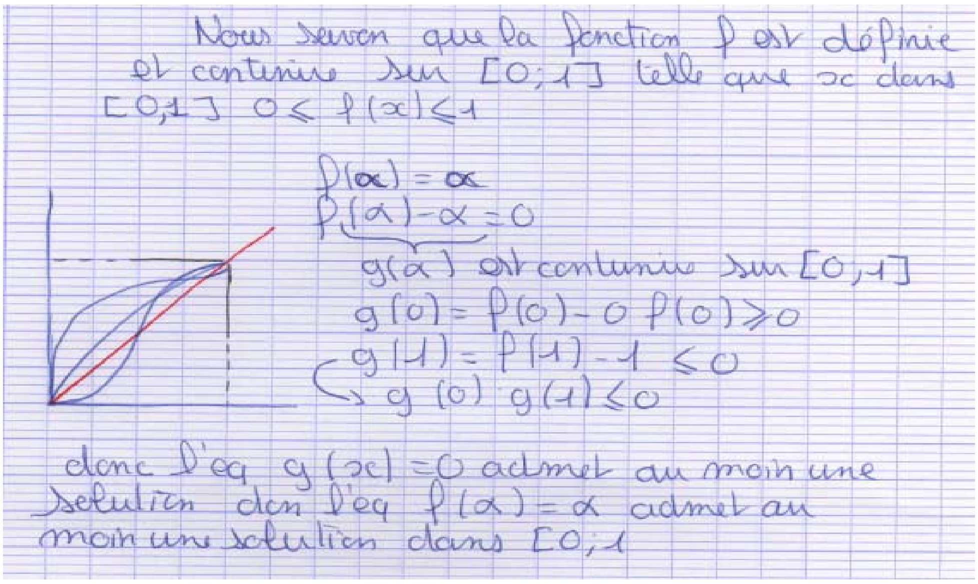

Soit un reel a inconnue choisit par Pierre
Soit un reel b resultat de l'addition des reels positifs choisie par Paul donc $b = +\infty$ car c'est une suite d'addition non limitée

donc $a < +\infty$
alors $a < b$

Il est donc logique que le nombre choisi par Paul depasse a un moment donné le nombre de Pierre

On a pu noter, cependant, pour certains élèves un réinvestissement des notions du cours, comme les suites géométriques convergentes.

Quant au problème sur la fonction, ce qui apparaît clairement dans les copies, c'est l'assimilation de la notion de fonction à quelque chose de « monotone et bien souvent croissant ».



Nous savon que la fonction f est définie et continue sur $[0;1]$ telle que x dans $[0,1]$ $0 \leq f(x) \leq 1$

$f(\alpha) = \alpha$

$\underbrace{f(\alpha) - \alpha}_{} = 0$

$g(\alpha)$ est continue sur $[0;1]$

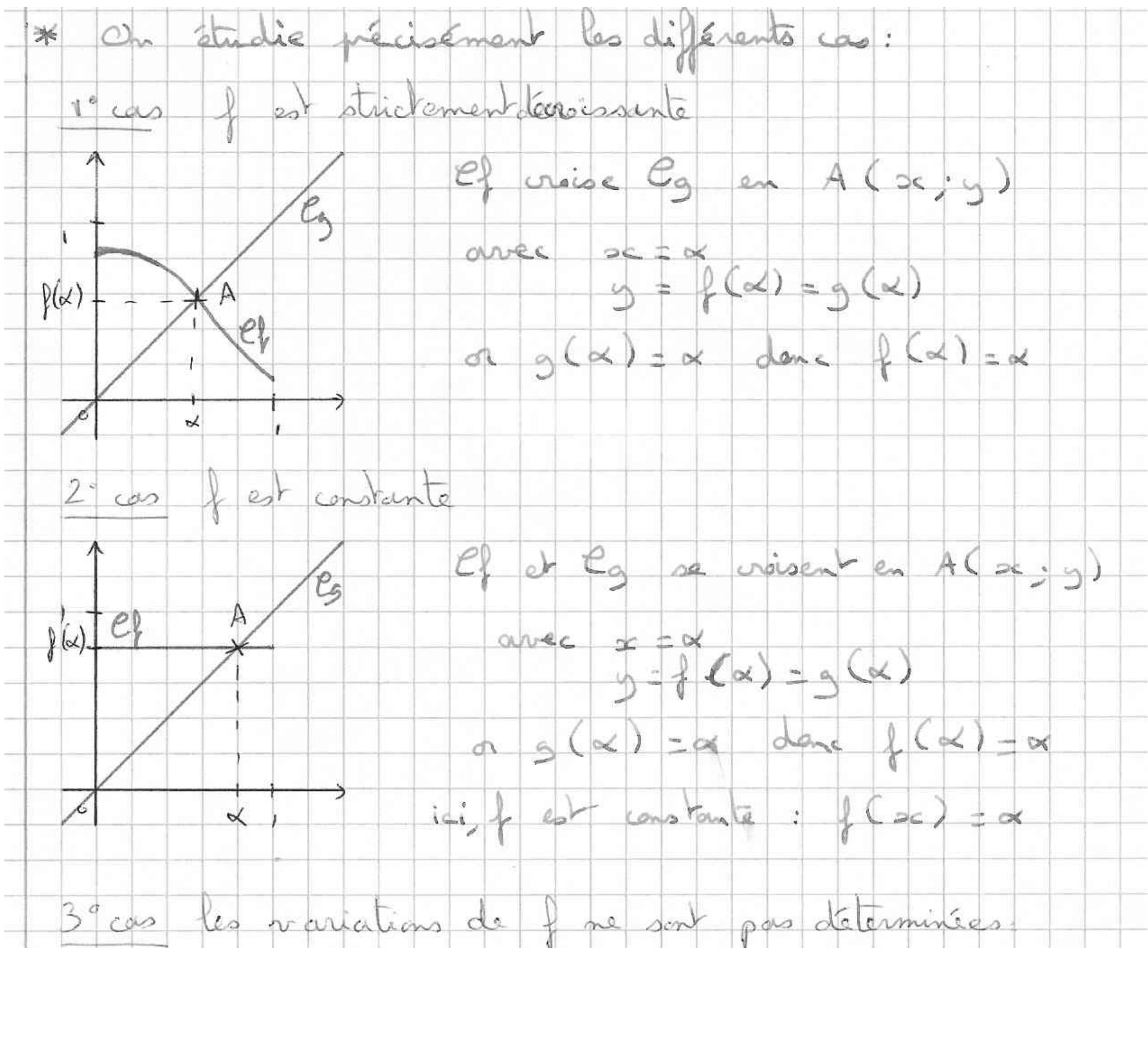
$g(0) = f(0) - 0$ $f(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$

$\hookrightarrow g(0)\, g(1) \leq 0$

donc l'eq $g(x) = 0$ admet au moin une solution don l'eq $f(\alpha) = \alpha$ admet au moin une solution dans $[0;1$

La notion de continuité, pour les élèves de Tale, se résume souvent à : tracer sans lever le crayon. Ce qui donne plutôt lieu à des argumentations par des graphiques.



