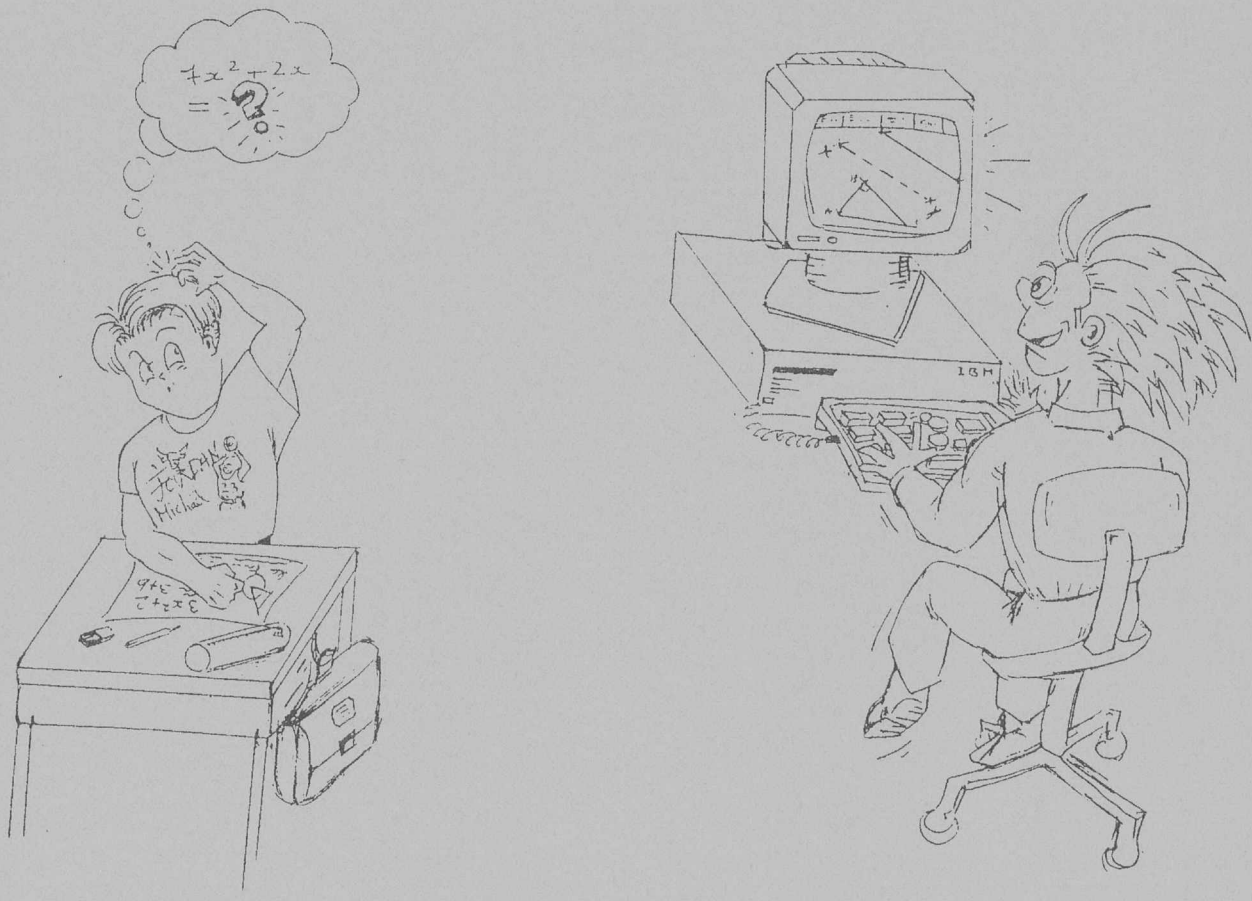
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon
cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http : www.univ-montp2.fr/~irem

Activités pour le cycle central :
Des nombres et des lettres
De l'observation au raisonnement



Groupe Nouveaux programmes de Collège
IREM - IPR

1999

Les auteurs.

Ce document a été conçu et rédigé, durant l'année scolaire 1997-1998, par un groupe de réflexion mis en place dans l'Académie de Montpellier à l'initiative de l'IREM et des Inspecteurs Pédagogiques Régionaux.

Les différentes activités ont été proposées et décrites par :

Marie Claire COMBES, professeur au collège «François Villon» à Saint Gély du Fesc,
Liliane DRAY, professeur au collège privé «La Providence» à Montpellier,
Pierrette FERRIERE, professeur au collège «Jeu de Mail» à Montpellier,
Martine LEWILLION, professeur au collège «Pic Saint Loup» à Saint Clément de Rivière,
Richard MARGUERIT, professeur au collège «Diderot» à Alès,
Sylvie PELLEQUER, professeur au collège «Pic Saint Loup» à Saint Clément de Rivière,
Jean Marc RAVIER, professeur au collège «Diderot» à Nîmes,
Mireille SAUTER, professeur au collège «Philippe Lamour» à La Grande Motte.

Avec la collaboration de **Daniel BOUTTE** et **Thierry MURGIER** IPR-IA de mathématiques dans l'Académie.

Les auteurs remercient la Mission Académique à la formation des personnels du soutien matériel apporté à la réalisation de cette brochure.

Sommaire

PRÉFACE p 4.

I - PRÉALABLES AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF

Règles du débat mathématique p 6.

II - DES NOMBRES ET DES LETTRES

Vous avez dit équation ? p.10

Activités

1 - Langage courant et langage symbolique p.15
2 - Trois petits tours et la lettre apparaît p.18
3 - Nombres, lettres et dessins p.22
4 - Démontrer avec des lettres

Introduction p.27
- **Le contre-exemple** p.28
- **Somme d'entiers consécutifs** p.33
- **On double les dimensions** p.36
- **Et si on modélisait ! ...** p.39

5 - Du raisonnement arithmétique à l'équation p.41
6 - Équation ? Solution d'une équation ? p.53
7 - Etre ou ne pas être ? p.57
8 - Ne perdez pas l'équilibre ! p.59

III - DE L'OBSERVATION AU RAISONNEMENT

Introduction p.66

1 - Codages
- Pré-démonstratif ou codages en géométrie p.68
- Et si on décodait ? p.70
- Codage et initiation à la démonstration p.73

2 - La figure géométrique
- Introduction p.78
- Les triangles p.81
- Les parallélogrammes particuliers p.86

3 - Les quadrilatères particuliers
- Introduction p.93
- Avec CABRI p.94
- Parallélogramme en particulier p.97
- Des quadrilatères non croisés p.100

4 - Les constructions raisonnées
- De la figure au texte p.104
- As-tu mon décodeur ? p.107

Les activités présentées dans cette brochure ont été expérimentées dans les classes et longuement discutées au sein de notre groupe .

Nous avions choisi, l'an dernier, pour accompagner le nouveau programme de sixième, deux thèmes fondamentaux : "*Aires et Périmètres*", puis "*Décimaux*" ; pour les nouveaux programmes de cycle central il nous a semblé judicieux de ne retenir également que deux thèmes: "*Calcul littéral*" et "*Démonstration*".

Les auteurs du programme mettent l'accent sur le statut des énoncés mathématiques : *"Pour tout résultat, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'est pas démontré"*. Cela suppose la connaissance, par les élèves, des règles qui régissent le débat mathématique qui ne seront pas présentées ex-nihilo mais apparaîtront progressivement dès la sixième.

La fréquentation préalable des écritures littérales dans diverses occurences ainsi que des idées claires sur les différents statuts de la lettre permettront sans doute d'aborder les équations avec plus de facilité.

Nous avons pris, personnellement, beaucoup de plaisir à travailler régulièrement avec ce groupe de l'IREM de Montpellier et espérons que ce document permettra aux équipes de collège d'approfondir, à travers des exemples, leur réflexion sur l'apprentissage des mathématiques au cycle central.

Les I.P.R - I.A.
D. BOUTTÉ
T. MURGIER

PRÉALABLES AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF

Règles du débat mathématique

(d'après des travaux de l'IREM de Lyon).

Un des objectifs généraux des programmes est de développer *l'aptitude des élèves à chercher, critiquer, justifier ou infirmer une affirmation.* Pour atteindre cet objectif, qui à long terme, est de donner du sens à la démonstration comme outil de preuve, l'enseignant doit progressivement amener les élèves à utiliser des règles très précises du raisonnement mathématique.

Ces règles ne sont pas naturelles car, si elles sont nécessaires dans le cadre des mathématiques elles diffèrent souvent des modes de raisonnement de la vie courante. L'appropriation de ces règles est une étape préliminaire indispensable à l'apprentissage du raisonnement déductif et de la démonstration.

Ces règles ne font pas l'objet d'un enseignement explicite, il en résulte de nombreuses difficultés chez les élèves. Il faut donc qu'elles soient présentées et travaillées lors d'activités appropriées. Ces activités deviennent alors des situations de référence pour la classe, auxquelles l'enseignant aura recours tout au long de l'année scolaire.

Quelles sont ces règles du débat mathématique ?

Les deux premières règles relèvent de la logique formelle :

• **Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux.**
C'est le principe du tiers exclu.

• **Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.**
Ces deux règles ne suivent pas la même logique que celle des règles d'orthographe où les exceptions "confirment la règle". Il n'est pas facile de passer d'un cours de français à un cours de mathématiques !!

Les deux règles suivantes correspondent à la remise en cause des preuves pragmatiques utilisées naturellement par les élèves en arrivant au collège, il est indispensable qu'ils prennent conscience de l'insuffisance de ces preuves,cela devrait les motiver pour élaborer des démonstrations :

• **Des exemples, qui vérifient un énoncé, ne suffisent pas à prouver que celui ci est vrai.**
Dans un problème numérique, les élèves se contentent de vérifier la conjecture dans quelques cas particuliers pour conclure qu'elle est vraie. L'algèbre est donc un terrain privilégié pour travailler cette règle, les activités sur les lettres ayant le statut de variable permettent

d'aborder le problème de la généralisation d'un résultat et par-là même d'insister sur l'utilité des démonstrations.

• **Une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.**

A l'école primaire, les activités de géométrie privilégient le dessin et les mesures. Au collège l'élève doit passer progressivement de preuves pragmatiques, liées à l'action et à l'expérience, à des preuves intellectuelles qui demandent du recul par rapport à l'action. Les problèmes sur les aires ou sur les angles sont particulièrement intéressants, car la vision et les prises de mesures sur la figure ne permettant pas de conclure, ils peuvent susciter des démonstrations motivantes.

Une cinquième règle clarifie et permet une gestion efficace des débats :

• **Pour débattre, on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou de définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord.**

La liste de ces propriétés, définitions s'enrichit au cours des années mais il est essentiel que les élèves sachent clairement quels sont les énoncés qui sont admis et qu'ils peuvent utiliser dans des démonstrations.

Enfin, une dernière règle indispensable à tout débat mathématique est la suivante :

• **On ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai.**

Comment travailler ces règles avec les élèves ?

Ces règles sont toujours présentes dans un cours de mathématiques, mais il semble important d'y consacrer des "moments forts" dans une progression de classe. Des activités appropriées leur sont dédiées, qui sont des points de référence pour les élèves; il faut provoquer des situations, ayant comme objectif la connaissance d'une de ces règles.

Comme type d'activité, on peut relever : le débat en classe et les narrations de recherche. Ces activités sont décrites dans le chapitre : "Démontrer avec des lettres " sous les titres : " Le contre-exemple " et "Somme d'entiers consécutifs ".

L'IREM de Lyon présente dans son ouvrage *Initiation au raisonnement déductif au collège* de nombreux textes d'énoncés de problèmes, qui amènent les élèves à s'approprier ces règles du débat mathématique. Voici quelques-uns de ces énoncés avec leurs objectifs :

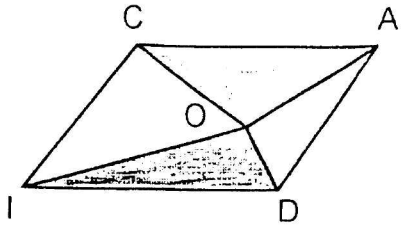
- Remise en cause de la lecture directe du dessin comme outil de preuve

* Paul construit un triangle isocèle ABC, de sommet principal A et dont l'angle ABC mesure 61°, il place un point D sur la demi-droite [AC), à l'extérieur de [AC] tel que CD=BC. Il dit que le triangle ABD est rectangle, Marie affirme que non. Qui a raison ?

* Le rectangle d'Euclide
Trace un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm.
Place un point E sur [AC] tel que AE = 3 cm.
Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe (AB) en N et (DC) en L

Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe (AD) en M et (BC) en K
Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK quel est celui qui a la plus grande aire ?

* CADI est un parallélogramme, O est un point intérieur à CADI. Laquelle des deux surfaces a la plus grande aire : la surface grisée (COA et ODI réunies) ou bien la surface blanche (AOD et COI réunies) ?



Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai, notion de contre-exemple

* Dans l'expression $n \times n - n + 11$ si l'on remplace n par n'importe quel nombre entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui n'a que deux diviseurs ?

Nécessité d'une démonstration, introduction du calcul littéral comme outil de preuve (en liaison avec l'énoncé précédent)

* Le produit d'un nombre pair avec lui-même est-il un nombre pair ?

* La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours multiple de trois. Vrai ou faux ?

DES NOMBRES ET DES LETTRES

Vous avez dit équation ?

Les difficultés rencontrées lors de la mise en place des résolutions d'équations en classe de quatrième ont des origines diverses qui, nous semble-t-il, ne peuvent pas être résolues de façon magique en expliquant en une séquence qu'il suffit de désigner l'inconnue, de mettre en équation, de résoudre cette dernière et de vérifier le résultat obtenu. Les activités présentées dans ce document ouvrent des pistes de réflexion et mettent en évidence la nécessité d'une progression sur plusieurs années, elles sont construites pour permettre aux élèves de mieux appréhender les différents aspects du concept d'équation.

Ce texte de quatre pages ne prétend pas être exhaustif, son objectif est de faire réfléchir sur les différents statuts des lettres et sur l'utilisation de celles-ci au collège.

Quelques usages classiques :

- la lettre désigne un point, une droite, une expression algébrique ...
- la lettre désigne une grandeur dans une formule
- la lettre désigne un élément générique d'un ensemble pour permettre de donner une démonstration générale
- la lettre désigne un nombre inconnu que l'on cherche à découvrir grâce à une propriété qui se traduit le plus souvent par une équation.

Il est essentiel que toutes ces utilisations soient introduites consciemment et progressivement par les enseignants (Attention il ne s'agit pas de faire un cours là-dessus !).

Deux difficultés essentielles* apparaissent quand on parle d'équations au collège, et plus tard au lycée, l'absence de sens, parfois causée par une recherche excessive et prématurée de technicité, et assez paradoxalement la maîtrise insuffisante des techniques de calcul sur les lettres.

* Il est évident que la méconnaissance des opérations sur certains nombres joue par ailleurs un rôle fondamental : une équation dans laquelle le professeur a glissé quelques fractions sera perçue comme plus difficile à résoudre qu'une équation analogue avec des entiers, même si les opérations en jeu sont formellement identiques.

I - Egalité

Un train peut en cacher un autre! Avant de parler d'équation, est-on d'accord sur le mot égalité?

Une question essentielle pour les collègues " a-t-on le droit d'écrire des égalités fausses ? "

Pour les élèves de collège l'égalité n'est pas symétrique car c'est avant tout un moyen de transformer des expressions pour arriver à un résultat, ce qui explique les rédactions du genre : " 2 + 3= 5 + 6 = 11 "

Il faut évidemment interdire ce genre d'écriture dans des devoirs, mais il faut être conscient qu'elles ne sont pas absurdes, elles correspondent à une logique (cette dernière est confortée par l'utilisation des calculatrices).

Dans certaines circonstances une égalité, pour être écrite, doit être vraie et dans d'autres il y a doute sur la valeur de vérité, c'est le contexte qui éclaire, nous écrivons :
" $(a + b)^2 = a^2+b^2+2ab$ "
car c'est une identité , en revanche, si nous écrivons
" $x + 3 = 2x + 5$ "
c'est, par exemple, parce que nous cherchons à résoudre le problème de l'intersection de deux droites dont on connaît les équations (encore ce mot ! ! !)

En général quand l'égalité concerne des constantes il n'y a pas de problème, il est admis que l'on écrit 2+2=4 et que l'on n'écrit pas 2+2=5 même pour dire que c'est faux puisque on a le symbole $\neq$

A partir de l'égalité on peut définir correctement le mot équation par :
" résoudre l'équation f (x)=a dans E "
c'est
" trouver toutes les valeurs de l'élément x de E pour lesquelles l'égalité f(x)=a est vérifiée ". Il est clair (pour le professeur) que les égalités écrites sont vraies ou fausses et que le jeu consiste à déterminer pour quelles valeurs de la lettre qui prend le nom d'inconnue elles sont vraies.

Un problème de rédaction souvent rencontré par les enseignants :
que dire à un élève qui partant de l'équation :
$(x+2)(x+3)=(x+5)x+3$
écrit après quelques lignes de calcul
" 3=0, faux, donc il n'y a pas de solutions " ?
Ou à cet autre élève qui partant de
$(x+1)(x+3)=(x+2)^2-1$
arrive à
" 0=0, vrai "

Ces rédactions sont contestables au niveau de la forme ; mais la seule faute de l'élève est de n'avoir pas dit qu'il travaillait par équivalence. Cet oubli est fréquemment pardonné dans d'autres circonstances, en fait l'idéal serait une conclusion du genre " je peux en conclure qu'il n'y a pas de solutions » ou " n'importe quel nombre est solution " ou de demander aux élèves d'écrire à chaque ligne " je cherche x pour que cette égalité soit vérifiée ", cela d'ailleurs ne résoudrait pas tous les problèmes car l'idée de chercher x pour que " 3 = 0 " risque de dérouter.

Nous pouvons passer de " 0.x = 3 " à l'équation équivalente " 0 = 3 " car on sait que pour tout réel x on a " 0.x = 0 ", pour les élèves il vaut mieux s'arrêter avant et se poser la question " existe-t-il une valeur de x pour laquelle " 0.x = 3 " ?

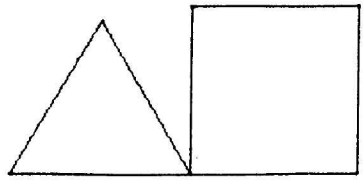
II - Identité

Certaines égalités sont appelées identités, elles font intervenir des lettres (a, b, c mais aussi x et y...) ces dernières n'ont pas le statut d'inconnue, il n'y a rien à chercher, est-ce toujours évident pour tous les élèves ?

III - Les différents statuts de la lettre inconnue, variable, paramètre, indéterminée

Au collège, les lettres sont utilisées avec des statuts différents dans le cours de mathématiques, il faut que le professeur soit conscient des difficultés que cela peut créer pour certains élèves et qu'il travaille avec ceux ci sur les différents rôles que jouent les lettres afin que chacun d'entre eux prenne du sens en opposition aux autres.

Cet exemple extrait de l'évaluation à l'entrée en seconde de 92 montre que dans le même exercice le statut de la lettre peut changer



"Quel est le périmètre du triangle équilatéral en fonction de x ?
Quel est le périmètre du carré en fonction de x ?
Déterminer x de telle sorte que le triangle et le carré aient le même périmètre".

Dans les formules, x, qui désigne au départ une longueur a le statut de **variable,** suivant les valeurs données à x les deux périmètres prennent des valeurs différentes, ce sont des fonctions de x ;
puis la mise en relation des deux périmètres donne à x le statut d'**inconnue dans l'équation** " 3 x = 4(10-x) ;
dans les calculs effectués pour trouver la solution, x devient une **indéterminée.**
La valeur trouvée pour x à la fin des calculs est la **solution** de l'équation et du problème.

IV - Quelques remarques

En sixième et même avant, au cycle 3 de l'enseignement du premier degré, les élèves utilisent des **formules** dans lesquelles les diverses lettres représentent des grandeurs (rayon d'un cercle, hauteur d'un cylindre...) ces grandeurs peuvent prendre des valeurs différentes mais la lettre n'a pas encore ici le statut explicite de **variable**, on n'étudie pas la variation du volume en fonction de la hauteur, on se contente de faire des calculs pour différentes valeurs prises une à une, ce qui peut permettre de dresser des tableaux qui sont ou non des tableaux de proportionnalité. Le statut de **variable** apparaît progressivement dans les programmes du premier cycle puisque l'on rencontre des expressions du genre " en fonction de " " est fonction de" et qu'il est recommandé de tracer des courbes et de dresser des tableaux de valeurs ; mais il sera essentiellement développé en classe de seconde et dans les classes ultérieures lors de l'étude des **fonctions numériques** et de leurs propriétés..

L'utilisation des **formules** permet d'introduire les premières **équations** :
" *quelle valeur donner à la hauteur pour que le volume soit égal à ... ?* "
il est fondamental de faire le lien entre ces deux utilisations de la lettre et de ne pas parachuter le x qui sera l'**inconnue** de tous les problèmes de quatrième.

L'**inconnue** est introduite progressivement, au départ c'est un petit carré blanc qu'il faut remplacer par un nombre pour qu'une égalité soit vraie ou vérifiée ou un point noir dans des opérations à trous, le lien peut se faire naturellement.
Dans l'activité " Ne perdez pas l'équilibre " page 55 les élèves manipulent parfois les petits carrés comme des nombres " réels " en les additionnant ou en les multipliant par deux , ils leur ont attribué le statut d'**indéterminée** alors que la résolution attendue était plutôt de type empirique " par tests ": remplacer le carré blanc par un nombre de façon à ce que l'équilibre soit respecté et donc que l'égalité soit vérifiée.

Lorsque nous résolvons un problème qui nécessite une mise en équation nous commençons par dire " *soit x l'âge du fils...* " en précisant éventuellement que x appartient ici

à N, et à partir de la première relation écrite avec cette lettre x nous considérons que nous sommes autorisés à effectuer tous les calculs avec x comme si c'était un nombre réel avec une difficulté non négligeable pour les élèves c'est que formellement ce n'est pas exactement pareil (quand je remplace x par 3 dans 2x je n'obtiens pas 23 !). Quand on étudie en algèbre à un niveau supérieur l'anneau des polynômes à une ou plusieurs **indéterminées**, toutes les opérations effectuées sont justifiées par des règles de calcul formel sur les lettres et les coefficients en jeu, au niveau du collège il est nécessaire que les règles d'écriture associant lettres et nombres soient explicitées.

V - Un peu de logique

Il n'est pas question de revenir à l'usage des symboles " quel que soit ": $\forall$ et " il existe ": $\exists$, en classe de quatrième, mais nous devons réfléchir à l'aide qu'ils nous ont apportée pendant nos études pour la compréhension du concept d'équation; deux problèmes distincts sont liés à leur usage :

* **la connaissance du référentiel** auquel appartient l'**inconnue** de départ qui valide ou non les transformations d'écriture effectuées lorsque celle-ci prend le statut d'**indéterminée**
* **l'utilisation des règles logiques** qui permettent de passer d'une égalité à la suivante et par là même d'insister sur la question essentielle :

" une fois que l'on a " *résolu* " l'équation en " *trouvant une valeur* x_0 " a-t-on montré
- qu'il existait une solution,
- que s'il en existait une c'était nécessairement x_0,
- ou que x_0 était la solution unique du problème posé ?

Pour le premier problème dans la pratique l'indication du référentiel était souvent faite en début de rédaction par l'usage du mot " soit ", on écrivait par exemple

" soit x appartenant à E tel que P(x) "

que l'on faisait suivre d'une argumentation du type :

" $\forall x, x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ " ou bien " $\forall x, x \in E, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ " . Les élèves ne savaient pas très bien d'ailleurs si le " $\forall x, x \in E,$ " portait sur la proposition P ou sur l'implication, et quand ils le savaient les rédactions qu'ils proposaient ne le montraient pas très clairement.

En ce qui concerne le deuxième problème (savoir ce que l'on a établi une fois les calculs faits) il semble que ce soit plutôt l'usage correct de l'implication qui soit en cause que celui des quantificateurs ; en effet dans un référentiel donné, les règles en usage sur les nombres manipulés et en particulier sur les indéterminées permettent de savoir si on introduit des solutions parasites (en élevant au carré dans R par exemple) ou si on enlève des solutions en utilisant des transformations non toujours licites (" u=x+1/x " par exemple qui élimine une éventuelle solution nulle).

VI - Vérification

Le problème est évidemment lié à la question posée dans le paragraphe précédent. Dans les classes de quatrième ou de troisième, les élèves sont habitués à faire des vérifications sans réfléchir aux différents rôles possibles de cette vérification :

- s'agit-il de contrôler que le résultat trouvé peut raisonnablement être une solution du problème concret posé (ainsi un nombre négatif sera refusé pour une longueur)
- les équations successives qui mènent à la solution sont elles équivalentes :
  - n'a-t-on pas introduit de solution parasite par le calcul?
  - ou au contraire n'a-t-on pas fait disparaître une solution possible ?
- " *est ce que je n'ai pas fait une erreur de calcul ?* "

Il est essentiel de tenir un discours clair afin que la vérification ne devienne pas un acte mécanique et vide de sens pour les élèves.

ACTIVITÉS

Langage courant et langage symbolique

Présentation

En cycle III à l'école primaire, puis en classe de 6ème au collège, les quatre opérations ont été définies, ainsi que le vocabulaire correspondant. En classe de 5ème, après l'étude de diverses règles d'organisation d'un calcul (priorités opératoires - développement - factorisation), il est souhaitable de reprendre **un travail sur le vocabulaire opératoire**, en activités **préparatoires au calcul littéral**, pour que l'utilisation par l'élève d'une **formule littérale prenne du sens** pour lui.

Objectifs

- **Consolider le vocabulaire** : somme, différence, termes, produit, facteurs, quotient...
- Connaître, comprendre et utiliser les symboles mathématiques utilisés en 6ème comme :

  $= \neq < > + - \times \div$ (ou : ou /) %

et dans les classes suivantes comme :

  $\approx \geq \leq \sqrt{}$...

- Travailler dans les deux sens le passage entre langage naturel et langage symbolique.

Organisation

- Matériel : tableau, diverses craies, cahiers d'élèves, photocopies.
- Durée : une heure environ, cela dépend du niveau et des acquis des élèves.
- Déroulement :

a) Phase orale collective

Le professeur est au tableau, il sollicite des élèves un rappel des correspondances entre expressions du langage courant et symboles mathématiques. Ainsi apparaissent au tableau, avec des craies de couleurs différentes, des notations proposées en classe. Cependant, des discussions peuvent surgir, lorsque plusieurs solutions de codages conviennent, bien qu'étant différentes. Un débat peut alors s'instaurer pour mieux consolider le vocabulaire correspondant aux quatre opérations.

