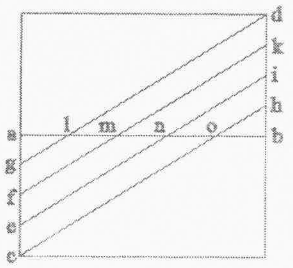
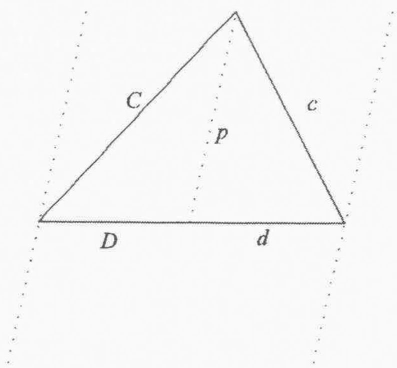
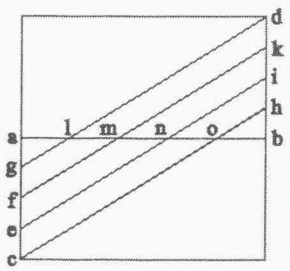
Démontrer avec les aires

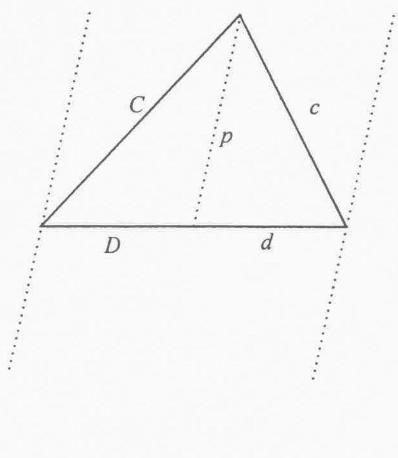
Fascicule n° 1

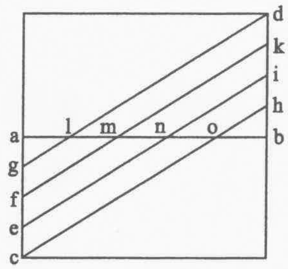
Henry Plane











IREM des Pays de Loire
Centre du Mans

Octobre 2000

Démontrer avec les aires

Octobre 2000

Fasciscule n° 1 par Henry Plane

" L' aire, cette qualité des surfaces planes délaissée, semble-t-il, en fin de 20 ème siècle, est un outil mathématique.

On constatera dans ces pages, que le calcul des superficies et l' usage des formules apparaissent peu. Par contre, à travers les jeux de figures équivalentes - aires égales et de figures semblables - rapport d' aires, la recherche et l' usage des liens entre les aires de deux ou plusieurs figures sont mis en grande pratique pour inciter à la réflexion.

En effet, il s' agit de rappeler et de mettre à la disposition de maîtres et élèves, d' autres cheminements du raisonnement, souvente fois empruntés au cours des siècles et qui ont encore leur rôle à jouer pour obtenir des résultats, mais surtout pour former les esprits par la diversité des procédés mis en oeuvre."

En préparation

Fascicule n° 2 par Anne Gravier & Martine Janvier

Autour de la notion d' aire, et utilisant les matériaux rassemblés par Henry Plane, des séquences d' exercices et d' activités démonstratives effectivement pratiquées dans les classes des collèges.

Fascicule n° 3 par Dominique Bénard

Eclairage historique sur les enjeux mathématiques d' une démonstration sur et avec les aires. Soit la géométrie du collège revisitée avec comme fil rouge la problématique de la mesure.

IREM des Pays de Loire - Centre du Mans -
Faculté des Sciences - avenue Olivier Messiaen 72085 Le Mans cedex 9 - tél: 02.43.83.32.15

Ces cahiers n'ont pas prétention à présenter des innovations mathématiques, au contraire, ce ne sont que glanes dans d'anciens « Elémens de géométrie », dans de vieux livres d'exercices voire dans des cahiers d'élèves datant de quelques lustres seulement.

Toutefois, un objectif a guidé leur réalisation dont la notion d'aire fut le support.

L'aire, cette qualité des surfaces délaissée, semble-t-il, en fin de XXème siècle, est un outil mathématique.[1]

On constatera, dans ces pages, que le calcul des superficies et l'usage de formules apparaissent peu. Par contre, à travers les jeux de « figures équivalentes - aires égales » et de « figures semblables - rapport d'aires », la recherche et l'usage des liens entre les aires de deux ou plusieurs figures sont mis en grande pratique pour inciter à la réflexion.

En effet, il s'agit de rappeler et de mettre à la disposition de maîtres et élèves, d'autres cheminements du raisonnement, souvente fois empruntés au cours des siècles et qui ont encore leur rôle à jouer pour obtenir des résultats, mais surtout pour former les esprits par la diversité des procédés mis en œuvre.

C'est cela qui, à notre sens, est premier dans l'enseignement des mathématiques et qui fut notre guide.

---

[1] Il n'est fait appel qu'aux seules surfaces planes.

Table des Cahiers

Arithmétique et aires
EUCLIDE, PYTHAGORE et autres

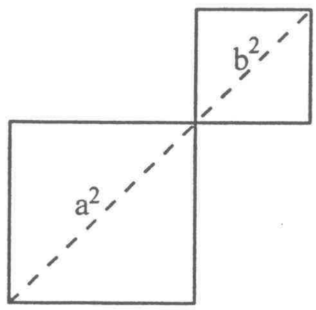
Par un jeu de pliages, découpages et assemblages de surfaces simples, puis par l'étude de relations entre leurs aires -même parfois sans calculer celles-ci des propriétés fondamentales de l'arithmétique peuvent s'établir. C'est " l'arithmétique par la géométrie " comme il fut dit au 17e siècle.

A peu près tout cela se trouvait déjà chez EUCLIDE, en particulier au livre 2 dont on trouvera, en annexe, une formulation des diverses propositions selon nos symboles du 20e siècle. Mais en vingt-trois siècles d'autres présentations et d'autres procédures ont vu le jour après celles exposées au " Musée " d'Alexandrie.

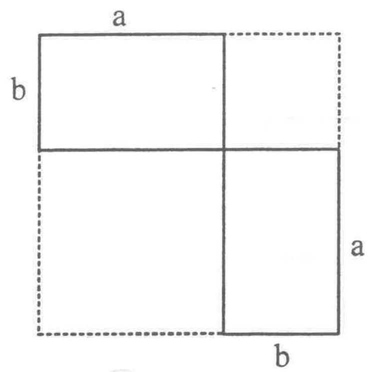
Dans les pages qui suivent quelques-unes seront présentées en réduisant au minimum le discours et en suggérant plutôt le geste. L'expérience a montré qu'en exécutant ces manipulations des élèves ont fait surgir des questions sur rôle et nécessité de preuve et démonstration. N'est ce pas là but à atteindre en sus d'une connaissance mémorisée des résultats ?

I. $(a+b)^2$

Deux carrés (a^2) et (b^2) sont réunis en alignant leurs diagonales.



Pour obtenir ensuite le carré ($[a+b]^2$) il faut adjoindre à cet ensemble deux rectangles ($a \times b$).



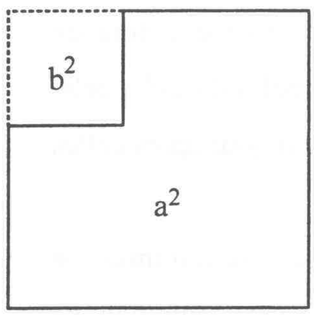
- Compléter le gnomon- disaient les grecs.

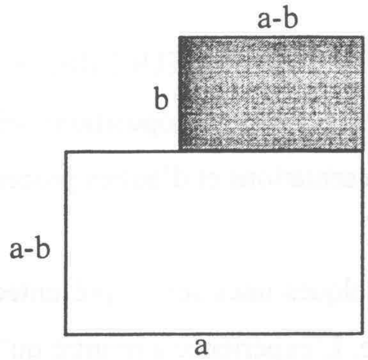
alors $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

- N'oubliez pas le " terme rectangle " ont rappelé longtemps les maîtres

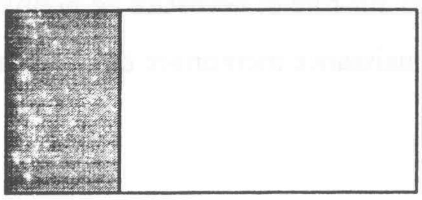
II. a^2-b^2

J'ampute le carré (a^2) d'un carré (b^2).





Puis je découpe un des rectangles qui déborde



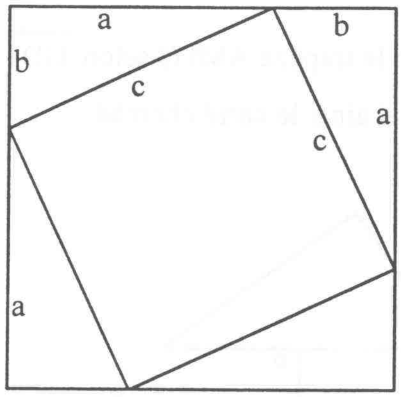
Ce rectangle je viens le mettre dans le prolongement de l'autre.
J'ai le rectangle [a+b] × [a-b]

$$a^2\text{-}b^2 = (a+b)(a-b)$$

III. Deux rectangles ($a \times b$) sont coupés selon une diagonale.

(On suppose $a > b$)

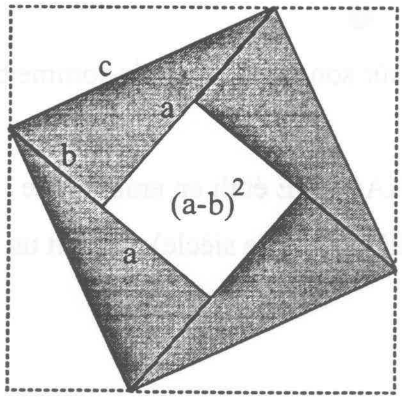
On peut alors les assembler de deux manières :



1) En laissant au centre un carré “ vide ” (c^2) limité par les ex-diagonales.

Les côtés bornent un autre carré $(a+b)^2$

2) On retourne ensuite les quatres triangles rectangles autour des côtés du “ carré ” (c^2). Ces triangles entourent alors un carré de côté ($a - b$).



On a donc :

1°) $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

et 2°) $c^2 = 2ab + (a - b)^2$

alors, selon la fin recherchée apparaîtra :

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

puis : $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

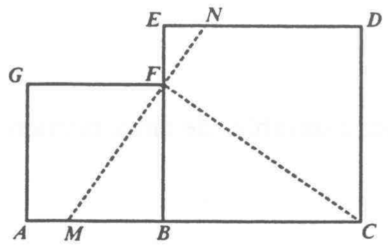
voire : $c^2 = a^2 + b^2$

A ce sujet on cite BASKARA (Inde, 12ᵉ siècle) ou SIMPSON (Angleterre, 18ᵉ siècle).

IV. A partir de deux carrés construire un seul carré

En Inde, ARYABHATA (6è siècle) ou BRAHMAGUPTA (7è siècle) auraient procédé ainsi. Soit le bloc des deux carrés ABFG et BCDE que je découpe selon CF et l'orthogonale MN à CF.

Ensuite je " translate "

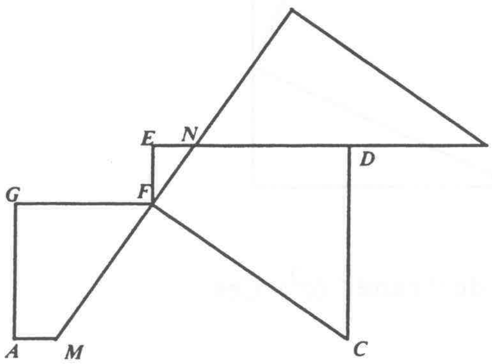


le triangle MFC selon $\overrightarrow{MN}$ ❶

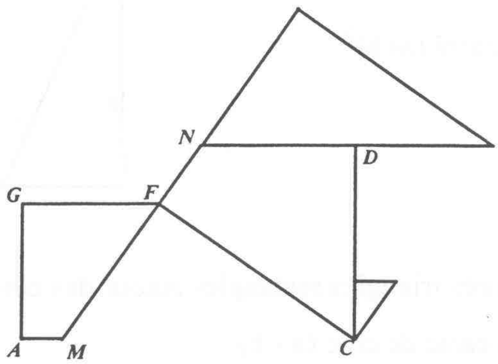
puis le triangle FNE selon $\overrightarrow{FC}$ ❷

enfin le trapèze AMFG selon $\overrightarrow{GD}$ ❸

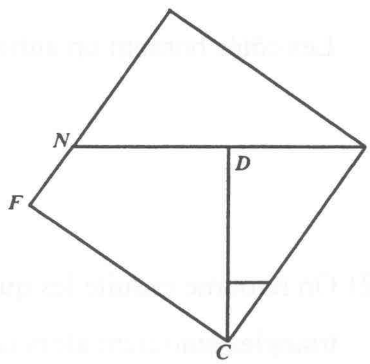
et j'ai ainsi le carré cherché.



❶



❷



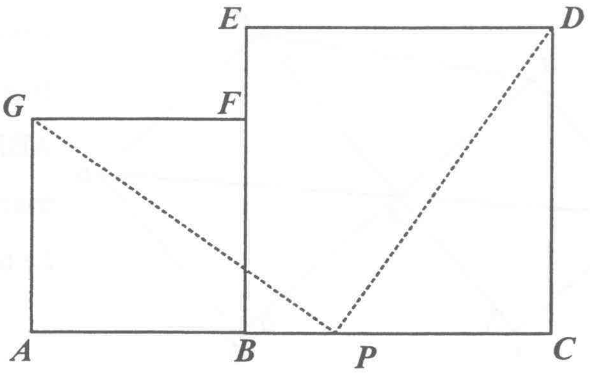
❸

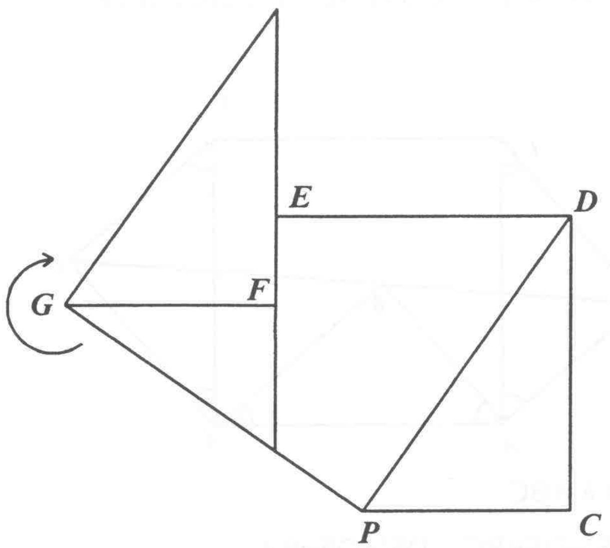
Bien sûr son aire FC^2 est la somme des aires initiales FB^2 et BC^2.

PYTHAGORE était en embuscade !...

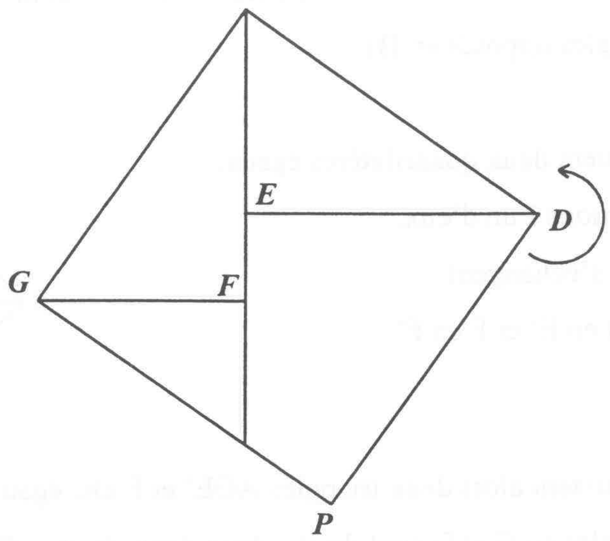
CLAIRAUT (18e siècle) agissait un peu différemment.

Même point de départ : les deux carrés ABFG et BCDE. Mais je repère sur [BC] le point P tel que PC = AB. Alors je découpe selon PD et PG.





①

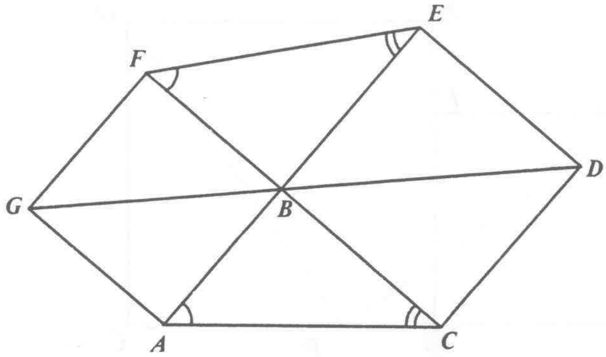


②

Je fais tourner le triangle GAP de trois quarts de tour autour du point G ① puis le triangle DPC de trois quarts de tour également, autour de D ②, et je forme ainsi le carré cherché. (comme AP = BC, $GP^2 = AG^2 + AP^2$).

Deux rotations au lieu de trois translations...

Mânes de PYTHAGORE que voulez-vous encore ? Une troisième manipulation ?



Construire la figure suivante : A partir du triangle rectangle ABC , les carrés BCDE et ABFG et enfin le triangle FBE (égal au triangle de base ABC).

Le tout comprend:

carré AB^2

carré BC^2

et deux triangles ABC.

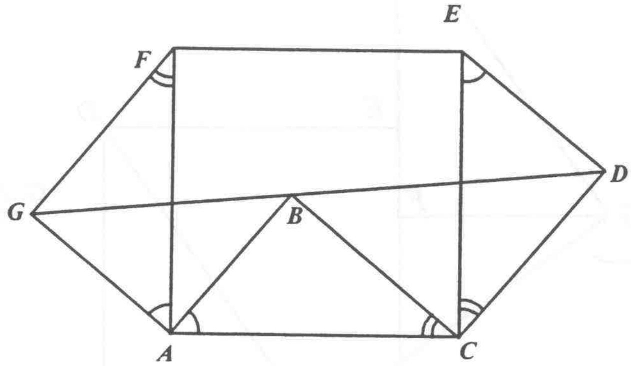
Coupons alors l'ensemble selon GBD (les trois points sont alignés GB et BD étant bissectrices des angles opposés en B).

On obtient deux quadrilatères égaux.

Retournons l'un d'eux.

D et G s'échangent.

E vient en E' et F en F'.



Apparaissent alors deux triangles AGE' et F'DC égaux à ABC.

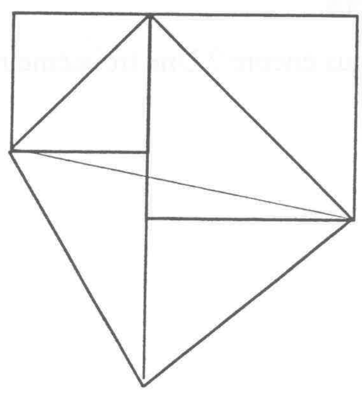
(les angles en G et D sont droits -deux demi-droits-, GE'=DE=BC, DF'=GF=BA).

