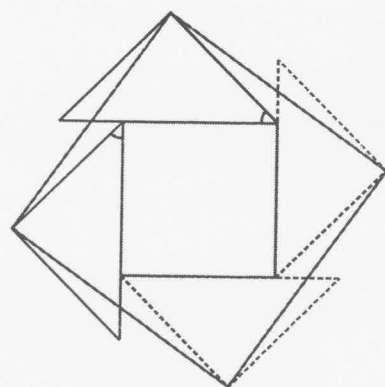
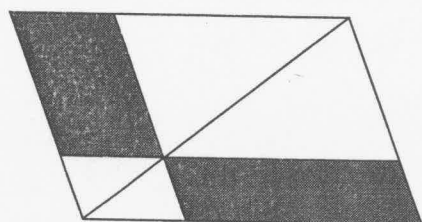
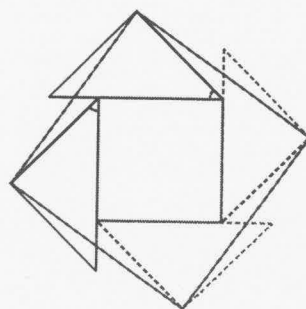
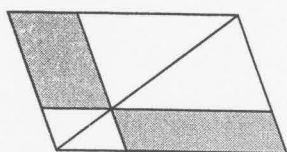
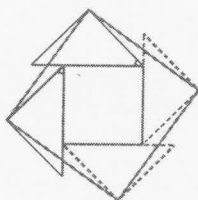
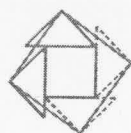


Démontrer avec les aires

Fascicule n° 2

Anne Gravier & Martine Janvier



Démontrer avec les aires

Juin 2001

Fascicule n° 2 par Anne Gravier & Martine Janvier

" Parce que nous sommes persuadées que l'apprentissage de la démonstration mathématique est indispensable pour le développement intellectuel des enfants ; parce que nous nous sommes, nous aussi, heurtées aux difficultés grandissantes que cet acte de raisonnement représente pour les élèves, nous avons mis en place dans nos classes des activités géométriques qui rendent la démonstration incontournable mais avec des outils que l'on peut manipuler. Manipulation concrète pour les plus jeunes puisqu'il s'agit de découpages, collages, juxtapositions ; puis, en abandonnant peu à peu les ciseaux et la colle, manipulation plus abstraites de surfaces équivalentes non mesurées. Trois objectifs : traiter les sujets du programme ; mettre l'élève en situation de recherche et le convaincre de la nécessité de justifier sa réponse ; simplifier cette justification en n'imposant pas tout de suite l'écrit, mais en privilégiant, au moins jusqu'en 4ème, la parole voire le geste. "

Déjà paru (octobre 2000)

Fascicule n° 1 par Henry Plane

" L'aire, cette qualité des surfaces planes délaissée, semble-t-il, en fin de 20ème siècle, est un outil mathématique. On constatera dans ces pages, que le calcul des superficies et l'usage des formules apparaissent peu. Par contre, à travers les jeux de figures équivalentes - aires égales - et de figures semblables - rapport d'aires - , la recherche et l'usage des liens entre les aires de deux ou plusieurs figures sont mis en grande pratique pour inciter à la réflexion. "

En préparation

Fascicule n° 3 par Dominique Bénard

Éclairage historique sur les enjeux mathématiques d'une démonstration sur et avec les aires. Soit la géométrie du collège revisitée avec comme fil rouge la problématique de la mesure.

INTRODUCTION

Ce fascicule présente le compte-rendu d'une recherche effectuée à l'IREM des Pays de Loire et expérimentée par deux professeurs de mathématiques enseignant dans le même collège.

Alors que de plus en plus de nos élèves rejettent les contraintes scolaires, que le nécessaire apprentissage pour l'utilisation des outils informatiques s'ajoute aux charges d'enseignement et que, au nom d'un réalisme utilitaire on nous rappelle notre devoir d'aller à l'essentiel, la question se pose avec acuité : la démonstration fait-elle encore partie de ce que nous avons à enseigner pendant nos classes de mathématiques ? Cette question doit être posée ; comme toute question elle suscite un débat qui nous oblige à une remise en cause de nos pratiques et au développement d'une argumentation.

Parce que nous sommes persuadées que la réponse est oui et même que l'apprentissage de la démonstration mathématique est indispensable pour le développement intellectuel des enfants, ; parce que nous nous sommes, nous aussi, heurtées aux difficultés grandissantes que cet acte de raisonnement représente pour les élèves, nous avons mis en place dans nos classes des activités géométriques qui rendent la démonstration incontournable mais avec des outils que l'on peut manipuler. Manipulation concrète pour les plus jeunes puisqu'il s'agit de découpages, collages, juxtapositions ; puis, en abandonnant peu à peu les ciseaux et la colle, manipulation plus abstraite de surfaces équivalentes. Ces activités prétendent répondre à trois objectifs : traiter les sujets du "programme" ; mettre l'élève en situation de recherche et le convaincre de la nécessité de justifier sa réponse ; simplifier cette justification en n'imposant pas l'écrit mais privilégiant -au moins jusqu'en 4ème- la parole, voire le geste .

Bien sûr les activités décrites dans cette brochure n'envisagent pas tous les aspects de la démonstration et il faudra

l'aborder aussi en algèbre, en arithmétique etc... Par principe il ne sera ici pas question de mesure et tous les thèmes seront géométriques ; néanmoins, on pourra utilement en déduire des méthodes de calculs d'aires et des règles de calculs algébriques. Une grande partie du programme de collège sera ainsi travaillé.

On trouvera dans ces pages une proposition de progression, des exercices et des possibilités de prolongements ainsi que des séquences de travail et des comptes-rendus d'activités. En effet, nous avons fait tous ces exercices avec nos classes et nous pouvons témoigner de nos difficultés ou satisfactions mais aussi de réactions d'élèves. Il ne s'agit absolument pas de méthodes "clé en main", simplement des propositions qui après doutes, essais et réflexions, nous apparaissent comme pertinentes.

Le choix des exercices n'est évidemment pas dû au hasard ; c'est le fruit d'une collaboration avec Henry Plane qui a été notre "éclaireur" ; vous retrouverez de nombreux exercices proposés par lui dans le fascicule 1. Les Eléments d'Euclide font partie du paysage culturel de tout professeur de mathématique mais nous n'en avons souvent qu'une idée très floue. Nous aimerions tous "faire" de l'histoire des math avec nos élèves mais nous hésitons souvent, nous interrogeant sur l'opportunité et le contenu. Les exercices développés ici nous ont permis d'attirer l'attention de nos élèves sur le fait que les mathématiques ne constituent pas une connaissance révélée mais sont le fruit d'un travail de recherche et de construction aux racines fort lointaines.

Enfin, il semble que la référence à Euclide pour traiter le programme de collège soit dans l'air du temps : de nombreux exercices de ce style figurent dans les manuels, l'histoire des math devient à la mode ; preuve sans doute que beaucoup d'enseignants partageront notre intérêt pour le travail que nous allons proposer à leur lecture.

Les cinq chapitres de cette brochure regroupent des exercices qui pourront être traités dans les quatre classes de collège. L'ordre dans lequel ils seront faits et le degré de difficulté dépendra du niveau auquel ils s'adressent. Nous vous livrons ici le résultat de notre expérience mais ce résultat n'est pas définitif : chaque année nous révisons des contenus, une progression ; ce que nous vous proposerons ce sont les pistes qui, aujourd'hui, nous semblent les plus satisfaisantes.

Le chapitre 1, PUZZLES, PAVAGES etc... est une prise de contact avec la surface en tant qu'objet que l'on peut déplacer, juxtaposer, retourner. L'expérience nous dit que, pour à peu près la moitié des élèves mis face à une difficulté, il n'est pas certain qu'un triangle (ou toute autre figure) occupe la même surface quand on le déplace. Ce qui renforce l'idée qu'il est indispensable de travailler, même en géométrie, sur ce fameux signe "=" et sur cette notion de "choses identiques". Dans le but de préparer la comparaison des surfaces sans calcul, il nous a semblé utile de faire manipuler ces objets - cela dès la sixième- par des exercices de puzzle ou tangram. Ils permettent de se familiariser avec les déplacements, les mouvements concrets et aident à prendre conscience que, justement, un triangle qui bouge ne se déforme pas et donc occupe la même surface. Ce sera aussi l'occasion de constater que des figures formées des mêmes pièces mais selon un arrangement différent, occupent elles aussi la même surface.

Le chapitre 2, PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES, permet d'installer les théorèmes qui seront ensuite utilisés ; comme tel, il s'adresse en particulier aux élèves de cinquième. Son propos sera justement de rappeler, en application des symétries, des situations où des aires peuvent être, sans ambiguïté, déclarées superposables mais surtout d'établir quelques règles simples permettant de dire que deux surfaces non superposables sont équivalentes, c'est-à-dire de même aire. Enfin on s'interrogera sur le rapport de deux aires.

Dans les chapitres suivants, TRAPEZES ET PARALLÉLOGRAMMES, QUADRATURES, DROITES DU TRIANGLE, on trouvera des exercices permettant de démontrer la plupart des propriétés et des "grands théorèmes" du programme et cela sans rupture de méthode. Peu à peu se dégagera l'idée que les qualités et propriétés des figures obtenues par les manipulations décrites plus haut doivent être mises en doute et émergera la nécessité de démontrer. Pour favoriser le doute, on proposera des situations où l'évidence d'une forme est mise en défaut par la démonstration. Si les chapitres 1 et 2 méritent l'ordre dans lequel ils sont placés, les trois derniers ne font que regrouper des sujets analogues ; on pourra y trouver des exercices pour chaque classe.

Notation

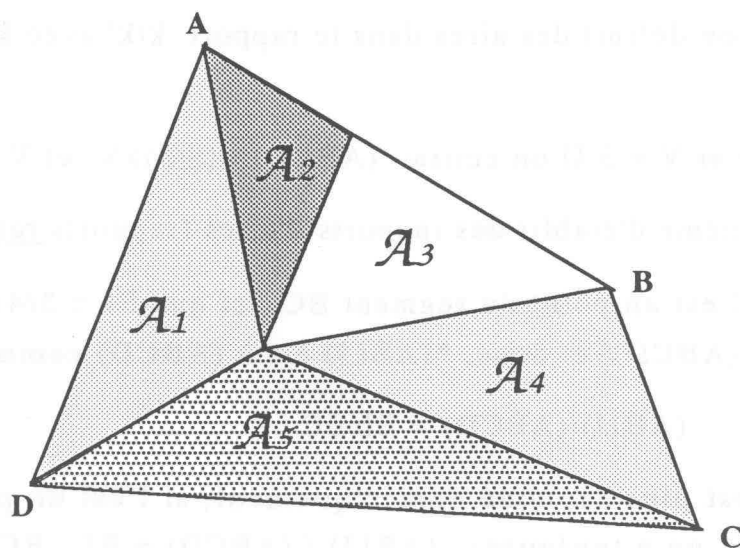
*Il convient de s'accorder sur les notations
utilisées : Si deux triangles ABC et TRI,
par exemple, occupent la même surface, on
dira qu'ils ont la même aire et on écrira*

$$(ABC) = (TRI)$$

Dans ce premier chapitre, des exercices de manipulation de surfaces (découper des figures, les décomposer en plusieurs pièces, reconstituer d'autres figures par juxtaposition...) sont à proposer aux élèves dès la sixième afin qu'ils se persuadent de la permanence de l'aire. L'étude de contre-exemples apprend à se méfier des "évidences". Ils permettent une approche intuitive (en 6^e) mais aussi peuvent être le point de départ d'une démonstration ou de calculs. Beaucoup d'entre eux gagneront à être proposés en travail de groupe; ils seront l'occasion de discussion et argumentation. C'est ainsi que certains ont été proposés comme épreuves du rallye mathématique de la Sarthe.

On définira clairement le terme "pavage" et on fera remarquer que les pièces d'un puzzle ou d'un tamgram illustrent cette définition.

schéma 1



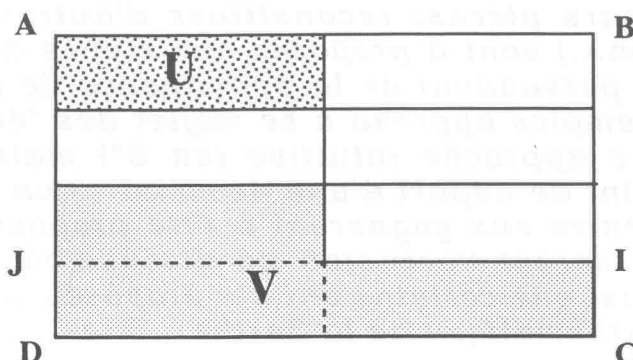
Sur le schéma 1, les cinq surfaces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}_5$ réalisent un pavage de la figure $\mathcal{F}$ d'aire $\mathcal{A}$

Ce qui permet de définir **des opérations sur les aires**:

On écrira: $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 = \mathcal{A}$ qui est donc la "somme" des cinq aires. On déduit, par analogie avec l'addition des nombres, une autre opération qu'on appellera "soustraction" et, par exemple: $\mathcal{A}_5 = (\text{ABCD}) - \mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$

On pourra définir ainsi la moitié ou le double d'une aire, le tiers ou le triple d'une aire et donc, si k est entier, des aires dans un rapport k ou $1/k$

schéma 2



Ainsi sur le schéma 2, le rectangle étant pavé par huit petits "rectangles-unité", on écrira: $(ABCD) = 8.U$ et $U = (1/8).(ABCD)$

Par extension, on définit des aires dans le rapport k/k' avec k et k' entiers non nuls.

Dans l'exemple si $V = 3.U$ on écrira: $(ABCD) = (8/3) \times V$ et $V = (3/8) \times (ABCD)$

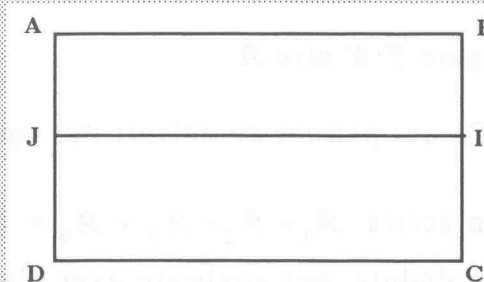
On est donc à même d'établir des rapports d'aires (rapports rationnels)

Mais aussi: si I est un point du segment BC , tel que $BI = 3/4 \times BC$, on obtient $(ABIJ) = (3/4) \times (ABCD)$ et donc, " **$(ABIJ)$ est à $(ABCD)$ comme BI est à BC** "

ce qu'on écrira: $(ABIJ)/(ABCD) = BI/BC$

Le rapport n'est plus exprimé numériquement; si I est un point quelconque du segment BC , on a toujours: $(ABIJ) / (ABCD) = BI / BC$

Deux rectangles ayant un côté commun ont des aires dans le même rapport que leurs autres côtés



Exercice I-1-

1) Tracer quatre triangles rectangles superposables; les découper et les positionner comme sur le schéma 3 pour constituer le carré ABCD. Quelle est la nature de IJKL?

2) Par glissement on déplace les triangles 2 et 3 comme indiqué sur le schéma 4. Quelle est la nature de IBPM? de NPCK?

3) Trouver une relation entre (IJKL), (IBPM) et (NPCK)

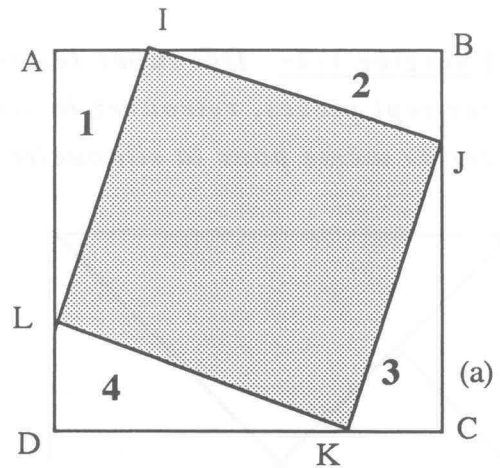


schéma 3

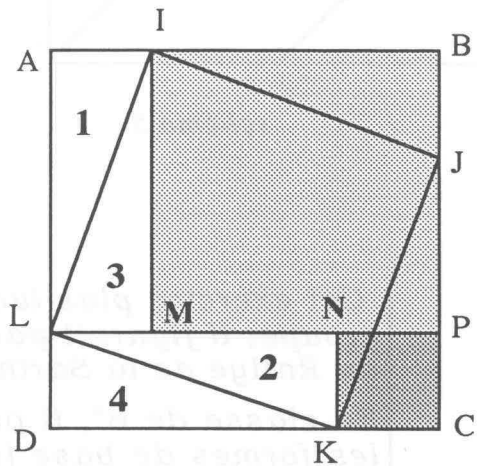


schéma 4

Solutions:

a) Montrons que IJKL est un carré. En effet, ses quatre côtés sont les hypoténuses des quatre mêmes triangles; ils sont égaux donc IJKL est un losange. Les angles AIL et BIJ sont complémentaires donc l'angle LIJ est droit et IJKL est bien un carré.

b) IBPM et NPCK ayant trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux sont deux carrés

c) Le carré IJKL est la "différence" entre le grand carré et la somme des quatre triangles: $(IJKL) = (ABCD) - 4 \times (AIL)$

et aussi la somme des deux petits carrés: $(IBCKNM) = (ABCD) - 4 \times (AIL)$

Conclusion: le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

Selon le niveau auquel on s'adresse, les questions seront adaptées et le travail sera plus ou moins approfondi:

- en 6°: reconnaître les figures et remarquer l'égalité des surfaces
- en 5°: démontrer qu'un quadrilatère est un carré et établir l'égalité des surfaces
- en 4°: exploiter la configuration pour exprimer le théorème dit "de Pythagore"

Exercice I-2- Découper les sept pièces qui forment le carré. A l'aide de ces sept pièces, retrouvez la silhouette (a) dessinée ci-dessous. Recommencer de même pour la silhouette (b)

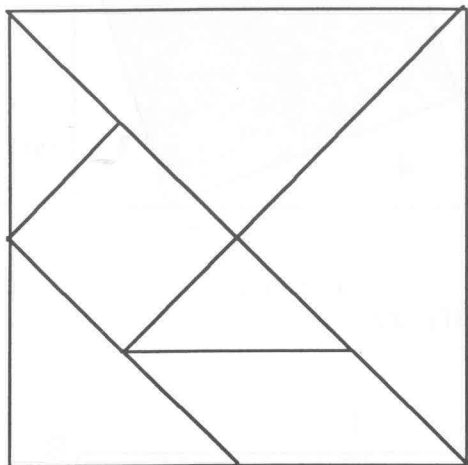
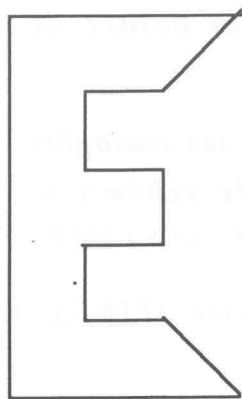
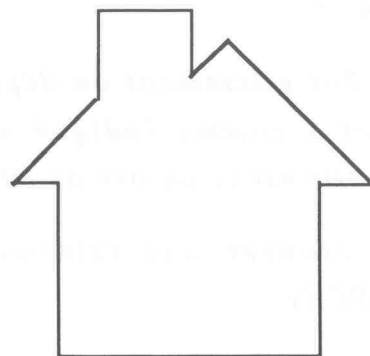


schéma 5



(a)



(b)

Cet exercice plus ludique, est bien adapté à un travail de groupe; il figurait parmi les questions de la 1^{re} étape 98/99 du Rallye de la Sarthe en 6^e et 5^e.

En classe de 6^e, il permet à l'élève de se familiariser avec les formes de base (citées dans le programme) que sont le carré, le triangle etc... On pourra évidemment proposer de reconstituer d'autres figures.

Exercice I-3-

Observer ce "poisson"... La ligne qui limite sa surface est constituée d'arcs de cercles centrés en A, B, D et C et ayant le même rayon R . Reproduire ce dessin avec $R = 6\text{cm}$ sur un papier de couleur. Découper le poisson en trois morceaux de telle façon que ces trois morceaux juxtaposés forment un carré. Coller ces trois morceaux en carré.

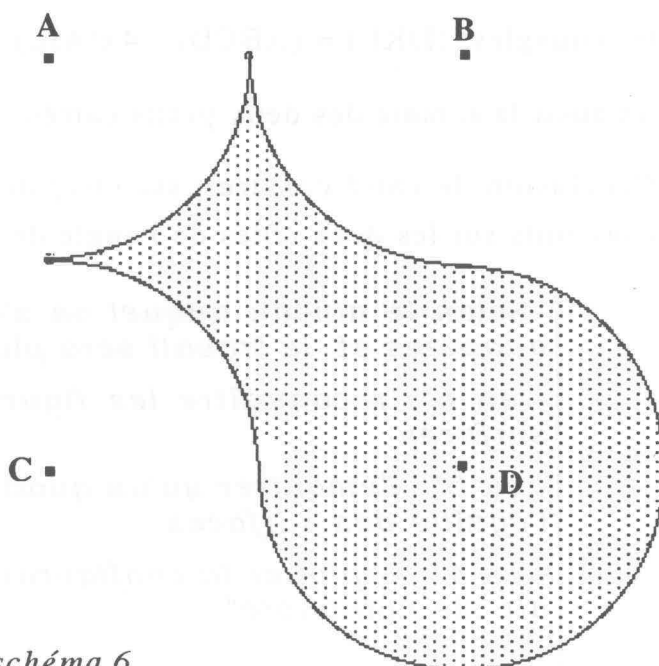


schéma 6

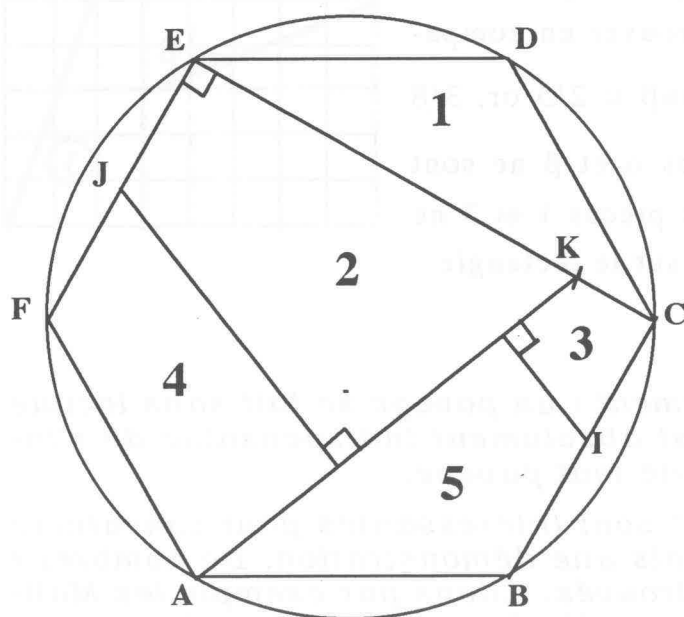
Comme le précédent cet exercice, proposé dans la 2^e étape du rallye de la Sarthe 98/99 en 6^e et 5^e, trouvera sa place dans des travaux par groupe.