Un exemple de notations écrites au tableau pourra être :

- La **somme** de 4 et de 3 se note 4 + 3. Les nombres 4 et 3 sont appelés des **termes**.
- La **différence** de 25 et de 13 se note 25 - 13. Les nombres 25 et 13 sont appelés des **termes**.
- 6 x 5 représente le **produit** de 6 et de 5. Les nombres 6 et 5 sont appelés des **facteurs**.
- 2 x 5 représente le **produit** de 2 et de 5, mais aussi : le **double** de 5.
- Le **quotient** de 21 par 7 se note 21/7 ou 21 ÷ 7 ou 21 : 7.
- Le **quotient** de 15 par 2 se note 15/2 ou 15 ÷ 2 ou 15 : 2. On l'appelle aussi : **la moitié** de 15

b) Phase écrite individuelle

I) Une photocopie est distribuée à chaque élève, il s'agit d'exercices dont la consigne est :

"Complète les phrases suivantes" :

. la somme de 4,4 et de 5,6 se note .....

. le produit de 35 et de 0,1 se note .....

. la somme de 8,3 et du double de 7 se note .....

. le triple de 5 se note .....

. la différence de 12 et du tiers de 9 se note .....

. le quotient de 1,5 par 0,1 se note .....

Lors de la correction faite au tableau par plusieurs élèves, peut se poser **le problème de transformation de la phrase donnée** dans l'énoncé, en effet, certains élèves, se rappelant **des règles de calcul mental**, peuvent **transformer** 35 x 0,1 par 35 : 10, de même que 1,5 : 0,1 par 1,5 x 10... Ce qui permet un **rappel de diverses techniques de calcul rapide.**

II) Une deuxième feuille d'exercices, avec la même consigne, est distribuée :

"Complète les phrases suivantes" :

. 5 x 4 représente .....

. 11 + 3 x 6 représente .....

. 2 x 9 représente .....

. 16 - 4 x 3 représente .....

. 3 x 5 + 4 x 6 représente .....

. (8 + 4) x 7 représente .....

. 8 + 4 x 7 représente .....

Cette recherche individuelle est suivie d'une correction au tableau. Les élèves proposent des solutions. La classe intervient lorsqu'il y a désaccord.

Il est bon de profiter de ce débat pour **rappeler et consolider les règles d'organisation d'un calcul** :

- présence de **parenthèses,**
- **priorités opératoires,**
- propriétés de **développement** ou de **factorisation,**
- **lecture** d'un enchaînement de calculs **liée à la dernière opération réalisée.**

c) Autre activité

Un exercice photocopié est distribué à chaque élève, avec la consigne suivante :

"Relie ce qui va ensemble" :

Expressions du langage courant		Expressions symboliques
. Le double de la différence de 9 et de 7	◊	◊ 2 x (9 + 7)
. Le double de la somme de 9 et de 7	◊	◊ 9 : 2 + 7
. La différence du double de 9 et de 7	◊	◊ 2 x 9 + 2 x 7
. La somme du double de 9 et du double de 7	◊	◊ 9 x 7 : 2
. La moitié du produit de 9 et de 7	◊	◊ 2 x (9 - 7)
. La somme de la moitié de 9 et de 7	◊	◊ 2 x 9 - 7

d) Prolongements

Il serait souhaitable de poursuivre des activités similaires, en utilisant d'autres symboles, dans les classes suivantes, et réaliser ainsi le même travail avec un vocabulaire enrichi.

Trois petits tours et la lettre apparaît

Présentation

Le vocabulaire correspondant aux quatre opérations a été consolidé. Les règles **d'organisation d'un calcul**, liées aux parenthèses, aux priorités opératoires, au développement ou à la factorisation,...ont été reprises.

Les élèves ont été entraînés à **traduire une situation mathématique** en formulation symbolique ou schématique, et vice versa.

Cette activité composée de situations devinettes, avec élément à déterminer débute par des essais numériques, car il existe, chez les élèves, une difficulté liée à l'abstraction.

Objectifs

• S'interroger sur **l'utilité** et **l'intérêt** de **l'usage des lettres** et prendre conscience de l'intérêt stratégique et économique de la mise en formule d'une situation.

• La **lettre** possède **différents statuts**, mais au cours de cette séance sera développé, plus particulièrement, celui de **variable.**

Organisation

- Matériel : tableau, cahiers d'élèves, photocopies, calculatrices.
- Durée : cette activité peut être travaillée sur deux séances, compte-tenu des niveaux de difficultés, d'usage et de compréhension.
- Déroulement :

a) Première phase de découverte d'un jeu "Le magicien"

Familiarisation numérique

I) Le professeur annonce la consigne du premier jeu :

> *"Pensez à un nombre, ajoutez lui 5 puis multipliez la somme obtenue par 2 ; ensuite à ce produit trouvé, vous retrancherez 10 et enfin vous diviserez par 2 la différence que vous venez de trouver et..."* (les élèves traduisent sur leurs cahiers d'exercices, les différents calculs en s'aidant parfois de leurs calculatrices).
> ..."*Votre résultat est égal...au nombre que vous aviez choisi au départ! Est-ce exact ?"*

Plusieurs élèves proposent leurs calculs.

II) Le professeur propose un autre "tour de magie"

> *"Pensez à un nombre, ajoutez lui 3 puis doublez la somme obtenue, ensuite à ce produit que vous venez de trouver vous retranchez 5 et, enfin, vous retranchez à cette différence obtenue le double du nombre choisi au début, et...*

Les élèves calculent, proposent leurs solutions ; on affiche au tableau le nombre choisi au départ et le résultat final, est ... on s'aperçoit que **ce résultat ne dépend pas de ce que chacun avait choisi au départ.** Le résultat final est toujours égal à 1!

Remarque : Plusieurs élèves voudraient une "explication" de ces résultats. Le professeur peut attendre l'introduction des lettres pour présenter ces justifications (voir fin de séquence).

b) Phase de recherche par groupes

Le "magicien" professeur change à nouveau la consigne de son jeu :

> *"Vous pensez à un nombre, retranchez 8 à ce nombre... "*
> Nombreuses interpellations quand le nombre a été choisi inférieur à 8!
> *"Bien, pensez à un nombre (supérieur à 8), retranchez 8 à ce nombre, puis multipliez la différence obtenue par 5, ensuite ajoutez 10 à ce produit trouvé et enfin ajoutez 3 à cette somme que vous venez d'obtenir. Notez bien le résultat trouvé! "*

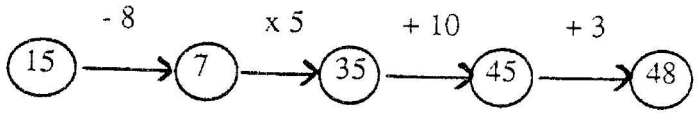
Les élèves ont écrit tous leurs calculs, par groupes de deux, en s'aidant ou non, de leurs calculatrices (certains choisissent au départ des nombres assez compliqués, pour "épater" les autres!)

Le jeu se poursuit. Le professeur annonce :

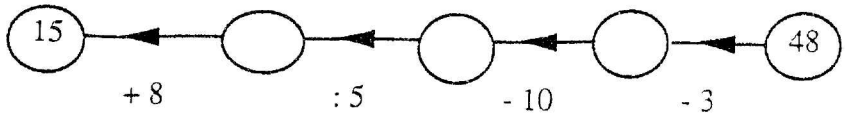
> *"Je ne connais pas le nombre choisi au départ mais si vous me donnez le dernier résultat trouvé, je pourrais deviner le nombre pensé au départ ! "*

Différents groupes se prêtent au jeu et ... ça marche ! Mais beaucoup veulent **comprendre** comment le professeur fait, il doit y avoir un "truc"

- Le professeur demande alors à un groupe de venir **schématiser** au tableau **les différentes étapes** et on verra par exemple :



Le résultat 48 étant connu, comment pourrait- on revenir au nombre 15 choisi au départ?



Divers exemples défilent au tableau pour déterminer le nombre "mystérieux" choisi par les groupes.

c) Phase individuelle de recherche d'un nouvel exercice

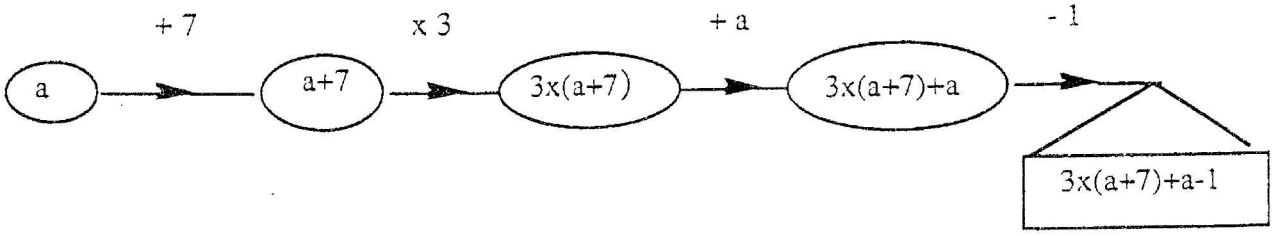
Un nouvel enchaînement de calculs à exécuter est distribué à chaque élève sur une photocopie.

> *"Pensez à un nombre, ajoutez lui 7, multipliez par 3 la somme obtenue, à ce produit que vous venez de calculer ajoutez le nombre choisi au départ, enfin vous enlevez 1 à cette somme. Notez bien tous vos calculs et le résultat final ".*

Le professeur propose de reprendre le jeu précédent où connaissant le nombre final, on essaye de retrouver le nombre du début. La classe revient à la méthode utilisée dans l'exercice précédent :

"On prend un dernier résultat trouvé par un élève et un autre doit deviner le nombre pensé au départ... Mais, cela ne marche pas. ***On n'arrive pas à aller du connu vers l'inconnu*** *en utilisant le sens inverse ".*

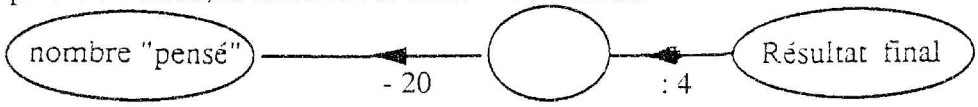
On fait divers essais, on tâtonne, puis un élève propose de **désigner par une lettre le nombre inconnu.** Il vient au tableau **schématiser** les différentes étapes du jeu en **utilisant cette lettre dans ses calculs.**



La lettre représente la même valeur tout au long des calculs.

On recherche collectivement des règles de **manipulation de cette expression littérale**, pour la transformer, la simplifier, et on obtient :

Il sera donc possible, connaissant le résultat final de trouver le nombre "pensé" au départ. Après discussion, la solution est affichée au tableau.



Le résultat final est **fonction** de la valeur choisie au départ.

d) Exercices à faire à la maison

◊ Consignes en langage courant ⟶ Enchaînements d'opérateurs.
◊ Consigne et résultat final ⟶ Retrouver le nombre choisi au départ.

Prolongements possibles

A partir de la demande de plusieurs élèves à la fin de la phase A, le professeur propose de revenir aux exemples travaillés au début de cette séquence et de **montrer** à présent que :

1er jeu :

$a \longrightarrow a + 5 \longrightarrow (a + 5) \times 2 \longrightarrow (a + 5) \times 2 - 10 \longrightarrow [(a + 5) \times 2 - 10] : 2$

Après transformation et simplification, on comprend alors que :

$a \longrightarrow a$

2ème jeu :

$a \longrightarrow a + 3 \longrightarrow (a + 3) \times 2 \longrightarrow (a + 3) \times 2 - 5 \longrightarrow (a + 3) \times 2 - 5 - 2a$

Après transformation et simplification, en utilisant les diverses règles d'organisation d'un calcul, on voit alors que :

$a \longrightarrow 1$

Nombres, lettres et dessins

Présentation

Le but est d'habituer le plus tôt possible les élèves à remplacer des nombres par des lettres et inversement des lettres par des nombres, car un passage trop rapide à l'algèbre crée chez les élèves l'idée qu'il existe deux mondes : un monde "numérique" supposé facile et un monde "littéral" plus difficile.

Ces activités demandent aux élèves de travailler simultanément dans trois directions : les nombres, les lettres et les graphes. En manipulant conjointement formules et dessins, les élèves approchent les notions de fonctions et de représentations graphiques.

La construction point par point de courbes leur permet de manipuler nombres et lettres, et de s'apercevoir qu'une équation peut avoir de nombreuses solutions.

Ces tracés par tâtonnement sont une première approche expérimentale des représentations graphiques, ils donnent du sens à la recherche ultérieure des équations de courbes comme les équations de droites ; ils semblent un passage obligé pour certains élèves. De la même manière, que les constructions de figures, la manipulation des instruments de dessin sont indispensables pour aborder la géométrie, un travail en amont, à travers la manipulation de nombres, de lettres, et la construction empirique de courbes au collège prépare le terrain à un travail algébrique et analytique ultérieur.

En travaillant sur les lettres à travers les coordonnées de points, les élèves sont amenés à manipuler des nombres positifs ou négatifs, la lettre ne remplace plus un nombre positif comme c'est fréquemment le cas dans les situations mettant en jeu des grandeurs (longueurs, aires, prix, ...), on peut espérer que l'idée forte chez les élèves "x est positif, puisque il n'est pas précédé par un signe et -x est négatif !!", sera moins ancrée dans les esprits.

ACTIVITÉ 1 : TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Objectifs

- Prendre conscience que des lettres peuvent servir à remplacer des nombres
- Utiliser des lettres pour définir analytiquement une transformation géométrique.

Organisation

Une feuille polycopiée est distribuée à chaque élève comportant le texte des exercices ci-dessous :

Le premier exercice est présenté et commenté à la classe par le professeur.
Les exercices suivants sont faits à la vitesse de chacun.
Un débat sur l'utilisation des lettres est organisé à la fin du troisième exercice.
Le quatrième exercice est prévu pour les élèves les plus rapides.

Durée : 1 à 2 heures pour les trois premiers exercices
La durée du quatrième exercice : activité émetteur-récepteur est très variable suivant la classe.

Feuille polycopiée

Exercice 1
Placer dans un repère orthonormal les points :
A(0;2) B(-3;4) C(-1;0) D(-3;-2) E(1;-1)
Tracer en bleu le polygone ABCDE.

A chaque point M de coordonnées (x,y) on associe le point M'de coordonnées (-x,y).Calculer les coordonnées de A', B', C', D', E' . Dans le même repère placer les points A', B', C', D', E'. Tracer en rouge le polygone A'B'C'D'E'. Quelle transformation géométrique reconnaissez vous pour passer de ABCDE à A'B'C'D'E' ?

Exercice 2
Dans un nouveau repère tracer à nouveau le polygone ABCDE.
A chaque point M(x,y) on associe le point M'(2x,2y).
Calculer les coordonnées de A', B', C', D', E' . Dans le même repère placer les points A', B', C', D', E'. Tracer en rouge le polygone A'B'C'D'E'. Essayer de décrire cette transformation géométrique pour passer de ABCDE à A'B'C'D'E'.

Exercice 3
Comment transformer les coordonnées d'un point pour obtenir les coordonnées de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses ?
Comment transformer les coordonnées d'un point pour obtenir les coordonnées de son symétrique par rapport à l'origine du repère ?

Exercice 4 (par équipe de deux : en émetteur-récepteur)
Comme dans l'exercice 1, invente un dessin assez simple et les formules d'une transformation, transforme ton dessin, donne tes deux dessins à ton camarade qui doit retrouver les formules de ta transformation.

Commentaires et prolongements

* Le choix de la figure donnée au départ induit des difficultés variables (exemple : points à coordonnées non entières).

* Cette activité peut se prolonger en géométrie par l'étude des isométries (translation,...).

* Des transformations plus originales peuvent être proposées (exemple : M'(x ,3y) ; M'(3x, y+3)....), ces exercices permettent aux élèves de rencontrer des transformations différentes des isométries et il est intéressant de prolonger cette activité par une comparaison de leurs propriétés géométriques.

ACTIVITÉ 2 : TRACÉS DE COURBES

Objectifs

- Prendre conscience que des lettres remplacent des nombres.
- Remplacer des lettres par des nombres.
- Montrer qu'une équation peut avoir de nombreuses solutions.
- Construire point par point des courbes.

Organisation

Le professeur commence à construire quelques points avec les élèves, qui terminent individuellement ou par deux chaque courbe.

Après la construction de points dont les coordonnées vérifient les deux premières équations, une discussion doit s'instaurer dans la classe pour répondre aux questions suivantes (ces questions surgissent naturellement lors des constructions des points) :

- combien faut-il construire de points ?
- peut-on relier les points entre-eux ?
- peut-on utiliser une règle pour relier les points ?

Durée : 1 heure pour la construction de deux courbes.

Des constructions de courbes peuvent être données à faire à la maison, leurs études et comparaisons sont réalisées en classe.

Consignes

Construire le plus de points possibles (au moins 15), dont les coordonnées (x,y) vérifient l'égalité suivante (pour chaque égalité changer de repère, le repère est orthonormal) :

Egalité 1 : $2x + y = 5$

Egalité 2 : $y = x^2$

Egalité 3 : $x^2 + y^2 = 25$

Egalité 4 : $(x + y)^2 = 25$

Egalité 5 : $y = \frac{1}{x}$

Egalité 6 : $y = x^2 + x$

Commentaires et prolongements

* Le choix des courbes est évidemment très étendu et la liste précédente n'est pas exhaustive.

* Lors de la construction des points, diverses stratégies sont mises en œuvre par les élèves. Il est par exemple très intéressant, en liaison avec l'activité précédente, de mettre en parallèle les axes de symétrie, ou centre de symétrie des courbes et les expressions littérales des équations. Des remarques du type suivant sont à relever et à exploiter : *"Dans les égalités 2 et 3, j'ai x^2 dans l'égalité, alors si j'ai un nombre solution, son opposé aussi est solution"*.

* La courbe 3 est un réinvestissement intéressant du théorème de Pythagore, l'obtention d'un cercle peut être justifiée, sa construction se fait assez facilement car il passe par 12 points à coordonnées entières.

* La construction des deux droites parallèles de l'équation 4 présente des difficultés, car les élèves ont tendance à partir de la construction d'un segment et de son symétrique par rapport à l'origine à les compléter pour obtenir un carré (influence du cercle construit précédemment).

* Il est très intéressant d'exploiter les courbes 3 et 4 pour éviter la confusion entre le carré d'une somme et la somme des carrés, ces représentations graphiques peuvent être un point de référence supplémentaire pour les élèves.

ACTIVITÉ 3 : RECHERCHE DE RELATIONS NUMÉRIQUES

(d'après des travaux de l'IREM des Pays de Loire)

Objectifs

- Reconnaître une relation numérique
- Utiliser des lettres pour traduire et généraliser une relation entre des nombres.

Organisation

Une feuille polycopiée est distribuée à chaque élève comportant le texte des exercices ci-dessous.

Le premier exercice est présenté et commenté à la classe par le professeur.

Les exercices suivants sont faits à la vitesse de chacun.

Durée : 1 à 2 heures

Feuille polycopiée

Exercice 1
a) Construire sur du papier millimétré dans un repère orthonormal les points suivants :
A(-2 ;-4) B (1/2 ;1) C(1 ;2) D(2 ;4) E(7 /4 ;7/2) F(1 ;0) G(0 ;0) H(3 ;6) I(1 ;3)

b) Certains de ces points peuvent être considérés comme des intrus !
Essayer de dire pourquoi ?

c) Trouver une relation mathématique entre les coordonnées des points, les intrus étant supprimés.

Exercice 2
a) Construire d'une autre couleur dans le repère orthonormal précédent les points suivants :
M(-3 ;-5) N(-2 ;-3) P(-1 ;-1) Q(0 ;1) R(1 ;3) S(1 ;0) T(0 ;0) U(3 ;7) V(4 ;9)

b) Certains de ces points peuvent être considérés comme des intrus !
Essayer de dire pourquoi ?

c) Trouver une relation mathématique entre les coordonnées des points, les intrus étant supprimés.

Exercice 3
a) Construire sur du papier millimétré dans un repère orthonormal les points suivants :
A(-2 ;4) B(-3/2 ;9/4) C(-1 ;1) D(-2/3 ;4/9) E(-1/2 ;1/4) F(0 ;0) G(1 ;1) H(3/2 ;9/4) I(2 ;4)

b) Les points A, B, C, D, E, F, G, H, I sont-ils alignés ?

c) Trouver une relation mathématique entre les coordonnées des points.

Exercice 4
a) Construire sur du papier millimétré dans un repère orthonormé les points suivants :
M(4 ;3) N(4 ;-2) P(4 ;-1) Q(4 ;0) R(1 ;0) S(4 ;1) T(-4 ;3) U(1 ;4) V(4 ;4)

b) Certains de ces points peuvent être considérés comme des intrus !
Essayer de dire pourquoi ?

c) Trouver une relation mathématique entre les coordonnées des points, les intrus étant supprimés.

Commentaires et prolongements

* Les exercices 1 et 2 sont faits dans le même repère pour faciliter la recherche des relations numériques.

* Les exercices 1, 2 et 4 sont des activités préliminaires à un travail plus théorique sur les équations de droites.

* Il est intéressant de rapprocher les exercices 1 et 3, où les relations $y = 2x$ et $y = x^2$ permettent un travail sur double et carré, la confusion étant très fréquente.

Démontrer avec des lettres

Comment et pourquoi introduire le travail dans le registre des symboles algébriques auprès d'élèves du cycle central du collège ?

Comment montrer aux élèves la pertinence du traitement algébrique dans certaines situations ?

Comment introduire les conventions d'écriture algébrique, de façon à ce qu'elles soient reliées à un vécu de la classe porteur de sens ?

Deux axes de travail peuvent tenter d'apporter une réponse.

• Les entiers naturels comme objet d'étude paraissent un domaine à privilégier, car comme le dit Yves CHEVALLARD : "*Les entiers naturels ont d'abord cette vertu essentielle de constituer une réalité qui psychologiquement est vécue comme familière car fréquentée de longue date... Le système des nombres entiers offre en effet à l'observation de nombreux phénomènes qui peuvent être modélisés algébriquement*". De plus, chaque élève, quelque soit son niveau sera en mesure de s'imprégner de la propriété étudiée en utilisant plusieurs exemples. La modélisation sera plus facilement acceptée par la suite.

• Le travail de mise en relation entre le cadre géométrique et le cadre numérique est aussi une piste avec laquelle les élèves doivent être familiarisés le plus tôt possible. A partir de figures géométriques familières aux élèves du cycle central : rectangle, carré, triangle...on va s'intéresser aux propriétés des périmètres et des aires en fonction de la variation de certaines dimensions. Ces propriétés découvertes expérimentalement pourront être justifiées grâce au traitement algébrique.

Les quatre séquences qui suivent sont des propositions d'activités dans les deux directions mentionnées ci-dessus.

Le contre-exemple

Présentation

Cette activité fait partie des situations problèmes destinées à travailler les règles du débat mathématique ici la notion de contre-exemple. Elle utilise une pratique pédagogique appelée narration de recherche.

Une narration de recherche est l'exposé détaillé, écrit par l'élève lui-même, de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème. L'élève est son propre observateur, il raconte du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, il décrit ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles idées, le professeur a ainsi accès aux raisonnements justes ou erronés de ses élèves. Cette connaissance lui est très précieuse pour établir des bilans et adapter sa progression au potentiel de la classe.

Un nouveau contrat s'établit entre les élèves et le professeur, l'élève s'engage à raconter toutes ses stratégies de recherche, de son côté le professeur apprécie la persévérance et la précision du récit sans privilégier la validité de la solution proposée.

Pour la mise en oeuvre de cette pratique pédagogique dans les classes, on peut lire la brochure " Les narrations de recherche ", éditée par l'IREM de Montpellier.

Cette activité se décompose en deux parties :

- une recherche individuelle faite en classe ou à la maison, qui se concrétise par la production d'un écrit.
- un compte rendu en classe, où le professeur organise, après avoir pris connaissance des productions écrites, un débat autour des différentes stratégies élaborées par les élèves, l'objectif final étant ici de travailler l'une des règles du débat mathématique.

Objectifs

- Montrer que plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver.
- Savoir remplacer des lettres par des nombres.

Organisation

* Des activités préliminaires sur la recherche de diviseurs doivent être organisées.

Durée : 1 heure pour la recherche si elle est faite en classe.

Le professeur doit insister sur le soin à apporter à la rédaction des devoirs, si les élèves ne sont pas habitués à ce type de pratique pédagogique .

1 heure pour le compte rendu.

* Une feuille polycopiée est distribuée à chaque élève

Feuille polycopiée

Narration de recherche à rendre dans 10 jours

Dans l'expression $n^2+ n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier, est ce que le nombre obtenu a pour seuls diviseurs 1 et lui-même ?

Raconte sur ta feuille les différentes étapes de ta recherche, les remarques, les aides, les observations que tu as faites et qui t'ont fait changer de méthode ou qui t'ont permis de trouver. Tu peux joindre tous tes brouillons numérotés, donner des précisions sur la durée et l'organisation de ton travail.

* **Correction des copies**

L'enseignant évalue la persévérance de l'activité de recherche et non la validité de la solution proposée, comme c'est habituellement le cas dans les devoirs traditionnels. La correction des copies doit privilégier le souci de précision, la logique des raisonnements et leur cohérence.

L'évaluation se fait fréquemment sous forme de lettres.

* **Compte-rendu en classe**

La séance est essentielle et il faut lui accorder environ 1 heure.

Le professeur commence par lire des passages intéressants relevés dans des copies, il sélectionne des démarches et des solutions contradictoires, qui vont donc susciter un débat entre les élèves.

La séance se termine par l'institutionnalisation de la règle : **"un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux"** et l'institutionnalisation de la règle : **"des exemples même nombreux ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé mathématique est vrai".**

Commentaires et prolongements

* A travers la lecture des devoirs, on peut se rendre compte que les règles du débat mathématique ne sont pas encore dominées même en quatrième.

Voici un extrait de narration où l'élève a trouvé un contre-exemple, mais qui ne l'amène pas pour autant à conclure rapidement sa recherche. Cet élève établit une règle avec des exceptions, comme c'est fréquemment le cas pour les règles d'orthographe. Sa recherche est d'ailleurs fort intéressante.

Clarisse (élève de quatrième)

1°) Je commence par prendre des exemples de nombres différents (pair et impaire)

IMPAIRES :

Si $n = 3$ $n^2 + n + 11$

$9 + 3 + 11 = 23$, qui est un nbre premier

Si $n = 7$ $n^2 + n + 11$

$49 + 7 + 11 = 67$, " " " "

Si $n = 5$ $n^2 + n + 11$

$25 + 5 + 11 = 41$, " " " "

PAIRES :

Si $n = 4$ $n^2 + n + 11$

$16 + 4 + 11 = 31$, qui est un nbre impair

Si $n = 12$ $n^2 + n + 11$

$144 + 12 + 11 = 167$, qui est un nbre premier

Si $n = 10$ $n^2 + n + 11$

$100 + 10 + 11 = 121$, je remarque que ce nombre est divisible par 11 ($11 \times 11 = 121$).