Au milieu est le carré AC^2 (losange et angle droit)

alors $AB^2 + BC^2 + 2(ABC) = AC^2 + 2\ (ABC)$

et cetera...

Les siècles ont vu naître des dizaines de figures en hommage à l'homme de Samos.



Annexe destinée à qui craint d'user du monument que constituent les " Eléments d'Euclide ".
Formulation avec les symboles modernes des propositions du livre II
afin d'en tirer des exercices.

Les démonstrations reposent uniquement sur des segments de droites. Ainsi la première proposition est donc énoncée : " Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est partagée en un certain nombre de parties, le rectangle compris sous ces deux droites est égal aux rectangles compris sous la droite qui n'a pas été partagée et sous chacun des segments de l'autre ".

Propositions

1- Si $a = x + y + z$ alors $ab = bx + by + bz$

2- Si $a = b + c$ alors $ab + ac = a^2$

3- Si $a = b + c$ alors $ab = bc + b^2$

4- Si $a = b + c$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$

5- Si $b + c = 2a$ $bc + (a - b)^2 = a^2$

6- $(2a + x)x + a^2 = (a + x)^2$

7- Si $a = x + y$ alors $a^2 + y^2 = 2ay + x^2$

8- Si $a = x + y$ alors $4ax + (a - x)^2 = (a + x)^2$

9- Si $x + y = 2a$ alors $x^2 + y^2 = 2[a^2 + (a - y)^2]$

ou $x^2 + y^2 = 2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$

10- $(2a + x)^2 + x^2 = 2[a^2 + (a + x)^2]$

11- Partage d'un segment " en moyenne et extrême raison "
c'est à dire déterminer x tel que $x < a$ et $ax = (a - x)^2$

12- Dans un triangle obtusangle le plus grand côté vérifie

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab'$$

b' projection orthogonale de b sur a

13- Dans un triangle acutangle

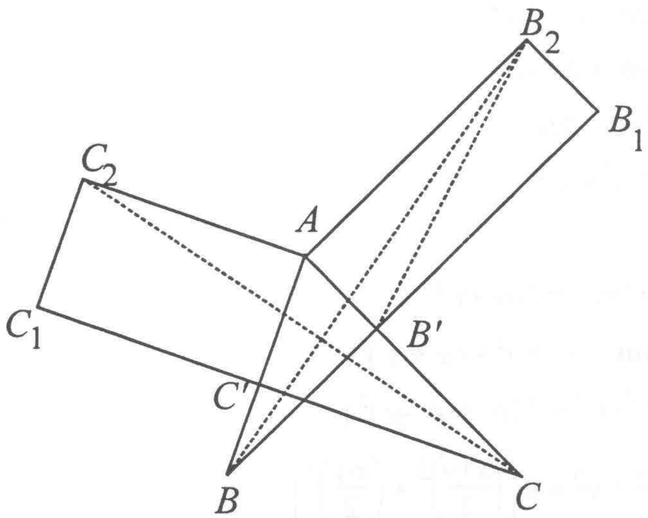
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab'$$

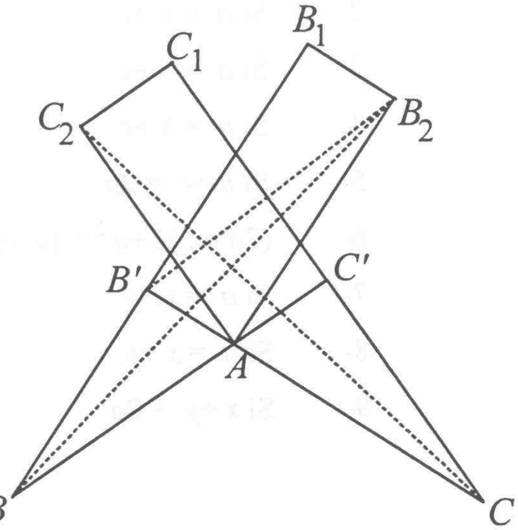
14- Construction du carré $a^2 = bc$.

Toutes les démonstrations reposent sur des aires équivalentes décomposées et assemblées.

Décomposition et recomposition au profit de la géométrie

1 - Soient deux segments AB et AC se projetant l'un sur l'autre, orthogonalement, AB en AB' sur AC et AC en AC' sur AB ou leurs prolongements.





Prolongeons BB' de $B'B_1$ égal à AC et CC' de $C'C_1$ égal à AB puis complétons les rectangles $AB'B_1B_2$ et $AC'C_1C_2$. Les triangles ABB_2 et AC_2C sont égaux - Les modernes parleront d'une rotation de centre A - donc leurs aires sont égales.*

$$(ABB_2) = (AC_2C)$$

mais $(ABB_2) = (AB'B_2) = \frac{1}{2}\ (AB'B_1B_2)$

de même $(AC_2C) = (AC_2C') = \frac{1}{2}\ (AC_2C_1C')$

donc $(AB'B_1B_2) = (AC_2C_1C')$

en évaluant $AB' \,.\, AB_2 = AC_2 \,.\, AC'$

ou $AB' \,.\, AC = AB \,.\, AC'$

Relation indépendante de l'angle en A des deux segments.

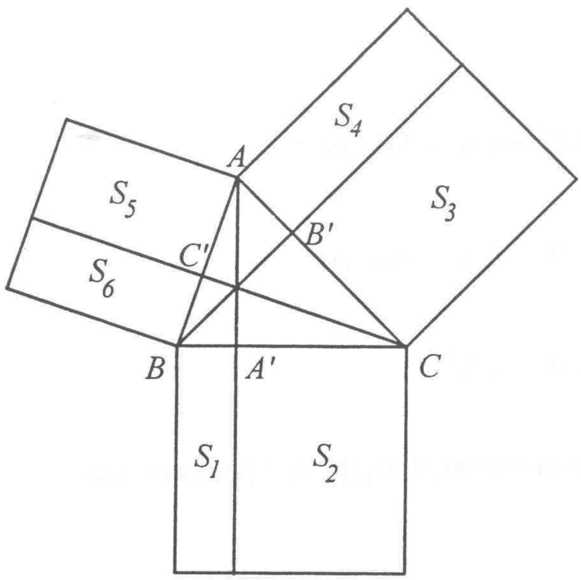
---

* On notera (ABC) l'aire du triangle ABC et (AB) la droite AB.

2 - Considérons maintenant un triangle ABC

a) Les trois angles sont aigus -acutangle a-t-on dit jadis

Soient AA', BB' et CC' les hauteurs du triangle ABC. On construit sur chaque côté un carré.



La droite (AA') coupe le carré construit sur [BC] en deux surfaces S_1 et S_2. De même (BB') coupe le carré construit sur [CA] en S_3 et S_4, comme (CC') coupe le carré construit sur [AB] en S_5 et S_6. Nous avons démontré que $(S_1) = (S_6)$ -il s'agit des aires- et que $(S_2) = (S_3)$ comme $(S_4) = (S_5)$.

$(S_1) + (S_2) = BC^2$

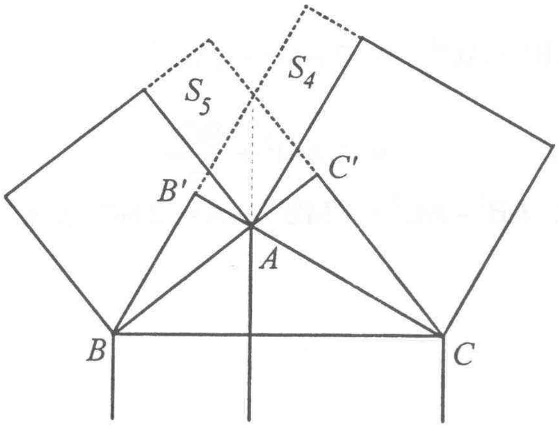
$(S_3) + (S_4) = CA^2$ et $(S_5) + (S_6) = AB^2$

alors

$$\begin{aligned} BC^2 &= (S_1) + (S_2) = (S_6) + (S_3) \\ &= AB^2 - (S_5) + CA^2 - (S_4) \\ &= AB^2 + CA^2 - 2\,(S_4) \end{aligned}$$

$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2\ AC\ .\ AB'$

(ou $AB^2 + CA^2 - 2\ AB\ .\ AC'$)



b) Si $\hat{A}$ est obtus

alors $(S_3) = CA^2 + (S_4)$

et $(S_6) = AB^2 + (S_5)$

donc

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + CA^2 + 2\,(S_4) \\ BC^2 &= AB^2 + CA^2 + 2\ AC\ .\ AB' \\ &= AB^2 + CA^2 + 2\ AB\ AC' \end{aligned}$$

Ni Euclide dont la démarche est respectée (Livre I. proposition 47), ni Pythagore ne récuseraient ces résultats (voir encore Euclide Livre II. prop. 12 et 13).

Cas particuliers

$\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $A'B = \frac{1}{2} AB$ $\qquad$ $BC^2 = AB^2 + CA^2 - AB \cdot AC$

$\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $A'B = \frac{1}{2} AB$ $\qquad$ $BC^2 = AB^2 + CA^2 + AB \cdot AC$

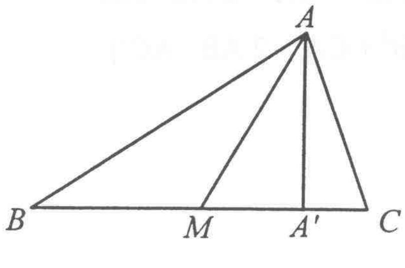
enfin $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ B' et C' sont en A $\qquad$ $BC^2 = AB^2 + CA^2$

Les tablettes babyloniennes relatent ce résultat même si, d'argile, le " pont aux ânes " fut emporté par l'Euphrate...

3 - Applications

Triangle ABC, hauteur AA', médiane AM. (MB = MC)

Supposons AB > CA, alors ∠AMB* est obtus et ∠AMC aigu.



$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2MB \cdot MA'$

$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \cdot MA'$

alors :

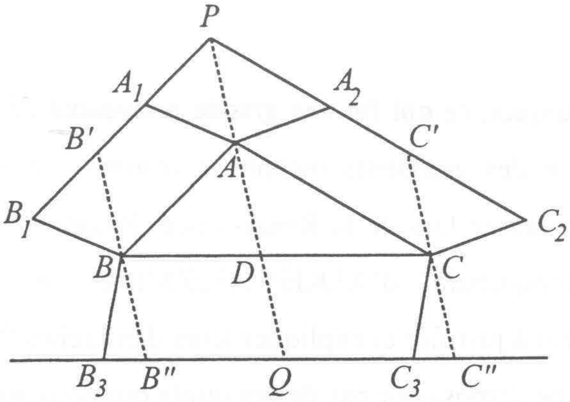
$AB^2 + AC^2 = 2\,AM^2 + 2MB^2$

ou $\qquad = 2\,AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

et $AB^2 - AC^2 = 4\,MB \cdot MA = 2\,BC \cdot MA'$

* Pourquoi ne pas reprendre cette notation des angles que l'on trouve dès 1637 dans la " Trigonométrie " de OUGHTRED ?

4 - Dans ses " Collections " (livre IV), vers 300, Pappus étudie la figure suivante.



Un triangle ABC. Sur deux côtés, deux parallélogrammes quelconques ABB_1A_1 et ACC_2A_2. (B_1A_1) et (C_2A_2) se coupent en P. Sur (PA) qui coupe (BC) en D on prend Q tel que DQ =PA (soit $\vec{DQ} = \vec{PA}$). Par Q la parallèle à (BC) et, entre ces parallèles un parallélogramme BCC_3B_3.

Pour un jeu d'équivalence d'aires, on mène, par B, la parallèle à (PA) qui coupe (A_1B_1) en B' et (B_3C_3) en B'' et, par C, la parallèle à (PA) qui coupe A_2B_2 en C' et (B_3C_3) en C''.

On aura alors

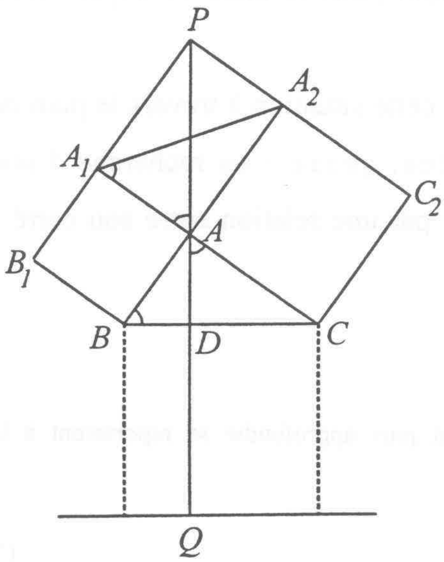
$(BCC_3B_3) = (BCC''B'') = (BDQB'') + (DCC''Q)$

$= (PABB') + (PACC')$

$= (A_1ABB_1) + (A_2ACC_2)$.

L'aire du troisième est la somme des deux premières.

Si le triangle ABC est rectangle en A et que l'on construit des carrés, A_1PA_2A est un rectangle $AP = A_1A_2$ mais les triangles AA_1A_2 et ABC sont égaux



AP = BC

Par ailleurs,

$\angle PAA_1 = \angle AA_1A_2 = \angle ABC$

Donc

(AP) est orthogonale à BC

DQ = AP = BC

On peut donc entre BC et sa parallèle en Q construire le carré de BC...

De l'équation seconde, ou à la manière de...

Il parait, parfois, difficile de comprendre pourquoi, ce qui fut une grande nouveauté de la fin du Moyen-Age, à savoir l'idée de raisonner sur des grandeurs inconnues comme sur des grandeurs connues, n'a pas eu une réussite plus fulgurante lors de la Renaissance. Pourquoi les "cossistes" utilisateurs de l' "algebra" et du "muquabala" d'ALKHWARIZMI et de ses successeurs arabes n'ont-ils pas réussi plus rapidement à justifier et expliquer leurs démarches ?

On oublie, sans doute, trop facilement qu'ils ne disposaient pas de ces outils qui nous sont familiers : signes, symboles, expressions, vocabulaire.

A la fin du 16ème siècle, $(x - 3)(x^2 + 3x - 2) = x^3 - 11x + 6$ s'écrit :

`LM3 in QP3LM2 multiplicatum producit CM11LP6` ...

ce qui était déjà un progrès considérable par rapport à une phrase telle que :

`L'agrégat d'un census et du triple du côté diminué de deux deniers`

... pour $x^2 + 3x - 2$.

N'oublie-t-on pas qu'il faudra attendre le milieu du 17ème siècle pour que le signe = s'impose ? CLAVIUS dans son " Algebra " (1608) pour exprimer une égalité entre deux expressions use, dans une même page, de quatre verbes différents !...

Une grandeur, par ailleurs, n'a de réalité que pensée comme ligne, surface ou volume, d'où, sans cesse, le recours justificatif à la géométrie ou, au moins, aux résultats consignés chez EUCLIDE et retransmis le plus souvent par les auteurs arabes.

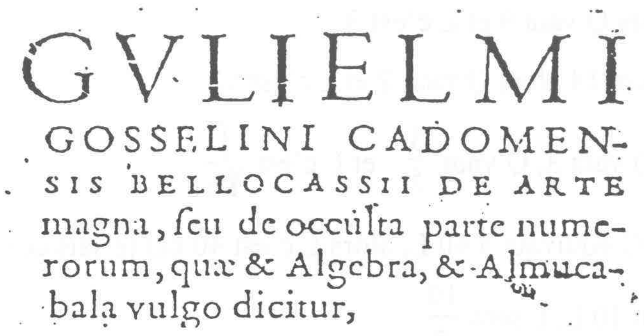
Dans les lignes qui suivent on a cherché à vivre un peu cette situation à travers le plan de résolution d'une équation du deuxième degré - `ordre, espèce, genre` - ou recherche d'une grandeur, d'un côté, d'une chose - `res, cosa, coss` - définie par une relation entre son carré - `quarré, census, quadratus`-, elle-même et un nombre. *

---

* Ceux qui souhaitent une étude épistologiquement et historiquement plus approfondie se reporteront à la publication de l'I.R.E.M. de Paris VII : Mnémosyne n° 15.

Pour cela on s'est inspiré largement d'un traité important, paru, à Paris, en 1577. Il est en latin, et la vie de son auteur, Guillaume GOSSELIN, nous est pratiquement inconnue.

Dans ce texte on a cherché à éviter tout ce qui serait néologisme. Concession néanmoins, au lieu des P et M du livre on a usé de + et -. GOSSELIN pour noter une racine carrée emploie le signe √, mais, bien sûr, il ne s'agit que de <u>la</u> racine carrée positive, grandeur qui ne saurait être en " dessous de rien "... (moins que zéro - nombre sourd).


GVLIELMI
GOSSELINI CADOMEN-
SIS BELLOCASSII DE ARTE
magna, ſeu de occulta parte nume-
rorum, quæ & Algebra, & Almuca-
bala vulgo dicitur,

Comme notre auteur nous userons de la première personne.

Encore une concession :

En général les nombres connus figurent dans l'exposé sous forme numérique. Ce sont des échantillons nombreux qui assurent le raisonnement. Cela s'appelera par la suite " démonstration en nombre ". Dans un premier temps nous respecterons cette façon de faire. Puis, pour ne pas allonger cet essai nous figurerons par des lettres minuscules les nombres connus ou calculés à partir d'eux.

Enfin, nous le répétons, le texte qui suit n'est pas une traduction littérale mais un essai pour, avec nos mots de la fin du 20ème siècle, user de tournures du 16ème siècle afin d'essayer de mieux vivre méthodes et outils des maîtres en calculs d'alors.

De l'équation seconde

Je suppose d'abord que, connaissant le carré Q je sais trouver le côté L. La table des carrés et les procédés de calcul ont déjà été étudiés.

Par EUCLIDE je sais que, si deux grandeurs se valent, en les divisant par une même les restes se valent aussi.

Si 4Q valent 36 alors Q vaut 9 et L c'est 3.

De même si 7Q valent 14 alors Q vaut 2 et L c'est $\sqrt{2}$.

Encore : lorsque 5Q vaut 3, Q vaut $\frac{3}{5}$ et L c'est $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Je sais aussi que si Q équivaut à 40 L, alors L c'est 40 car je sais comparer les degrés de la chose entre eux. Si 3Q vaut 10 L, L sera $\frac{10}{3}$

Je sais enfin résoudre ce problème particulier qui est aussi de second ordre. Savoir : Trouver deux grandeurs connaissant leur agrégat (somme) et leur rectangle (produit). D'icelles la plus grande dépasse leur moyenne d'autant que l'autre en est en défaut. Si je fais leur produit, je multiplie la moyenne plus ce manque par cette moyenne moins ce manque. J'obtiens donc le carré de la moyenne diminué de celui du manque et comme je connais ce rectangle, je dis que le carré du manque est ce qui reste quand au carré de la moyenne j'ai enlevé ce donné.

