Des problèmes pour chercher à l’école primaire

IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes

Mai 2006

Voici le fruit de la collaboration d'enseignants du premier degré et de formateurs de l'IUFM sur le thème des « problèmes pour chercher », pendant un peu plus d'un an. Les personnes qui ont participé à la réflexion sur ce sujet et aux expérimentations en classe sont :

– Catherine Argant, maîtresse formatrice à l'IUFM des Pays de la Loire, site de La Roche sur Yon ;
– Jean-Marie Brassé, formateur à l'IUFM des Pays de la Loire, site de Laval ;
– Dominique Cerda, maitresse formatrice à l'IUFM des Pays de la Loire, site de Laval ;
– Paul Delhumeau, formateur à l'IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes ;
– Geneviève Dron, enseignante à l'école Jean Jaurès, Nantes ;
– Catherine Duhil, maîtresse formatrice à l'IUFM des Pays de la Loire, site de Laval,
– Michel Jaffrot, formateur à l'IUFM des Pays de la Loire, site de La Roche sur Yon ;
– Yves Thomas, formateur à l'IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Nous remercions les autres enseignants qui ont bien voulu nous accueillir dans leur classe et permettre ainsi d'expérimenter les problèmes.

Cette brochure a été réalisée et mise en page par Magali HERSANT.

Table des matières

Introduction

Les programmes actuels de l'école primaire, comme les précédents, mettent « la résolution de problème au centre des activités mathématiques des élèves » et distinguent différents types de problèmes. Parmi eux figurent les problèmes pour chercher définis dans les accompagnements des programmes.

Cette désignation de « problème pour chercher » est nouvelle dans les programmes de 2002. Que recouvre t-elle exactement ? Quelles différences y a-t-il entre les PPC et les autres types de problèmes caractérisés en mathématiques ? Que peut-on en attendre pour les apprentissages mathématiques des élèves ? Quelles ressources proposent effectivement des problèmes pour chercher ? Comment gérer ces situations en classe ?

Cette brochure rassemble l'état actuel de notre travail autour de ces questions. La première partie est consacrée à la caractérisation des problèmes pour chercher à partir des documents d'accompagnement et à l'analyse de ressources susceptibles de proposer de tels problèmes. Cette partie concerne l'ensemble des cycles de l'école élémentaire. La seconde partie est plus proche de l'activité de la classe : nous présentons deux PPC et leur mise en \oe{u}vre « testée » dans plusieurs classes. Ces deux parties sont relativement indépendantes.

Le travail du groupe se poursuit et une autre brochure sur le même thème devrait suivre.

Partie 1 : Des problèmes pour chercher dans les manuels ?

Les textes officiels et les manuels constituent les principaux outils de travail de l'enseignant pour les mathématiques. Les problèmes de type « problème pour chercher » sont définis dans les documents d'accompagnement des programmes de l'école primaire où des exemples de problèmes pour chercher sont donnés. Toutefois, le nombre d'exemples est relativement restreint. Les manuels actuels, s'ils respectent les programmes, devraient proposer des problèmes pour chercher. Mais, dans les écoles, les enseignants travaillent quelquefois avec des manuels non actualisés.

Dans cette première partie, nous souhaitons préciser le rôle des problèmes pour chercher dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et permettre aux enseignants d'identifier dans les manuels qu'ils utilisent des problèmes correspondant à ces problèmes. Nous débutons donc par des considérations un peu théoriques mais essentielles pour la suite du travail et la mise en \oe{u}vre de problèmes pour chercher dans une classe : distinguer les problèmes pour chercher des autres types de problèmes et questionner les apprentissages qu'ils permettent. Ensuite, nous présentons une grille d'analyse d'un problème que nous utilisons dans les chapitres suivants. Enfin, pour illustrer une utilisation de la grille et aider les enseignants à se repérer, nous questionnons la présence de problèmes pour chercher dans deux collections de manuels : « J'apprends les maths » et « Cap maths ».

1. Problème pour chercher et autres types de problèmes : un repérage théorique

L'expression « problème pour chercher » n'apparaît pas explicitement dans les programmes de l'école élémentaire où il est seulement question de problèmes de recherche par opposition aux problèmes qui permettent la construction ou le réinvestissement de connaissances. Cette expression est cependant le titre d'un des documents d'accompagnement des programmes[1] où ces problèmes font l'objet, à la fois, d'une caractérisation par rapport à leur rôle dans les apprentissages des élèves et de précisions sur la gestion de la classe associée à leur mise en oeuvre. Ces précisions sont essentielles car, au départ, un problème peut avoir toutes les caractéristiques d'un problème pour chercher et devenir un simple problème d'application si au cours de la recherche les interventions de l'enseignant contribuent à fermer le champ des possibles et des décisions pour les élèves.

Dans ce chapitre nous reprenons ces caractéristiques et situons aussi les problèmes pour chercher par rapport à deux autres types de problèmes existants. Nous présentons ensuite notre grille d'analyse des problèmes dans les manuels.

Définition des problèmes pour chercher

Les documents d'accompagnement des programmes précisent qu'un problème pour chercher n'est pas nécessairement présenté sous forme écrite et caractérisent ensuite ces problèmes de la façon suivante (p. 10) :

> Caractéristiques du problème pour chercher
>
> [...]
>
> Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement la situation et se représenter la tâche pour s'y engager avec leurs connaissances antérieures. La difficulté doit se situer non dans la compréhension de la situation, mais dans les moyens de répondre à la question posée.
>
> Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire présenter une certaine « résistance ». Il ne doit pas donner lieu à une réponse qui résulte d'un traitement immédiatement reconnu. [...]
>
> Donner un problème de recherche, c'est lancer un défi. Il est important que les élèves s'approprient le problème et qu'ils aient envie de relever le défi. De ce point de vue, l'attitude du maître est aussi décisive que le choix du problème. La «mise

[1] Ces documents d'accompagnement sont disponibles sous forme brochée dans les CRDP et sous forme numériques sur le site http : //eduscol.education.fr/D0048/primacc.htm

> en scène » qu'il a imaginée conditionne l'engagement des élèves à relever le défi. Cet engagement dans la tâche est souvent plus aisé si les élèves sont persuadés qu'il existe une solution, parce qu'ils ont vu le problème se créer [...] : ils sont ainsi mieux à même de se représenter la situation. [...]
>
> La validation de la solution doit être le plus possible à la charge des élèves. Ils doivent pouvoir se rendre compte par eux-mêmes du bien-fondé ou non de leur réponse, par l'échange d'arguments destinés à défendre ou contredire une proposition, par des contrôles tout au long de leur recherche et, si possible, par une vérification, à la fin, sur la situation elle-même.

Ils indiquent aussi les objectifs poursuivis à travers la recherche de problèmes pour chercher (p. 10-11) :

> Cinq objectifs différents peuvent être dégagés :
>
> 1) La pratique du « problème pour chercher » développe la capacité de l'élève à faire face à des situations inédites.
>
> 2) Dans la résolution de ces problèmes, l'élève prend conscience de la puissance de ses connaissances, même si celles-ci sont modestes. Il existe en effet toujours plusieurs moyens d'élaborer une réponse, faisant appel à des registres de connaissances différents [...].
>
> 3) L'activité de l'élève dans la résolution d'un « problème pour chercher » valorise des comportements et des méthodes essentiels pour la construction de leurs savoirs : prendre des initiatives (tenter, faire des essais...), être critique vis-à-vis de son travail (contrôler, analyser ses erreurs...), s'organiser, être méthodique (réduire la part du hasard, le nombre de cas à envisager), communiquer (par oral, dans le groupe et face à la classe, par écrit pour rendre compte de sa recherche).
>
> 4) Les phases d'échanges et de débats développent les capacités argumentatives de l'élève. Les débats qui s'instaurent soit dans les groupes, soit dans la classe conduisent les élèves à valider ou réfuter une proposition. Un élève qui est persuadé du bien-fondé de son idée, de l'intérêt de la piste qu'il veut explorer ou de la solution qu'il a trouvée, devra convaincre ses camarades. La raison doit l'emporter sur la passion. Pour cela, le maître gère les débats afin que ce soit la valeur de l'argument qui l'emporte. Ni la force de conviction de celui qui le défend, ni le fait que cet argument soit accepté par la majorité des élèves ne doivent être décisifs quant à la validité d'un argument : en mathématiques, l'accord du plus grand nombre sur une proposition ne constitue pas un critère de sa validité.
>
> 5) Ce type d'activité contribue à l'éducation civique des élèves. Les moments de recherche sont plus efficaces si l'on s'entraide : les idées proposées par les uns, même erronées, alimentent celles des autres. Les moments de débat offrent également l'occasion de travailler l'écoute, la prise en compte et le respect d'autrui.

Des conseils de mise en oeuvre de ces problèmes sont fournis dans le prolongement de la caractérisation (p. 11 -12) :

> Plusieurs phases ponctuent, en général, une séance de «problème pour chercher».
>
> *Présentation du problème*
>
> Comme cela a été signalé précédemment, le problème peut être communiqué oralement (avec l'aide d'un écrit) ou seulement par écrit (texte, schémas, tableaux,

illustrations), avec ou sans matériel. Les élèves ne doivent pas pouvoir résoudre le problème uniquement en manipulant le matériel. En revanche, sa présence peut les aider à se représenter le problème et, à la fin, permettre une vérification pratique de la solution. Il faut en effet veiller à ce que les élèves comprennent la situation et ce qu'il faut chercher pour qu'ils se sentent personnellement engagés pour relever le défi qui leur est lancé.

Temps de recherche personnelle, puis en groupe

Une confrontation personnelle de chaque élève avec le problème est souvent nécessaire (environ cinq minutes). Même si, en apparence, elle est peu productive pour certains, cette phase individuelle initialise le travail de groupe dont l'objectif est de produire une proposition de solution (procédure et réponse) commune. Les échanges à l'intérieur du groupe sont essentiels lors de cette phase, les propositions des uns alimentant celles des autres. Il faut que chacun se sente responsable de la proposition de solution qui sera présentée à la classe par le rapporteur du groupe : à cette fin, le maître choisit le rapporteur seulement au terme de la recherche.

Mise en commun, débat et validation

Cette phase peut se situer à l'issue de la recherche ou dans la séance suivante, ce qui permet à l'enseignant de prendre connaissance des travaux de chaque groupe. Au cours de cette mise en commun, les rapporteurs présentent aux autres groupes leur solution. Les choix du maître dans la désignation des rapporteurs et dans leur ordre de passage reposent sur les observations faites pendant la recherche. Le moment de débat peut être organisé de diverses façons : les échanges peuvent intervenir au fur et à mesure de la présentation des productions ou seulement lorsque toutes les propositions ont été présentées. L'échange autour de plusieurs propositions contribue à enrichir l'argumentation : les élèves peuvent repérer des démarches voisines et confronter celles qui sont différentes.

Il est souhaitable que la validation des propositions soit faite par les élèves eux-mêmes. [?] Pour que la validation relève effectivement de la responsabilité des élèves, le maître doit éviter autant que possible de donner un avis d'autorité. Il veille, bien entendu, à une certaine rigueur dans l'expression avec des exigences adaptées au niveau de la classe. Pour cela, il peut questionner, interpeller les uns ou les autres pour inciter les uns à argumenter et les autres à s'interroger sur la validité d'une proposition.

Synthèse

Il s'agit maintenant de conclure la séance, sous forme d'échanges entre le maître et la classe, de valoriser les qualités observées, de dénoncer les défauts, d'ancrer les comportements essentiels et les procédures intéressantes qui pourront être réinvesties dans une prochaine séance de « problème pour chercher ».

Le rôle de l'enseignant

Pendant une séance de « problème pour chercher », le maître n'apporte aucune aide sur la résolution du problème, ce qui ne veut pas dire qu'il est totalement absent de l'activité. Au bout d'un moment, il circule, observe, note des éléments intéressants. Ces observations l'aideront à décider éventuellement d'une courte mise en commun intermédiaire et du choix des travaux les plus intéressants à exploiter collectivement, ainsi que de l'ordre le plus pertinent pour cette exploitation. Le maître ne doit pas aider personnellement les élèves afin qu'ils n'attendent pas systématiquement un coup de pouce de sa part. Des aides peuvent venir des élèves eux-mêmes. Par exemple, un premier mini-débat peut être instauré, dans le but de porter à la connaissance de tous les groupes les différentes recherches, de les amener à avoir un regard critique sur leur propre recherche et de les redynamiser si leur recherche piétine. Pendant les phases de débat, le maître doit plutôt se placer au milieu des groupes ou en fond de classe pour que les échanges se fassent réellement entre les élèves et non pas entre le maître et les élèves.

Prolongement

Certains groupes auront résolu le problème, d'autres non. Pour exploiter pleinement une telle séance, le maître peut « rebondir » sur cette recherche et proposer dans une séance ultérieure des problèmes du même type mais avec des données adaptées aux difficultés rencontrées par les groupes lors de leur recherche. Forts des procédures discutées précédemment, ils peuvent utiliser, éventuellement en l'améliorant, leur proposition de solution antérieure, en choisir une autre ou en élaborer une nouvelle. Les groupes qui n'avaient pas abouti ont l'occasion de progresser. Il est également possible, dans cette phase, de procéder à une redistribution des groupes.

Ces précisions permettent de distinguer les problèmes pour chercher des problèmes d'application et d'entraînement, en particulier par les objectifs visés. Aussi, il nous semble que pour qu'un problème soit un problème pour chercher il faut que les points relatifs aux caractéristiques du problème et à sa mise en oeuvre soient respectés et que l'objectif ne soit pas l'apprentissage d'une connaissance curriculaire mais l'apprentissage de connaissances méta-mathématiques, en particulier le développement de capacités argumentatives. En effet, il nous semble difficile de répondre positivement à l'ensemble des objectifs.

D'autres types de problèmes : situation-problème et problème ouvert

Jusqu'ici, hormis les problèmes d'application et d'entraînement, deux principaux types de problèmes ont été caractérisés en didactique des mathématiques : les problèmes ouverts (caractérisation due à l'IREM de Lyon) et les situations-problèmes (caractérisation due à Régine Douady). Avant de situer les problèmes pour chercher par rapport à ces deux types de problèmes, précisons leurs caractéristiques.

Situation-problème

Une situation-problème vise la construction d'une connaissance nouvelle, le plus souvent une connaissance curriculaire figurant dans les programmes. Selon Régine Douady[2], elle est caractérisée de la façon suivante :

– les élèves peuvent s'engager facilement dans la résolution du problème en mobilisant leurs conceptions erronées ou leurs procédures insuffisantes ;
– les connaissances des élèves sont insuffisantes ou trop coûteuses pour résoudre le problème ;
– la résolution du problème nécessite le recours à la connaissance visée qui doit être l'outil le mieux adapté à la résolution du problème à leur niveau ;

[2]DOUADY R., 1986, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques, vol 7.2, pp. La pensée sauvage

– les élèves ont la responsabilité de la résolution du problème ;
– les élèves doivent pouvoir contrôler eux-mêmes leur résultat.

Régine Douady précise que les différentes étapes d'une situation-problème sont : la passation de la consigne ; la recherche ; la formulation, explicitation des procédures trouvées par les élèves (oral ou écrit) et des solutions trouvées ; la validation des résultats ; la mise en commun et la synthèse ; le réinvestissement, entraînement, transfert ; l'évaluation individuelle.

Problème-ouvert

Le problème ouvert est un type de problème pour apprendre à chercher qui a été caractérisé par ARSAC et al.[3] de la façon suivante :

– l'énoncé est court ;
– l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution, il n'y a pas de question intermédiaire ;
– il ne s'agit pas de l'utilisation immédiate des derniers résultats présentés en classe ;
– le problème se trouve dans un champ conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité, ils peuvent prendre facilement possession de la situation.

Au niveau de la mise en oeuvre du problème dans une classe, il est recommandé de procéder selon cinq étapes : familiarisation avec le problème, recherche individuelle du problème, travail en groupe, échanges et débat sur les solutions au sein de la classe, synthèse sur les aspects méthodologiques.

Comparaison des problèmes pour chercher à ces autres types de problèmes

Problème pour chercher et situation-problème

Du point de vue des objectifs, les problèmes pour chercher ne s'apparentent en rien aux situations-problèmes puisque dans un problème pour chercher ne s'agit pas de construire une connaissance mathématique nouvelle. Toutefois, on retrouve des points communs au niveau de la relation entre les connaissances des élèves et les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution du problème : il s'agit de s'appuyer sur les connaissances anciennes des élèves pour leur permettre de s'engager dans la résolution du problème. La nécessité de l'engagement de l'élève dans la résolution du problème jusqu'à la validation est aussi un point commun à ces deux types de problèmes.

Au niveau de la mise en oeuvre, les phases d'entraînement, transfert et l'évaluation individuelle n'apparaissent pas comme des phases essentielles des problèmes pour chercher, ce qui est logique compte-tenu des apprentissages visés. Par ailleurs, la synthèse d'une situation-problème aura essentiellement comme objectif l'institutionnalisation de la nouvelle connaissance mathématique tandis que dans un problème pour chercher, elle portera sur des aspects méta-mathématiques.

Problème pour chercher et problème ouvert

L'objectif d'un problème-ouvert et celui d'un problème pour chercher sont identiques. De plus, sans que cela soit explicitement indiqué dans les accompagnements des programmes, il nous

[3] ARSAC G, GERMAIN G, MANTE M, 1991, *Problème ouvert et situation-problème,* IREM de Lyon

semble que les caractéristiques d'un problème pour chercher recoupent celles d'un problème-ouvert. De même, les étapes de la mise en oeuvre et l'objet de la synthèse sont identiques pour les deux types de problèmes.