Peut-être que toutes les dizaines sont divisibles par 11, je vais essayer : Si $n = 20$

$n^2 + n + 11 = 400 + 20 + 11 = 431$, qui est un nombre premier, donc il n'y a pas de relation. et apparemment 10 est une exception. J'essaye avec un autre multiple de 10 : Si $n = 100$

$n^2 + n + 11 = 10000 + 100 + 11 = 10\,111$, qui est un nombre premier, donc il n'y a pas de relation. J'essaye avec des nombres particuliers :

Si $n = 1$ $n^2 + n + 11$

$1 + 1 + 11 = 13$, qui est un nombre premier

Si $n = 0$ $n^2 + n + 11$

$0 + 0 + 11 = 11$, qui est un nombre premier.

J'essaye avec 11 car peut-être dans l'expression "$n^2 + n + 11$", 11 n'a pas été mis au hasard.

Si $n = 11$ $n^2 + n + 11$

$121 + 11 + 11 = 143$, qui est divisible par 11 ($143 : 11 = 13$). Il y a peut-être une relation, alors je continue à prendre comme exemples des multiples de 11 :

Si $n = 22$ $n^2 + n + 11$

$484 + 22 + 11 = 517$, qui est divisible par 11 ($517 : 11 = 47$).

Si $n = 33$ $n^2 + n + 11$

$1089 + 33 + 11 = 1133$, qui est divisible par 11 ($1133 : 11 = 103$)

Si $n = 44$ $n^2 + n + 11$

$1936 + 44 + 11 = 1991$, qui est divisible par 11 ($1991 : 11 = 181$)

Si $n = 55$ $n^2 + n + 11$

$3080 + 55 + 11 = 3146$, qui est divisible par 11 ($3080 : 11 = 286$)

J'essaye avec un nombre plus important pour vérifier :

Si $n = 110$ $n^2 + n + 11$

$12\,100 + 110 + 11 = 12\,221$, qui est divisible par 11 ($12221 : 11 = 1111$

Mon hypothèse est donc juste.

Conclusion : Dans l'expression "$n^2 + n + 11$", n est un nombres premier sauf dans les cas suivants :

- Si c'est un multiple de 11 (sauf 0 et 11)
- Si ce nombre est 10.

* Cette narration de recherche doit être suivie par une autre, où l'énoncé mathématique est vrai, les élèves sentiront alors la nécessité de justifier leurs résultats par une démonstration et l'utilisation du calcul littéral comme outil de preuve semblera pertinente

* Ce souci de preuve est d'ailleurs présent dans quelques devoirs, où, à la suite d'essais numériques donnant un nombre premier, les élèves essayent de démontrer que nxn + n + 11 est une formule pour trouver des nombres premiers !

Ils s'engagent alors dans un raisonnement faisant intervenir la parité de n, prouvent que nxn + n + 11 est un nombre impair pour tout n.

Une telle démarche est à encourager et pour ces élèves les règles du débat mathématique semblent maîtrisées.

Lucie (élève de quatrième) écrit :

J'observe les résultats et les opérations.
Je me pose la question d'une règle simple et réfléchi à cette dernière. Je relis l'énoncé et l'expression.
Je me dis que les nombres premiers doivent être impairs, en prenant en considération que tout nombre pair peut être divisé par 2 ½.

$$n^2 + n + 11$$

Je pense que si n est pair, n^2 aussi, ainsi que $n^2 + n$. Mais si l'on y ajoute 11, nombre impair, le résultat devient impair.
Je pense que si n est impair, n^2 aussi, mais $n^2 + n$ devient un ~~ma~~ nombre pair. Mais si l'on y ajoute 11, ~~nom~~ nombre impair, le résultat redevient impair.
Je relis ces exemples et observe si ma théorie est juste :

$$\underset{\text{impair}}{1^2} + \underset{\text{impair}}{1} + \underset{\text{impair}}{11} = 13 \qquad \underset{\text{pair}}{2^2} + \underset{\text{pair}}{2} + \underset{\text{impair}}{11} = 17$$

pair impair → impair

pair impair → impair

Je remarque que les autres opérations sont faites sur les mêmes modèles : $I + I + 11 = P + 11 = I$

ou $P + P + 11 = P + 11 = I$

car $11 = I$.
Je n'arrive pourtant pas (je ne vois pas) à prouver que ces résultats ~~des~~ impairs sont des nombres premiers.
Je sais juste qu'ils sont forcés d'être impairs.
Je pense qu'ils sont des nombres premiers ~~et~~ mais je ne peux pas le démontrer, le prouver.

Somme d'entiers consécutifs

Présentation

Un travail préliminaire, dès le début de l'année, aura permis de commencer la mise en place de certaines règles du débat mathématique, en particulier :

Un exemple ou plusieurs ne suffisent pas pour prouver que ce que l'on affirme est vrai.

Un contre-exemple suffit pour prouver qu'une conjecture est fausse.

Comme la situation est très ouverte, nous relatons ici le déroulement de cette activité dans une classe de 4 ème, activité testée également dans deux classes de 5 ème.@

Objectifs

Faire prendre conscience aux élèves de la pertinence du traitement algébrique pour la justification des conjectures émises.

Passer du registre du langage naturel au registre du langage symbolique.

Continuer à mettre en place les règles du débat mathématique évoquées dans la présentation.

Organisation

Le problème posé aux élèves est le suivant :

"La somme de 3 entiers consécutifs est-elle un multiple de 3 ? "

PHASE 1 :

Recherche individuelle de 15 mn environ, après explicitation des mots pouvant être source de difficultés pour certains élèves.

Les élèves utilisent tous le "tâtonnement expérimental".

PHASE 2 :

Le professeur écrit plusieurs exemples trouvés par les élèves au tableau en prenant soin à l'occasion de valoriser les productions des élèves habituellement les plus en difficulté.

Il demande ensuite toutes les remarques que leur inspirent ces résultats et les écrit au tableau sans faire de commentaires.

Exemples de propositions d'élèves :

1. Quand on divise par 3 le résultat on trouve le nombre du milieu.

2. Si on ajoute le 1er nombre et le 3ème nombre et qu'on divise le résultat par 2 on trouve le nombre du milieu.

3. Si le nombre du milieu se termine par 0 alors la somme se termine par 0.

4. Si l'on soustrait 1 au nombre du milieu on trouve le nombre de gauche.
Si on ajoute 1 au nombre du milieu on trouve le nombre de droite.

5. Il y a toujours deux nombres de même nature, soit pairs, soit impairs.

6. On enlève 1 à gauche et on ajoute 1 à droite, ça revient à ajouter 3 fois le même nombre.

PHASE 3 :

Le professeur demande alors :

"Tous les exemples que vous avez trouvé suffisent-ils pour prouver que la conjecture émise est vraie?"
Est-ce qu'on pourrait traduire toutes vos remarques en utilisant des symboles mathématiques?
Qui a des propositions à faire?"

Un élève propose d'appeler
a le 1er nombre
b le 2ème nombre
c le 3ème nombre

Il est intéressant de remarquer que le terme "consécutifs" renvoie à un choix quasi automatique de lettres consécutives de l'alphabet, choix qui bien sûr ne va pas se révéler pertinent pour la suite, mais qu'il faut accepter dans un premier temps.

Un travail de traduction commence alors à partir des propositions des élèves.

Un élève propose la traduction de la 1ère phrase :

$$\frac{a+b+c}{3} = b$$

Un autre poursuit avec la 2ème phrase :

$$\frac{a+c}{2} = b$$

Puis, un troisième continue avec la 4ème phrase :

$$b-1=a$$
$$b+1=c$$

Un débat s'installe alors pour différencier les quatre égalités précédentes et pour savoir s'il s'agit d'assertions vraies ou fausses.

On convient que les deux dernières égalités traduisent bien le fait que l'on utilise des entiers consécutifs.

Par contre, nous ne pouvons pas encore dire si les deux autres sont vraies.

Cette dernière proposition fait alors rebondir le travail.

La 1ère phrase devient alors :

$$\frac{b-1+b+b+1}{3} = \frac{3b}{3} = b$$

Le passage entre les deux expressions a été spontanément proposé par certains élèves.
La classe continue alors le travail de validation des différentes propositions.

Prolongements

Les élèves se posent alors de multiples questions :
"La somme de 4 entiers consécutifs est-elle un multiple de 4 ?"

Ceci permet alors de réinvestir la notion de contre-exemple.

"La somme de 5 entiers consécutifs est-elle un multiple de 5 ?"
"La somme de 3 entiers espacés de la même façon est-elle un multiple de 3 ?"

Le travail autour de ce thème peut être très riche et intéresse les élèves curieux qui n'ont pas de mal à rentrer dans la recherche.

On double les dimensions

Présentation

Cette séquence amorce le travail de mise en relation entre le cadre géométrique et le cadre numérique en contribuant au passage de la géométrie d'observation à la géométrie de démonstration

Elle est proposée à des élèves de 5ème.

Objectifs

- Amener les élèves à utiliser l'algèbre pour justifier une propriété géométrique.
- Utiliser les propriétés de la multiplication et de l'addition.
- Mettre en place les premières conventions algébriques.
- Rendre indispensable l'utilisation de la factorisation.

Organisation

Le problème proposé aux élèves est le suivant :

"Si on double la largeur et la longueur d'un rectangle, que devient son périmètre ?"

Cette activité se déroule en trois phases.

PHASE 1 :

La durée est d'environ 15 mn.

Chaque élève s'approprie la situation en construisant un 1er rectangle de son choix et un 2ème rectangle respectant les consignes données. Il écrit ensuite la conjecture émise sur son cahier.

PHASE 2 :

Mise en commun.

Le professeur note au tableau les dimensions de plusieurs rectangles choisis par les élèves et leurs remarques.

Si l'une des conjectures proposées est fausse, la classe recherche un contre-exemple.

Puis, le professeur demande :

"Est-ce que tous les exemples trouvés par la classe suffisent à prouver que la conjecture retenue est vraie?

Comment pourrait-on faire pour en être sûr ?" Un élève propose de représenter les dimensions du 1er rectangle par des lettres :

L pour la longueur
ℓ pour la largeur.

Ce choix paraît naturel à cause de la fréquentation des formules de périmètre et d'aire. Un travail commun s'engage alors pour désigner les dimensions du 2ème rectangle. Les différentes écritures mentionnées ci-dessous ont été proposées par les élèves :

$$L + L = L \times 2 = 2 \times L$$
$$\ell + \ell = \ell \times 2 = 2 \times \ell$$

A l'occasion de ce travail on met en place la 1ère convention algébrique :

"Le signe de la multiplication entre un nombre et une lettre peut ne pas être écrit.

$2 \times L$ peut s'écrire 2L."

Cette écriture simplifiée sera mentionnée comme écriture équivalente mais ne sera pas exigée de la part des élèves.

Le travail se poursuit alors quant au calcul des deux périmètres suivant les différentes méthodes proposées par les élèves.

$P_1 = L + \ell + L + \ell$

$P_1 = (L + \ell) \times 2$

$P_2 = 2 \times L + 2 \times \ell + 2 \times L + 2 \times \ell$

$P_2 = 2 \times (L + \ell + L + \ell)$

$P_2 = 2 \times P_1 = 2 P_1$

$P_2 = (2 \times L + 2 \times \ell) \times 2$

$P_2 = 2 \times L \times 2 + 2 \times \ell \times 2$

$P_2 = 2 \times 2 \times L + 2 \times 2 \times \ell$

$P_2 = 4 \times L + 4 \times \ell = 4L + 4\ell$

$P_2 = 4 \times (L + \ell) = 4(L + \ell)$

$P_2 = 2 \times 2 \times (L + \ell)$

$$P_1 = 2 \times L + 2 \times l$$

$$P_2 = 2 \times P_1$$
$$P_2 = 2 \times (2 \times L) + 2 \times (2 \times l)$$
$$P_2 = 2 \times (2 \times L + 2 \times l)$$
$$P_2 = 2 \times P_1$$

PHASE 3 :

"Que se passe-t-il pour les aires?"

Les élèves écrivent la conjecture sur leur cahier.
Le professeur écrit les différentes propositions au tableau sans faire de commentaires et un débat s'instaure avec soit une proposition d'un contre-exemple, soit une justification par passage à l'algèbre.

$$A_1 = L \times l$$

$$A_2 = (2 \times L) \times (2 \times l)$$
$$A_2 = 2 \times 2 \times L \times l$$
$$A_2 = 4 \times L \times l$$
$$A_2 = 4 \times A_1$$

On peut introduire la convention ci-dessous :
"Le signe de la multiplication peut ne pas être écrit entre deux lettres".

Prolongements

Un travail similaire peut être proposé concernant le périmètre d'un triangle dont on double ou dont on triple les dimensions.

A ce propos, on s'interrogera sur les angles de ces deux triangles.

On peut aussi mettre en place la convention suivante :
Le signe de la multiplication entre un nombre et une parenthèse peut ne pas être écrit.

Et si on modélisait !

...

Présentation

Cette activité est proposée à des élèves de 5ème à la suite du travail où l'emploi de l'algèbre aidait à justifier des propriétés géométriques.

Objectifs

- Apprendre aux élèves à passer d'un texte à une expression algébrique et vice-versa.
- Montrer qu'une même expression algébrique peut modéliser plusieurs situations.

Organisation

Le travail se déroule en deux phases :

PHASE 1 :

Travail individuel.
Chaque élève a à sa disposition le tableau ci-dessous qu'il doit compléter suivant la consigne:

"Tu indiqueras ce que représente chaque lettre que tu utiliseras dans la colonne des expressions algébriques.
Traduis les phrases à l'aide d'expressions algébriques.
Invente une situation que modéliserait l'expression algébrique donnée."

TEXTES	EXPRESSIONS ALGEBRIQUES
La longueur du rectangle est le triple du côté du carré.	
	L = 2 x + 7
Il faut soustraire 5 à la largeur du rectangle pour trouver le côté du losange.	
	x - y = 15
La différence entre la température de Madrid et celle de Moscou est de 24°C.	
La somme de leurs deux âges est égale à 23 ans.	

PHASE 2 :

Un bilan collectif est ensuite fait au tableau.

On commence par écrire les expressions algébriques proposées pour un texte donné, et un débat s'instaure pour savoir si la traduction est correcte.

La diversité des lettres utilisées est une phase importante pour le travail algébrique futur. Le choix d'une situation modélisée par une expression algébrique donnée est très intéressant pour les élèves qui ont fait assaut d'imagination. D'autres se contentent d'imiter les quelques situations proposées dans le tableau, mais la confrontation de tous les exemples proposés par la classe peut faire espérer qu'ils prendront plus de liberté une autre fois.

Un travail de réécriture des phrases proposées se met alors en place.

Du raisonnement arithmétique à l'équation

Notre travail va consister à faire évoluer la façon de voir des élèves. Peu à peu la mise en équation d'un problème et sa résolution formelle remplacent, d'une part le tâtonnement expérimental qui s'avère souvent fastidieux et coûteux en temps et, d'autre part, le raisonnement arithmétique parfois long et difficile pour certains élèves.

Cependant, le passage par la stratégie "essais, erreurs" paraît fondamental car les élèves, ayant l'habitude de ce travail, semblent avoir assimilé le concept de solution d'une équation et vérifient, après avoir résolu une équation, que la solution trouvée est bien cohérente avec le problème proposé.

C'est donc pendant le cycle central que vont cohabiter ces différentes stratégies de résolution et il paraît important de les accepter, afin que chaque élève ne se sente pas en échec, et évolue peu à peu dans ses conceptions.

Les élèves vont donc être en contact avec plusieurs problèmes dans lesquels ils pourront rentrer grâce au tâtonnement expérimental et c'est petit à petit qu'un nombre de plus en plus important d'élèves adoptera la mise en équation et la résolution formelle.

Il semble indispensable de ne pas privilégier au départ l'une des méthodes. Pour chaque problème, les différentes méthodes seront mises en commun sans jugement de valeur quant à la pertinence ou la rapidité.

ACTIVITÉ 1 : "LE PROBLEME DU BRICOLEUR"

Présentation

Ce problème proposé par l'IREM de POITIERS est intéressant à plus d'un titre. En effet, le support est géométrique et un changement de cadre peut s'opérer. De plus, le problème est soluble dans les cadres algébrique et numérique, le cadre géométrique servant de support et d'aide dans la résolution.

Enfin, les nombres sont choisis pour que la solution soit un décimal non entier qui peut difficilement être trouvé en tâtonnant.

Les classes dans lesquelles ce problème a été proposé avaient travaillé sur la somme de trois entiers consécutifs et avaient donc été initiés à la modélisation par l'algèbre.

Objectifs

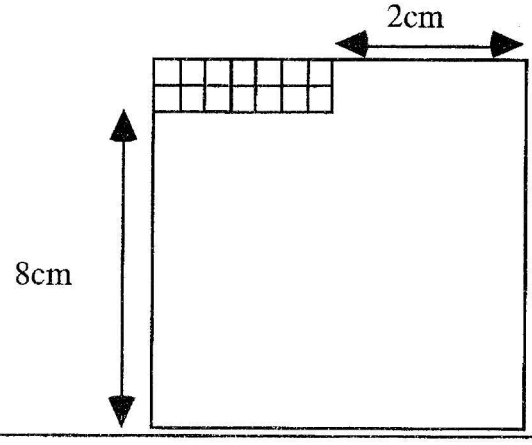
Susciter la mise en équation d'un problème et la résolution d'équation du type ax+b=cx+d par la méthode algébrique.

Mettre en relation différentes méthodes de résolution pour donner du sens aux règles de traitement des équations.

Organisation

Le texte proposé aux élèves est le suivant :

"Mon oncle, qui est pêcheur et bricoleur, veut se fabriquer une boîte à pêche pour son petit matériel ayant les caractéristiques suivantes : 14 cases carrées pour les hameçons disposées en deux rangées comme sur le dessin ci-dessous.
Il veut que sa boîte soit carrée et ne sait pas quelle taille il faut donner aux 14 cases.
Peux-tu l'aider à construire sa boîte?"



PHASE 1 :

Travail individuel pour que chaque élève puisse s'approprier le problème proposé.
Une explicitation orale est nécessaire pour certains élèves, avant le démarrage de l'activité.
Tous les élèves se mettent à tâtonner et essaient des valeurs au hasard ou en suivant une stratégie.

PHASE 2 :

Travail par groupes de 3 afin d'élaborer une stratégie commune.
Les groupes ayant trouvé la solution par "essais, erreurs" sont invités à chercher une autre stratégie.
On peut aussi faire évoluer le problème en proposant d'autres dimensions pour la boîte, afin que cette stratégie devienne peu performante.

PHASE 3 :

Mise en commun collective des différentes méthodes élaborées par les groupes.
Plusieurs sont restés sur le tâtonnement, ce qui n'est pas étonnant pour le début de l'apprentissage.

JULIE nous dit :

"J'avais essayé 1cm pour le côté du carré, ça n'allait pas.
Après j'ai essayé 1,4 cm, ça faisait un rectangle.
Et 2 ça ne tombait pas juste, c'était un peu trop grand.
Ensuite j'ai essayé 1,5 et il ne restait pas 2 cm sur la largeur.
J'ai essayé 1,2 cm, ça allait."

C'est aussi le cas de FANNY :

"Si les carrés mesurent 1 cm :
$2 \times 7 = 14$ les carrés occupent 14 cm^2
Je rajoute 8 cm à la largeur et 2 cm à la longueur : c'est faux parce que cela fait un rectangle.
Si les carrés font 1 carreau :
Je rajoute 2 cm à la longueur et 8 cm à la largeur: c'est faux parce que cela fait un rectangle.
Si les carrés font 1,5 cm
$L = 1,5 \times 7 = 10,5$ cm $l = 1,5 \times 2 = 3$ cm
Je rajoute 2 cm à la longueur et 8 cm à la largeur: c'est faux parce que cela fait un rectangle.
Si les carrés font 1,2 cm:
$L = 1,2 \times 7 = 8,4$
C'est juste."

et de MARIE :

"J'ai essayé avec 1 cm et 2 cm et ça ne marche pas, alors j'ai pris entre les deux 1,5 et c'était trop grand, alors j'ai pris 1,2 cm pour un carré donc mon grand carré fait 10,7 cm de côté."

Certains ont essayé d'introduire des lettres :

X : "côté du carré", Y : "place prise par les 7 cases"
et ont traduit la situation :

et ont traduit la situation :
X-2 = Y Y = 2+X

A : "autre côté du carré", B : "place occupée par les 2 cases"

A-8 = B B+8 = A

A : "place prise par les 7 cases", B : "place prise par les 2 cases"

A+2 = B+8

Mais ils se trouvaient dans une impasse à cause du choix de 2 lettres.

Deux groupes avaient fait un raisonnement de type arithmétique et nous mettrons ces raisonnements en parallèle avec les résolutions formelles, comme cela a été fait en classe.

Lors de la synthèse collective, à partir de la dernière équation proposée le travail est relancé en demandant de ne choisir qu'une inconnue.

Un élève propose alors d'appeler X "le côté d'une case".
Plusieurs élèves écrivent alors l'équation :
7X+2 = 2X+8

Les règles de traitement des équations sont alors mises en place :

. On peut ajouter ou soustraire le même nombre à chaque membre d'une égalité.

. On peut multiplier ou diviser par le même nombre différent de 0 chaque membre d'une égalité.

On résout l'équation proposée de deux façons différentes qui sont mises en relation avec les solutions géométriques de MAGALI et d'ANTHONY:

7X+2 = 2X+8	"Puisque la boîte est un carré, si j'enlève 2 cm de chaque côté
7X+2-2 = 2X+8-2	j'obtiens encore un carré.
7X = 2X+6	Ma nouvelle boîte est constituée d'un côté par 7 cases et de
7X-2X = 2X+6-2X	l'autre côté par 2 cases et 6 cm.
5X = 6	Donc 5 cases mesurent 6 cm de long.
X = 6:5	1 case mesure 6:5=1,2 cm de côté"
X = 1,2	

7X+2 = 2X+8	"Puisque ma boîte est un carré, si j'enlève 2 cases de chaque
7X+2-2X = 2X+8-2X	côté, j'aurai encore un carré.
5X+2 = 8	Ma nouvelle boîte comportera 5 cases d'un côté plus 2 cm et
5X+2-2 = 8-2	mesurera 8 cm de l'autre côté.
5X = 6	Donc mes 5 cases mesurent 6 cm de long
$\frac{5X}{5} = \frac{6}{5}$	et une case mesure 1,2 cm de long."
X=1,2	

Ici, la solution géométrique permet de donner du sens à la résolution formelle, ce qui est particulièrement intéressant.

ACTIVITÉ 2 : "NARRATION DE RECHERCHE 'LE PROBLEME DE PAUL'"

Présentation

Pour résoudre ce problème, **le traitement arithmétique est le plus performant.**
Les élèves qui vont réussir à le traiter dans le cadre algébrique sont ceux qui l'ont d'abord résolu arithmétiquement.

Objectifs

Continuer à faire cohabiter les trois stratégies évoquées précédemment :
- tâtonnement expérimental,
- raisonnement arithmétique,
- mise en équation et résolution algébrique.

Créer une situation pour mettre en valeur le raisonnement arithmétique.

Organisation

PHASE 1 :

Cette séance dure 1 heure.
Les élèves travaillent individuellement et racontent, par écrit, leur recherche, les différentes stratégies utilisées, leurs échecs et leurs réussites.

Le professeur circule et relance le questionnement si le besoin s'en fait sentir.

Le Problème de Paul est le suivant :
"Paul a une certaine somme d'argent dans son porte-monnaie en partant faire des commissions.
Dans le premier magasin, il dépense la moitié de ce qu'il possède plus deux francs.
Dans le deuxième magasin, il dépense la moitié de ce qu'il lui reste plus deux francs.
Dans le troisième magasin, il dépense la moitié de ce qu'il lui reste plus deux francs; il a alors tout dépensé.
Combien possédait-il en partant de chez lui?"

Les narrations sont ramassées en fin d'heure afin de pouvoir répertorier les différentes stratégies mises en oeuvre.

PHASE 2 :

Cette séance dure également une heure.
On fait le compte-rendu des narrations.
Certains élèves sont sollicités pour présenter à la classe leur stratégie.
La classe va donc pouvoir comparer les trois méthodes :
- la stratégie " essais, erreurs ",
- le raisonnement arithmétique parfois accompagné d'un schéma ,
- la mise en équation suivie de la résolution formelle.

Voici des extraits de narrations d'élèves choisis pour illustrer chaque démarche :

CAROLINE a trouvé par "essais, erreurs" mais il lui a fallu tester 9 sommes possibles avant d'obtenir la bonne réponse :

a) $\frac{22}{2} + 2 = 13$ $\quad 22 - 13 = 9$

$\frac{9}{2} + 2 = 6,5$ $\quad 9 - 6,5 = 2,5$

$\frac{2,5}{2} + 2 = 3,25$ $\quad 3,25 - 2,25 = 1$

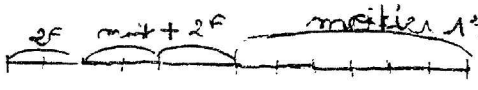
b) $\frac{21}{2} + 2 = 12,5$ $\quad 21 - 12,5 = 8,5$

$\frac{8,5}{2} + 2 = 6,25$ $\quad 8,5 - 6,25 = 2,25$

$\frac{2,25}{2} + 2 = 3,1$ $\quad 3,1 - 2,25 = 0,8$

CHLOÉ est partie d'une remarque très pertinente et donc a trouvé la somme qu'il possède en rentrant dans le 3ème magasin, mais une mauvaise compréhension de la consigne l'a induite en erreur pour la suite :

Je pense que la 3e fois qu'il rentre :
comme il prend 2F et qu'il reste plus rien donc il avait 4F la 3e fois.
donc la 2e fois il avait le double : 8F
donc la 1e fois il avait le double : 12F
donc il avait 12F dans son porte monnaie au départ.
je vérifie : 12F



je me suis trompé il manque un arrêt. donc je rajoute 12F : 12 + 12 = 24F

AMÉLIE commence comme Chloé, mais prend conscience de son erreur et trouve la solution :

Je pars de la 3e dépense, le 3e magasin :
S'il a tout dépensé en sortant de celui-ci, c'est qu'il lui restait 4 francs car 4 : 2 = 2 francs 2 − 2 = 0 francs
moitié de ce qu'il avait + 2 francs.
En sortant du 2e magasin, il avait 4 francs.
En entrant dans le 2e magasin, il avait :
- 4 × 2 + 2 = 10 francs. Vérification : 10 : 3 − 2 = 3 F. Ce n'est pas bon.
- (4 + 2) × 2 = 12 F. Vérification : 12 : 2 − 2 = 4 F. C'est bon.