Ainsi à agrégat 30 et rectangle 161, facit 23 et 7. Le médian est moitié de 30, soit 15, d'icelui le carré est 225. J'ôte le rectangle, il reste 64 dont la racine est 8 qui avec 15 donne 23 pour le plus grand et 7 l'autre.

Je considère maintenant toutes les autres relations entre carré, côté et nombre connu. Il y en a trois possibles.

- un carré et son côté valent un nombre,

$$Q + pL \text{ doivent égaler } q.$$

- un carré vaut le côté et le nombre,

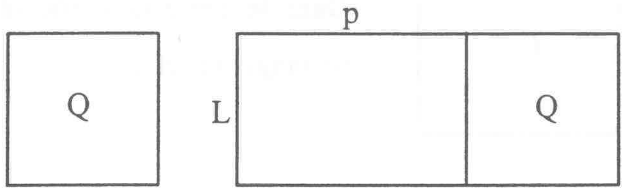
$$Q \text{ doit égaler } pL + q.$$

- un carré et un nombre valent le côté,

$$Q + q \text{ doivent égaler } pL.$$

Premier problème Trouver L tel que $Q + pL$ égale q.

Si je connaissait L je pourrais construire son carré Q auquel j'adjoindrais le rectangle pL.

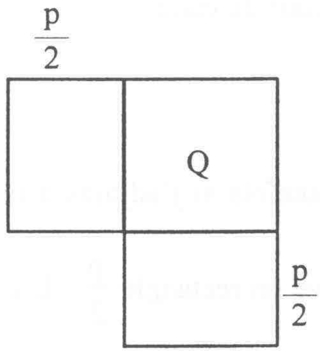


Ainsi j'aurais une figure qui vaudrait q, mais je peux agir autrement :

J'adjoins sur deux côtés de Q des rectangles $\frac{p}{2}$. L.

L'ensemble vaut toujours q.

Je constate alors qu'en complétant par le carré de côté $\frac{p}{2}$ j'obtiens un autre carré dont le côté n'est autre que $L + \frac{p}{2}$.

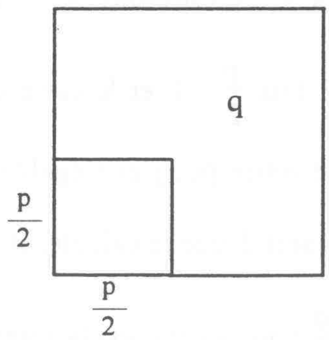


Donc carré de $L + \frac{p}{2}$ vaut la somme de q et du carré de $\frac{p}{2}$. Soit d cette somme que je connais alors.

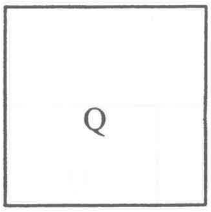
Carré de $L + \frac{p}{2}$ vaut d.

$L + \frac{p}{2}$ vaut $\sqrt{d}$.

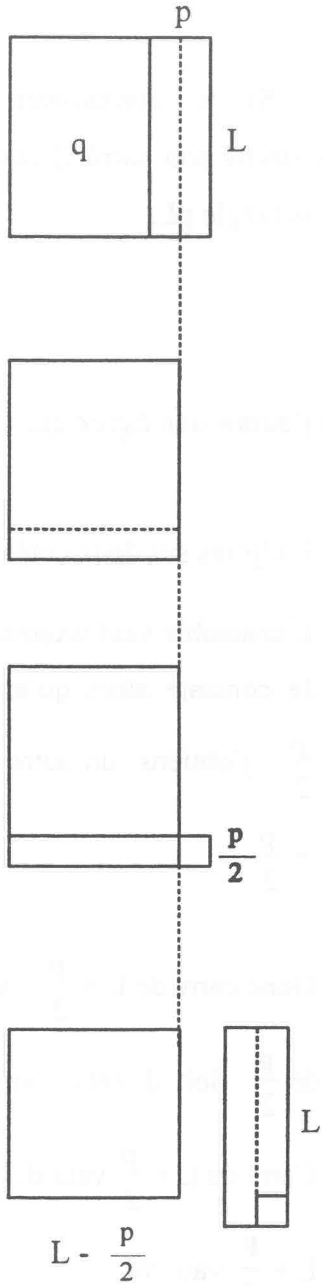
La valeur de L est l'excès de $\sqrt{d}$ sur $\frac{p}{2}$.



Deuxième problème Trouver L tel que Q égale pL + q.



Dans le carré Q il me faut placer le rectangle pL et q.



En m'inspirant du problème précédent je puis sur un côté retirer un rectangle $\frac{p}{2}$. L mais je ne puis plus le faire sur un côté consécutif du carré.

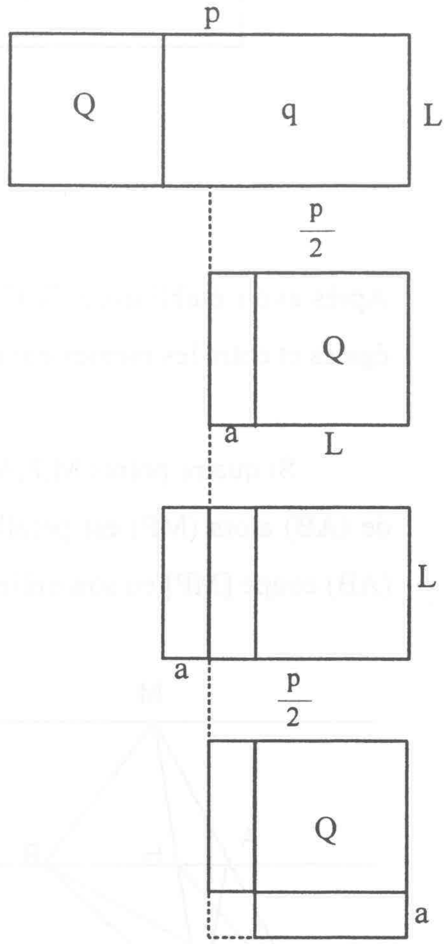
Toutefois si j'adjoins à la figure restante le carré de $\frac{p}{2}$ je retrouve un rectangle $\frac{p}{2}$. L qui, une fois soustrait, me laisse le carré de L - $\frac{p}{2}$.

Donc si à Q, c'est-à-dire q + pL, j'ajoute le carré de $\frac{p}{2}$ j'obtiens 2 fois $\frac{p}{2}$. L et le carré de L - $\frac{p}{2}$ et, si, de ces deux sommes, je retire pL, j'ai l'égalité entre la somme de q et du carré de $\frac{p}{2}$ soit d, que je calcule, et le carré de L - $\frac{p}{2}$ qui le vaut.

Alors L - $\frac{p}{2}$ vaut $\sqrt{d}$ et L est la somme de $\sqrt{d}$ et de $\frac{p}{2}$.

<u>Troisième problème</u> : Trouver L tel que Q + q égale pL.

Supposons d'abord L plus petit que $\frac{p}{2}$.

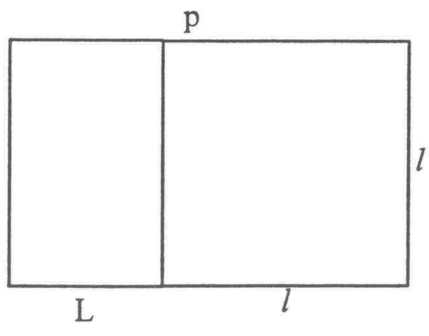


Donc je sais par EUCLIDE que Q produit de L par lui-même est plus petit que le produit de $\frac{p}{2}$ par L et par suite que q est plus grand que $\frac{p}{2}$L puisque la somme de Q et q est pL. Je trouve alors dans le rectangle $\frac{p}{2}$L et Q et un excès aL, a est l'excès de $\frac{p}{2}$ sur L.

Je constate alors que q contient Q et deux rectangles aL. Si j'adjoins ces derniers en gnomon à Q je vois qu'il ne me reste qu'à ajouter le carré de a pour obtenir celui de $\frac{p}{2}$.

Donc la somme de q et du carré de a vaut le carré de $\frac{p}{2}$. Le carré de a est donc l'excès du carré de $\frac{p}{2}$ sur q soit d, a vaut $\sqrt{d}$ et par suite L vaut $\frac{p}{2} - \sqrt{d}$.

Je retiens en outre que q vaut le rectangle de $\frac{p}{2}$ + a par L. Si j'appelle *l* la somme de $\frac{p}{2}$ + a j'ai donc *l*.L vaut q. Eh bien, *l* est aussi valeur de la chose satisfaisant au problème !



Je sais que *l* + L équivant à p. Si dans le rectangle p*l* je figure le carré de *l* il reste le rectangle de *l* et L c'est à dire q. J'ai donc bien carré de *l* plus q équivant à p*l*.

Il existe dans ce problème deux valeurs pour la chose :

l'une inférieure à $\frac{p}{2}$ savoir $\frac{p}{2} - \sqrt{d}$

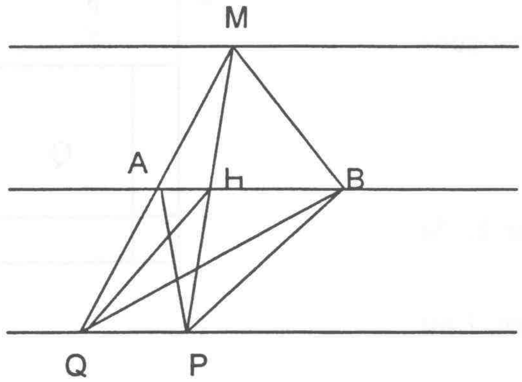
l'autre supérieure à $\frac{p}{2}$ savoir $\frac{p}{2} + \sqrt{d}$.

et d'aucuns se plaignent de l'écriture algébrique...

Rapport d'aires et rapport de longueurs

Après avoir établi avec EUCLIDE (livre I prop. 38) que " les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont équivalents " on étudiera une figure importante.

Si quatre points M,P,A,B sont tels que (MAB) = (PAB) et que M et P sont du même côté de (AB) alors (MP) est parallèle à (AB) ; mais si M et P sont de part et d'autre de (AB) alors (AB) coupe [MP] en son milieu.*



(MP) coupe (AB) en H. La parallèle à (AB) menée par P coupe (MA) en Q.

On a :

(QAB) = (PAB) hauteurs égales

donc (QAB) = (MAB)

par suite QA = AM

donc (HQA) = (HAM) bases égales

mais (HPA) = (HQA)

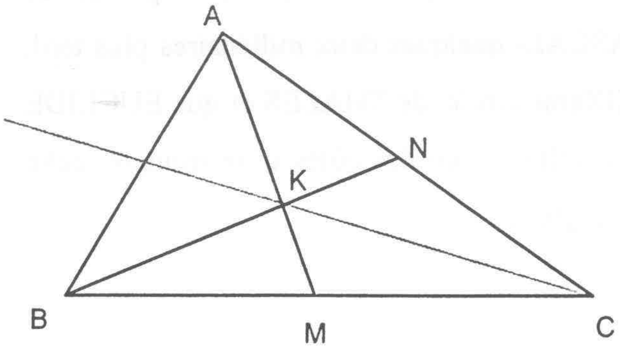
donc (HPA) = (HMA) et PH = HM.

---

* On notera (ABC) l'aire du triangle ABC et (AB) la droite AB.

Applications

1 - (AM) et (BN) sont deux médianes du triangle ABC et se coupent en K. Que dire de (CK) ?



BM = MC donc (ABM) = (AMC)

et (KBM) = (KMC)

alors (KBA) = (KAC)

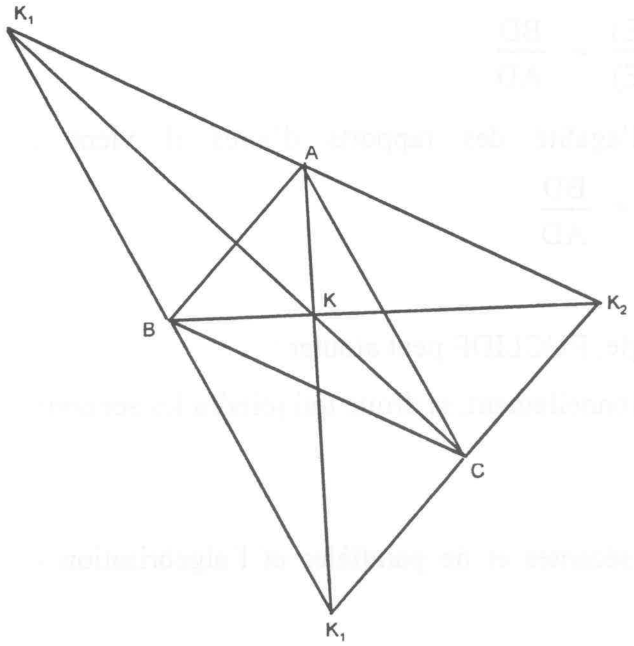
de même

AN = NC entraîne (KAB) = (KBC)

donc (KAC) = (KBC)

alors (KC) coupe [AB] en son milieu.

2 - Soit un triangle ABC quel est l'ensemble des points M tels que (MAB) = (MBC) = (MCA) ?



La condition (MAB) = (MBC) conduit à (MB) parallèle à (AC) si M et B sont du même côté de AC, et à (MB) coupe [AC] en son milieu si M et B sont de part et d'autre. Pour remplir les trois conditions on est donc conduit à tracer les trois médianes du triangle et les parallèles en chaque sommet au côté opposé. Ces droites se coupent en quatre points constituant l'ensemble cherché $\{K, K_1, K_2, K_3\}$.

Mais il s'agit encore ici d'aires égales de triangles équivalents. EUCLIDE va étudier -Livre VI- les triangles qui ont la même hauteur et " sont entre eux comme leurs bases " (avec propriété analogue pour les hauteurs si ce sont les bases qui sont égales). Sur ces sujets il parle souvent de " entre les mêmes parallèles ". C'est cette notion qui sera reprise, en parlant de " bande " par ARNAUD -à moins que ce ne fut PASCAL- quelques deux millénaires plus tard, pour étudier la figure dite, en France, à la fin du XIXème siècle, de THALES et que EUCLIDE étudie ainsi : " Si l'on conduit une droite qui soit parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ".

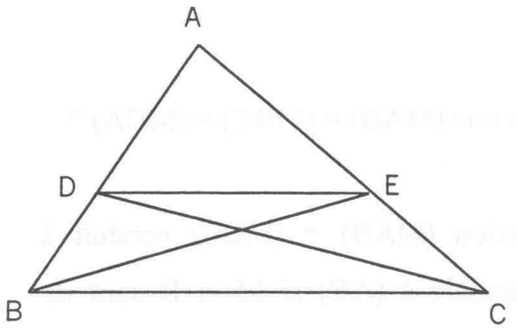
(DE) est parallèle à (BC)

Menons BE et DC

(BDE) = (CDE) puisque même base et entre les mêmes parallèles.

(CDE) est donc à (ADE) comme (BDE) est à (ADE)

(CDE) et (ADE) ont même hauteur alors :



(CDE) est à (ADE) comme CE est à AE ; nous écrivons :

$$\frac{(CDE)}{(ADE)} = \frac{CE}{AE}$$

et de même

$$\frac{(BDE)}{(ADE)} = \frac{BD}{AD}$$

De l'égalité des rapports d'aires il vient :

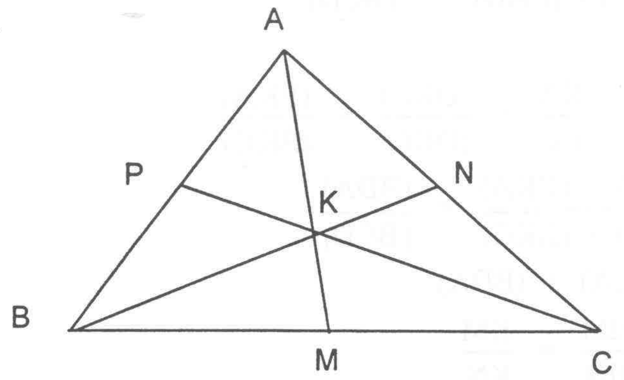
$$\frac{CE}{AE} = \frac{BD}{AD}$$

Comme il ne s'agit que de couper les côtés du triangle, EUCLIDE peut ajouter :
" et si deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ".

ARNAUD généralisera à l'intersection de sécantes et de parallèles et l'algébrisation -orientation facilitera la réciproque.

Applications

1 - Dans la figure du triangle ABC avec ses médianes, nous savons maintenant que :



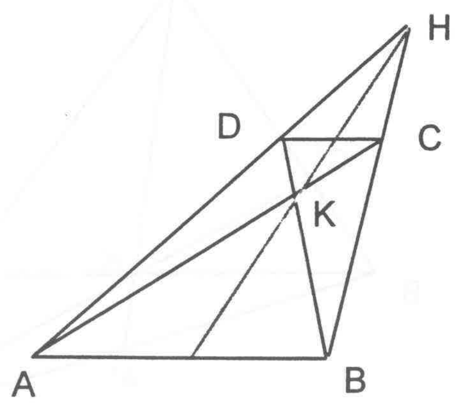
(AKP) = (PKB) donc (AKB) = 2(AKP)

comme (AKB) = (ACK)

(ACK) = 2(AKP)

alors CK = 2 KP

2 - Soit un trapèze ABCD ; (AD) et (BC) se coupent en H, (AC) et (BD) en K.



Nous savons que $\dfrac{(KDH)}{(KAD)} = \dfrac{(KCH)}{(KBC)}$ puisque $\dfrac{DH}{AD} = \dfrac{CH}{BC}$

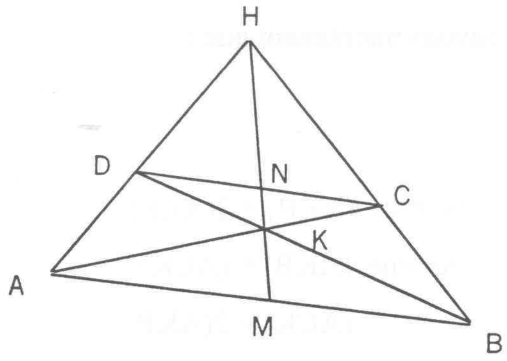
comme (CAD) = (CBD), (KAD) = (KBC)

donc (KDH) = (KCH).

Il s'en suit que (KH) passe par le milieu de [CD].

On montre de même que (KH) passe par le milieu de [AB].