Conclusion

Les problèmes pour chercher présentent à la fois des caractéristiques des situations-problèmes et des problèmes-ouverts mais s'apparentent plutôt aux problèmes-ouverts. Comme pour ces deux types de problèmes, il nous semble important de rappeler ici que leur gestion peut s'avérer délicate : la grande « liberté » de parole laissée aux élèves lors de ces séances va créer beaucoup plus de contingence qu'un exercice d'application, en particulier pour les phases de mise en commun et de synthèse.

Par ailleurs, il est aussi important de relativiser dès maintenant l'apport des problèmes pour chercher sur les apprentissages mathématiques des élèves. Les connaissances en jeu dans ce type de problème qui sont plutôt d'ordre méthodologique ne vont pas se stabiliser si facilement chez les élèves, entre autres parce que ces problèmes ont tous un côté inédit (sinon ils ne seraient pas des problèmes pour chercher !). On peut donc penser que si l'on veut effectivement travailler avec ses élèves un goût de la recherche des problèmes, des habitudes de recherche, de raisonnement et d'argumentation, il faut leur proposer régulièrement des problèmes de ce type. Un de leurs intérêts majeurs réside dans le développement chez les élèves d'un rapport aux mathématiques non restreint à l'application de recettes que l'on maîtrise ou pas : faire des mathématiques, c'est aussi avoir le goût de chercher et de résoudre des problèmes nouveaux. En cela, les problèmes pour chercher peuvent réconcilier certains élèves avec les mathématiques et permettent de cultiver un certain esprit des mathématiques.

2. Comment repérer un problème pour chercher ? Proposition d'une grille pour l'analyse des problèmes

Dans l'esprit des programmes, les manuels de mathématiques proposent de nombreux problèmes de recherche qui sont quelquefois regroupés dans des lieux spécifiques (Atelier de résolution de problèmes pour « J'apprends les maths » ou « Banque de problèmes » pour Cap Maths, par exemple). Ces lieux apparaissent comme de bons « candidats » pour le travail des problèmes pour chercher, mais est-ce toujours la réalité ? Si ce n'est pas le cas : les problèmes proposés sont-ils proches du type « problème pour chercher » ? ; peut-on en faire des problèmes pour chercher en les modifiant légèrement ?

Pour répondre à ces questions, et ainsi aider les lecteurs à se repérer parmi les problèmes proposés dans les manuels, nous avons établi une grille d'analyse d'un problème qui reprend les caractéristiques des problèmes pour chercher et qui tient aussi compte d'autres critères qui caractérisent le contexte plus général et l'esprit dans lequel sont proposés les problèmes. Ce contexte est essentiel à nos yeux pour deux raisons. D'abord, il nous semble que le travail sur les problèmes pour chercher s'inscrit en phase avec des intentions didactiques qui dépassent le moment de travail du problème pour chercher. Ensuite, en fonction du niveau de la classe, il apparaît difficile de travailler toutes les compétences requises dans les accompagnements des programmes « Problèmes pour chercher ». Par exemple, en Grande Section, la notion d'argumentation est bien relative.

Cette grille, figurant ci-dessous, comprend plusieurs axes d'étude. Le premier concerne la place et le rôle que les auteurs attribuent à la résolution de problème dans l'enseignement des mathématiques. Pour cela, nous nous intéressons aux intentions explicites des auteurs par rapport aux problèmes et cherchons à mettre en évidence d'éventuelles intentions implicites : il s'agit entre autres d'élucider les théories de l'apprentissage des mathématiques qui nous semblent guider les auteurs. A ce niveau, nous cherchons aussi à élucider la progression pour ces problèmes d'un niveau à l'autre et à recenser les domaines mathématiques couverts par les problèmes proposés. Il nous semble en effet important que les problèmes pour chercher soient proposés en référence à différents domaines des mathématiques (arithmétique, géométrie ?). Le second niveau de l'analyse concerne plus spécifiquement les propositions de mise en oeuvre des problèmes, à l'échelle d'une collection, d'un niveau d'enseignement ou plus localement. Ce point nous semble tout aussi important car un problème qui aurait toutes les caractéristiques du problème pour chercher peut facilement se transformer en problème d'application si la gestion choisie par l'enseignant le « ferme » complètement. Enfin, dans un troisième temps, nous nous intéressons localement à l'analyse d'un problème selon les critères indiqués dans les documents d'accompagnement.

Grille d'analyse des problèmes de recherche proposés dans les manuels

Place et rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques

- Quel sont les intentions explicites et implicites des auteurs par rapport à la résolution de problème
- Peut-on percevoir une progression dans les problèmes proposés d'un niveau à l'autre ? Laquelle ?
- Dans quels domaines mathématiques sont proposés les problèmes (arithmétique, géométrie...) ?

Mise en oeuvre proposée

- L'enseignant crée-t-il les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves ?
- Les élèves sont-ils mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème ?
- Les phases de travail individuel, puis de travail en petits groupes suivies d'échanges et de débats et d'une synthèse sont-elles prévues ?
- La synthèse proposée porte-t-elle sur des connaissances mathématiques ou sur des aspects méthodologiques ?

Analyse des problèmes selon les caractéristiques d'un problème pour chercher

- Les problèmes sont-il centrés sur le développement des compétences méthodologiques suivantes chez les élèves :
  a1) émettre des hypothèses et les tester
  a2) élaborer une démarche pertinente
  a3) produire une solution personnelle
  a4) faire et gérer des essais successifs
  a5) vérifier par soi-même les résultats obtenus
  a6) formuler une réponse dans les termes du problème
  a7) expliquer ses méthodes
  a8) mettre en débat ses méthodes
  a9) argumenter
- Les élèves connaissent-ils une solution experte pour ce problème ?
- Y'a t-il plusieurs démarches de résolution possibles ?

3. Des problèmes pour chercher dans les manuels ?

Nous avons choisi d'analyser à l'aide de la grille précédente les collections de manuels « J'apprends les maths » et « Cap maths » pour trois raisons :

- il y existe des espaces particuliers réservés à la résolution de problèmes ;
- ces collections nous semblent assez représentatives des manuels utilisés dans l'Académie des Pays de la Loire ;
- ces collections sont assez différentes a priori.

Les « Ateliers de résolution de problèmes » dans « J'apprends les maths »

Dans la collection « J'apprends les maths » figurent des « Ateliers de résolution de problèmes » (ARP) dont l'objectif est un travail sur la résolution de problèmes, en dehors de l'application et l'entraînement à propos d'une connaissance précise. Nous avons donc considéré ces ARP comme le lieu où un enseignant pouvait trouver des problèmes pour chercher.

Pour le niveau CP, les ARP sont situés à la fin du manuel tandis que pour les autres niveaux, ils sont situés au milieu de chacune des périodes (en moyenne toutes les huit séquences). Pour tous les niveaux, les ARP sont présentées sous la forme d'une double page organisée en cadres. A chacun des cadres, pour un niveau donné, est associé explicitement un type de problème.

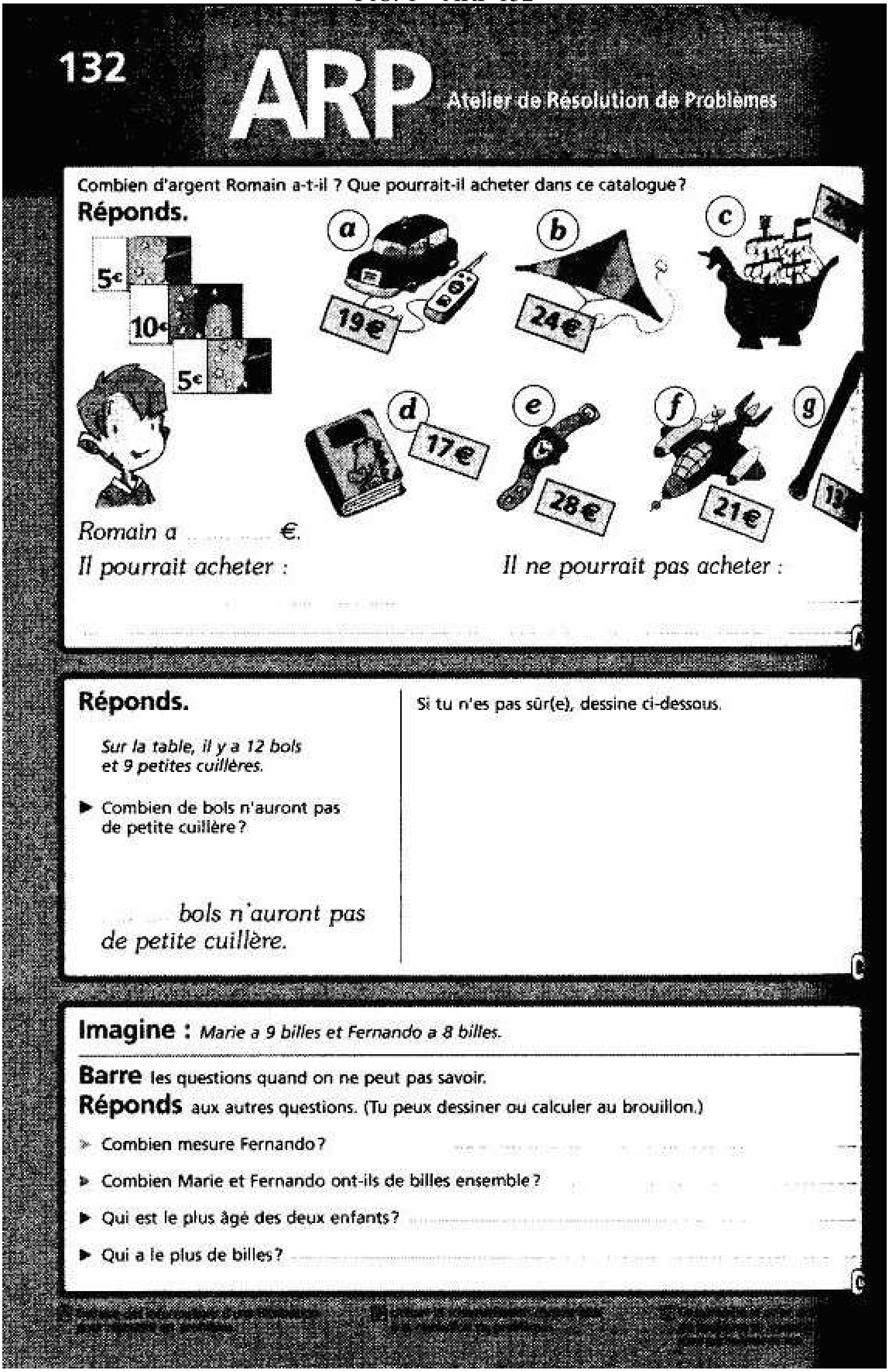
Nous avons effectué une analyse détaillée des ARP pour chacun des niveaux, nous n'en présentons ici qu'une synthèse illustrée par des exemples significatifs.

Au niveau CP (J'apprends les maths avec Tchou, 2001)

Les ARP situées à la fin du fichier correspondent à cinq séries de problèmes. Les auteurs indiquent que les ARP « ne seront pas nécessairement proposées dans les tous derniers jours de l'année » (p. 172 du livre du maître), et ne font pas mention des moments où ils doivent être faits : les ARP semblent donc relativement déconnectées des apprentissages en cours. Cela correspond à une des propriétés des problèmes pour chercher.

Les problèmes proposés dans les cinq ARP « ne sont pas classés selon la nature du contexte, ni selon leurs caractéristiques mathématiques » (ibidem) mais par ordre de difficulté. Un ARP comprend trois cadres (cadre A en haut, cadre B au milieu, cadre C en bas), comme dans la leçon 132 proposée figure 1.

FIG. 1 – ARP 132



132 **ARP** Atelier de Résolution de Problèmes

Combien d'argent Romain a-t-il ? Que pourrait-il acheter dans ce catalogue ?

Réponds.

Romain a .... €.

Il pourrait acheter : *Il ne pourrait pas acheter :*

Réponds.

Sur la table, il y a 12 bols et 9 petites cuillères.

▶ Combien de bols n'auront pas de petite cuillère ?

.... bols n'auront pas de petite cuillère.

Si tu n'es pas sûr(e), dessine ci-dessous.

Imagine : *Marie a 9 billes et Fernando a 8 billes.*

Barre les questions quand on ne peut pas savoir.

Réponds aux autres questions. (Tu peux dessiner ou calculer au brouillon.)

▶ Combien mesure Fernando ?

▶ Combien Marie et Fernando ont-ils de billes ensemble ?

▶ Qui est le plus âgé des deux enfants ?

▶ Qui a le plus de billes ?

Pour chacun de ces cadres, les auteurs annoncent les objectifs (p. 172 du livre du maître) :

– travail sur la lecture d'images (cadre A)

> L'image prend en charge la représentation de quelques données de l'énoncé verbal de la situation. Mais il faut extraire ces informations de l'image : il faut questionner l'image à partir de l'énoncé et vice-versa.

– travail sur la schématisation (le dessin) de la situation proposée de façon à favoriser l'apprentissage de la résolution de problème (cadre B)

> Les élèves sont ici incités à dessiner pour représenter cette situation. Apprendre à schématiser une situation est, selon nous, une partie essentielle de l'apprentissage de la résolution de problèmes : si l'élève n'est pas en mesure de se représenter les situations décrites dans un problème, son activité tourne peu à peu à une manipulation de symboles dépourvue de signification. Il finit par croire qu'un problème est une sorte de devinette dont la solution est inévitable. Inversement, en schématisant une situation, l'élève se donne le moyen de raisonner sur des symboles, qui tiennent lieu de cette situation. Symboliser une situation ce n'est déjà plus être « en situation ». Cela revient à anticiper la solution pratique de référence et à progresser vers l'abstraction.

– travail sur les questions pertinentes par rapport à une situation (cadre C)

> Les élèves sont incités à juger quelles questions sont pertinentes. Par-là même, ils sont amenés à mieux comprendre ce qu'est un énoncé de problème : les questions doivent donner lieu à des réponses certaines, entièrement vérifiables à partir des seules données de l'énoncé. Mais une fois de plus, c'est la schématisation de la situation qui permettra de juger de la pertinence des questions.

Pour les deux premières ARP, la démarche préconisée est la suivante : lecture et questionnement collectifs sur l'énoncé et les images, phase individuelle de recherche et réponse aux questions de l'énoncé, confrontation collective des résultats et des procédés utilisés. Selon les auteurs, cette démarche doit permettre, d'amener les élèves à un fonctionnement autonome sur les ARP suivants qui pourront alors faire l'objet d'un travail individuel avec des interventions différenciées de l'enseignant. Toutefois, concernant la leçon 132, cadre B (ARP ci-dessus, problème des bols), les auteurs n'évoquent dans le livre du maître que la procédure standard (différence qui ne peut être susceptible d'apparaître à ce niveau) et celle avec schéma. Cela nous questionne quant à la place laissée aux autres procédures sans schémas, tout autant acceptables à ce niveau, comme par exemple le surcomptage sur les doigts. Ce type de mise en commun ne correspond pas à ce qu'on peut attendre d'un problème pour chercher.

A ce niveau, les types de problèmes proposés dans les ARP sont très différents des problèmes pour chercher. En ce qui concerne les objectifs d'apprentissage mathématiques, l'idée de débat et de confrontation des propositions des élèves est pratiquement absente tandis que les auteurs souhaitent vivement que l'enseignant oriente les élèves vers l'utilisation de schémas pour représenter les situations. En ce qui concerne la mise en \oe{u}vre et le type de travail demandé aux élèves, il s'agit de proposer un travail individuel aux élèves. La présentation utilisée dans le fichier et le fait même de répondre à ces problèmes sur le fichier accentue cette individualisation..

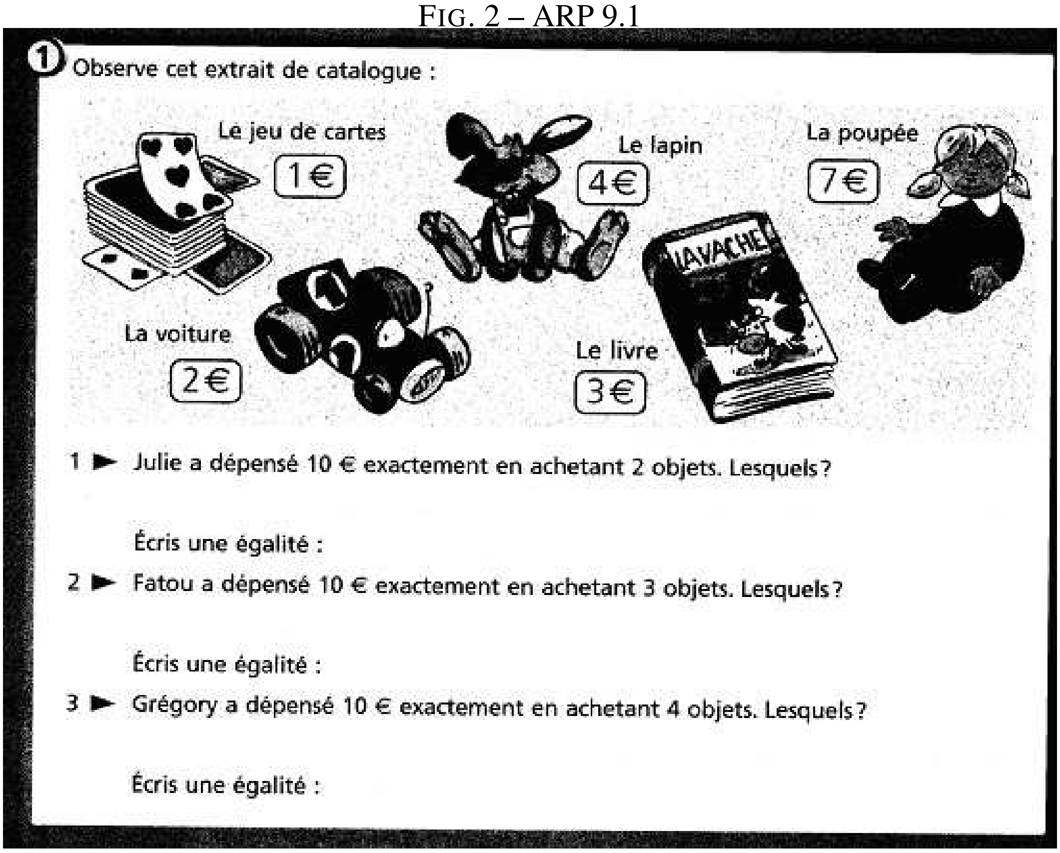
Au niveau CE1 (J'apprends les maths, 2002)

Les ARP comportent quatre types d'activités représentées dans quatre cadres auxquels correspondent quatre objectifs, comme dans les exemples suivants.