En entrant dans le 1er magasin, il avait
(12 + 2) × 2 = 28 F. Vérification : 28 : 2 − 2 = 12 F. C'est bon.

De nombreux élèves ont essayé de mettre le problème en équation, mais le choix d'une seule inconnue rendait la tâche particulièrement difficile comme en témoigne le travail de RÉMY:

A = total de la somme
1er Magasin :
$\left(\frac{A}{2}+2\right)$ reste $\left(\frac{A}{2}-2\right)$
$\left(\frac{A}{2}+2\right)+\left(\frac{A}{2}-2\right)=A$

2e Magasin
$\left(\frac{A}{2}-2\right)\div 2+2=\frac{A}{4}+1+2$
$=\frac{A}{4}+1$ reste : $A-\left(\frac{A}{2}-2+\frac{A}{4}\right)$
$=A-\left(\frac{3A}{4}+1\right)$

3e Magasin
$\left(\frac{A}{4}+1\right)\div 2+2=\left(\frac{A}{8}+\frac{1}{2}+5\right)$
$2\times 2=\frac{A}{4}=4$
$A=16$

VIRGINIE, après avoir trouvé la solution arithmétique, a entrepris avec succès la méthode algébrique:

x = la somme qu'il possède dans porte monnaie au début

y = la somme qu'il lui reste pour le 2e magasin -
a = la somme qu'il lui reste pour le 3e magasin

1er magasin $(x : 2) - 2 = y$
2e magasin $(y : 2) - 2 = a$
3e magasin $(a : 2) - 2 = 0$

$(x : 2) - 2 = y$
$(y : 2) - 2 = a$
$(a : 2) - 2 = 0$

$(0 + 2) \times 2 = a$
$2 \times 2 = a$
$a = 4$

$(4 + 2) \times 2 = y$
$6 \times 2 = y$
$y = 12$

$(12 + 2) \times 2 = x$
$14 \times 2 = x$
$x = 28$

ACTIVITÉ 3 : "LES DEUX ÉNIGMES"

Présentation

Plusieurs problèmes sont proposés aux élèves permettant des stratégies de résolution différentes, avec mise en commun collective afin d'inciter le plus grand nombre à choisir la méthode algébrique.

Objectifs

- Susciter la mise en équation d'un problème amenant à la résolution de l'équation $ax+b = cx+d$.
- Essayer de rendre plus économique la méthode algébrique pour le maximum d'élèves.

Organisation

Il s'agit de résoudre deux énigmes, puis d'en inventer une troisième pour les élèves les plus rapides.

Le texte donné aux élèves est le suivant :

"1ère énigme :

J'ai un carré devant moi. Si je construis un rectangle dont la longueur est le triple du côté du carré augmenté de 5cm et la largeur, le double du côté du carré augmenté de 8 cm, j'obtiens encore un nouveau carré.
Pouvez-vous dessiner le carré qui est devant moi?
2ème énigme :

J'ai un nouveau carré devant moi. Je construis deux rectangles à partir de ce carré.
Le premier a pour longueur le double du côté du carré augmenté de 3 cm et pour largeur le triple du côté du carré diminué de 4 cm.
Le deuxième a pour longueur le côté du carré augmenté de 6 cm et pour largeur le côté du carré diminué de 1 cm.
Quelle surprise! Mes deux rectangles ont le même périmètre.
Pouvez-vous dessiner le carré qui est devant moi?

Si vous avez le temps, à vous d'inventer une nouvelle énigme!"

PHASE 1 :

Durée d'une heure.

Travail individuel écrit racontant les différents moments de la recherche, les changements de piste, les erreurs, les réussites.

PHASE 2 :

Mise en commun des différentes stratégies utilisées.

La première énigme fait encore émerger les trois stratégies.

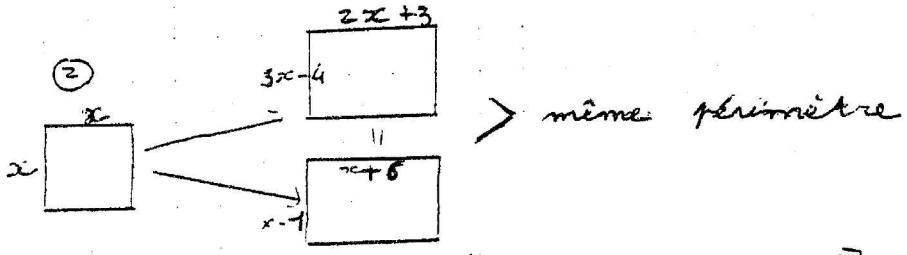
Pour la deuxième, le traitement algébrique est prépondérant et la résolution arithmétique n'apparaît plus.

On propose ensuite à la classe certaines des énigmes inventées, ce qui permet de lancer un débat sur la façon d'inventer ce genre de problèmes.

Commentaires

Lors de la première énigme, le tâtonnement expérimental est encore présent pour certains élèves et se révèle assez performant. Il est intéressant de noter que plusieurs élèves utilisent l'écriture algébrique pour modéliser les dimensions(3X+5 et 2X+8), mais ils poursuivent ensuite par le tâtonnement.

D'autres comme LOIC vont même jusqu'à écrire l'équation, mais utilisent encore la résolution par tâtonnement, rejetant encore pour l'instant la résolution formelle :



donc $[(2x+3)+(3x-4)] = [(x+6)+(x-7)]$

$= (5x-7) = (2x+5)$

tatonement expérimental

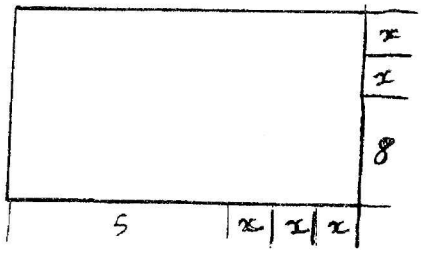
Si $x = 1$ → $\frac{6}{5-1} = \frac{7}{2+5}$ = c'est faux

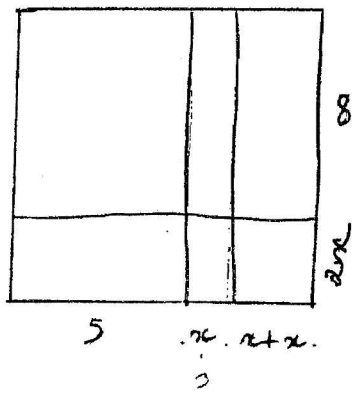
Si $x = 2$cm → $\frac{9}{10-1} = \frac{9}{4+5}$ = c'est juste

Une minorité d'élèves raisonne arithmétiquement, parfois à l'aide d'un schéma comme ANTHONY:

énigme 1

je dessine ce rectangle





j'ai nommé x un côté du carré. je sais aussi que ces deux côtés du rectangle il y a 2x

Pour la largeur il y a 2x + 8 donc je sais que

$8 = 5 + x$

$x = 3$ cm

Plusieurs élèves ont modélisé par une équation le problème et après avoir échoué dans la résolution algébrique, emploient alors des méthodes intéressantes même si parfois ils utilisent un concept erroné.

C'est le cas de CÉCILE :

J'essaie de calculer l'aire :

$A = (3x+5) \times (2x+8)$

$= 6x^2 + 24x + 10x + 40$

$= 6x^2 + 34x + 40$

Maintenant j'essaie de trouver le côté du rectangle =

$B = (6x^2 + 34x + 40) : 2$

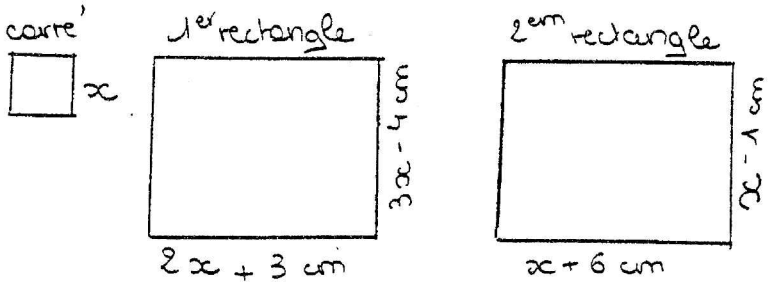
$= 18x + 17x + 20$

$= 35x + 20$

c'est impossible

car $35x + 20 \neq 3x + 5$

MATHILDE retrouve la démarche arithmétique :



On sait que :

$2x + 3\,cm + 3x - 4\,cm = x + 6\,cm + x - 1\,cm$

$5x - 1\,cm = 2x + 5\,cm$

$5x - 1\,cm - 2x = 5\,cm$

$3x - 1\,cm = 5\,cm$

$3x = 1\,cm + 5\,cm$

$3x = 6\,cm$

$x = 6\,cm \div 3$

$x = 2\,cm$

Lors de la 2ème énigme, des conceptions surprenantes chez des élèves de 4ème émergent.

Plusieurs élèves pensent que des rectangles ayant le même périmètre sont superposables.

Il est intéressant d'en débattre classe entière. Cependant, à leur décharge, il est intéressant de noter que tous ces élèves ont abandonné cette voie car ils ont systématiquement vérifié que les valeurs trouvées étaient inacceptables.

Il paraît raisonnable de penser que le tâtonnement les a aidé à s'auto-corriger.

On peut citer certaines énigmes inventées par les élèves:

- *"J'ai devant moi un carré.*
Je peux construire un rectangle avec ce carré.
Il a pour longueur le quadruple du côté du carré augmenté de 4 cm et pour largeur il a le double du côté du carré augmenté de 8 cm.
Il se trouve que j'obtiens un nouveau carré.
Pouvez-vous dessiner le carré qui est devant moi?"

- *"J'ai un carré devant moi.*
Si je construis un rectangle dont la longueur est le côté du carré diminué de 2 cm et la largeur est le côté du carré diminué de 4 cm alors la diagonale mesure comme le côté du carré."

L'élève a mis le problème en équation et a obtenu :

$$X^2=2X^2-12X+20$$

équation qui l'a fortement embarrassé, cela va sans dire.

Cela nous a permis de voir que l'on pouvait poser un problème en connaissant la solution, sans être encore capable de le résoudre formellement.

- *"J'ai un carré devant moi.*
Si je construis un rectangle dont la longueur est le double du côté augmenté de 4 et la largeur, le double du côté diminué de 3, la longueur est le double de ma largeur."
Dessiner mon carré.".

Equation ?
Solution d'une équation ?
Une courte séquence en classe de 4ème.

Dans le thème équation, il est nécessaire d'aborder trois aspects importants et complémentaires : le fait qu'un nombre soit ou non solution d'une équation, la mise en équation d'un problème, la résolution d'une équation. Dans cette séquence seules les difficultés liées au premier point seront abordées.

Les élèves de 4ème ont déjà eu en 5ème un premier contact avec les notions d'équation et de solution d'une équation simple de la forme $ax = b$ et de la forme $a + x = b$.

Mais cela ne suffit pas pour comprendre ce qu'est une équation, ce qu'est une solution d'une équation.

Dans la suite, comme en classe, le mot "égalité" sera suivi du mot "vraie" ou "fausse" que s'il y a doute ou questionnement.

Objectifs

. Savoir que "*une solution* d'une équation", n'a pas la même signification que "*la solution* d'un problème".

. Savoir que la solution d'une équation quelconque n'est pas toujours le deuxième membre de cette équation.

. Savoir que, dans une équation d'inconnue x, lorsqu'on remplace x par un nombre
*et que l'égalité est vraie, alors ce nombre est une solution de l'équation
*et que l'égalité est fausse, alors ce nombre n'est pas une solution de l'équation.

. Faire découvrir que la méthode qui consiste, en utilisant des règles, à obtenir une équation plus simple à partir d'une équation première, permet de trouver toutes les solutions donc de résoudre les équations.

. Savoir que lorsque l'énoncé d'un problème dit "montre que 2 est une solution de l'équation donnée", on ne les demande pas toutes, et les deux méthodes (remplacer x par 2, et résoudre l'équation) peuvent être utilisées la deuxième pouvant d'ailleurs être impraticable.

Présentation

Consigne du travail individuel donnée soit un quart d'heure avant la fin d'une séance, soit une heure complète si les élèves sont en narration de recherche.[1]

[1] d'après une idée du groupe didactique de l'Irem de Montpellier.

" Imagine que tu es professeur de mathématiques et que tu veux inventer une équation ayant le nombre 2 pour solution.
Ecris une équation que tu trouves facile ayant le nombre 2 pour solution.
Explique comment tu as fait pour l'inventer.

Ecris une équation que tu trouves difficile ayant le nombre 2 pour solution .
Explique comment tu as fait pour l'inventer ".

1ère séance : **Exploitation la fois suivante**

Le professeur a choisi quelques réponses d'élèves et les a complétées par trois autres (les trois dernières) : la première parce que lors de sa résolution, les élèves ont tendance à faire disparaître un " x " de chaque côté, la deuxième en particulier parce qu'elle a une autre solution, évidente, qui va aider l'élève à` différencier "être solution" de "résoudre", la troisième pour que les élèves puissent se rendre compte que la lettre x peut n'apparaître qu'au second membre.

Le professeur ajoute simplement "une solution d'une équation est un nombre qui mis à la place de x fait qu'on obtient une égalité vraie"

Travail individuel : durée : 25mn

Voici les équations proposées par les élèves : elles ont été fabriquées pour que le nombre 2 soit une solution de ces équations.
" Est-ce qu'elles conviennent toutes ? Pourquoi ? "

$x \times 4 = 8$	$x + 0{,}5 = 2{,}5$	$(x \times 0) + 2 = 2$	$1 + x = 2$
$-5x + 4 = 6$	$x = 2$	$\frac{8}{x} = 4$	$1 + x = 3$
$x + x = x + 2$	$3x \times y = 9$	avec 2 pour x et 1,5 pour y	
$x^2 = 2x$	$x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times @x + 1 = 65$		$10 = 3x + 4$

Remarque : Ces équations vont être exploitées jusqu'à la fin de l'année scolaire et ce qui suit ne représente que le début de la réflexion.

Exploitation des résultats seulement avec les deux premières équations :
Suivi de
Exploitation de l'équation $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x + 1 = 65$

Bilan écrit sur le cahier :

Une solution d'une équation est un nombre qui mis à la place de x fait qu'on obtient une égalité vraie.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions ou être certain qu'il n'y en a pas. Pour la résolution de certaines équations, vous disposez des règles suivantes :

. *Si on a deux nombres égaux et qu'on ajoute à chacun d'eux un même nombre alors on obtient deux nouveaux nombres égaux.*

. *Si on a deux nombres égaux et qu'on soustrait à chacun d'eux un même nombre alors on obtient deux nouveaux nombres égaux.*

. Si on a deux nombres égaux et qu'on multiplie chacun d'eux par un même nombre qui n'est pas égal à zéro alors on obtient deux nouveaux nombres égaux.

. Si on a deux nombres égaux et qu'on divise chacun d'eux par un même nombre qui n'est pas égal à zéro alors on obtient deux nouveaux nombres égaux.

Pour montrer qu'un nombre est ou n'est pas solution d'une équation, la méthode précédente ne pourra pas toujours aboutir, par contre remplacer l'inconnue par ce nombre pour voir si on obtient une égalité vraie ou fausse est une méthode toujours utilisable.
Exemple : $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x + 1 = 65$

On ne sait pas résoudre cette équation mais on sait prouver que "2 est solution de cette équation" par contre cette méthode ne conduit pas à les trouver toutes puisqu'on peut constater que (-2) est aussi solution de cette équation.

2ème séance : **Travail oral sans bilan avec $1 + x = 2$ et $(x \times 0) + 2 = 2$ et $x + x = x + 2$ et $x^2 = 2x$**

> ""2" est-il solution de chacune de ces équations ?
> Peux-tu trouver d'autres nombres solutions de chacune de ces équations ?"

Commentaires

Cela permet également aux élèves de se rendre compte qu'une équation peut avoir plusieurs solutions.

La technique par résolution de l'équation est un objectif à terme mais ne doit pas arriver trop rapidement. Il est indispensable de travailler la signification de "une solution d'une équation".

Cette séquence est presque toute entière construite à partir de réponses d'élèves ; selon les classes, les réponses diffèrent : on peut donc en mettre quelques unes de plus sans le signaler ou en disant qu'une autre classe les a données mais il est clair que ces réponses supplémentaires sont à adapter au niveau de la classe. Par ailleurs, même avec des élèves en difficulté, des débats, riches, peuvent et doivent avoir lieu.

Prolongements possibles

. Exploitation de l'équation $8/x = 4$
. Débat collectif sur les différentes méthodes de résolution.

1) "Dans une division, le dividende est le nombre qui est égal au produit du diviseur par le quotient donc $4x = 8$". (Cette méthode de résolution est dans l'esprit des nouveaux programmes).

2) "On se ramène à une équation qu'on a déjà vue : on multiplie les deux membres par un nombre non nul x d'où $4x = 8$". (Cette méthode reste dans le cadre des équations).

3) "On se ramène à une équation qu'on a déjà vue : si le "x" était au numérateur, on saurait la résoudre. On inverse donc les deux nombres non nuls". (Cette méthode revient à la précédente après un démarrage différent)

$x/8 = 1/4$
$1/8 \times x = 1/4 \quad x = 1/4 \times 8 \quad x = 2$

Deux méthodes non évoquées par mes élèves :

4) Celle qui utilise les fractions : on réduit ces deux nombres au même dénominateur puis on les multiplie par x (à rapprocher du 2°)

5) "x est à 8 ce que 1 est à 4" c'est-à-dire que les quatre nombres 8, x, 4 et 1 constituent deux suites proportionnelles donc x x 4 = 8 x 1.(Celle qui peut-être issue de la proportionnalité et des éléments d'Euclide).

Autre prolongement

Après résolution des équations pouvant l'être, observation de l'équation la plus simple obtenue dans chacun des cas.

Oralement : Pour toutes les équations que vous avez proposées, que l'on sait résoudre et dont la solution trouvée est 2, l'équation la plus simple trouvée est toujours la même $x = 2$.

Etre ou ne pas être

Présentation

Les élèves n'ont pas entendu parler d'équation, ils en sont à la notion de "phrases à trous" (résolution sans utilisation de lettres).

Avant de se lancer, en classe de 4ème, dans l'algorithme de résolution des équations, il est indispensable de donner du sens à " être solution de ".

Objectifs

Donner du sens à l'expression "être solution de".

Organisation

Cette activité est donnée en classe de cinquième par demi-classe sur deux semaines (une heure par semaine). Chaque élève travaille seul puis des synthèses sont faites au cours de la progression avec des aides ponctuelles.

La totalité des élèves doit, en devoir à la maison, rédiger une des questions de façon plus approfondie en fonction de leur progression (Q1 ; ou Q2 ; ou Q3).

La fiche élève se trouve à la fin de l'activité.

Commentaires

La progression peut ne pas être la même suivant le niveau des élèves.

Pour les élèves faibles ou "en panne" il peut être conseillé de répondre à la question 2 avant de répondre à la question 1.

Les élèves ont utilisé la calculatrice.

Je vais au super-marché pour acheter des boîtes de tomates au basilic et des boîtes de haricots verts :

- une boite de tomates coûte 4,60F
- une boite de haricots verts coûte 9,50F.

J'ai pris 60F. Je ne veux pas acheter plus de 10 boîtes de tomates, mais j'en ai d'au moins quatre.
Je ne suis pas obligé de dépenser la totalité des 60F.

1 - Trouve des couples de nombres correspondant à un achat possible.
Tu notes ces couples (t , h) où t désigne le nombre de boîtes de tomates et h le nombre de boîtes de haricots.
Justifie chacune de tes réponses.

2 - Parmi les couples suivants, quels sont ceux qui correspondent à un achat possible :
(8;5) - (12;1) - (4;6) - (6;2) - (8;1) - (5;1) - (3;5) - (2;6) - (5;8).
Justifie chacune de tes réponses.

3 - Je décide de prendre 6 boîtes de tomates.
Combien de boîtes de haricots puis-je acheter ?
Donne tous les couples possibles en justifiant les réponses.

4 - Trouve **tous** les couples de nombres correspondant à un achat possible.

5 - Exprime en fonction de t le prix des tomates, puis à l'aide de h, celui des haricots.
Traduis le problème en langage mathématique.

6 - Dans un repère, tu places en abscisse t, et en ordonnée h. Représente par un point chaque achat possible.

Ne perdez pas l'équilibre !

Présentation

Cette activité est destinée, principalement, à une classe de 4ème pour initier les élèves à la résolution des équations. La construction de ce savoir-faire s'appuie sur un objet concret, une balance, mais l'abstraction s'impose très vite et cette balance ne devient plus qu'une idée associée à l'égalité. Cette activité utilisera la notion d'équilibre de la balance pour amener les élèves à opérer simultanément sur les deux plateaux.

Objectifs

- Proposer une illustration concrète d'une équation.
- Découvrir des règles de la résolution d'une équation
- Développer la lecture dans les deux sens de l'égalité.

Organisation

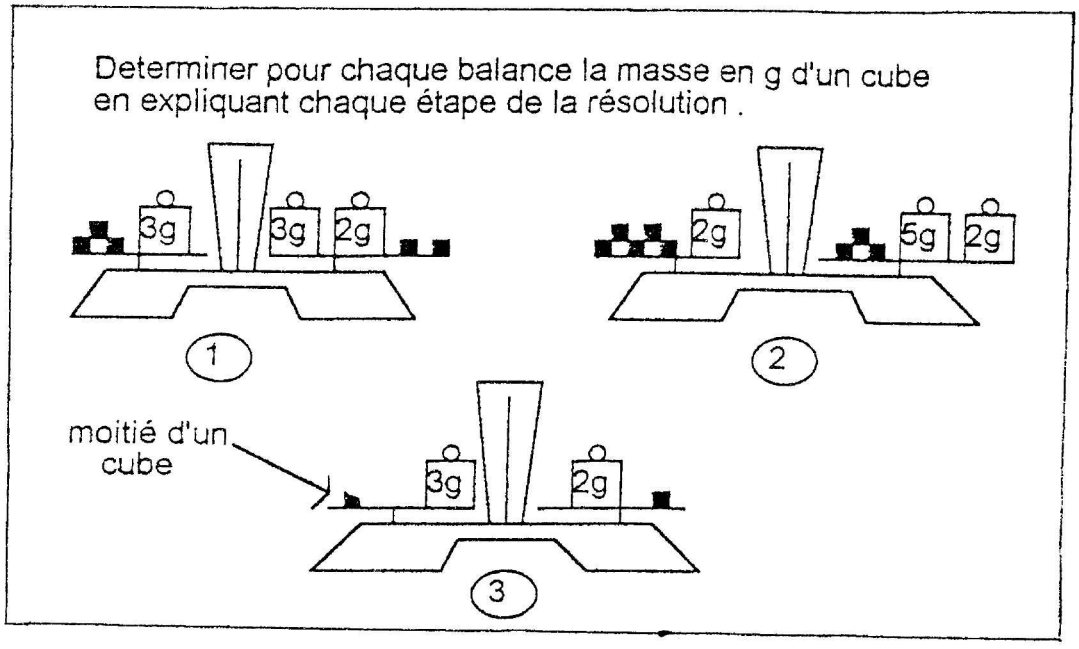
Pour chaque séance, la classe est disposée en groupes de 3 ou 4 élèves. Une recherche individuelle de quelques minutes s'impose avant les premières communications au sein de chaque groupe. Après 30 minutes, un élève est désigné pour rapporter au tableau le travail de son groupe. Un débat est organisé ensuite autour des différentes propositions de résolution pour faire émerger un principe qui est :

"Opérer simultanément sur les deux plateaux pour ne pas rompre l'équilibre".

Lorsque le groupe a trouvé la masse cherchée, le professeur encourage les élèves à tester l'équilibre de la balance de l'énoncé. Cet effort leur permet de donner du sens à la notion de solution, déjà développée en 5ème et de gagner de l'autonomie.

Séance 1 : *Objectifs*

Découverte des règles et premiers pas vers la résolution.



Commentaires

Durant cette séance, au sein de chaque groupe, des discussions se sont animées et les efforts d'explication se sont multipliés pour permettre à chacun de comprendre la résolution. La nécessité de détailler chaque étape de la résolution est apparue évidente. Les élèves ont débuté en dessinant des balances, puis ont vite écrit des équations. La règle essentielle qu'ils ont utilisée dans leurs explications est la suivante :

"Pour garder l'équilibre, il faut ajouter ou retirer le même objet aux deux plateaux".

La lecture de l'égalité dans les deux sens se travaille implicitement, les élèves isolent le cube sur le plateau de gauche (balances (1) et (2) puis sur le plateau de droite (balance (3)).

Les dernières étapes de la résolution s'effectuent par référence aux opérations ; les élèves de 4ème maîtrisant la résolution :

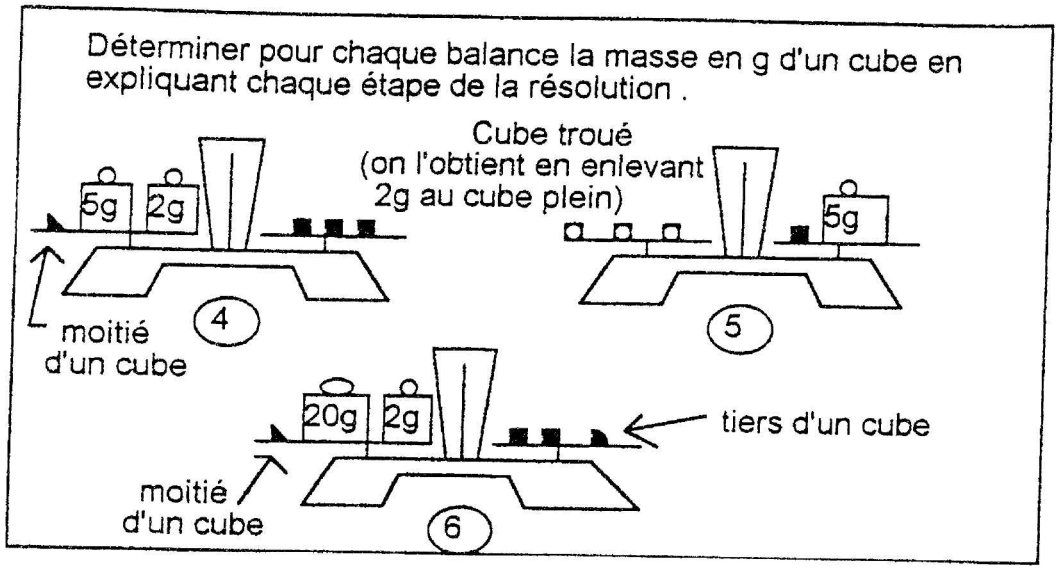
$a \times x = b \rightarrow x = b : a$ a et b entiers

à plus forte raison quand b est un multiple de a.