3 - Et toujours la figure du trapèze. Si l'on sait opérer sur des rapports égaux :



$$\frac{HM}{HN} = \frac{HA}{HD} = \frac{(CHA)}{(CHD)} = \frac{(BHA)}{(BHD)} =$$

$$\frac{(BHA) - (CHA)}{(BHD) - (CHD)} = \frac{(BCA)}{(BCD)}$$

et

$$\frac{KM}{KN} = \frac{KA}{KC} = \frac{(DKA)}{(DKC)} = \frac{(BKA)}{(BKC)} =$$

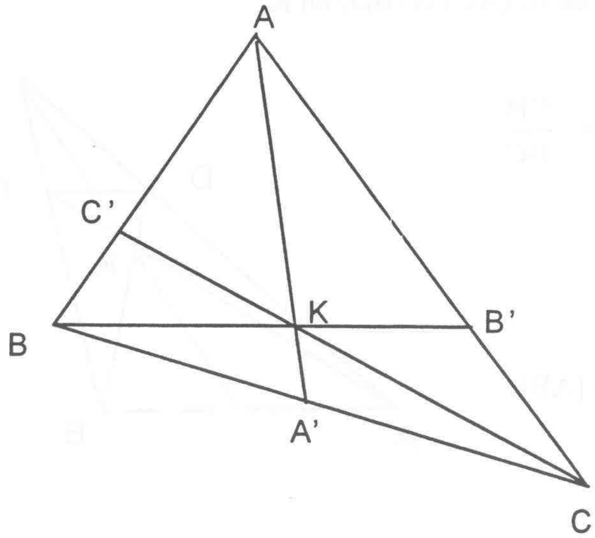
$$\frac{(BKA) + (DKA)}{(BKC) + (DKC)} = \frac{(BDA)}{(BCD)}$$

or $(BCA) = (BDA)$

donc $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{KM}{KN}$

(M, N, H, K) est une <u>division harmonique</u>. Ceci est encore une autre histoire...

4 - Du côté de chez CEVA (Giovanni di -début XVIIIème siècle)



$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{(AA'B)}{(AA'C)} ; \frac{B'C}{B'A} = \frac{(BB'C)}{(BB'A)} ;$$

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{(CC'A)}{(CC'B)}$$

or

$$\frac{(AA'B)}{(AA'C)} = \frac{(KA'B)}{(KA'C)} = \frac{(AA'B) - (KA'B)}{(AA'C) - (KA'C)} =$$

$$\frac{(KAB)}{(KAC)}$$

de même

$$\frac{(BB'C)}{(BB'A)} = \frac{(KBC)}{(KBA)} \text{ et } \frac{(CC'A)}{(CC'B)} = \frac{(KCA)}{(KCB)}$$

alors

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{(KAB)}{(KAC)} \cdot \frac{(KBC)}{(KBA)} \cdot \frac{(KCA)}{(KCB)} = 1$$

Remarques

- En orientant les aires on peut obtenir la relation algébrique.

- On n'oubliera pas que si (KA), (KB), (KC) sont les céviennes du triangle ABC ; (AK) (AB), (AC) le sont du triangle KBC.

5 - GERGONNE, le recteur de Montpellier, lisait autrement, vers 1820, dans ses Annales de mathématiques, la figure précédente.

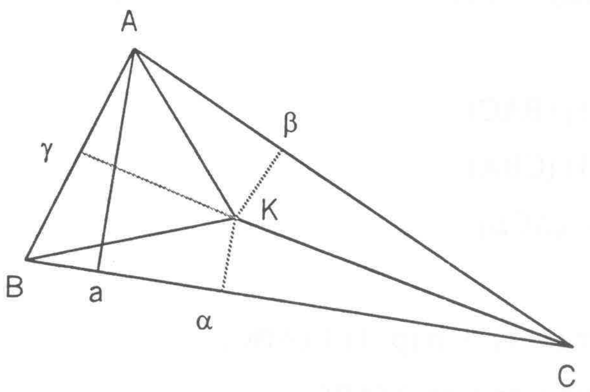
$$\frac{A'K}{A'A} = \frac{(CA'K)}{(CA'A)} = \frac{(BA'K)}{(BA'A)} = \frac{(CA'K) + (BA'K)}{(CA'A) + (BA'A)} = \frac{(KBC)}{(ABC)}$$

de même $\frac{B'K}{B'B} = \frac{(KCA)}{(BCA)}$ et $\frac{C'K}{C'C} = \frac{(KAB)}{(CAB)}$

alors $\frac{A'K}{A'A} + \frac{B'K}{B'B} + \frac{C'K}{C'C} = \frac{(KBC) + (KCA) + (KAB)}{(ABC)} = 1$

de même $\frac{AK}{AA'} + \frac{BK}{BB'} + \frac{CK}{CC'} = \frac{(ABKC)}{(ABC)} + \frac{(BCKA)}{(ABC)} + \frac{(CAKB)}{(ABC)} = \frac{2(ABC)}{(ABC)} = 2$

6 - Toujours avec un point dans un triangle, mais en jouant avec les hauteurs



· α, β et γ sont les projetés orthogonaux de K sur les côtés.

- Aa est la hauteur de longueur h_a ; les autres hauteurs ayant pour longueur h_b et h_c

$$\frac{(KBC)}{(ABC)} = \frac{K\alpha}{Aa} = \frac{K\alpha}{h_a}$$

de même $\frac{(KCA)}{(ABC)} = \frac{K\beta}{h_b}$ $\frac{(KAB)}{(ABC)} = \frac{K\gamma}{h_c}$

Comme (ABC) = (KBC) + (KCA) + (KAB)

il vient $\frac{K\alpha}{h_a} + \frac{K\beta}{h_b} + \frac{K\gamma}{h_c} = 1$

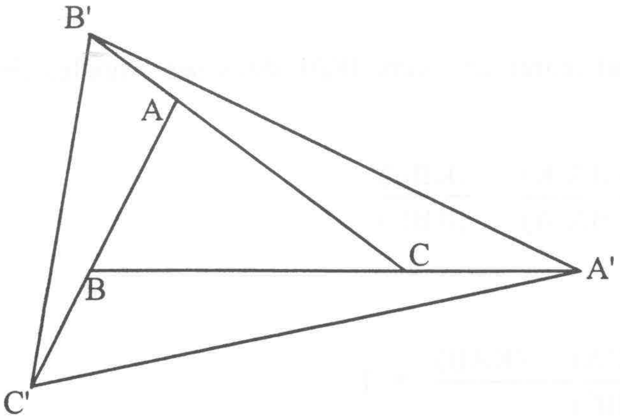
Si le triangle est équilatéral h = ha = hb = hc et $K\alpha + K\beta + K\gamma = h$.

Si K est le centre du cercle inscrit de rayon $r = K\alpha = K\beta = K\gamma$.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

On ajoute, on retranche

Triangle



1) On prolonge

AB en C'	BC' = m AB
BC en A'	CA' = n BC
CA en B'	AB' = p CA

Relations entre triangles de même hauteur :

$$\frac{(BAB')}{(BAC)} = \frac{AB'}{AC} = p \qquad \frac{(B'C'A)}{(B'AB)} = \frac{C'A}{BA} = m + 1$$

donc $(B'C'A) = p\,(m+1)\,(BAC)$

de même $(C'A'B) = m\,(n+1)\,(CBA)$

$(A'B'C) = n\,(p+1)\,(ACB)$

Il a été ajouté à (ABC)

$$(B'C'A) + (C'A'B) + (A'B'C) = [\,p\,(m+1) + m\,(n+1) + n\,(p+1)\,]\,(ABC)$$
$$= (\,m + n + p + mn + np + pm\,)\,(ABC)$$

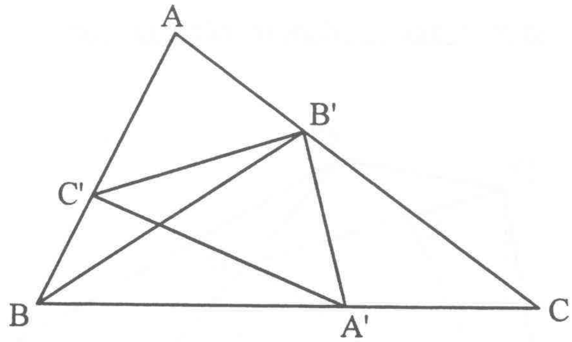
Alors $(A'B'C) = (\,1 + m + n + p + mn + np + pm\,)\,(ABC)$

Si $m = n = p$ $\quad = (\,1 + 3\,m + 3\,m^2\,)\,(ABC)$

Si $m = n = p = 1$ $\quad = 7\,(ABC)$.

2) <u>On retranche</u> - $m < 1 \quad n < 1 \quad p < 1$ -

Il vient ici :



$$\frac{(BAB')}{(BAC)} = \frac{AB'}{AC} = p \qquad \frac{(B'C'A)}{(B'AB)} = \frac{C'A}{BA} = 1 - m$$

donc $(B'C'A) = p\,(1 - m)\,(BAC)$

On retranche à (ABC)

$$(B'C'A) + (C'A'B) + (A'B'C) = [\,p\,(1 - m) + m\,(1 - n) + n\,(1 - p)\,]\ (ABC)$$

$$= (\,m + n + p - mn - np - pm\,)\,(ABC)$$

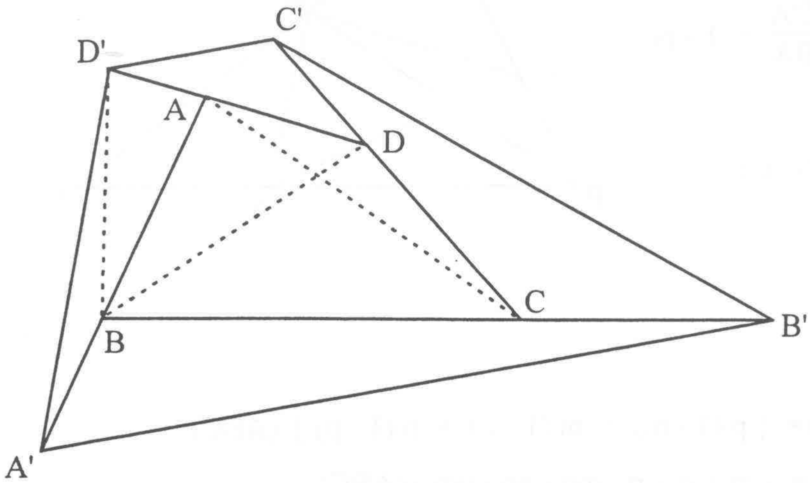
Alors $\qquad (A'B'C) = (\,1 - m - n - p + mn + np + pm\,)\,(ABC)$

Si $m = n = p \qquad = (\,1 - 3\,m + 3\,m^2\,)\,(ABC)$

Si $m = n = p = \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{4}\,(ABC)$.

Quadrilatère

1) On prolonge … dans le même rapport



AB en A'	BA' = k AB
BC en B'	CB' = k BC
CD en C'	DC' = k CD
DA en D'	AD' = k DA

Rapport des aires de triangles ayant même hauteur :

(BDA') = k (BDA)

(D'AA') = (k+1) (D'BA)

donc (D'A'A) = k (k+1) (ABD)

On a de même (A'B'B) = k (k+1) (BCA)

(B'C'C) = k (k+1) (CDB)

(C'D'D) = k (k+1) (DAC).

En additionnant les ajouts – en groupant les opposés –

(D'A'A) + (B'C'C) + (A'B'B) + (C'D'D) = k (k+1) [(ABD) + (CDB) + (BCA) + (DAC)]

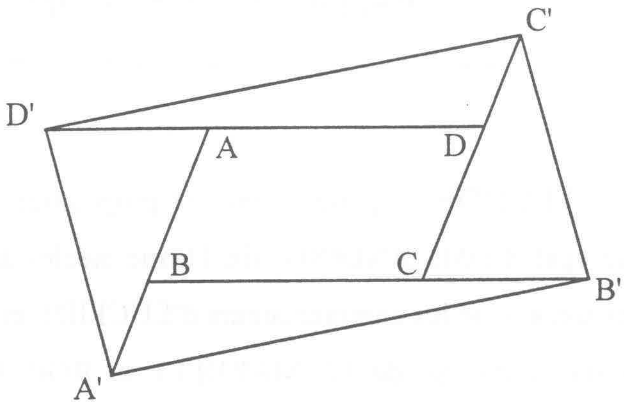
= k (k+1) [(ABCD) + (ABCD)]

= 2k (k+1) (ABCD)

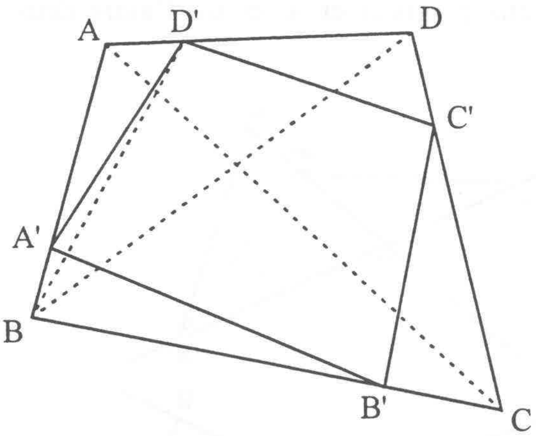
Ainsi (A'B'C'D') = $(1 + 2k + 2\,k^2)$ (ABCD)

Pour k = 1 (A'B'C'D') = 5 (ABCD).

Si ABCD est un parallélogramme, l'étude peut être directe.



2) <u>On retranche</u> $k < 1$



$(BDA') = k\,(BDA)$

mais $(D'AA') = (1-k)\,(D'BA)$

donc $(D'A'A) = k\,(1-k)\,(BDA)$.

Au total on retranche : $2\,k\,(1-k)\,(ABCD)$.

Par suite : $(A'B'C'D') = (1 + 2k + 2\,k^2)\,(ABCD)$

$(1 + 2k + 2\,k^2)$ est minimal pour $k = \frac{1}{2}$

et $(A'B'C'D') = \frac{1}{4}\,(ABCD)$.

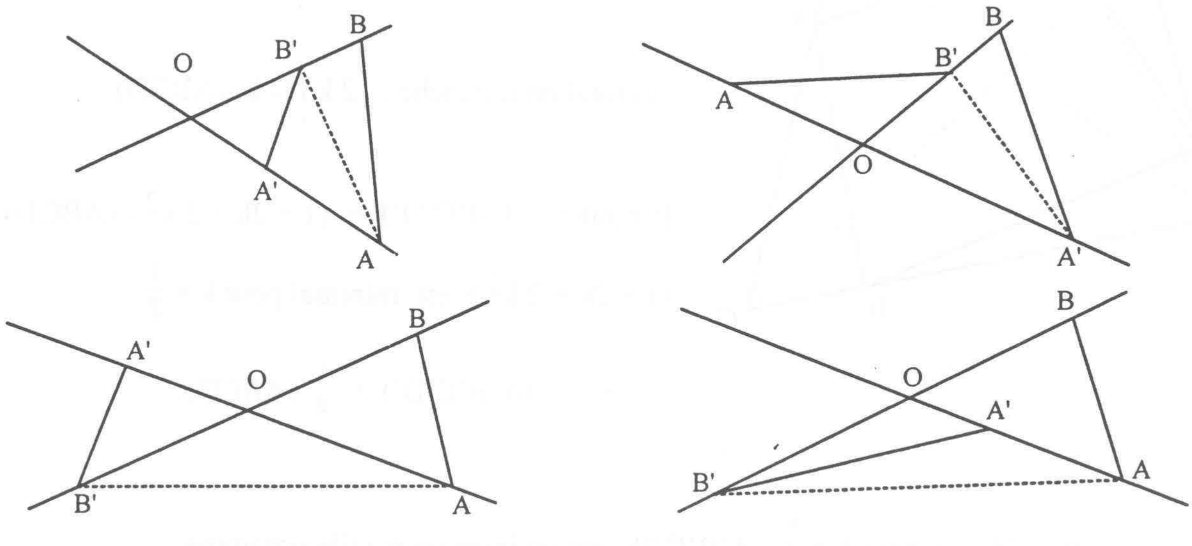
Par ailleurs, pour $k = \frac{1}{2}$, A'B'C'D' est toujours un parallélogramme.

Rapport d'aires et rapport de produits de longueurs

EUCLIDE en parle -Livre VI proposition 23- au sujet des parallélogrammes ayant un angle égal. COMMANDINO -fin 16ème siècle- détache ce théorème et l'applique au triangle. Dans son sillage les commentateurs d'EUCLIDE et les auteurs d'Eléments de Géométrie en usent plus ou moins. Si, de LE MARDELE et ROBERVAL -17ème siècle- à CAMMAN -20ème siècle- il n'est pas totalement oublié, il devient peu utilisé en dehors du calcul d'aires.

Théorème de COMMANDINO

Soient deux droites se coupant en O, sur l'une deux points A et A' et sur l'autre deux points B et B'.



Comparons les aires notées (OAB) et (OA'B') des triangles OAB et OA'B'. Au moins quatre cas de figure mais une seule démonstration. Traçons AB'.

$\frac{(OAB)}{(OAB')} = \frac{OB}{OB'}$ triangles de même hauteur, de même :

$\frac{(OA'B')}{(OAB')} = \frac{OA'}{OA}$ donc $\frac{(OAB)}{(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'}$.

La propriété demeure pour des triangles égaux à ceux-ci. Alors on énoncera :

Si deux triangles ABC et A'B'C' ont :

soit $\angle BAC = \angle B'A'C'$

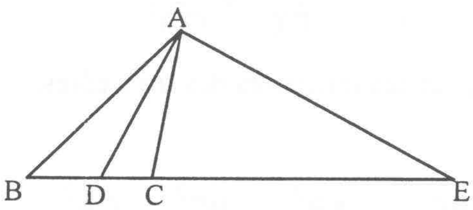
soit $\angle BAC$ et $\angle B'A'C'$ supplémentaires, on a $\dfrac{(ABC)}{(A'B'C')} = \dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$

Le rapport des aires égale le rapport des produits des côtés des angles égaux ou supplémentaires.

<u>Première application</u> : les bissectrices dans un triangle

AD bissectrice intérieure

$\angle BAD = \angle DAC$



AE bissectrice extérieure

$\angle EAB$ et $\angle EAC$ supplémentaires

$$\frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{AB.AD}{AC.AD} \qquad\qquad \frac{(AEB)}{(AED)} = \frac{AB.AE}{AC.AE}$$

mais ces triangles ont même hauteur,

$$\frac{(ADB)}{(ADC)} = \frac{DB}{DC} \qquad\qquad \frac{(AEB)}{(AED)} = \frac{EB}{EC}$$

Remarque : c'est ici qu'en algébrisant (orientant) la notion d'aire, les choses seraient précisées.

ADB et ADC sont de sens contraires : $\dfrac{(ADB)}{(ADC)} = -\dfrac{AB.AD}{AC.AD}$ alors $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{AB}{AC}$

et AEC sont de même sens $\dfrac{(AEB)}{(AEC)} = +\dfrac{AB}{AC}$ donc $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = +\dfrac{AB}{AC}$

Et si les triangles avaient deux couples d'angles égaux ? Triangles " équiangles " comme on disait au Grand Siècle (et encore au 19ème) puisque les trois le sont. On a donc trois expressions du rapport :

$$\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'} = \frac{BC.BA}{B'C'.B'A'} = \frac{CA.CB}{C'A'.C'B'}$$

En simplifiant :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Rapport des longueurs des trois côtés.