On notera qu'il est l'occasion de juxtaposer des surfaces curvilignes. Comme dans les problèmes de lunules, il s'agit de "quadrature" ainsi que nous en rencontrerons dans le chapitre 4.

Ce n'est pas ici notre propos, mais il pourra trouver des prolongements intéressants dans les calculs d'aires et de périmètres. Ainsi, après avoir trouvé l'équivalence entre cette surface curviligne et un carré, on pourra demander d'en évaluer la surface dès la classe de 6^{ème}.

Exercice I-4-

Découper les six pièces de l'hexagone et les juxtaposer pour former un carré.



solution:

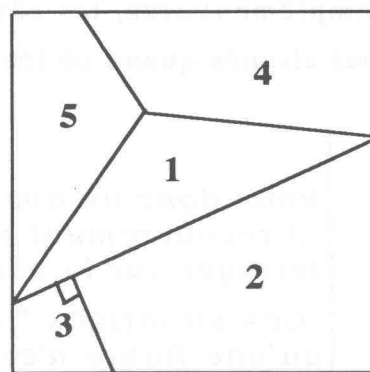


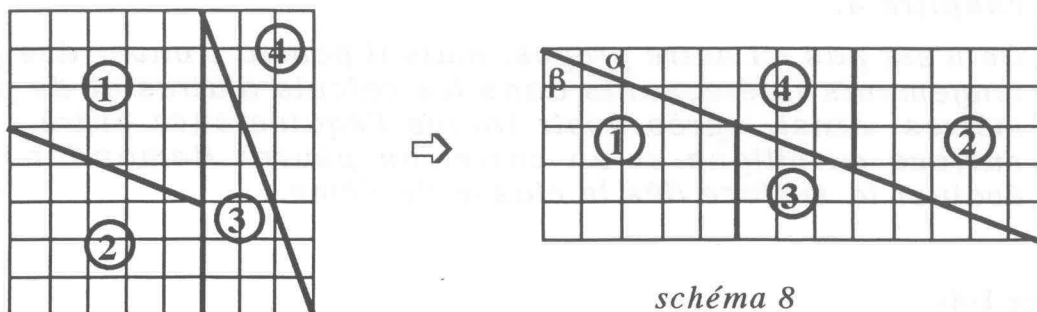
schéma 7

Cet exercice, proposé à la 2^e étape du rallye de la Sarthe 97/98 en 6^e et 5^e n'est qu'une manipulation; l'hexagone est donné avec ses tracés sans justification. On trouvera un développement dans l'exercice IV-19.

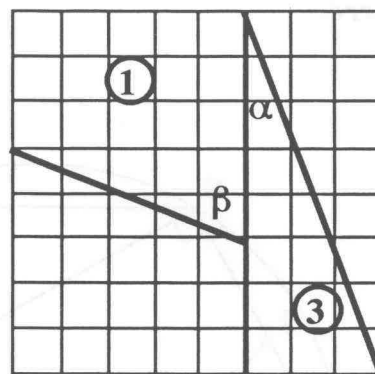
On peut faire le même exercice avec un triangle équilatéral (ex. IV- 17 et IV-18), un pentagone, un décagone (Hyper-cube n°17) etc...

Exercice I-5-

Découper les quatre pièces du carré, puis les juxtaposer pour former un rectangle comme indiqué sur ce schéma 8. En comptant les carreaux, comparer l'aire du carré et celle du rectangle; que pensez-vous de ce "pavage"?



Solution- S'il s'agissait d'un pavage, il faudrait accepter que $65 = 64$. Donc ce n'est pas un pavage. La réunion des quatre pièces est plus petite que le rectangle. On peut, par exemple, le prouver en comparant les pentes: $\tan \alpha = 3/8$ et $1/\tan \beta = 2/5$ or, $3/8$ n'est pas égal à $2/5$ donc les angles α et β ne sont pas complémentaires, les côtés des pièces 1 et 3 ne sont pas alignés quand on les place sur le rectangle



Voici donc un avertissement : un pavage se fait sans lacune ni recouvrement et il est absolument indispensable de s'interroger sur la validité de tout pavage.

Ces situations "pièges" sont intéressantes pour convaincre qu'une figure n'est jamais une démonstration. De nombreux exercices peuvent être trouvés. Citons par exemple les Malices du Kangourou 97 (voir IV-10). Une autre présentation de l'exercice ci-dessus est donnée dans l'exercice IV-8.

Exercice I-6- Pavages du plan Il s'agit de découper des polygones réguliers à n côtés identiques (superposables) et, par juxtaposition, de rechercher une façon de paver le plan. On fait constater que, selon les valeurs de n , ce pavage est ou n'est pas réalisable. On peut alors trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ce pavage soit possible. Puis, éventuellement, rechercher un pavage avec deux séries de polygones réguliers.

Chapitre II- PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre sont réunis des exercices dont le but est d'établir un certain nombre de propriétés permettant d'affirmer que deux surfaces -en particulier de triangles- sont équivalentes.

Le point de départ est la reconnaissance de surfaces superposables: ce sont celles obtenues par les isométries qui " conservent les longueurs, les angles, les aires etc...": symétrie axiale, demi-tour, translation, rotation ; ou par la composée de plusieurs de ces isométries. Puis, très vite, on établira des situations où des surfaces non superposables, sont équivalentes.

On établira au fur et à mesure de ces démonstrations, des "théorèmes" qu'il nous semble indispensable de faire reconnaître comme tels, de faire écrire et apprendre puis de faire appliquer.

Exercice II 1- On considère un parallélogramme et ses diagonales. Ecrire tous les triangles deux à deux superposables.

Réponse- Le point de concours des diagonales étant centre de symétrie du parallélogramme:

schéma 1

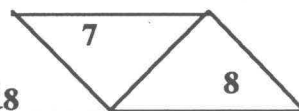


$$A_1 = A_4$$

$$A_3 = A_2$$

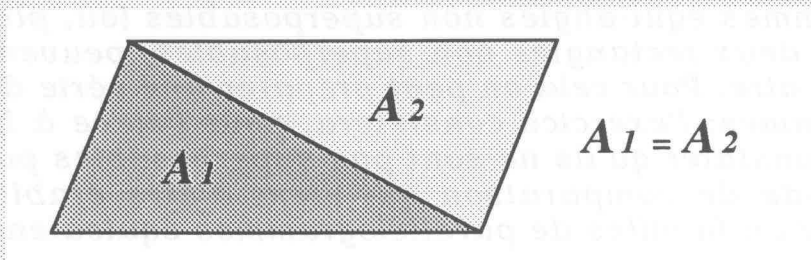


$$A_5 = A_6$$



$$A_7 = A_8$$

Chaque diagonale d'un parallélogramme le partage en
deux triangles de même aire



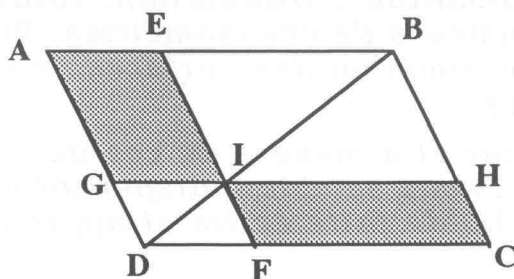
$$A_1 = A_2$$

Exercice II 2

ABCD est un parallélogramme. On place un point I sur le segment de diagonale BD. Par ce point on construit les parallèles (EF) et (GH) respectivement à (AD) et (AB) comme indiqué sur le schéma 2.

Comparer les aires de AEIG et de IHCF.

schéma 2



Solution- EBHI et GIFD ont leurs côtés opposés parallèles : ce sont deux parallélogrammes.

Une diagonale partage le parallélogramme en deux triangles de même aire donc :

Dans ABCD: $(ABD) = (CDB)$

Dans EBHI: $(EBI) = (HIB)$

Dans GIFD: $(GID) = (FDI)$

Or les six surfaces réalisent un pavage de ABCD donc par différence:
 $(AEIG) = (IHCF)$

*Cet exercice -simple- est particulièrement important: c'est l'occasion de rencontrer deux surfaces **non superposables mais de même aire** et donc de préciser ce que sont des surfaces équivalentes ou des aires égales. On pourra, par exemple, l'appliquer à la construction d'un parallélogramme de même aire qu'un parallélogramme donné et ayant un côté donné (exercice II 3).*

Réciproquement, on pourra faire vérifier que deux parallélogrammes équi-angles non superposables (ou, plus simplement, deux rectangles non superposables) peuvent avoir la même aire. Pour cela on peut préparer une série de parallélogrammes; l'exercice consistera, pour l'élève à les découper, constater qu'ils ne sont pas superposables puis, par la méthode de comparaison qui vient d'être établie, de les ranger en familles de parallélogrammes équivalents.

Exercice II 3.

Construire "sous" le segment AB un rectangle dont l'aire est égale à $(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un rectangle donné.

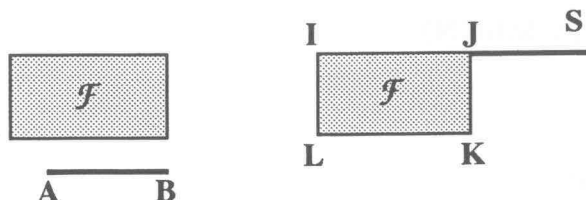
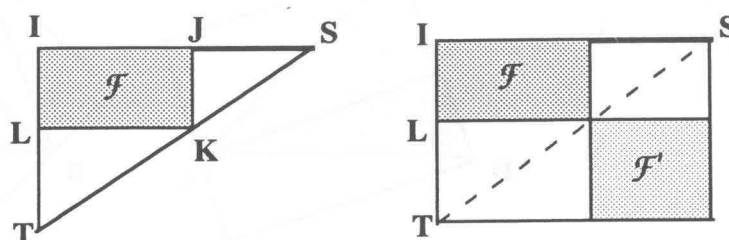


schéma 3



Solution. On prolonge un côté de IJKL c'est-à-dire $\mathcal{F}$, d'une longueur JS égale à AB. On trace (SK) qui coupe (IL) en T et, à partir de K, on construit le rectangle $\mathcal{F}'$ qui a un côté de longueur AB et, d'après l'exercice précédent, est équivalent à $\mathcal{F}$.

On pourra poser la même question en remplaçant le rectangle par un parallélogramme non rectangle. Il faudra, dans tous les cas, accompagner le travail des élèves; notre expérience a prouvé qu'il leur est difficile de trouver seuls le lien entre les exercice II 2 et II 3 et une recherche trop longtemps infructueuse ne pourrait que les décourager.

Exercice II 4-

ABC étant un triangle, construire, de trois façons différentes, un rectangle dont l'aire est double de celle du triangle.

Solution- Traçons la hauteur issue de A; elle coupe le côté opposé en H.

a) Si le triangle a trois angles aigus :

$$(ABC) = (ABH) + (ACH)$$

AHB est rectangle et, si AHBM est un rectangle,

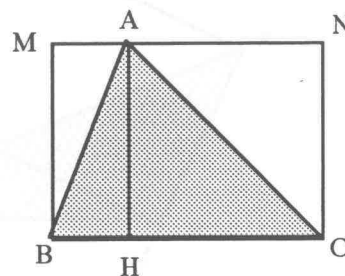


schéma 4 (a)

$(AHB) = (1/2) \times (AHBM)$ -d'après II 1-

De même (AHC) est la moitié du rectangle $AHCN$

$$(AHBM) + (AHCN) = (MBCN)$$

$$\text{donc } (ABC) = (1/2) \times (MBCN)$$

Il y a deux autres constructions en variant le choix de la base et donc de la hauteur relative à cette base.

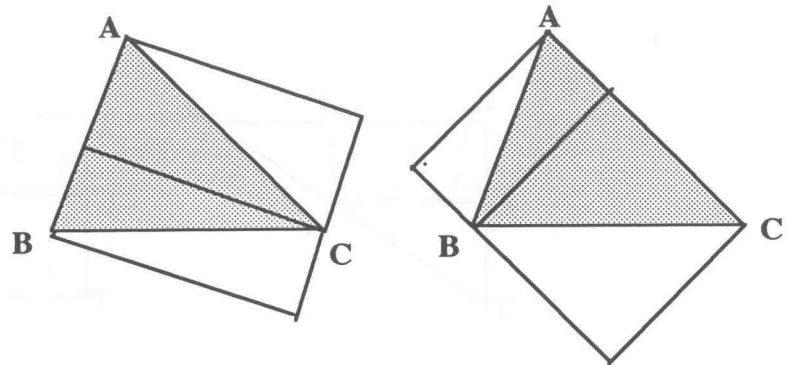


schéma 4 (b)

b) Si le triangle a un angle obtus, ici l'angle ABC ,

$$(ABC) = (ACH) - (ABH) \text{ et } (AHCN) - (AHBM) = (MBCN)$$

$$\text{donc } (ABC) = (1/2) \times (MBCN)$$

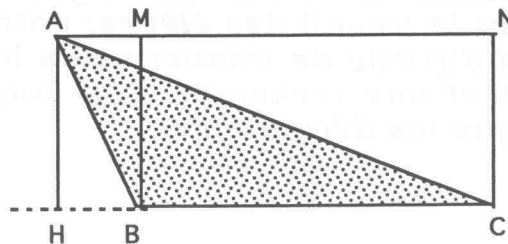
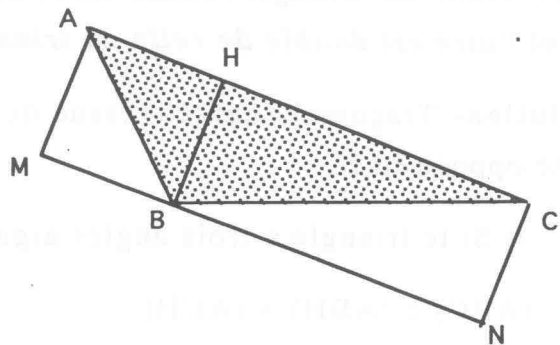
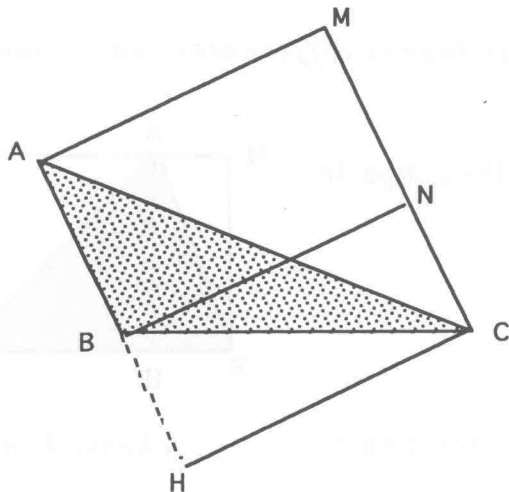


schéma 4 (c)

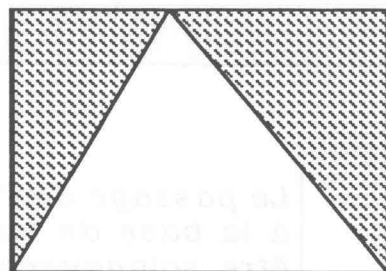


Le cas du triangle dont les angles sont tous aigus est assez simple pour les élèves ; il permet néanmoins de rappeler ce qu'est une hauteur dans un triangle et qu'un triangle a trois hauteurs ; ce tracé pose encore des problèmes à de trop nombreux élèves jusqu'en 5ème. Pour le cas (b) où le triangle a un angle obtus, nous avons constaté que la construction doit être accompagnée et ce n'est souvent qu'en RECITANT sa définition que l'élève saura où placer son équerre ; il découvre avec étonnement que celle-ci "sort" du triangle. De ce fait l'aire du rectangle sera obtenue par différence (contrairement à la situation (a) où c'était une somme). Très peu d'élèves sauront aborder seuls cette configuration ; pourtant, c'est une activité riche et à ne pas manquer par exemple sous forme d'un travail dirigé.

On remarquera de plus que l'on construit ici trois rectangles de même aire et non superposables ; ce peut être l'occasion d'utiliser la méthode de vérification d'équivalence des rectangles décrite dans l'exercice III 2).

Application

Comparer l'aire du rectangle et l'aire hachurée ; justifier la réponse.

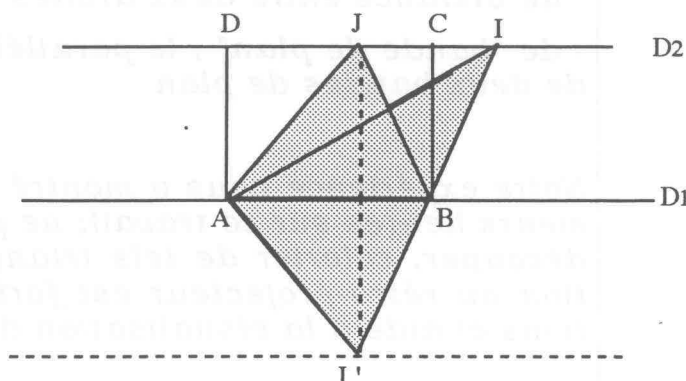


Le triangle est la moitié du rectangle donc le "reste" est aussi la moitié de ce rectangle. Exercice simple mais important car il prépare le regard que l'élève portera sur une figure.

Il constitue aussi un apprentissage de l'investissement nécessaire des propriétés au fur et à mesure de leurs démonstrations : l'élève a, ici, plutôt tendance à revenir au découpage de la surface hachurée en deux triangles rectangles, chacun étant la moitié d'un rectangle.

Exercice II 5.

D_1 et D_2 sont deux droites parallèles. Sur D_1 on place deux points A et B et sur D_2 deux points I et J. Montrer que IAB et JAB ont la même aire.



Solution. Ces deux triangles sont la moitié du même rectangle ABCD.

$$\text{Donc } (IAB) = (1/2) \times (ABCD) = (JAB)$$

On remarque que si J' est le symétrique de J par rapport à D₁, (J'AB) = (JAB).

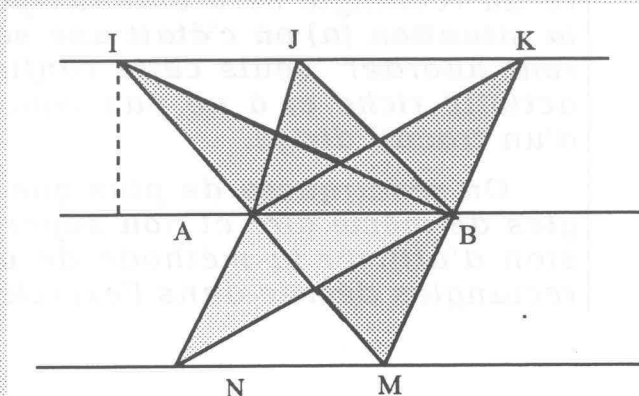
Autre remarque: les trois triangles ont même base et même hauteur .

Tous les triangles qui ont la même base et la même hauteur ont la même aire

et aussi...

Même aire et même base donc même aire

Même aire et même hauteur donc même base



Le passage de l'exercice II 5 à l'énoncé du théorème -qui sera à la base de toutes les démonstrations qui vont suivre- doit être soigneusement expliqué. Dans l'exercice, les triangles ont "une base commune" ; dans le théorème, ils ont "même base". En aucun cas cette généralisation ne devra être passée sous silence. Dans certaines classes elle est immédiate ; dans d'autres, il faudra la préparer par un exercice utilisant par exemple une symétrie. Les propriétés réciproques seront, elles aussi, expliquées.

Dans la suite du travail, "même base" signifiera indifféremment base commune ou base de même mesure.

L'exercice II 5 sera aussi l'occasion d'installer les notions:

- de distance d'un point P à une droite (AB) - comme mesure de la hauteur issue de P dans le triangle PAB-
- de distance entre deux droites parallèles
- de "bande de plan" ; le parallélogramme étant l'intersection de deux bandes de plan

Notre expérience nous a montré qu'il était bon de passer plusieurs heures sur ce travail; ne pas hésiter à faire construire, découper, colorier de tels triangles de même aire. L'utilisation du rétro-projecteur est fort utile lors de ces manipulations et aide à la visualisation du théorème.

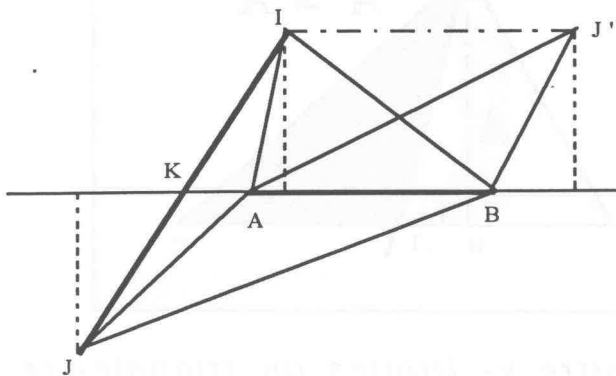
Exercice II 6.

Soit ABI et ABJ deux triangles de même aire. Quelle est la situation du segment IJ par rapport à (AB) ?

Solution. Il y a deux configurations à envisager:

a) Les deux triangles sont situés dans le même demi-plan de frontière (AB) . D'après ce qui précède, les deux triangles ont la même hauteur et donc (IJ) est parallèle à (AB)

b) Les triangles sont de part et d'autre de (AB) . Le segment IJ est alors coupé par (AB) ; soit K leur point d'intersection. $(IAB) = (JAB)$ et les triangles ont même base donc ils ont la même hauteur. Mais IKA a même hauteur que IAB et JKA a même hauteur que JAB donc IKA et JKA ont même base et même hauteur donc ils ont la même aire et $(IAK) = (JAK)$. On regarde alors ces deux triangles en considérant leurs bases IK et JK ; ils ont même hauteur mais, ayant même aire, ils ont même base. Donc $IK = JK$ et K est le milieu du segment IJ

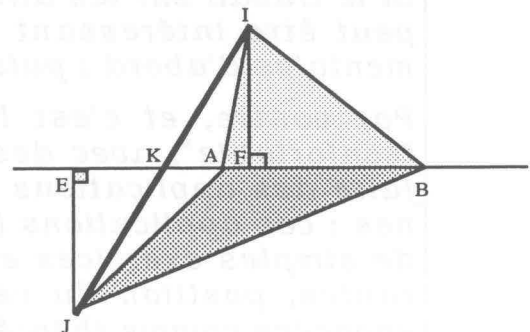


Si deux triangles ont même aire et base commune, le segment qui joint leurs sommets est:

soit parallèle à la base commune,
soit coupé en son milieu par cette base commune.

Plusieurs remarques sont à faire à propos de l'exercice II 6 .

Le mode de démonstration proposé n'est bien évidemment pas le seul et on pourra, avec les élèves rechercher d'autres pistes. Ainsi, un élève a proposé de démontrer que $IFJE$ est un parallélogramme (les segments IF et JB sont parallèles et de même mesure) ; K , intersection des diagonales, est bien le milieu du segment IJ . Démontrer avec les aires (non mesurées) suppose une certaine façon de "voir" une figure mais ne doit pas nous faire oublier les autres aspects des problèmes.