Séance 2 : Objectifs

Amener les élèves à écrire de plus en plus d'équations en compliquant le problème :

- Apparition des nombres négatifs avec les cubes troués.
- Calcul fractionnaire incontournable.



Commentaires

Dans leurs écrits, les élèves s'efforcent d'ajouter ou d'enlever sur chaque plateau la même masse pour faire disparaître les cubes. Les équations et la résolution algébrique sont de plus en plus apparentes.

La cinquième balance fait apparaître un premier obstacle, deux stratégies émergent :

- Ajouter 3 fois 2g aux deux plateaux pour se ramener à une balance ne contenant que des cubes pleins. (Cette difficuté place les élèves en situation d'apprentissage à l'abstraction).
- Chercher la masse d'un cube troué. (Substitution du cube plein par un cube troué et une masse de 2g).

La sixième a posé de gros problèmes aux élèves. Seuls les élèves possédant une bonne maîtrise du calcul fractionnaire ont trouvé la bonne réponse. Ce dernier obstacle donne de l'interêt à l'apprentissage de la résolution des équations et sera résolu à l'issue d'un travail de synthèse sur les équations. Ce travail se fera en revenant sur chacune des balances qui pourront illustrer la résolution des équations:

$$3x+3=5+2x \quad * \quad 5x+2=3x+7 \quad * \quad \frac{1}{2}x+22=x+2$$

$$\frac{1}{2}x+7=3x \quad * \quad 3(x-2)=x+5 \quad * \quad \frac{1}{2}x+22=2x+\frac{1}{3}x$$

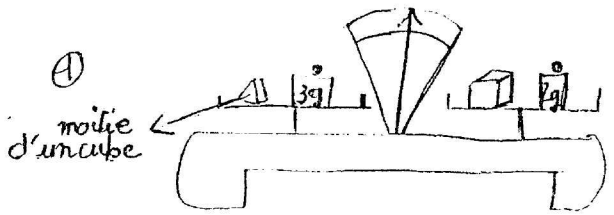
Les règles de résolution, avec pour objectif d'isoler l'inconnue, auront pris du sens et pourront être institutionnalisées. Néanmoins, l'apprentissage à la résolution des équations doit se poursuivre en abandonnant l'image de la balance et en mettant les élèves face à de nouveaux obstacles apparaissant, par exemple, lors de la résolution des équations suivantes :

$3x+5=0 \quad * \quad -5x+2=3x-4$

Julie

Exercice Déterminer la masse d'un cube

①



$\Delta + 3 = \square + \ell$

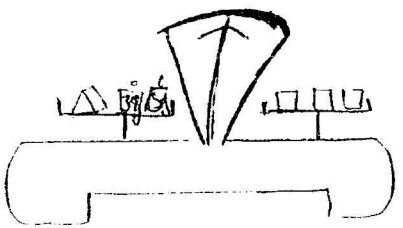
$\Delta + \ell + 1 = \Delta + \Delta + \ell$

donc $\Delta = 1$

soit $\square = \Delta + \Delta$

$\boxed{\square = 2}$.

②

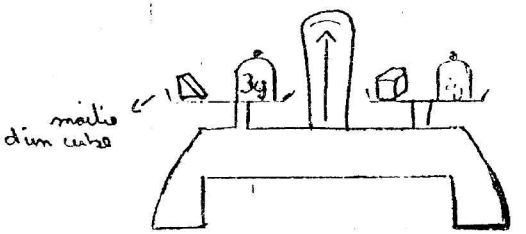


$\Delta + 30 + 5 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$

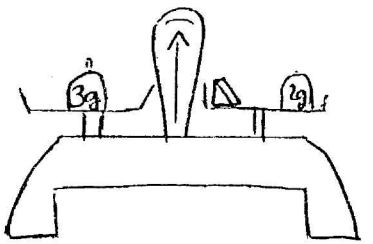
$30 + 5 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$

$35 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$

$\Delta = \frac{35}{5} = \boxed{7g}$



1) On enlève la moitié d'un cube de chaque côté.



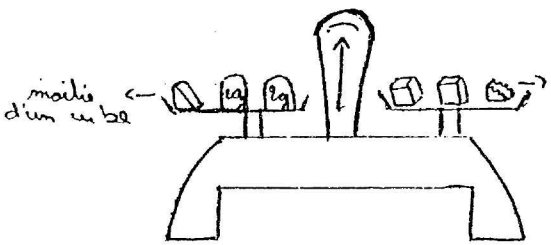
2) On calcule la moitié d'un cube

$3 - 2 = \boxed{1}$

La moitié d'un cube pèse 1g

- Un cube est égal à $2 \times 1 = \boxed{2}$

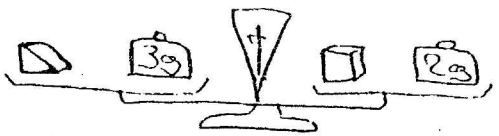
La masse d'un cube est de 2g



? + ? =

? = − = $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Déterminer la masse d'un cube



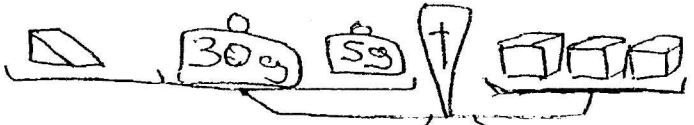
△ + 1g = □

□ = △ + 1g

△ = 1g

□ = 1g × 2

□ = 2g.



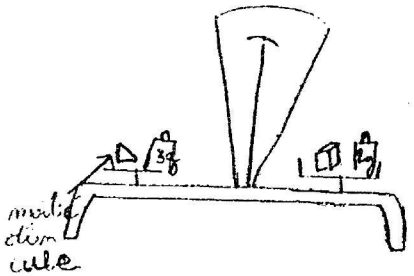
30g + 5g = △ □ □

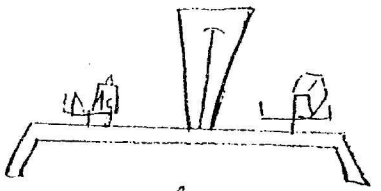
35g = △ □ □

□ = 14 g

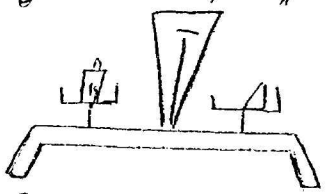
Exercice 1 Déterminer la masse d'un cube

(1)





1°/ On a enlevé 2g dans chaques plateaux.



2°/ On a enlevé la moitié d'un cube dans chaque plate

Donc nous savons que △ égale à 1g.
Alors □ égale 2g

Christelle.

$\Delta + 3g = \square + 2g$

FARIDA.

$\Delta + 3g - \Delta = \square + 2g - \Delta$

SANIA.

$3g - 2g = \square - \Delta$

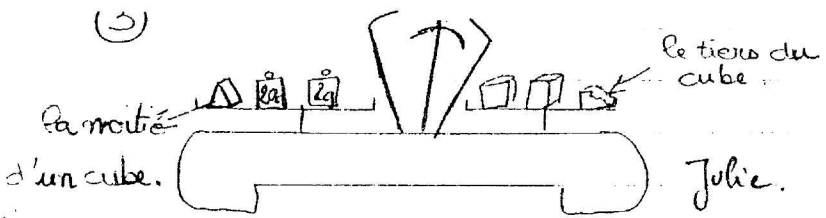
LOUBNA.

$1g = \Delta$

$\boxed{2g = \square}$

La masse d'un cube est de : 2g

Julie.



$\Delta + 20 + 2 = \square + \square + \square$

$\Delta + 20 + 2 = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \square$

$22 = \Delta + \Delta + \Delta + \square$

$22 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \square$

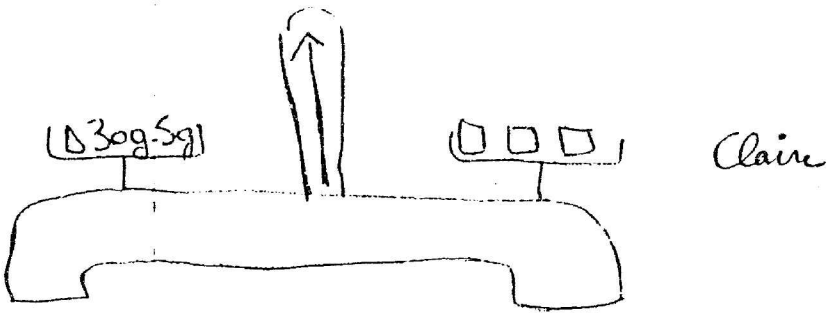
$22 = \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) \times \square$

$22 = \frac{11}{6} \times \square$

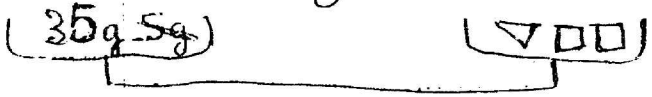
$\square = \frac{22}{\frac{11}{6}} = 22 \times \frac{6}{11}$

$= \frac{132}{11} = \boxed{12g}$

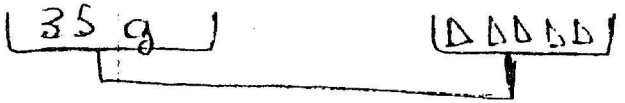
Claire



J'enlève une moitié à un cube sur le plateau de droite.
J'enlève la moitié du cube sur le plateau de gauche.



Pour simplifier l'opération on coupe tous les cubes en 2.



35 g ÷ 5 pour savoir la moitié d'un cube
= 7g → un cube = 14g donc 1 cube entier = 14 g

moitié

DE L'OBSERVATION AU RAISONNEMENT

Géométrie

A l'école primaire la géométrie est essentiellement une géométrie d'observation, au collège, elle devient progressivement une géométrie de déduction, il est indispensable que l'enseignant prenne en compte que le fait de faire cohabiter une géométrie d'observation et une géométrie de déduction est un véritable obstacle pour les élèves.

Dans **une géométrie d'observation,** les dessins ne sont pas porteurs d'informations formellement annoncées et les observations reposent sur des impressions visuelles. Les élèves appréhendent souvent les figures grâce aux instruments de mesure, ce qui ne va pas manquer d'être en rupture avec le travail demandé par la suite.

Dans **une géométrie déductive,** c'est à partir d'informations clairement annoncées et de propriétés connues qu'il s'agit de prouver l'existence d'informations qui n'étaient pas données au départ. Les instruments de mesure ainsi que le fait de "voir" sur un dessin, ne sont plus reconnus comme étant des moyens pour convaincre.

Le passage entre ces deux géométries comporte de nombreux aller-retours, il n'est pas souhaitable de renier la géométrie d'observation et il est nécessaire de développer des apprentissages intermédiaires.

Ce travail est à initialiser dès la classe de 6ème, et des exemples intéressants pour ce niveau peuvent être trouvés dans les travaux de l'IREM de Strasbourg.

Cependant le cycle central paraît être le moment où certains apprentissages deviennent incontournables.

Dans cette brochure, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à quatre thèmes :

- le codage
- la figure géométrique,
- la classification des quadrilatères,
- les constructions raisonnées.

CODAGES

Pré-démonstratif et codages en géométrie

Ce type d'exercice doit être envisagé dès la fin de la 6ème ou dès le commencement de l'apprentissage sur la démonstration. Il nécessite un travail préalable sur le codage.

Objectifs

. Savoir délaisser la perception visuelle (dessin) au profit d'une lecture ne prenant en compte que les données (figure).

. Savoir donner toutes les interprétations possibles au niveau de la classe d'un codage proposé (par exemple : M est le milieu de [AB] ; A est le symétrique du point B par rapport au point M ; les points A, M, B sont alignés et AM = MB, M. est le centre de symétrie du segment [AB]...).

Contenu

1 - On donne un dessin codé possédant quelques difficultés de lecture : c'est-à-dire, par exemple, où la perception conduit à penser que tel dessin est un carré alors que les codages ne le disent pas (cf. annexe 1) et on leur demande d'écrire en français ou en langage mathématique ce qu'ils lisent sur cette figure *de toutes les manières possibles* : 10 à 15 mn.

2 - Toutes les informations proposées par les élèves sont écrites au tableau : débat autour de :

"En disent-elles trop ?".

"Disent-elles tout ?" (Toutes les informations codées sont-elles prises en compte ? Et pour chacune des informations codées a-t-on donné toutes les manières de la dire ?).

"Est-ce bien dit ? Avec du vocabulaire mathématique approprié ?" (Par exemple : discuter de *moitié* et de *milieu*).

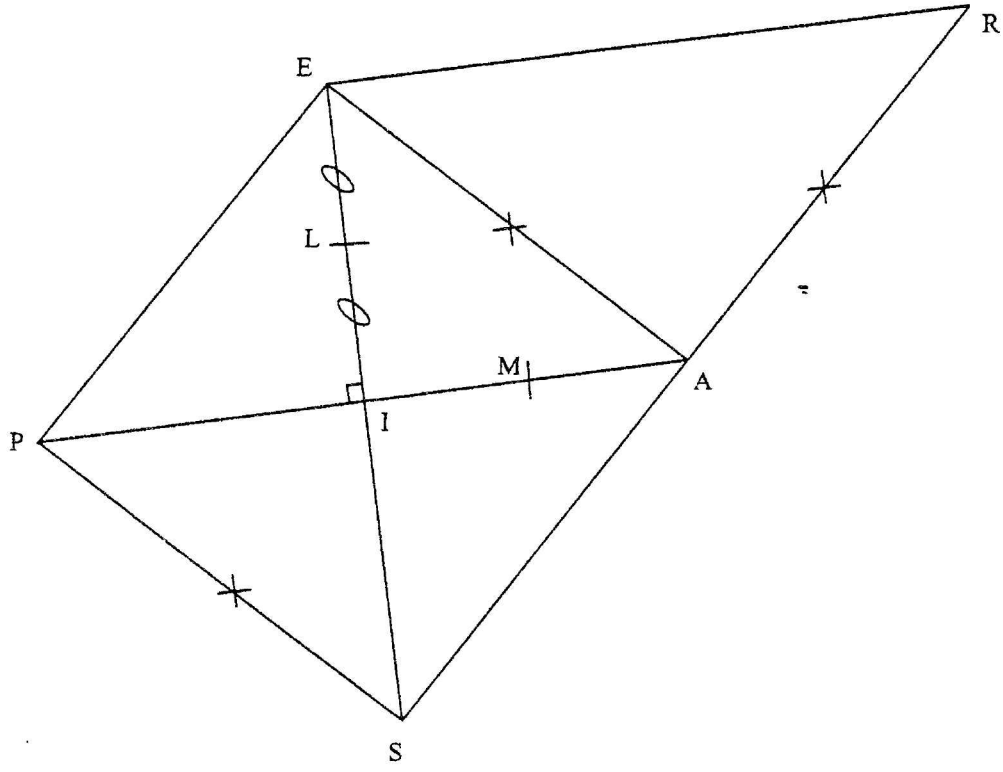
Commentaire

Cet exercice peut être un élément de devoir à la maison et faire l'objet aussi d'un contrôle. Il est couplé nécessairement avec des activités de constructions de figures codées, mais ne codant que les informations de l'énoncé. Il est bien certain que le codage des informations n'est pas toujours facile, voire peut-être impossible (un quadrilatère est un carré : quel codage ?) et il vaudra mieux éviter ce type de figure dès le début de l'apprentissage ; les élèves posant le problème d'eux-mêmes lorsqu'ils ont avancé sur ces notions. Le codage d'une figure est une notion complexe.

Modifications possibles

Toute figure comportant de manière perceptible des dessins connus posant ou non problème (le cercle par exemple) et de façon codée d'autres objets mathématiques connus (comme hauteur d'un triangle) peut-être donnée au fur et à mesure de l'introduction de nouveaux objets géométriques.

Voici une figure. Des renseignements sont donnés.
Ecris en le maximum à l'aide de phrases mathématiques.



Et si on décodait ?

Présentation

Cette activité est une proposition pour un tout premier travail en géométrie en classe de 4ème. Elle a été élaborée grâce à la présentation d'un travail de démarrage en géométrie en classe de 3ème par Sylvie Pellequer et Alain Bronner (dans la revue PETIT x).

Elle permet de faire le point sur les connaissances antérieures des élèves et de pouvoir repérer leur rapport à la démonstration.

Objectifs

- Mener une réflexion sur le statut de la figure et sur les données de l'énoncé d'un problème.
- Savoir lire les informations codées sur une figure.
- Réinvestir des théorèmes fréquentés les années précédentes.

Organisation

L'activité s'est déroulée sur deux séances d'une heure suivant quatre phases différentes.

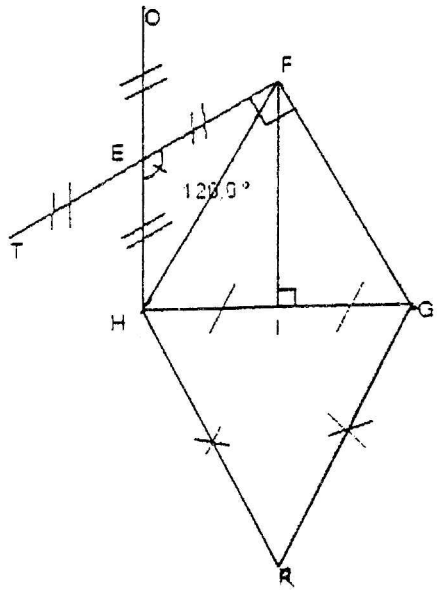
PHASE 1

Durée 20 mn environ.

Les élèves travaillent individuellement.

Une fiche polycopiée comportant la figure ci-dessous leur est distribuée avec la consigne suivante :

"Ecrire toutes les informations données par la figure dont on est sûr"



Après la recherche individuelle d'une durée de 10 mn, le professeur organise un bilan. Toutes les propositions faites sont écrites au tableau et discutées par la classe.

La discussion est très intéressante, car une même information est transcrite de plusieurs façons différentes et des informations illicites apparaissent.

PHASE 2

Durée 40 mn environ.

La recherche se fait maintenant par groupe de trois élèves.

La consigne est la suivante :

"A partir des informations données par la figure, imaginez une question que vous pourriez poser à un autre groupe".

"Ecrivez sur votre cahier les informations utiles à cette question et les théorèmes qui permettent d'y répondre".

Les élèves ont beaucoup d'imagination et essaient de trouver des questions assez difficiles pour piéger les autres groupes.

Les élèves plus en difficulté trouvent toujours quelque chose à demander et ne se sentent pas en échec lors de cette tâche.

Le professeur collecte les différentes questions afin de les répartir lors de la phase suivante.

PHASE 3

Durée 30 mn environ.
La recherche se fait toujours en groupe
Le professeur effectue les échanges de messages entre les groupes.
La consigne est la suivante :

> "Répondez à la question reçue et rédigez le plus soigneusement possible une solution.
>
> Cette solution sera envoyée au groupe qui a émis cette question.
>
> Lorsque vous recevez d'un autre groupe la réponse à la question que vous avez rédigée, corrigez cette réponse".

PHASE 4

Bilan avec la classe entière du travail avec la reprise au tableau de certaines questions.

Ce travail permet au professeur d'expliciter ses premières exigences et attentes sur la démonstration et sur les connaissances mathématiques en jeu dans cette situation.

Commentaires

Il est trés fréquent , parmi les questions émises par les élèves de trouver:

- des demandes de calculs de certains angles.
- la nature du triangle HGF.
- la nature du quadrilatère OFHT.
- (FR) est - elle la médiatrice de [HG] ?
- démontrer que (OH) est parallèle à (FI).

Cette activité permet de réinvestir les outils essentiels des classes précédentes et initialise tout le travail géométrique.

Codage et initiation à la démonstration

Objectifs

1. Savoir construire un triangle dont on connaît les trois longueurs
2. Savoir coder sur un dessin les données de l'énoncé.
3. Savoir reconnaître la nature d'un triangle par les données de l'énoncé et savoir rejeter toute conjecture s'appuyant sur la perception visuelle (dessin).
4. Créer un débat en classe.

Remarque : L'objectif 2 a déjà été travaillé en classe à travers d'autres exercices.
De même, les élèves ont déjà rencontré des situations les amenant à rejeter la perception visuelle comme moyen de preuve, en mathématiques.

Enoncé

Tracer les triangles ci-dessous. Dire, dans chaque cas, quelle est la nature du triangle et justifier sa réponse.

a) LIO : LI = 6 cm ; LO = 4,5 cm ; OI = 6 cm .
b) BSN : BS = 5 cm ; BN = 5 cm ; SN = 5 cm .
c) APR: AP = 7,5 cm ; AR = 6 cm ; PR = 4,5 cm .

Remarque : Le mot "nature" a été expliqué en classe.

Commentaires

Les deux premières constructions sont choisies de façon à ce qu'il y ait adéquation entre les données et la forme du triangle. L'objectif est de mettre en place le fait que la nature du triangle n'est pas justifiée par ce que l'on voit mais par les longueurs données dans l'énoncé.

La troisième construction est choisie avec pour buts, d'apprendre à l'élève à prendre du recul sur ce que le dessin montre et de l'amener à prendre en compte, uniquement, les informations données par l'énoncé, en opposant les données à la forme du triangle. En effet, le triangle APR est, en fait, un triangle rectangle en R, mais aucune donnée ne permet aux élèves de le conclure puisqu'ils ne connaissent pas le théorème de Pythagore. La réponse attendue au niveau d'une classe de sixième, est donc : " le triangle est quelconque " avec éventuellement "le triangle semble rectangle en R." . A chaque enseignant de réfléchir à savoir s'il est opportun de signaler aux élèves que, plus tard, en classe de quatrième, ils auront les moyens mathématiques de lever cette incertitude.

Ce débat risque de laisser certains sur leur faim car il n'y a pas de solution au sens classique du terme. Le professeur devra alors mettre en avant l'idée que, en dehors des réponses classiques "oui" , "non", il existe une réponse (certes peu usitée en mathématiques)

tout à fait acceptable quand elle est justifiée "je ne sais pas" ou "les données de l'énoncé ne me permettent pas de conclure"

Gestion de la classe

L'exercice peut être cherché soit à la maison soit en classe mais le travail doit être sans aide, à la maison, et individuel, en classe.
Les constructions des trois triangles sont faites au tableau et le codage des longueurs égales est marqué. L'éventuel codage de l'angle droit pour le troisième triangle n'est pas marqué, tout en reportant la discussion à plus tard.
La nature de chaque triangle est discutée par les élèves. Pour récupérer toutes les propositions existant dans la classe, le professeur demande, avant toute validation de réponse, s'il y a d'autres réponses que celle de l'élève interrogé.

TRIANGLE 1
Il y a eu deux types de réponses dans la classe:

- le triangle est isocèle car il a deux longueurs égales LI = OI = 6 cm
- le triangle est isocèle car il a les codages correspondants à cette égalité de longueurs sur le dessin.

TRIANGLE 2
Il y a eu deux types de réponses dans la classe:

- le triangle est équilatéral car il a trois longueurs égales
- le triangle est équilatéral car il a les codages correspondants à ces égalités de longueurs sur le dessin.

TRIANGLE 3
Il y a trois réponses qui apparaissent dans la classe:

- le triangle est rectangle en R
- le triangle est quelconque
- le triangle est quelconque mais il semble rectangle en R.

Débat et sa gestion

L'objectif est maintenant de laisser s'exprimer dans la classe toutes les idées, les opinions et les raisons plus ou moins mathématiques qui ont amené les élèves à choisir telle ou telle nature pour ce triangle.

Il peut être bon de rappeler aux élèves qu'il va s'instaurer un débat d'idées dont l'objectif est

- de trouver la bonne réponse et non qui a raison.
- de débattre en essayant de se convaincre en s'aidant des mathématiques.
- Il n'y aura donc ni vainqueur ni vaincu, il y aura évolution des connaissances mathématiques.

Les temps de parole vont être gérés en écoutant :

- les élèves qui pensent le triangle rectangle
- les élèves qui pensent le triangle quelconque
- les élèves qui pensent le triangle quelconque et qu'il semble rectangle
- enfin, un positionnement de chacun par rapport aux différentes réponses entendues dans la classe.

La parole est d'abord donnée à ceux qui soutiennent la réponse fausse pour qu'ils ne perdent pas leurs idées car il y a, peut-être moins de chance que ceux qui pensent justes soient déstabilisés par un argument faux.

Durant tout ce débat, le professeur joue le rôle d'un animateur en :

- donnant la parole aux uns et aux autres
- refusant de mieux formuler une explication d'élève si elle n'est pas claire, soit l'élève essaie de la formuler autrement soit un autre élève arrive à mieux l'exprimer soit la classe passe à une autre idée.
- sollicitant les élèves qui ne prennent pas la parole en leur demandant si leur idée a été déjà exprimée dans la classe et sinon de la présenter
- n'intervenant pas, au niveau des mathématiques, dans le débat.

Ce rôle différent du professeur est expliqué clairement aux élèves.

Les idées qui vivent dans la classe sont :

- C'est un triangle rectangle car ça se voit
- C'est un triangle rectangle car il y a le codage de l'angle droit
- C'est un triangle rectangle car je l'ai vérifié avec mon équerre

- C'est un triangle quelconque car on n'a des informations que sur ses longueurs
- C'est triangle quelconque car aucune longueur n'est égale à une autre
- On ne peut pas coder l'angle droit car on ne le sait pas
- C'est un triangle quelconque mais il semble rectangle à vue d'œil, on ne peut pas en être sûr car l'énoncé ne le dit pas.

Remarque
Il a été difficile de faire comprendre aux élèves que le triangle a été construit avec un compas en s'appuyant sur ses longueurs et donc, qu'il n'y a aucune information concernant un de ses angles. Les élèves avaient presque le sentiment d'avoir tracé l'angle droit tellement ils ne dissociaient pas la construction et le dessin obtenu.

Conclusion

Au bout du débat, ce qui est important est que le triangle soit reconnu comme un triangle quelconque bien qu'il semble rectangle sur le dessin.

Si nécessaire, le professeur peut amener la bonne réponse en endossant à nouveau la responsabilité du savoir car, après le débat, les élèves sont prêts à évoluer.

Il est sûr qu'un seule activité de ce type ne suffit pas à faire en sorte que les élèves ne lisent plus des informations non données sur le dessin, mais il est certain que cela permet de les amener à mieux savoir lire mathématiquement un dessin.

Il faut sans doute proposer également des activités dans laquelle une conjecture est invalidée par un contre exemple, comme les exercices suivants:

1) Sarah affirme que: "Dans l'expression $n \times n - n + 11$, chaque fois que je remplace n par un entier, je trouve toujours un entier qui n'admet que deux diviseurs." A-t-elle raison? Justifie ta réponse.

2) Eric affirme que: "Le triangle AUC tel que $\hat{A} = 61°$ et $\hat{U} = 28°$ et AU = 5cm est un triangle rectangle.". Nancy est d'accord car elle l'a vérifié avec son équerre et Sophie n'est pas d'accord car elle a fait un calcul. Qui a raison? Justifie ta réponse.