Et en remplaçant :

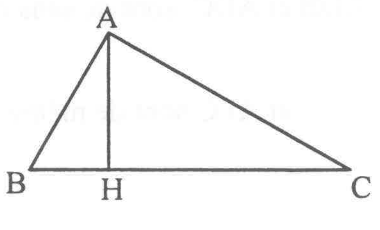
$$\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{CA^2}{C'A'^2}$$

Résultats obtenus sans calculer les aires.

Applications

1 - Triangle rectangle ABC de hauteur AH.

Les trois triangles ABC, HBA et HAC sont équiangles. Leurs aires sont proportionnelles aux carrés des côtés correspondants.



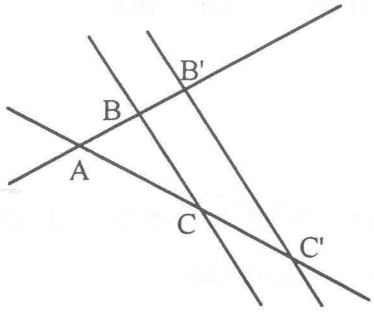
Par exemple : $\frac{(ABC)}{BC^2} = \frac{(HBA)}{AB^2} = \frac{(HAC)}{AC^2}$

or (ABC) = (HBA) + (HAC) donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Cette démonstration apparaît pour la première fois chez LAMY (1683)

2 - Figures remarquables de triangles équiangles

a)



B’ sur (AB), C’ sur (AC), (B’C’) // (BC)

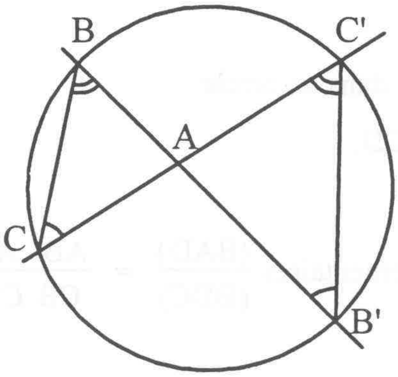
$$\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

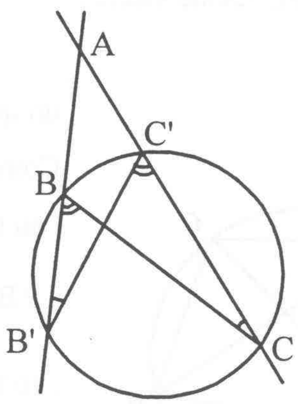
EUCLIDE et ARNAUD ont parlé de cette figure, chacun à sa façon. A la fin du 19ème siècle il lui fut, en France, associé le nom de l’homme de Milet et il fut parlé d’homothétie.

On disait que AB et AB’ sont “entre-eux” comme AC et AC’. On écrivait AB : AB’ :: AC : AC’.

b) Toujours B’ sur (AB) et C’ sur (AC) mais ∠B’ = ∠C et ∠C’ = ∠B

Deux cas de figure.





On associe alors les triangles ABC et AC’B’.

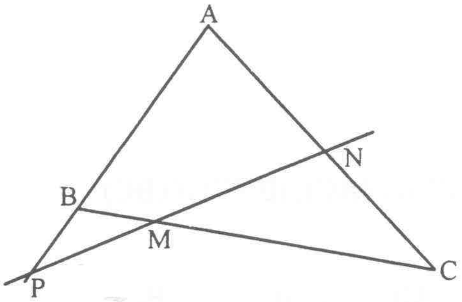
$$\frac{(ABC)}{(AC'B')} = \frac{AB}{AC'} = \frac{AC}{AB'}$$

On disait avec FERMAT que AB et AB’ sont “entre-eux réciproquement” comme AC et AC’, ou que les rectangles AB . AB’ et AC . AC’ sont égaux.

Après PONCELET on verra les points B, B’, C, C’ co-cycliques et on parlera de puissance de A par rapport au cercle.

$$AB \,.\, AB' = AC \,.\, AC'$$

3) Une propriété mise en avant par ROBERVAL



$$\frac{(PBM)}{(PAN)} = \frac{PB \, . \, PM}{PA \, . PN} \; ; \; \frac{(MNC)}{(MPB)} = \frac{MN \, . \, MC}{MP \, . \, MB} \; ;$$

$$\frac{(NPA)}{(NMC)} = \frac{NP \, . \, NA}{NM \, . \, NC}$$

Si on oriente les aires :

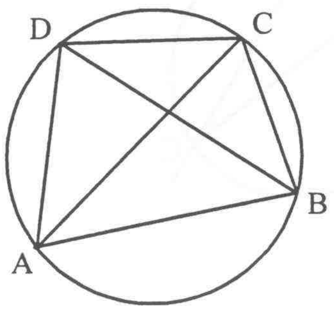
(PBM) = (MPB) ; (MNC) = - (NMC) ; (NPA) = (PAN).

En faisant le produit des ces trois égalités, membre à membre, et en simplifiant :

$$1 = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \, . \, \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} \, . \, \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$$

Hommage à MÉNÉLAÜS.

4 - VIETE -début 17ème siècle- a dégagé cette propriété qui en rappelle une autre de PTOLEMEE -2ème siècle :



un quadrilatère est inscrit dans un cercle.

Comparons le triangle BCD,

. au triangle ABD

$\angle$BCD et $\angle$BAD supplémentaires $\dfrac{(BAD)}{(BDC)} = \dfrac{AB \, . \, AD}{CB \, .CD}$

. au triangle CAD

$\angle CBD = \angle CAD$ $\qquad \dfrac{(CAD)}{(BCD)} = \dfrac{AC \, . \, AD}{BC \, . \, BD}$

. au triangle CAB

$\angle CDB = \angle CAB$ $\qquad \dfrac{(CAB)}{(BCD)} = \dfrac{AC \, . \, AB}{DC \, . \, DB}$

Or (BAD) + (BDC) = (CAD) + (ACB) = (ABCD)

En divisant les deux membres par (BDC), il vient :

$$\frac{AB \, . \, AD}{CB \, . \, CD} + 1 = \frac{AC \, . \, AD}{BC \, . \, BD} + \frac{AC \, . \, AB}{DC \, . \, DB}$$

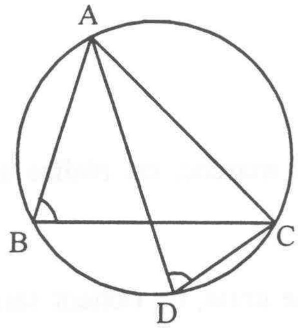
puis en multipliant de même par BC . CD . DB :

$$AB \,.\, AD \,.\, DB + BC \,.\, CD \,.\, DB = AC \,.\, CD \,.\, DA + AC \,.CB \,.\, BA$$

ou, après mise en facteur :

$$\frac{DB}{AC} = \frac{DA \,.\, DC \;+\; BA \,.BC}{AB \,.\, AD \;+\; CB \,.CD}$$

5) Enfin, calculons une aire !



Un triangle ABC et sur son cercle circonscrit de rayon R le point D diamétralement opposé à A.

$\angle ABC = \angle ADC$ alors

$$\frac{(ABC)}{(ADC)} = \frac{BA \,.\, BC}{DA \,.\, DC} \text{ ou } (ABC) = (ADC)\,\frac{BA \,.\, BC}{DA \,.\, DC}$$

mais $\angle ACD$ est droit : $(ADC) = \frac{1}{2}\, AC \,.\, DC$

$$(ABC) = \frac{1}{2}\, AC \,.\, DC\, \frac{BA \,.\, BC}{DA \,.\, DC}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{AC \,.\, BA \,.\, BC}{DA}$$

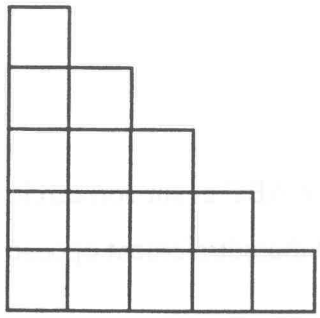
DA = 2R

et selon l'usage AB = c, BC = a, CA = b

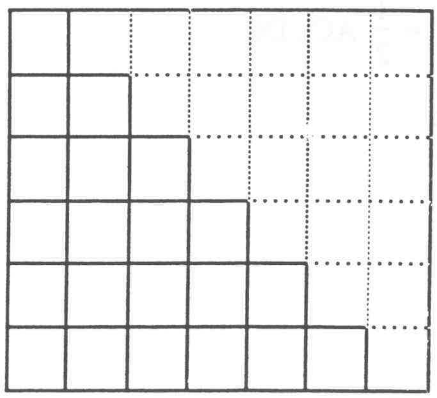
$$\text{donc } (ABC) = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4R}$$

Carrés en série

La somme $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ ($\sum_{i=1}^{n} i$ pour les initiés) peut être suggérée par des carrés disposés en « escaliers », ainsi pour S_5 :



Si on concrétise deux tels escaliers S_n que l'on emboite marche dans marche, on réalise un rectangle de n sur n + 1 carrés.



L'aire des carrés étant prise comme unité, on obtient sans peine,

$$2S_n = n(n + 1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

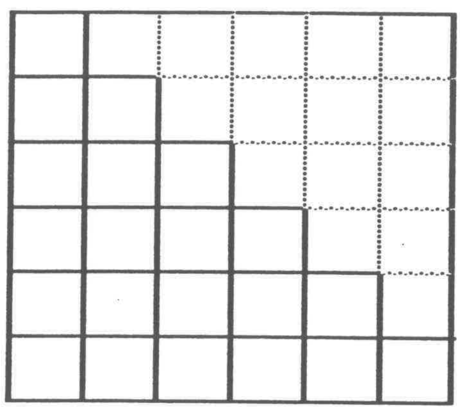
Mais, par ailleurs, si on emboite, de la même manière, un escalier S_n et un escalier S_{n-1}, on obtient un carré n sur n de seulement n^2 carrés.

Comme $S_n + S_{n-1} = n^2$
ce peut être l'occasion de vérifier que

$$S_{n-1} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$

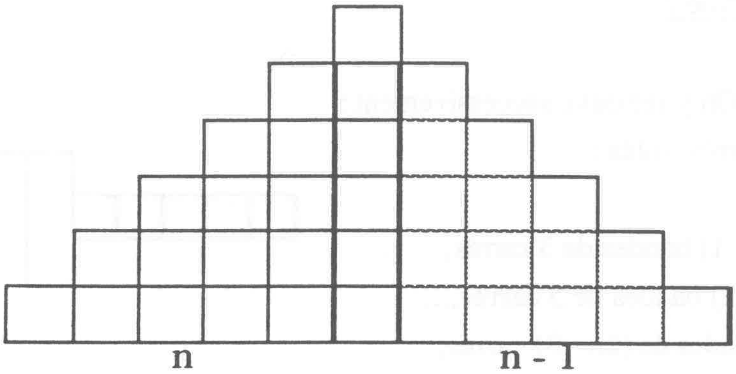
$$= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

On peut ainsi préciser le sens de n dans une formule.



Mais, si, au contraire, on oppose ces deux « escaliers », c'est la somme $I = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ qui apparait ; la somme des impairs de 1 à $2n - 1$ vaut donc n^2.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

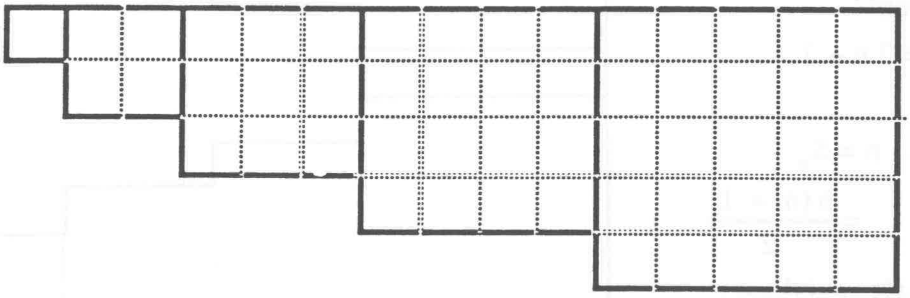


On peut continuer dans cette voie. Recherchons : la somme des carrés :

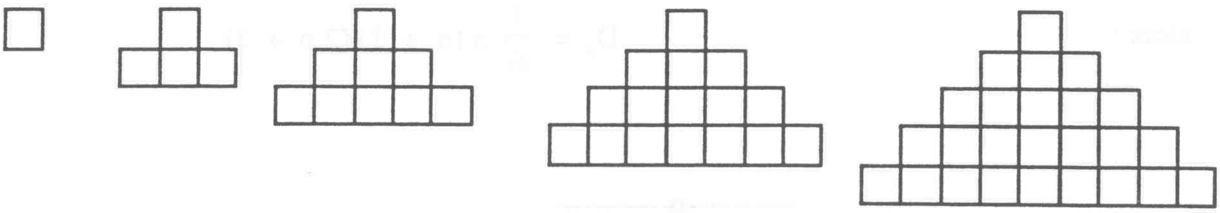
$D_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... n^2$.

Ces carrés de carrés peuvent s'agencer de diverses manières.

Figure type I



Mais on peut utiliser la propriété précédente et envisager une autre distribution de carrés et un autre dénombrement.



En lignes on dénombre : n carrés isolés

(n - 1) groupes de carrés en bandes de trois

(n - 2) groupes de carrés en bandes de cinq ...

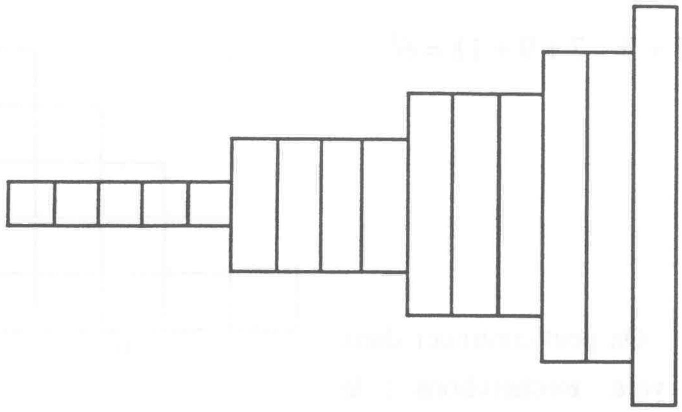
2 groupes de carrés en bandes de (2 n - 3)

1 groupe de carrés en bande de 2 n - 1

(Les figures sont réalisées pour n = 5 ; 2 n - 1 = 9)

On peut alors regrouper les carrés-unités selon la figure de type 2.

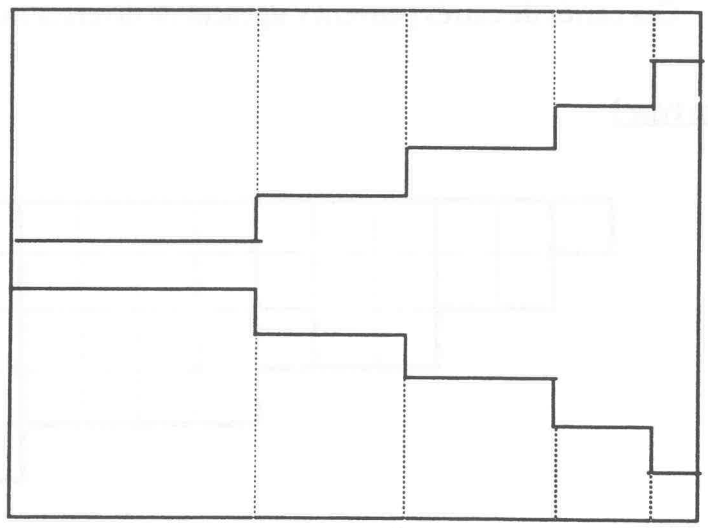
Figure type 2



On y retrouve successivement :

les n carrés isolés :

Les (n - 1) bandes de 3 carrés,
les (n - 2) bandes de 5 carrés,...
les 2 bandes de (2n - 3) carrés,
la bande de (2n - 1) carrés.



Les figures type 1 et 2 sont équivalentes. Or si on « encadre » une figure type 1 par deux figures type 2 on obtient un rectangle dont les dimensions sont :

$(2n - 1) + 2 . 1 = 2 n + 1$

et

$1 + 2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ n = S_n$

$$= \frac{n(n + 1)}{2}$$

Ce rectangle vaut donc :

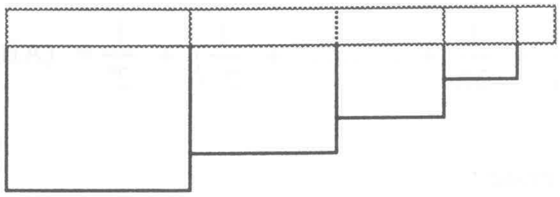
$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}$$

Mais, ses trois parties sont équivalentes : $3 D_n = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}$

alors : $$D_n = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$$

----------o-----------

On peut encore faire parler autrement la figure de type 1.



On lui enlève une bande 1 x S_n. Il reste alors une figure composée de rectangles dont les mesures sont (n - 1) et n ; (n - 2) et (n - 1) ; ... ; 4 et 3 ; 3 et 2 ; 2 et 1.

Cette figure a donc pour mesure :

$1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + ... + (n - 2)(n - 1) + (n - 1) n$ soit P_n

Mais $P_n = D_n - S_n$.

Donc $P_n = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1) - \frac{1}{2} n (n + 1) = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1 - 3)$

$P_n = \frac{1}{3}(n - 1) n (n + 1)$

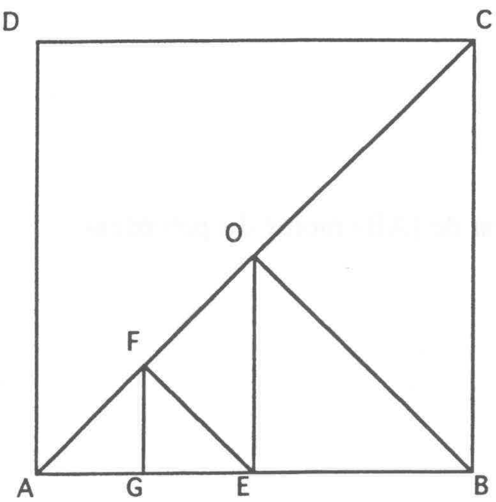
Ainsi $1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + ... + 9 . 10 = \frac{1}{3} 9 . 10 . 11 = 330$

On notera que P_n étant un entier le produit de trois entiers consécutifs est donc multiple de 3.

----------o----------

Proposons maintenant une série de découpages du carré.

Le carré ABCD est coupé en deux parties égales par sa diagonale AOC.



$(ADC) = \frac{1}{2}$

Le triangle isocèle et rectangle ABC est lui même coupé en deux parties égales par la médiatrice BO.

$(OBC) = \frac{1}{4}$

Itérons le procédé sur les triangles isocèles rectangles successifs.