« Problème en image »

Il s'agit pour les élèves de lire des images, rechercher des informations pertinentes pour résoudre le problème (page de gauche, partie supérieure ; figure 2)

FIG. 2 – ARP 9.1



1 Observe cet extrait de catalogue :

Le jeu de cartes 1€

Le lapin 4€

La poupée 7€

La voiture 2€

Le livre 3€

1 ► Julie a dépensé 10 € exactement en achetant 2 objets. Lesquels ?

Écris une égalité :

2 ► Fatou a dépensé 10 € exactement en achetant 3 objets. Lesquels ?

Écris une égalité :

3 ► Grégory a dépensé 10 € exactement en achetant 4 objets. Lesquels ?

Écris une égalité :

« Trier des questions »

C'est un travail sur la question pertinente (page de gauche, partie inférieure). Dans un premier temps (jusqu'à l'ARP 61), les élèves trient parmi plusieurs questions celles dont la solution peut être calculée (ARP 9, figure 3).

FIG. 3 – ARP 9.2

Imagine : *Léa, Loïc et Olivier veulent faire un cadeau à leur papa pour son anniversaire. Léa a 5 euros. Loïc a 4 euros. Olivier a 7 euros.*

Barre les questions quand on ne peut pas savoir.
Réponds aux autres questions.

1 ► *Combien d'argent ont-ils ensemble ?*

2 ► *Quel âge a leur papa ?*

3 ► *Peuvent-ils acheter ensemble un cadeau à 15 euros ?*

4 ► *Peuvent-ils acheter le stylo-plume que leur papa a vu chez le libraire ?*

5 ► *Combien leur manque-t-il pour acheter un cadeau à 20 euros ?*

Plus tard, ils auront à rédiger des questions (ARP 61, figure4).

FIG. 4 – ARP 61

(2) Imagine : *Sonia achète 2 paquets de 6 images. Elle y trouve 3 images qu'elle a déjà dans son album et elle les donne à son petit frère. Sonia colle les autres images dans son album.*

Barre les questions quand on ne peut pas savoir.
Réponds aux autres questions.

1 ► *Combien coûtent les deux paquets d'images ?*

2 ► *Combien d'images Sonia a-t-elle achetées en tout ?*

3 ► *Combien de nouvelles images Sonia a-t-elle collées dans son album ?*

4 ► *Combien d'images a-t-elle en tout dans son album ?*

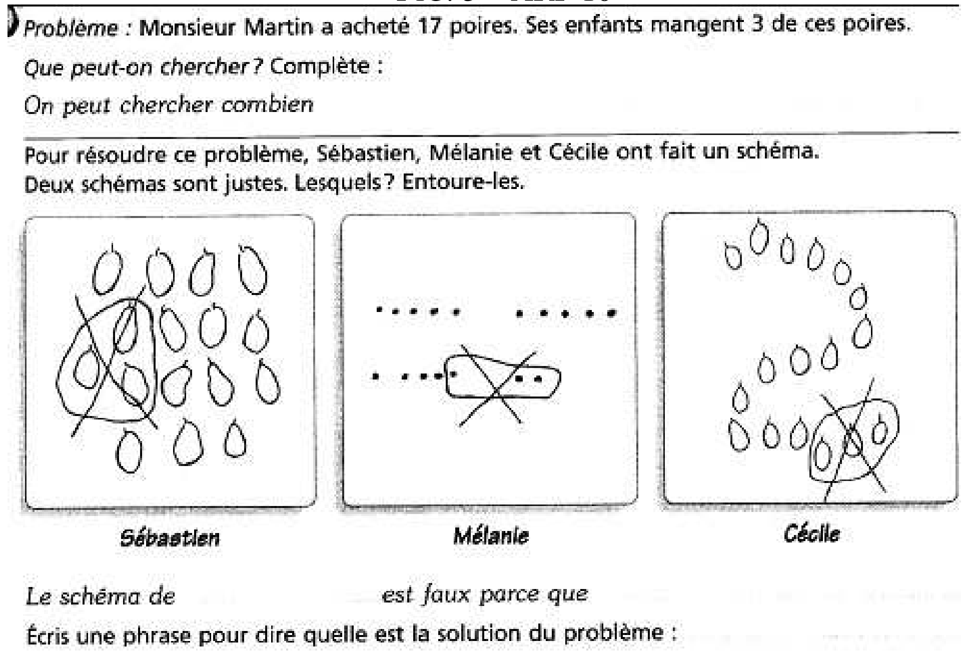
Pour les auteurs, il y a une continuité entre ces deux tâches et cela permet selon eux de progresser dans la compréhension de la notion de différence (page d'introduction du fichier élève) :

> Cette tâche [poser une question] se situe dans le prolongement de celles que l'on trouve en début d'année [...] où les élèves doivent trier, parmi un ensemble de questions, celles dont la solution peut être calculée. Dans la nouvelle tâche, comme dans celle où l'on trie, les élèves sont amenés à adopter le point de vue quantitatif approprié sur les données de l'énoncé. [...] Mais de plus, en produisant eux-mêmes les questions les élèves proposent différentes formulations. [...] La prise de conscience de cette activité est évidemment source de progrès dans la compréhension de la notion de différence.

« Apprendre à schématiser »

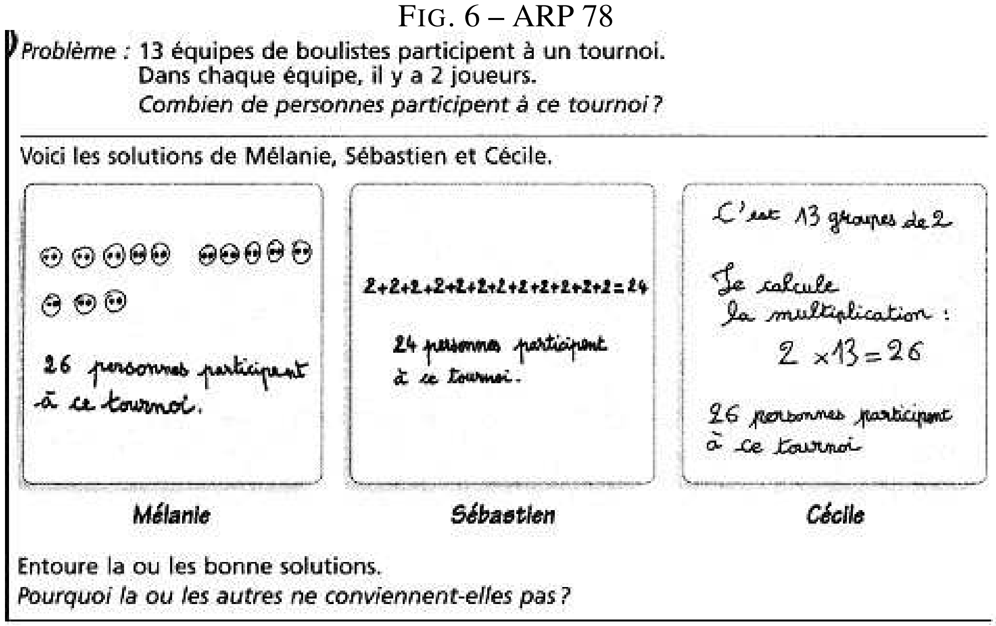
Dans cette activité proposée en haut de la page de droite, plusieurs schémas d'élèves sont proposés pour la résolution d'un exercice, il s'agit de distinguer les schémas corrects des autres, comme dans l'APR 10, figure 5.

FIG. 5 – ARP 10



Dans les premières ARP, il y a reprise du travail sur la schématisation, puis on arrive à la résolution de problèmes avec des symboles arithmétiques, comme dans l'ARP 78 (figure 6).

FIG. 6 – ARP 78



Ainsi, pour la résolution de ces problèmes, les procédures personnelles des élèves sont peu sollicitées, contrairement à ce qui est proposé pour les problèmes pour chercher. En effet, il s'agit plutôt pour les élèves d'entrer dans la démarche de résolution d'un autre élève fictif.

« Problèmes à résoudre sur le cahier »

Il s'agit là de résolution de problèmes proprement dite, comme indiqué dans la présentation du fichier élève :

> face à des problèmes variés, les élèves peuvent faire un schéma, écrire une égalité ou expliquer leur solution, c'est à dire utiliser des procédures diverses. Ils peuvent aussi résoudre par des schémas des problèmes pour lesquels ils ne savent pas encore mobiliser une opération arithmétique.

Discussion

A travers ces ARP, les auteurs visent clairement l'apprentissage de la résolution de problèmes arithmétiques, ce qui ne correspond pas du tout à l'esprit des problèmes pour chercher, en particulier car cela réduit le champ des problèmes à l'arithmétique (p. 16 du livre du maître CE1) :

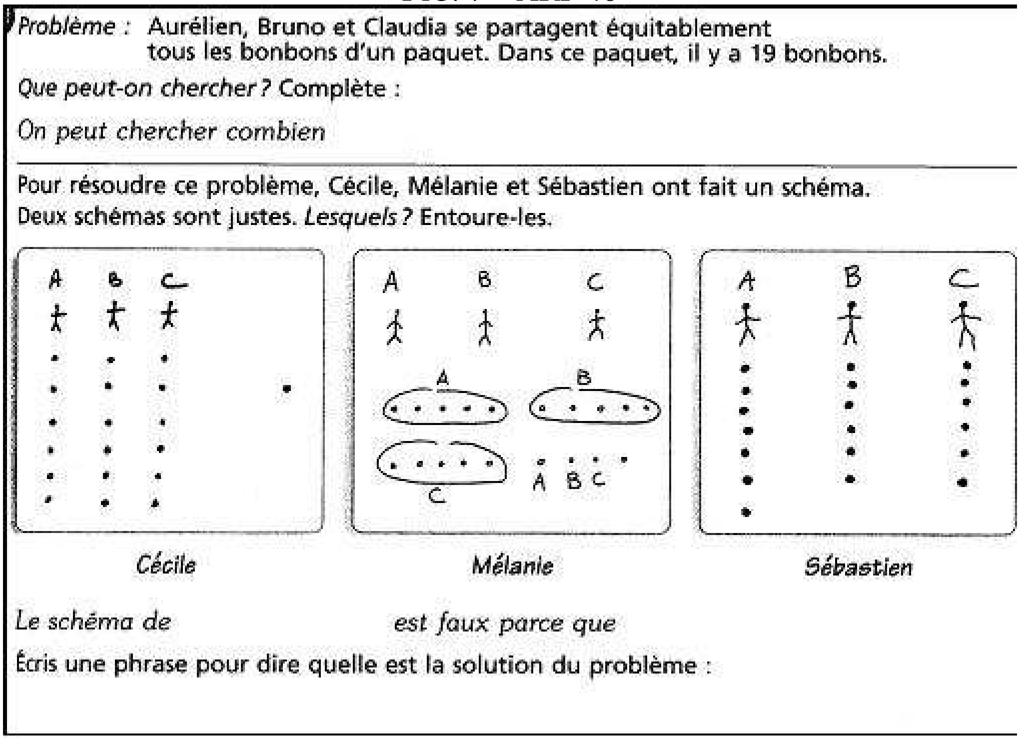
> La notion d' « Atelier de résolution de problèmes » se veut donc un moyen d'atteindre l'objectif fondamental suivant : créer un nouveau rapport entre l'enseignement des savoir-faire arithmétiques et l'utilisation de ces savoir-faire pour résoudre des problèmes.

Cependant, la question de la cohérence entre apprentissages arithmétiques et ARP se pose à certains moments. Par exemple, l'ARP de la séquence 78 (6) se situe après que les élèves aient travaillé sur les doubles. Dans ce cas, quel est l'intérêt de faire un schéma ?

Par ailleurs, une progression dans les tâches proposées et la mise en place d'un contrat spécifique se dégagent. Cela est en opposition avec l'idée de méthodologie telle qu'elle apparaît dans les documents d'accompagnement des programmes (en particulier pour ce qui concerne l'aspect nouveau). Ici, il semble y avoir une méthodologie a priori.

Notons le rôle particulier accordé au schéma. Il apparaît comme un but en soi et non réellement comme un outil personnel d'aide à la représentation du problème. C'est une ambiguïté récurrente à propos de l'utilisation des schémas en mathématiques à l'école primaire. De plus, les auteurs n'évoquent pas les rôles différents du schéma et de la solution rédigée alors que cette distinction est essentielle pour nous. En effet, le schéma n'est pas l'équivalent d'une solution et un schéma non abouti peut très bien permettre d'obtenir une réponse correcte au problème. Cela pose question. Considérons l'exemple de l'ARP 46 (figure 7) et ce qu'il en est dit dans le livre du maître. C'est un exemple significatif de ce que l'on trouve à plusieurs reprises.

FIG. 7 – ARP 46



Problème : Aurélien, Bruno et Claudia se partagent équitablement tous les bonbons d'un paquet. Dans ce paquet, il y a 19 bonbons.

Que peut-on chercher ? Complète :

On peut chercher combien

Pour résoudre ce problème, Cécile, Mélanie et Sébastien ont fait un schéma. Deux schémas sont justes. *Lesquels ?* Entoure-les.

Cécile *Mélanie* *Sébastien*

Le schéma de *est faux parce que*

Écris une phrase pour dire quelle est la solution du problème :

> Sébastien fait comme Cécile, mais il donne 7 bonbons à Aurélien. Le partage n'est pas équitable, les parts ne sont pas égales. (Livre du maître, p. 115)

Pourquoi faut-il considérer le schéma de Sébastien comme faux ? Ce schéma peut très bien être interprété comme la représentation de l'action de distribution : si je distribue les bonbons un par un aux élèves, je m'arrête lorsque je n'ai plus de bonbon à distribuer. J'ai alors donné six bonbons à chacun et un de plus à Sébastien. Donc pour répartir de façon équitable les bonbons, il faudrait que je donne 6 bonbons à chaque élève, il en restera 1. Un schéma n'est pas compréhensible en lui-même il doit être accompagné de phrases écrites ou d'un discours. Ainsi, même si le livre du maître indique les productions erronées et le raisonnement utilisé pour les qualifier ainsi, il nous est apparu à plusieurs reprises difficile de trancher sur la validité des productions des élèves fictifs, plusieurs interprétations étant possibles dans certains cas.

Le choix de faire travailler les élèves sur des solutions dites d'élèves questionne aussi : s'agit-t-il de gagner du temps ou de réduire l'incertitude du professeur ? Toujours est-il que ce type de travail peut donner l'illusion de correspondre à certaines caractéristiques des problèmes pour chercher alors que ce n'est pas la même activité intellectuelle qui est en jeu. De plus, avec cette présentation, comme dans la majorité des ARP, la validation des propositions ne peut pas être faite par les élèves seulement. Le choix du problème lui-même n'est pourtant pas à remettre en cause, c'est la gestion proposée qui ne correspond pas à un problème pour chercher. En effet, on peut très bien proposer l'énoncé du problème initial aux élèves, sans les productions des élèves fictifs et leur demander de le résoudre, en utilisant éventuellement des jetons. Avec une gestion appropriée du travail des élèves (en groupe) et de la mise en commun, ce problème peut devenir un problème pour chercher tout à fait intéressant pour des élèves de CE1.

Enfin, concernant la mise en oeuvre, le travail individuel des élèves est toujours préconisé, ce qui ne correspond pas aux caractéristiques des problèmes pour chercher.

Au cycle 3

Les ARP sont présentés à la fois comme le lieu où les élèves apprennent à résoudre des problèmes en réinvestissant des connaissances, en mettant en \oe{u}vre des connaissances encore informelles et comme un lieu de travail sur des problèmes de recherche, par opposition aux séquences où les élèves acquièrent des savoir-faire fondamentaux (p. 62 du livre du maître CE2, éditions 2003) :

> Mais ces ARP n'ont pas seulement pour fonction de donner aux enfants l'occasion de réinvestir leurs connaissances dans la résolution de problème. Les élèves y apprennent par exemple à résoudre des problèmes de division bien avant d'avoir étudié cette opération. De tels problèmes sont dits « de recherche ».

Comme pour les niveaux précédents, les ARP sont organisés en cadres qui correspondent chacun à un type de tâche particulier. En CE2, quatre types d'activités sont proposés :

1. comparer trois résolutions d'un même problème pour « apprendre à résoudre des problèmes à l'aide de schématisations et à établir des liens entre diverses procédures », avec, à termes, l'utilisation d'égalités numériques pour la résolution du problème ;
2. résoudre des problèmes variés énoncés de façon classique en utilisant la procédure de son choix ;
3. rechercher dans une image ou un document les informations pertinentes pour résoudre des problèmes ;
4. inventer et rédiger plusieurs questions cohérentes avec le début d'un énoncé.