* On étudie précisément les différents cas :

1° cas f est strictement décroissante

Cf croise Cg en $A(x;y)$

avec $x = \alpha$

$y = f(\alpha) = g(\alpha)$

or $g(\alpha) = \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$

2° cas f est constante

Cf et Cg se croisent en $A(x;y)$

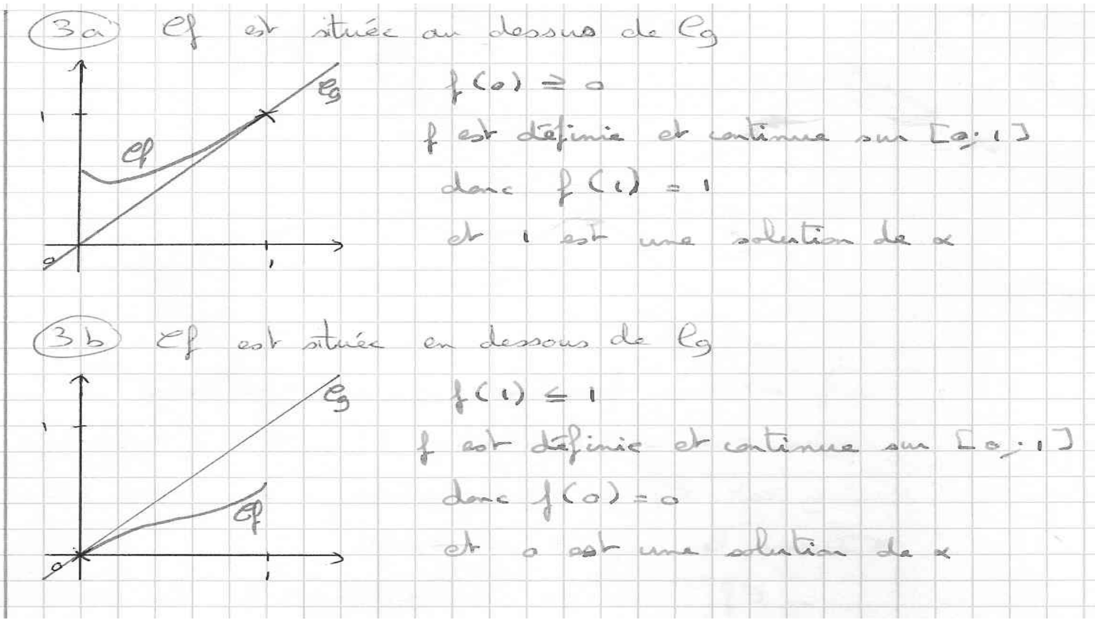
avec $x = \alpha$

$y = f(\alpha) = g(\alpha)$

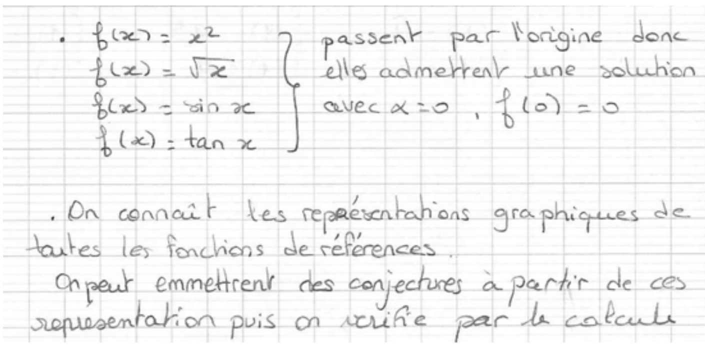
or $g(\alpha) = \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$

ici, f est constante : $f(x) = \alpha$

3° cas les variations de f ne sont pas déterminées.



Certains élèves montrent aussi que pour eux les différents types de fonctions se résument aux fonctions « de référence » qu'ils ont rencontrées depuis la seconde.
Ils commencent une étude de types de fonctions qu'ils veulent exhaustive et qui ne l'est pas, et abandonnent sans que l'on puisse dire s'ils sont conscients ou non que leur « inventaire » est très incomplet.



- $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan x$ passent par l'origine donc elles admettent une solution avec $x = 0$, $f(0) = 0$

. On connaît les représentations graphiques de toutes les fonctions de références.
On peut emmettrent des conjectures à partir de ces representation puis on vérifie par le calcule

Contrôle et notion d'échec

Le contrôle est l'élément déterminant de la réussite d'une recherche de problèmes. Il peut s'agir de vérifications de diverses natures sur les résultats et les procédures.
L'étudiant ne procède pas à des phases de contrôle, à la fois parce qu'il n'en a pas l'habitude mais aussi parce qu'il dispose de peu de moyens.
Il se décharge alors beaucoup sur le contrôle du professeur.

L'échec quant à lui peut être de différents types :
- **l'échec « non visualisation »** d'un résultat : cela se révèle peu profitable si le professeur donne la réponse.
- **l'échec « non réussite »** : l'élève a souvent du mal à évaluer cet échec car il se concentre soit sur la note (s'il y en a) soit sur la comparaison avec la correction du professeur. Comme l'élève n'a pas de critère de validation personnel, il comparera souvent grossièrement, mot à mot ou par structure de raisonnement identique, sans voir qu'il manque des arguments

cruciaux à son raisonnement. Il a aussi du mal à accepter le décalage entre ce qu'il pense et ce qu'il écrit, le professeur ne contrôlant que ce qu'il écrit.

- **l'échec « mise en sommeil »** : c'est un échec qui normalement doit être profitable à l'élève, moment de réflexion où il prend le temps de comprendre ce qui peut le bloquer, mais qui n'est pas facile à adapter au « temps scolaire » tel qu'il est vécu actuellement.

Les « bénéfices » d'une situation de recherche

La pratique des situations de recherche donne de **l'importance au processus de recherche par rapport aux processus habituels de communication de preuves** élaborées suivant une forme convenue.

Cette pratique permet de :

- **stimuler le développement d'attitudes et de méthodes de recherches** : l'imagination, l'esprit d'initiative, les facultés de communications orales (expression, écoute) et écrites (nécessité de rédiger clairement les découvertes pour les communiquer), l'esprit critique par rapport aux conjectures, aux preuves ...
- **développer l'aptitude à élaborer une stratégie**, essayer une piste
- faire percevoir la **nécessité d'une preuve**
- **favoriser une orientation vers la réussite par rapport à l'élève lui-même** plutôt que par rapport au professeur : par exemple en créant un contrat dans la classe pendant lequel, à certains moments, les élèves sont totalement responsables de leurs productions
- **établir un rapport aux mathématiques plus positif** en valorisant certains élèves moyens ou faibles.

Cette pratique est bien sûr à encourager fortement pour qu'elle soit profitable pour tous. Nous conclurons en citant Polya :

« L'acte d'apprendre commence par l'action et la perception, se poursuit par les mots et les concepts et devrait se terminer par l'acquisition d'habitudes mentales profitables. »

E. Chercher et échanger

Restitution sur le problème du « cône » : le protocole

La restitution s’est déroulée uniquement dans les classes de Tale, à la fin du troisième trimestre donc proche du Bac avec des élèves qui sont en pleines révisions. Nous avons donc décidé de consacrer uniquement deux heures (de préférence hors cours) pour cette restitution en axant notre travail uniquement sur le problème du cône en suivant ce protocole :

- chaque élève de la classe reçoit le fascicule (voir Annexe 2) regroupant les différentes copies sélectionnées, le professeur expliquant pourquoi ces copies avaient été choisies.
- examen du fascicule pour extraire une copie qu'ils auraient envie d'examiner en détail.
- après un délai de réflexion, les élèves se regroupent selon leur choix de copie et doivent : « décortiquer » attentivement la solution exposée sur la copie choisie, la commenter, la critiquer, éventuellement la compléter et désigner un rapporteur qui viendra exposer à toute la classe le résultat de cet examen critique.

Le texte d’introduction du premier problème présentait explicitement nos intentions.
Les élèves ont dans l’ensemble adhéré spontanément à cette expérience et ont bien joué le jeu.
Nous avons remarqué que, bien que nos lycées soient assez différents, nous retrouvions les mêmes types de réactions face aux différents problèmes dans les classes.
De plus il est souvent difficile de distinguer une copie d’élève de Terminale d’une copie d’étudiant de L1.