E milieu de [AB] $\quad (OEB) = \frac{1}{8}$

F milieu de [AO] $\quad (OFE) = \frac{1}{16}$

G milieu de [AE] $\quad (GFE) = \frac{1}{32}$

Il reste toujours un triangle égal au dernier

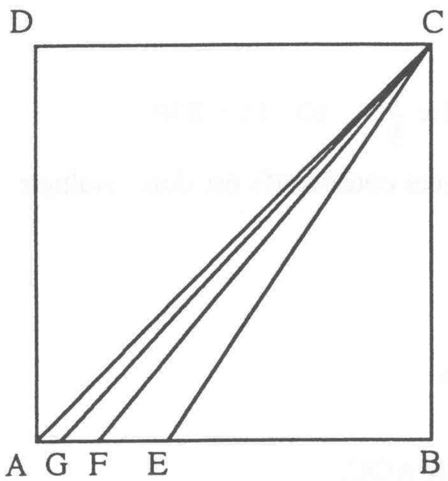
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} = (ABCD) = 1$$

Et si on continue sans cesse :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots\ldots\ldots = 1$$

Peut-on de même étudier : $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3^n}$?

Soit le carré unité ABCD, on prend E sur [AB] et F sur [AD] tels que $AE = \frac{1}{3}$ AB



$(ABC) = \frac{1}{2}$, $(AEC) = \frac{1}{3}(ABC) = \frac{1}{2}(EBC)$

$(EBC) = 2(AEC) = 2 \cdot \frac{1}{3}(ABC)$

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Soit alors F sur [AE] tel que $AF = \frac{1}{3}$ AE

$(FEC) = 2\,(AFC) = 2 \cdot \frac{1}{3}(AEC)$

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Itérons, toujours sur [AB], G tel que $AG = \frac{1}{3}$ AF

$(GFC) = 2\,(AGC) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \ldots\ldots$

Il reste toujours un triangle limité par [AC] et une portion de [AB] moitié du précédent, donc :

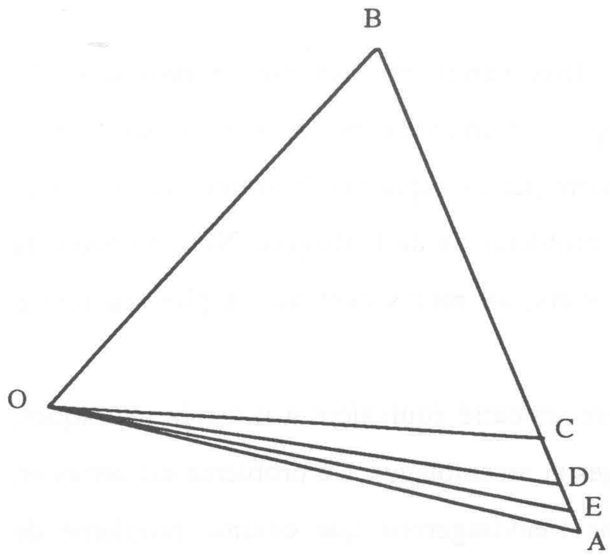
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}$$

----------o----------

La généralisation est possible en faisant appel, pour calculer

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

au polygone régulier de (p - 1) côtés.



Soient AB un côté du polygone,

O son centre,

C sur [AB] avec $AC = \frac{1}{p} AB$.

L'aire du polygone étant unité,

$(OAB) = \frac{1}{(p - 1)}$

$(OAC) = \frac{1}{p(p - 1)}$

et $(OCB) = (OAB) - (OAC)$

$(OCB) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p(p - 1)} = \frac{1}{p}$.

Viennent alors $AD = \frac{1}{p} AC$ $\qquad (OAD) = \frac{1}{p}\ (OAC) = \frac{1}{p^2(p-1)}$

$(ODC) = (OAC) - (OAD) = \frac{1}{p^2}$

puis $\qquad AE = \frac{1}{p} AD \qquad (OED) = \frac{1}{p^3}$

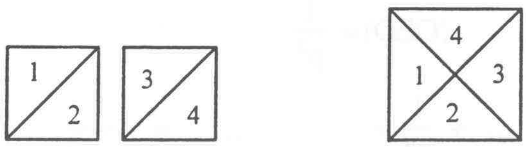
alors : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{p - 1}$

Des carrés, des petits carrés, encore des carrés...

Construire un carré égal à la somme de deux carrés est très ancien problème. Sa résolution, au moins empirique, pour des entiers, apparaît bien avant les Grecs, en Mésopotamie. Des tablettes nous renseignent : les Sumériens savaient par exemple que la somme de 65^2 et de 72^2 vaut 97^2 ou encore $119^2 + 120^2 = 169^2$. C'est le problème dit de Pythagore. Nous en avons la solution générale chez Euclide avec, jusqu'à nos jours, au moins cent autres plus ou moins différentes.

Nous étudierons ici le problème de construire un carré équivalent à n carrés identiques, carrés de base pris comme unité, et ce par découpages et assemblages. Ce problème est certes en lien avec des propriétés des entiers mais nous ne l'envisagerons que comme problème de géométrie.

Platon dans “ Ménon ” fait expliquer par Socrate à son esclave, que le carré de côté égal à deux a pour aire quatre et que pour avoir un carré d'aire deux (n = 2) il faut couper les carrés de base par une diagonale et assembler les quatre morceaux en prenant cette diagonale comme côté.

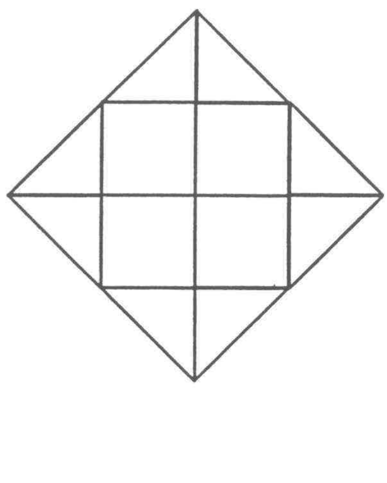


On s'inspirera de ce procédé pour n = 8

et plus généralement

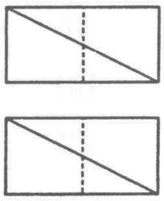
$n = 2a^2$

(avec a entier ($a \in \mathbb{N}$)

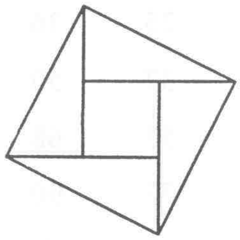


Cette idée d'" entourer" un carré par un découpage se retrouvera pour n = 5.

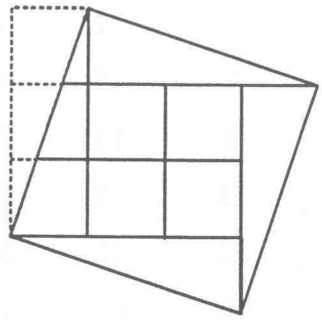
Quatre carrés réunis en deux " rectangles 2 x 1 " sont coupés selon la diagonale de ces rectangles et vont " entourer " le cinquième carré.



n = 5

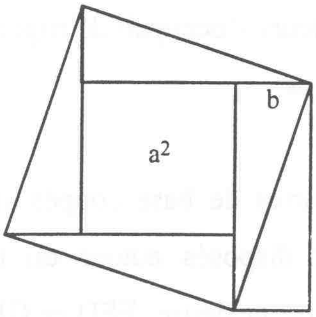


n = 10



On "entoure " de même un bloc central de a^2 carrés. Il y a donc solution pour les valeurs de n telles que $n = a^2 + 2\,[(a + 1)\,.\,1\,] = (a + 1)^2 + 1$.

Ce principe de " fractionner en deux " un rectangle de carrés peut s'étendre. Ainsi dans la figure ci-contre on a " bordé " un " carré a^2 " par des moitiés de " rectangles $(a + b)b$ ".



On a donc solution pour

$n = a^2 + 2\,[(a + b)\,.\,b\,]$

$= (a + b)^2 + b^2$

n somme de deux carrés.

Remarques

1. Dans cette formule les cas précédents correspondent à

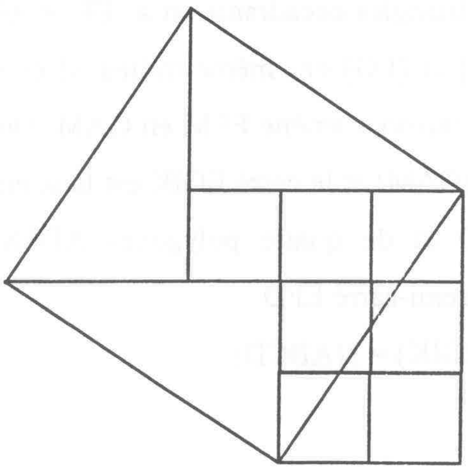
   $b = 0 : \; n = a^2$

   $a = 0 : \; n = 2b^2$

   $b = 1 : n = (a + 1)^2 + 1$

2. Il peut advenir que le découpage des " rectangles " laisse entiers des carrés de base (exemple n = 13).

3. On peut dresser une table donnant de valeurs de n obtenues à partir de a et b.

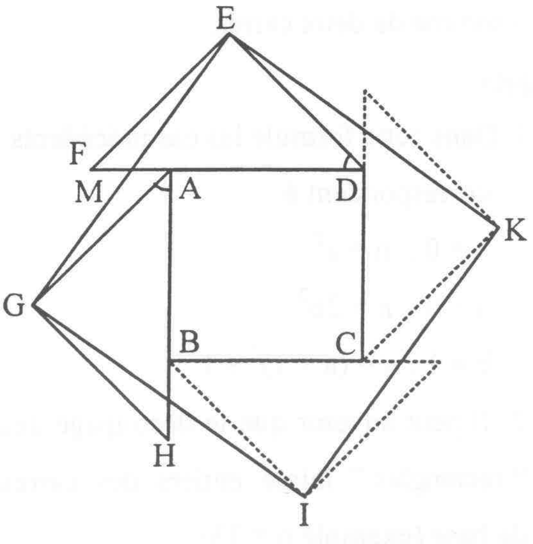


b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125
3	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153
4	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185
5	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221
6	72	85	100	117	136	157	180	205	232	261
7	98	113	130	149	170	193	218	245	276	305

On constate des cas de constructions multiples. n = 50, 65, 85....

Mais le tableau précédent laisse bien des vides à commencer par n = 3.

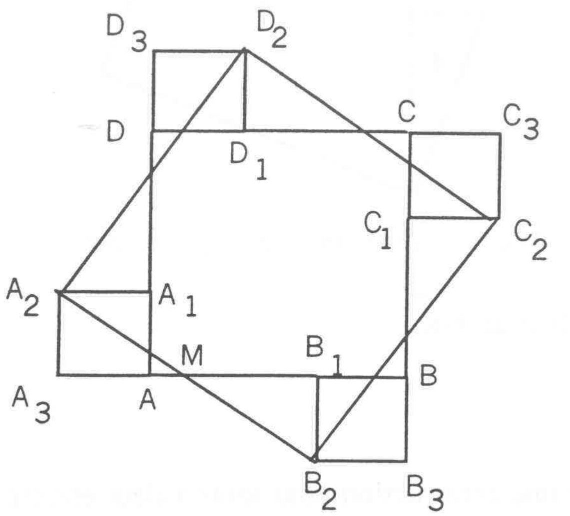
A la fin du Xème sicle, l'arabe ABUL WAFA qui par ailleurs s'occupait de trigonométrie, a donné une construction réposant sur un découpage en deux temps.



Deux carrés de base coupés selon une diagonale sont disposés autour du troisième comme le montre la figure. EFD et GHA étant deux des triangles encadrants on a $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$ donc [AF] et [EG] ont même milieu M et par suite un demi-tour amène EFM en GAM. Donc (EFM) = (GAM) et le carré EGIK est la somme de ABCD et de quatre polygones ADEMG égaux au demi-carré EFD

(EGIK) = 3(ABCD).

Le principe restant le même on peut partir d'un carré ABCD lui-même formé de a^2 carrés de base alors $n = a^2 + 2$.



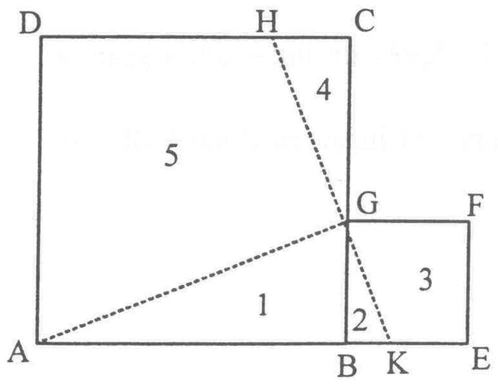
$n = a^2 + 4$.

De même à un carré ABCD on peut adjoindre quatre carrés selon le même principe.

Soient $AA_1A_2A_3$ et $BB_1B_2B_3$ deux carrés de base entourant ABCD contenant a^2 de ceux-ci. Dans le même esprit on a $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{B_1B_2}$ donc $[B_1A_3]$ et $[B_2A_2]$ ont même milieu. Un demi-tour amène le triangle découpé MA_2A_3 en MB_2B_1; et le carré $A_2B_2C_2D_2$ vaut donc a^2+4

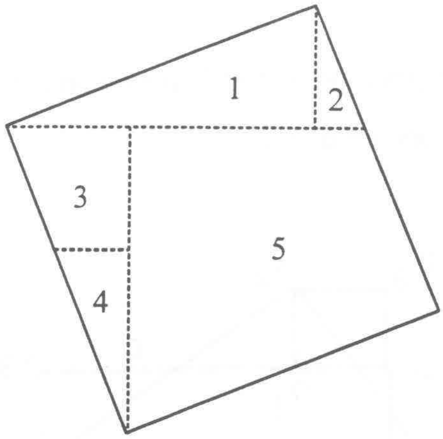
-----------o-----------

On rappelle enfin la construction de Clairaut pour former à partir des carrés a^2 et b^2 le carré $a^2 + b^2$. On trouve du reste un procédé similaire en Inde vers 700 (in Sulbasutras de BAUDHAYANA).



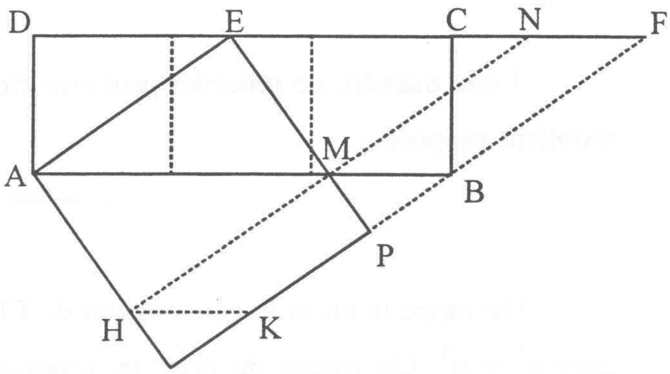
Les deux carrés sont juxtaposés en ABCD et BEFG puis on découpe l'ensemble selon (AG) et son orthogonale en G, soit HGK.

On a ainsi 5 parties que l'on recompose en carré.



Si on laisse en place les portions 1 et 2 (triangle AGK) on peut considérer que la portion 3 effectue la translation de $\overrightarrow{GA}$ et la portion 5 la translation de $\overrightarrow{HK}$.

Enfin MONTUCLA (fin 18ème siècle) donne une construction pour toute valeur entière de n . En voici le principe pour n = 3.



On assemble le rectangle 3 x 1 des trois carrés, soit ABCD. A l'aide de la diagonale d'un des carrés on porte sur [DC] le point E tel que DE égale cette diagonale. Alors

$AE^2 = AD^2 + DE^2$

$AE^2 = AD^2 + 2AD^2 = 3AD^2$.

AE est le côté du carré solution. On prend M sur (AB) tel que $\angle AEM$ soit droit.

Après découpe la translation de $\overrightarrow{AB}$ amène ADE en BCF. Après un autre découpage la translation de $\overrightarrow{EA}$ amène EMBF en AHKB. On prolonge alors EM jusqu'en P sur [KB], on découpe MPB qui par translation de $\overrightarrow{BK}$ vient en HJK.

AJPE est le carré $3AD^2$ somme des trois carrés de base.

Aires mises en examen

ou

Métamorphoses à démontrer

Pour occuper les temps morts sur la plage, on voit parfois apparaître dans la presse estivale certaines “ curiosités géométriques ”. Leur étude ne manque pas toujours d’intérêt mais, surtout révèle que l’insuffisance du “ voir ” conduit à la nécessité du “ démontrer ”.

$$64 = 65$$

La “ récréation mathématique ” qui a cette ambition repose sur le découpage d’un carré (8 x 8) en deux triangles rectangles (8 x 3) et deux trapèzes rectangles (3 et 5 x 5) puis à recomposer le tout en un rectangle (5 x 13).

Or 8 x 8 = 64 et 5 x 13 = 65.

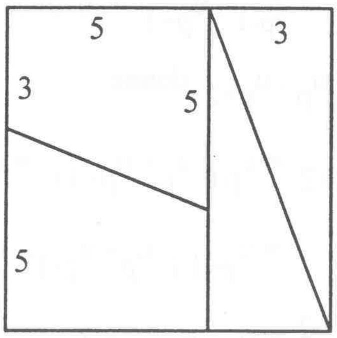
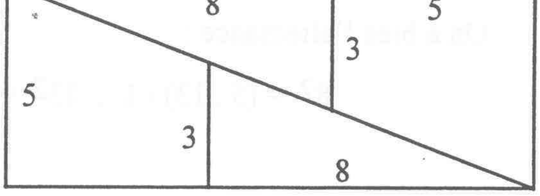
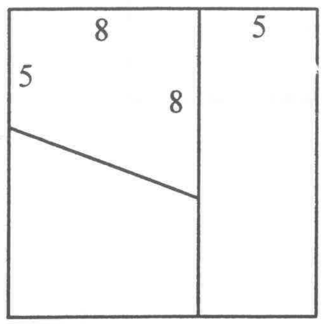


Fig.1

Seule l’épaisseur du trait trompe sur la figure car les sommets intérieurs ne sont pas alignés sur la diagonale du rectangle. Il “ manque ” un parallélogramme unité.



Par contre, si on effectue la même opération à partir d'un carré (13 x 13) il y aura un " chevauchement ", dans le rectangle reconstruit (8 x 21), d'un autre parallélogramme unité puisque 13 x 13 = 169 et 8 x 21 = 168



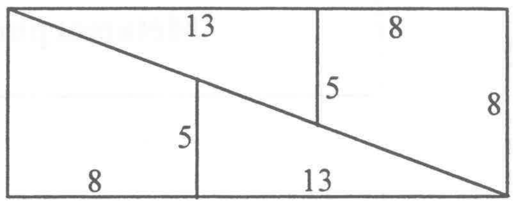


fig. 2

Pour étayer la réflexion faisons appel à FIBONACCI...