Aux niveaux CM1 et CM2, on retrouve les mêmes tâches, sauf la quatrième, avec des objectifs légèrement différents. Par exemple, au CM1, un des objectifs du premier type de tâche est «d'acquérir ou de mieux comprendre des expressions spécifiques des énoncés mathématiques », tandis que pour le second, l'objectif est clairement de réinvestir les connaissances acquises lors des autres séquences.

Notons qu'à ces niveaux on observe une plus grande variété des domaines avec notamment plus de problèmes de géométrie.

En ce qui concerne la mise en oeuvre des ARP, les auteurs proposent un travail individuel des élèves avec des interventions personnalisées de l'enseignant et une mise en commun à la fin de l'activité (livre du maître CE2, p. 63).

Comme pour le cycle 2, les ARP proposées au cycle 3 ne correspondent pas à des problèmes pour chercher ni dans les caractéristiques des problèmes, ni dans la mise en oeuvre.

Conclusion : ARP et problèmes pour chercher

Sans nier l'intérêt des ARP, ces séquences ne sont pas des problèmes pour chercher et leurs caractéristiques en sont assez éloignées. En particulier, dans la mise en oeuvre proposée, on ne retrouve pas l'esprit des problèmes pour chercher. En effet, si l'on reprend une à une les caractéristiques des problèmes pour chercher (cf. grille), il apparaît que les points suivants ne sont clairement pas des objectifs des auteurs : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, mettre en débat ses méthodes, argumenter. De même, la gestion des ARP proposée, parce qu'elle est au service d'autres objectifs, ne correspond pas à celle proposée pour les problèmes pour chercher. De ce fait, la modification d'un problème proposé en ARP pour en faire un problème pour chercher nous semble demander de nombreuses adaptations.

Résolution de problèmes et « banque de problèmes » dans « Cap Maths »

Dans cette collection, les auteurs utilisent des problèmes comme moyen de provoquer les apprentissages ou comme enjeu des apprentissages. Les problèmes pour chercher nous semblent pouvoir être trouvés à deux endroits :

- lors de la « Résolution de problèmes » apparaissant à l'intérieur des séances, pour tous les niveaux ;
- dans la « Banque de problèmes » qui est proposée à la fin des manuels à partir du CE1.

La banque de problèmes et la résolution de problèmes sont présentées avec le thème « Résolution de problèmes » au début des livres du maître.

Comme pour la collection précédente, nous avons effectué une analyse détaillée de l'ensemble du manuel dont nous ne proposons ici qu'une synthèse illustrée d'exemples signifcatifs.

Au niveau CP (Cap Maths CP, 2000)

Dans la présentation générale du thème « Résolution de problèmes », les auteurs désignent les activités étiquetées « Résolution de problèmes » comme des problèmes ouverts (livre du maître, p. 9) :

> Pourquoi identifier un thème comme relevant spécifiquement de la résolution de problèmes ? Tout simplement parce que nous sommes convaincus qu'il est possible de proposer des situations dont l'objectif spécifique ne réside pas dans l'appropriation d'un concept, mais dans l'activité de recherche elle-même, à travers ce que certains auteurs appellent des « problèmes ouverts ».

A travers la résolution de ces problèmes, les auteurs visent les trois objectifs suivants.

« Développer des stratégies de recherche »

Il s'agit de faire travailler les élèves sur le développement des stratégies de recherche à travers des « situations d'anticipation » proposés dans le livre du maître :

> une vérification expérimentale des réponses peut être réalisée, après débat entre les élèves, à propos des réponses et des stratégies diverses qui ont été utilisées.

Les problèmes concernent principalement des situations de partage ou de distribution équitable. Toutefois, les auteurs précisent qu'il ne s'agit pas de viser un apprentissage précoce de la division mais plutôt de proposer aux élèves des problèmes qui nécessitent l'élaboration de stratégies, notamment lorsque plusieurs contraintes doivent être respectées.

Ces problèmes peuvent correspondre, s'ils sont mis en \oe{u}vre dans ce sens, à des problèmes pour chercher.

« Développer le goût pour les mathématiques »

Cet objectif est poursuivi notamment à travers la mise en place d'un « coin jeux mathématiques » où l'enseignant laisse à disposition des élèves des jeux du commerce qui permettent de développer des stratégies (p. 10). Il est difficile de savoir si les problèmes résolus dans le coin jeu correspondent à des problèmes pour chercher mais cela nous semble peu probable.

« Organiser des données et déduire »

Il s'agit d'amener les élèves à organiser les données et à effectuer des déductions : recherche de tous les éléments d'une collection répondant à certains critères donnés ; organisation d'une suite de questions pour déterminer un élément d'une collection préalablement déterminée (jeu du portrait). Ces activités relèvent essentiellement du domaine de la logique et requièrent le plus souvent des échanges entre les élèves.

Il nous semble que les problèmes relatifs à cet objectif peuvent correspondre à des problèmes pour chercher.

Discussion : les problèmes et la mise en oeuvre proposée

En dehors des activités liées au coin jeux, les activités de résolution de problèmes sont réparties régulièrement au cours de l'année, une par quinzaine, excepté pour les quinzaines 6 et 7 où ces activités sont absentes. Ces activités peuvent se dérouler sur deux séances consécutives. Elles sont le plus souvent organisées autour de travaux de groupes et nécessitent donc des échanges entre les élèves d'un même groupe et entre groupes. Par contre, il n'y a pas de travail individuel recommandé avant le travail de groupe. Les auteurs conseillent régulièrement à l'enseignant de ne pas intervenir au cours des moments de recherche et indiquent aussi souvent des pistes d'aide pour les élèves les plus en difficulté. Les connaissances qu'ils proposent de reprendre lors de la synthèse ne concernent pas des savoirs relatifs à une notion particulière mais des savoirs plus méthodologiques. Ainsi, les problèmes relatifs aux objectifs « Développer des stratégies de recherche » et « Organiser des données et déduire » correspondent à des problèmes pour chercher, tant du point de vue de objectifs d'apprentissages visés que de la mise en oeuvre proposée. A titre d'exemple, voici figure 8la première activité de résolution de problèmes proposée aux élèves de CP (quinzaine 1, séance 3, p. 33 du livre du maître), nous vous laissons l'analyser à l'aide de la grille.

FIG. 8 – Extrait du livre du maître de Cap Maths CP

Activité 3 Réparer les ziglotrons (1)

❶ Présentation du problème

L'enseignant annonce que Gribouille a joué avec les ziglotrons et qu'il arraché plusieurs boutons (ceux qui sont blancs sur le dessin). Il faut réparer les ziglotrons. Heureusement, on dispose d'une boîte de boutons (des gommettes), au fond de la classe (dans un coin éloigné des élèves).

→ *"Il faut aller chercher dans la boîte juste ce qu'il faut de boutons pour réparer votre ziglotron, pas un de plus, pas un de moins. Attention, vous n'avez le droit de venir qu'une seule fois. Il faut donc réussir du premier coup à prendre juste ce qu'il faut de boutons. "*

❷ Résolution individuelle

Les élèves sont invités à réfléchir à ce qu'ils vont prendre dans la boîte. Puis, par petits groupes (par rangées ou par tables, par exemple), ils viennent chercher leurs gommettes. Ils se servent eux-mêmes, sous le contrôle de l'enseignant, puis retournent à leur place pour placer les gommettes.
Ceux qui ont trop de gommettes doivent les coller sur la feuille, à côté du ziglotron.

❸ Mise en commun

Recensement des réussites et des échecs.

→ *Certains élèves sont invités à décrire la méthode qu'ils ont utilisée, par exemple en la reproduisant à partir d'un nouveau ziglotron devant les autres élèves.*

Le dénombrement est mis en évidence par les élèves et par l'enseignant comme méthode efficace, à la fois pour résoudre le problème et pour prédire la réussite ou l'échec. Certaines causes d'échec sont également identifiées.

L'activité peut être reprise après la mise en commun, en particulier pour les élèves qui n'ont pas eu recours au dénombrement (par exemple, en atelier différencié : résolution du problème avec l'appui de l'enseignant).

N.B. : L'activité correspondante sur fichier sera proposée le lendemain.

Cette première activité a trois objectifs :
– appropriation du problème par les élèves (une grande attention sera portée sur ce point) ;
– mise en place de premières stratégies de résolution ;
– repérage des stratégies par l'enseignant.
La consigne doit être donnée avec précision, mais sans introduire l'idée de comptage ou de nombre, puisqu'on souhaite que les élèves trouvent, par eux-mêmes, l'idée d'utiliser les nombres pour résoudre le problème posé.

Les stratégies correctes possibles :
– représenter chaque bouton (par un dessin, sur les doigts...) et faire correspondre terme à terme,
– dénombrer les boutons manquants, puis un nombre égal de jetons,
– estimation globale.

Quelques erreurs :
– prise d'un nombre aléatoire de jetons,
– oubli du nombre de boutons manquants,
– difficulté à dénombrer (un travail spécifique devra être fait avec les élèves concernés).

Au niveau CE1 (Cap Maths CE1, 2001)

Dans la continuité de ce qui est proposé au CP, les activités de résolution de problèmes sont présentées comme des activités d'initiation à la recherche. Les trois objectifs du CP sont repris avec des évolutions, comme nous le détaillons ci-dessous ; une « banque de problèmes » est proposée à la fin du fichier élève.

« Développer le goût des mathématiques »

Pour cet objectif, les auteurs proposent des jeux pour compléter ceux du commerce. Il est difficile de dire si ces ateliers conduisent à la résolution de problèmes pour chercher mais il nous semble toutefois que les moments de mise en commun et de synthèse ne sont pas des passages obligés.

« Développer des stratégies de recherche »

L'objectif est repris avec des types de problèmes plus variés : distribution ou partage équitable ou non, inventaire de toutes les solutions possibles (en combinant plusieurs éléments), optimisation d'une solution en tenant compte de contraintes imposées. De plus, les auteurs précisent que la résolution de ces problèmes « inédits » pour eux devrait les amener à procéder par essais successifs, formuler des hypothèses, contrôler l'efficacité ou la pertinence des stratégies proposées, s'organiser pour mener à bien une stratégie retenue, interpréter ce qui a été trouvé, en rendre compte, le justifier et argumenter à propos de sa validité. Ce type de situation correspond a priori à des problèmes de type problèmes pour chercher.

«Organiser des données et déduire »

Cet objectif n'apparaît plus en tant que tel, il est remplacé par deux objectifs dans la même veine mais plus spécifiques qui permettent d'affiner les compétences travaillées.

– *« Organiser un questionnement, déduire ».*

Il s'agit d'organiser des éléments pour faire des déductions à travers, essentiellement, des activités de « jeu du portrait » qui visent le développement de la logique et du raisonnement. Ces activités se différencient de celles relatives à l'objectif précédent car il s'agit moins de faire des essais, d'ajuster des hypothèses que d' « adopter une démarche systématique où la déduction et la capacité à organiser son questionnement occupe la place principale ».

Elles entrent dans le cadre des problèmes pour chercher dans la mesure où les différentes phases de travail sont respectées. En effet, elles nécessitent, au moins, d'émettre des hypothèses et de les tester, d'élaborer une démarche pertinente, d'argumenter, dans des situations où plusieurs démarches de résolution sont possibles.

– *« Les mathématiques dans la vie courante ».*

Les élèves ont, dans un contexte proche de la vie courante, à rechercher et sélectionner des informations utiles sur des supports variés, à déterminer des questions intermédiaires, organiser la résolution, présenter la solution et la discuter. On retrouve ces compétences parmi les compétences caractéristiques des problèmes pour chercher, mais cela ne garantit pas que ces problèmes seront effectivement des problèmes pour chercher. En effet, on ne retrouvera pas nécessairement dans ces problèmes les compétences suivantes : émettre des hypothèses, faire et gérer des essais successifs.

Banque de problèmes

La banque de problèmes, située à la fin du fichier élève, est constituée de 15 séries de 5 ou 6 exercices. Cette banque de problèmes située à la fin du manuel est destinée à compléter le travail sur la résolution de problème (p. 8 du livre du maître) :

> La « banque de problèmes » offre un ensemble de près de 90 énoncés qui peuvent être utilisés à des moments choisis par l'enseignant. Sa présentation à la fin du fichier de l'élève permet d'éviter que l'élève ne se réfère à des indices fournis dans le fichier et l'oblige donc à se centrer essentiellement sur la situation évoquée.

Cette intention correspond à l'idée de problèmes pour chercher. Les auteurs ont choisi de proposer des problèmes variés (p. 10 du livre du maître) :

> Pour chaque série les problèmes sont variés :
> - ils ne relèvent pas tous du même domaine mathématique, de manière à favoriser la réflexion quant au choix des procédures de résolution ;
> - les données sont fournies sur des supports divers : texte, dessin, document ?
> - dans certains cas, les questions sont à déterminer par les élèves, dans d'autres l'énoncé est à reconstituer partiellement.

En ce qui concerne la mise en oeuvre, les modalités d'utilisation sont laissées au choix de l'enseignant, en particulier il n'y a pas d'indication pour chacune des séries de problèmes. Les auteurs donnent toutefois des suggestions générales qui concernent :

- l'organisation du travail dans la classe : un travail individuel est préconisé, mais un travail en groupe après un temps de recherche individuelle est aussi possible ; le travail doit donner lieu à une trace écrite dans un cahier de problèmes, mais les phases de mises en commun ne semblent pas toujours aboutir à un débat et à une argumentation (p. 10, livre du maître) :

  > Après avoir cherché au brouillon, les élèves peuvent consigner leurs solutions dans un « cahier de problèmes » (ou un classeur). En début d'année, avant la mise au net, une discussion sur les différentes solutions peut avoir lieu. Ensuite, chaque élève recopie l'une des solutions correctes (celle qu'il comprend le mieux) ou bien l'enseignant peut réaliser un montage avec quelques exemples de différentes solutions correctes et demander aux élèves de coller une photocopie de ce montage dans leur cahier. Plus tard, c'est sa propre solution que chaque élève devra faire figurer dans son cahier de problèmes.

- le rôle de l'enseignant : le travail des élèves se veut un travail autonome, aussi il n'est pas souhaitable que l'enseignant donne des informations complémentaires, sauf peut-être en début d'année pour préciser la signification des informations fournies et la tâche demandée aux élèves ;
- l'exploitation des productions des élèves : la mise en commun des procédures des élèves et une discussion sur leur validité est préférable à une correction, cela permet en effet d'identifier des erreurs et d'établir des ponts entre les différentes procédures ;
- la différenciation : une première façon de différencier est de faire accepter aux élèves qu'ils peuvent résoudre les mêmes problèmes que leur camarades avec des procédures « à leur niveau » ; une seconde façon consiste à modifier les données des problèmes pour les rendre plus faciles ou plus difficiles.

Il nous semble que selon la façon dont ces problèmes sont mis en \oe{u}vre dans les classes, ils peuvent plus ou moins correspondre à des problèmes pour chercher.

Discussion

Des problèmes relatifs aux objectifs « développer des stratégies de recherche », « organiser un questionnement, déduire » et « les mathématiques dans la « vie courante » » sont proposés régulièrement au cours de l'année, un problème par quinzaine excepté pour la quinzaine 2. Ils correspondent soit au domaine numérique, soit au domaine géométrique.

Les mises en oeuvre des problèmes proposées pour les objectifs « développer des stratégies de recherche », « organiser un questionnement, déduire » en font, pour nous clairement des problèmes pour chercher, comme cela était le cas au niveau CP. Par contre, sans pour autant nier l'intérêt de ces problèmes, il nous semble plus difficile de qualifier ainsi tous les problèmes relatifs à la compétence « les mathématiques dans la vie courante ». Considérons par exemple, le problème proposé à la quinzaine 3, p.64-65 du livre du maître, (figure 9).

Reprenons notre grille. Par rapport à la mise en \oe{u}vre du problème l'enseignant crée effectivement les conditions d'une réelle activité intellectuelle pour les élèves, les élèves sont bien mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution du problème, la synthèse proposée porte sur des aspects méthodologiques (inventaire des procédures possibles) et non sur des connaissances mathématiques précisées dans les programmes. Par contre, comme nous l'avons déjà noté pour le niveau CP, il n'y pas de travail individuel qui précède le travail en groupe. De plus, en ce qui concerne les compétences visées avec ce problème, les élèves auront peu à émettre des hypothèses et les tester, à produire une solution personnelle (absence de travail individuel), à vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus (même si cela est possible). En revanche, ils devront élaborer une démarche pertinente, faire et gérer des essais successifs, formuler une réponse dans les termes du problème, expliquer leurs méthodes, mettre en débat leurs méthodes et les argumenter.

Pour ce qui concerne la banque de problèmes, le fait de proposer un travail individuel nous semble d'emblée un facteur limitant pour qualifier ces problèmes de problèmes pour chercher. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà indiqué, rien ne garantit qu'il y ait, à un moment, une forme de débat à propos des procédures des élèves.

Pour ce niveau, il y a vraisemblablement une recherche de diversification des activités relatives à la résolution de problèmes pour permettre aux élèves de progresser dans ce domaine. Mais tous les problèmes proposés ne sont pas des problèmes pour chercher, ce qui n'est ni étonnant, ni inquiétant, étant donnée la place particulière qu'il convient d'accorder aux problèmes pour chercher dans l'enseignement des mathématiques. En particulier, certaines formes de problèmes ne correspondent pas aux problèmes pour chercher car l'idée d'argumentation et de débat est absente de leur mise en \oe{u}vre. Cela se conçoit d'autant plus facilement car, à cet âge, il est difficile de demander toujours aux élèves d'argumenter et de débattre.