Quelques éléments à propos des restitutions

Nous indiquons ici brièvement des éléments concernant la séance de restitution dans trois classes de Tale S : motivation des élèves, intérêt du travail mathématique réalisé par les élèves, échanges et synthèses.

a. Dans une des classes

Le travail sur **la restitution** à propos du problème 1 a été très apprécié par les élèves. En étudiant par groupes des copies d’autres lycéens ou étudiants, ils ont pu en trouver les défauts et plusieurs groupes ont ainsi réussi à surmonter les difficultés qu’ils avaient rencontrées dans le calcul des trois chemins ou dans les comparaisons. Ils ont alors établi des synthèses correctes et complètes. Par contre, certains groupes se sont perdus dans les confusions de la copie étudiée et n’ont pas pu en clarifier les réponses.

Analyse d’une copie par un groupe d’élèves lors de la restitution :

Avant toute initiative, elle pose pour chaque chemin des valeurs fixes qui empêche de faire un cas général

Chemin 1 :

Elle se rend compte que ses valeurs ne servent pas.
Elle commence par décrire le chemin.
Elle trouve le bon résultat, à savoir π, mais en prend une approximation.

Chemin 2 :
valeur fixe pour $\boxed{x=3}$
Utilise théorème de collège, quelle maitrise !!
Elle décompose le chemin → calcul l'arc de cercle
Pose d point d'intersection entre l'arc et AD
et fait arc de cercle + 2 × [AD]
remarque : résultat approximatif avec valeurs entières pour x et h.

b. Dans une autre classe

Les élèves se sont très vite mis au travail, il y a eu énormément d’échanges entre les membres de chaque groupe, mais ils n’ont pas réussi à prendre de la distance par rapport à ce qu‘ils lisaient : **leur principal souci était de savoir si « c’était juste »** et non de voir si la méthode proposée pouvait aboutir ou non.

Les exposés ont été plutôt décevants, les élèves ayant du mal à synthétiser le fruit de leurs réflexions ; par ailleurs, les élèves étaient sans doute fatigués après une journée très chargée. C'est un exercice qu'ils n'ont pas l'habitude de faire, en particulier en mathématiques où, même s'ils passent au tableau régulièrement, c'est en général pour corriger un exercice et, dans ce cas leur prestation s'apparente plus à de l'écrit qu'à de l'oral. Nous pensons qu'**il faudrait davantage travailler la communication orale en classe**, mais cela prend du temps et, surtout en terminale S, le temps est très compté.

Quelques points positifs cependant ont été mis en évidence par les rapporteurs :

- à propos de la solution à partir de valeurs numériques, l'élève rapporteur du groupe, élève très moyenne, a dit : **« un exemple n'est pas une preuve ».**
- un des groupes qui a travaillé sur la dernière méthode a trouvé que la copie était difficile à lire car **très mal rédigée** : nous pensons qu'ils ont ainsi mieux saisi pourquoi, dans leurs copies, nous leur reprochons de ne pas rédiger correctement. Mais, en revanche, ils n'ont pas été choqués qu'après une résolution d'équations, on conclue par une inégalité.
- l'exposé fait par un des groupes qui a examiné la première méthode (étude d'une fonction) a été le moment le plus intéressant de la séance : l'élève rapporteur a expliqué la méthode mais, au moment de l'exposé, le fait que le chemin 2 soit une fonction affine de x n'était apparu à aucun des deux groupes. C'est en exposant la méthode au tableau, et par une discussion entre les membres des 2 groupes mais aussi d'autres élèves de la classe, que la fonction affine a été vue et, alors, tout est devenu limpide. Nous pensons qu'à ce moment-là les élèves ont ressenti **une certaine forme de satisfaction.**

c. Dans une troisième classe

La séance de restitution aurait dû être **un moment où l'on apprend avec les autres**. Mais, l'organisation de la fin de l'année n'a pas permis d'avoir l'ensemble de la classe tout au long de la restitution.

Les groupes ayant travaillé sur la proposition de P. avec une représentation graphique de fonction ont cependant perçu que l'on pouvait échapper à la difficulté des deux « variables », et sont même presque arrivés à **l'étude d'une fonction affine** et à l'examen de son coefficient directeur.
Les groupes ayant travaillé sur les résultats au tableur ont perçu qu'il fallait, pour pouvoir conclure, **« fixer en quelque sorte h »** mais sans savoir quoi en faire.

Logiciel

Chemin 1 correspond bien à la solut° donc sa méthode parrait correcte

Chemin 3 les valeurs du chemin 3 d'après le tableau sont croissantes. D'après la solut° $ch_3 = 2\sqrt{1+h^2}$ cela coincide bien avec ces valeurs.

Chemin 2 Sa méthode n'est pas assez précise. On ne peut pas faire varier x et h comme on veut, x semble dépendre de h, et on ne connait pas leur sens de variat°

La recherche de la solution en utilisant le logiciel n'est pas assez précise. Elle ns permet de visualiser le problème pr certaines valeurs de H et donc de x mais elle ne nous permet pas de conclure sur la recherche d'un chemin court.

La place de la preuve dans cette restitution

a. Nécessité de la preuve

« D'ordinaire, les gens ne sont pas très bons pour vérifier l'exactitude formelle des preuves mais ils sont très bons pour y déceler des faiblesses potentielles ou des failles » (Thurston, 1995)

Dans les présentations de travaux d'élèves, la démonstration d'un résultat relève en grande partie des exigences institutionnelles de la classe. Est-ce pour cela que bien souvent les démonstrations sont stéréotypées ?

La communication de la preuve prend tout son sens par la validation par les pairs s'il y a un enjeu à cette validation. Cela a d'ailleurs été mis en évidence lors des séances de restitution des élèves : certains découvrent alors la nécessité des preuves ou des différentes règles de validation lors de l'analyse des copies et de la présentation du cheminement à la classe.

b. Efficacité et élégance de la preuve

Nous avons aussi repérée la preuve utilisée alors comme outil d'analyse, lorsqu'un résultat surprenant est mis à jour ou lorsqu'une conjecture qui a longtemps résisté semble enfin établie. Dans cette situation, afin de comprendre la profondeur du résultat, à quels endroits se situent réellement les difficultés, les mathématiciens se livrent à une étude et à une analyse détaillée des preuves fournies : **la preuve fournie pour un résultat pourrait s'appliquer à d'autres problèmes, se prêter à une certaine généralisation.**

Ce type de démarche par rapport à la preuve est très utilisée par le chercheur mais peu ou pas du tout par l'élève (Barbin, Duval, Giorgiutti, Houdebine, 2001). La séance de restitution a montré que dans certains cas, les élèves pouvaient s'intéresser aux différents types de preuves apportées, **les comparer à la fois du point de vue de l'efficacité et du point de vue de l'élégance.**

F. Chercher et enseigner

L'importance du facteur « temps » dans la recherche

Une des conditions de l'activité de recherche du mathématicien professionnel est la longue durée sur laquelle elle se mène.

L'importance du rôle du temps est attestée par les chercheurs (Nimier 1989). Certains mathématiciens indiquent que cette durée de la recherche permet une recherche inconsciente (Hadamard, 1993 ; Poincaré, 1993).

Pour les travaux de recherche proposés aux élèves, l'intervalle de temps de 15 jours a sans doute conduit les élèves à ne s'y prendre qu'à une ou deux reprises. Il n'a pas été suffisamment long pour **permettre du travail « inconscient »**.

Remobilisation des connaissances

La pratique des situations de recherche permet à l'enseignant de voir ses élèves sous un aspect différent (Arsac, Mante, 2007). Il découvre alors ce que certains sont capables de faire : nos élèves nous étonnent bien souvent !
Mais le professeur découvre aussi ce que les élèves ignorent **« malgré son enseignement »** : cela vient en fait de la difficulté à réorganiser les connaissances, souvent mal stabilisées, dans un contexte de résolution différent du contexte habituel d'apprentissage.