En effet la suite définie par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ a pour premiers termes :

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89\ \ldots$$

Il est aisé de démontrer par récurrence que $\left| u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} \right| = 1$

Soit admis $u_p^2 = u_{p-1} \cdot u_{p+1} + \varepsilon$ avec $\varepsilon^2 = 1$

Le calcul de $u_p \cdot u_{p+2}$ donne

$$u_p \cdot u_{p+2} = u_p\,(u_p + u_{p+1}) = u_p^2 + u_p \cdot u_{p+1} = u_{p-1} \cdot u_{p+1} + u_p \cdot u_{p+1} + \varepsilon$$

$$= u_{p+1}\,(u_p + u_{p-1}) + \varepsilon = u_{p+1}^2 + \varepsilon$$

donc $u_{p+1}^2 = u_p \cdot u_{p+2} - \varepsilon$

On a bien l'alternance :

$$8^2 = (5 \,.\, 13) - 1 \;;\; 13^2 = (8 \,.\, 21) + 1 \;;\; 21^2 = (13 \,.\, 34) - 1$$

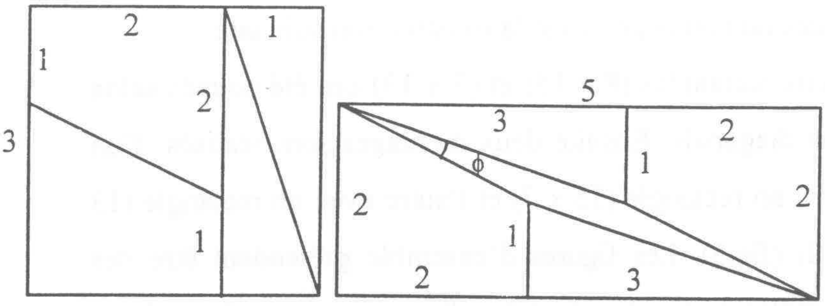


fig.3

Le jeu " manque-chevauchement " est nettement visible avec les premiers termes (fig. 3) de la suite.

Le principe de découpage est toujours le même (fig. 4).

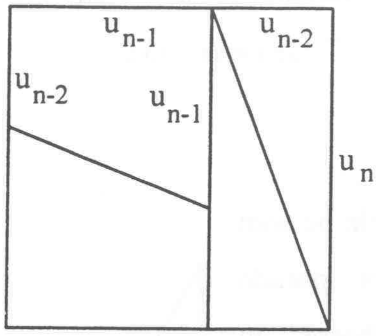


fig. 4

On peut apprécier l' " escamotage " en évaluant l'angle aigu du parallélogramme il vient :

$$\tan \phi = \frac{1}{u_n \cdot u_{n-1} + u_{n-2} \cdot u_{n-3}}$$

Quelques valeurs parlent d'elles-mêmes.

u_n	3	5	8	13	21	34
cotg ϕ	7	17	46	119	443	818
ϕ en degrés	8,13	3,36	1,25	0,48	0,14	0,07

Qui pouvait voir l'escamotage sans l'aide, imprévue, du Pisan ?

Moins subtile, peut-être, mais du même genre est la construction suivante .

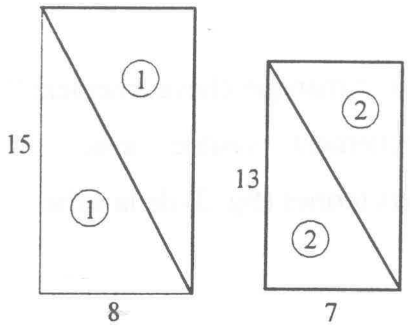


fig. 5

Deux rectangles (8 x 15) et (7 x 13) ont été coupés selon une diagonale. Ensuite deux montages sont réalisés l'un avec un rectangle (15 x 7) et l'autre avec un rectangle (13 x 8) (fig.5). Les figures d'ensemble prétendent être des triangles rectangles dont les dimensions sont les mêmes (15 et 28). Or, s'ils sont constitués des mêmes moitiés initiales on leur a adjoint des rectangles inégaux ! (fig.6) $(7 \,.\, 15) \neq (8 \,.\, 13)$.

En fait, les figures d'ensemble ne sont pas des triangles rectangles. Les pseudo hypoténuses n'en sont pas ; il y a “ bosse ” au raccord.

$$\frac{8}{15} \neq \frac{7}{13}$$

L'angle θ que font les deux morceaux est défini par

$$\tan \quad \theta = \frac{\frac{7}{13} - \frac{8}{15}}{1 - \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}} = \frac{1}{139}$$

$\theta < 0{,}5\,°$ Cela est peu visible

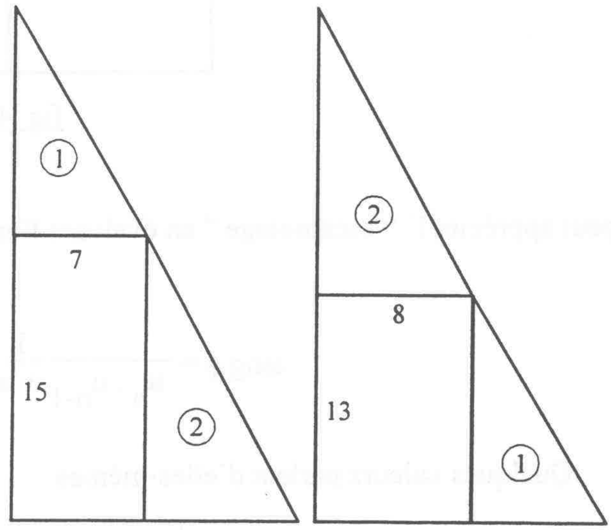
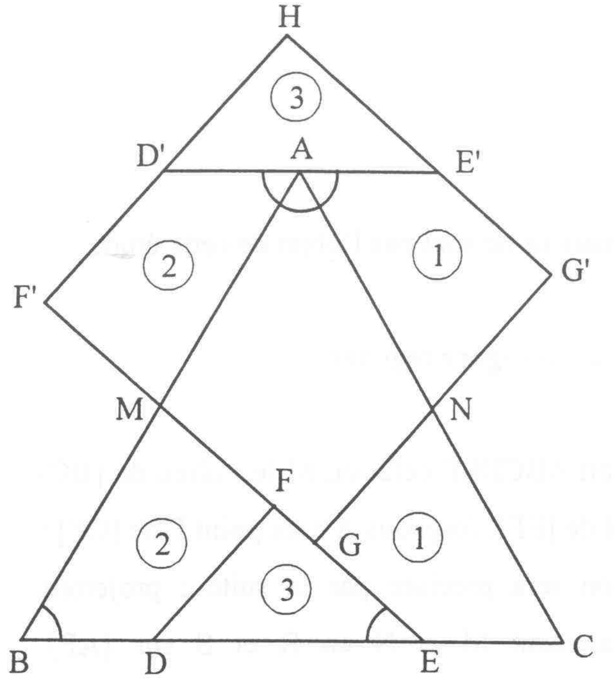


fig. 6

Triangle équilatéral, faux carré



Sur le triangle équilatéral ÀBC on détermine les points M, N, D, E par : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EC}$, et $2\,\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

On trace ME et on projette orthogonalement D et N en F et G sur la droite (ME).

Un demi-tour de centre N amène NGEC en NG'E'A et un demi-tour de centre M amène MFDB en MF'D'A.

Les points D'AE' sont co-linéaires (3 angles de $\frac{\pi}{3}$) et D'A + AE' = BD + EC = DE.

Par translation on amène FDE en HD'E' et comme on retrouve en D' et E' les angles en D et E supplémentaires, H, D' et F' d'une part et H, E', G' de l'autres sont co-linéaires. La figure HF'GG' est bien un rectangle (quatre angles droits). Est-ce un carré comme semble le suggérer la figure ?

Il doit avoir l'aire du triangle ABC ; si on pose AB = 4

$$(ABC) = 4\,a^2\sqrt{3}$$

Par ailleurs, il faut HG' = F'G ou HE' + E'G' = F'M + MG

ou FE + EG = FM + MG

soit FG + 2EG = 2FM + FG

donc EG = FM

Par suite le côté F'G du rectangle est égal à ME.

Or $ME^2 = BM^2 + BE^2 - 2\,BM.BE\,.\cos\angle B$

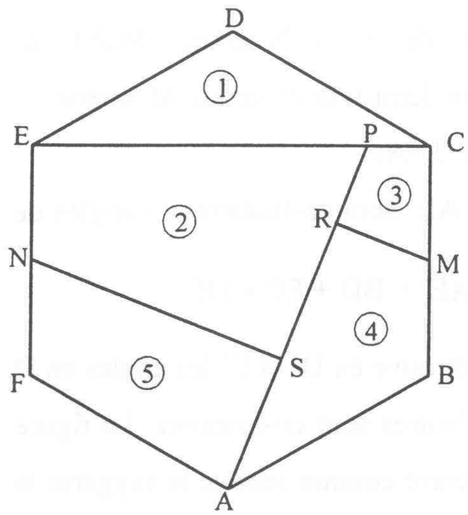
$$= 4\,a^2 + 9\,a^2 - 2.2a.3a.\frac{1}{2}$$

$$ME^2 = 7\,a^2$$

comme $7 \neq 4\,a^2\sqrt{3}$, HF'GG' n'est pas un carré.

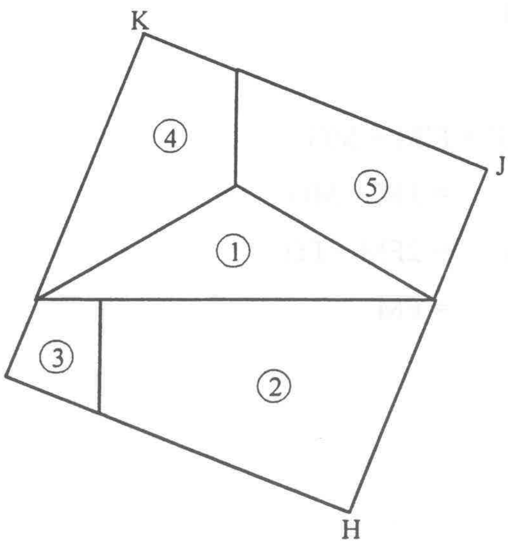
En découpant un triangle équilatéral de 20 cm de côté (a = 5) et en assemblant les morceaux on obtient bien un rectangle mais dont les côtés mesurent 13,09 cm et 13,23 cm. Ils ne diffèrent que de $\frac{1}{100}$ de leur longueur. L'oeil s'y laisse prendre !

N'y a-t-il donc que de fausses métamorphoses ?
Tous les " tamgrans " sont là, qui disent le contraire, mais ils ne sont pas l'objet de cette étude.



Etudions un hexagone régulier

Soit ABCDEF celui-ci, M le milieu de [BC] et N celui de [EF]. Joignons A à un point P de [CE] ; sa position sera précisée par la suite ; projetons orthogonalement M et N en R et S sur [AP]. Découpons et assemblons, comme l'indique la figure; les cinq morceaux de l'hexagone pour former le <u>rectangle</u> HJKL.



On vérifie d'abord que les angles s'accordent (dans l'hexagone ABC = 120° et DEC = 30°).

Pour les côtés on a :

HJ = AS + SP ; JK = SN + RM

KL = AR + RP ; LH = SN + RM.

Donc HJ = KL = AP et JK = LH = SN + RM

Si on appelle O le milieu de [CE] et ϕ l'angle $\angle PAO$ égal à $\angle SNM$ et $\angle RMN$, il vient

$AP \cos \phi = AO$ et $MN \cos \phi = SN + MR$.

Alors

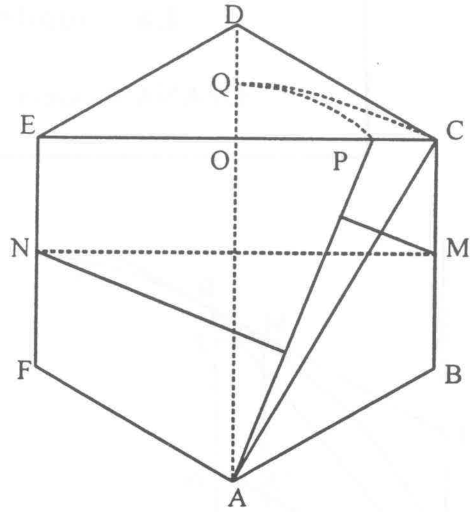
$$HJ.JK = \frac{AO}{\cos \phi} . (SN + MR) = AO.MN$$

Quelle que soit P l'aire du rectangle est constante.

On aura un carré si

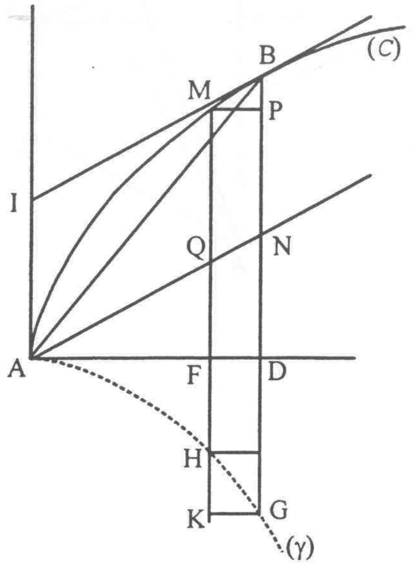
$$AP^2 = AO.MN .$$

Donc si AP est moyenne géométrique entre AO et MN (ou AO et AC). AP est constructible à la règle et au compas. En particulier si on porte sur [AD], AQ = AC l'angle $\angle APQ$ est droit ($AP^2 = AO.AQ$).



Les aires équivalentes, outil de démonstration
La « quadratrice géométrique »

OZANAM - Géométrie pratique fin 17ème siècle



Soit un arc AB d'une courbe $(\mathcal{C})$ de « diamètre » AD - la droite orthogonale à la « touchante » (tangente) en A à $(\mathcal{C})$ -, [BD] est l'«ordonnée » de B - (ADB droit). Les tangentes en A et B se coupent en I. La parallèle en A à (BI) recoupe (BD) en N. OZANAM prolonge BD de DG = AI = BN. Lorsque B décrit $(\mathcal{C})$, G engendre une courbe (γ) la « quadratrice géométrique » de $(\mathcal{C})$.

Si on envisage un point M de $(\mathcal{C})$ voisin de B, son ordonnée MF coupe (AN) en Q et (γ) en H. On ajoute les points P et K tels que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{KG}$, selon notre terminologie.

Alors OZANAM écrit : M est infiniment proche de B, l'arc BM est infiniment petit et pourra passer pour une ligne droite partie de la touchante BI.

Il s'en suit que l'aire du rectangle DGKF équivaut à l'air du « parallélogramme » BNQM (base DG = base BN et même hauteur FD). Si on considère maintenant ce parallélogramme de base MB et de hauteur la distance de A à [BI] son aire sera double de celle du triangle ABM. Enfin lorsque M tend vers B, H tend vers G sur (γ) ainsi que K.

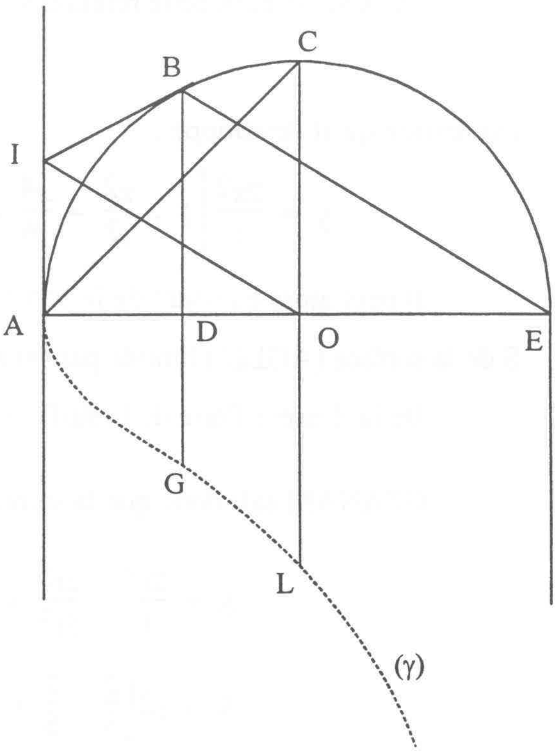
Si on additionne tous les triangles AMB relatifs à l'arc de $(\mathcal{C})$ d'une part et tous les rectangles DGKF de (γ) il est, avec OZANAM, « aisé de conclure » :

Aire (ADGH) = 2 Aire du segment AB de $(\mathcal{C})$ (Segment : portion du plan entre un arc de courbe et sa corde). Ainsi est établie une relation entre une aire liée à $(\mathcal{C})$ et une liée à sa quadratrice géométrique (γ).

Application : Cas du cercle

Soit un demi cercle ACE de diamètre AOE = 2r.

Avec les notations précédentes il apparaît, en plus, que (OI) et (EB) sont parallèles et que les triangles OAI et EDB sont semblables.



. L'aire de la surface limitée par (γ) ADOLG est le double de l'aire du segment AC du disque :

$$\text{aire}\left(\frac{1}{4}\text{ disque}\right) = \text{aire (segment AC)} + \text{aire (triangle AOC)}$$

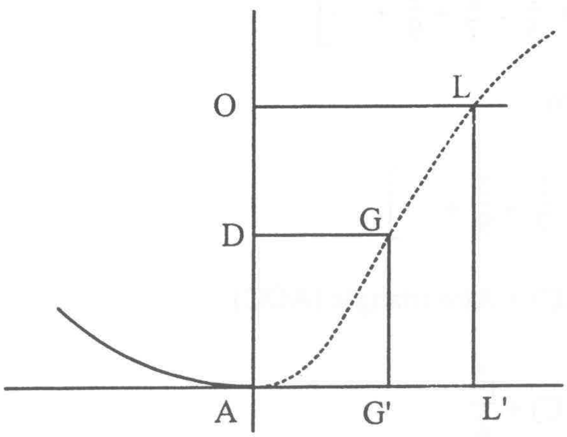
$$= \frac{1}{2}\text{ aire (ADOLG)} + \frac{r^2}{2}$$

. Par ailleurs les triangles semblables permettent d'écrire

$$\frac{AI}{AO} = \frac{BD}{DE} \text{ ou } \frac{AI^2}{AO^2} = \frac{BD^2}{DE^2} = \frac{AD\,.\,DE}{DE^2}$$

$$\text{donc } \frac{DG^2}{r^2} = \frac{AD}{DE} \qquad (1)$$

. Recherche d'une équation cartésienne de (γ)



Prenons comme axes la tangente en A, et le diamètre AE. Soient GG' et LL' les ordonnées de G et L sur le premier axe. Posons AG' = DG = x et AD = y (Toutes ces grandeurs sont ainsi positives, OZANAM ne l'imaginait pas autrement)

La relation (1) s'écrit :

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{y}{2r - y}$$

alors $yr^2 = x^2(2r - y)$ ou $y(r^2 + x^2) = 2rx^2$

$$y = \frac{2rx^2}{r^2 + x^2}$$

OZANAM écrit cette relation $y = \frac{2x^2}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{r^2}}$

expression qu'il développe :

$$y = \frac{2x^2}{r}\left[1 - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^4}{r^4} - \frac{x^6}{r^6} + \cdots\right] = \frac{2x^2}{r} - \frac{2x^4}{r^3} + \frac{2x^6}{r^5} + \cdots$$

Il peut alors en usant de la sommation des puissances donnée par PASCAL calculer l'aire S de la surface (AGLL') limitée par (γ) avec x variant de 0 à r (AL' = OA).