Au cycle 3

Pour ce cycle, étant donnée la continuité existante avec le cycle 2, nous pointerons essentiellement ce qui diffère d'un cycle à l'autre.

Au cycle 3, la résolution de problème est associée à l'exploitation des données numériques, pour constituer un des domaines de travail. Les objectifs des auteurs, dans le prolongement de ce qui est amorcé au niveau du cycle 2, se précisent au fur et à mesure des niveaux, avec l'affinement des capacités des élèves, et sont les suivants.

« Développer le goût pour les mathématiques »

Il s'agit de la mise en place de coins « jeux mathématiques », comme au cycle 2. Il ne renvoie pas pour nous à des problèmes pour chercher.

FIG. 9 – Problème de la quinzaine 3

Enquête dans l'école ? (1)

L'activité va se dérouler sur 2 séances.
Dans cette première séance, il s'agit d'envisager quelles sont les questions possibles à poser pour une enquête sur l'école. Les données recueillies (par l'enseignant ou les élèves) à propos des questions retenues seront traitées en deuxième séance.
L'objectif de cette première phase de l'activité est donc de déterminer un ensemble de questions qui peuvent être posées pour avoir des renseignements sur un contexte donné (ici l'école). L'enseignant amorce le questionnement, les élèves vont le compléter.

❶ Inventaire des questions possibles

L'enseignant présente la situation :

Notre classe est chargée d'organiser une enquête pour fournir un certain nombre de renseignements sur les personnes qui sont dans l'école. Par exemple : Combien y a-t-il de personnes en tout dans l'école ? Combien d'élèves ? Essayons ensemble de trouver d'autres questions. Chaque groupe aura deux ou trois minutes pour chercher et proposer d'autres questions.

En fonction de la taille de l'école, on pourra se limiter à quelques classes (celle de l'étage par exemple, ou au contraire choisir une enquête sur une école voisine).
Après un petit temps d'échange par équipes de deux, un recensement des idées est fait (cantine, étude, car, garçons et filles...). On retient des questions comme :
– Combien de personnes ? Combien d'élèves ? Combien d'adultes ?
– Combien d'élèves mangent à la cantine ?
– Combien de garçons ? Combien de filles ?...
Elles sont notées au tableau.

❷ Préparation de l'enquête

L'enseignant indique qu'une enquête sera menée auprès des autres enseignants afin de rapporter des éléments de réponse du style « il y a tant d'enfants dans cette classe, avec tant de filles et tant de garçons, etc. »
Mais il faut d'abord se mettre d'accord sur les questions qu'on souhaite poser, parmi celles qui ont été retenues précédemment.

Avec les réponses recueillies par moi-même ou certains élèves, vous pourrez répondre, au cours de la prochaine séance, aux questions concernant l'école.

Le choix des questions s'effectue au cours d'un échange collectif. Les questions choisies sont notées au tableau et recopiées par les élèves chargés d'enquêter.

Enquête dans l'école ? (2)

Il s'agit maintenant de répondre aux questions qui ont été posées au cours de la séance précédente, à partir des renseignements rapportés par l'enseignant.

❶ Rappel des questions et des informations recueillies

Les questions retenues au cours de la séance précédente sont rappelées, écrites au tableau par l'enseignant et sur la fiche enquête.
Les informations recueillies par l'enseignant sont également notées au tableau et copiées sur cette fiche.

❷ Traitement des données

Chaque équipe essaie de répondre aux questions posées.
Certains groupes peuvent être déstabilisés par le nombre de questions et de données. On peut alors :
– soit procéder à une mise en commun intermédiaire au bout d'un certain temps de recherche pour mettre en évidence les questions auxquelles on peut répondre plus facilement ;
– soit apporter une aide personnalisée à ces élèves, en identifiant, avec eux, deux ou trois questions auxquelles il doivent d'abord répondre.

« Développer des stratégies de recherche »

Cet objectif est travaillé à travers la résolution de problèmes ouverts, et donc de problèmes pour chercher. Il est présent tout au long du cycle 3 et vise, comme en CE1, à mettre l'élève en situation de chercheur, et à lui laisser l'entière responsabilité de la résolution du problème.

« Organiser un questionnement, (raisonner), déduire »

Dans le prolongement du cycle 2, les auteurs proposent sous cette rubrique des jeux de portait ou de bataille navale. En perspective du collège, au cours du cycle, les élèves seront de plus en plus en plus confrontés à des tâches de raisonnement. Certaines compétences des problèmes pour chercher seront donc particulièrement travaillées avec ces problèmes.

« Organiser et exploiter des données numériques »

Cet objectif nous semble correspondre à la suite de « Mathématiques dans la vie courante ». Au CE2, il s'agit seulement de demander aux élèves d'exploiter des données numériques dans des situations qui sont proches de celles de la vie courante ou de données documentaires et surtout d'amener les élèves à distinguer écrits de recherche et écrits de type « mise au net ». Pour les niveaux CM1 et CM2, l'énoncé de cet objectif évolue et devient « organiser et exploiter des données numériques », puis « utiliser ses connaissances pour traiter des situations » mais l'objectif reste de travailler sur les différents types d'écrits en mathématiques. Cette rubrique vise donc en particulier une des compétences des problèmes pour chercher. Si la mise en \oe{u}vre est adéquate ces problèmes relèveront donc des problèmes pour chercher.

«Argumenter »

Cet objectif apparaît à partir du CM1. Il s'agit à travers ces activités de permettre aux élèves de débattre et d'argumenter afin de les amener à se confronter à l'idée de preuve notamment en leur permettant de distinguer ce qui relève de la description d'une solution, de l'explication de certains points de celle-ci et de l'argumentation à propos de sa validité. Avec ces activités, c'est encore le travail spécifique d'une des compétences visées par les problèmes pour chercher qui est visé.

« Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité »

Cet objectif qui n'apparaît qu'en CM2 ne peut en aucun cas relever des problèmes pour chercher dans la mesure où il s'agit de travailler non pas sur des compétences méthodologiques mais sur un domaine particulier : la proportionnalité.

Conclusion : problèmes pour chercher dans Cap Maths

Dans cette collection, la résolution de problèmes est un domaine systématiquement travaillé tout au long de l'année, du CP au CM2. Les auteurs définissent pour chacun des niveaux des objectifs auxquels ils associent parfois des modalités de travail spécifiques (coin jeux mathématiques, par exemple). Les différentes activités de résolution de problèmes sont soit proposées à certains moments réguliers de l'année (une par quinzaine environ), soit regroupées à la fin des fichiers élèves sous la forme de banque de problèmes. Les activités intégrées aux séances permettent, le plus souvent, de travailler des compétences relatives aux problèmes pour chercher. Avec l'avancée dans la scolarité, on observe un affinement des objectifs, les compétences des problèmes pour chercher sont ainsi travaillées de façon de plus en plus précise et isolée.

4. Conclusion

Nous avons essayé dans ce chapitre de préciser ce qu'est un problème pour chercher en le comparant avec d'autres types de problèmes déjà identifiés en didactique des mathématiques. Cela nous a permis de proposer une grille d'analyse des problèmes et ainsi d'effectuer, à titre d'exemple pour le lecteur, l'analyse des collections « J'apprends les maths » et « Cap Maths ».

Les auteurs de ces deux collections ne semblent pas avoir les mêmes démarches pour ce qui concerne le travail sur les problèmes pour chercher. Il s'avère en effet difficile de trouver des problèmes pour chercher dans la collection « J'apprends les maths » tandis que le travail sur ces problèmes est présent dans la collection « Cap Maths ». L'analyse de ces deux collections nous permet de pointer la difficulté à trouver un problème qui réponde positivement à tous les critères de la grille, on le voit en particulier dans Cap Maths.

Partie 2 : Deux exemples de problèmes pour chercher

Les exemples de problèmes pour chercher ne sont pas si nombreux que cela dans la littérature, c'est pourquoi nous essayons d'en mettre au point à partir d'une réflexion didactique accompagnée d'observations en classe des situations proposées.

Nous présentons dans ce chapitre l'état actuel de notre travail qui correspond à deux problèmes établis différemment :

- « Gobelets et jetons » est un problème qui relève du domaine numérique (problème de partage) destiné à des élèves de Grande Section, mis au point à partir d'une variation sur un problème pour apprendre à chercher extrait du fichier ERMEL CP ;
- « Le pavé bicolore » est une création du groupe destinée à des élèves de cycle 3 qui touche à la fois aux domaines géométrique et numérique.

Ces problèmes correspondent à des problèmes pour chercher dans la mesure où la mise en oeuvre proposée respecte les critères résumés dans la grille (partie 1).

Pour chacun d'eux, nous proposons une analyse assez détaillée et des éléments concernant la mise en oeuvre dans la classe. En effet, l'objet de ce chapitre est autant de proposer des problèmes pour chercher directement exploitables en classe que de sensibiliser à la démarche utilisée pour produire ces problèmes. Nous espérons donner au lecteur l'envie de s'engager dans la recherche de tels problèmes.

Rappelons toutefois que proposer des problèmes pour chercher aux élèves ne s'improvise pas. Les problèmes présentés ci-après apparaissent isolés de toute progression, ils seront d'autant plus faciles à faire vivre aux élèves s'ils ne sont pas les premiers problèmes de ce type, mais il faut bien débuter un jour ?

1. « Gobelets et jetons », variation à partir d'un problème existant

Nous présentons ici notre travail sur un problème pour apprendre à chercher extrait de ERMEL CP (ERMEL CP, p. 107 et cahier de l'élève ERMEL, p. 121) qui nous a semblé facile à modifier à destination des Grandes Sections.

Le problème initial

Voici le problème qui a servi de support à notre réflexion (cahier de l'élève CP, ERMEL, p. 121).

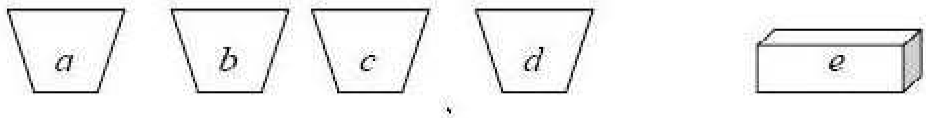

Les gobelets dessinés contiennent des jetons. Ils ne contiennent pas tous le même nombre de jetons. Les étiquettes sur chaque gobelet indiquent le nombre de jetons qu'ils contiennent.
Dans la boîte, il reste des jetons qu'on n'a pas eu le temps de mettre dans les gobelets. L'étiquette collée sur la boîte indique le nombre de jetons qu'elle contient.
Tu dois répartir tous les jetons que contient la boîte de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet.
On doit comprendre ce que tu as fait en lisant ta feuille.

Écris les nombres que le maître t'a donnés, sur les gobelets et sur la boîte.

Cette situation met en jeu la notion de partage qui traverse l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Dans ERMEL, elle est proposée à des élèves de CP sous la rubrique « Des problèmes pour apprendre à chercher ». Le problème peut être résolu par des élèves de GS, pour des valeurs numériques bien choisies, avec des procédures personnelles, à condition de donner la possibilité d'effectuer réellement le partage (mettre à disposition des jetons et des boîtes). Par ailleurs, la situation proposée et le jeu possible sur les valeurs numériques permettent de faire de ce problème de partage un problème assez original pour les élèves ; en particulier, si la distribution dans les gobelets est déjà commencée les procédures habituelles de distribution (un à un, deux à deux ?) sont mises en défaut. Enfin, la situation, présentée ici sous la forme d'un énoncé écrit, peut facilement être « jouer » par de jeunes élèves (comme cela est proposé dans un premier temps dans ERMEL CP), ce qui permet alors de valider aisément les travaux par comptage des jetons distribués à chacun. Ainsi, ce problème nous a semblé aisé à modifier pour obtenir un problème pour chercher accessible aux GS. Analysons-le plus en détail pour connaître les leviers qui nous permettraient d'en faire un problème pour chercher adapté à des élèves de GS.

Le problème générique

Pour traiter d'un cas un peu plus général, formulons le problème de la façon suivante :



avec *a,b,c,d* et *e* les nombres de jetons. On pourrait tout aussi bien considérer les cas où il a *n* gobelets, mais dans ce paragraphe, pour faciliter la présentation du problème générique, nous ne considérerons que le cas de 4 gobelets. Il s'agit de répartir les jetons que contient la boîte dans les gobelets de manière à ce qu'il y ait le même nombre de jetons dans chaque gobelet ; cet état de répartition étant noté par la suite, conventionnellement, « partage équitable ». On notera T le nombre total de jetons (T = $a + b + c + d + e$). Dans le cas général, T ne sera pas forcément un multiple de 4.

Quelle est la procédure canonique ?

La procédure canonique de résolution d'un problème est la procédure qui permet de le résoudre dans tous les cas, et en particulier quelles que soient les valeurs numériques.

Ici, on peut toujours résoudre le problème de la façon suivante : calculer le nombre total T de jetons dans la situation puis diviser ce nombre par le nombre de gobelets (ici 4). On alors deux possibilités :

- soit T est un multiple de 4 et le reste de la division euclidienne est nul. Le nombre de jetons dans chaque gobelet est alors T/4.
- soit T n'est pas un multiple de 4 et l'on peut faire une répartition équitable des jetons dans les gobelets mais il reste des jetons.

Cette procédure de résolution du problème n'est accessible à un élève qu'à partir du milieu du cycle 3. Pour autant il est tout à fait possible de résoudre autrement le problème plus tôt.

Qu'est-ce qui est en jeu dans ce problème ?

Le problème posé fait intervenir des nombres entiers (le nombre de jetons et le nombre de gobelets) et l'idée de partage équitable (on doit avoir le même nombre de jetons dans chaque gobelet). C'est donc la notion de division euclidienne[2] qui est sous-jacente au problème.

Cette notion est au programme du cycle 3, mais l'idée de partage « équitable » est travaillée beaucoup plus tôt à l'école, d'ailleurs le problème est initialement destiné à des CP.

Sur quoi peut-on jouer pour faire varier les procédures des élèves ?

Si l'on souhaite proposer ce problème à des élèves de GS, il est en particulier nécessaire de jouer sur ce qu'on appelle les variables didactiques3 du problème afin de permettre l'utilisation de procédures adaptées au niveau des élèves. Il s'agit ici de repérer ces variables, puis d'en envisager des valeurs adéquates pour des GS et d'autres niveaux.

Les principales variables didactiques du problème sont les variables numériques et le fait de disposer ou pas de matériel (jetons, gobelets et boîte). Comme il est difficile d'isoler ces deux variables, nous allons présenter les différents cas en considérant d'abord les variables numériques.

a) Le nombre de gobelets

S'il n'y a que deux gobelets, la répartition des jetons entre ces deux gobelets est relativement aisée et peut se faire par tâtonnement. En GS, il semble raisonnable de choisir un nombre de gobelets compris entre 3 et 5 inclus. En effet, quand on augmente le nombre de gobelets (6, 7 ?) les procédures de tâtonnement sont rendues plus difficiles. Au cycle 3, l'augmentation du nombre de gobelets est une façon de contraindre les élèves à utiliser la division euclidienne. Désormais, nous ne considérerons que le cas où l'on dispose de quatre gobelets.

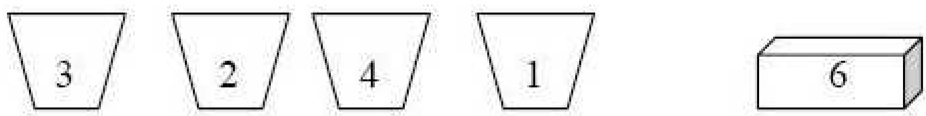
b) Le champ numérique

Le champ numérique, ce qu'on appelle couramment la « taille des nombres », joue un rôle important dans la détermination des procédures que l'on va utiliser. En particulier, si la valeur de T permet d'envisager de répartir effectivement les jetons dans les gobelets ou d'imaginer de les répartir, les élèves pourront être tentés de procéder ainsi. Par exemple, des élèves de GS à qui l'on distribue du matériel (jetons, gobelets et boite) vont résoudre le problème relativement facilement en procédant par tâtonnement. Si la valeur de T est plus grande, la résolution du problème demande plus d'anticipation et une bonne connaissance des tables d'addition, voire de multiplication.

c) Le nombre de jetons dans les gobelets et dans la boîte

Quels que soient le nombre de jetons déjà distribués dans les gobelets et celui de jetons restant à distribuer, une procédure courante qui repose sur une forme de tâtonnement est la suivante : compléter d'abord tous les gobelets à la hauteur du gobelet qui est le plus rempli, puis ajuster. Cet ajustement va prendre différentes formes en fonction des valeurs numériques initiales.

– Considérons le problème avec le jeu de valeurs suivant.

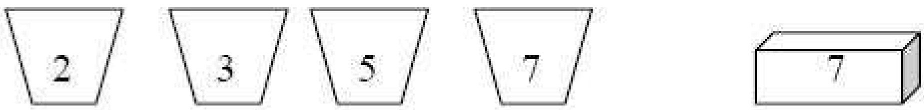


Si on égalise le nombre de jetons dans chacun des gobelets à quatre (nombre maximal de jetons déjà distribués), il ne reste alors aucun jeton dans la boîte. Cette procédure abordable assez tôt par les élèves permet de résoudre rapidement le problème ; nous avons pu observer dans une classe de GS qu'elle a majoritairement été utilisée par les élèves. Elle est probablement favorisée par la possibilité de manipuler les jetons et se prête moins bien à un travail papier-crayon.

De cette façon, le problème est résolu sans avoir recours à l'idée de division euclidienne, mais plutôt avec l'idée de compensation.

Cas général : un des gobelets, contient initialement T/4 jetons et le nombre de jetons dans la boîte permet de compléter exactement les gobelets. Par exemple a = , e = $\frac{3T}{4} - (b + c + d)$.