Ainsi, dans les problèmes rencontrés, bien des élèves ont eu du mal à remobiliser des connaissances anciennes, comme les théorèmes de Thalès ou Pythagore, ou même plus récentes, comme le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, même si ce théorème est une notion qu'ils ont vue récemment, ils ne la connaissent pas avec précision.

Gestion par l'enseignant des situations de recherche

Du point de vue de l'enseignant, la gestion des situations de recherche de problèmes par les élèves en classe est plus complexe que la gestion des situations de résolutions d'exercices.

Dans une tâche où l'exécution est bien définie par l'énoncé, le chemin suivi par l'élève, c'est-à-dire l'usage des procédures attendues voire des erreurs induites par la tâche, est bien anticipé et son évaluation éventuelle est aisée.
Dans une recherche de problèmes, les cheminements et les procédures des élèves peuvent être plus imprévisibles pour l'enseignant. Cette imprévisibilité peut provenir du fait que le but à atteindre est éloigné des connaissances des élèves ou du fait que le contexte d'apprentissage de ces connaissances est différent du contexte du problème, ce qui en rend l'usage difficile et met en évidence une certaine fragilité de ces connaissances.
Cette fragilité est liée au fait que les connaissances sont toujours contextualisées relativement aux situations de leur apprentissage, quelles que soient la variété de celles-ci. La mise en évidence de cette fragilité pointe la distinction entre le temps didactique et le temps de l'apprentissage. Cette distinction est évidemment bien connue de l'enseignant, en principe, elle relativement est prévisible au sein des activités habituelles.

Plus les situations de recherche de problèmes vont permettre à l'élève d'exercer une véritable activité de recherche, plus l'activité mathématique de l'élève va échapper à l'anticipation de l'enseignant, avec le risque de mise en évidence de la distance entre temps didactique et temps d'apprentissage et le fait que les savoirs réputés acquis sont encore bien fragiles (Tisseron et al. 1996)

Par ailleurs, dans les situations ouvertes où les conjectures et procédures des élèves vont être variées voire inattendues, l'enseignant va être éventuellement entraîné sur un terrain mathématique dont il ne contrôle pas tous les aspects, ce qui suppose de sa part l'aptitude à accepter cette position dont l'inconfort diminuera avec l'expérience des problèmes posés.

G. Quelques éléments de réflexion autour de « l'activité de recherche »

Le travail du chercheur

Le chercheur est confronté dès le début de son travail à un problème de taille : *a priori*, **la réponse exacte et les outils à utiliser (méthodes, concepts, résultats...) sont inconnus**. Cependant, une réponse et des outils plausibles s'obtiennent par diverses voies à partir de problèmes voisins connus, de travaux antérieurs, de changements de cadre, de reformulations de questions, etc…

Le rôle du temps (il y a la possibilité d'approfondir une question dans la durée, sans perdre de vue qu'un chercheur passe beaucoup de temps sans trouver ...), l'importance et les modalités variées des échanges entre pairs (informels, formalisés, au cours de séminaires ...), l'importance de la documentation, du positionnement par rapport aux travaux antérieurs, le rapport particulier aux processus de recherche sont autant de **modalités de travail du chercheur.**

La palette des **utilisations des connaissances** est aussi très large : utilisation des essais, expérimentations de divers types, ajout d'hypothèses, approche dialectique pour ajuster ces hypothèses et les résultats qui peuvent s'en déduire, **gestion du statut particulier de l'erreur**, utilisation de plusieurs cadres de référence, importance des obstacles qui sont des défis à relever, distance entre la connaissance du sujet et les connaissances nécessaires à sa résolution, disponibilité de ces connaissances, **reconstruction des outils ou construction de nouveaux outils** par un va et vient entre l'outil et l'objet, etc ...

Quant aux modalités de validation, **c'est à la communauté des pairs que revient la décision**. Il existe une validation officielle avec respect des normes de la communication des démonstrations et il existe des validations informelles au cours d'échanges entre pairs.

Compatibilité entre l'élève au sein du système scolaire et l'activité de recherche

Le travail du chercheur comporte une composante publique dans la diffusion et une composante privée dans l'activité de recherche elle-même.
Mais cette composante personnelle implique d'autres aspects généralement oubliés lorsque le travail du chercheur est pris comme référence pour la pratique de l'élève, en particulier l'existence d'un rapport particulier à l'erreur.

Le « temps ouvert » apparaît comme un élément primordial de la pratique des chercheurs professionnels. Le temps scolaire ne permet malheureusement pas le laborieux travail de (re)construction des connaissances tel qu'il est appréhendé par les chercheurs. L'expérience de la recherche fait vivre la nécessité d'utiliser harmonieusement ses facultés d'intuition et de raisonnement.

Il est difficile de mettre en place, dans le système scolaire tel qu'il fonctionne généralement, des situations de recherche permettant d'atteindre l'objectif d'appropriation par l'élève à la fois des connaissances, d'une méthodologie de recherche scientifique voire d'une méthode de pensée.

Le retour de la raison sur son propre travail, c'est-à-dire la mise en place de procédures de contrôle, est certainement ce qui caractérise le mieux l'attitude scientifique. C'est cette « vigilance épistémologique » qui poussera l'élève à mettre en place ces procédures de contrôle. Elle va provoquer chez lui un souci de précision et de qualité des affirmations et de leurs enchaînements.
Toute la question est de savoir comment provoquer et maintenir cet enjeu chez l'élève. Ce type d'attitude est loin d'être fréquent et peut être même en rupture avec le contrat scolaire habituel. Des situations spécifiques intégrant une dévolution particulière et peut être une renégociation d'un contrat approprié risquent d'être nécessaires pour induire une telle attitude (Legrand, 1993).

Conclusion

Les travaux des élèves recueillis et analysés ici nous permettent d'approcher ce que peut être « chercher un problème de mathématiques » pour un élève de Tale ou un étudiant de L1 dans un contexte scolaire. Cependant, nous identifions une limite forte du dispositif : le destinataire est le professeur et certains élèves produisent un écrit scolaire de type « devoir » ce qui rend difficile l'accès à leur réelle démarche de recherche. Un autre dispositif est à imaginer pour accéder à cela.

Références

Arsac G., Mante M., 2007, *Les pratiques du problème ouvert,* Eds SCEREN

Barbin E., Duval R., Giorgiutti I., Houdebine J., Laborde C. (éds), 2001, *La diversité des textes de démonstration*, Ellipses, Paris, pp.31-61.

Hadamard J., Essai sur la psychologie de l[1]invention dans le domaine mathématique, (1944, traduit et publié en français en 1959,), rééd. Gabay, Paris, 1993.

Legrand M., 1993, Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM*, 10. p. 123-158.

Nimier J., 1989, *Entretiens avec des mathématiciens. L'heuristique mathématique,* Publication de l'IREM de Lyon N° 67

Poincaré H., 1993, *L[1]invention mathématique* (conférence de 1908), J. Gabay, Paris.

Polya G., 1965, *Comment poser et résoudre un problème*,

Thurston W. P., 1995, Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM*, 21. p. 7-26.

Tisseron C., Feurly-Reynaud J., Pointillé M.C., 1996, Et pourtant, ils trouvent !, *Repères IREM,* 24. p. 11-34.

Annexe 1 : protocole de passation et questionnaires

Nous avons adopté le calendrier de passation suivant :

- problème 1 donné le 25/09/2006 et rendu le 09/10/2006
- problème 2 donné le 16/10/2006 et rendu le 06/11/2006
- problème 3 donné le 13/11/2006 et rendu le 27/11/2006.

Les questionnaires

<u>Questions sur la résolution du problème « Le cône »</u>
Voici maintenant le questionnaire associé au problème « Le cône ». Merci d'y répondre aussi précisément que possible, sur une feuille, en précisant bien le numéro des questions. Si, pour certaines questions, vous ne pouvez pas répondre parce que vous ne vous souvenez pas de la façon dont vous avez procédez, indiquez le.