3) Said dit que: "Sauf pour 0 et1, le carré d'un nombre est toujours plus grand que ce nombre." A-t-il raison? Justifie mathématiquement ta réponse.

Remarque:
Voici une trace écrite élaborée par les élèves qu'il est possible de mettre en conclusion de l'exercice:

Le triangle APR est quelconque et il semble être rectangle en R mais rien ne permet de l'affirmer.

Quand je construis un dessin, il faut que je fasse très attention:
- *Je ne peux coder que les informations qui sont écrites dans l'énoncé.*
- *A la fin de la construction, le dessin peut me montrer d'autres propriétés mais je n'en suis pas sûr, je peux seulement dire que le dessin* ***semble*** *avoir cette propriété"*

FIGURE GEOMETRIQUE

Comment peut-on aider un élève à prendre conscience de la différence qui existe entre une figure géométrique et les dessins qui la représentent ?

"La **figure géométrique** est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit, tandis que le dessin en est une représentation." nous dit PARZYSZ(1988).

Les travaux de Raymond DUVAL* montrent que les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec les représentations qui en sont faites. En effet toute confusion entraîne une perte de compréhension; les connaissances acquises devenant inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage, il n'y aura pas possibilité de transfert dans une autre situation.
`Néanmoins, les diverses représentations d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. Le dessin rend compte des propriétés de l'objet géométrique qu'il représente mais ne le fait que partiellement.

Les activités ne développent pas suffisamment les rapports entre objet géométrique et dessin en passant sous silence la distinction entre les deux, comme si les élèves étaient censés connaître la différence intuitivement.

Nous devons faire travailler les élèves sur la notion de figure géométrique, c'est à dire sur les rapports entre objet et dessin; cela va donc demander une interprétation du dessin en termes de connaissances géométriques.

Un médiateur intéressant à ce niveau peut être le logiciel CABRI GEOMETRE.

Les principales caractéristiques de cet environnement informatique résident :
. d'une part, dans la coexistence de commandes permettant d'obtenir les objets géométriques de base (point, droite, segment, cercle..) et de commandes permettant des constructions géométriques (parallèle, perpendiculaire, transformé...).

Par exemple, lors d'activités, certains élèves vont tracer un triangle rectangle en positionnant les segments au jugé alors que d'autres vont tracer des droites perpendiculaires.
. d'autre part, dans la manipulation directe du dessin ; on peut déplacer à l'aide de la souris certains éléments de base du dessin, ce dernier se déforme mais conserve les propriétés géométriques obtenues par les commandes de constructions géométriques.
Pour reprendre l'exemple précédent, les élèves qui ont tracé le triangle au jugé voient leur triangle perdre la propriété qu'ils avaient obtenue, alors que les seconds constatent la déformation mais le nouveau triangle est encore rectangle.

Les élèves vont donc s'apercevoir peu à peu qu'ils ont besoin de construire leur dessin grâce aux commandes utilisant des propriétés géométriques.

Entre le dessin et la figure géométrique va prendre place le **Cabri-dessin** qui a encore un autre statut :

"**Un Cabri-dessin** est par définition un dessin qui garde au cours du déplacement les propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques attachées à l'objet qu'il représente" (C LABORDE)*
Le Cabri-triangle rectangle est donc obtenu par le deuxième groupe d'élèves cité précédemment, il garde la propriété d'être rectangle même lorsqu'on déplace certains éléments de base.

La production d'un Cabri-dessin va demander à l'élève une analyse des propriétés géométriques dont il n'a pas forcément conscience lors d'un dessin papier crayon, car là il s'agit

de faire faire et non de faire un dessin. L'élève ne réalise par un dessin, il le fait réaliser par la machine.

Par ailleurs, le mouvement va être, pour l'élève, un moyen d'invalider ou de contrôler la procédure utilisée.

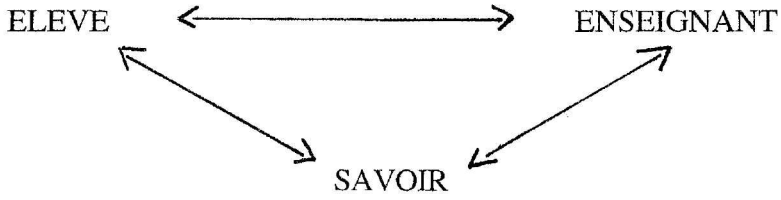
L'exigence de communiquer au logiciel un programme de construction permet de caractériser l'objet géométrique.

Le passage par le Cabri-dessin va aider à mettre à sa juste place le dessin par rapport à la figure géométrique. Contrairement à l'environnement papier-crayon, le caractère dynamique du logiciel va pouvoir multiplier le nombre de représentants d'un même objet mathématique.

Ce logiciel est donc un outil puissant quant à l'émission de conjectures mais la validation mathématique n'est pas atteinte car rien n'assure qu'il n'existe pas un contre-exemple non exhibé par Cabri-géomètre. Donc la validation de la propriété trouvée reste de la responsabilité du professeur.

Avant de proposer quelques activités, il est indispensable de faire quelques commentaires en ce qui concerne le travail élève dans l'environnement informatique.

Les rapports habituels dans le triangle



sont modifiés et il faut le prendre en compte.

En effet

- La médiation élève / savoir passe aussi par le logiciel.

- Le logiciel et l'élève interagissent et, en ce sens, cet environnement informatique acquiert une dimension enseignante; par exemple, l'élève construit un triangle rectangle au jugé et le déplacement d'un point lui renvoie l'image d'un triangle qui n'est plus rectangle.

- Le logiciel devient en partie garant du vrai-faux, du possible-impossible.

Cette composante est reconnue parfaitement par l'élève et rend les reprises en main par l'enseignant dans le cadre d'un travail à environnement multipostes difficiles.

- L'élève devient donc plus autonome et plus actif. Ses erreurs n'ont pas le même statut, puisqu'il peut en partie en rendre responsable la machine, même si au fond de lui il n'est pas dupe. L'élève en difficulté, n'étant plus dans le cadre habituel d'une séquence de classe traditionnelle, accepte plus facilement d'être partie prenante de la nouvelle situation.

La gestion de la classe est différente quand au fond et à la forme.

Avant la mise en place de la situation problème l'enseignant doit amener les élèves à accepter le nouveau contrat, notamment en ce qui concerne le Cabri-dessin.

Il faut bien prendre conscience que ce n'est pas du tout la même tâche qui est demandée aux élèves.

Il est difficile de contrôler sur papier crayon la pertinence de la procédure utilisée par un élève pour construire un triangle rectangle.

Sur Cabri-géomètre, l'élève peut avoir l'impression d'avoir construit un triangle rectangle; le fait qu'il se déforme lorsque le professeur déplace un point de base ne règle pas tous les problèmes, car l'élève peut penser que ce n'est plus son triangle. Certains élèves ont même des réactions d'incompréhension à ce moment-là.

Il doit comprendre qu'on ne lui demande plus de faire un dessin comme sur la feuille de papier mais un prototype qui va générer toute une famille de dessins ayant les mêmes propriétés.

On touche là la différence fondamentale entre le dessin et la figure géométrique.

Pendant la situation problème, le professeur est conduit à confirmer, infirmer ou aider l'élève pour la validation des procédures de construction; l'élève, surtout au début, n'utilise pas forcément de lui même les potentialités de validation du logiciel.

Cette phase est très importante car c'est à ce moment-là que l'élève va avoir davantage d'autonomie et va pouvoir progresser seul dès qu'il reconnaîtra les possibilités du logiciel.
Mais certains élèves refusent de faire bouger les éléments de base car ils sentent bien qu'ils ont fait une construction au jugé.

Après la situation problème se pose le problème des traces écrites. Une synthèse des nouvelles acquisitions est fondamentale car le transfert dans un autre environnement n'est pas automatique et l'enseignant doit pour cela s'appuyer sur un jeu entre différents environnements. Il est essentiel que le transfert puisse se faire dans l'environnement papier-crayon, d'où l'importance de ce travail de synthèse qui aura lieu pendant ou après chaque séance informatique.

Les deux activités qui suivent concernent les triangles et les parallélogrammes.

Elles ont été réalisées dans un environnement multipostes pour la partie informatique, mais elles peuvent aussi s'envisager avec un seul ordinateur relié à un écran rétroprojetable.

ACTIVITÉ 1 : LES TRIANGLES

Présentation

Cette séance a été expérimentée en classe de 5ème, mais peut aussi se dérouler en 4ème.

Les élèves avaient au préalable rencontré ces différentes figures dans l'environnement papier-crayon.

Ils avaient déjà manipulé le logiciel Cabri-géomètre. Ils savaient en particulier mesurer des segments et des angles, tracer des droites parallèles et des droites perpendiculaires et construire des symétriques.

Pour des élèves non initiés, une familiarisation avec les commandes serait nécessaire au préalable.

Objectifs

- Vérification de la connaissance des figures géométriques, triangle rectangle, triangle isocèle et triangle équilatéral.
- Réinvestissement des notions de médiatrice, de symétrique.

Organisation

PHASE 1

Les élèves travaillent en salle informatique et sont deux à trois par poste de travail ce qui permet à chaque élève de faire sien le problème posé. Ils vont par groupe relever trois défis successifs.

1er défi : "Vous devez construire un triangle rectangle qui reste rectangle lors du déplacement de l'un des sommets à l'aide de la souris."

2ème défi : "Vous devez construire un triangle isocèle qui reste isocèle lors du déplacement de l'un des sommets."

3ème défi : "Vous devez construire un triangle équilatéral qui reste équilatéral lors du déplacement de l'un des sommets."

Chaque groupe effectue la tâche demandée et appelle le professeur lorsqu'il pense avoir réussi, avant de passer au défi suivant.

Lorsque sa construction est correcte, chaque groupe doit écrire le programme de construction mis en oeuvre, sur une feuille qui sera rendue au professeur.

PHASE 2

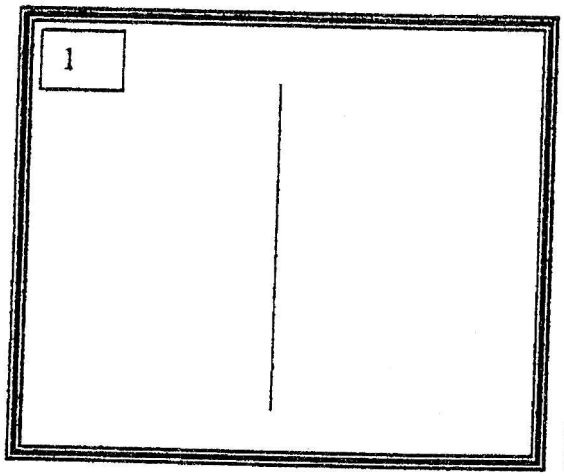
Bilan et mise en commun des différentes stratégies utilisées.

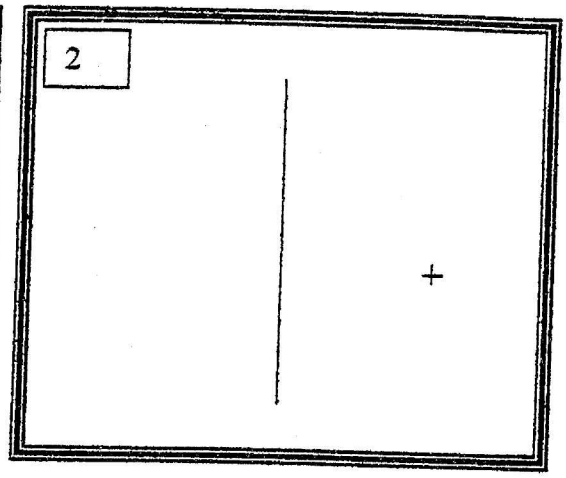
Justification par des propriétés qui permettent d'être certain d'avoir effectué la tâche demandée.

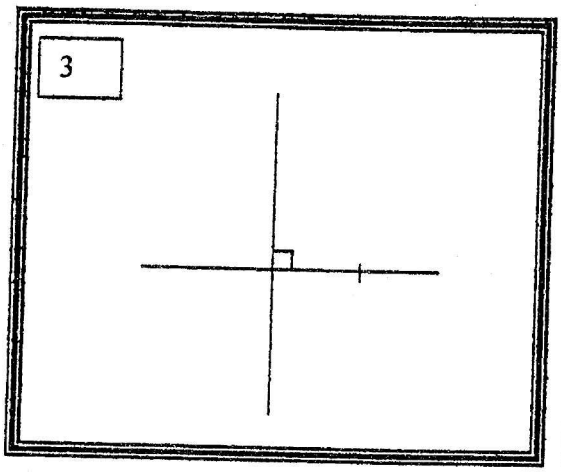
On peut citer quelques stratégies d'élèves de 5ème :

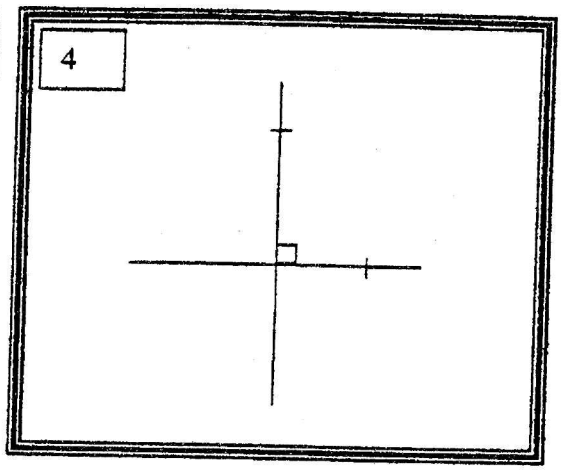
Exemples de stratégies d'élèves de 5 ème

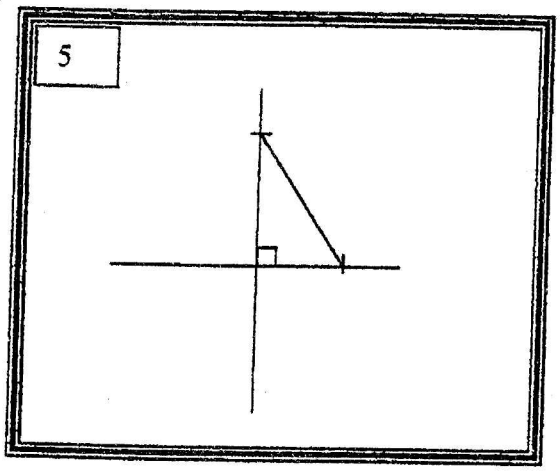
TRIANGLE RECTANGLE : le film de la construction en 5 étapes.





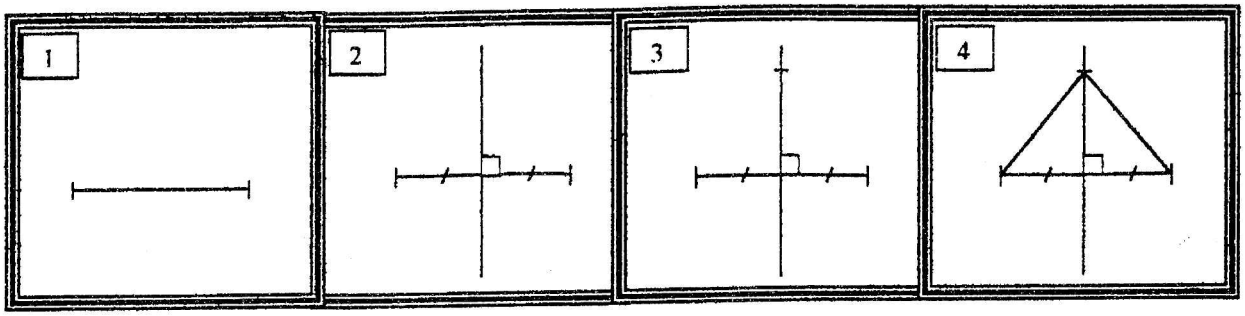




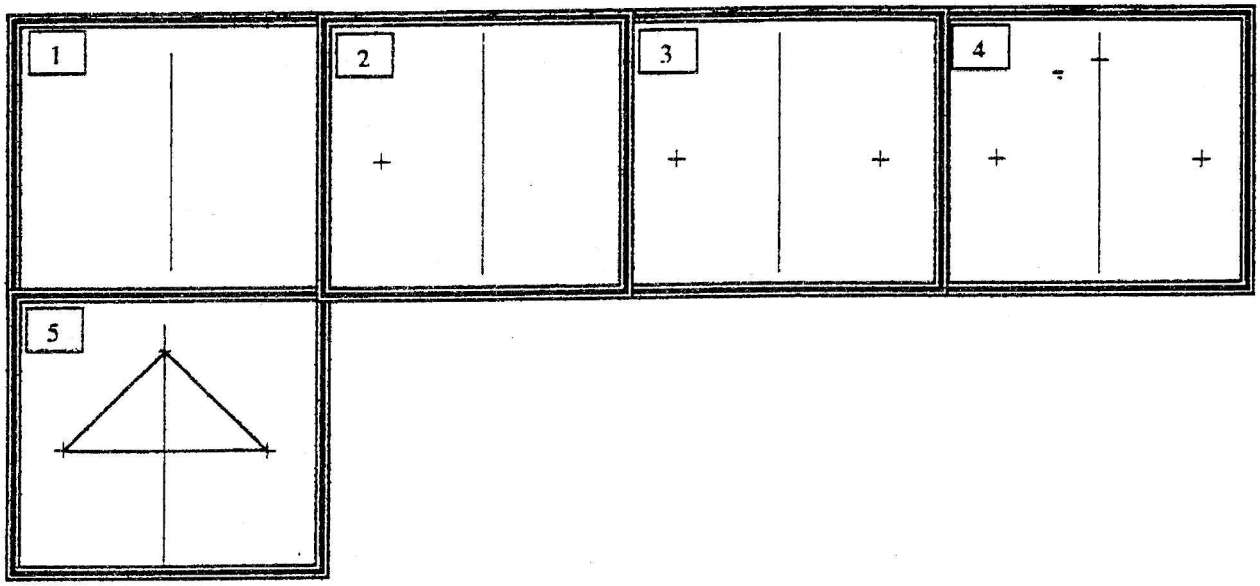


TRIANGLE ISOCELE : trois stratégies différentes

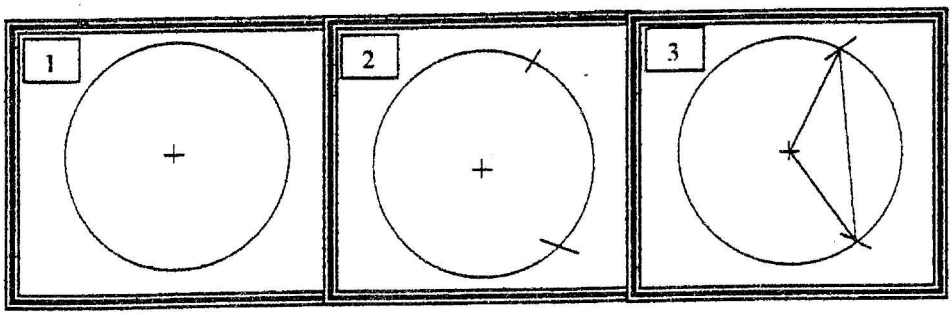
N°1 : avec la médiatrice



N°2 : avec la symétrie axiale

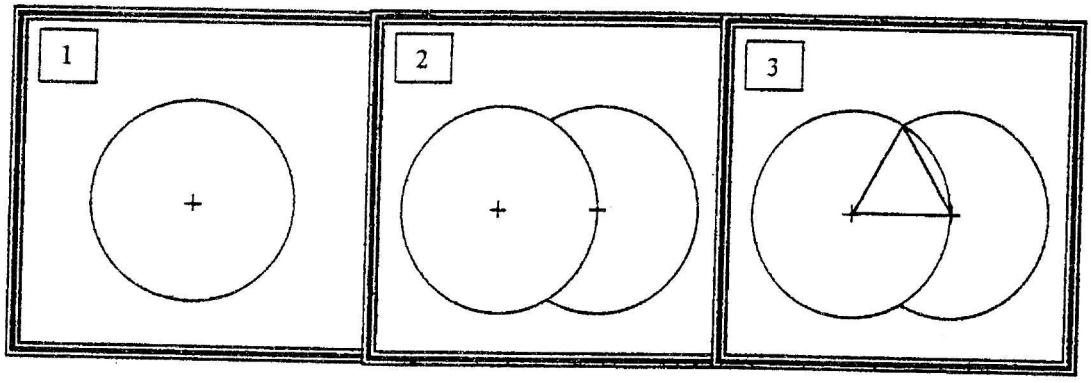


N°3 : avec le cercle

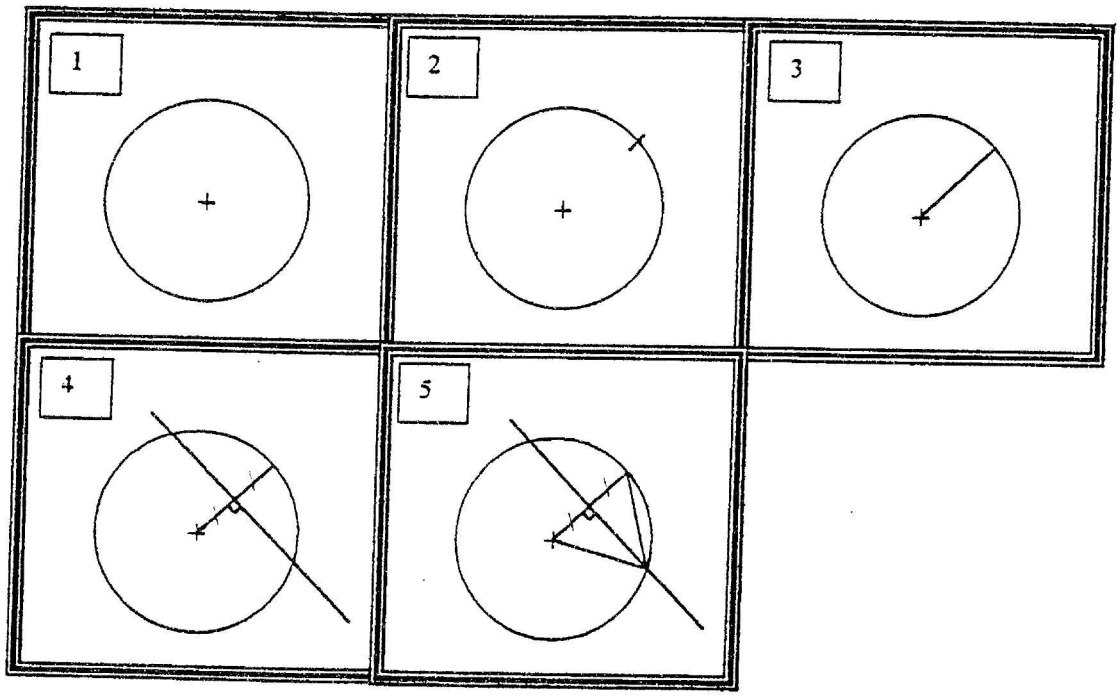


TRIANGLE EQUILATÉRAL : Deux stratégies différentes.

N°1 : avec deux cercles



N°2 : avec un cercle et une médiatrice



Commentaires

Pendant la première séance tous les groupes ont réussi les premiers défis. Le troisième défi est le plus difficile à réaliser, et l'une des difficultés renvoie à la signification de la construction d'un triangle à l'aide du compas.

Dans un environnement papier crayon, l'obtention d'un triangle en traçant deux arcs de cercle, relève de la magie pour la majorité des élèves.

Ils ne sont pas conscients des propriétés de distance liées à l'appartenance des points à un cercle surtout quand celui-ci n'est pas entièrement tracé.

Le logiciel ne construit que des cercles entiers, il semble donc approprié pour que l'élève établisse le lien entre la construction et des propriétés mathématiques même si ceci fait obstacle dans un premier temps à la reconnaissance d'une procédure.

Il faudrait sans doute prendre la bonne habitude de faire construire les objets avec des cercles entiers en environnement papier crayon.

ACTIVITE 2 : LES PARALLÉLOGRAMMES

Présentation

Cette activité prend place après avoir introduit la symétrie centrale et après les activités 1 et 2 du thème sur les quadrilatères particuliers qui se trouvent page dans la brochure.

Objectifs

- Vérification de la connaissance des figures géométriques: parallélogramme, losange, rectangle et carré.
- Réinvestissement de la symétrie centrale et de la symétrie axiale.
- Construction de la notion de propriété suffisante.

Organisation

Cette séquence se déroule en deux phases comme l'activité précédente.

PHASE 1

Les élèves travaillent par groupe de 2 ou 3 sur un ordinateur.
Ils doivent relever quatre défis successifs.

1er défi : "Vous devez construire un parallélogramme qui reste parallélogramme lors du déplacement de l'un des sommets".

2ème défi : "Vous devez construire un losange qui reste losange lors du déplacement de l'un des sommets".

3ème défi : "Vous devez construire un rectangle qui reste rectangle lors du déplacement de l'un des sommets".

4ème défi : "Vous devez construire un carré qui reste carré lors du déplacement de l'un des sommets".

Comme lors de l'activité précédente, ils appellent le professeur pour que ce dernier puisse contrôler la construction effectuée, avant de passer au défi suivant.
Ils produisent également leur programme de construction sur une feuille.

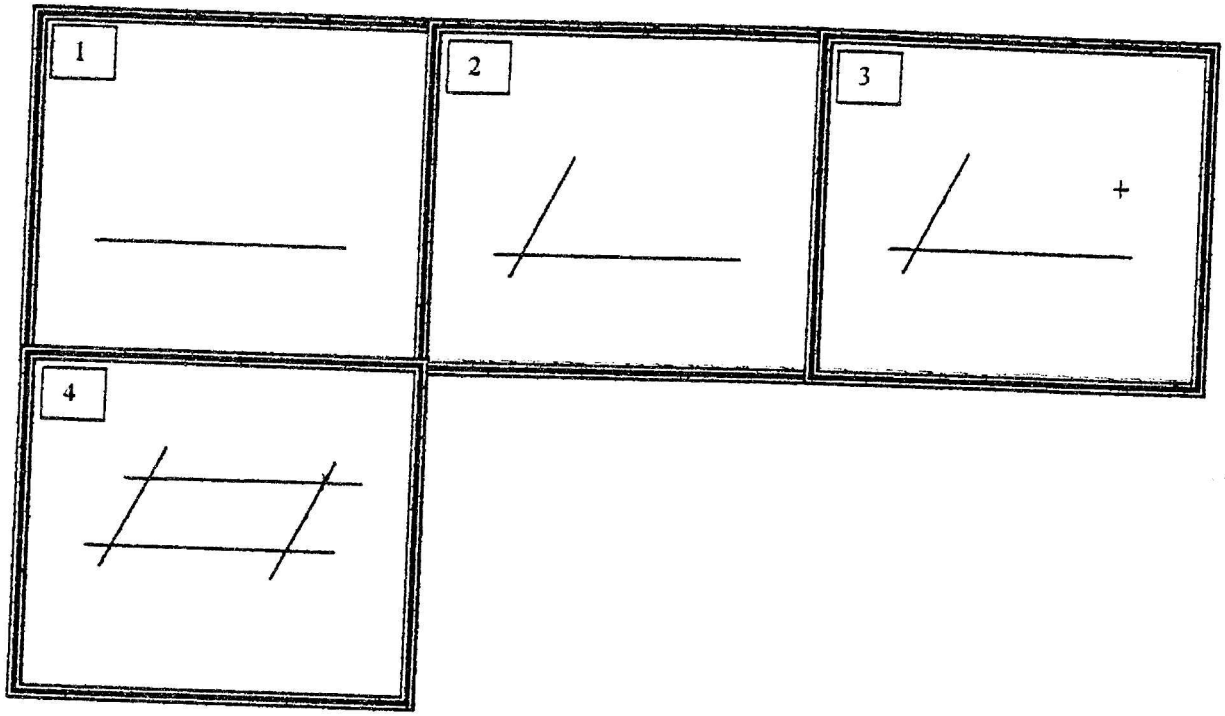
Pour les plus rapides un 5ème défi peut être proposé.