– Avec le jeu de valeurs ci-dessous,

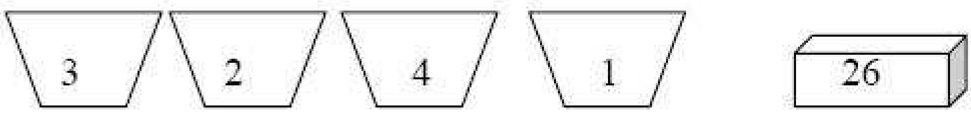


la procédure est mise en défaut puisqu'il doit y avoir moins de 7 jetons par gobelet pour réaliser un partage équitable.

Il y a alors plusieurs façons de s'y prendre, en fonction du matériel disponible. Si l'on dispose des jetons, des gobelets et de la boîte, on peut remettre tous les jetons dans la boîte et procéder à un partage en mettant soit plusieurs jetons à la fois dans chaque gobelet (au moins au début), soit un jeton à la fois dans chaque gobelet. Dans ce cas, la situation de partage est classique. On peut aussi enlever des jetons des gobelets de façon à obtenir par tâtonnement la répartition recherchée. La difficulté de l'ajustement peut alors dépendre de la façon dont ont déjà été répartis les jetons. Par exemple, le cas 7-5-5-7 est probablement plus facile à rectifier que celui 3-7-7-7. Sur papier, après avoir imaginé l'égalisation à 7, comme la réunion des différentes collections apparaît alors, on peut aussi penser à effectuer une division ou des soustractions successives de multiples de 4.

Cas général : il existe un gobelet qui contient déjà plus de $\frac{T}{4}$ *jetons*

– Considérons maintenant les valeurs numériques suivantes.



Après avoir égaliser le nombre de jetons à 4, il reste dans la boîte 20 jetons.

Si on sait que 20 = 4×5 et que l'on mobilise cette connaissance, on peut finir rapidement le partage en ajoutant 5 jetons dans chaque gobelet. Sinon, on peut poursuivre le partage de différentes façons :

– distribuer les jetons restant un à un (ou deux par deux au début) dans les gobelets, ce qui est le plus probable pour un élève de GS (si l'élève n'a pas de jeton à sa disposition, il peut les symboliser par des croix, comme on l'a observé en CE2) ;

– procéder par soustractions successives, en symbolisant éventuellement les jetons (procédure non disponible pour les élèves de GS et du début du cycle 2) ;
– remettre tous les jetons dans la boîte (réellement ou imaginer de le faire) et procéder à un partage en distribuant équitablement les jetons dans les gobelets, soit avec les jetons qui sont à sa disposition, soit en les symbolisant et en procédant par soustractions successives ou par distribution un à un.

Dans ce dernier cas, on voit bien que plus T est grand, plus les procédures par soustractions successives vont apparaître efficaces.

Cas général : après égalisation, il reste dans la boîte un nombre de jetons multiple de 4.

– Il resterait à étudier le cas où après avoir égaliser le nombre de jetons à 4, il reste dans la boîte un nombre de jetons non multiple de 4.

Quels choix pour un problème pour chercher destiné à des élèves de GS ?

Comme cela est perceptible dans les paragraphes précédents, le fait d'avoir des jetons, des gobelets et une boîte à disposition favorise les procédures de distribution au coup par coup des jetons, sauf lorsque le nombre total de jetons est dissuasif (T = 2024 par exemple !).

En GS, on proposera donc plutôt la situation avec des jetons et un nombre T adapté aux capacités des élèves[4], une distribution des jetons ayant déjà été commencée. Dans ce cas, avec une mise en oeuvre adaptée, le problème est un problème pour chercher comme nous l'expliquons ci-dessous en référence à la grille présentée dans la partie 1.

La mise en oeuvre proposée pour une GS

En GS, ce problème sera proposé sous la forme d'un atelier des six élèves. Le rôle de l'enseignant dans cet atelier est de présenter le problème aux élèves et de leur permettre de se l'approprier, de prendre la responsabilité de le résoudre. Aussi, un court temps d'appropriation personnelle du problème est souhaitable. Il semble plus difficile à ce niveau d'organiser des phases de débat, toutefois des moments d'échanges réels à propos de la résolution du problème sont possibles, comme nous l'avons observé, et souhaitables.

Après la présentation de la situation et un rapide temps d'appropriation du matériel et du problème nous avons proposé aux élèves de résoudre le problème, à deux, avec à disposition en commun jetons, gobelets et boîte. Le fait de constituer des groupes de deux nous est apparu naturel après l'observation des élèves. En effet, les groupes de quatre élèves ont tendance à se scinder en deux groupes de deux et tous les élèves n'ont pas accès au matériel ; dans les groupes de trois, souvent un élève est écarté du groupe.

Après un temps de recherche personnelle puis à deux, nous avons demandé aux élèves de dessiner comment ils avaient fait pour répondre à la question et d'expliquer à voix haute. Cette explication qui peut aussi prendre la forme d'une dictée à l'adulte permet d'avoir un peu accès à la démarche des élèves. L'atelier se termine par une mise en commun : les dessins des différents groupes sont affichés au tableau et l'enseignant demande à un élève de chaque groupe de dire comment ils ont résolu le problème. Si besoin, l'enseignant complète en s'appuyant sur

[4]Ce nombre est variable en fonction des élèves et de la période de l'année, nous laissons les enseignants le déterminer.

ses observations du travail des groupes et sur les déclarations des élèves. Les autres élèves sont invités à se prononcer sur la compréhension de la procédure et sur celle du dessin, ainsi que sur la validité des propositions des élèves. En général, plusieurs procédures ont été utilisées pour résoudre le problème, d'un groupe à l'autre, mais aussi quelquefois à l'intérieur d'un groupe, et la synthèse du travail porte sur cet aspect : il y a plusieurs façons d'arriver à la solution du problème, on peut utiliser celle que l'on veut.

Les caractéristiques du problème

Le problème est centré sur le développement de compétences méthodologiques et comme nous l'avons indiqué précédemment, plusieurs démarches sont possibles pour le résoudre. La situation est facile à comprendre pour les élèves. Pour augmenter la motivation des élèves, si nécessaire, l'enseignant peut ajouter un contexte au problème, par exemple :

> C'est l'anniversaire de Paul, sa maman prépare dans des petits bols des bonbons pour ses camarades. Il doit y avoir le même nombre de bonbons dans chaque bol. Elle n'a pas fini de faire le partage avant que les camarades de Paul arrivent. Aide-la à finir.

Cependant, nous avons observé que la situation avec des jetons et des gobelets motivait déjà suffisamment les élèves.

Le problème est inédit pour des GS mais les élèves disposent de suffisamment de connaissances pour le résoudre sans intervention majeure de l'enseignant. Il est aussi consistant. En effet, nous avons constaté que les élèves ne parviennent pas à le résoudre rapidement et doivent tester plusieurs procédures pour arriver à un partage équitable, en particulier, lorsque le nombre total de jetons n'est pas un multiple de quatre. Ce problème permet donc aux élèves d'élaborer une démarche pertinente, de faire et de gérer des essais successifs et de produire une solution personnelle. Les élèves imaginent facilement que le problème admet une solution et sont incités à recommencer.

Le fait de proposer aux élèves de travailler avec des vrais jetons, gobelets et boîtes permet à l'enseignant et aux élèves de vérifier leurs propositions, il y a validation des propositions des élèves, par opposition à évaluation des procédures par l'enseignant que l'élève devra croire sur parole. La validation permet de convaincre plus facilement l'élève que ce qu'il propose est correct ou pas.

Il est difficile en GS de parler d'argumentation et de débat, mais on peut considérer que la phase de mise en commun constitue déjà un début de travail sur le débat et l'argumentation.

Si ce problème est proposé, à la fin du cycle 2, en travail papier-crayon, avec des valeurs numériques adaptées il permet un travail d'anticipation. Au cycle 3, ce problème proposé en résolution papier-crayon avec des valeurs numériques dissuadant le recours au tâtonnement trivial pourra permettre d'aborder la notion de division euclidienne en incitant les élèves à procéder par soustractions successives et utilisation de répertoires multiplicatifs. Dans ce cas, le problème correspond à une situation-problème. Si l'élève connaît déjà la division euclidienne, il s'agira d'un problème d'entraînement à la reconnaissance de situation de partage (équitable) et à l'utilisation de la division euclidienne.

2. « Le pavé bicolore », une création du groupe

Voici un problème pour chercher dans le domaine géométrique destiné aux élèves du cycle 3. Ce problème qui est une création du groupe a été testé dans deux classes de CE2 : à l'école Jean Jaurès de Nantes et à l'école Henry Simon de Saint Hilaire de Riez.

La situation

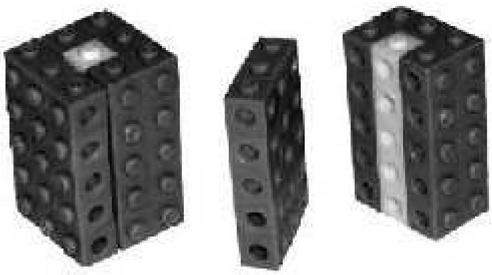
L'objet central de ce problème est un pavé droit (ou parallélépipède rectangle) composé de petits cubes de deux couleurs différentes (jaunes et verts par exemple) comme sur les photos de la figure 10.

Les cubes jaunes et verts sont assemblés en respectant la règle suivante : si un cube jaune est apparent sur l'une des faces du pavé, cela signifie qu'il y a une « ligne » de cubes jaunes qui traverse le pavé. Autrement dit, si on enfonce une aiguille dans le cube jaune qui est apparent et qu'on la fait ressortir en face, tous les cubes traversés sont jaunes, comme le montre la photo du pavé ouvert.

Pour les élèves il va s'agir de déterminer le nombre de cubes jaunes qu'il y a dans le pavé, sans l'ouvrir bien sûr, en raisonnant uniquement à partir de la vue du pavé.

Le premier exemple donné ici est relativement simple car il n'y a pas d'intersection mais cela devient plus complexe dès que des lignes de cubes jaunes s'entrecroisent comme dans les pavés 3 et 4 ci-dessous. On peut aussi complexifier le problème en considérant un pavé plus grand (base et hauteur constituées de plus de petits cubes).

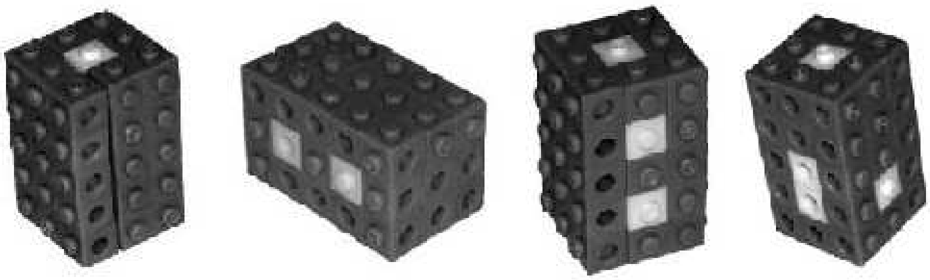
FIG. 10 – Pavé fermé et ouvert



Analyse a priori

Ce problème se situe à la fois dans le champ de la géométrie dans l'espace et dans le champ numérique. En effet, il s'agit de travailler sur un pavé droit, la notion d'intersection de droites dans l'espace qui est sous-jacente, les différentes représentations « en coupe » d'un solide mais aussi sur le dénombrement d'objets. Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème, nous détaillons ci-dessous celles que nous avons recensées pour des pavés droits de dimensions 5 cubes $\times 3$ cubes$\times 3$ cubes comme les pavés 1, 2, 4 et 5

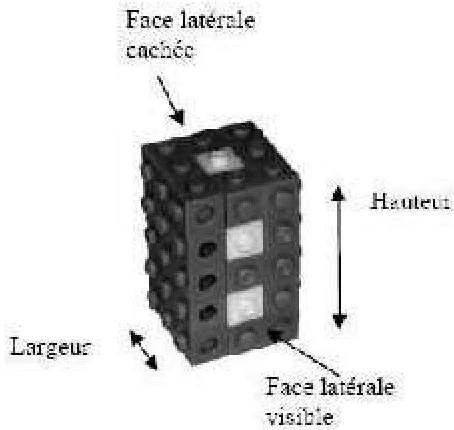
FIG. 11 – Pavés 1, 2, 3, 4



Différentes procédures de résolution possibles

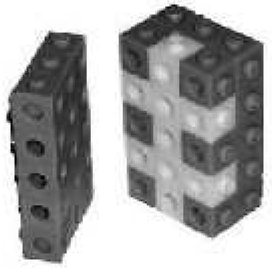
Etant données les dimensions choisies pour ce pavé, une première façon de faire est de dénombrer d'abord les cubes jaunes à l'intérieur du cubes et situés sur des hauteurs du pavé. Par exemple, pour le pavé 1, il s'agit de la bande de 5 cubes visibles sur la photo du pavé ouvert sur la figure 12. On y ajoute ensuite, les cubes jaunes visibles sur les autres faces. Par exemple, pour le pavé 2 cela donne 5 + 2 + 2 (cubes jaunes sur la hauteur à l'intérieur du pavé + ceux visibles sur la face latérale visible tournée vers nous + ceux visibles sur la face latérale cachée).

FIG. 12 –



Cette procédure fonctionne avec les dimensions choisies pour le pavé car les cubes jaunes sont soit apparents soit sur la ligne de cubes jaunes intérieure au pavé. Mais elle est mise en défaut dès qu'une base du pavé est plus grande que 3 cubes sur 3 cubes.

Une autre façon de faire est de dénombrer, dans un premier temps, tous les cubes jaunes qu'il y aurait dans le pavé s'il n'y avait pas d'intersection, soit 5 (nombre de cubes jaunes sur la hauteur à l'intérieur du pavé) + 3 +3 (nombre de cubes jaunes dans la largeur) pour le même pavé. Ensuite, on retranche de cette valeur le nombre d'intersections que l'on imagine, soit 2 dans notre cas.



On peut aussi procéder par coupe imaginaire : on imagine le découpage du pavé par tranches de 3 cubes sur 3 ou de 3 cubes sur 5. On dénombre ainsi les cubes jaunes pour chaque tranche, ce qui évite d'en compter certains deux fois et d'avoir à anticiper le nombre d'intersection. Si on découpe par tranche de 3 cubes sur 5 le pavé 3, on dénombre 0 + 9 + 0 cubes jaunes.

Déroulement observé dans une classe de CE2

Pour donner au lecteur un aperçu des réactions des élèves face à ce problème, relatons le déroulement observé dans une classe de CE2. L'enseignante qui mène la séance fait partie du groupe IREM et a participé à l'élaboration du problème. Elle s'appuie sur un premier déroulement que nous avions envisagé.

La situation s'est déroulée au cours de deux séances rapprochées dans le temps (1er et 3 février 2005). Les élèves de cette classe ont l'habitude de travailler en groupe et ont déjà réalisé depuis le début de l'année des problèmes pour chercher.

Séance 1

Phase 1 : appropriation de la consigne et du principe de la tige

L'enseignante présente le pavé 1 et le principe de la tige à l'ensemble de la classe, depuis le tableau : «Voici un objet composé de cubes rouges et jaunes. Il n'y a pas de vide. Si je passe une tige là (en désignant un cube jaune de la face du dessus du pavé), elle va ressortir là (en désignant la face opposée) et au milieu elle ne traverse que des cubes jaunes ».

Les élèves disposent d'un pavé semblable par groupe de 4-5 ; ils n'ont pas le droit de l'ouvrir. Ils doivent trouver combien il y a de cubes jaunes dans le pavé. Ils travaillent individuellement sur ardoise. Le même travail est ensuite proposé avec le pavé 2.

Cette *phase se déroule rapidement. Pour le pavé 1, tous les élèves sauf une trouvent une réponse correcte. Pour le pavé 2, tous les élèves donnent une réponse correcte. Il semble donc que les élèves ont compris le principe de la tige qui traverse. Les difficultés qu'ils rencontreront par la suite devraient uniquement être liées à des questions d'intersection.*

Phase 2 : le problème des intersections

L'enseignante présente le pavé 3 et demande combien il y a de cubes jaunes à l'intérieur.

Les réponses données par les élèves sont 11, 12, 9, 30 (un élève), 10, 17. Nous observons les procédures suivantes chez les élèves :

a)compter les cubes visibles et ceux qu'on imagine à l'intérieur du pavé sans tenir compte des intersections (5 + 3 + 3 = 11) ;

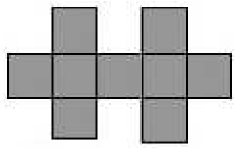
b)compter le nombre de cubes sur la hauteur (5) et ajouter les cubes jaunes visibles sur les autres faces (5 + 2+2 = 9) ;

c)compter les cubes visibles et ceux qu'on imagine à l'intérieur du pavé en tenant compte des intersections (5 + 3 + 3 -2 = 9).

Notons qu'aucun élève ne compte que les cubes jaunes visibles (6). L'élève qui répond 30 a probablement effectué l'opération 3 ? 2 ? 5 : confusion entre addition et multiplication ? Les valeurs 12 et 10 sont probablement obtenues en utilisant les procédures a et b, avec des erreurs de dénombrement ou de calcul.

Ensuite, pour valider les réponses des élèves, l'enseignante ouvre le pavé en enlevant une tranche. Elle envoie aussi une élève au tableau dessiner la coupe du pavé (figure13) et laisse les élèves observer le schéma sans rien ajouter à propos des intersections.