Merci de votre contribution.

1. Combien de temps avez-vous consacré à la recherche de ce problème ?
2. Vous y êtes-vous pris à plusieurs reprises ? Combien ? Pourquoi ?
3. Est-ce que vous avez écrit quelque chose ? Au bout de combien de temps ?
4. Est-ce que vous en avez discuté avec d'autres personnes ? Qui ? Au bout de combien de temps ?
5. Avez-vous cherché de la documentation ? Laquelle (cours, manuel, livre, Internet, autre) ? Où ? Au bout de combien de temps ? Pourquoi ?
6. Avez-vous testé un ou des exemples ?
7. Avez-vous fait des dessins ou des figures ou des schémas ? Si oui, précisez. Est-ce que cela vous a aidé ?
8. Avez-vous utilisé votre calculatrice ? Un logiciel de mathématiques et lequel ? Est-ce que cela vous a aidé ?
9. Vous souvenez-vous avoir déjà résolu ce genre de problème ? Est-ce que cela vous a aidé ? Comment ?
10. Avez-vous emprunté plusieurs pistes ? Au bout de combien de temps les avez-vous abandonnées ?
11. Avez-vous écrit au brouillon des choses que vous n'avez pas réussi à mettre au propre ?
12. Est-ce qu'il y a des idées que vous avez eu du mal à transcrire ?
13. Avez-vous pensé à ce problème sans le vouloir ?
14. Avez-vous tout de suite pensé à une réponse ?
15. Avez-vous testé différentes valeurs pour h ? D'emblée ou plus tard ? Lesquelles ?
16. Avez-vous commencé votre recherche avec un logiciel de mathématiques ?
17. Avez-vous cherché avec d'autres chemins que ceux proposés ?

Questions sur la résolution du problème « Dépassement »

Voici le questionnaire associé au problème « Dépassement». Merci d'y répondre aussi précisément que possible, sur une feuille, en précisant bien le numéro des questions. Si, pour certaines questions, vous ne pouvez pas répondre parce que vous ne vous souvenez pas de la façon dont vous avez procédez, indiquez le.

Merci de votre contribution.

1. Combien de temps avez-vous consacré à la recherche de ce problème ?
2. Vous y êtes-vous pris à plusieurs reprises ? Combien ? Pourquoi ?
3. Est-ce que vous avez écrit quelque chose ? Au bout de combien de temps ?
4. Est-ce que vous en avez discuté avec d'autres personnes ? Qui ? Au bout de combien de temps ?
5. Avez-vous cherché de la documentation ? Laquelle (cours, manuel, livre, Internet, autre) ? Où? Au bout de combien de temps ? Pourquoi ?
6. Avez-vous testé un ou des exemples ?
7. Avez-vous fait des dessins ou des figures ou des schémas ? Si oui, précisez. Est-ce que cela vous a aidé ?
8. Avez-vous utilisé votre calculatrice ? Un logiciel de mathématiques et lequel ? Est-ce que cela vous a aidé ?
9. Vous souvenez-vous avoir déjà résolu ce genre de problème ? Est-ce que cela vous a aidé ? Comment ?
10. Avez-vous emprunté plusieurs pistes ? Au bout de combien de temps les avez-vous abandonnées ?
11. Avez-vous écrit au brouillon des choses que vous n'avez pas réussi à mettre au propre ?
12. Est-ce qu'il y a des idées que vous avez eues du mal à transcrire ?
13. Avez-vous pensé à ce problème sans le vouloir ?
14. Avez-vous tout de suite pensé à une réponse ?
15. Avez-vous reformulé le problème en d'autres termes ?

<u>Questions sur la résolution du problème « Fonction »</u>

Voici le questionnaire associé au problème « La fonction», dernier problème de la série. La consigne est la même que pour les problèmes précédents : répondre aussi précisément que possible, sur une feuille, en précisant bien le numéro des questions. Si, pour certaines questions, vous ne pouvez pas répondre parce que vous ne vous souvenez pas de la façon dont vous avez procédez, indiquez le.

Merci de votre contribution.

1. Combien de temps avez-vous consacré à la recherche de ce problème ?
2. Vous y êtes-vous pris à plusieurs reprises ? Combien ? Pourquoi ?
3. Est-ce que vous avez écrit quelque chose ? Au bout de combien de temps ?
4. Est-ce que vous en avez discuté avec d'autres personnes ? Qui ? Au bout de combien de temps ?
5. Avez-vous cherché de la documentation ? Laquelle (cours, manuel, livre, Internet, autre) ? Où? Au bout de combien de temps ? Pourquoi ?
6. Avez-vous testé un ou des exemples ?
7. Avez-vous fait des dessins ou des figures ou des schémas ? Si oui, précisez. Est-ce que cela vous a aidé ?
8. Avez-vous utilisé votre calculatrice ? Un logiciel de mathématiques et lequel ? Est-ce que cela vous a aidé ?
9. Vous souvenez-vous avoir déjà résolu ce genre de problème ? Est-ce que cela vous a aidé ? Comment ?
10. Avez-vous emprunté plusieurs pistes ? Au bout de combien de temps les avez-vous abandonnées ?
11. Avez-vous écrit au brouillon des choses que vous n'avez pas réussi à mettre au propre ?
12. Est-ce qu'il y a des idées que vous avez eues du mal à transcrire ?
13. Avez-vous pensé à ce problème sans le vouloir ?
14. Comment avez-vous commencer votre recherche : par un dessin ? par un exemple ? par de la documentation ? autre chose (précisez) ?

Annexe 2 : principaux chiffres tirés du questionnaire sur le cône

Pour le cône, nous avons recueilli et traité 183 questionnaires.

- Chercher : durée et reprises

Durée (min)	Nb	
5	1	Moins de 30 minutes : 9
15	1	
20	6	
25	1	
30	19	Entre 30 et 60 minutes : 39
35	5	
40	6	
45	8	
50	1	
60	23	Entre 60 et 90 min : 25
75	2	
90	19	Entre 90 et 120 min : 57
100	2	
105	3	
120	33	
140	1	Entre 120 et 150 minutes : 15
150	14	
180	11	180 min ou plus : 31
> 180	4	
210	2	
240	10	
300	3	
> 300	1	

Question 1 : durée de recherche

1 reprise	33
2 reprises	70
3 reprises	40
4 reprises	2
5 reprises	2
plus de 5	4
plusieurs	10

Question 2 : nombre de reprises

- Ecrire : pour la recherche et au brouillon

ont écrit	180
dès le début	83
Question 3 : écrire pendant la recherche	

Utilisation du brouillon	86
Difficultés à transcrire	82
Questions 11 et 12	

- Les aides et l'échange (il y a parfois plusieurs réponses à la question 4)

ont échangé	134
avec camarade classe	87
avec parents	12
avec prof particulier	3
avec fratrie	6
avec copains (pas même classe)	25
Question 4 : qui ?	

ont cherché dans doc	44
Dont manuels	26
Dont livres	16
Dont Internet	20
Dont cours	13
Question 5 : recherche de documents	

- Dimension expérimentale de la recherche

Tests de valeurs	99
dessins	86
figures	34
schéma	83
cela les aidé	101 oui
Questions 6, 7	
utilisation calculatrice	48
Utilisation logiciel	27
cela les aidé	44 oui
Question 8	

Plusieurs pistes	82
Une seule piste	101
Question 10	

tests valeurs h	93
autres chemins	5
Questions 15 et 17	

- Questions 9, 13 et 14

Souvenir	90
aidé	4 oui
Question 9	

Pensé sans le vouloir au problème	53
Pensé à une réponse immédiatement	100
Question 13 et 14	