PHASE 2

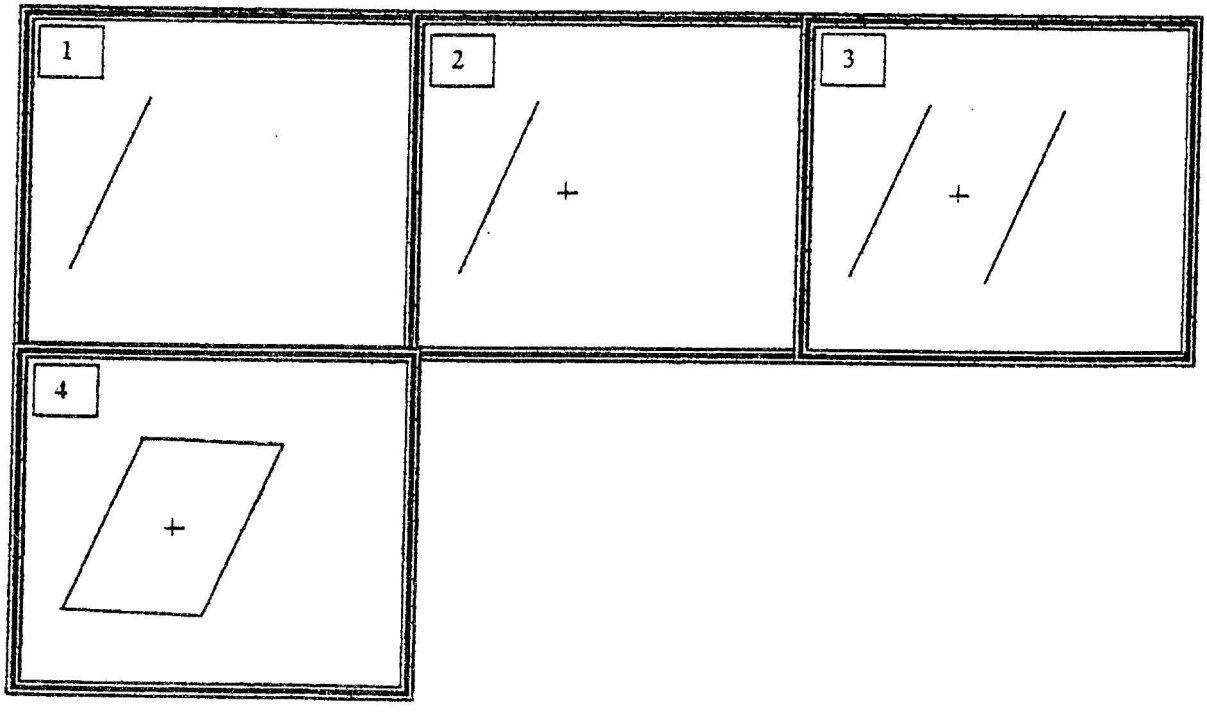
Bilan des différentes stratégies utilisées.

PARALLÉLOGRAMME : Deux stratégies différentes

N°1 : avec des parallèles

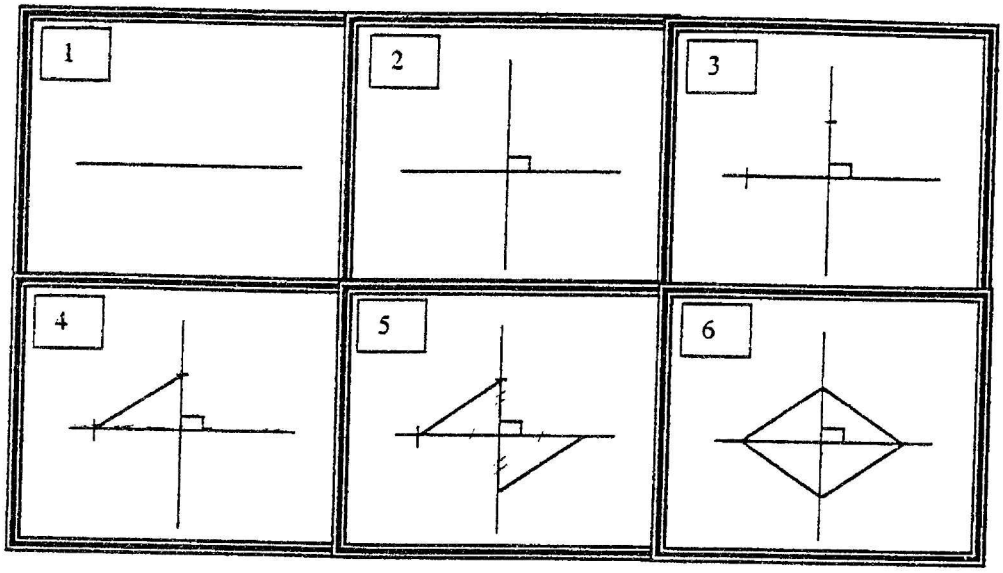


N°2 : avec la symétrie centrale

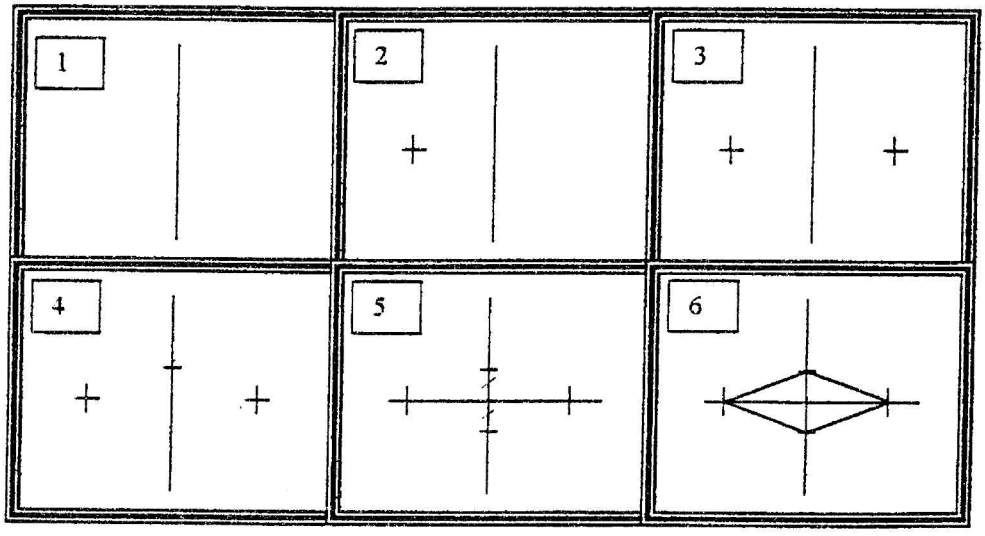


LOSANGE : Trois stratégies différentes.

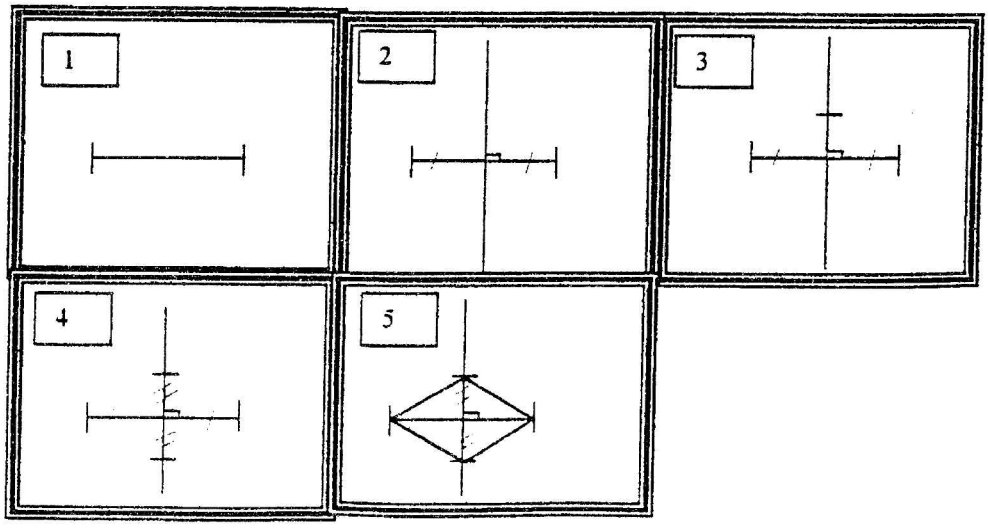
N°1 : avec les droites perpendiculaires et la symétrie centrale



N°2 : avec la symétrie axiale

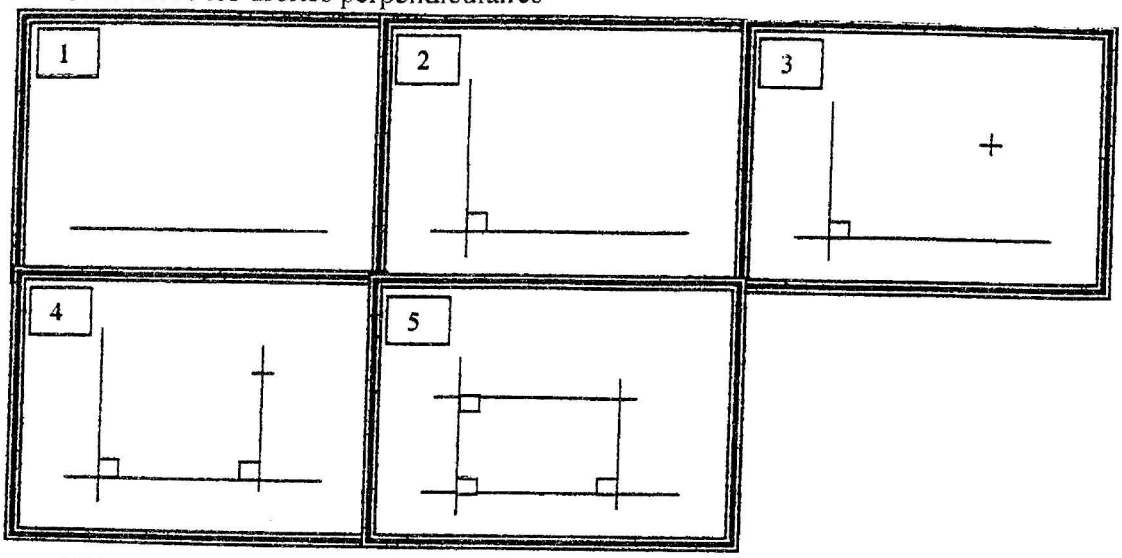


N°3 : avec la médiatrice et la symétrie axiale ou centrale

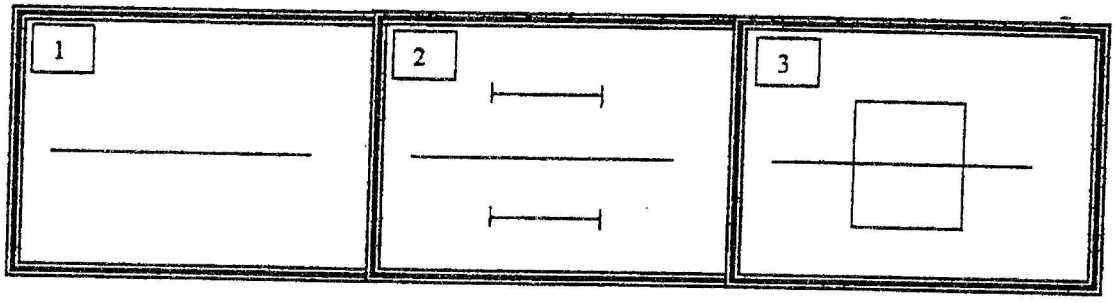


RECTANGLE : Trois stratégies différentes.

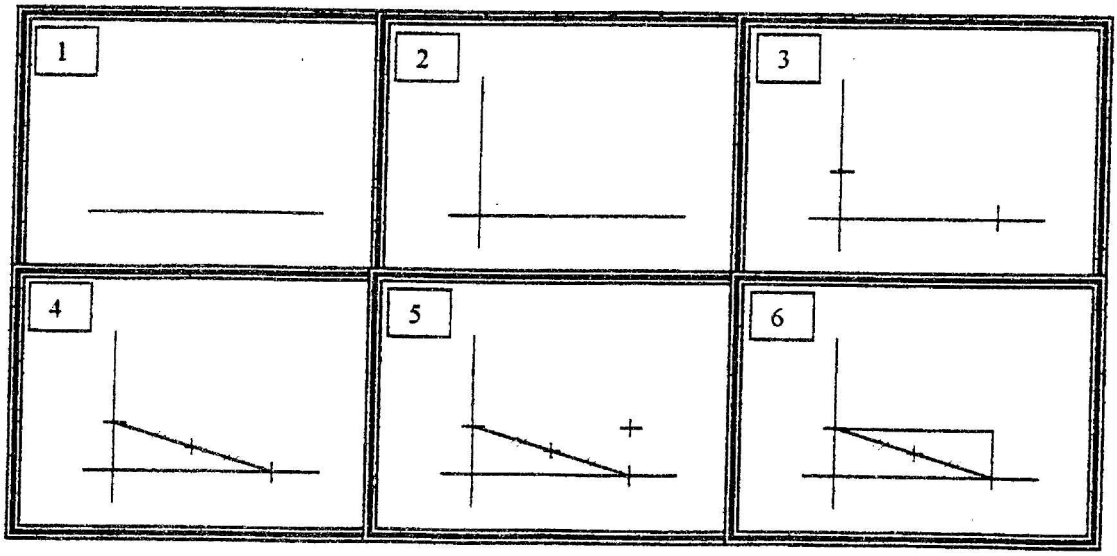
N°1 : avec les droites perpendiculaires



N°2 : avec la symétrie axiale

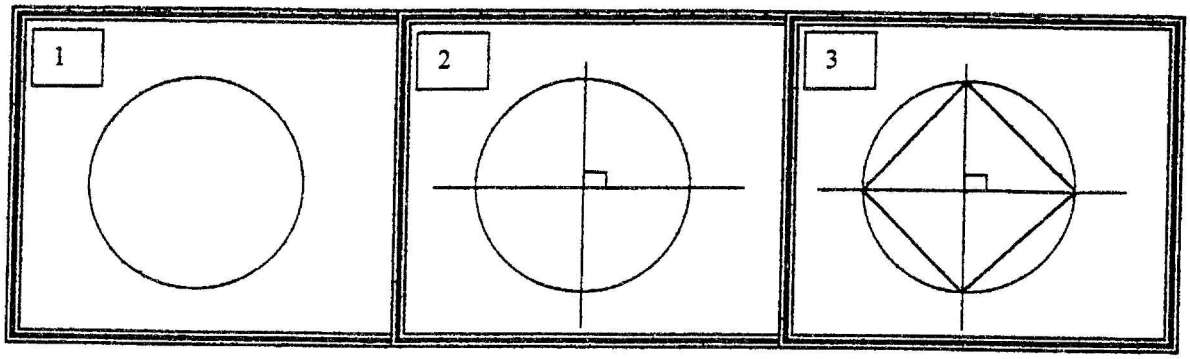


N°3 : avec les droites perpendiculaires et la symétrie centrale

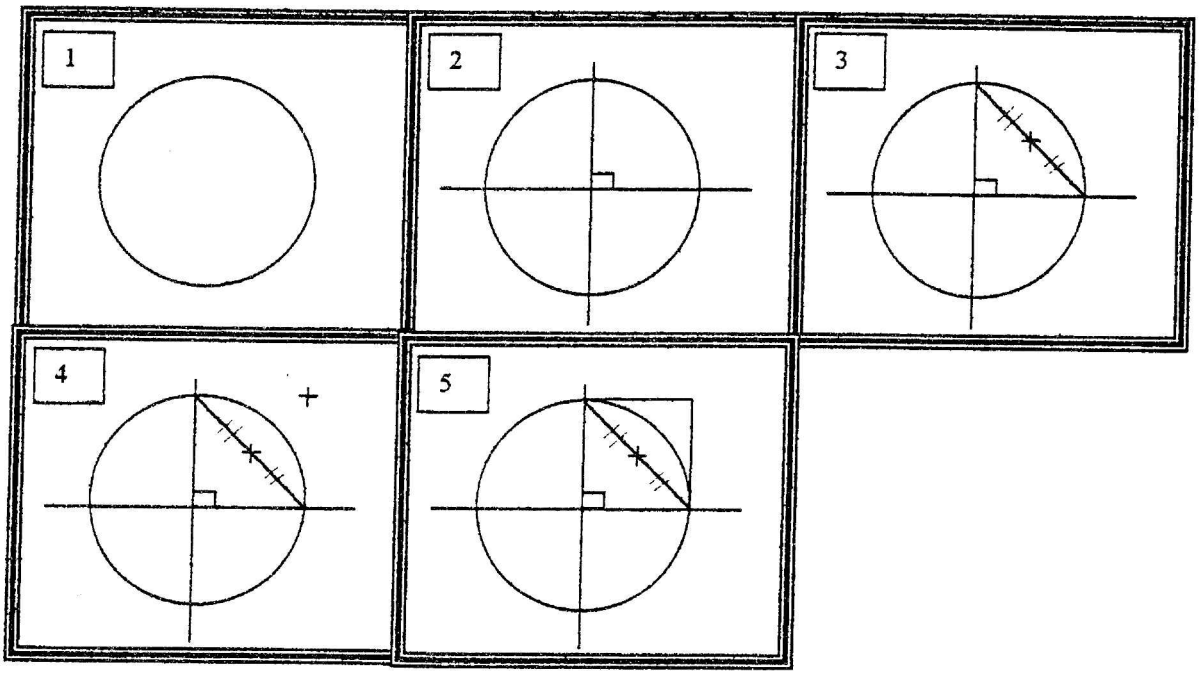


CARRE : Deux stratégies différentes.

N°1 : avec le cercle



N°2 : cercle et symétrie centrale



Voici quelques exemples de productions écrites :

"On a fait un segment, sa symétrie grâce a un point de symétrie puis on les a relié. On a trouver un parallélogramme . "

Nathalie

"Losange:
On a tracé un segment, puis son milieu, ensuite nous avons tracé la perpendiculaire du segment passant par son milieu. Nous avons mis un point sur la droite, puis nous avons fait son symétrique par rapport au segment. Puis nous avons tracé les quatre segment, ensuite nous les avons nommé. "

Luc

FIGURE GEOMETRIQUE

Un élève n'admet pas facilement qu'un carré est un rectangle particulier ou qu'un losange est un parallélogramme particulier entre autre, ce qui ne l'empêche pourtant pas lors d'une production écrite d'exhiber un cas particulier porteur de trop d'informations visuelles.

Le caractère dynamique du Cabri-dessin peut aider à contrer ces difficultés.
Le Cabri-dessin peut à loisir se modifier et donne une quantité de cas de figures en un temps très rapide.

On pourra ainsi vérifier que les conjectures émises sont ou bien valables pour un grand nombre d'exemples, ou au contraire que ces conjectures n'étaient possibles que parce qu'on avait réalisé un cas particulier. On lève ainsi toute l'ambiguïté des cas particuliers.

Par contre nous pouvons aussi passer du cas général au cas particulier grâce au mouvement; en déplaçant les sommets de notre parallélogramme, nous rencontrerons le rectangle, le losange et le carré.

Tout le travail mené avec Cabri est bien entendu, à caractère expérimental et ne permet que de faire des conjectures.

Les activités qui suivent ont été faites en classe avant l'activité 2 du thème sur la figure géométrique.

Les élèves ont à leur disposition les définitions suivantes institutionnalisées en fin de 6ème ou en début de 5ème:

- Le trapèze est un quadrilatère non croisé avec au moins deux côtés parallèles
- Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
- Le losange est un quadrilatère dont les côtés ont la même longueur.
- Le rectangle est un quadrilatère avec quatre angles droits.
- Le carré est un quadrilatère avec quatre angles droits et tous les côtés de la même longueur.

ACTIVITE 1 : AVEC CABRI

Objectifs

- Émettre des conjectures quant aux propriétés des diagonales des différents quadrilatères.
- Mettre en place des propriétés caractéristiques de ces quadrilatères.

Organisation

Cette activité se déroule en deux phases.

PHASE 1

Travail par alternance ordinateur et papier crayon.

Les élèves, par groupe de deux ou trois font construire par Cabri-géomètre un quadrilatère et ses diagonales.

La consigne est alors la suivante :

> *"En déplaçant les sommets de votre quadrilatère retrouvez le plus de cas particuliers possibles.*
> *Sur une feuille, donnez le nom de chaque cas particulier; expliquez comment vous avez vérifié que vous étiez dans ce cas-là. Emettre une conjecture quant à la propriété des diagonales à ce moment-là."*

PHASE 2

Travail classe entière.
Bilan de tous les quadrilatères particuliers retrouvés.
Synthèse des propriétés caractéristiques à l'aide des diagonales.

Commentaires

La séquence a duré deux heures.
Dans l'ensemble, les productions des groupes ont été très riches et tous les cas particuliers ont été trouvés.
On peut citer un extrait du travail de deux des groupes pour donner un aperçu des productions d'élèves :

" Nous avons trouvé un parallélogramme. Nous avons vérifié en mesurant les angles. Nous avons constaté qu'ils étaient les mêmes quand ils étaient opposés donc c'est un parallélogramme.
Les diagonales se coupent en leur milieu"

"Figure n°1 trapèze.
On peut voir que c'est un trapèze isocèle grâce aux segments LC et OI leur diagonale sont de même longueur mais ne se coupent pas en leur milieu. "

ACTIVITE 2

Objectifs

- Prendre conscience que le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers.
- Caractériser les parallélogrammes à partir des diagonales.
- Réinvestir les propriétés angulaires de la symétrie centrale.

Organisation

Cette activité se déroule en trois phases, les deux premières en salle informatique et la 3ème en classe entière.

PHASE 1

Chaque groupe d'élèves a un programme de construction à faire réaliser par Cabri-géomètre :

"Construire un segment [AB]
I est un point extérieur au segment
le segment symétrique de [AB] par rapport au point I que vous noterez [A'B']
Tracer le quadrilatère ABA'B'.
Quelle semble être sa nature?
Déplacer A et B.
Cette propriété est-elle conservée?
Mettre en oeuvre des procédures de vérification que vous expliquerez sur la feuille de route du groupe.
Justifier la conjecture émise."

Au bout d'une demi-heure une synthèse est faite afin que tous les groupes aient le temps d'effectuer la deuxième consigne :

" Déplacer A et B et essayer d'obtenir le cas particulier du losange.
Après avoir mis une procédure de contrôle personnelle que vous noterez sur votre feuille de route, vous appellerez le professeur.
Vous recommencerez en essayant d'obtenir le cas particulier du rectangle, puis celui du carré."

On écrit le bilan en fin de séance ou au début de la séance suivante :

Un losange est un parallélogramme particulier.
Un rectangle est un parallélogramme particulier.
Un carré est un parallélogramme particulier.

PHASE 2

Les élèves par groupe de 2 ou 3 ont pour tâche de suivre le programme de construction ci-dessous, d'émettre des conjectures, de les contrôler et de les justifier si possible.

" EFR est un triangle quelconque.
H est le symétrique de R par rapport à F.
K est le symétrique de E par rapport à F.
Tracer le quadrilatère REHK.
Quelle est sa nature? Justifier."
"Déplacer les sommets du triangle de façon que EFR devienne rectangle en F.
Quelle est alors la nature du quadrilatère?"

"Déplacer les sommets du triangle de façon que EFR devienne isocèle en F.
Quelle est alors la nature du quadrilatère?"

"Déplacer les sommets du triangle de façon que EFR devienne isocèle-rectangle en F.
Quelle est alors la nature du quadrilatère?"

PHASE 3

Bilan et synthèse du travail ordinateur.
Justification guidée de la 2ème conjecture.

Parallélogramme en particulier !

Présentation

Cette activité s'adresse, essentiellement, à des élèves de 5ème. Elle peut intéresser aussi des élèves de 4ème notamment l'exercice 3 qui peut offrir à ce niveau un prolongement (cf. commentaires). Elle traite le problème d'influence du dessin particulier sur le résultat d'une construction.

Objectifs

A partir d'un réinvestissement des connaissances sur les parallélogrammes, amener les élèves à comprendre que le dessin particulier apporte une ou des informations qui peuvent influencer le résultat d'une construction et fausser parfois un raisonnement déductif.

Organisation

Une à deux séances selon le niveau des élèves.
Pour chaque exercice deux temps de travail.

1ère phase : **Travail individuel** : l'élève cherche à résoudre l'exercice proposé.
2ème phase : **Travail de groupe** : les élèves analysent les travaux des quatre élèves en s'efforçant de répondre aux questions.