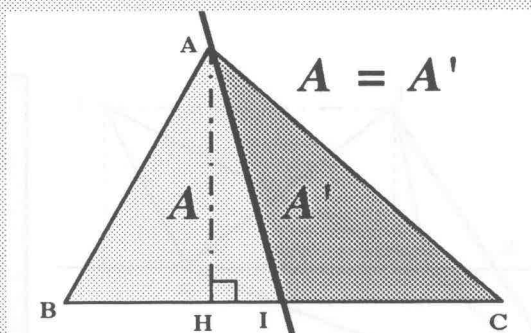
On peut renoncer à accorder le statut de théorème à la conclusion de cet exercice, encore qu'il soit très commode de n'avoir pas à redémontrer que K est le milieu du segment IJ . On retrouvera en effet cette configuration à plusieurs reprises ; par exemple quand il s'agira de prouver que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice II 7.

ABC est un triangle et I est le milieu du segment BC. Comparer les aires de IAB et de IAC.

Solution. Si I est le milieu du segment BC , $BI = IC$. Les deux triangles AIB et AIC ont donc même base et même hauteur (cette hauteur commune est AH); ils ont donc la même aire: $(AIB) = (AIC)$. Or (AI) est une médiane de ABC , ce qui démontre que, dans un triangle une médiane détermine deux triangles de même aire.

Dans un triangle,
une médiane détermine
deux triangles de même aire



On retrouvera dans le chapitre V- Droites du triangle- ce théorème et ses applications.

On note aussi qu'il permet de compléter les égalités de l'exercice II-1 : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_4$

Plusieurs situations peuvent être envisagées que nous avons tentées avec nos classes :

Si le travail sur les aires est commencé seulement en 4ème, il peut être intéressant d'établir toutes les propriétés fondamentales d'abord ; puis de passer aux autres chapitres.

Par contre, et c'est la solution qui nous semble la plus "confortable", avec des élèves de 5ème il est intéressant de faire des applications immédiates du théorème de la médiane ; ces applications (ex V 5, V 6 et V 7) ne seront alors que de simples exercices et leurs conclusions (médianes concourantes, position du centre de gravité etc...) ne seront pas énoncées comme théorèmes.

Exercice II 9. Soit un segment AB . Sur (D) perpendiculaire à (AB) en H , on place les points M et M' tels que $HM' = 2 \times HM$. Comparer les aires de MAB et $M'AB$.

Solution.

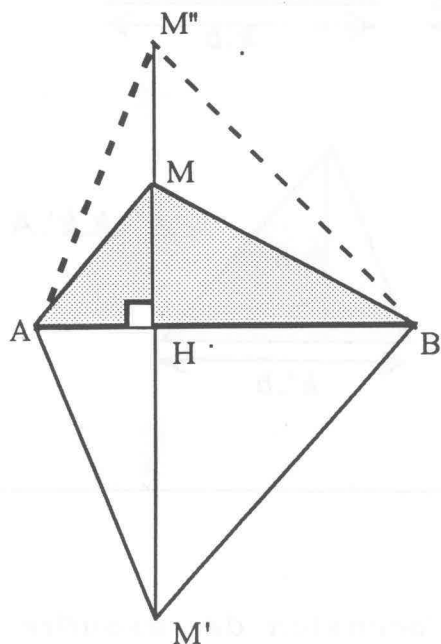
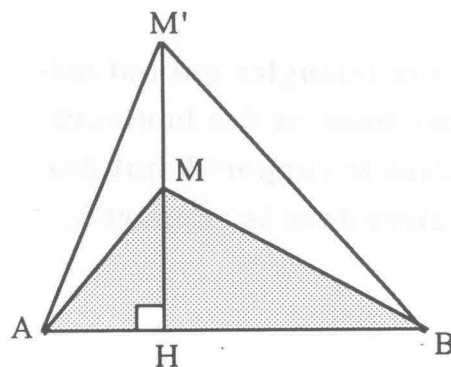
a) si M et M' sont du même côté de (AB) .

Si $HM' = 2.HM$, M est le milieu du segment HM' et donc dans $AM'H$, (AM) est une médiane donc $(AM'M) = (AMH)$.

De même dans $BM'H$, $(BM'M) = (BMH)$.

Donc $(AM'M) + (BM'M) = (AMH) + (BMH)$

et $(AM'B) = 2 \times (AMB)$



b) si M et M' sont de part et d'autre de (AB)

On construit alors le symétrique M'' de M' par rapport à (AB) .

On a alors $(AM'B) = (AM''B)$ et les triangles ABM et ABM'' se trouvent dans la configuration précédente donc :

$$(AM'B) = 2 \times (AMB)$$

$$\text{ou } (AMB) = (1/2) \times (AM'B)$$

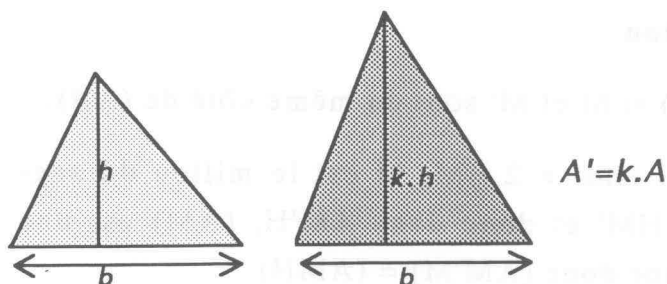
Ce qui démontre que si des triangles ont la même base celui qui a une hauteur double a aussi une aire double. Mais aussi que, inversement, celui qui a une hauteur égale à la moitié de la hauteur de l'autre a une aire égale à la moitié de l'autre.

De plus, si $(AM'B) = 2 \times (AMB)$ alors $HM' = HM'' = 2 \times HM$ donc si deux triangles ont même base et des aires dans le rapport 2, alors leurs hauteurs sont, elles aussi, dans le rapport 2.

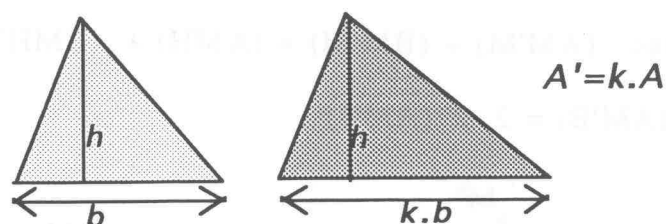
Conséquences : On démontrera de même que, AB étant toujours la base commune, si $HM' = n \times HM$ alors $(AM'B) = n \times (AMB)$ ou $(AMB) = (1/n) \times (AM'B)$.

$$k = m/n \quad (m \text{ et } n \text{ sont des entiers non nuls})$$

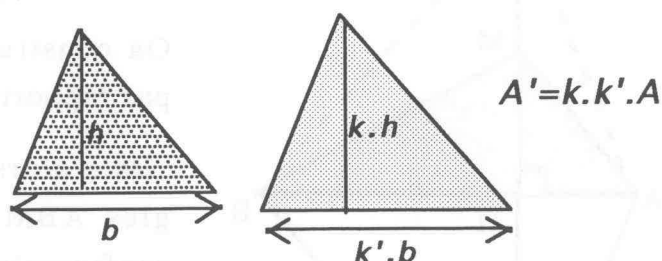
Deux triangles qui ont même base et des hauteurs dans le rapport k ont des aires dans le rapport k .



Deux triangles qui ont même hauteur et des bases dans le rapport k ont des aires dans le rapport k .



Deux triangles dont les hauteurs sont dans le rapport k et dont les bases sont dans le rapport k' ont des aires dans le rapport kk' .

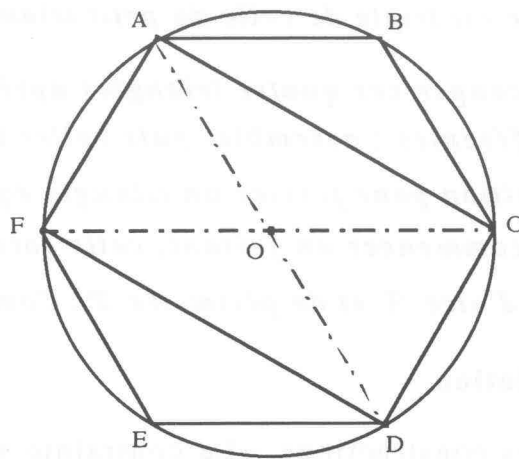
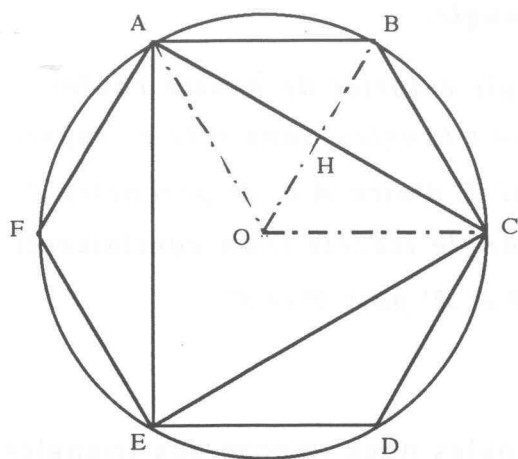


Etablir des rapports d'aires est l'occasion de résoudre de nombreux problèmes au collège, depuis le simple "comptage" (combien de petits triangles dans le grand, etc...) à l'application d'un rapport d'agrandissement en 3ème. Mais ce sera aussi un moyen de démontrer des propriétés telles que la position du centre de gravité dans un triangle (exercice V 3), la droite des milieux dans un triangle (exercice V 9), la propriété dite "de Thalès" (exercice V 13) etc...

Voici quelques exemples de situations à proposer pour se familiariser avec cette recherche de rapport d'aires. Ils pourront être posés dès la classe de 6ème pour l'apprentissage des formes, du vocabulaire de la géométrie, des constructions ; mais ils sont aussi utilisables dans les autres classes.

Exercice II 10.

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O. Comparer les aires des figures ACE, ABCO et ACDF etc... avec celle de l'hexagone. Justifier



Solution : Il suffit de choisir par exemple OHA comme "surface-unité" et de dénombrer. Par exemple, on trouvera que $(ABCDEF) = 12 \times (AOH)$ et que $(ACE) = 6 \times (AOH)$; le rapport de ABCDEF à ACE est donc 2. Le rapport de l'hexagone au losange ABCO est 2 puisque $(ABCO) = 4 \times (AHO)$. Le rapport de l'hexagone au rectangle ACDF est $3/2$ puisque $(ACDF) = 8 \times (AHO)$

La figure de l'hexagone régulier est particulièrement riche et permet de travailler la construction, la reconnaissance de formes et la démonstration (par exemple reconnaître que ACE est équilatéral, que ABCO est un losange ou ACDE un rectangle, puis le justifier), la comparaison d'aires sans la mesure (c'est ce qui nous occupe ici) mais aussi des comparaisons de périmètres toujours sans mesure.

Observons par exemple les triangles équilatéraux (donc de "même forme") ACE et ABO ; leurs aires sont dans le rapport 3 ; leurs périmètres sont dans le rapport $\sqrt{3}$ et conclure que $AC = AB \cdot \sqrt{3}$. On peut aussi remarquer sur ce schéma que des triangles de même aire -ici ABO et ACO- n'ont pas toujours le même périmètre.

Par la suite cette configuration sera reprise avec le calcul pour objectif : calculs d'angles, d'aires, de périmètres.

On pourra enfin poser des problèmes analogues avec les autres polygones réguliers.

Exercice II 11-

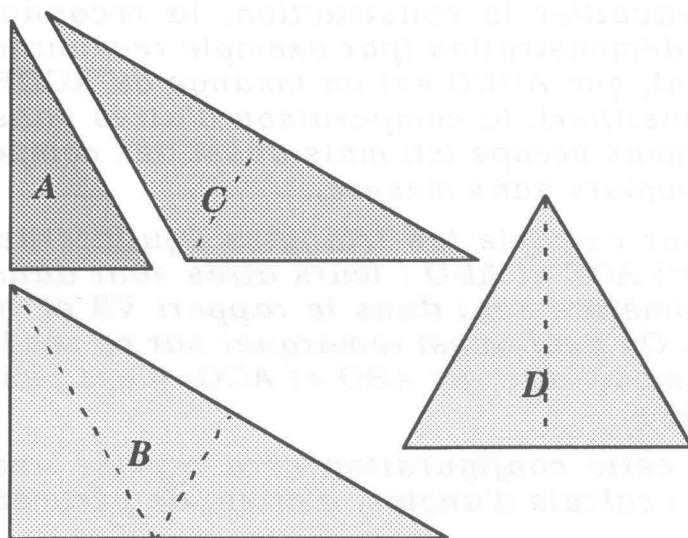
Construire quatre triangles différents en suivant les indications suivantes : les mesures des angles de ces triangles sont toutes des multiples non nuls de 30° ; le triangle équilatéral a des côtés de 10 cm ; le triangle isocèle a deux côtés de 10 cm ; le petit triangle rectangle a une hypoténuse de 10 cm ; le grand triangle rectangle a un côté de l'angle droit de 15 cm et son aire est triple de celle du petit triangle rectangle.

Découper ces quatre triangles après les avoir coloriés de quatre couleurs différentes ; assembler puis coller les quatre triangles, sans vide ni superposition pour former un triangle équilatéral T , d'aire $\mathcal{A}$ et de périmètre $\mathcal{P}$. Recommencer en faisant, cette fois, un triangle isocèle (non équilatéral) T' , d'aire $\mathcal{A}'$ et de périmètre $\mathcal{P}'$. Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ puis $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

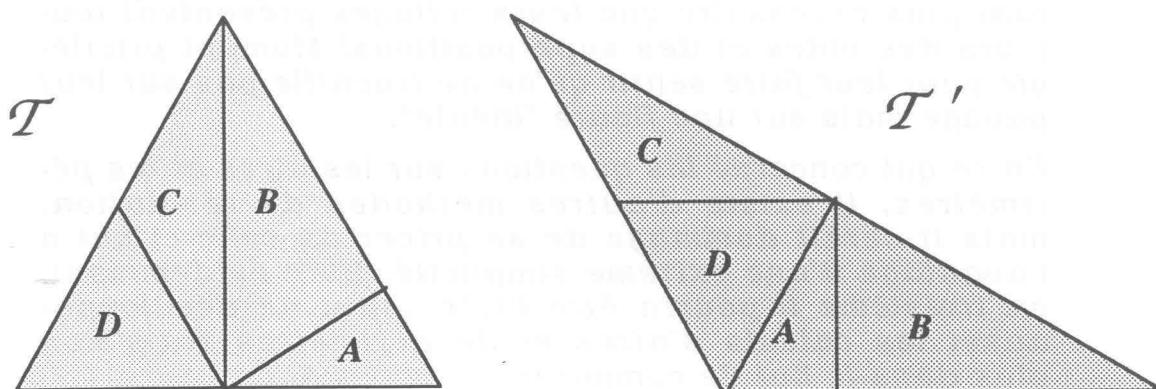
Solution.

Les constructions La contrainte sur les angles nous impose des triangles rectangles qui sont des demi-triangles équilatéraux (30° , 60° et 90°) (donc équi-angles) et un triangle isocèle dont les angles mesurent 30° , 30° et 120° .

On remarque que la conséquence des mesures des côtés est que, le petit triangle A étant pris comme "triangle-unité", le triangle B est pavé par trois A, le C et le D par deux triangles A. Par conséquent, toutes les figures pavées par les quatre pièces occuperont une surface huit fois plus grande que celle de A.



Les deux triangles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ s'obtiennent en juxtaposant comme ci-dessous.



Les aires. On remarque qu'il est alors inutile de calculer les aires ; on nous demande seulement de les comparer ; on peut conclure $\underline{\mathcal{A}} = \underline{\mathcal{A}'}$

Les périmètres. Pour comparer les périmètres il est également inutile de calculer les côtés inconnus ni de les mesurer.

Revenons au triangle-unité. Son hypoténuse mesure 10 et le petit côté de l'angle droit mesure 5; appelons y la mesure du plus grand côté de l'angle droit : $5 < y < 10$. Il suffit de "lire" les pavages pour savoir que :

$$\mathcal{P} = 60 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' = 40 + 4y .$$

$$\mathcal{P}' - \mathcal{P} = 4y - 20 \quad \text{or} \quad 4y > 20 \quad \text{donc} \quad \mathcal{P}' - \mathcal{P} > 0 \quad \text{soit} \quad \underline{\mathcal{P}' > \mathcal{P}}$$

Cet exercice figurait parmi les travaux proposés à tous les participants du rallye sarthois en 1999. L'énoncé ci-dessus était destiné aux classes de 3^{ème} et la présentation était un peu différente pour les plus jeunes : les pièces étaient les mêmes mais il fallait paver des rectangles ; on ne demandait pas de comparer les périmètres. Dans le cadre du rallye cet exercice demandait à être suivi d'une correction avec le professeur. Dans la situation de travail en classe, il peut être le sujet très fructueux d'activités par groupes (au moins quatre séances).

Le début du travail -trouver les quatre pièces- est assez difficile et il convient d'aider un peu les plus jeunes ; le découpage et le collage constituent la partie la plus ludique même si le résultat n'est pas si simple! Il est très rare que le pavage soit obtenu au hasard et il faudra insister sur la nécessaire recherche d'une méthode. Attirer également l'attention sur l'existence de ce petit triangle et sur l'usage qu'on peut en faire. Quand les élèves ont bien positionné leurs pièces, il est

important de leur demander de justifier que leur pavage est "sans vide ni superposition". Justification d'autant plus nécessaire que leurs collages présentent toujours des vides et des superpositions! Moment privilégié pour leur faire sentir qu'on ne travaille pas sur leur pavage mais sur une figure "idéale".

En ce qui concerne les questions sur les aires et les périmètres, il existe d'autres méthodes de résolution, mais il serait dommage de se priver de celle-ci qui a l'avantage d'une extrême simplicité. Bien évidemment, en troisième il pourra être intéressant de développer aussi les calculs d'aires et de périmètres mais non plus dans le but de comparer.

Chapitre III - TRAPÈZES ET PARALLÉLOGRAMMES

Exercice III 1-

Soit AB un segment; sur (D) parallèle à (AB) , placer quatre points M, N, P et Q tels que $MN = PQ = AB$. Montrer que $(ABNM) = (ABQP)$

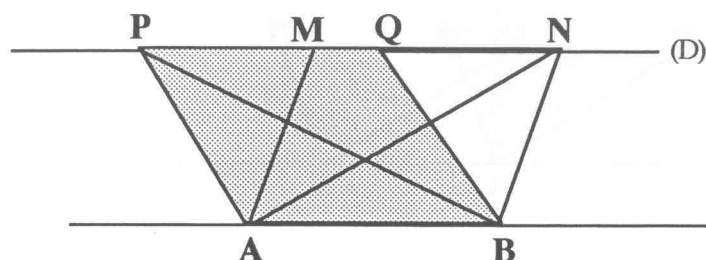


schéma 1

Solution-

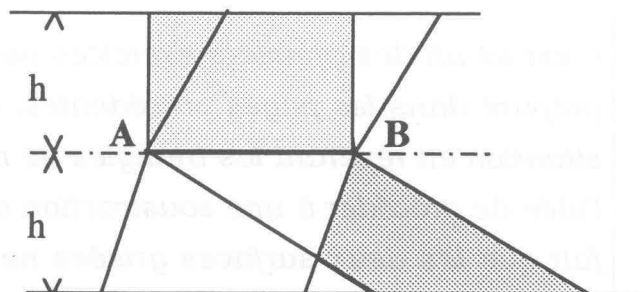
Les deux quadrilatères ayant des côtés opposés parallèles et égaux, sont des parallélogrammes. On sait qu'une diagonale partage le parallélogramme en deux triangles de même aire :

$$(ABNM) = 2 \times (APB) \text{ et } (ABPQ) = 2 \times (ANB)$$

Or, les deux triangles APB et ANB ont même base et même hauteur donc ils ont la même aire. Donc $(ABNM) = (ABPQ)$

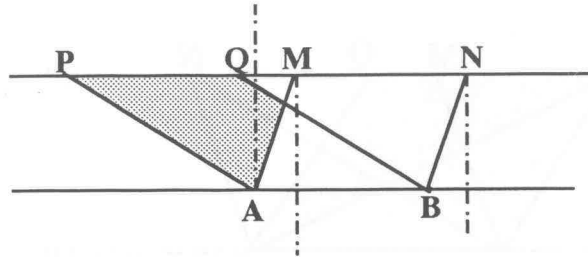
Les deux parallélogrammes ont la même base et la même hauteur. En utilisant la symétrie par rapport à (AB) , on généralise l'égalité d'aires à tous les parallélogrammes qui ont même base et même hauteur

**Tous les parallélogrammes
ayant même base
et même hauteur
ont la même aire**



Ici, le choix a été de comparer d'abord les triangles (chap.2) puis de déduire les comparaisons d'aires de parallélogrammes. On peut évi-

demment, faire le choix contraire. Il faut alors distinguer deux cas. Quand les segments MN et PQ ont une partie commune, il suffit de comparer les deux triangles AMP et BNQ qui sont déduits l'un de l'autre par une translation de vecteur AB donc superposables. Quand les segments MN et PQ sont disjoints, la comparaison est plus délicate. Il faut accompagner l'élève pour choisir les "découpages" les mieux adaptés.



La conclusion demeure et il faut noter que ce théorème contient implicitement les "formules" de l'aire du parallélogramme et du triangle. La voie est ouverte au calcul d'aire.

Exercice III 2.

$ABCD$ est un trapèze. Démontrer que les deux triangles grisés ont la même aire.

Solution.

Un trapèze a deux côtés parallèles ; ici (AB) est parallèle à (DC) . Donc les deux triangles ABD et ABC ont une base commune et même hauteur; ils ont donc même aire:

$$(ABD) = (ABC) \text{ soit } (ABD) - (ABI) = (ABC) - (ABI) \text{ donc } (AID) = (BIC)$$

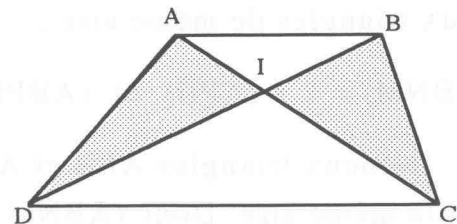


schéma 2

C'est ici un des premiers exercices où on met en oeuvre ce qui a été préparé dans les pages précédentes. Une certaine façon de "voir" la situation en repérant les triangles de même base et même hauteur et l'idée de procéder à une soustraction de surfaces. On insistera sur le fait que les deux surfaces grisées ne sont pas superposables pour dissuader tous ceux qui proposent qu'elles soient symétriques par rapport à l'intersection I des diagonales.

Exercice III 3.

Démontrer que toute droite qui passe par le centre d'un parallélogramme découpe celui-ci en deux trapèzes de même aire.

Solution.

ABCD est un parallélogramme de centre O. La droite passant par O coupe (AB) en I et (CD) en J. O étant le centre de symétrie du parallélogramme, les triangles découpés dans le parallélogramme sont deux à deux symétriques par rapport à O :

$(AOD) = (BOC)$; $(AMO) = (CNO)$; $(DON) = (OBM)$
 donc $(AOD) + (AMO) + (DON) = (CNO) + (NCO) + (BOM)$
 c'est-à-dire: $(AMND) = (BMNC)$ et la droite (MN) partage bien le parallélogramme en deux trapèzes de même aire.