Annexe 3 : restitution du problème du cône

Procédure de restitution devant les élèves du problème sur le cône :

1. nous donnons la priorité au problème 1 sur le cône car cet exercice a été le plus porteur d'enseignements pour nous, les deux autres étant moins « fédérateurs »
2. présentation à nos élèves de plusieurs méthodes et points de vue sur cet exercice extraits de copies
3. création de petits groupes pour échanger sur telle ou telle méthode
4. discussion critique sur ces méthodes et élaboration d'un compte rendu à exposer à la classe en fin de séance

Fascicule distribué aux élèves

PROBLEME DU CÔNE

On trouve pour les longueurs des chemins :

- longueur du chemin 1: $ch_1 = \pi$
- longueur du chemin 3: $ch_3 = 2\sqrt{1+h^2}$
- longueur du chemin 2: $ch_2 = x\left(\dfrac{2\sqrt{1+h^2}-\pi}{h}\right)+\pi = \dfrac{x}{h}ch_3 + \dfrac{h-x}{h}ch_1$

Recherche d'une solution par une étude de fonction dépendant de x (R., L1, Université de Nantes) :

$$C_2(x) = 2\sqrt{\frac{x^2}{R^2}+x^2} + \pi\,\frac{R-x}{R}$$

$$= x\left(\frac{2\sqrt{1+R^2}+\pi}{R}\right)+\pi$$

On dérive pour trouver R maximum:

$$C_2'(x) = \frac{2\sqrt{1+R^2}+\pi}{R}$$

1er cas : $\dfrac{2\sqrt{1+R^2}+\pi}{R} > 0$

$R > \sqrt{\dfrac{x^2-4}{4}}$

La fonction $C_2(x)$ est croissante sur $[0,R]$, son minimum est donc attei
en 0 et vaut π (chemin 1)

2e cas : $\dfrac{2\sqrt{1+R^2}+\pi}{R} = 0$

La fonction $C_2(x)$ est constante sur $[0,R]$, les trois chemins ont la même longueur, π.

3e cas : $\dfrac{2\sqrt{1+R^2}+\pi}{R} < 0$ soit $R < \sqrt{\dfrac{\pi-4}{4}}$

La fonction $C_2(x)$ est décroissante sur $[0,R]$, son minimum est donc atteint en R et vaut $2\sqrt{R^2+1}$ (chemin 3).

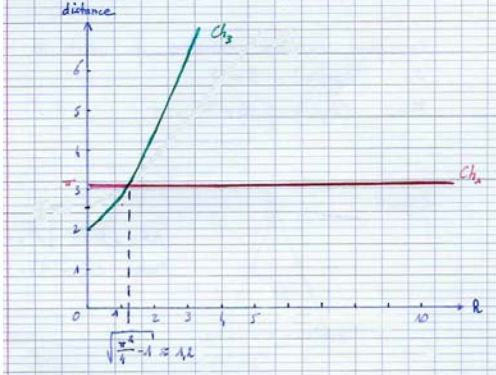
Recherche d'une solution par détermination graphique de la valeur critique de h et comparaison des chemins sur un graphique :

(Y., L1-Info, IUT, Nantes)

Donc $Ch_2 = \frac{x}{R}\, 2\sqrt{1+R^2} + \pi\,\frac{R-x}{R}$

$= \frac{x}{R}\, Ch_3 + \frac{R-x}{R}\, Ch_1$

Ch_1 et Ch_3 ne dépendent que de h :



Ch_2 dépend de x et de h avec $x \in [0 ; h]$

$Ch_2 \leq Ch_3 \iff x \leq h$

$Ch_2 \leq Ch_1 \iff x \leq 0$

Donc $\forall h$, si $x = h$ $Ch_2 = Ch_3$

si $x = 0$ $Ch_2 = Ch_1$

Conclusion :

pour $h \in \left[0 ; \sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}\right]$: chemin 3

et chemin 2 si $x = h$

pour $h \in \left[\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1} ; +\infty\right[$: chemin 1

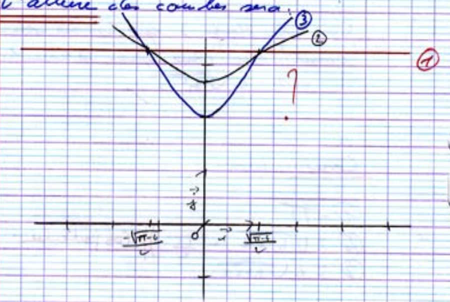
et chemin 2 si $x = 0$

(P., T^{ale}, Lycée Grand Air, La Baule)

préciser les fonctions. moi je n'ai pas vu venir

Mettons en fonction ces équations et faisons apparaître leurs courbes représentatives.

L'allure des courbes sera :



On a donc pour que le chemin ① soit le plus court.

$h \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2} ; +\infty\right[$

Pensez-vous que h puisse être négatif ?

et pour que le chemin ③ soit le plus court

$h \in \left]-\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2} ; \frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2}\right[$

Le chemin ② n'est jamais le plus court.

Recherche d’une solution à partir de valeurs numériques pour h et x (M., T^{ale}, Lycée Grand Air, La Baule) :

$r = 1$ cm

On pose : $h = 5$ cm, $x = 3$ cm

pourquoi pas pour faire un test ; mais ce ne sera pas le cas général.

Chemin 1 : Il contourne la base.

Les points A et B étant diamétralement opposés, le chemin 1 allant de A à B a pour longueur la moitié du périmètre.

On calcule alors :

$$\frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \times 2\pi r$$

$$= \pi r$$

$$\frac{1}{2}P \simeq 3{,}14.$$

La distance de A à B en passant par le chemin 1 est donc de 3,14 cm.

de π (donc environ 3,14 si on le veut mais pourquoi pas 3,1416… ?)

Chemin 3 : Le chemin 3 passe par le sommet S.

Sa longueur sera alors de deux fois la distance AS, A et B étant diamétralement opposés.

On peut ici utiliser le théorème de Pythagore : Soit le centre de la base C, ASC forme alors un triangle rectangle en C.

On a donc :

$$r^2 + h^2 = AS^2$$

$$1^2 + 5^2 = AS^2$$

$$AS^2 = 26$$

$$AS = \sqrt{26}$$

$$2AS = 2\sqrt{26}$$

[illegible]

La distance de A à B en passant par S est donc égale à $2\sqrt{26}$.

Chemin 2 :

On peut ici utiliser le théorème de Thalès :

On sait que x est à l'altitude 3. Pourquoi.

On calcule alors $\frac{1}{2} P' = \pi r'$

π n'est pas "égal" à 3,14 !

$= \pi DE$

$= 3,14 \times \sqrt{4,16}$

$= 3,14\sqrt{4,16}$

La distance pour se rendre de A à B en passant par le chemin 2 est donc de :

$$2 \times AD + \frac{1}{2} P' = 2 \times \frac{6\sqrt{26}}{5} + 3,14\sqrt{4,16}$$

$$= \frac{12\sqrt{26}}{5} + 3,14\sqrt{4,16}.$$

En prenant $R = 5$ et $x = 3$, on peut comparer la longueur du chemin 3 et celle du chemin 2.
On constate que $2\sqrt{26} < \frac{12\sqrt{26}}{5} + 3,14\sqrt{4,16}$.
Le chemin 3 est donc plus court que le chemin 2.

au terme

~~Au thème~~ de ce raisonnement je m'apperçois que celui-ci n'est pas le plus adapté. pourquoi ?
Au final, on peut dire que la longueur d'un chemin par rapport aux autres dépend totalement de R et de x.

En effet, si R et x ont des petites valeurs ; les chemins ~~2~~ 3 sera plus ~~petit~~ court que le chemin 1. Au contraire, si R et x ont de grandes valeurs, le chemin 1 sera plus court que le chemin 3.