FIG. 13 – **Dessin au tableau**



Ce dessin permet aux élèves de visualiser l'organisation des cubes jaunes dans le pavé et de prendre conscience du problème des intersections. Toutefois, il est aussi possible qu'il oriente les élèves vers la réalisation d'un dessin pour la résolution du problème.

Phase 3 : le « vrai problème », production individuelle sur le pavé 4

L'enseignante présente le pavé 4 aux élèves et leur demande de trouver combien il y a de cubes jaunes à l'intérieur. Les élèves posent des questions : est-ce que c'est truqué ? est-ce qu'il n'y a que des cubes jaunes ? est-ce qu'on peut faire un dessin ? est-ce qu'on peut colorier ?

Les élèves disposent d'un cube par table et doivent donner une explication individuelle sur feuille quadrillée type « Seyès ».

Nous observons chez les élèves différentes procédures.

Certains ne tiennent pas du tout compte des intersections et additionnent tous les cubes jaunes qu'ils imaginent à partir des faces, sans faire de schémas (figure 14).

La plupart des élèves font des schémas qui leur servent de point d'appui pour dénombrer. Ils correspondent soit à des « extractions » de cubes jaunes, soit à des vues des différentes faces qui

FIG. 14 – **Dénombrement des cubes jaunes à partir des faces, sans prise en compte des intersections**

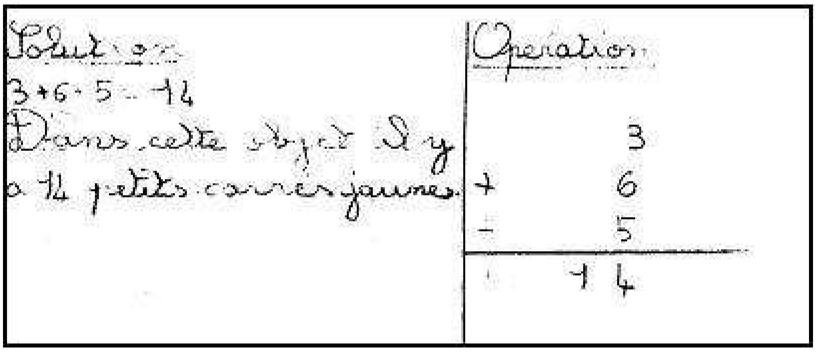


FIG. 15 – **« Extraction » des cubes jaunes et représentation des différentes faces**

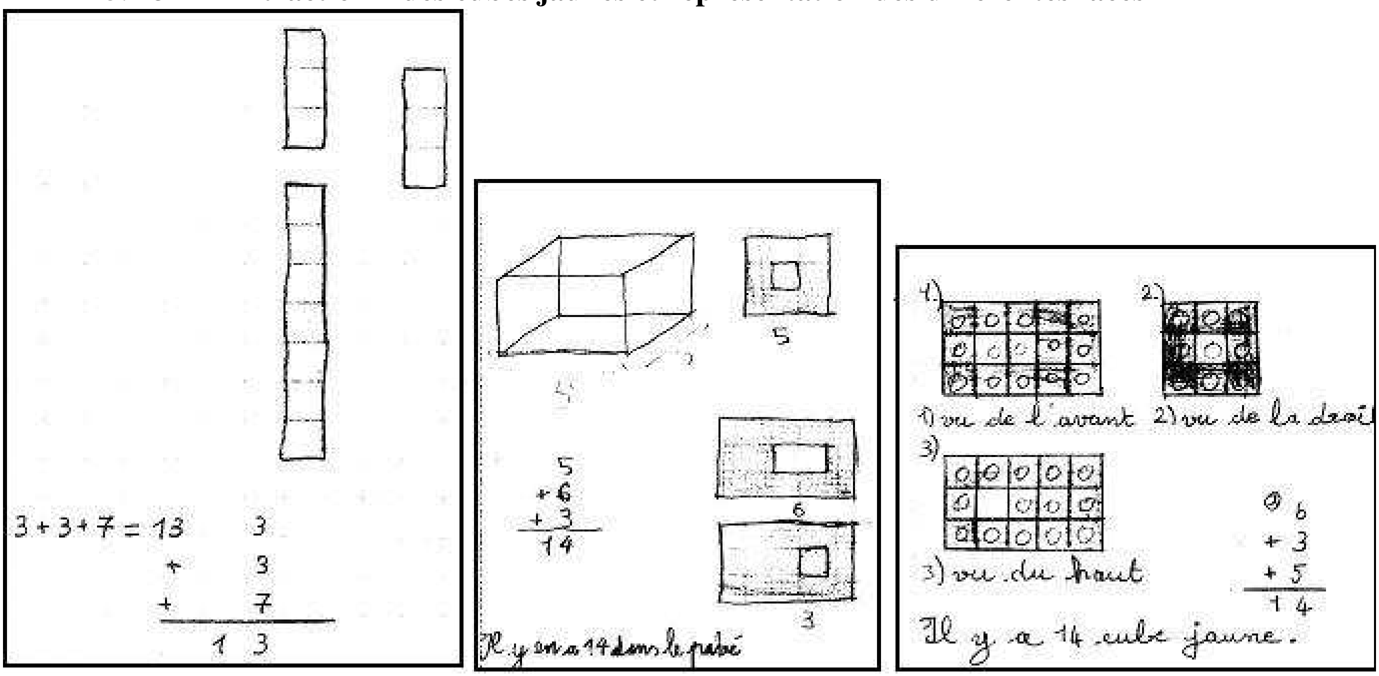
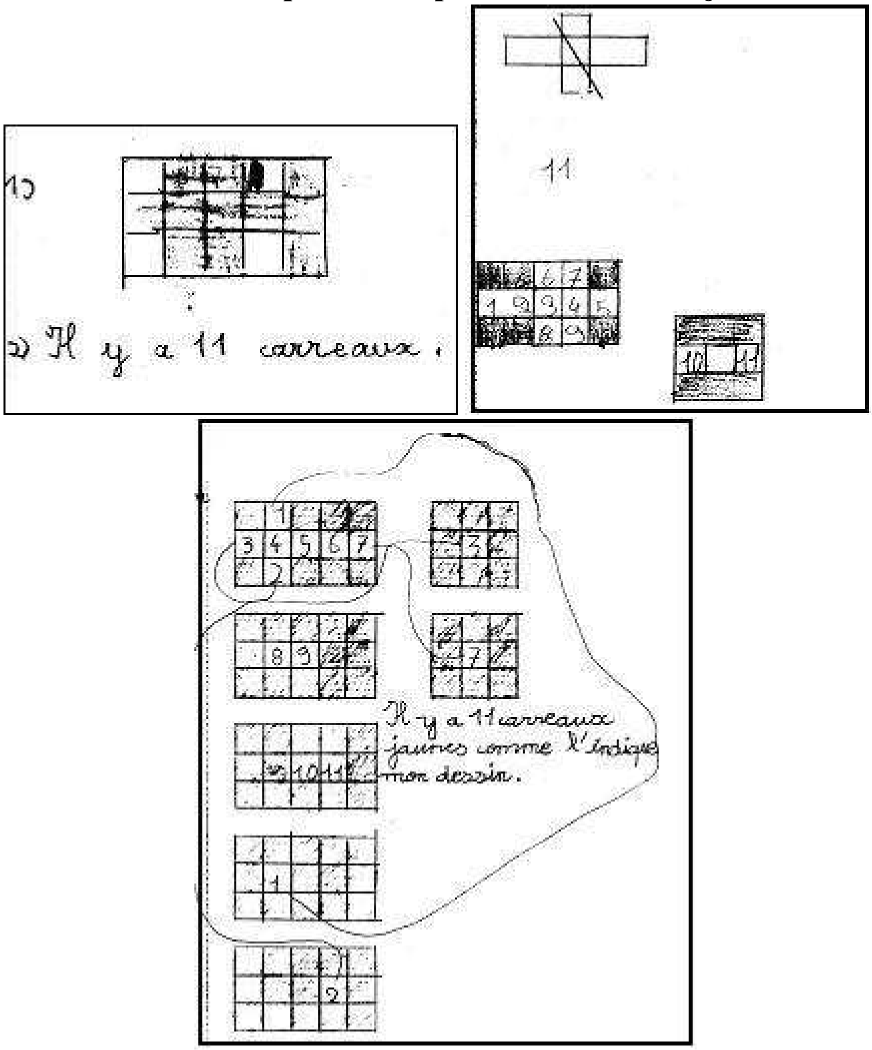


FIG. 16 – **Coupes avec déplacement de cubes jaunes**



ne mettent pas en évidence les intersections. dans ce cas, les élèves, en général, ne les prennent d'ailleurs pas en compte (figure 15)

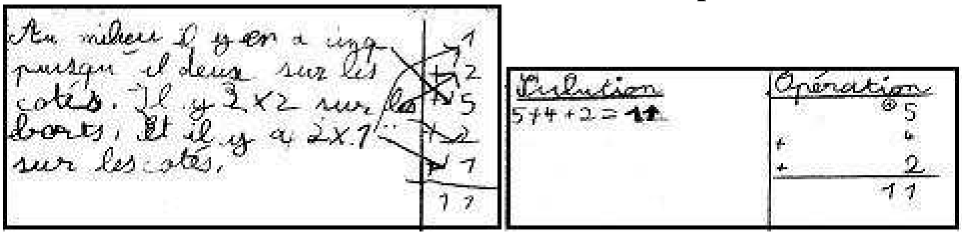
D'autres élèves représentent une coupe du pavé avec déplacement de certains cubes, ce qui leur permet de ne pas compter deux fois les intersections. Parmi eux, certains numérotent même les cubes jaunes, au lieu de les colorier simplement, de façon à ne pas les compter deux fois (figures 16).

D'autres comptent d'abord le nombre de cubes jaunes à l'intérieur dans la hauteur et ajoutent ensuite les cubes jaunes apparents sur les autres faces. Ils utilisent une procédure qui est correcte ici mais fausse dans le cas général. Dans ce cas ils ne font pas de schéma mais seulement des opérations. Le problème des intersections est pris en compte différemment avec cette procédure (figure 17.

A ce stade, nous notons aussi certaines difficultés :

- *les élèves ne disposent pas toujours du vocabulaire adéquat pour expliquer la façon dont ils dénombrent, les mots "face" et "arête" peuvent par exemple être non connus ou mal connus ;*
- *perte de temps liée au fait de faire des dessins et à l'envie de colorier pour certains ;*
- *représentation des différentes faces, mais difficulté à les nommer pour les désigner.*

FIG. 17 – **Dénombrement des cubes intérieurs puis exterieurs**


Au milieu il y en a cinq puisqu'il deux sur les cotés. Il y 2×2 sur les borts, Et il y a 2×1 sur les cotés.

1
2
5
2
1
11

Solution
5+4+2=11

Opération
5
4
+ 2
11

Phase 4 : travail en groupe sur le pavé 4

Les groupes sont constitués en fonction des productions des élèves dans la phase 4 de la façon suivante :

a)élèves utilisant des opérations mais pas de schémas ;

b)élèves s'appuyant sur des schémas « avec déplacement » de certains cubes ;

c)élèves utilisant des représentations des différentes faces avec réponse correcte ;

d)élèves s'appuyant sur des schémas avec numérotation des cubes jaunes ;

e)élèves ayant réalisés des schémas incorrects et ayant des difficultés ;

f)élèves ayant réalisés des schémas « divers ».

A l'intérieur de chaque groupe, les élèves doivent prendre connaissance du travail de chacun et se mettre d'accord pour réaliser une affiche dont le but est de montrer aux autres élèves que leur réponse est la bonne. Il s'agit de convaincre les autres grâce à l'affiche. Les affiches doivent indiquer le résultat trouvé et la façon dont les élèves ont trouvé. L'enseignante demande d'abord de réaliser un brouillon d'affiche sur feuille, puis une affiche. Le brouillon permet de ne pas gaspiller trop d'affiche, mais allonge la durée d'attention demandée aux élèves.

Dans le groupe nous observons, les déroulements suivants :

- les élèves échangent leurs feuilles et s'expliquent mutuellement leur travail ;

- tous les élèves d'un groupe expliquent à un élève ;

- conflit entre élèves / incompréhension dont l'origine est un problème de vocabulaire.

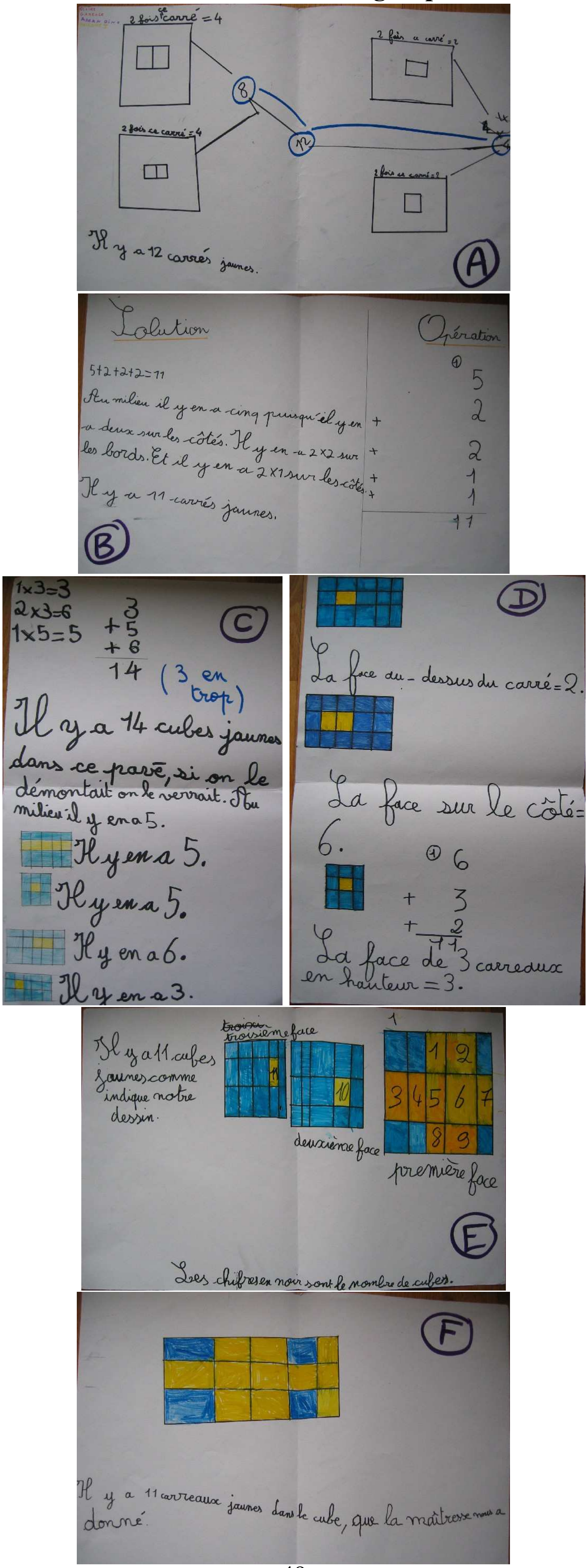
Séance 2 : mise en commun et débat à partir des affiches, synthèse

Les travaux des différents groupes (figures 18) sont repérés par des lettres et affichés au tableau.

L'enseignante demande aux élèves de se regrouper autour du tableau pour prendre connaissance des affiches et dire celle(s) qu'ils comprennent, celle(s) qu'ils ne comprennent pas. Lorsque tous les élèves ont lu les affiches, certains réagissent : ils expliquent ce qu'ils ont compris ou n'ont pas compris. Cela permet d'abord de rectifier certaines affiches puis de voir que plusieurs représentations et procédures permettent d'aboutir à la solution. Ainsi, la mise en commun permet aux élèves d'échanger à partir des écrits et d'instaurer un petit débat à propos des procédures et modes de représentation utilisés. La séance se termine sur l'idée, partagée par les élèves, que pour compter le nombre de cubes jaunes, on peut imaginer de découper le pavé, en tranches, « comme un ananas » et qu'il y a différentes façons de procéder pour cela.

L'enseignante s'assure que les élèves sont convaincus qu'il y a bien 11 cubes jaunes dans le pavé et propose de démonter un pavé pour « voir ».

FIG. 18 – **Affiches des groupes**



Prolongement possible

A l'issue de la séance, l'enseignante propose aux élèves de construire, à destination des CM2 de l'école, des problèmes similaires : les élèves construisent des solides bicolores en respectant la même règle que dans le problème et demandent aux CM2 de trouver le nombre de cubes jaunes à l'intérieur des solides.

L'avis des élèves

L'enseignante a demandé aux élèves d'écrire sur une feuille ce qu'ils ont pensé de ce travail. Globalement les élèves ont apprécié cette séquence, ils sont même très enthousiastes à l'idée de proposer des problèmes difficiles aux CM2. Leur avis concernant la difficulté est assez variable : pour certains, le problème était trop facile, pour d'autres trop difficile.

Par ailleurs, les élèvent notent assez massivement la longueur de la première séance et l'aspect rébarbatif de devoir effectuer d'abord une production commune sur feuille de papier puis une affiche reprenant cette production.

Quelques remarques par rapport au déroulement dans cette classe

A propos de vocabulaire de géométrie

Pour poser le problème, nous utilisons volontairement un vocabulaire très simple (objet et non pavé, pas d'utilisation non plus, par exemple, des mots « lignes » et « colonnes ») car il ne nous semble pas utile d'utiliser un vocabulaire élaboré pour répondre aux premières questions.

Mais dans la suite du travail, dans un des groupes, des discordes liées au vocabulaire utilisé apparaissent. Un élève nomme « face » ce qui est une face du pavé tandis qu'un autre le nomme « côté ». Les élèves sont passionnés l'un et l'autre par la recherche de la solution et ne parviennent pas à se comprendre. Finalement, pour calmer le jeu, l'enseignante proposera à un des élèves d'aller travailler seul, ce qu'il acceptera.