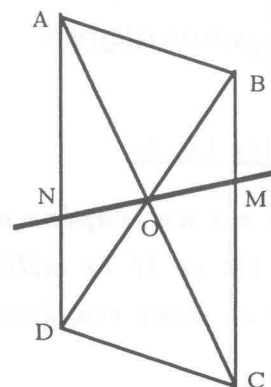


schéma 3

Rq : on pourra, plus simplement, montrer que les deux trapèzes sont symétriques par rapport à O

Exercice III 4.

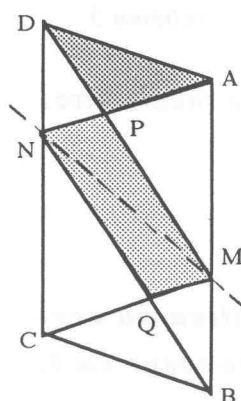


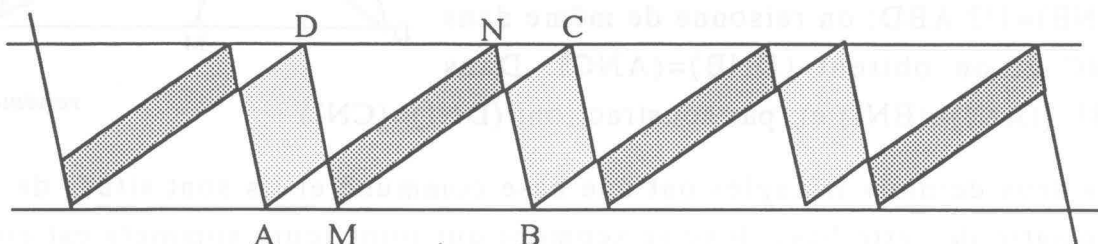
schéma 4

ABCD est un parallélogramme, M et N sont deux points situés respectivement sur les segments AB et CD. Sachant que $DN = MB$, comparer les deux surfaces hachurées

Solution. On a démontré que dans le trapèze ADNM, $(NPM) = (DPA)$ or $(NPMQ) = 2 \times (NPM)$

Donc le parallélogramme est double du triangle grisé.

Cet exercice ne présente pas grand intérêt du point de vue de la démonstration mais il suggère la réalisation d'une frise obtenue en répétant la construction du schéma 4. On obtient une double suite de parallélogrammes qui ont tous des surfaces équivalentes.



Les trois exercices suivants vont permettre d'établir que, dans trapèze, les milieux des côtés parallèles, le point de concours des diagonales, le point de concours des côtés non parallèles, sont quatre points alignés

Exercice III 5.

ABCD est un trapèze avec (AB) parallèle à (CD). N est le milieu du segment AB et M le milieu du segment CD. Démontrer que (MN) partage ABCD en deux trapèzes de même aire.

Solution.

On sait que $DM = MC$ et que (AB) et (DC) sont parallèles donc les triangles ADM et BCM ont même base et même hauteur: ils ont même aire soit $(ADM) = (BCM)$

Dans AMB, MN est une médiane donc AMN et BMN ont même aire: $(AMN) = (BMN)$

En additionnant ces aires deux à deux:

$$(ADM) + (AMN) = (BCM) + (BMN)$$

$$(ADMN) = (BCMN) = (1/2) \times (ABCD) ; \text{ les deux trapèzes ont la même aire.}$$

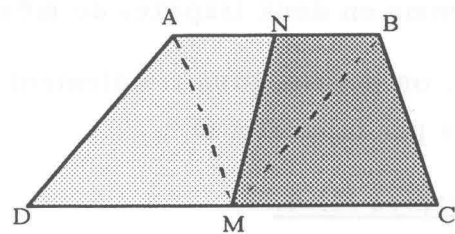


schéma 5

Exercice III 6.

ABCD est un trapèze avec (AB) parallèle à (CD). N est le milieu du segment AB et M le milieu du segment CD. Les diagonales se coupent en I. Démontrer M, I et N sont alignés .

Solution 1. On sait que $(ABD) = (ABC)$

Dans ABD, N est le milieu du segment AB donc (DN) est une médiane et $(DNB) = 1/2 \cdot ABD$; on raisonne de même dans ABC et on obtient $(DNB) = (ANC)$. Dans ABI, $((ANI) = (BNI))$ et, par soustraction: $(DNI) = (CNI)$

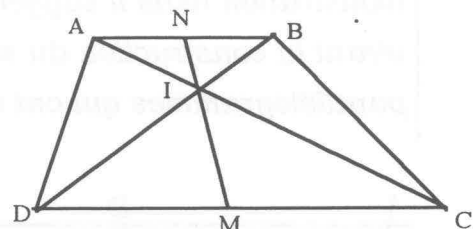


schéma 6

Ces deux derniers triangles ont une base commune et ils sont situés de part et d'autre de cette base donc le segment qui joint leurs sommets est coupé

en son milieu par la base. Ce milieu étant M, les points N, I et M sont alignés

Cette solution 1 permet d'utiliser des propriétés démontrées dans les pages précédentes mais on peut aussi proposer une "démonstration par l'absurde". Ce type de raisonnement est difficile pour un collégien et nous n'avons que peu d'occasions de l'utiliser. Pourtant, quand le niveau et la curiosité du groupe le permettent, c'est une activité à tenter.

Solution 2.

Raisonnons sur une figure fausse.

On a démontré que $(AID) = (BIC)$

(IM) étant médiane de DIC, $(DIM) = (CIM)$,

(IN) étant médiane de AIB, $(AIN) = (BIN)$

$(DIM) + (DIA) + (AIN) = (CIM) + (CIB) + (BIN) = \mathcal{A}$. Ces six surfaces forment un pavage du trapèze ABCD, $\mathcal{A} = (1/2) \times (ABCD)$

Or on a démontré que $(AMND) = (1/2) \times (ABCD)$

Donc $(DIM) + (DIA) + (AIN) = (AMND)$ ce qui signifie que (MNI) est vide et donc que les trois points M, N et I sont alignés.

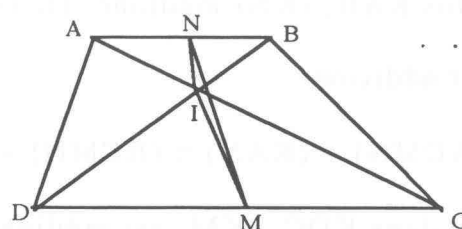


schéma 6bis

Exercice III 7.

ABCD est un trapèze avec (AB) parallèle à (CD). N est le milieu du segment AB et M le milieu du segment CD. Les côtés (AD) et (BC) se coupent en K. Démontrer M, N et K sont alignés.

Solution 1

(KN) médiane de KAB donc $(KAN) = (KBN)$

On sait que $(AND) = (BNC)$ donc, par addition : $(KND) = (KNC)$ et donc (KN) coupe

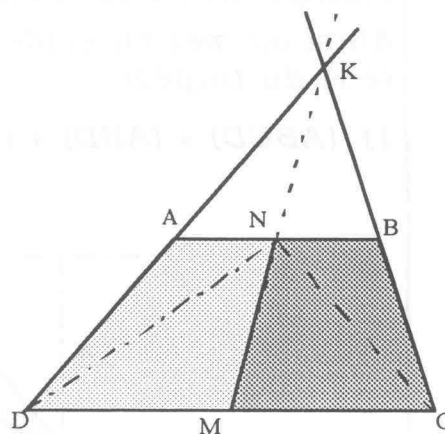


schéma 7

le segment qui joint leurs sommets en son milieu ; or ce milieu est M. Ce qui démontre que les trois points K, N et M sont alignés.

Solution 2 ("par l'absurde")

On a démontré que si M et N sont respectivement les milieux des côtés parallèles AB et CD, alors $(ADMN) = (BCMN)$

Dans KAB, (KN) médiane: $(KAN) = (KBN)$

Par addition:

$$(ADMN) + (KAN) = (BCMN) + (KBN) = (1/2) \times (KDC)$$

Or, dans KDC, (KM) est médiane donc $(KMD) = (1/2) \times (KDC)$

En résumé: $(ADMN) + (KAN) = (KMD)$ donc $(KNM) = 0$ et les trois points K, M et N sont alignés

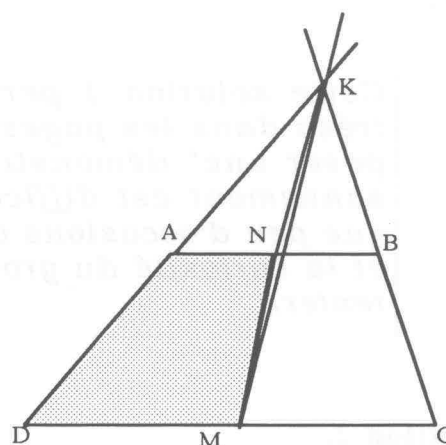
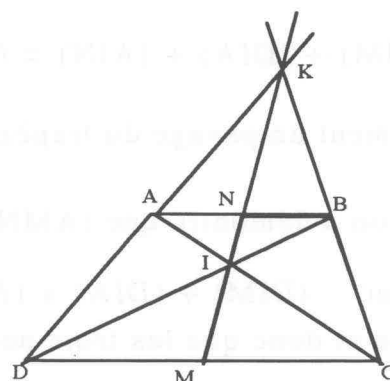


schéma 7bis

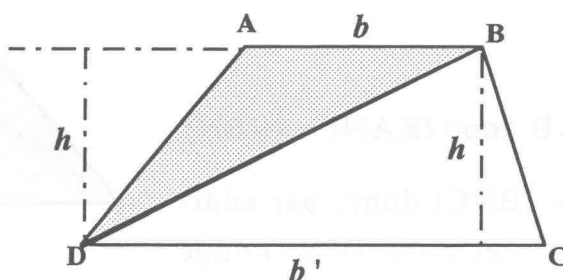
conclusion: On peut donc remarquer que les quatre points K, N, I et M (intersection des côtés non parallèles, intersection des diagonales et milieux des côtés parallèles) qui sont alignés



Même si nous prenons ici le parti de ne pas traiter le calcul d'aire, remarquons que les exercices précédents permettront de travailler le calcul littéral, la distributivité de la multiplication sur l'addition etc..

Ainsi on met en évidence plusieurs modes de calcul de l'aire A du trapèze :

$$1) (ABCD) = (ABD) + (BCD) \text{ donc } A = (b \cdot h)/2 + (b' \cdot h)/2$$

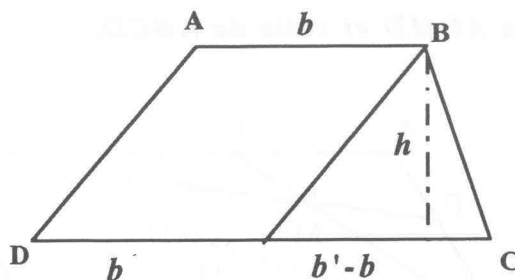


2) en construisant le symétrique A' de A par rapport au milieu du segment BC (voir ex III 8), on trouve que l'aire de $ABCD$ est égale à celle du triangle $AA'D$ c'est-à-dire:

$$A = (b + b') \cdot h / 2$$

3) Ou encore, en traçant la parallèle à (AD) passant par B , que le trapèze est la somme d'un parallélogramme et d'un triangle :

$$A = b \cdot h + (b' - b) \cdot h / 2$$



Exercice III 8.

$ABCD$ est un trapèze, (AB) est parallèle à (DC) . Soit A' le symétrique de A par rapport à I milieu du segment BC . Montrer que $ABCD$ et ADA' sont deux surfaces équivalentes.

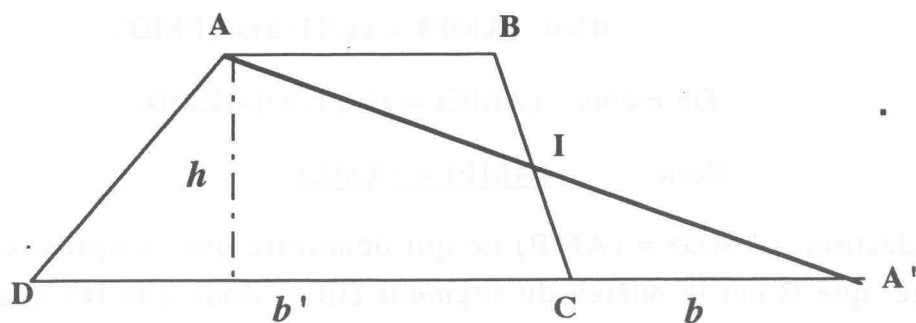


schéma 8

Solution.

Si I est le milieu commun des segments AA' et BC , les diagonales de $ABA'C$ se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme et (BA) est parallèle à $(A'C)$. Or (CD) est parallèle à (BA) donc les trois points D , C et A' sont alignés. $(AA'D) = (AICD) + (IA'C)$.

Les triangles IAB et ICA' sont symétriques donc : $(IBA) = (ICA')$ Mais $(ABCD) = (AICD) + (IAB)$ et donc $(AA'D) = (ABCD)$

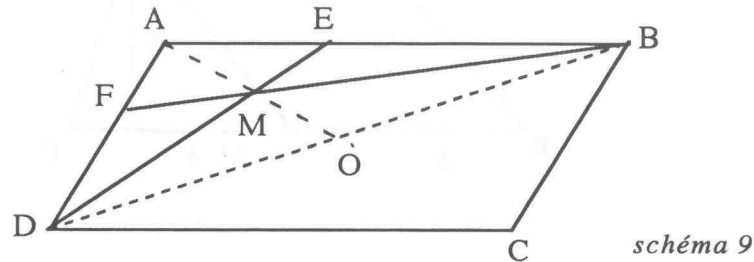
Exercice III 9.

ABCD est un parallélogramme.

E est un point du segment AB tel que $AE = k.AB$ avec $k < 1$, F est un point du segment AD tel que $AF = k.AD$ et M est l'intersection de (ED) et (FB).

1) comparer les aires de BME et FMD, puis celles de EMA et AMF.

2) comparer l'aire de ABMD et celle de ABCD.



Solution.

- Les triangles ABF et ABD ont même hauteur donc leurs aires sont dans le même rapport que leurs bases : $(ABF) = k \times (ABD)$

De même : $(ADE) = k \times (ABD)$ donc $(ABF) = (ADE)$. Si on soustrait à ces deux triangles leur partie commune AFME, on obtient $(FMD) = (EMB)$

- Les triangles AMF et AMD ont même hauteur donc leurs aires sont dans le même rapport que leurs bases : $(AMF) = k \times (AMD)$ et $(DMF) = (1-k) \times (FMD)$
d'où $(AMF) = (k/(1-k)) \times (FMD)$

De même : $(AME) = (k/(1-k)) \times (EMB)$

Donc $(AMF) = (AME)$

Et par addition, $(AMD) = (AMB)$ ce qui démontre que, d'après le théorème de la page que O est le milieu du segment DB et donc que les quatre points A, M, O et C sont alignés (diagonale)

Or $(ADE) = (1 + k) \times (ADM)$ et $(ADE) = k \times (ADB)$

donc $(ADM) = (k/(1+k)) \times (ADB)$ et $(ADMB) = (2k/(1+k)) \times (ADB)$

(BD) étant diagonale du parallélogramme, $(ABD) = (1/2) \times (ABCD)$

de ces trois dernières égalités on déduit:

$$\underline{(ADMB) = (k/(1+k)) \times (ABCD)}$$

Application 1

Etudier le cas particulier où E et F sont, respectivement, les milieux des segments AB et AD

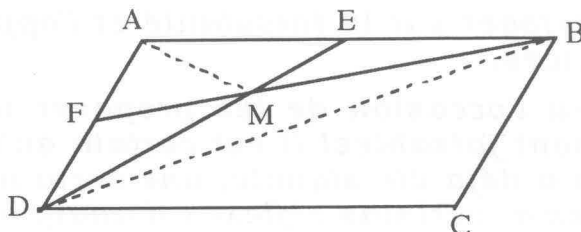


schéma 9 bis

Solution.

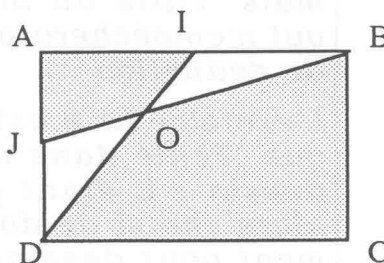
On reconnaît le problème précédent mais avec $k = 1/2$. On trouve que ABMD est le tiers de ABCD. On remarque alors que (BF), (DE) et (AC) sont les médianes de ABD, M son centre de gravité et on trouve le partage du triangle en six triangles de même aire ; cette propriété sera reprise dans l'exercice V 3.

Signalons un exercice du Concours Kangourou 1994 :

"ABCD est un rectangle, I est le milieu de AB, J est le milieu de AD. Quel est le rapport des aires des quadrilatères AIJO et BCDO?"

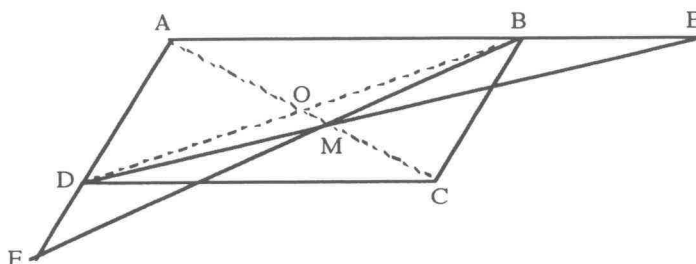
On reconnaît une légère variante de la question posée ci-dessus.

On sait que IAJO est fait de deux des six petits triangles déterminés dans ABD par les médianes, alors que BCDO est composé de huit de ces mêmes petits triangles ; donc le rapport des aires est $2/8$ c'est-à-dire $1/4$



Application 2 - Reprendre le problème initial pour $k > 1$

Dans ce cas, B est élément du segment AE et D est élément du segment AF. On fait les mêmes calculs que précédemment et donc on obtient les mêmes résultats. On remarque que M reste



intérieur au parallélogramme.

Et aussi que si M était en C, (DE) serait parallèle à (AB) et il n'y aurait plus de point E ni de point F.

On peut s'interroger sur la faisabilité et l'opportunité et de tous ces exercices.

Nous avons eu l'occasion de les proposer tous dans nos classes : ils sont faisables! Il est certain qu'ils supposent, ainsi que cela a déjà été signalé, une certaine façon de regarder le schéma, certains réflexes d'analyse de situation. Mais il en va de même pour toute méthode d'apprentissage.

Comme pour tout travail de démonstration, il est important de ne pas laisser un trop long temps de recherche et d'adapter nos exigences au niveau auquel il s'adresse. La mise en commun des réponses est peut-être le moment le plus riche ; on peut alors accompagner la discussion et les tentatives d'argumentation. Au collège il ne serait pas raisonnable d'exiger une rédaction écrite de ces démonstrations ; il suffit de lire certains textes de ce chapitre pour se convaincre de la lourdeur de certains textes! Oralement, par contre, c'est souvent très simple surtout si on fait colorier; on ne dira alors plus "l'aire du parallélogramme FRPS" mais "l'aire du bleu" ou même "le vert plus le jaune" ; ce qui n'empêchera pas de demander de respecter une logique de déduction ...

L'exercice III 9 est difficile, même en 3ème, pour k quelconque. Tenté dans une classe, il s'est heurté à l'obstacle du dessin ; E étant placé sur (AB) comment placer F ? On a alors choisi de donner à k une valeur particulière "uniquement pour dessiner" (par exemple $k = 1/3$)... mais on sait bien que, alors, on a beaucoup de mal à faire oublier ce choix provisoire. Ce simple problème de construction détourne l'attention de l'objectif du travail... A ne faire donc que dans une classe très "pointue". Par contre c'est un exercice très profitable dans le cas particulier $k = 1/2$, par exemple en 5ème ou en 4ème juste après l'exercice V 3.



Chapitre IV - QUADRATURES

Faire la quadrature d'une surface, c'est construire un carré de même aire que cette surface.

Pour, peut-être, éveiller la curiosité, nous commençons par la duplication du carré. Puis, nous cherchons un carré équivalent à plusieurs carrés identiques (ici émerge la notion d'unité d'aire) et nous remarquons que ce problème peut être résolu par une construction géométrique simple dans le cas où le "plusieurs" est la somme de deux carrés (nombres) d'entiers. Ce qui pose assez naturellement le problème de la construction du carré somme de deux carrés (figures) et sera l'occasion de démontrer le théorème de Pythagore à la manière d'Euclide.

Reste alors à trouver des réponses pour le cas où le "plusieurs" n'est pas somme de deux carrés d'entiers...

Bien que nous ayons eu l'occasion de mentionner la quadrature d'une figure curviligne (exercice I 3), nous nous limiterons ici à la quadrature des figures rectilignes (polygones). Tout polygone est décomposable en une somme de triangles. Il suffit donc de savoir "quarrer" un triangle. Mais un triangle est un demi-rectangle ; nous commencerons donc par la quadrature du rectangle.

Notons qu'il sera beaucoup question de carrés ; occasion de faire prendre conscience que le carré mesure le carré et que le fait que le même mot désigne un nombre et une figure, n'est pas un hasard!

Exercice IV 1-

Construire un carré dont l'aire est double de celle du carré ABCD; justifier.

PLATON dans "Ménon" fait expliquer par Socrate à son esclave que le carré de côté égal à deux, a pour aire quatre et que pour avoir un carré d'aire deux (donc $n=2$), il faut couper chaque carré-unité selon sa diagonale et les assembler en prenant pour côté cette diagonale.

Solution: On trace une diagonale, par exemple AC; puis on construit un carré ACEF. C'est le carré demandé.

(AC) partage ABCD en deux triangles de même aire:

$$(ABC) = (1/2) \times (ABCD)$$

Par la symétrie de centre B, $(ABC) = (BEF)$

Par la symétrie d'axe (AB), $(ABC) = (ABF)$

Par la symétrie d'axe (BC), $(ABC) = (BCE)$

Donc $(ACEF) = 4x(ABC)$ ou $(ACEF) = 2x(ABCD)$

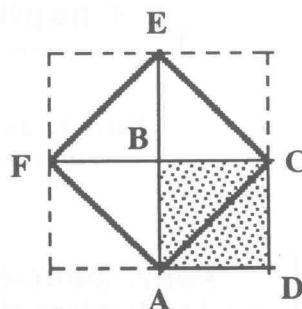


schéma 1

Il s'agit maintenant de généraliser la méthode décrite dans l'exercice IV 1 quand n est la somme de deux carrés d'entiers; selon les cas, les carrés seront découpés différemment.

Exercice IV 2-

Construire un carré dont l'aire est cinq fois celle du carré ABCD; justifier cette construction.

Solution: On remarque que $5 = 2^2 + 1^2$.

On juxtapose deux carrés; on trace une diagonale du rectangle obtenu: on a alors deux triangles dont l'aire est égale à celle de ABCD.

On recommence pour obtenir quatre triangles identiques et enfin on juxtapose ces triangles et le carré ABCD comme indiqué sur le schéma 2.