? est-ce une donnée ?

On sait que $x_0 = 1$. Ainsi, le Chemin 1 est égal à 3,14 quelques soient R et x.

π quels que

On essaie de trouver le Chemin 3 tel que

$\sqrt{r^2 + R^2} = \cancel{3,14}\ \pi$

$\sqrt{1^2 + R^2} = 3,14$

$1 + R^2 = (3,14)^2$

$R^2 = (3,14)^2 - 1$

$R = 3,14 - 1$!

$R = 2,14$.

$\sqrt{a^2 - b^2}$ n'est pas égal à $a - b$!

Donc, si $R < 2,14$, le chemin 1 est plus long que le chemin 3.
Si $R > 2,14$, le chemin 1 est plus court que le chemin 3.
Si $R = 2,14$, le Chemin 1 sera aussi long que le chemin 3.

La longueur du chemin 2 par rapport aux deux autres dépend de R, et de x.

Recherche d'une solution par comparaison deux à deux des chemins à partir des cas d'égalité, (E., T^{ale}, Lycée Grand air, La Baule)

Maintenant que nous avons exprimé nos 3 distances, comparons les. Pour cela, étudions le signe de chaque différence :

- Comparaison des chemins ① et ②

$$C_1 - C_2 = \pi - \frac{2x\sqrt{h^2+1} + \pi(h-x)}{h}$$

$$= \frac{h\pi - 2x\sqrt{h^2+1} - h\pi + x\pi}{h}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{h^2+1} + x\pi}{h}$$

$$= \frac{x}{h}\left(-2\sqrt{h^2+1} + \pi\right)$$

Etudions le signe de la différence :

$$C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{h}\left(-2\sqrt{h^2+1} + \pi\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -2\sqrt{h^2+1} + \pi = 0$$

$x = 0$ n'est pas un résultat valide car cela reviendrait à emprunter le chemin C_2, on a donc

$$C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{h^2+1} + \pi = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{h^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1} \text{ ou } \cancel{h = -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}}$$

$h \geq 0$!!!

h	$\cancel{-\infty}$ 0		$\cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}$ 0		$\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}$		$+\infty$
$C_1 - C_2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe à justifier

Sur $\left]\cancel{-\infty} ; \cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}\right[\cup \left]\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} ; +\infty\right[$

$C_1 < C_2$

et sur $\left]\cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}\ 0 ; \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right[$

$C_2 > C_1$

- Comparaison entre C_1 et C_3 :

$$C_1 - C_3 = \pi - 2\sqrt{h^2+1}$$

Etudions le signe de la différence :

$$C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow \pi - 2\sqrt{h^2+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi = 2\sqrt{h^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{h^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1} \text{ ou } \cancel{h = -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}}$$

Comme précédemment on a :

Sur $\left]\cancel{-\infty ; -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}\right[\cup \left]\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} ; +\infty\right[$

on a : $C_1 < C_3$

et sur $\left]\overset{0}{\cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}} ; \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right[$

$C_3 < C_1$

■ Comparaison entre C_2 et C_3

$$C_2 - C_3 = \frac{2x\sqrt{h^2+1} + \pi(h-x)}{h} - 2\sqrt{h^2+1}$$

$$= \frac{2x\sqrt{h^2+1} + \pi(h-x) - 2h\sqrt{h^2+1}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2+1} \times (2x-2h) + \pi(h-x)}{h}$$

$$= \frac{(x-h)\left[\left(2\sqrt{h^2+1}\right) - \pi\right]}{h}$$

$$C_2 - C_3 = 0 \iff \frac{(x-h)\left[2\sqrt{h^2+1} - \pi\right]}{h} = 0$$

$$\iff (x-h)\left[2\sqrt{h^2+1} - \pi\right] = 0$$

$$C_2 - C_3 = 0 \iff \underbrace{x-h=0}_{\text{Impossible car } x<h} \text{ ou } 2\sqrt{h^2+1} - \pi = 0$$

en fait si c'est possible

$$C_2 - C_3 = 0 \iff 2\sqrt{h^2+1} - \pi = 0.$$

Comme pour les deux résultats précédents on retrouve :

Sur $\left]\cancel{-\infty ; -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}\right[\cup \left]\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} ; +\infty\right[$

$C_2 < C_3$.

Sur $\left[\overset{0}{\cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}} ; \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right[$

$C_3 < C_2$.

Pour résumer :

Si $h \in \left]\cancel{-\infty ; -\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}\right[\cup \left]\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1} ; +\infty\right[$

$C_1 < C_2$, $C_1 < C_3$, $C_2 < C_3$

On en déduit que sur cet intervalle de h, le Chemin n° 1 est le plus court.

Sur $\left[\overset{0}{\cancel{-\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}}} ; \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1}\right[$

$C_2 < C_1$, $C_3 < C_1$, $C_3 < C_2$

et si $h = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}$?

On en déduit donc que ce sera le chemin 3 qui sera le plus court sur cet intervalle.

Recherche d'une solution par comparaison deux à deux des chemins à partir d'inégalités, (G., Tale, Lycée Jean Perrin, Rezé)

Essayons de comparer les différents chemins. Les valeurs étant géométrique elles sont donc toutes positives, on peut donc diviser ou multiplier par ces valeurs.

Chemin1 < Chemin3 $\Leftrightarrow \pi < 2\sqrt{1+h^2}$
$\Leftrightarrow \pi^2<4+4h^2$
$\Leftrightarrow \pi^2/4-1<h^2$
$\Leftrightarrow h>\sqrt{(\pi^2/4)-1}$
$\Leftrightarrow$ **h>1,21cm**

Chemin1 < Chemin 2 $\Leftrightarrow \pi<2AI + (\pi - \pi.AK)$
$\Leftrightarrow \pi<2AI + \pi - \pi.AK$
$\Leftrightarrow 0<2AI - \pi.AK$
$\Leftrightarrow \pi.AK<2AI$
$\Leftrightarrow \pi<(2AI)/AK$
$\Leftrightarrow \pi^2<(4AI^2)/AK^2$

Or, $AI^2=AK^2+x^2$ d'où :

$\Leftrightarrow \pi^2<(4AK^2+4x^2)/AK^2$
$\Leftrightarrow \pi^2<4+(4x^2)/AK^2$
$\Leftrightarrow \pi^2-4<(4x^2)/AK^2$
$\Leftrightarrow \sqrt{\pi^2-4}<2x/AK$
$\Leftrightarrow (\sqrt{\pi^2-4}).AK<2x$

Dans le triangle ASO, rectangle en O, en utilisant le théorème de Thalès :
$x/h=AK/AO=AK/1$
$x=AK.h$
$AK=x/h$

$\Leftrightarrow (\sqrt{\pi^2-4}).x/h<2x$
$\Leftrightarrow (\sqrt{\pi^2-4}).x<2x.h$
$\Leftrightarrow (\sqrt{\pi^2-4}) <2h$
$\Leftrightarrow h>(\sqrt{\pi^2-4})/2$
$\Leftrightarrow$ **h>1,21cm**

+ petit que...⇔	Chemin 1	Chemin 2	Chemin 3
Chemin 1		h>1,21cm	h>1,21cm
Chemin 2	h<1,21cm		
Chemin 3	h<1,21cm		

Si h>1,21cm, alors Ch1<Ch2
Si h>1,21cm, alors Ch1<Ch3

Donc, si h>1,21, alors Chemin1 est le plus petit.

Si h<1,21cm, alors Ch1>Ch2 et Ch1>Ch3.

Donc, si h<1,21cm, alors les Chemins 2 et 3 sont les plus petits.

Il nous alors comparer les chemins 2 & 3.