Il nous semble que pour éviter ces difficultés, une mise au point sur des questions de vocabulaire anticipées à partir des productions individuelles des élèves pourrait être effectuée avant le travail de groupe. C'est une raison supplémentaire de se donner du temps pour analyser les productions individuelles des élèves avant de constituer les groupes. Par ailleurs, lors de conflit de ce type l'enseignant peut tout à fait intervenir pour régler la question en donnant le vocabulaire adéquat. Cela ne dénature en rien le problème.

Un travail sur le vocabulaire pourra aussi être repris de façon plus conséquente au moment du prolongement de la situation : il s'agira alors de s'approprier le vocabulaire utile pour communiquer sans ambiguïté avec les CM2.

Enfin, cette situation apparaît finalement comme un moment où l'enseignant peut observer de façon privilégiée les connaissances des élèves dans le domaine de la géométrie.

Le principe de la tige

Les élèves comprennent très rapidement ce principe, contrairement à ce que nous avions imaginé au départ.

La présentation du pavé et l'induction de procédures de dénombrement

La façon dont on choisit de présenter le cube et le principe de la tige peut induire des procédures de résolution. Pour éviter d'orienter trop les élèves vers une seule façon de dénombrer les cubes jaunes, on peut varier les façons d'ouvrir le pavé (par exemple faire des tranches dans différents sens).

Le dessin au tableau et la question des intersections

L'enseignante a envoyé une élève au tableau pour dessiner l'intérieur du pavé et la disposition des cubes jaunes, car il semble difficile pour tous les élèves de voir l'organisation des cubes jaunes dans le pavé, certains sont physiquement trop loin. Ce faisant, on induit peut-être chez certains élèves l'idée que pour résoudre le problème il faut faire un schéma.

Par ailleurs, il nous semble important qu'à ce moment là l'enseignant ne parle pas de lui-même du problème des intersections. Cette question pourrait éventuellement être abordée si une majorité d'élèves trouvent 11 cubes jaunes pour le pavé 3.

Le travail sur un cas particulier, le pavé 3×3×5

Avec ce pavé, on développe une procédure locale de dénombrement des cubes jaunes correcte à domaine de validité restreint : dénombrer les cubes jaunes dans la rangée centrale (5) puis y ajouter le nombre de cubes jaunes que l'on peut imaginer à partir des faces jaunes apparentes sur les autres faces du pavé.

S'ils procèdent ainsi, les élèves ne travaillent pas du tout sur le problème des intersections. Pour éviter que les élèves se fassent une fausse idée de la façon de résoudre ce problème, il nous semble intéressant de leur proposer ensuite un travail semblable avec un pavé de mesures différentes (par exemple 4×5×4), surtout si l'on observe de nombreuses procédures de ce type dans la classe.

L'organisation temporelle

La première séance telle qu'elle a été réalisée dans la classe de CE2 est trop longue. Il serait préférable de l'arrêter après le premier travail individuel des élèves.

Les phases de recherche sont assez longues et les élèves avancent à des rythmes différents. Une des raisons est que cela prend du temps pour les élèves de dessiner les cubes et surtout, de les colorier. En effet, certains s'appliquent particulièrement dans cette tâche, tandis que d'autres symbolisent les couleurs. Pour éviter cela, on peut demander aux élèves de ne pas s'attarder sur le coloriage et leur suggérer, par exemple, de coder la couleur jaune avec une croix jaune.

La constitution des groupes

Les groupes que nous avons constitués comprennent 4 ou 5 élèves, mais il semble qu'il soit plus facile pour les élèves de travailler à 2 ou 3. En effet, l'enseignante a procédé pour plusieurs groupes à des scissions et recompositions, voire a permis à quelques élèves qui le voulaient de travailler seuls, parce que des discordes fortes sont apparues à l'intérieur de certains groupes ou parce que certains élèves ne trouvaient pas leur place dans le groupe. C'est une façon habituelle de procéder dans cette classe et il nous semble qu'il ne faut pas hésiter à procéder de cette façon car cela permet de redynamiser certains groupes, empêche d'autres de dysfonctionner et oblige de toute façon les élèves à réexpliquer leur procédure.

Nous avions choisi de regrouper les élèves en fonction de leur procédure, quel que soit le résultat trouvé, car nous pensions qu'il serait ainsi plus facile pour eux de se comprendre vue la proximité de leur raisonnement. Mais force est de constater que les élèves ont tout de même rencontré des difficultés de communication à l'intérieur des groupes. Une alternative consiste à regrouper les élèves qui trouvent le même résultat mais avec des procédures différentes, de façon à ce qu'à l'intérieur du groupe il y ait déjà des échanges d'arguments entre les élèves. De plus, cela empêche que certains élèves soient convaincus du résultat, puis de la façon de procéder d'un autre, par exemple parce qu'il est réputé meilleur. On peut aussi laisser les élèves se regrouper par affinité. Quoiqu'il en soit, il semble difficile de faire patienter les élèves pendant que l'on cherche à comprendre leurs productions et que l'on essaie de les regrouper de façon à ce que les échanges à l'intérieur d'un groupe soient fructueux. Il nous semble donc plus judicieux d'interrompre après la recherche individuelle.

Le choix du matériel (papier, couleur)

Nous avons utilisé du papier quadrillé type Seyès pour les feuilles individuelles et du papier blanc pour les affiches. Le travail sur papier quadrillé (5mm$\times$5mm et plus pour les affiches) faciliterait grandement la tâche des élèves et permettrait de gagner du temps.

Le coloriage des cubes est certainement à l'origine d'un allongement de la durée des phases, mais il nous semble important pour une meilleure compréhension des dessins des élèves. Néanmoins, on veillera à ce que cette situation ne se transforme pas en une simple situation de coloriage. L'essentiel est de permettre une réelle recherche.

La mise en commun et le travail sur les affiches

Les affiches ont été repérées par des lettres, cela facilite beaucoup la communication entre les élèves. Dans la classe observée, toutes les affiches ont pu être traitées, mais cela a pris beaucoup de temps. L'ordre de traitement des affiches a été choisi par les élèves.

Pour un déroulement plus rapide, dans une classe moins habituée à la recherche de problèmes, l'enseignant peut choisir une sélection d'affiches qui semblent différentes et intéressantes. Il peut aussi éventuellement choisir un ordre pour leur traitement.

Pour initier la mise en commun, l'enseignante demande aux élèves : « Quelles sont les affiches que vous comprenez la mieux ? Quelles sont celles que vous ne comprenez pas du tout ? Pourquoi ? » Cette consigne invite chacun des élèves à prendre connaissance des affiches et permet ainsi un engagement individuel dans la mise en commun. Elle participe aussi à rendre nécessaire le fait d'avoir une affiche claire, qui se comprend d'elle-même. Cela permet ainsi de donner à l'affiche un vrai rôle d'écrit de communication d'une recherche, même si dans les faits les élèves ont souvent besoin, à ce niveau, de préciser oralement ce qui est écrit sur l'affiche.

Le matériel à disposition pour le débat

Lors du débat, les élèves ont eu à plusieurs reprises recours au pavé, par exemple pour « montrer » aux autres à quoi correspondait ce qui était dessiné sur leur affiche. Comme l'objectif du problème n'est pas de faire un aquérir un vocabulaire par les élèves mais de leur permettre d'échanger et de débattre à propos de leurs raisonnements, il nous important d'avoir un pavé à disposition pour la mise en commun.

La conclusion du problème

Ici, elle porte essentiellement sur les différentes procédures utilisées par les élèves pour résoudre le problème. Mais, il serait aussi intéressant de dégager des éléments plus généraux. On peut introduire cette conclusion, par exemple, à la question : que faut-il retenir de ce problème ? Voici quelques uns des éléments que l'on peut pointer, en fonction des procédures des élèves : pour résoudre ce problème, on a utilisé un raisonnement et on n'a pas eu besoin d'ouvrir le pavé ; c'est un problème de géométrie dans l'espace mais on a réussi à le résoudre uniquement en faisant des dessins sur une feuille ; on n'a pas trouvé la réponse du premier coup, il a fallu « organiser » la recherche ; dans certains groupes, on ne se comprenait pas parce qu'on n'avait pas le même vocabulaire ; c'est pas toujours facile de comprendre les affiches des autres, c'est pourquoi il faut être très précis quand on réalise une affiche...

Une telle conclusion permet de pointer les éléments d'apprentissage pour les élèves. Cependant, dans une classe où les élèves résolvent régulièrement des problèmes pour chercher, on peut aussi procéder en demandant aux élèves, ce qu'il y a, par exemple, à retenir de commun à plusieurs problèmes.

Quelle activité de preuve pour les élèves ?

Comme prévu et souhaité, le débat amène les élèves à expliquer leur affiche et à argumenter à propos de la validité des propositions des différentes affiches. Les éléments qu'ils avancent sont de l'ordre de la preuve intellectuelle et c'est vers cela que l'on veut les conduire à travers ce type de validation. Or, à la fin du débat, la réponse au problème est validée avec l'ouverture du pavé, ce qui constitue une preuve matérielle. Il y a ici une petite contradiction entre l'objectif de la séquence et la réalisation effective. Pour éviter cela nous proposons de formuler plutôt les choses de la façon suivante : « D'après tout ce qui vient d'être dit, vous savez maintenant qu'il y a 11 de cubes jaunes. On peut ouvrir le pavé pour compter le nombre de cubes jaunes, mais normalement on n'a pas besoin de le faire car les schémas et les explications qui ont été donnés le prouvent. »

D'autres remarques sur le déroulement dans une autre classe

Dans l'autre classe de CE2 où nous avons testé ce problème, les élèves n'ont pas eu de souci de compréhension du principe de la tige. En revanche, le travail sur le pavé 4, travail individuel et réalisation de l'affiche, s'est avéré assez difficile pour certains. De ce fait, l'enseignante a mis à disposition des élèves des cubes, sur leur demande, et certains élèves ont reconstruit un pavé. Cette décision a permis aux élèves les plus en difficultés d'apporter une réponse au problème en utilisant une procédure personnelle adaptée à leur niveau.

En raison des difficultés rencontrées lors de la résolution du problème, la mise en commun et la synthèse ont aussi été un peu plus laborieuses : les méthodes de résolution retenues ont été choisies plutôt par élimination des arguments. Du coup, l'enseignante a conclu sur le résultat du problème et non sur les différentes méthodes utilisées par les élèves. Ce choix nous semble tout à fait raisonnable : les élèves n'étaient probablement pas prêts à entendre des choses plus générales.

Proposition pour une classe de cycle 3

Ces éléments nous permettent de proposer le déroulement suivant pour une mise en oeuvredans une classe de cycle 3.

Matériel à prévoir pour une classe de 28 élèves (7 groupes de 4 élèves)

- une ardoise par élève
- différents pavés : 7 exemplaires de chacun des pavés 1, 2, 3, 4
- de feuilles de brouillons, quadrillées 5 mm sur 5 mm
- de feuilles A3 quadrillées pour réaliser les affiches des groupes, une par groupe
- des feutres / des crayons de couleurs jaunes et verts (de la couleur des cubes)

Phases du déroulement

1/ Présentation du principe de la tige

Répartir les élèves par groupes de 4, indifféremment. Depuis le tableau, présenter aux élèves le problème et le principe de la tige à l'aide du pavé 1 : «Voici un objet composé de cubes verts et jaunes. Il n'y a pas de vide. Si je passe une tige là (en désignant un cube jaune du pavé), elle va ressortir là (en désignant la face opposée) et au milieu elle ne traverse que des cubes jaunes. Combien y'a t'il de cubes jaunes dans le pavé ? »

Distribuer un pavé par groupe d'élèves, les élèves ont le droit de toucher le pavé mais ne doivent ni l'ouvrir, ni le « démonter ». Ils répondent individuellement sur leur ardoise. L'enseignant ouvre le pavé et indique la bonne réponse.

Ensuite, le même travail que précédemment est proposé aux élèves, mais cette fois avec le pavé 2, de façon à s'assurer que tous les élèves ont compris le principe de la tige.

2/ Introduction du problème des intersections

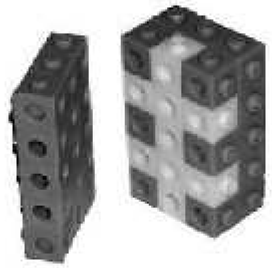
L'objectif de cette phase est de faire percevoir aux élèves la difficulté créée par les intersections, sans toutefois indiquer une procédure de résolution dans ce cas.

L'enseignant présente le pavé 3 et demande combien il y a de cubes jaunes à l'intérieur : « Voici un autre pavé construit sur le même principe que le précédent. Combien y a t-il de cubes jaunes à l'intérieur ? ».

Les élèves disposent d'un pavé par groupe qu'ils peuvent manipuler sans l'ouvrir ni le démonter. Ils répondent individuellement sur ardoise.

Pour valider les propositions des élèves, l'enseignant ouvre le pavé comme sur la figure 19puis compte avec eux le nombre de cubes jaunes.

FIG. 19 –



3/ Résolution individuelle du « vrai » problème

Les phases précédentes sont rapides, elles ont normalement permis aux élèves de comprendre la consigne et de percevoir la difficulté liée aux intersections. Maintenant, il s'agit de les laisser résoudre d'abord seuls, puis en groupe, un « vrai » problème.

L'enseignant présente le pavé 4 aux élèves et leur demande de chercher individuellement combien il y a de cubes jaunes dans le pavé et d'expliquer comment ils le savent : « Voici un nouveau pavé. Combien contient-il de cubes jaunes ? Vous allez chercher ce problème et expliquer comment vous le savez. C'est un travail individuel, vous travaillez sur une feuille. »

Cette phase ne doit pas être trop longue mais doit permettre à chacun des élèves de produire une réponse.

A la fin de cette phase, l'enseignant relève les productions des élèves et peut les utiliser pour constituer les groupes de travail de la phase 4. Il peut, par exemple, rassembler les élèves en fonction soit de leurs réponses, soit des procédures qu'ils ont utilisées pour répondre.

4/ Travail en groupe sur le problème

Les productions sont rendues aux élèves rassemblés en nouveaux groupes. Les élèves d'un groupe doivent se mettre d'accord sur le nombre de cubes jaunes qu'il y a dans le pavé 4 et faire une affiche qui explique et qui permet de convaincre les autres groupes qu'il y a bien ce nombre de cubes jaunes.

5/ Mise en commun à partir des affiches, débat

Lors de la séance suivante, les affiches des groupes sont présentées au tableau. L'enseignant demande aux élèves celles qu'ils comprennent le mieux, celles qu'ils ne comprennent pas et pourquoi ils ne comprennent pas. Les interventions des élèves appellent des explicitations de la part des groupes et un débat peut s'amorcer sur la validité des productions proposées. La mise en commun doit permettre *in fine* de mettre d'accord les élèves sur le nombre de cubes jaunes contenus dans le pavé.

6/ Synthèse

Au cours du débat, plusieurs procédures permettant d'aboutir vont normalement apparaître, ainsi que, probablement, l'erreur qui consiste à compter plusieurs fois le même cube. L'objet de la synthèse est de mettre en évidence qu'il y a plusieurs procédures possibles pour résoudre le problème et qu'on a intérêt de procéder avec méthode pour ne pas oublier de cube jaune et ne pas en compter deux fois non plus.

Par ailleurs, il nous semble aussi intéressant de mettre en évidence qu'il n'a pas été nécessaire de démonter le cube pour savoir combien il y avait de cubes jaunes : on peut trouver le nombre de cubes jaunes en procédant de façon organisée (par exemple en imaginant et représentant les coupes du pavé). Néanmoins, après cela, si les élèves le souhaitent, il est possible d'ouvrir le pavé pour compter effectivement le nombre de cubes jaunes.

Conclusion sur ce problème : au cycle 3, est-ce un problème pour chercher ?

Le problème du pavé bicolore ne vise pas la construction de connaissances mathématiques curriculaires. Il s'agit d'amener les élèves à s'organiser pour le dénombrement des cubes jaunes (pour ne pas en oublier et ne pas en compter deux fois) et à savoir expliquer de façon convaincante leur procédure.

Au cycle 3, les élèves ne disposent normalement pas, sauf grand hasard, de procédure de résolution de ce problème ; en ce sens, le problème est original. La réponse n'est pas évidente mais les élèves perçoivent d'emblée qu'il a une solution. La mise en oeuvre proposée leur permet de se faire une représentation du problème ; en particulier, la phase 2 met en évidence le problème posé par les intersections, sans toutefois le résoudre. Ainsi, il nous semble que ce problème devrait intéresser les élèves tout en restant à leur portée.

Par ailleurs, la mise en oeuvre proposée devrait permettre aux élèves d'échanger, à l'intérieur des groupes et en groupe classe, au sujet de la validité des procédures et réponses proposées. Ces échanges devraient amener les élèves à avancer des justifications de leur proposition.

Ainsi, ce problème correspond pour nous à un problème pour chercher dont la résolution nécessite une organisation et / ou le recours à une représentation originale du problème.

Conclusion

Cette brochure contribue modestement à ouvrir le vaste champ des “problèmes pour chercher” à l’école primaire. La première partie explore les contours théoriques de ces problèmes en les situant par rapport à d’autres types de problèmes répertoriés en mathématiques et donne des indications sur les problèmes effectivement proposés dans deux collections de manuels. La seconde partie vise à présenter et analyser quelques problèmes, dont une crétation du groupe, que nous avons “éprouvés” dans des classes. Ces élèments peuvent être, nous semble-t-il, des ressources pour tout enseignant désireux de faire vivre des “problèmes pour chercher” dans sa classe.