On a bien $(EFGH) = 5x(ABCD)$

Il reste à montrer que EFGH est un carré:

- Les quatre côtés sont les diagonales du même rectangle donc ils sont égaux: EFGH est un losange.
- Les angles EFA et AFG sont complémentaires: le losange EFGH ayant un angle droit est un carré.

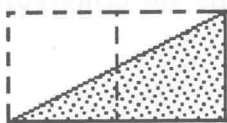
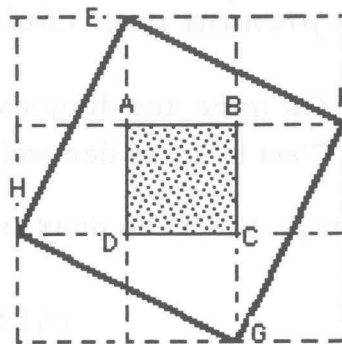


schéma 2



Exercice IV 3-

Construire un carré dont l'aire est huit fois plus grande que celle du carré ABCD; justifier.

Solution:

On remarque d'abord qu'il s'agit toujours du même problème mais avec, cette fois, $n = 8 = 2^2 + 2^2$.

Sur le schéma 3, on utilise, comme pour $n = 2$, des moitiés du "carré de base". Mais on peut remarquer aussi qu'on a tracé une diagonale dans des rectangles de 2 sur 2, selon la méthode du IV2.

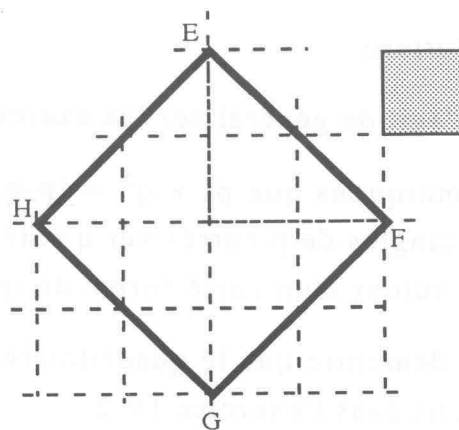


schéma 3

Exercice IV 4-

Construire un carré dont l'aire est dix fois plus grande que celle du carré ABCD; justifier. Faire le même exercice pour un carré treize fois plus grand que le carré ABCD.

Solution:

Remarquons que $10 = 1^2 + 3^2$. On trace une diagonale dans des rectangles de 1 sur 3 et on juxtapose comme indiqué sur le schéma 4

Ensuite, pour $n = 13 = 2^2 + 3^2$, on trace une diagonale dans des rectangles de 2 sur 3 et on juxtapose comme indiqué sur le schéma 4bis.

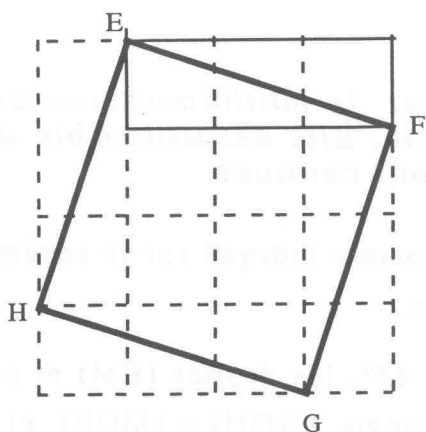


schéma 4

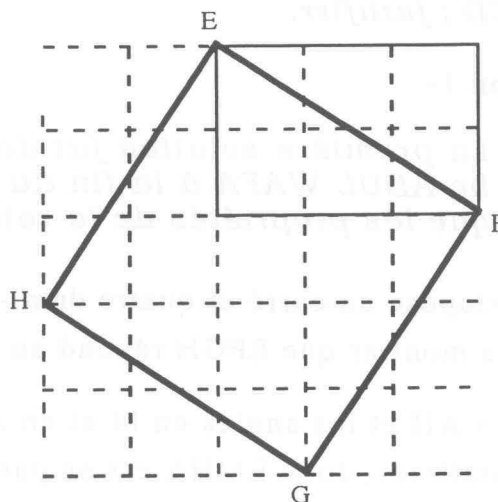


schéma 4bis

Exercice IV 5-

Construire un carré dont l'aire est n fois plus grande que celle du carré ABCD avec $n = p^2 + q^2$; justifier.

Solution:

Il s'agit de généraliser les exercices 2, 3 et 4.

Remarquons que $p^2 + q^2 = (p-q)^2 + 2.p.q$ et traçons une diagonale dans des rectangles de p carrés sur q carrés identiques au carré de base et juxtaposons les autour d'un carré formé de $(p-q)^2$ carrés de base.

On démontre que le quadrilatère obtenu est bien un carré par le raisonnement décrit dans l'exercice IV 2

Notons que l'ordre dans lequel ces exercices seront posés aux élèves n'est pas celui-ci : le parti pris de choisir n comme somme de deux carrés d'entiers semblerait tout à fait gratuit pour l'élève. Il est souhaitable de lui faire d'abord constater que la méthode choisie pour , par exemple $n = 5$, n'est pas applicable pour $n = 3$; puis de lui faire remarquer la différence de nature entre les nombres 3 et 5.

Quand le théorème de Pythagore sera établi, il faudra revenir sur cette remarque pour l'expliciter : il s'agit de faire la somme de deux carrés (figures) ou de deux carrés (nombres).

Exercice IV 6-

Construire un carré dont l'aire est trois fois plus grande que celle du carré ABCD ; justifier.

Solution 1-

La première solution fut donnée par le mathématicien arabe ABUL WAFA à la fin du 10^e siècle. Elle est utilisable dès que les propriétés de la rotation sont connues

On juxtapose un carré et quatre demi-carrés comme indiqué sur le schéma 5 et on va montrer que EFGH répond au problème.

a) $EM = AH$ et les angles en M et en A valant 45° , les droites (EM) et (AH) sont parallèles; donc EMHA est un parallélogramme, $(AOH) = (MOE)$ et

$$(EFGH) = 3 \times (ABCD)$$

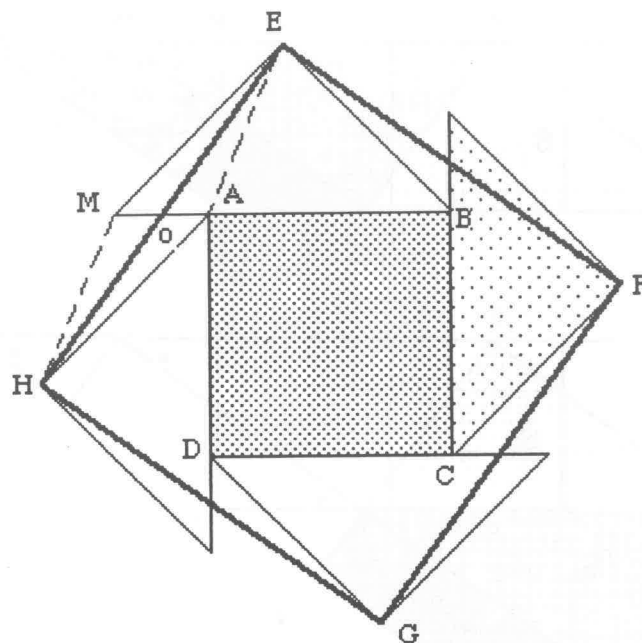


schéma 5

b) On a juxtaposé les morceaux de telle façon que la figure EFGH soit invariante dans la rotation de 90° dont le centre est le centre de ABCD, donc EFGH est un carré.

Solution 2-

La deuxième façon de répondre au problème, est celle de MONTUCLA à la fin du 18^e siècle. Il procède par découpages et on démontre que ce découpage est juste. Elle est généralisable à n carrés formant un rectangle de 1 sur n .

On construit le point E sur (AB) tel que AE soit la diagonale du carré-unité.

On remarque que $DE^2 = DA^2 + AE^2$ donc . $DE = \sqrt{3}$

On prolonge alors (AB) de $BN = AE$

on obtient le parallélogramme ENCD dont l'aire vaut 3. Ce parallélogramme va être découpé en 4 morceaux qui, juxtaposés formeront le carré cherché.

a) Tracé et découpage (schéma 6)

- Par E on trace la perpendiculaire à (DE), elle coupe (DC) en Q; par Q on trace la parallèle à (DE), elle coupe (EN) en M; enfin, on trace par M la perpendiculaire à (MQ), elle coupe (CN) en P.

- On obtient un trapèze rectangle et trois triangles rectangles dont deux sont superposables (car (EQ) est la diagonale du parallélogramme EMQD)

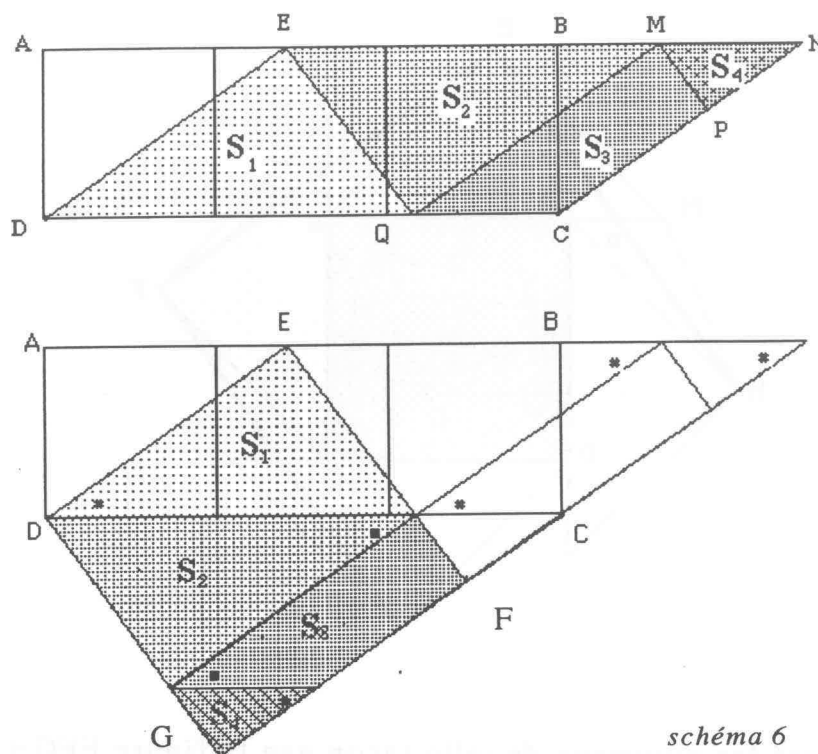


schéma 6

- On juxtapose comme indiqué sur le schéma 6

b) Démonstration

- Les égalités d'angles symbolisées sur le schéma se démontrent simplement par la propriété des angles alternes-internes déterminés par des parallèles.

- En utilisant les angles complémentaires (ou les segments égaux), on démontre que **DEFG est un rectangle**.

- Il reste à démontrer que c'est un carré. Or son aire est la même que celle de DENC: elle vaut 3 (carrés-unités) et $DE = \sqrt{3}$ donc $DE \cdot EF = 3$ et $EF = \sqrt{3}$.

Ayant deux côtés égaux, le rectangle **DEFG est un carré**

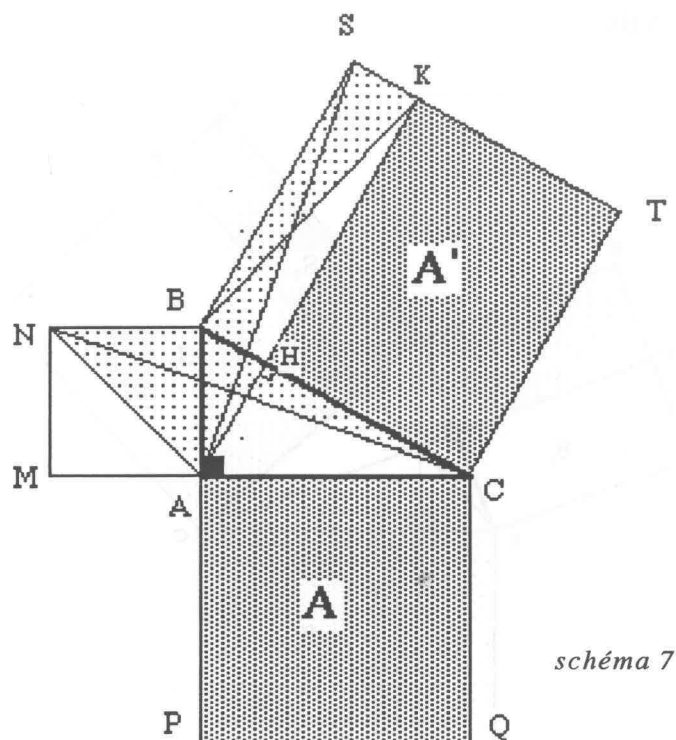
Remarquons que la solution de Montucla nécessite d'évaluer certaines longueurs (l'unité est la longueur du côté du carré-unité) et que, cette mesure étant irrationnelle, on devra attendre la classe de 3ème pour la proposer avec profit. Le fait qu'elle soit généralisable permettra, si on le souhaite, de multiplier les exemples.

L'exercice suivant a pour but de se donner une méthode de construction d'un carré équivalent à la somme de deux carrés et de justifier l'exactitude de la construction, par une méthode purement géométrique ; il s'agit d'établir le "théorème de Pythagore", par la méthode d'Euclide.

Voir en annexe un compte-rendu d'activité sur ce thème.

Exercice IV 7- *ABC est un triangle rectangle en A; démontrer que la somme des aires des carrés construits sur chacun des côtés de l'angle droit est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.*

Méthode: On construit la hauteur (AH) du triangle ABC; on va démontrer que le carré construit sur AB a la même aire que le rectangle BHKS



Démonstration:

Deux triangles ayant la même base et la même hauteur ont la même aire

donc $(NBA) = (NBC)$

La rotation de centre B et de 90° déplace NBC sur ABS

donc $(NBC) = (ABS)$

Et $(ABS) = (KBS)$ puisqu'ils ont même base et même hauteur

En résumé: $(NBA) = (KBS)$

or (NBA) est la moitié de $(ABMN)$ et (KBS) est la moitié de $(BHKS)$

donc $(ABMN) = (BHKS)$

De même $(ACQP) = (CHKT)$

par addition : $(ABMN) + (ACQP) = (BCTS)$

Exercice IV 8- (Généralisation au cas du triangle quelconque "acutangle")

Position du problème : *ABC est un triangle acutangle (dont les trois angles sont aigus) ; on se propose de trouver une relation entre les aires des trois carrés construits sur les côtés de ce triangle.*

Méthode: On construit les trois carrés sur les trois côtés; puis les trois hauteurs du triangle ABC

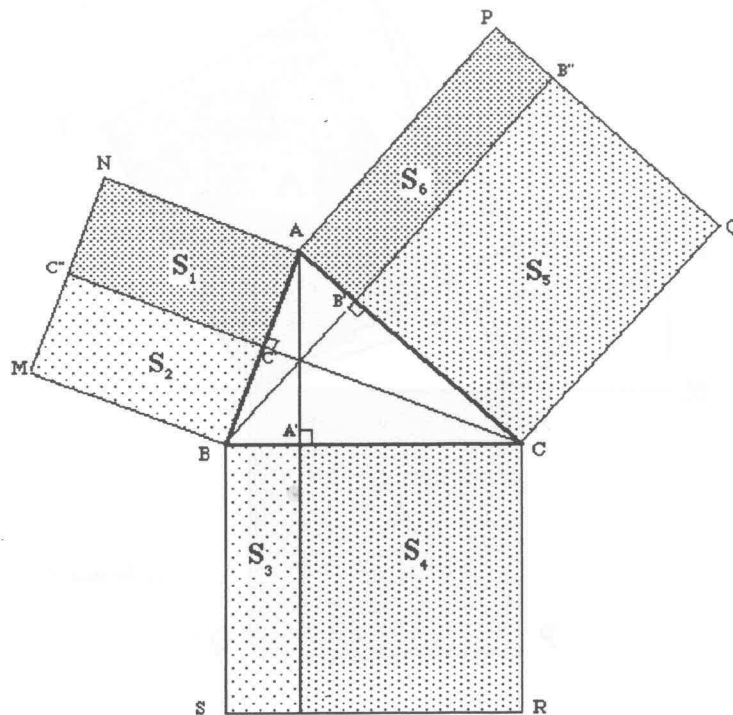


schéma 8

Démonstration : Par la méthode décrite dans l'exercice précédent, on démontre que $S_1 = S_6$ ce qui signifie que $AB.AC' = AC.AB'$

Donc on sait que $S_1 = S_6$ mais aussi que $S_2 = S_3$ et que $S_4 = S_5$ donc, par additions: $S_1 + S_2 + S_5 + S_6 = S_3 + S_4 + 2.S_6$

On répond donc au problème posé en remarquant que:

$$(BCRS) = (ABMN) + (ACQP) - 2x(APB''B')$$

$$(ABMN) = (BCRS) + (ACQP) - 2x(CQB''B')$$

$$\text{et } (ACQP) = (ABMN) + (BCRS) - 2x(BSA''A')$$

On peut commencer par cet exercice et présenter le IV7 comme un cas particulier. Cette progression aurait le mérite de justifier le choix du triangle rectangle ; mais la pre-

mière rencontre avec "Pythagore" ne doit pas être manquée et il nous semble qu'il faut le présenter le plus simplement possible.

Remarquons cependant que l'exercice IV8, certes prématuré au collège, sera d'actualité au lycée à un moment où l'aspect purement géométrique de la question risque d'avoir été oublié. Or on voit que la démonstration d'Euclide conduit très simplement au résultat. L'expression, sous forme d'aires équivalentes, peut paraître lourde mais elle deviendra très simple si on accepte la mesure :

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB'$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC'$$

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2.BC.BA'$$

Ou encore, en remarquant (voir les remarques finales du chap.V) que $CB' = CB.\cos\gamma$ si γ est la mesure de l'angle de sommet C dans le triangle ABC, on trouve les relations:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos\gamma$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\alpha$$

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2.BC.BA.\cos\beta$$

La propriété de Pythagore étant établie on sait qu'il est toujours possible de construire un carré équivalent à la somme de deux carrés. Ne manquons donc pas de faire construire des carrés ; par exemple un carré équivalent à 5 carreaux du cahier ($5 = 4 + 1$) ou équivalent à 85 carreaux du cahier ($85 = 36 + 49$), etc... et de faire le lien avec les exercices depuis IV1 jusqu'à IV4

En réitérant l'opération, nous pouvons obtenir un carré équivalent à n carrés quelconques ; c'est la construction de "l'escargot de Pythagore", rencontrée dans de nombreux ouvrages. Elle trouve bien sa place ici puisqu'elle permet de construire des carrés dont les aires sont successivement de 2, 3, 4, 5, .. n ... carreaux du cahier.

Inversement, on pourra demander de construire un carré n fois plus grand qu'un carré donné avec un nombre minimum de constructions intermédiaires.

Exercice IV 9-

Construire un carré équivalent à 94 carrés-unité. On cherchera la solution la plus "économique".

Solution

On commence par chercher à décomposer 94 en sommes de carrés d'entiers :

$94 = 25 + 25 + 36 + 4 + 4$ ou $94 = 49 + 36 + 9$ ou $94 = 64 + 25 + 4 + 1$
ou $94 = 49 + 36 + 9$ etc...

On remarque que deux décompositions nous permettent de répondre au problème à partir de trois carrés intermédiaires et, par exemple, la construction du schéma 9, répond au problème posé.

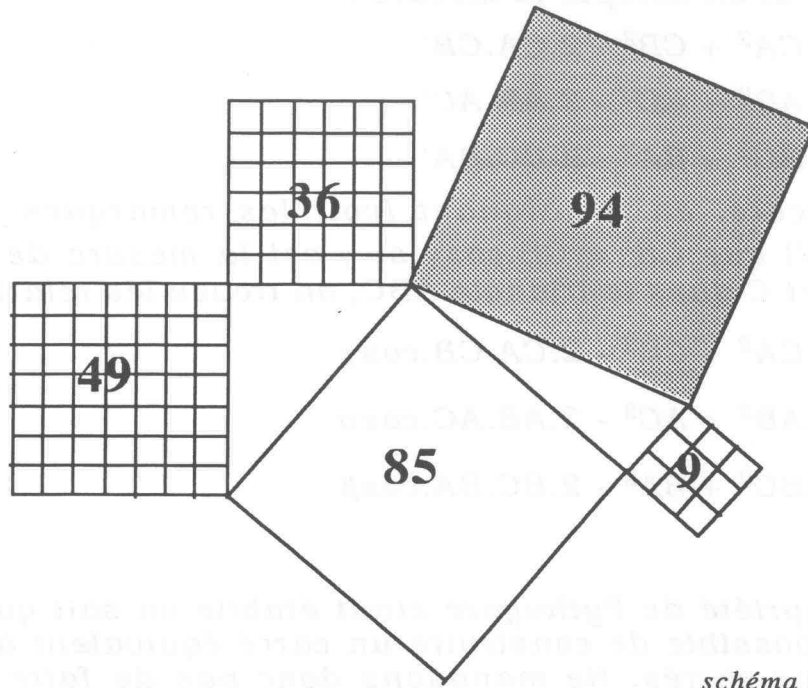


schéma 9

Après ces problèmes de "carré / somme de carrés", on peut proposer de "quarrer un rectangle" c'est-à-dire faire la quadrature d'un rectangle ou encore de trouver un carré équivalent à un rectangle donné. Rappelons d'abord que le problème inverse a déjà été résolu dans l'exercice II 3: il suffit de choisir un carré pour la figure $\mathcal{F}$ pour trouver un rectangle (de côté donné) équivalent au carré.

Le problème de quadrature du rectangle, est résolu dans les *Eléments d'EUCLIDE* (livre II-propositions 5 et 14). Euclide procède par découpages et comparaison d'aires -bien sûr sans aucun calcul- et cette méthode est abordable dès la 5^e pour l'exercice IV 10 et en 4^e pour l'exercice IV 11.

Exercice IV 10 -

ABCD est un rectangle quelconque. On prolonge le côté AB d'un segment BE égal à BC. I est le milieu du segment AE. On se propose de montrer que l'aire du rectangle est égale à l'aire du carré construit sur IA moins l'aire du carré construit sur IB

Démonstration: On construit le carré BEFC sur BC. Sa diagonale (EC) coupe en K la perpendiculaire (IJ) à (AB) ; IEGK est le carré sur IE = IA et JCHK est le carré sur JC = IB.