Chemin2<Chemin3 $\Leftrightarrow 2AI+(\pi - \pi.AK)<2\sqrt{1+h^2}$
$\Leftrightarrow 2AI+\pi- \pi.AK<2\sqrt{1+h^2}$
$\Leftrightarrow 4AI^2+\pi^2+(-\pi.AK)^2<4.1+4h^2$
$\Leftrightarrow 4AI^2+\pi^2+\pi^2.AK^2<4+4h^2$

Or $AI^2=AK^2+x^2$

$\Leftrightarrow 4AK^2+4x^2+\pi^2+\pi^2.AK^2<4+4h^2$

Or, on a prouvé déjà prouvé que $AK=x/h$

$\Leftrightarrow 4x^2/h^2+4x^2+\pi^2+\pi^2.x^2/h^2<4+4h^2$
$\Leftrightarrow (4x^2+\pi^2.x^2)/h^2+4x^2+\pi^2<4+4h^2$
$\Leftrightarrow (4+\pi).x^2/h^2+(4x^2.h^2)/h^2+(\pi^2.h^2)/h^2<4h^2/h^2+4h^2$
$\Leftrightarrow (4+\pi).x^2+4x^2.h^2+\pi^2.h^2<4h^2+4$
$\Leftrightarrow 4x^2/h^2+4x^2+\pi^2.x^2/h^2-4h^2<4-\pi^2$

$\Leftrightarrow 2AI+\pi-\pi.AK<2\sqrt{1+h^2}$
$\Leftrightarrow AI+\pi/2-\pi.AK/2<\sqrt{1+h^2}$
$\Leftrightarrow AI^2+\pi^2/4-\pi^2.AK^2/4<1+h^2$
$\Leftrightarrow AI^2+\pi^2/4-\pi^2.AK^2/4-1-h^2<0$
$\Leftrightarrow 4AI^2+\pi^2-\pi^2.AK^2-4-4h^2<0$
$\Leftrightarrow 4x^2+4AK^2+\pi^2-\pi^2.AK^2-4-4h^2<0$
$\Leftrightarrow 4x^2+4x^2/h^2+\pi^2-\pi^2.x^2/h^2-4-4h^2<0$

Recherche d'une solution en utilisant un logiciel, en faisant varier x et h, (F., L1-Info, IUT, Nantes)

Hypothèses : (d'après simulations, voir annexe 1)
- Si $h > 1,2$, le chemin 1 est le plus court.
- Si $0,5 \leq h \leq 1,2$, } le chemin 2 est le plus court.
- si $0 < h \leq 0,3$ }
- si $0,3 < h < 0,5$, le chemin 3 est le plus court.

Ceci ne constitue qu'une première approche de la solution. Elle reste encore trop approximative.

Annexe 1 : *Simulation*

H	X	Ch1	Ch2	Ch3
0,2	0,3	3,14	**1,49**	**2,04**
0,3	0,4	3,14	**1,74**	2,09
0,3	0,5	3,14	**1,39**	2,09
0,3	0,6	3,14	**1,03**	2,09
0,3	0,8	3,14	**0,33**	2,09
0,5	0,2	3,14	2,78	**2,24**
0,5	0,4	3,14	2,42	**2,24**
0,5	0,5	3,14	**2,24**	**2,24**
0,5	0,6	3,14	**2,05**	2,24
0,5	0,8	3,14	**1,69**	2,24
1	0,2	3,14	3,08	**2,83**
1	0,4	3,14	3,02	**2,83**
1	0,5	3,14	2,99	**2,83**
1	0,6	3,14	2,95	**2,83**
1	0,8	3,14	2,89	**2,83**
1,2	0,1	**3,14**	3,14	3,12
1,5	0,4	**3,14**	3,27	3,61
1,5	0,5	**3,14**	3,3	3,61
1,5	0,6	**3,14**	3,33	3,61
1,5	0,8	**3,14**	3,39	3,61
2	0,2	**3,14**	3,27	4,47
2	0,4	**3,14**	3,41	4,47
2	0,5	**3,14**	3,47	4,47
2	0,6	**3,14**	3,54	4,47
2	0,8	**3,14**	3,67	4,47
3	0,2	**3,14**	3,35	6,32
3	0,4	**3,14**	3,57	6,32
3	0,5	**3,14**	3,67	6,32
3	0,6	**3,14**	3,78	6,32
3	0,8	**3,14**	3,99	6,32
5	0,2	**3,14**	3,42	10,2
5	0,4	**3,14**	3,71	10,2
5	0,5	**3,14**	3,85	10,2
5	0,6	**3,14**	3,99	10,2
5	0,8	**3,14**	4,27	10,2

Titre Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée ou au début du supérieur ?

Auteurs Groupe "ECCE maths"

Niveau Secondaire - Supérieur

Public Enseignants du secondaire, du supérieur

Date Juin 2009

Mots-clé Problème

Résolution de problème

Chercher en mathématiques

Ecrire

Brouillon

Résumé

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour un élève ? Quelle(s) place(s) et quel(s) rôle(s) y ont l'écriture, les outils, les destinataires ? Quels types d'écrits sont produits ?

Dans cette brochure, nous apportons des éléments de réponses à ces questions à partir d'une étude effectuée dans six classes de Tale S et trois groupes d'étudiants en sciences (niveau L1 ou première année d'IUT), soit 135 lycéens et 48 étudiants.

Notre objectif dans cette recherche était de recueillir des informations sur ce que représente, pour les élèves de la fin du lycée ou du début de l'université, la résolution d'un problème «ordinaire » de mathématiques : nous voulons accéder au sens « scolaire » qu'ils donnent à la résolution d'un problème en général ; il ne s'agit pas de proposer des problèmes ouverts ou des narrations de recherche, ni de travailler sur l'apprentissage d'une notion donnée. Aussi avons-nous effectué un recueil de données à partir de productions d'élèves et de questionnaires. Cette méthodologie nous permet de recueillir des données à la fois quantitatives et qualitatives.

ISBN10 : 2-86300-038-1
ISBN13 : 978-2-86300-038-0
EAN : 9782863000380

Achevé d'imprimé
sur les presses de l'Université de Nantes
le 18 septembre 2009

Titre :	Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour les élèves à la fin du lycée ou au début du supérieur
Auteurs :	Groupe "ECCE maths"
Niveau :	Secondaire - Supérieur
Date :	Enseignants du secondaire, du supérieur
Mots clés :	Problème Résolution de problème Chercher en mathématiques Écrire Brouillon

Résumé :

Qu'est-ce que chercher un problème de mathématiques pour un élève ? Quelles places et quels rôles y ont l'écriture, les outils, les destinataires ? Quels types d'écrits sont produits ?

Dans cette brochure, nous apportons des éléments de réponses à ces questions à partir d'une étude effectuée dans six classes de Tale S et trois groupes d'étudiants en sciences (niveau L1 ou première année d'IUT), soit 135 lycéens et 48 étudiants.

Notre objectif dans cette recherche était de recueillir des informations sur ce que représente, pour les élèves de la fin du lycée ou du début de l'université, la résolution d'un problème «ordinaire » de mathématiques : nous voulons accéder au sens « scolaire » qu'ils donnent à la résolution d'un problème en général ; il ne s'agit pas de proposer des problèmes ouverts ou des narrations de recherche, ni de travailler sur l'apprentissage d'une notion donnée. Aussi avons-nous effectué un recueil de données à partir de productions d'élèves et de questionnaires. Cette méthodologie nous permet de recueillir des données à la fois quantitatives et qualitatives.

IREM des Pays de la Loire
Centre de Nantes
2, rue de la Houssinière – BP 92208
44322 NANTES CEDEX 03

Format : A4 50 pages *Prix :* 4 € 00

ISBN10 : 2-86300-038-1
ISBN13 : 978-2-86300-038-0
EAN : 9782863000380