De là il tirera l'aire de la surface (AGLOD).

OZANAM sait donc que la somme de 0 à r des x^2 est $\frac{r^3}{3}$, des x^4 est $\frac{r^5}{5}$ etc... Il a donc :

$$S = \frac{2r^3}{r} - \frac{2r^5}{5r^3} + \frac{2r^7}{7r^5} + \cdots$$

$$S = r^2\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \cdots\right]$$

Ensuite Aire (AGLOD) = Aire (AL'LO) - Aire (AL'LG)

$$= r^2 - S$$

$$= r^2\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \cdots\right]$$

Mais Aire (Segment AC) $= \frac{1}{2}$ Aire (AGLOD)

$$= r^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right]$$

Aire ($\frac{1}{4}$ disque) = Aire (Segment AC) + Aire triangle (AOC)

= Aire (Segment AC) + $\frac{r^2}{2}$

$$= r^2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right]$$

OZANAM peut écrire Aire (disque) = $\frac{1}{2}$ (longueur du cercle x rayon) d'où la relation

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\text{r.cercle}}{2} = r2\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right]$$

et
$$\frac{\text{cercle}}{2r} = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right]$$

C'est-à-dire le rapport :

$$\frac{\text{cercle}}{\text{diamètre}} = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots\right]$$

OZANAM effectue les différences deux à deux $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5.7}$, etc,

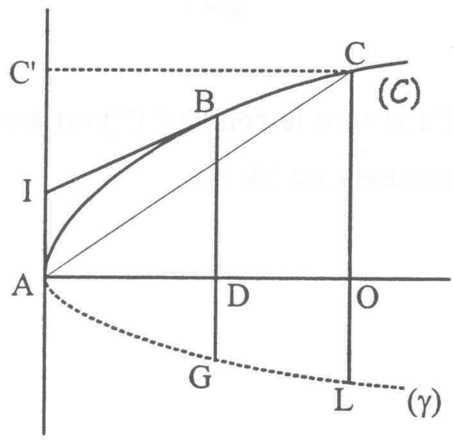
il retient :
$$\frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}} = 8\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right]$$

Cette série hélas converge très lentement. Les dix premiers termes donnent 3,092 !... OZANAM en a calculé 315 et obtient le rapport 3,14000528. Il écrit : nous nous servirons de $\frac{314}{100}$ parce que cela suffit pour les calculs ordinaires de la géométrie pratique.

Autre application - Cas de la parabole.

Il n'est pas besoin ici de sommation des puissances. La démonstration est toute géométrique à partir de la propriété de la quadratrice géométrique.

Avec les mêmes notations



L'arc ABC est celui d'une parabole et on connait la propriété : AI = $\frac{1}{2}$ DB.

Donc la quadratrice (γ) est également une parabole (DG = $\frac{1}{2}$ DB) Ozanam ne parle pas d'affinité mais il sait que :

Aire (ADOLG) = $\frac{1}{2}$ Aire (ADOCB)

comme on a toujours :

$$\text{Aire (ADOLG)} = 2 \,.\, \text{Aire (segment ABC de la parabole)}$$

il vient :

$$4.\ \text{Aire (segment ABC)} = \text{Aire (ADOCB)}$$

mais :

$$\text{Aire (ADOCB)} = \text{Aire (segement ABC)} + \text{Aire (triangle AOC)}$$

donc :

$$\underline{3.\ \text{Aire (segment ABC)} = \text{Aire (triangle AOC)}}$$

Comme l'aire du triangle AOC est la moitié de l'aire (AOCC'), on peut écrire :

Aire (ADOCB) = 4 Aire (segment ABC)

Aire (AOCC') = 6 Aire (segment ABC)

et, avec OZANAM :

« L'aire de la parabole est à celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur comme 2 est à 3 »

Parallélogramme ; en effet la propriété est exacte si A est un point quelconque de la parabole et non seulement son sommet. -Il est accessoire que le « diamètre » AD soit orthogonal à la « touchante » en A.

<u>Généralisation</u> Selon ce raisonnement on démontrera que pour toute courbe (C) telle que :

$DB^k = AD$, $(y^k = x)$, on aura :

$$\text{Aire (AOCB)} = \frac{k}{k+1}\ \text{Aire (AOCC')} \qquad\qquad (k > 0)$$

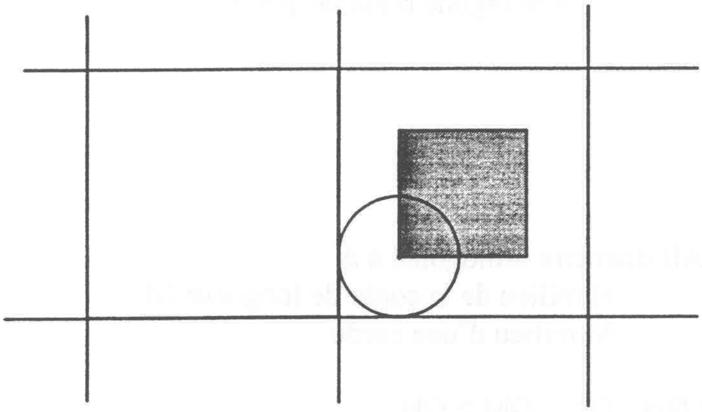
L'aire sous la courbe (C) est à celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur comme k est à k + 1.

Probabilités et aires ont assez de points communs en tant que mesures pour que cela apparaisse élémentairement.

1. Franc-carreau (Buffon)

Sur un sol pavé de carreaux de côté a on jette une pièce de rayon r.

Probabilité p de l'événement : la pièce est franche de toute ligne de partage.



Le centre de la pièce doit être intérieur à un carré de côté :

a - 2 r

$$p = \frac{(a - 2r)^2}{(a)^2} = \left(1 - \frac{2r}{a}\right)^2$$

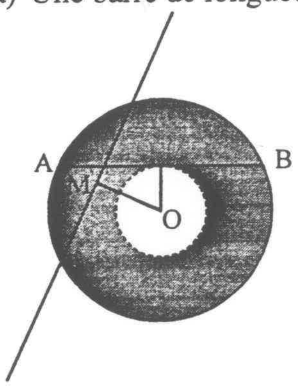
$a = 20 \quad r = 1 \quad p = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}81$

$r = 2 \quad p = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}64$

$r = 3 \quad p = \left(1 - \frac{3}{10}\right)^2 = 0{,}49$

2. Pseudo paradoxe de Bertrand

a) Une barre de longueur l « tombe » sur un cercle de rayon r (l >> r)



Probabilité p de l'événement : la corde ainsi définie, a une mesure inférieure à 2d - [0 < d < r , AB = 2d]

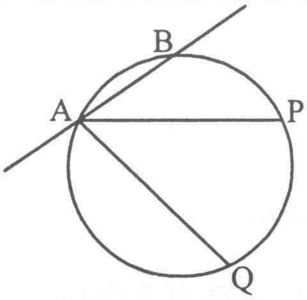
M milieu de la corde, il faut OM > $\sqrt{r^2 - d^2}$

$$p = \frac{\pi r^2 - \pi(r^2 - d^2)}{\pi r^2} = \frac{d^2}{r^2}$$

. 2d = côté triangle équilatéral inscrit $d = \frac{\sqrt{3}}{2} r \quad p = \frac{3}{4}$

. 2d = côté hexagone régulier inscrit $d = \frac{r}{2} \quad p = \frac{1}{4}$

b) La barre pivote autour d'un point A du cercle



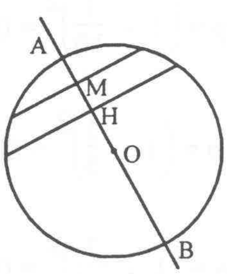
Soient P et Q tels que AP = AQ = 2d

Il faut que B $\in$ arc PAQ

$$p = \frac{\text{mes(arc PAQ)}}{2\pi r}$$

- triangle équilatéral $p = \frac{2}{3}$
- hexagone régulier $p = \frac{1}{3}$

c) la barre a une direction fixe Δ



Soient : AB diamètre orthogonal à Δ
H milieu de la corde de longueur 2d
M milieu d'une corde

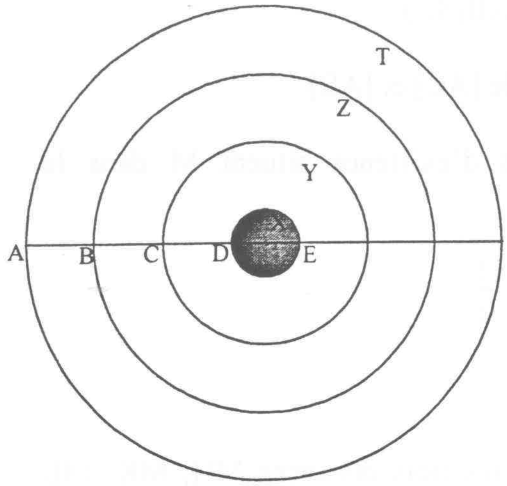
Il faut : OA > OM > OH

$$OM = \sqrt{r^2 - d^2}$$

$$p = \frac{AH}{AO} = \frac{r - \sqrt{r^2 - d^2}}{r} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2}$$

- triangle équilatéral $p = \frac{1}{2}$
- hexagone régulier $p = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$

3 - Cible « équitable » : Quelles cibles sont ainsi marquées ?



La cible S est constituée de cercles concentriques « équidistants » AB = BC = CD = DE = 2r
Soient X, Y, Z, T les zones

$$p(X) = \frac{\text{aire}(X)}{\text{aire}(S)} = \frac{\pi r^2}{\pi (7r)^2} = \frac{1}{49}$$

$$p(Y) = \frac{(Y)}{(S)} = \frac{\pi(3r)^2 - \pi r^2}{\pi(7r)^2} = \frac{9-1}{49} = \frac{8}{49}$$

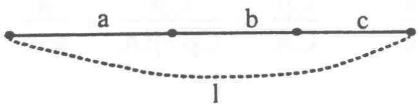
$$p(Z) = \frac{(Z)}{(S)} = \frac{25-9}{49} = \frac{16}{49}$$

$$p(T) = \frac{(T)}{(S)} = \frac{49-25}{49} = \frac{24}{49}$$

Les « points » à attribuer à chaque zone « devraient » être inversement proportionnels aux probabilités, donc proportionnels à 1, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{24}$ par exemple 48, 6, 3, 2.

4 - La paille coupée en trois

Probabilité de l'événement : les trois morceaux peuvent réaliser un triangle;

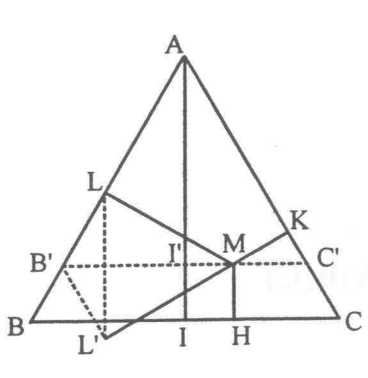


condition : les inégalités triangulaires

$$\begin{cases} a < b+[l-(a+b)] \\ b < a+[l-(a+b)] \\ [l-(a+b)] < a+b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2a < l \\ 2b < l \\ 2(a+b) > l \end{cases}$$

...

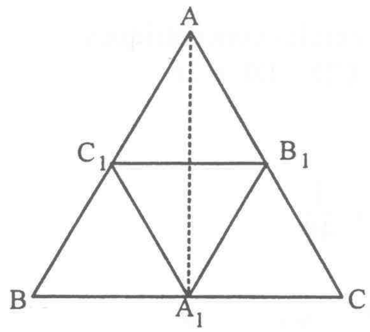
- Problème équivalent



Dans un triangle équilatéral choix d'un point M tel que ses distances MH, MK, ML aux trois côtés puissent former un autre triangle.

Lorsque M se déplace sur [B'C'] // [BC]
MK + ML = L'K égal à la hauteur du triangle équilatéral A'B'C' soit AI' donc MH + MK + ML = MH + AI' = AI.

Quel que soit M MH + MK + ML = AI



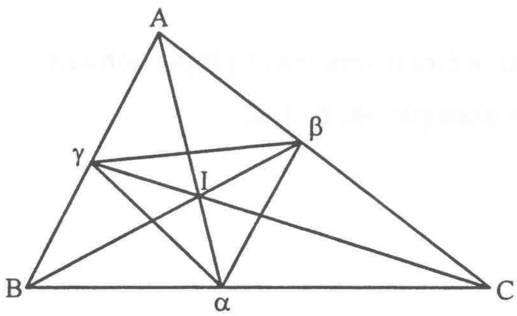
La condition MH < MK + ML revient à situer M sur la bande définie par (BC) et (B_1 C_1)

B_1 et C_1 milieux de [AC] et [AB]

Les 3 conditions d'existence situent M dans le triangle médian de ABC.

$$p = \frac{(A_1B_1C_1)}{(ABC)} = \frac{1}{4}$$

5 - Dans un triangle quelconque choix de M pour que les trois distances MH, MK, ML forment un triangle (Lemoine - nouvelles annales de mathématiques)



Ce sont les bissectrices Aα, Bβ, Cγ qui permettent la comparaison de MH, MK, ML.

On étudie les fonctions telles que

$$\phi_1(M) = MH - (MK+ML)$$

$\phi_1(A)$ = hauteur issue deA > 0

$\phi_1(I) = -r < 0$ r rayon cercle inscrit

$\phi_1(\alpha) = 0$

Lemoine en déduit M intérieur au triangle $\alpha\beta\gamma$

$$p = \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(ABC)} \quad \text{on a} \quad \frac{(C\alpha\beta)}{(CAB)} = \frac{C\beta.C\alpha}{CA.CB} \qquad \frac{C\beta}{A\beta} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c} \qquad \frac{C\beta}{CA} = \frac{C\beta}{C\beta+\beta A} = \frac{a}{a+c}$$

$$\frac{(C\alpha\beta)}{CAB}) = \frac{a}{(a+c)}\frac{b}{(b+c)}$$

$$p = \frac{(\alpha\beta\gamma)}{(ABC)} = \frac{(ABC) - (C\alpha\beta) - (A\beta\gamma) - (B\gamma\alpha)}{(ABC)}$$

$$= 1 - \frac{ab}{(c+a)(c+b)} - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ca}{(b+c)(b+a)}$$

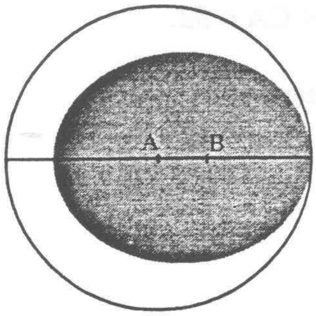
$$= \frac{2\,abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Si ABC équilatéral, a = b = c, $\alpha\beta\gamma$ devient triangle médian $A_1B_1C_1$

$$p = \frac{2a^3}{8a^3} = \frac{1}{4}$$

6 - Dans une ville A les taxis électriques ne peuvent prendre de clients que pour une distance inférieure à 30 km (autonomie de 60 km).

Un chauffeur de taxi qui habite à 10 km attend, en station en A, un dernier client avant de rentrer chez lui. Or il ne lui reste qu'une autonomie de 50 km. Quelle est la probabilité de l'événement : il peut satisfaire ce client sans avoir à recharger avant son retour chez lui ?



$AB = 10$

- il peut aller en M tel que $MA + MB \leq 50$
- « aire » de demande possible : cercle centre A rayon 30
- « aire » de demande acceptable : ellipse $MA + MB = 50$

Ellipse $2c = AB = 10$

$2a = 50 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25^2 - 5^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

$$p = \frac{(\text{ellipse})}{(\text{cercle})} = \frac{p.25.10\sqrt{6}}{p.30^2} = \frac{250\sqrt{6}}{500} = \frac{5\sqrt{6}}{18} \approx 0{,}68$$

idem : autonomie restante 30

$MA + MB = 30$

$b = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$$p = \frac{15.10\sqrt{2}}{500} = \frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}24$$

7 - Triangle quelconque

Au tableau noir je tire un trait BC de 50 cm. « Au-dessus » je prends, au hasard, un point A.

Probabilité de l'événement : le triangle ABC est « quelconque » c'est-à-dire il n'est ni presque isocèle ni presque rectangle et n'a pas d'angle obtus. Soit encore, à 2cm près, on a : ni AB = AC, ni BAC presque droit ou obtus, ni 48 < BA < 52, ni 48 < CA < 52.

Une figure traduit cela en supposant que je dispose d'un mètre au-dessus de BC.

« Au hasard » je dispose d'un rectangle 46 x 100 = 4 600 (je vise à 2 cm près les verticales en B et C) diminué du demi-cercle BC.

$\frac{1}{2}\pi(25)^2 \approx 981$ (pour BAC obtus)

Soit 4 600 - 981 = 3 619.

Sont, défavorables les points situés :

- sur la « médiatrice » extérieure au demi-cercle
  4 x 75 = 300

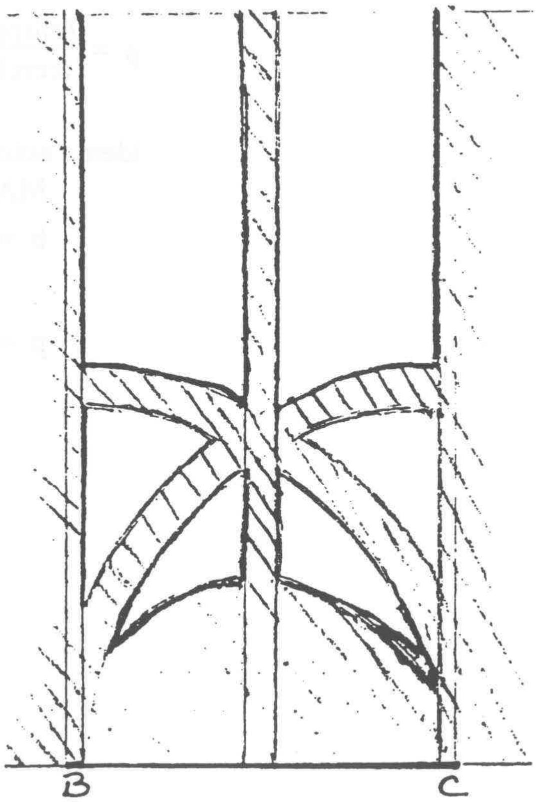
- sur les deux quarts de couronne

$$2.\frac{1}{4}\pi(52^2 - 48^2) = \frac{\pi}{2}(52 + 48)(52 - 48)$$
$$= 200\pi$$

Donc $300 + 200\pi \approx 928$

p (triangle non « quelconque ») = $\frac{928}{3619} \approx 0,26$

p (triangle quelconque) = 1 - 0,26 = 0,74 ...



Mais si je ne veux pas un triangle trop pointu en A et que je réduise à 50 cm sa hauteur, je ne dispose plus que de (46 x 50) - 981 = 2 300 - 981 = 1 319 et alors :

p' (non quelconque) = $\frac{928}{3619} \approx 0,70...$ (p'(quelconque) = 0,30).