Notons:

$$A_0 = (ABCD); A_1 = (IB CJ); A_2 = (BEFC); A_3 = (CFGH); A_4 = (CHKJ)$$

On a démontré (ex II 2) que $A_1 = A_3$ et, I étant le milieu du segment AE,

$$A_0 - A_1 = A_1 + A_2$$

ou encore $A_0 - A_3 = A_1 + A_2$

c'est-à-dire $A_0 = A_1 + A_2 + A_3$;

ce qui peut encore s'écrire:

$$(ABCD) = (IEGK) - (JCHK)$$

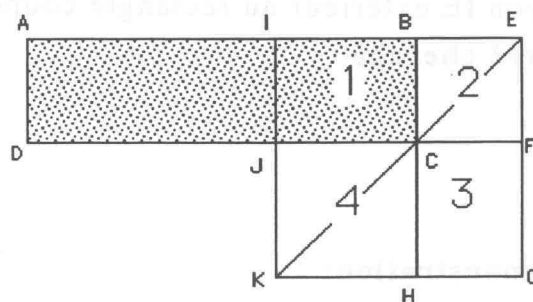


schéma 10

Euclide exprime ce résultat en remarquant que l'aire du rectangle ABCD est la même que l'aire du "gnomon" IEGHCJ

On peut remarquer aussi que si $AB = a$ et $AD = b$, on a $IE = (1/2).(a+b)$ et $JC = (1/2).(a-b)$. En langage algébrique cette égalité s'exprime donc par "le produit de deux nombres est égal au carré de leur demi-somme moins le carré de leur demi-différence".

Cette démonstration est très visuelle et il ne faut pas hésiter à y ajouter du mouvement. Des transparents colorés et un rétroprojecteur aident les élèves à suivre l'enchaînement des gestes qui transforment le rectangle en gnomon.

On note que cette démonstration n'est qu'une étape vers la résolution du problème de quadrature du rectangle ; en

classe de 4ème on poursuivra avec l'exercice IV 11 qui nécessite la connaissance de la propriété de Pythagore.

Ici encore le fait de joindre le geste à la parole aide à la compréhension ; nous n'avons pas demandé aux élèves de résoudre seuls ce problème. Il nous semble que c'est plutôt l'occasion d'un travail classe en entière ; il faut orienter en laissant le temps de la réflexion et de la manipulation des pièces.

Exercice IV 11-

On cherche un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle ABCD donné.

Construction:

On reprend le schéma 10. On prolonge le côté AB d'un segment BE égal à BC; on appelle I le milieu du segment AE. Le demi-cercle de centre I et de rayon IE extérieur au rectangle coupe (BC) en M: **le carré de côté BM est le carré cherché**

Démonstration:

On sait que (propriété de Pythagore): IBM est un triangle rectangle donc le carré construit sur IM est égal au carré construit sur BM plus le carré construit sur IB.

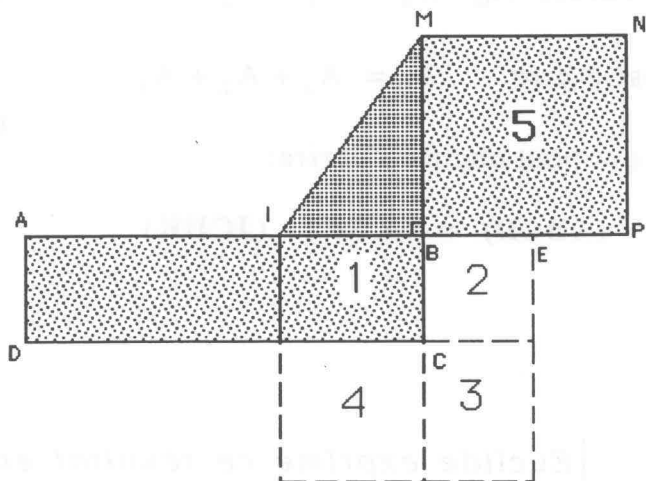


schéma 11

Or $IM = IE$ donc le carré construit sur IM est égal à $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$;

et le carré construit sur IB c'est A_4 ; donc $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = A_4 + A_5$ et, en simplifiant: $A_1 + A_2 + A_3 = A_5$

On a démontré (ex IV 10) que l'aire du rectangle est: $A_0 = A_1 + A_2 + A_3$;

ce qui démontre que: **$(ABCD) = (BMNP)$**

On remarque que, dans le triangle MBI,

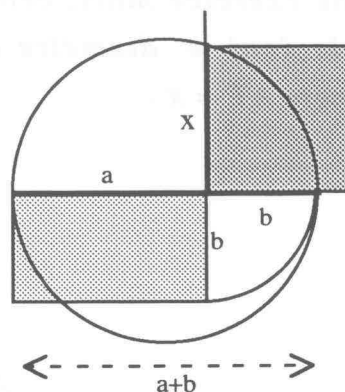
$BM^2 = a.b$, $IB = (a-b)/2$ et l'hypoténuse $IM = (a+b)/2$.

On obtient ainsi un procédé de construction de la moyenne géométrique de deux longueurs.

En effet, c'est le même problème :

- de construire le carré de même aire qu'un rectangle donné

- de trouver x tel que $x^2 = a.b$, où a et b sont deux nombres donnés.



Ce problème de construction de la moyenne géométrique (ou moyenne proportionnelle) a été décrit par de nombreux mathématiciens. Les trois exercices qui suivent suggèrent trois autres méthodes qui ne sont pas toutes abordables directement par nos élèves (ainsi dans le dernier il est question de similitude).

Exercice IV 12-

ABDC est un rectangle ; sur le côté AB on place H tel que $AH = AC$.

P est l'intersection du cercle de diamètre AB avec la perpendiculaire à (AB) passant par H.

Démontrer que le carré de côté PA est équivalent au rectangle ABDC

Autre énoncé : *démontrer que si $AB = a$ et $AC = AH = b$ alors $x^2 = a.b$*

La **solution** est la même que celle de l'exercice IV 11. En effet, on y a démontré que DBHH' a la même aire que le carré construit sur le segment PH et donc le carré construit sur PA a une aire égale à la somme des aires des carrés construits sur PH et AH c'est à dire l'aire du rectangle.

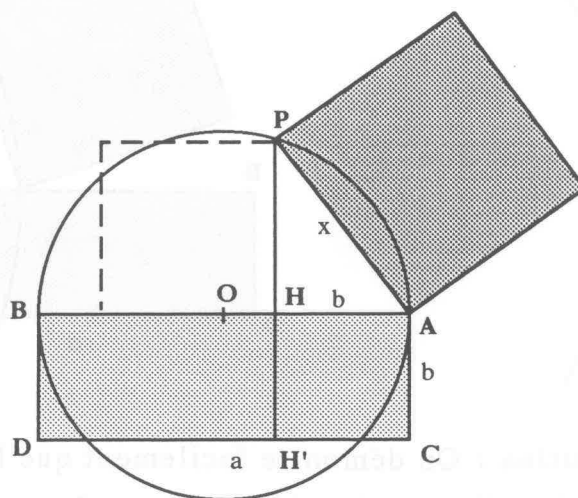


schéma 12

Exercice IV 13-

Même exercice mais, cette fois, on a construit la tangente issue de A au cercle dont le diamètre est le segment HB ; soit T le point de tangence. On note $AT = x$.

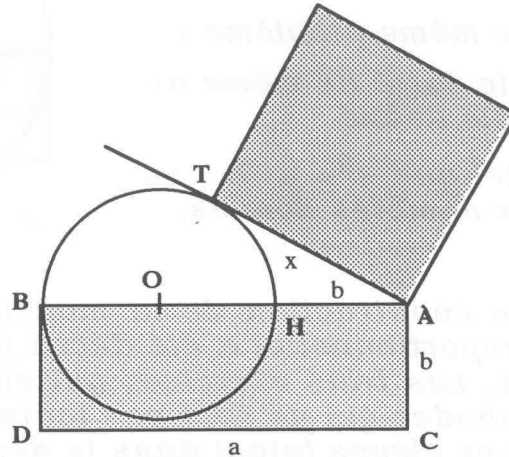


schéma 13

Exercice IV 14-

Même exercice mais, cette fois, on a construit le point B' tel que $HB' = a$ puis E, intersection des cercles de centres B puis B' et de rayon a. Montrer que EH est le côté du carré cherché (équivalent à ABDC).

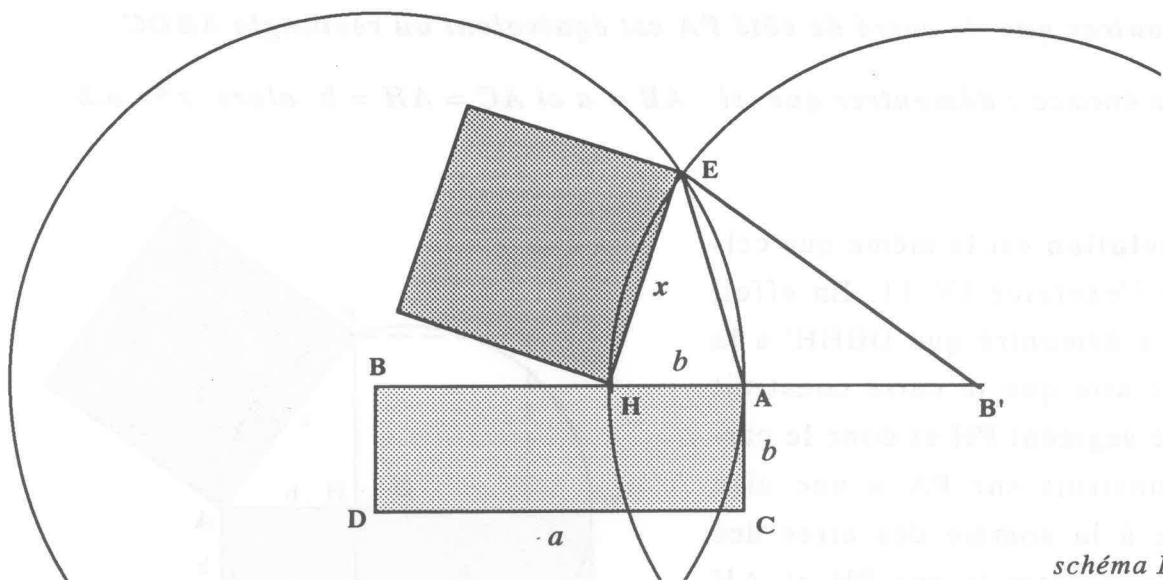


schéma 14

Solution : On démontre facilement que les deux triangles B'HE et AHE semblables (ils sont isocèles et ont même angle de base)

donc $HE^2 = AH \times EB' = a.b$; le côté du carré cherché est EH

Exercice IV16 -

Un triangle étant donné, construire un carré de même aire.

Solution 1- Construire un des trois rectangles de même base et même hauteur que le triangle (voir exercice II 4). Puis construire la médiatrice d'un côté de ce rectangle; on obtient deux rectangles de même aire que le triangle initial. Enfin, construire, par la méthode d'Euclide, le carré équivalent à ce demi-rectangle (exercices IV 10 et IV 11).

Solution 2- ABC étant un triangle quelconque, I et J les milieux des segments AB et AC (respectivement), construire le symétrique K de I par rapport à J et démontrer que IKCB est un parallélogramme. Comparer l'aire de ce parallélogramme à celle de ABC.

Il suffit alors de construire le rectangle de même base et même hauteur que IKCB (exercice III 1), puis le carré équivalent par une méthode décrite dans les exercices IV 10 à IV 14 .

Nous avons donc répondu au problème de la quadrature des figures rectilignes. La progression nous semble exemplaire, pour nous enseignantes. Pour nos élèves il est plus difficile d'en percevoir l'enjeu : pourquoi se poser ce problème? Pourquoi un carré est-il "mieux" qu'un octogone?

Or, c'est du besoin de comparer des surfaces qu'est né ce problème. On sait reconnaître que deux carrés sont équivalents ou, s'ils ne le sont pas, lequel est le plus grand. Par contre deux polygones, sauf s'ils sont semblables, échappent à la comparaison directe. La possibilité de les "quarrer" permet de les comparer sans calculs numériques... les aires sans la mesure.

Pour terminer cette quatrième partie, jetons un regard vers le chapitre I où nous disions tout le bien que nous pensons de la manipulation des puzzles, pavages et autres tangram. Ne serait-il pas possible de mettre un polygone en pièces puis de les réorganiser pour paver un carré? Nous aurions alors "quarré" ce polygone.

Les exercices suivants nous montreront que l'aventure est risquée (nous l'avons déjà vu dans l'exercice IV 12) mais qu'en s'entourant de précautions -c'est à dire de constructions raisonnées- nous pouvons obtenir un découpage juste.

Exercice IV 17

ABC est un triangle équilatéral.

I est le milieu du segment AB, J le milieu du segment AC.

K et L sont deux points du segment BC tels que $BK = CL = 1/4 \cdot BC$.

On trace (IL) puis K' et J' les projetés orthogonaux (resp.) de K et J sur (IL).

1) Découper les quatre pièces $AJL'I$, $BIK'K$, $CJL'L$ et $KK'L$. Avec ces pièces paver un quadrilatère. Démontrer qu'il s'agit bien d'un pavage

2) Le quadrilatère obtenu est-il un carré? Démontrer.

Cet exercice se fait par un coupé-collé d'un triangle équilatéral; le quadrilatère obtenu ressemble à un carré mais ce n'en est pas un! et la différence est très très légère: il est donc nécessaire, comme dans l'exercice IV 7, de DÉMONSTRER!

Cette démonstration ne pose pas de grande difficulté dans sa première partie mais n'est, à la fin, abordable que par des élèves de troisième.

Solution On construit les points indiqués et on découpe les quatre morceaux ; puis on les juxtapose selon le schéma 17.

On déplace S_1 , S_2 et S_3 comme indiqué sur le schéma en remarquant qu'on juxtapose bien des segments de même longueur (rien à calculer) et des angles supplémentaires: on obtient donc un quadrilatère et il n'y a pas de "vide" dans ce quadrilatère.

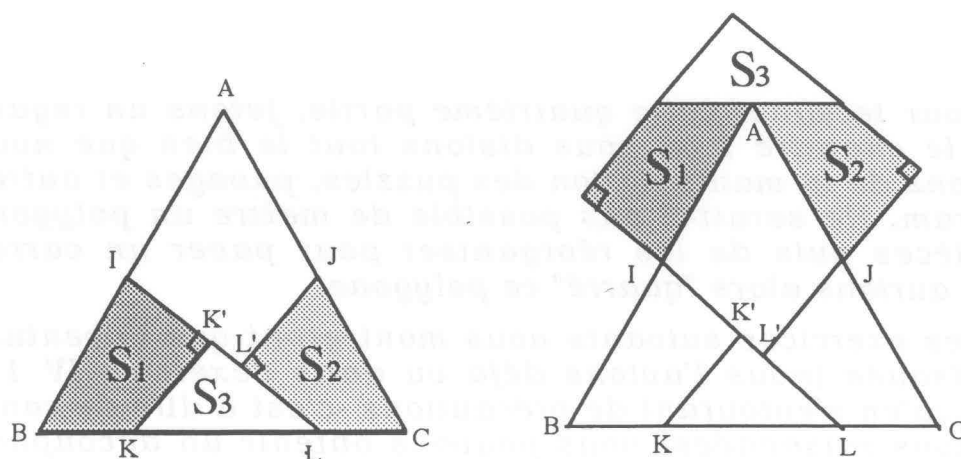


schéma 17

Il reste à chercher s'il s'agit ou non d'un carré.

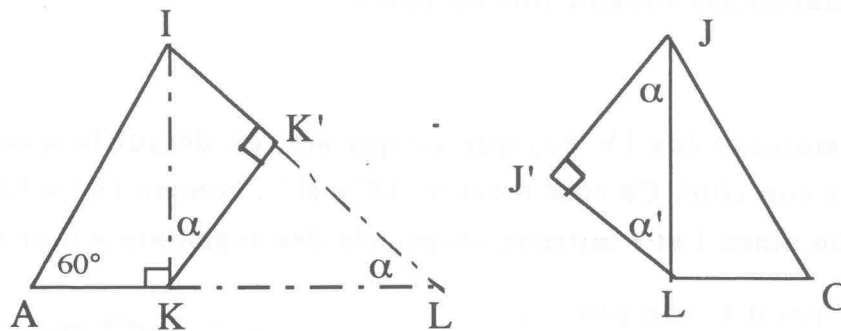


schéma 17 bis

Il a trois angles droits: **c'est un rectangle.**

Comparons maintenant ses côtés en prenant $BC=4$ (unités de longueur)

donc $BI=2$ et $BK=1$. L'un mesure $x = IJ' + IK'$ et l'autre mesure $y = 2.JJ'$

Dans IBK- L'angle IBK mesure 60° et $BI = 2.BH$ donc IBK est un triangle rectangle (demi-équilateral) et $IK = \sqrt{3}$

- Dans IKL rectangle en K on applique le théorème de Pythagore: $IL = \sqrt{7}$ et

$$\cos \alpha = 2/\sqrt{7}$$

- Dans K'KL, on déduit que $LK' = 4/\sqrt{7}$ donc $IK' = 3/\sqrt{7}$

- Dans J'JL, on sait que $JL = \sqrt{3}$ et sont complémentaires donc

$$\sin \alpha' = \cos \alpha \text{ et } J'L = 3/\sqrt{7} \text{ et } JJ' = 2\sqrt{3}/\sqrt{7}$$

On trouve donc $x = \sqrt{7}$ et $y = 4.\sqrt{3}/\sqrt{7}$ par conséquent **ce n'est pas**

un carré.

Notons que la différence est "très petite" puisque la différence $x - y$ vaut environ 0,027 unité de longueur et donc le collage fait illusion...

Remarque: On n'a donc pas construit un carré équivalent à ABC.

Pourtant une bonne préparation du découpage va nous permettre dans l'exercice suivant de répondre au problème

Exercice IV 18

ABC est un triangle équilatéral. Modifier le découpage de l'exercice IV 17 pour que le quadrilatère obtenu soit un carré.

Solution

On vient de remarquer (ex IV 17) que ce qui met en défaut le quadrilatère est la mesure de son côté. Ce côté mesure: $IK' + IL'$; comme $IK' = LL'$, le côté mesure IL . On place I et J milieux respectifs des segments AB et AC.

On construit le point L non plus au quart du segment CB mais sur ce segment, à une distance de I égale au côté du carré équivalent au triangle ABC ; ce que l'on sait faire, par exemple, par la méthode d'Euclide décrite dans l'exercice IV 11 (schéma 18). Sur ce schéma h est la mesure de la hauteur du triangle équilatéral ABC.

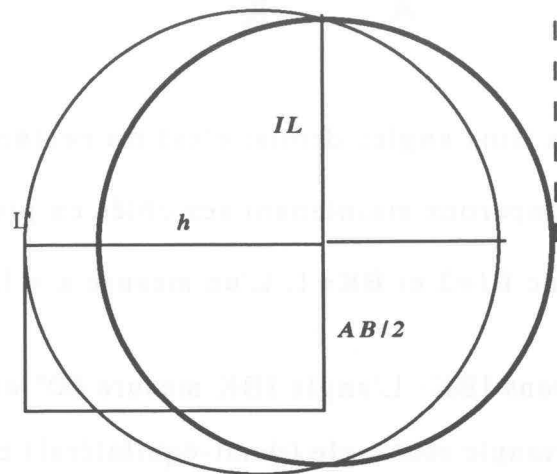


schéma 18

On place le point K sur le segment BC tel que $KL = BC/2$ (schéma 18 bis)

Puis les points K' et L' respectivement projections orthogonales de K et J sur (IL). On obtient comme précédemment quatre pièces. On déplace S_1 , S_2 et S_3 . On obtient un pavage d'un rectangle. Ce rectangle ayant pour côté IL est bien un carré équivalent au triangle ABC.

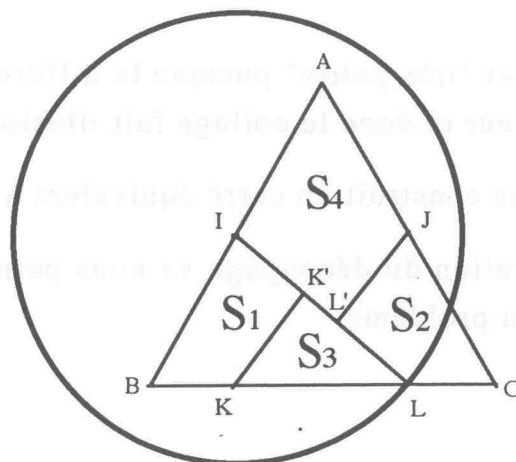


schéma 18 bis

Exercice IV 19

L'hexagone régulier ABCDEF étant donné. Découper les cinq pièces puis les juxtaposer pour paver un carré.

Il s'agit du même problème que dans l'exercice I 4. Mais on peut maintenant expliquer sa construction et démontrer que le pavage est juste.

On remarque d'abord que, dans ce coupé-collé, AK sera le côté du carré.

1) construction du segment AK- L'hexagone est formé de six triangles équilatéraux de côté AB et donc il est égal à un rectangle de longueur $3 \cdot AB$ et de largeur OH (O centre du cercle circonscrit à l'hexagone) et H pied de la hauteur de OAB). La quadrature d'Euclide (exIV 11) nous donne la longueur AK que l'on reporte à partir du sommet A ; on obtient K sur le segment CE.

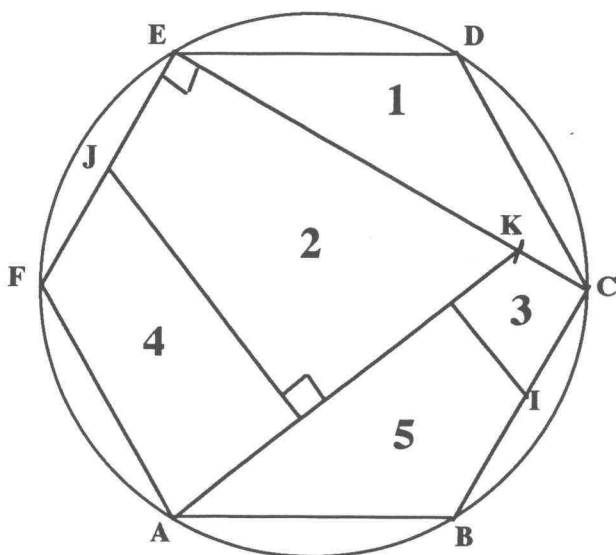


schéma 19

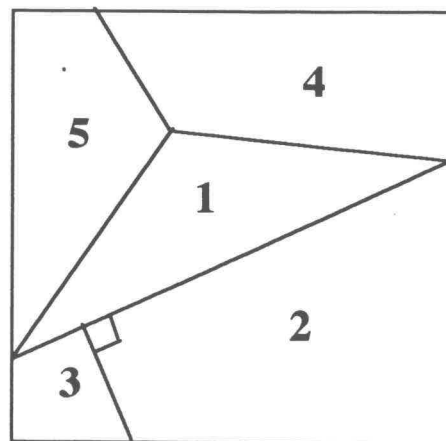


schéma 19bis

De I et J, milieux des segments EF et BC, on trace les perpendiculaires à (AK). On obtient les cinq pièces que l'on découpe.

On déplace alors les pièces pour former le quadrilatère du schéma 19 bis.

Démontrons qu'il s'agit d'un carré... On montre (c'est simple mais un peu long) que les longueurs des segments et les mesures des angles permettent un pavage exacte de cette figure.

- Elle a quatre angles droits, c'est un rectangle.
- Son aire est celle de l'hexagone et son côté celui d'un carré de même aire que l'hexagone, donc c'est un carré.

A propos de ces deux derniers exercices, remarquons que la question principale n'est plus la simple quadrature du triangle ou de l'hexagone régulier. Quarrer c'est construire un carré de même aire ; alors qu'ici on ajoute une condition supplémentaire : on veut remplir le carré équivalent avec des pièces découpées dans la figure initiale. C'est bien, comme cela a été dit au départ de l'activité, un retour sur les manipulations du chapitre I ; une volonté de retrouver le geste. Et c'est la quadrature du rectangle selon Euclide qui rend ce geste possible et juste.



Annexe

compte-rendu d'une activité autour du théorème de Pythagore en classe de quatrième

1- Approche numérique

Cette activité commence par une présentation des mathématiques grecques de l'époque de Pythagore.

Au VI^e siècle av JC, les Mathématiciens comme Pythagore pensaient que "toute chose est nombre ou rapport de nombres". Ils connaissaient les nombres entiers et rationnels et leurs propriétés (pair, impair...), ils représentaient certains nombres par des figures géométriques ; ce sont les nombres figurés tels que les nombres carrés. Le 1, le 4, le 9 pouvaient être ainsi représentés :



Exercice 1- *Est-il possible de disposer un certain nombre de "cailloux" sous forme d'un carré, puis ce même nombre sous forme de deux carrés ? Trouver plusieurs exemples.*

Dans un premier temps, les élèves recherchent des solutions sous forme de dessins et constatent qu'il n'est pas possible de compléter le carré "3" avec 4 croix pour obtenir un carré, mais que le carré "4" complété avec 9 croix donne un carré.

La démarche devient ensuite calculatoire ; le manque de maîtrise de l'arithmétique apparaît comme un obstacle.

Comme pour les mathématiciens grecs du VI^e siècle av JC. , les nombres rationnels ne permettent pas de répondre à toutes les situations.

La recherche de solutions numériques est abandonnée au profit de solutions géométriques.

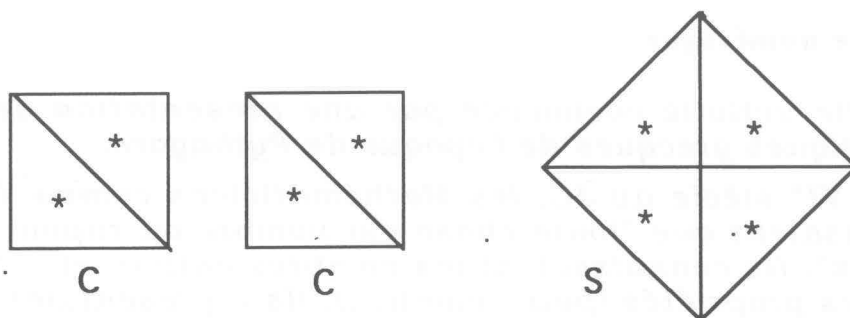
II- Approche géométrique

Exercice 2- *À partir d'un carré donné, construire un carré d'aire double .*

Autre formulation : *on dispose de deux carrés de même aire, construire un carré dont l'aire est la somme des aires des deux carrés donnés.*

Voir aussi exercice IV 1

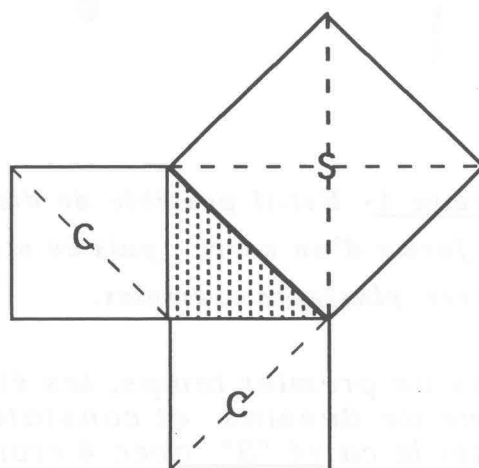
Les élèves disposent de feuilles de papier, ciseaux et colle. Les découpages/reconstitutions de figures mais aussi les reports de figures permettent d'obtenir les représentations attendues.



Certains élèves tentent alors de faire un retour en arrière : la solution " $4 + 4 = 8$ " a été oubliée dans la recherche précédente, mais "8" n'est pas un nombre carré.

Une analyse de la figure s'impose : le carré S a pour côté la diagonale d'un carré C.

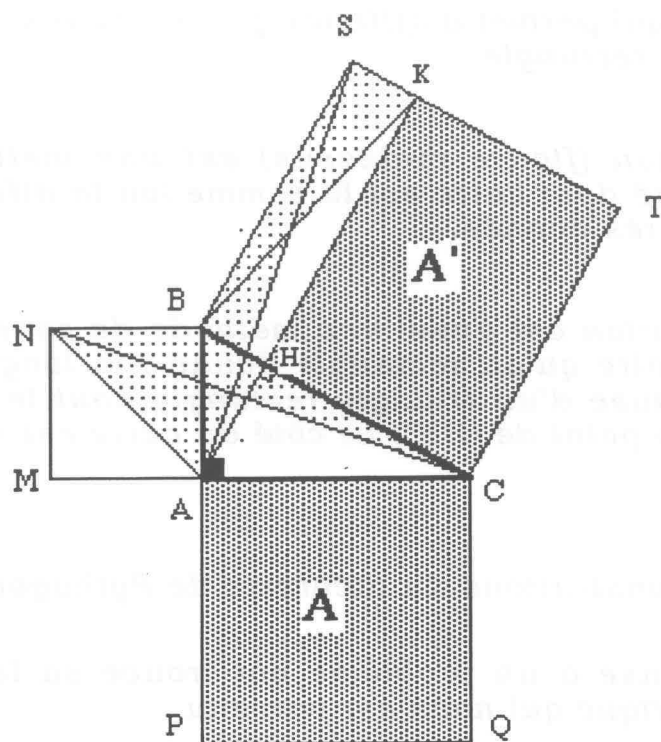
Or cette diagonale est l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle. D'où la disposition des trois carrés sur les trois côtés du triangle rectangle isocèle.



Retour à l'exercice 1 : après avoir construit les carrés 3, 4, 5 et 6 les élèves constatent que les carrés 3, 4, 5 encadrent un triangle "rectangle" alors que les carrés 4, 5, 6 encadrent un triangle qui n'est visiblement pas rectangle. Ce résultat exprime un lien entre la longueur des côtés d'un triangle et sa nature, encore faut-il s'en assurer!

Le problème est reformulé : si un triangle est rectangle, comment savoir que la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale au carré construit sur l'hypoténuse?

Deux exercices sont alors proposés pour répondre à cette question : exercice I 1 et exercice IV 4



La hauteur (AH) du triangle ABC délimite le rectangle BHKP dans le carré BCTS. Il s'agit de démontrer que le carré construit sur AB a la même aire que le rectangle BHKP ou encore, en suivant l'idée d'Euclide, que les triangles d'aire-moitié BNA et BSK ont la même aire.

La clé consiste à exhiber le triangle ABS. Le découpage de ce triangle permet d'une part de remarquer qu'il a même base et même hauteur que BSK et, par un mouvement de rotation autour de B de 90° , qu'il se superpose à BNC.

Il reste à prouver que BNC est égal à BNA. Ce qui paraît évident aux élèves... compte tenu de la figure. Or ici la propriété "même hauteur" n'est pas applicable que parce que la droite (AC) est parallèle à (BN) ou encore l'angle MAB du carré et l'angle BAC sont droits. Ce fait établit l'égalité:

$$(AMNB) = (BHKP).$$

De même

$$(ACQP) = (CHKR)$$

et, par addition, $(ABMN) + (ACQP) = (BCRS)$

On remarque alors :

1-Si ABC n'est pas rectangle en A, les points C, A et M ne sont pas alignés, les triangles ANB et CNB n'ont pas la même aire et par conséquent :

$$(AMNB) \neq (BHKP) \text{ et } (ACQP) \neq (CHKR)$$

donc $(ABMN) + (ACQP) \neq (BCRS)$

Ainsi c'est bien la donnée "triangle rectangle" qui fait le lien entre nature du triangle et le fait que la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale au carré construit

sur l'hypoténuse. Ce qui permet d'affirmer que les carrés 3 , 4 , 5 encadrent un triangle rectangle

2- La configuration (figure ci-dessus) est une méthode de construction d'un carré dont l'aire est la somme (ou la différence) des aires de deux carrés donnés.

3- Cette configuration est aussi une méthode de construction d'un carré de même aire qu'un rectangle donné : la longueur CT est celle de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le sommet de l'angle droit est un point de (HK). Le côté du carré est AC.

Parmi toutes les démonstrations du théorème de Pythagore, celle-ci

-apporte une réponse à un problème qui trouve sa légitimité dans le contexte historique qui nous est parvenu

-réactive les propriétés rencontrées dans les cours précédents.

Les découpages-assemblages, agrandissements, manipulations, exposés autour de ce travail aboutissent au fait que les élèves ne réduisent plus le théorème de Pythagore à une simple formule. La configuration d'Euclide est enregistrée. L'équivalence entre la nature du triangle et la relation entre les longueurs des côtés s'en déduit facilement.

Quelques remarques avant d'aborder les exercices que nous pouvons proposer sur le thème des droites du triangle.

1) Dans ce chapitre plus encore que dans les autres, il convient de se méfier du vocabulaire ; on va parler de médianes, médiatrices, bissectrices... nous savons tous que, faute d'un bon apprentissage, les confusions sont inévitables. Or donner la "définition" d'un objet géométrique n'est pas si simple ; cela suppose un choix de la part de l'enseignant ; ce choix doit être clairement exprimé et aussi clairement différencié des "propriétés" de cet objet. Nous indiquerons quels ont été nos choix de définitions.

2) Ne perdons pas de vue notre objectif : il s'agit de traiter le programme de mathématique des classes de collège ; c'est-à-dire de faire percevoir à nos élèves la nécessité du raisonnement ; raisonnement qui, en géométrie, commence par l'analyse d'une figure dans laquelle on va reconnaître une situation où l'on pourra appliquer des propriétés établies au préalable. Il nous semble que cet enchaînement "démonstration - théorème - démonstration - etc" commence à être réellement perçu en classe de quatrième. Il nous apparaît donc essentiel d'insister sur cette notion de "théorème", propriété acquise, inscrite dans un bilan de cours et apprise!

On ne reviendra pas ici sur la propriété des médiatrices des côtés du triangle ; le fait qu'elles soient concourantes se démontre très simplement, dès la sixième, par comparaison de longueurs. Par contre la comparaison des aires permet la démonstration très simple des propriétés des bissectrices et surtout des médianes.

3) Il a été dans les chapitres précédents et il sera ici encore souvent question de "distance". Nous avons constaté qu'il n'était pas superflu de mettre en évidence les sens multiples de ce mot et le fait qu'il s'agit toujours de "distance de quelque chose à quelque chose". Le chapitre I met en place la distance entre un point et une droite (hauteur du triangle) et donc entre deux droites parallèles. Ici, la bissectrice d'un angle sera, à nouveau l'occasion de traiter de la distance d'un point à une droite.

4) Avec les quadratures, nous avons proposé une démonstration du théorème de Pythagore. La comparaison des aires permet aussi d'établir simplement l'autre "grand théorème" que nous appellerons, encore, théorème de Thalès...

Exercice V 1

La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle

1) Soit (D) la bissectrice d'un angle $x\hat{A}y$; soit M un point quelconque de (D) . Montrer que M est équidistant des côtés de l'angle.

2) Soit M un point équidistant des côtés d'un angle $x\hat{A}y$. Montrer que (AM) est la bissectrice de cet angle.

Solution:

1) Si (D) est la bissectrice de l'angle, c'est son axe de symétrie. M étant un point de (D) , la perpendiculaire à (D) qui passe par M coupe les côtés de l'angle en deux points B et C qui sont symétriques par rapport à (D) de même que les deux segments AB et AC et les triangles BMA et BMC .

$$AB = AC \quad \text{et} \quad (\widehat{AMB}) = (\widehat{AMC}).$$

Les triangles ont même aire et même base donc ils ont même hauteur $MH = MK$, ce qui signifie que M est équidistant des côtés de l'angle.

Nous venons de démontrer que **tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle (1)**

2) Si M est équidistant des deux côtés de l'angle, $MH = MK$.

Les deux triangles MAH et MAK sont rectangles donc, d'après le théorème de Pythagore, leurs troisièmes côtés sont égaux : $AH = AK$. Les deux triangles sont symétriques par rapport à (AM) qui est donc axe de symétrie pour le quadrilatère $AHMK$ et, en particulier, pour l'angle $H\hat{A}K$. On vient de démontrer : **tout point équidistant des côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle (2)**

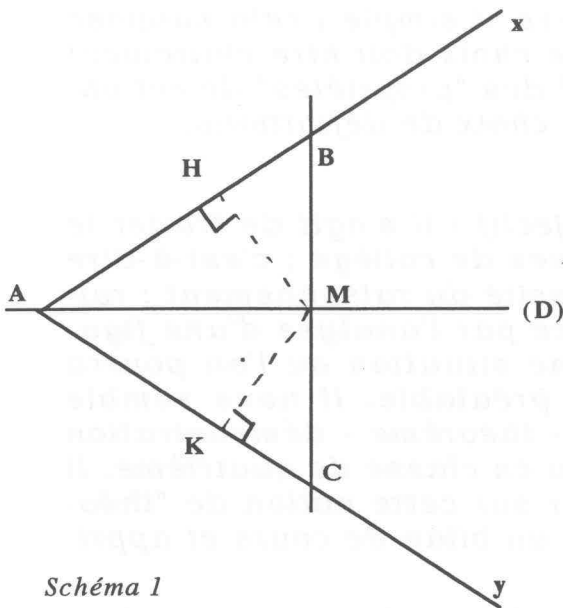
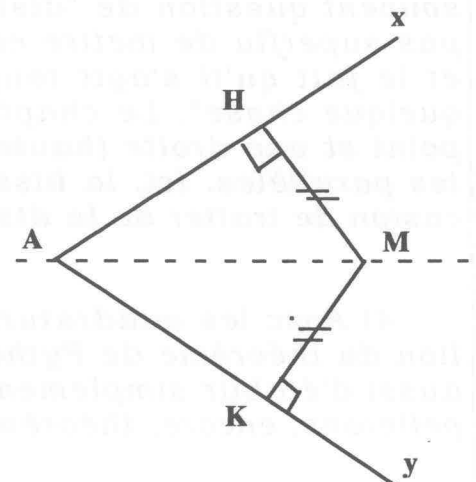


Schéma 1



C'est sur ce type d'exercice que nos élèves découvrent la notion de propriétés réciproques. Cela mérite qu'on s'y attarde un peu... D'autant plus qu'après avoir résolu cet exercice V 1, nous demandons d'établir (par comparaison de distances) que les trois bissectrices des angles du triangle sont concourantes ; démonstration qui permet de mettre en application, immédiatement, l'usage de la propriété (1) puis de sa réciproque (2). Vient ensuite la propriété du point d'intersection de ces bissectrices. Nous n'insistons pas ici sur cet enchaînement classique.

La méthode des aires nous offre une méthode inattendue de répondre à un problème classique de la classe de troisième : partager un segment donné dans un rapport rationnel donné. Et on va voir que cette méthode est particulièrement simple. On peut, par exemple, l'aborder en quatrième au moment de l'étude des bissectrices du triangle ; puis la revoir en troisième après avoir utilisé la méthode classique en application du théorème de Thalès.

Exercice V 2.

La bissectrice (intérieure) de l'angle A coupe le côté BC du triangle ABC en un point M .

Démontrer que : $MB / MC = AB / AC$.

Solution.

Les triangles AMB et AMC ont des hauteurs MH et MH' égales. Leurs aires sont donc proportionnelles aux bases AB et AC.

Ces triangles ont une hauteur commune relative à la base BC. Leurs aires sont donc proportionnelles aux bases MB et MC. Par conséquent:

$$MB / MC = AB / AC$$

Prolongement: Si, de plus, N est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle B et du côté AC et si P est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle C et du côté AB, on a:

$$MB / MC = AB / AC \text{ et } NC / NA = BC / BA$$

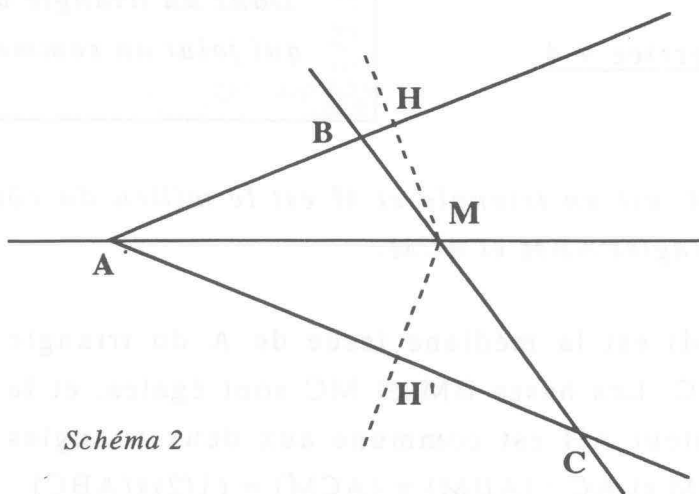


Schéma 2

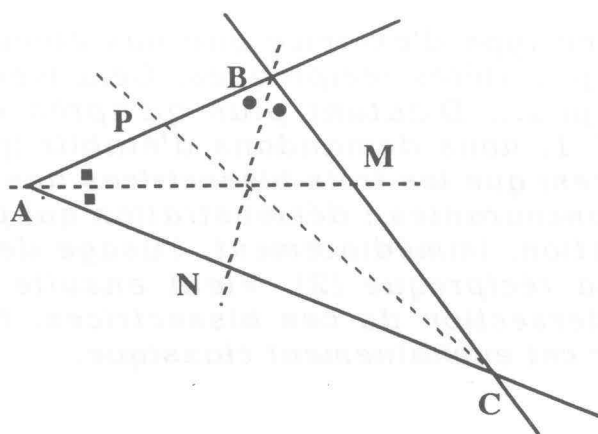


Schéma 2bis

en multipliant membre à membre : $(MB/MC) \times (NC/NA) = (BC/AC) = (PC/PA)$

ou encore : $(MB/MC) \times (NC/NA) \times (PA/PC) = 1$

C'est une démonstration d'un cas particulier du théorème de CEVA.

Exercice V 3

Application du théorème de Ceva : construire un point M sur un segment AB donné et tel que $MA / MB = 4/7$

Indication : Les points A et B sont donnés. On peut construire un triangle ABC pour lequel les côtés CB et CA sont proportionnels à 4 et 7. On trace la bissectrice de l'angle ACB ; elle coupe (AB) en M qui, d'après le résultat de l'exercice V2, vérifie la relation : $MA / MB = CA / CB$ c'est-à-dire $4/7$

Dans un triangle une médiane est une droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé

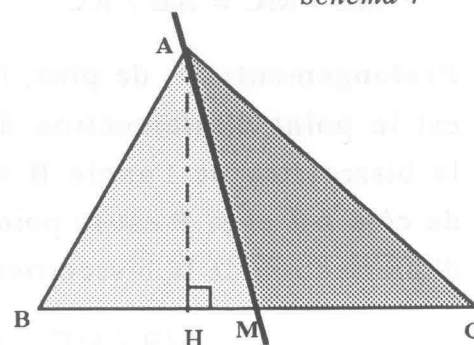
Exercice V 4

ABC est un triangle et M est le milieu du côté BC. Comparer les aires des triangles ABM et ACM.

(AM) est la médiane issue de A du triangle ABC. Les bases BM et MC sont égales, et la hauteur AH est commune aux deux triangles ABM et ACM : $(ABM) = (ACM) = (1/2) \times (ABC)$

Donc : Une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire

Schéma 4



Exercice V 5

Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes

Solution.

Les segments AA' et BB' se coupent en G .

$$(ACA') = (BCB') = (1/2) \times (ABC).$$

Enlevons la partie commune $CA'GB'$:

$$(AGB') = (BGA')$$

(GB') est médiane : $(AGC) = 2 \times (AGB')$

De même: $(BGC) = 2 \times (AGA')$

Les deux triangles AGC et CGB ont la même aire, une base CG commune et sont situés de part et d'autre de (CG) donc (BG) coupe le segment AC en son milieu (ex II 6) ; par définition, (CG) est la troisième médiane.

Les trois médianes ont bien un point commun G ; on l'appelle centre de gravité du triangle

Exercice V 6.

G étant le centre de gravité du triangle, démontrer qu'il est situé sur chaque médiane aux $2/3$ à partir du sommet.

Solution.

Dans l'exercice précédent on trouve :

$$(AGB') = (B'GC) = (CGA') = (A'GB)$$

donc $(AGC) = 2 \times (A'GC).$

Les deux triangles ont une hauteur commune relative aux bases AG et $A'G$.

Les bases sont dans le même rapport que les aires :

$$AG = 2 \times A'G \text{ ou } AG = (2/3) \times AA'$$

$$BG = 2 \times B'G \text{ ou } BG = (2/3) \times BB'$$

$$CG = 2 \times C'G \text{ ou } CG = (2/3) \times CC'$$

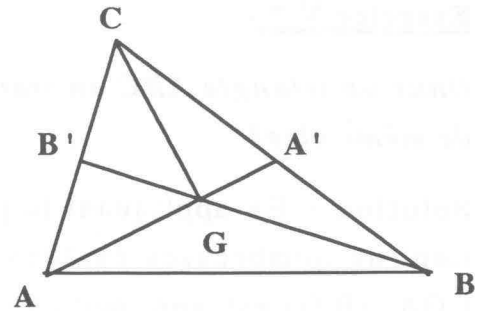


Schéma 5

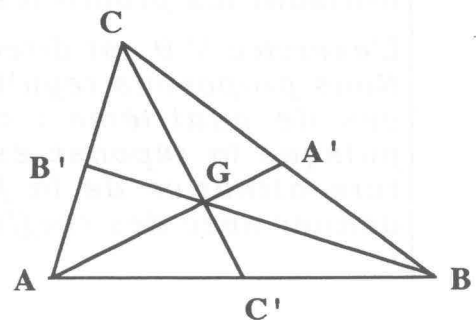


Schéma 6

En résumé : les trois médianes sont concourantes ; leur intersection, appelé centre de gravité du triangle, est situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles en partant du sommet.

Exercice V 7 -

Dans un triangle ABC on trace les trois médianes. Quels sont les triangles de même aire?

Solution : En appliquant la propriété retrouvée dans l'exercice V4, on obtient de nombreuses égalités d'aires. Par exemple (voir schéma 6) : dans CGA, (B'G) est une médiane donc $(CGB') = (AGB')$; mais on a démontré dans l'exercice V6 que $(AGB') = (BGA')$... on démontre ainsi que les six "petits triangles" déterminés par les médianes sont équivalents (mais non superposables dans le cas du triangle quelconque).

Puis, par addition : $(AGC) = (CGB)$, etc..

Comme cela a été signalé dans le chapitre II, ces exercices peuvent être faits en quatrième pour établir les propriétés des médianes qui seront inscrites dans le cours et apprises. Cependant, dès la cinquième, ils permettent des découvertes simples de figures équivalentes non superposables. C'est toujours, dans les classes où nous les proposons, l'occasion d'un travail de recherche efficace.

De très nombreux exercices d'application figurent dans les manuels. L'exercice V 8 propose quelques constructions utilisant les propriétés que l'on vient d'établir.

L'exercice V 9 est directement lié aux comparaisons d'aires. Nous proposons régulièrement la première partie à nos élèves de quatrième : c'est une configuration intéressante puisque la réponse est très simple mais suppose une lecture attentive de la figure ; le prolongement n'est pas à donner avec des coefficients quelconques.

Exercice V 8-

1) Construire le point M sur un segment AB donné tel que $AM = \frac{1}{3} \times AB$

Indication : On place deux points D et C symétriques par rapport à A ; le point M cherché devra être le centre de gravité du triangle BCD.

2) Un segment AB et un point P étant donnés, construire le troisième sommet du triangle ABC dont P est le centre de gravité.

Indication : On place M , milieu du segment AB ; on trace (MP) sur laquelle on place C tel que $PC = 2 \times PM$ (et P sur le segment MC)

Exercice V 9-

ABC est un triangle. B est le milieu du segment AA' , C est le milieu de BB' , A est le milieu de CC' . Quel est le rapport de l'aire du triangle ABC sur l'aire du triangle $A'B'C'$?

Solution:

B étant le milieu du segment AA' et C étant le milieu de BB' , on a :

$$(ABC) = (BCA') = (CB'A')$$

De même :

$$(ABC) = (BC'A) = (C'BA')$$

$$(ABC) = (B'CA) = (C'B'A)$$

Le rapport est donc $1/7$

Prolongement:

Même exercice mais $BA' = x.AB$; $CB' = y.BC$; $AC' = z.CA$ où x, y et z sont trois nombres donnés

Solution:

$$(A'BC) = x.(ABC)$$

$$(A'CB') = y.(A'BC) = xy.(ABC)$$

$$(B'CA) = y.(ABC)$$

$$(B'AC') = z.(B'CA) = yz.(ABC)$$

$$(C'AB) = z.(ABC)$$

$$(C'BA') = x.(C'AB) = zx.(ABC)$$

$$(ABC) = 1.(ABC)$$

$$\text{et, par addition : } (A'B'C') = (1 + x + y + z + xy + yz + zx).(ABC)$$

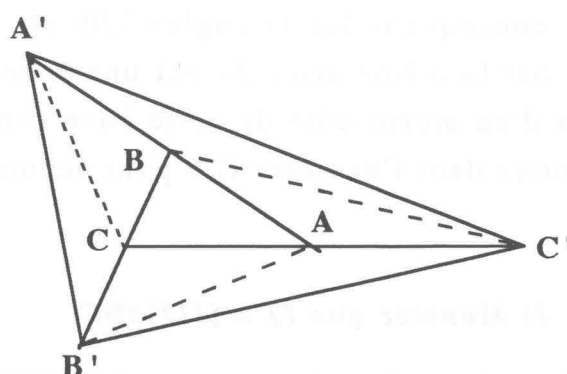


Schéma 7

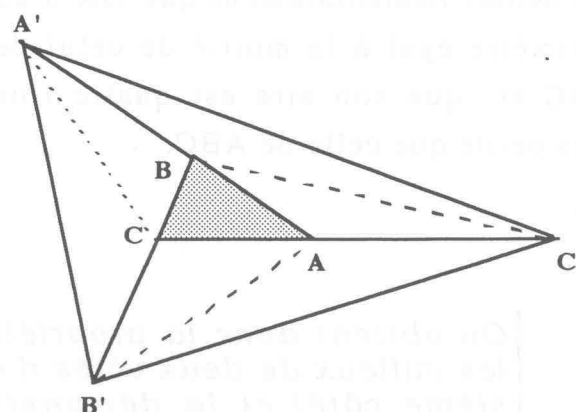


Schéma 8

Exercice V 10.

I est le milieu du segment AB et J est le milieu de AC dans le triangle ABC

1) Montrer que (IJ) est parallèle à (BC).

Solution:

(IJ) est une médiane du triangle AIB:

donc (d'après III 9 page 32)

$$(AIJ) = (IJB)$$

(IJ) est une médiane du triangle AIC:

donc $(AIJ) = (IJC)$

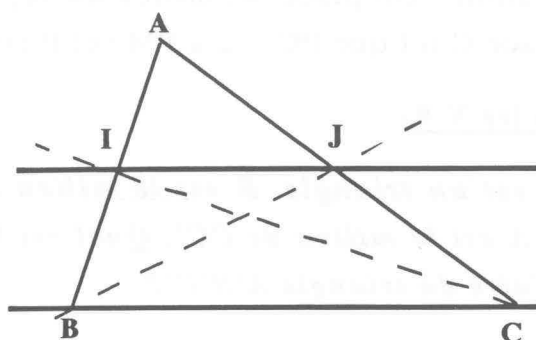


Schéma 9

Par conséquent les triangles IJB et

IJC ont la même aire. Ils ont une base commune (le segment IJ) et sont situés d'un même côté de cette base commune. On applique la propriété démontrée dans l'exercice II 6 pour déduire que (BC) est parallèle à (IJ).

2) Montrer que $IJ = (1/2) \times BC$

K étant le milieu du segment BC, (IK) est parallèle à (AC): IJCK est un parallélogramme donc $IJ = KC = (1/2) \times BC$

3) Comparer aires des triangles IJK et ABC puis leurs périmètres

On déduit immédiatement que IJK a un périmètre égal à la moitié de celui de ABC et que son aire est quatre fois plus petite que celle de ABC.

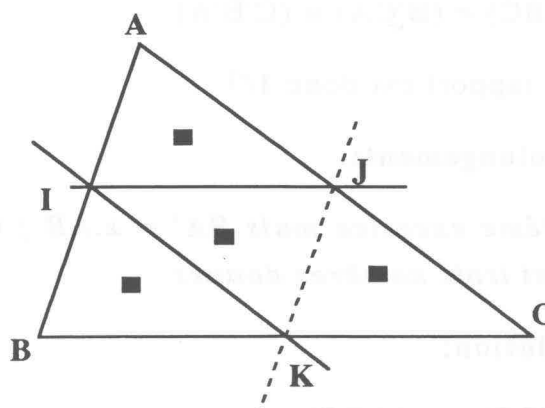


Schéma 10

On obtient donc la propriété classique (la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté) et la démonstration en est particulièrement simple.

Comme pour l'exercice V 1, on s'intéresse ensuite à la réciproque de la propriété que l'on vient d'établir ; là encore la comparaison des aires permet une démonstration simple et rapide.

Exercice V 11

ABC est un triangle. I est le milieu du segment AB. Une droite (d) passe par I, est parallèle à (BC) et coupe le segment AC en J. Démontrer que J est le milieu du segment AC.

Solution:

(BC) est parallèle à (IJ) donc :

$$(BIJ) = (CIJ)$$

I est le milieu du segment AB donc
(IJ) est médiane de AIB et :

$$(AIJ) = (BIJ)$$

En résumé : $(AIJ) = (CIJ)$

ce qui signifie que (IJ) est une médiane de AIC et donc que J est le milieu du côté AC

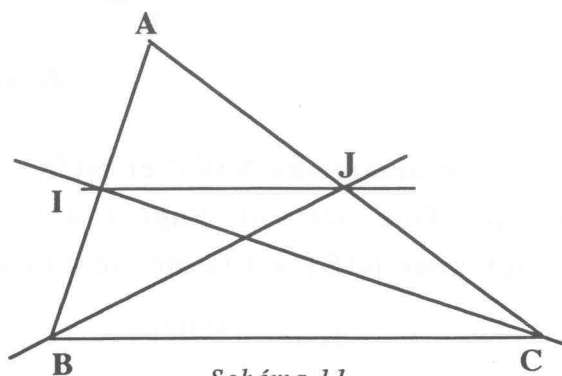


Schéma 11

Exercice V 12

Démontrer que les milieux M, N, P et Q des côtés d'un quadrilatère ABCD forment un parallélogramme. Comparer l'aire de ABCD et l'aire de MNPQ.

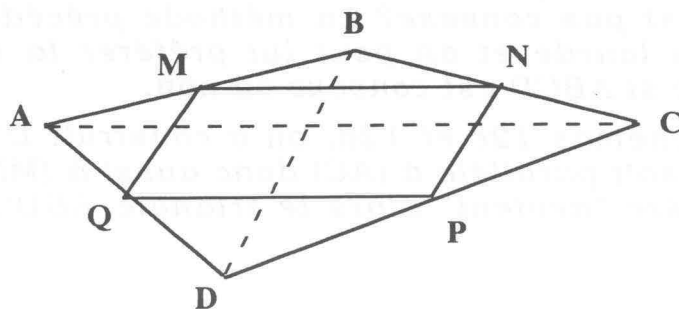


Schéma 12 a

Solution:

D'après la démonstration précédente, dans le triangle ABC, (AC) parallèle à (MN) et, dans ADC, (AC) est parallèle à (PQ); et $MN = (1/2) \times AC = PQ$

MNPQ est un parallélogramme (deux côtés à la fois parallèles et de même longueur).

Soit I le milieu du segment BD; (MN) et (QP) coupent (BD) en J et K (resp.)

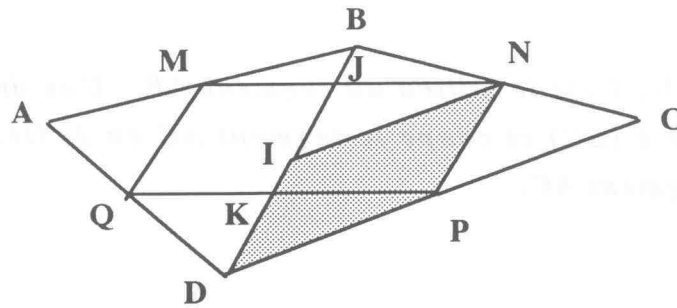


Schéma 12 b

Les parallélogrammes NJKP et NIDP ont même base et même hauteur donc ils ont la même aire ; or, d'après la démonstration de l'exercice V 10, le parallélogramme NIDP est la moitié du triangle BCD

$$\text{donc } (NJKP) = (1/2) \times (BCD)$$

$$\text{De même } (MJKQ) = (1/2) \times (BAD)$$

$$\text{Or } (ABCD) = (ABC) + (BCD)$$

$$\text{donc } (ABCD) = 2 \times (MNPQ)$$

Il sera intéressant de rechercher alors les conditions suffisantes que doit réaliser ABCD pour que le parallélogramme MNPQ soit particulier.

Autre question : que devient cette relation si le quadrilatère ABCD n'est pas convexe? La méthode précédente devient alors très lourde et on peut lui préférer la suivante qui s'applique si ABCD est convexe ou non.

Sur les schémas 12c et 12d, on a construit D' sur (BC) tel que (DD') soit parallèle à (AC) donc aussi à (MN) et (PQ). Le quadrilatère "devient" alors le triangle ABD', en quelque

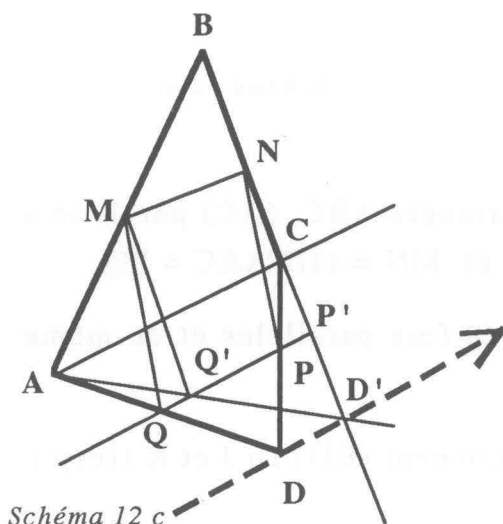


Schéma 12 c

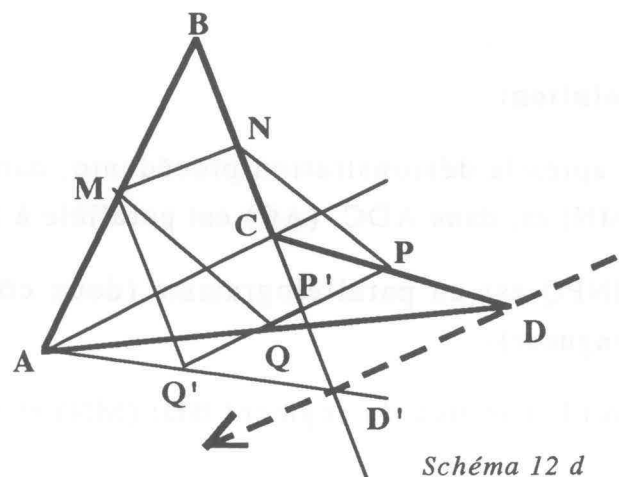


Schéma 12 d

sorte entre convexe et non convexe. Ce triangle ABD' a la même aire que $ABCD$ et on démontre que cette aire est double de $MNP'Q'$.

On obtient simplement $(MNPQ) = (MNP'Q')$; ce qui permet de conclure que, $ABCD$ étant convexe ou non, son aire est double de celle du parallélogramme $MNPQ$

Exercice V 13 - (Réciproque)

A partir d'un parallélogramme $MNPQ$ et d'un point A , on construit B symétrique de A par rapport à M , C symétrique de B par rapport à N , D symétrique de C par rapport à P . Prouver que Q est le milieu du segment DA .

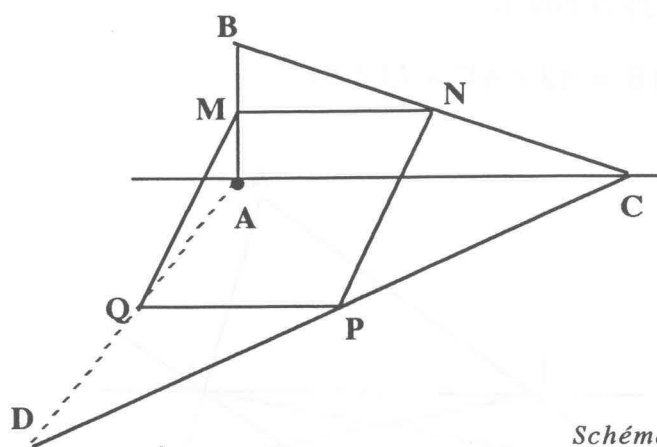


Schéma 13

Solution :

(PQ) est parallèle à (MN) et (AC) est parallèle à (MN) .

(PQ) est donc parallèle à (AC) et passe par le milieu du segment CD dans le triangle ACD : Q est le milieu du segment DA .

Et, comme dans l'exercice 12, on obtient : $(ABCD) = 2x(MNPQ)$

A est un point quelconque et il sera intéressant d'envisager les diverses positions de ce point par rapport aux côtés du parallélogramme $MNPQ$.

Ces deux exercices 12 et 13 constituent un thème intéressant de travail en groupe en 4ème. On adapte facilement les questions au niveau de la classe ; mais, dans tous les cas, ce sera l'occasion de voir évoluer une figure et d'habituer l'élève à s'interroger sur l'unicité d'une réponse. On met souvent en garde contre les "cas particuliers" or un dessin est toujours un cas particulier... Des logiciels tels que Cabri-géomètre seront précieux pour aider à voir la figure se transformer (par exemple de 12c à 12d).

Toujours dans le triangle, montrons comment la comparaison des aires permet une démonstration simple du théorème que nous appellerons "de Thalès" et de sa réciproque.

Pour cela, on dispose de la propriété établie dans le chapitre II : deux triangles de même hauteur ont des aires proportionnelles à leurs bases. Il suffit alors d'une bonne lecture de la figure - ce qui est appelé configuration de Thalès dans le programme - pour obtenir les résultats attendus.

Exercice V 14 -

ABC est un triangle. I est un point du segment AB et J un point du segment AC tels que $(IJ) \parallel (BC)$.

Démontrer que : $AI / AB = AJ / AC = IJ / BC$

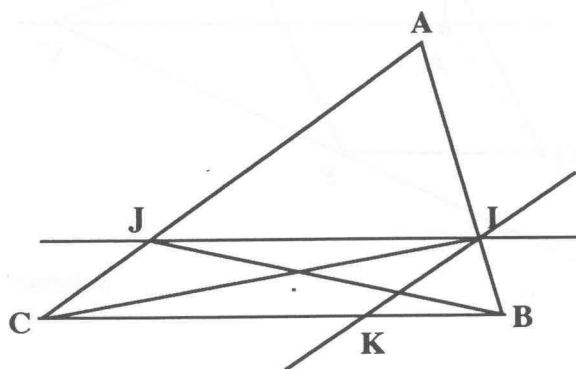


Schéma 14

Solution

$$(IJ) \parallel (CB) \text{ donc } (\angle ICJ) = (\angle IBJ)$$

$$\text{et, en ajoutant } (\angle AIJ), \quad (\angle AJB) = (\angle AIC)$$

Les triangles AJB et AIJ ont même hauteur donc leurs aires sont dans le même rapport que leurs bases :

$$(\angle AIJ) / (\angle AJB) = AI / AB$$

$$\text{De même, } (\angle AIJ) / (\angle AIC) = AJ / AC$$

$$\text{et donc: } \quad \mathbf{AI / AB = AJ / AC}$$

Mais on démontre de la même façon que:

$$(\angle IBJ) / (\angle AJB) = IB / AB \quad \text{et} \quad (\angle JIC) / (\angle AIC) = JC / AC$$

$$\text{donc quand } (IJ) \text{ est parallèle à } (CB) \text{ on a : } \quad \mathbf{IB / AB = JC / AC \quad (*)}$$

Traçons (IK) parallèle à (AC) en appliquant (*) : $IA / AB = CK / CB$

IJKB étant un parallélogramme, $IJ = CK$ donc : $IA / AB = IJ / CB$

On obtient ainsi la propriété demandée:

Si $(IJ) \parallel (AB)$ alors $IA / AB = AJ / AC = IJ / CB$

On peut compléter ce résultat en comparant les aires de ABC et AIJ

Nommons k le rapport des côtés : $IA / AB = k$

Comparons AIJ et AIC : $(AIJ) / (AIC) = AJ / AC = k$

Comparons AIC et ABC : $(AIC) / (ABC) = AI / AC = k$

En multipliant membre à membre : $(AIJ) / (ABC) = k^2$

Les côtés du triangle AIJ sont respectivement proportionnels aux côtés du triangle ABC (dans le rapport k), de plus, le rapport des aires est k^2 .

Exercice V 15 - (Réciproque)

ABC est un triangle. I est un point du segment AB tel que $AI = k.AB$ et J est un point du segment AC tel que $AJ = k.AC$

Démontrer que: $(IJ) \parallel (BC)$

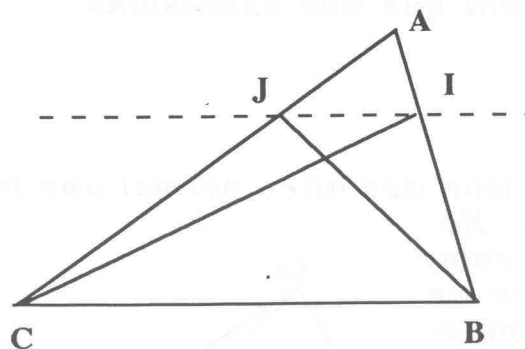


Schéma 15

Solution

ACI et ACB ont la même hauteur donc : $(ACI) / (ACB) = AI / AB = k$

De même : $(ABJ) / (ABC) = AJ / AC = k$ donc ACI et ABJ ont la même aire.

Si on leur soustrait la partie commune AIJ, on trouve que IJC et IJB ont la même aire ; or ils ont la même base donc ils ont la même hauteur et **(IJ) est parallèle à (BC).**

Enfin, pour terminer ce chapitre, remarquons que ce qui vient d'être établi permet une introduction à la trigonométrie :

En se plaçant dans la situation de l'exercice V 14 mais avec ABC rectangle en C , on voit que de $AI / AB = AJ / AC$ on déduit que $AC / AB = AJ / AI$.

La valeur commune de ces deux derniers rapports dépend de l'angle $B\hat{A}C$ et de lui seulement.

On note : $AC / AB = \cos B\hat{A}C$.

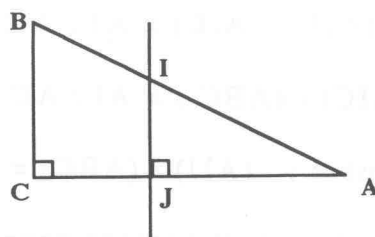


Schéma 16

De même le rapport BC / AB est constant et ne dépend que de l'angle $B\hat{A}C$; on le note $\sin B\hat{A}C$.

Si on veut se placer dans une approche historique, on notera que les premiers calculs retrouvés montrent que, sur un cercle donné, on associait à l'angle $C\hat{A}C'$, la corde CC' . Puis, on a associé la demi-corde, c'est-à-dire un "pli" ("sinus" en latin). Il suffit à développer la trigonométrie et l'usage du cosinus et de la tangente ne sont que des extensions "commodes" du sinus

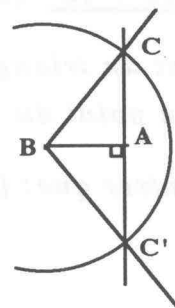


Schéma 17

Enfin, la comparaison des aires permet une introduction de la notion de cosinus. Notons qu'il nous faut comparer deux triangles ce qui nécessite la connaissance des cas d'égalité des triangles.

Ce qui suit constitue une relecture de la figure IV8.

Dans le triangle ABC , on considère B' le projeté orthogonal de B sur (AC) et C' le projeté orthogonal de C sur (AB) .

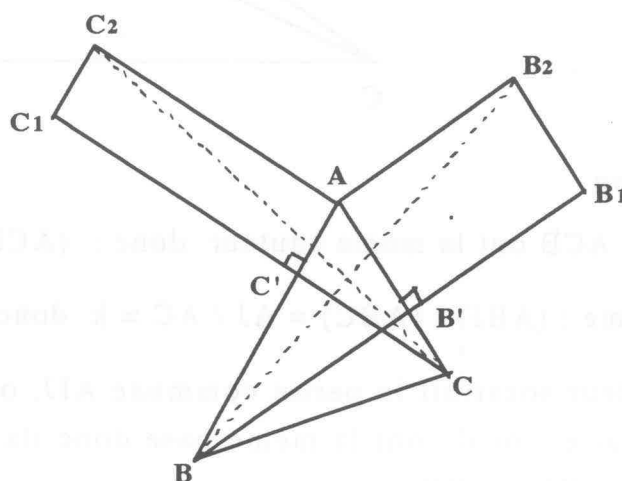


Schéma 18

On trace :

- le rectangle $AB'B_1B_2$ avec $AB_2 = AC$
- le rectangle $AC'C_1C_2$ avec $AC_2 = AB$.

Les triangles BAB_2 et CAC_2 sont égaux (des angles égaux compris entre des côtés égaux), ils ont la même aire et cette aire est la moitié de celle des rectangles $AB'B_1B_2$ et $AC'C_1C_2$.

C'est pourquoi $(AB'B_1B_2) = (AC'C_1C_2)$

ou encore $AC' \times AB = AB' \times AC$

donc $AC' / AC = AB' / AB$

Ces rapports ne dépendent que de l'angle $B\hat{A}C$: ils sont une "fonction" de l'angle.