1ère PHASE :

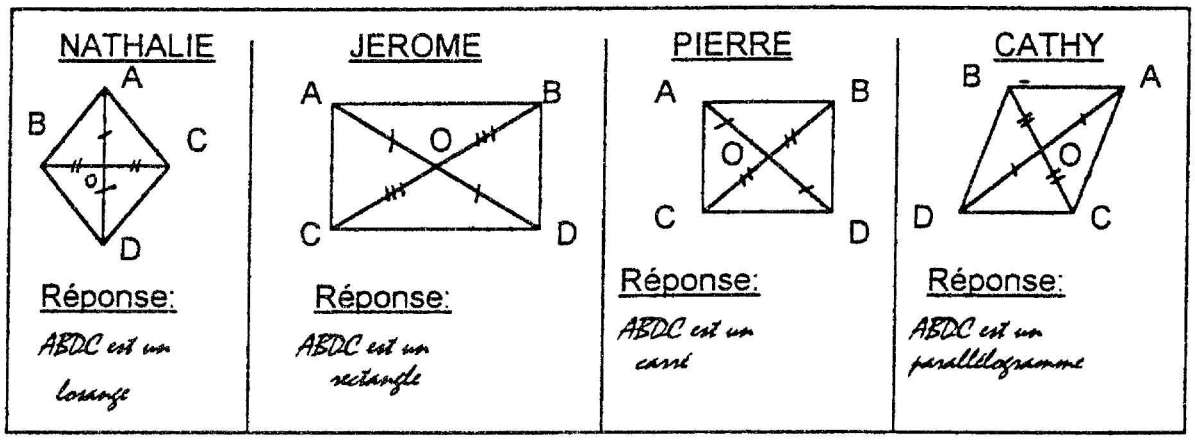
Exercice 1 : Construire un triangle ABC. Le point O est le milieu de [BC]. Construire le point D symétrique de A par rapport à O. Quel quadrilatère obtient-on ?

Exercice 2 : Construire deux segments [AB] et [CD] qui aient le même milieu O. Dessiner le quadrilatère ACBD. Quelle est sa nature ?

Exercice 3 : Tracer un parallélogramme ABCD. I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA]. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

2ème PHASE :

Exercice 1 : Construire un triangle ABC. Le point O est le milieu de [BC]. Construire le point D symétrique de A par rapport à O. Quel quadrilatère obtiens-tu ?



Questions :Voici les réponses de quatre élèves

1) Qui a donné la bonne réponse ?

2) Imaginer les constructions des autres élèves en expliquant pourquoi ils ont obtenu des figures particulières.

3) Coder correctement chaque dessin particulier et reformuler un énoncé de l'exercice afin que ce dessin soit une construction correcte.

Exercice 2 :

NATHALIE	JEROME	PIERRE	CATHY
Réponse : *ACBD est un losange.*	Réponse : *ACBD est un rectangle.*	Réponse : *ACBD est un carré.*	Réponse : *ACBD est un parallélogramme.*

Questions :Voici les réponses des quatres élèves pour l'exercice 2

1) Qui a donné la bonne réponse ?

2) Imaginer les constructions des élèves qui n'ont pas donné la bonne réponse et expliquer leur réponse.

3) Reformuler un énoncé de l'exercice pour que chaque réponse particulière devienne correcte.

Exercice 3 :

NATHALIE	JEROME	PIERRE	CATHY
Réponse : *IJKL est un losange.*	Réponse : *IJKL est un rectangle.*	Réponse : *IJKL est un carré.*	Réponse : *IJKL est un parallélogramme.*

Questions :Voici les réponses des quatres élèves pour l'exercice 3

1) Qui a donné la bonne réponse ?

2) Imaginer les constructions des élèves qui n'ont pas donné la bonne réponse et expliquer leur réponse.

3) Reformuler un énoncé de l'exercice pour que chaque réponse particulière devienne correcte.

Commentaires

- Si des élèves effectuent d'autres dessins particuliers alors il convient naturellement de les ajouter aux travaux à analyser (exemples : quatre points alignés ; quadrilatère croisé).
- L'exercice 3 s'adresse davantage à des élèves de 4ème et peut s'enrichir en changeant dans l'énoncé la donnée parallélogramme par quadrilatère.
- Toutefois, **le raisonnement déductif n'est pas un objectif de l'activité**, il est donc important de rester modeste dans l'exigence des justifications. L'essentiel est que l'élève prenne conscience qu'en ajoutant une donnée à sa construction, il particularise sa figure.

Exemples :

Exercice 1 : *En traçant un triangle isocèle, Nathalie construit un parallélogramme particulier (il possède deux côtés consécutifs de même longueur).*

Exercice 2 : *En traçant deux segments de même longueur, Jérôme construit un parallélogramme particulier (il possède des diagonales de même longueur), etc ...*

Des quadrilatères non croisés et leurs propriétés caractéristiques

Présentation

Voici une liste des propriétés possibles pour un quadrilatère :

P1 : Avoir deux côtés parallèles
P2 : Avoir les côtés opposés parallèles
P3 : Avoir un angle droit
P4 : Avoir deux angles droits
P5 : Avoir quatre angles droits
P6 : Avoir deux côtés opposés de même longueur
P7 : Avoir deux couples de côtés opposés de même longueur
P8 : Avoir deux couples de côtés adjacents de même longueur
P9 : Avoir quatre côtés de même longueur
P10 : Avoir les diagonales perpendiculaires
P11 : Avoir une diagonale passant par le milieu de l'autre
P12 : Avoir les diagonales de même longueur
P13 : Avoir les diagonales ayant le même milieu.

Consigne :

Sur une feuille format A4, non quadrillée, divisée en six cases par face :

1/ Construis un exemple des quadrilatères demandés.

Attention :

Chacun d'eux ne doit posséder que les propriétés demandées (avertissement facultatif).
Pour identifier les propriétés, tu utilises la liste ci-dessous

Quadrilatère n°	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
1						X							
2	X												
3	X		X	X									
4													
5								X		X	X		
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
7			X										
8	X	X	X	X	X	X	X				X	X	X
9	X	X				X	X	X	X	X	X		X
10	X					X						X	
11	X	X				X	X				X		X

2/ A partir de ce tableau, écris des phrases du type :

Quand je sais q'un quadrilatère possède P2 (c'est un exemple)
alors je peux dire qu'il possède P1 et ... et...

Présentation

Cette activité a été donnée en classe de cinquième.

Dans un premier temps, les élèves, lors d'une activité précédente, avaient établi la liste des propriétés donnée dans la fiche ci-jointe et ils ont étudié, en liaison avec le thème de la symétrie centrale, le parallélogramme.

C'est une activité de synthèse sur les quadrilatères, sans utilisation des axes ou centre de symétrie.

Objectifs

. Savoir construire une figure, n'ayant que les propriétés données.
. Savoir énoncer les propriétés sous la forme :
- quand je sais ...
- je peux dire ...

Organisation

Les élèves arrivent avec leur matériel de géométrie et les fiches non quadrillées prêtes (six cases par face)

Cette activité a duré deux séances de 55 minutes dans une classe, 2 séances et demi dans l'autre.

Dans une première phase de 20 minutes environ, travail individuel.

Au bout de ce temps les élèves avaient réalisé 4 ou 5 quadrilatères.

Seconde phase de 10 à 15 minutes, les élèves qui étaient deux par table, vont travailler en binôme.

Ils comparent leurs productions et décident, pour chaque quadrilatère s'il est conforme à la commande ou non.

En cas de désaccord persistant, ils présentent le (ou les) quadrilatères litigieux au tableau pour que la classe puisse intervenir, on se met d'accord sur la consigne importante: pas de propriété supplémentaire.

Suivant le niveau de la classe et les binômes cette phase peut durer 10 à 15 minutes.

Suivant le temps restant les élèves continuent selon le même processus et pour la séance suivante les quadrilatères doivent être construits en travail personnel à la maison.

Dès le début de la seconde séance, travail de comparaison en binôme et vérification des productions puis essai de donner un nom au quadrilatère dessiné.
Le quadrilatère 6 est un carré ...

On arrive à la fin de cette partie à repérer les propriétés qui permettent d'affirmer

Ce quadrilatère est ...

puis on passe à la "question" 2 pour pouvoir dans une autre activité résoudre et rédiger de petits problèmes.

LES CONSTRUCTIONS RAISONNÉES

De la figure au texte

PRESENTATION

De nombreuses activités, à l'école primaire et en 6ème au collège ont permis de développer des apprentissages liés à une **géométrie d'observation** : description, reconnaissance et tracés de figures.

Dans cette séance, les élèves vont être amenés à s'interroger sur **l'articulation entre le texte et la figure** d'un problème de géométrie ; cette liaison entre différents registres de langage sera le fil conducteur des séances suivantes, proposées de façon non suivie au cours de l'année à des **élèves de 5ème**

OBJECTIFS

- Savoir **décoder une figure** et en tirer des informations par simple lecture.

- **Organiser les informations** données par **deux supports de lecture** que sont un texte et une figure qui l'accompagne.

- Développer chez les élèves des **capacités d'analyse critique.**

ORGANISATION

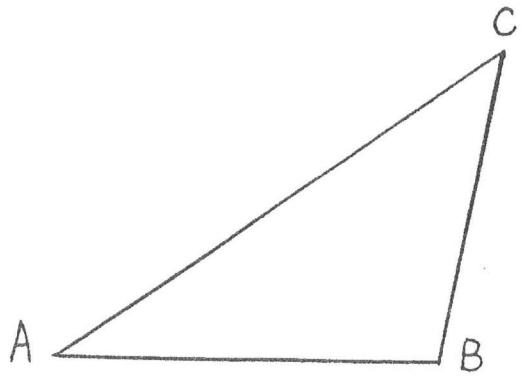
- Matériel : Photocopies - cahiers des élèves - Instruments de géométrie
- Durée : une heure environ
- Déroulement :

A - Une figure et un texte : " Où est l'erreur ?"

Au tableau se trouve l'énoncé d'un problème accompagné d'une figure. Le travail est collectif et essentiellement oral

Énoncé :

Un élève a mesuré les angles du triangle ABC ci-dessous



Il a obtenu les résultats suivants :
$\hat{A} = 35°$ $\hat{B} = 80°$ $\hat{C} = 45°$

Sans utiliser le rapporteur, dis pourquoi une de ces mesures est visiblement fausse.

Un élève lit l'énoncé , la classe observe la figure et tous recherchent s'il y a **cohérence entre le texte et la figure**. De nombreuses réponses apparaissent, certains ont identifié de **façon perceptive** l'angle obtus $\widehat{B}$ et justifient ainsi l'erreur $\widehat{B} = 80°$ proposé dans le texte.

Quelques élèves proposent **d'utiliser l'équerre** du tableau et argumentent sur le fait que $\widehat{B}$ est plus grand que l'angle droit donc $\widehat{B} = 80°$ est faux.

Même en début de la classe de 5ème, il se trouve souvent certains élèves qui **utilisent la propriété** de la somme des mesures des angles d'un triangle pour valider le fait qu'une des trois mesures est fausse puisque $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 160°$

Les diverses discussions autour de la mesure fausse de l'angle B, permettent d'aider certains élèves à mieux comprendre cette **erreur encore fréquente**, même en classe de 5ème, de **mauvaise lecture de mesure d'angle sur un rapporteur.**

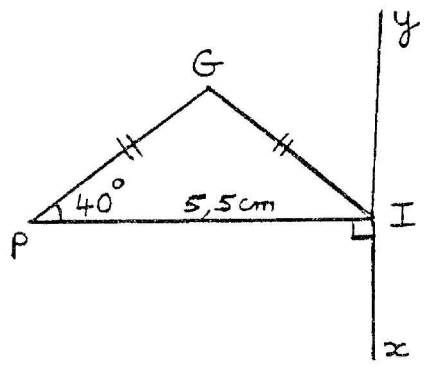
B - Une figure et un texte à compléter

Un énoncé de problème est photocopié pour chaque élève. Des groupes de deux peuvent se former pendant la phase de recherche.

Une figure étant donnée, il s'agit de l'analyser pour compléter le texte associé.

Énoncé :

Complète le tableau associé au dessin de Marion :



Périmètre du triangle PIG égal à 12,5 cm

On peut connaître la mesure de	Résultat	Par quel moyen ?
L'angle $\widehat{PIx}$		
L'angle $\widehat{GIP}$		
La longueur GI		
L'angle $\widehat{GIy}$		

Cette activité permet de mobiliser des informations de différents types :

. celles données par le décodage de la figure
. celles obtenues en utilisant une propriété d'un élément de la figure
. celles trouvées en effectuant un calcul
. celles obtenues en utilisant un instrument de mesurage.

Lors de la phase de communication des résultats, pour la mesure de l'angle $\widehat{GIy}$, l'enseignant peut montrer qu'aucun codage de la figure n'autorise les élèves à penser que les demi-droites [Ix) et [Iy) sont dans le prolongement l'une de l'autre.

En fait, il est fréquent que **l'alignement des points** d'une figure soit **une donnée implicite**, et cela crée des difficultés supplémentaires.
Lorsque certains élèves proposent de mesurer l'angle $\widehat{GIy}$ à l'aide d'un rapporteur, un débat s'établit dans la classe à propos de la figure "en grandeur réelle" et du schéma "à main levée".

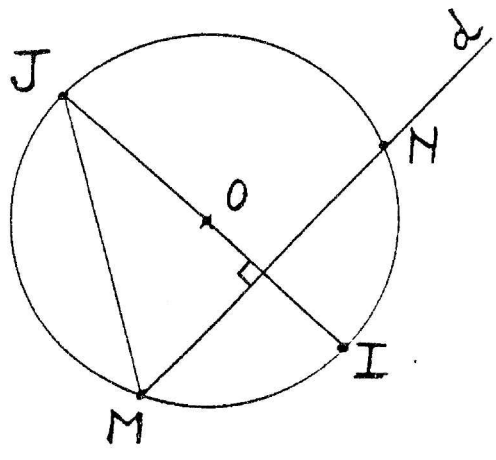
Ainsi, pour la mesure de l'angle $\widehat{GIy}$, on peut obtenir un **résultat approximatif** en mesurant à l'aide d'un instrument. Cependant, il faut convaincre l'élève que, si **mesurer peut être utile pour contrôler un résultat ou pour conjecturer**, cela ne peut pas permettre d'être sûr du résultat annoncé.

C - Une figure et un texte à créer

Cette activité est proposée sur le principe " du **message téléphoné**". L'énoncé du problème est photocopié pour chaque élève. Ce travail peut être terminé à la maison.

Des élèves d'une autre classe récupéreront ces textes, qui leur permettront de réaliser une figure sur leurs cahiers d'exercices, et la comparaison des deux figures montrera qu'**il faut être très précis dans le vocabulaire choisi** pour élaborer un programme de construction permettant de reproduire une figure donnée.

Énoncé :



*Rédige un texte permettant de **construire cette figure**, sans avoir eu la possibilité de la voir.*

JO = 4 cm
JM = 7 cm

Parallèlement la même activité, avec une figure différente, se fera entre les deux classes, dans le sens inverse.

As-tu ton décodeur ?

PRESENTATION

En classe de 6ème, de nombreuses activités de description, reconnaissance et tracés de figures ont été réalisées, en utilisant différents **codages** et en émettant diverses **conjectures.**

En classe de 5ème, les élèves apprennent à **mieux utiliser les apports d'une figure** dans la présentation des informations, **dans la construction d'un raisonnement**, en exploitant les différents rôles d'un dessin.

Dans cette séquence, vont être proposés aux élèves, **des problèmes de construction** de nature très différente : les premiers seront des **reproductions "en vraie grandeur"**de figures données, les suivants nécessiteront un **raisonnement** à partir **d'un "schéma à main levée", en supposant le problème résolu.**

OBJECTIFS

Apprendre à analyser, organiser et enchaîner des informations :
. Informations données par l'énoncé ou par le codage de la figure.
. Informations repérées en analysant la figure en sous-figures.
. Informations induites par la connaissance de telle ou telle configuration.
. Informations déduites de l'utilisation de définitions ou de théorèmes.

Développer des compétences permettant aux élèves **d'accéder à une géométrie de traitement des informations**

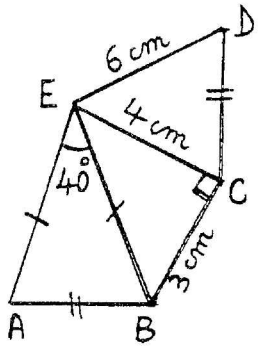
ORGANISATION

- Matériel : Photocopies - cahiers d'élèves - Instruments de géométrie.
- Durée : Deux heures (ou plus selon le niveau et les expériences antérieures des élèves)
- Déroulement

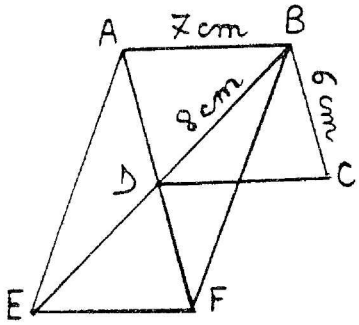
A - Figure ---> Figure

Des photocopies sont distribuées individuellement aux élèves.
Les figures à reproduire seront réalisées sur leurs cahiers d'exercices

Enoncé : ***Reproduis les figures ci-dessous, en respectant les données***

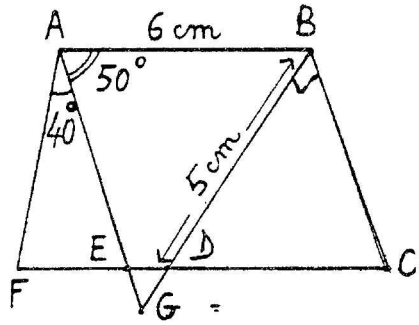


a



- ABCD et ABFE sont des parallélogrammes
- ABFE a pour centre D

b



- Le triangle AGB isocèle en G
- (AB)//(FC)
- Les points F,E, D, C sont alignés.

c

Ces figures ont été choisies selon des objectifs précis :

Figure a : Il n'est pas nécessaire d'utiliser des connaissances autres que celles données par la figure, ce qui importe dans ce programme de construction, c'est l'**ordre des différentes tâches à exécuter.**

Figure b : La construction est réalisable, **en utilisant les propriétés liées** aux côtés opposés et aux diagonales d'un parallélogramme.

Figure c : Ce problème de construction, pour lequel il faut reproduire la figure donnée en respectant les informations proposées, **nécessite**, soit **l'utilisation de la définition** d'un triangle isocèle **et des propriétés** liées aux angles alternes-internes ; soit d'autres connaissances, mais ne provenant pas uniquement des informations directes données par la figure ou le texte associé

Gestion de la classe :

Après un **temps de recherche individuel,** plusieurs élèves viennent à tour de rôle faire la construction au tableau (échelle 10).

L'enseignant instaure dans un premier temps, un **travail d'analyse de la tâche** ; les élèves **interviennent à l'oral, collectivement,** avant le démarrage de la construction au tableau. Les questions débattues sont par exemple : "Ce qu'il me faut faire? Ce que je sais ? Ce que je ne connais pas ? Dois-je commencer par un endroit particulier ? Puis-je commencer par n'importe quel côté de la figure ? Comment puis-je avoir cette information ?

Le rétroprojecteur peut être très utile, en superposant différents transparents. **Les corrections** sont faites au tableau et **les programmes de construction élaborés collectivement.** Chaque élève note à côté de sa figure construite, l'algorithme de construction qui lui a permis de mener à bien la tâche demandée, et précise bien **l'ordre des instructions.**

B - Texte ---> Figure

Deux (ou trois) problèmes de construction vont être proposés pendant cette activité. Les élèves sont **par groupe de deux - Les énoncés** des exercices seront **écrits au tableau.**

Quand la construction demandée ne peut pas se faire sans tâtonner, **il est indispensable de faire un schéma à main levée et coder au fur et à mesure les informations données par l'énoncé,** en faisant en sorte de **supposer le problème résolu.**

Donc après le schéma muni de toutes les informations, vient le **temps du raisonnement à partir de ce schéma,** qui permet de trouver d'autres informations encore, qui rendront enfin réalisable la construction demandée. En fait, l'élève crée ainsi une étape intermédiaire, où **le croquis devient un lieu d'étude,** un support de raisonnement. A ce stade là, **on revient à l'activité A :** Figure ----> Figure

Lorsque le schéma codé permet d'avoir toutes les informations, l'élève **émet certaines conjectures** et il doit **apprendre à justifier** sa production de tracés par une **argumentation.**

Énoncé 1 :

- Construis un parallélogramme ABCD tel que $\widehat{BAC} = 69°$ - $\widehat{DAC} = 42°$ et AC = 6 cm.
- Sur quelles connaissances t'appuies-tu pour obtenir des données supplémentaires, nécessaires à la construction demandée ?
- Fais une conjecture à propos du triangle ABC. Cette conjecture peut-elle être prouvée ?

Certains élèves restent bloqués au stade du schéma à main levée, même lorsqu'il est muni de toutes les informations, ils ne savent pas "quoi en faire", "par quel bout le prendre".

L'activité peut être modifiée en proposant des aides pour guider la construction.

Ce guidage, sous forme d'instructions, est photocopié, posé sur le bureau de l'enseignant, et l'élève qui se sent en difficulté, peut venir chercher ces aides.

En voici un exemple :

a) *Tu as réalisé **un schéma à main levée**, sur lequel tu as **codé toutes les informations données dans l'énoncé.***

b) *Compare la mesure des angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACB}$.*

c) *Construis le triangle ACB.*

d) *Tu peux maintenant construire le parallélogramme ABCD.*

e) *Réponds à la question posée, en justifiant ta conjecture.*

Énoncé 1bis :

- Construis un parallélogramme EFGH tel que $\widehat{FEG}$ = 49° , $\widehat{HEG}$ = 42° et EG = 6 cm.
- Sur quelles connaissances t'appuies-tu pour obtenir des données supplémentaires, nécessaires à la construction demandée ?
- Fais une conjecture à propos du triangle EFG. Cette conjecture est-elle toujours vraie ?

Cet énoncé 1bis est proposé aux groupes d'élèves plus rapides.
La particularité de ce nouvel énoncé, qui ressemble beaucoup au précédent, est **de présenter une perception visuelle forte qui induit une conjecture fausse, qui sera donc mise en défaut par le raisonnement.**

Dans l'énoncé 1, l'élève «voit» un triangle ABC isocèle et peut le prouver, alors que dans l'énoncé 1bis, l'élève «voit» un triangle EFG rectangle mais il arrive, grâce à la propriété de la somme des mesures d'angles d'un triangle, à établir que l'angle $\widehat{EFG}$ mesure 89°.

La recherche de ce problème permet de montrer aux élèves que **la vision sur une figure géométrique peut induire en erreur** et qu'il faut donc apprendre à s'en méfier.

Énoncé 2 :

- Trace un triangle quelconque ABC. marque un point O sur le côté [AC]. Trace la parallèle à la droite (BC) passant par O, cette parallèle coupe le coté [AB] en un point M. Trace une parallèle à la droite (AB) passant par le point O, cette nouvelle parallèle coupe le côté [CB] en un point P.

- Comment faut-il placer le point O sur le côté [AC] pour que les mesures de longueur AO et MB soient égales ?

Ce problème est un problème de recherche. Il peut être proposé en fin de classe de 5ème ou en 4ème selon **la méthode de narration de recherche**.

Tout comme les précédents problèmes de construction, il peut être proposé aux élèves après l'étape du schéma, un guidage pour **conjecturer sur la construction demandée.**

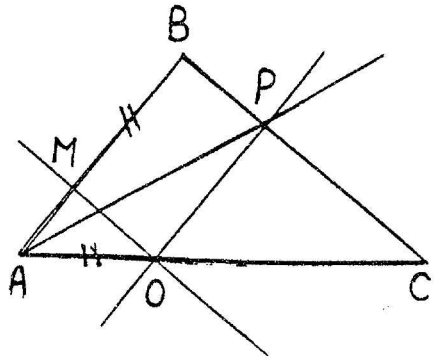
<u>En voici un exemple</u> :

a) *Tu as réalisé* ***un schéma à main levée, et codé sur cette figure toutes les données*** *de l'énoncé.*

b) *Quelle est la nature du quadrilatère PBMO ? Compare les mesures de longueur BM et PO. Compare aussi les mesures des angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{APO}$.*

c) *En supposant le problème résolu, compare alors les mesures de longueur PO et OA. Peux-tu alors en déduire la nature du triangle AOP ? Compare les mesures des angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{PAO}$.*

d) ***En utilisant toutes ces informations que tu as codées au fur et à mesure sur ta figure,*** *compare les mesures des angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{PAO}$, en déduire la nature de la demi-droite [AP).*



e) Tu peux enfin déterminer la position du point O cherché.

Il est possible de donner autrement ces instructions aux élèves. Les informations peuvent ne pas être utilisées ainsi : ni ensemble, ni en totalité, car cela dépend des activités antérieures de mise en place de raisonnements, qui ont déjà été réalisées avec les élèves.

Par ailleurs, ce travail peut-être proposé en activité de **narration de recherche** et, le problème commencé en classe, pourra être développé et rédigé à la maison.

<u>Enoncé 3</u>

- Construis un triangle ABC connaissant :
. la mesure de deux angles : $\widehat{ABC} = 40°$ et $\widehat{ACB} = 110°$
. le périmètre du triangle ABC : P = 15 cm

Ce problème est un **problème de recherche**. Il peut être proposé en fin de classe de 5ème ou en 4ème selon la méthode de **narration de recherche**.

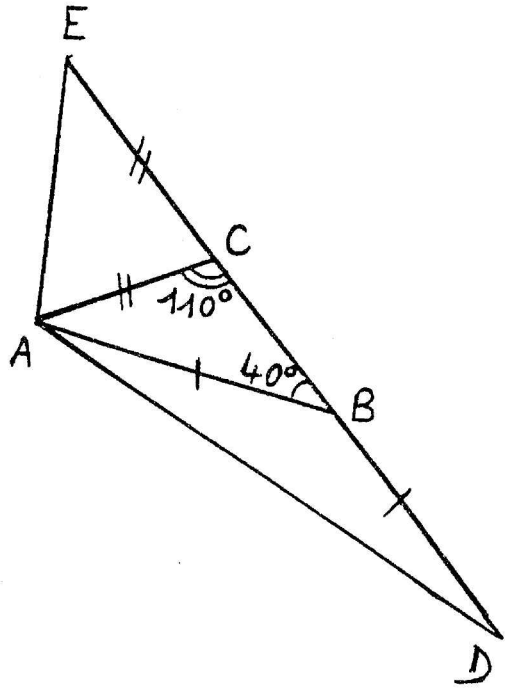
Tout comme les précédents problèmes de construction, il peut être proposé aux élèves après l'étape du schéma, un guidage pour **conjecturer sur la construction demandée.**

<u>En voici un exemple</u> :

a) *Réalise un schéma à main levée et code sur celui-ci toutes les informations données dans l'énoncé.*

b) *Trace un point D tel que les points D, B, C soient alignés dans cet ordre et DB = BA.*
c) *Trace un point E tel que les points B, C, E soient alignés dans cet ordre et CE = AC. Construis alors le triangle DAE.*

d) *Quelles informations peux-tu déduire de cette figure :*
. nature des triangles DBA et ACE ;
. mesure des angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{AEC}$ - mesure de longueur DE ?



TITRE
ACTIVITES POUR LE CYCLE CENTRAL : DES NOMBRES ET DES LETTRES – DE L'OBSERVATION AU RAISONNEMENT.

AUTEURS
Marie-Claire COMBES - Liliane DRAY – Pierrette FERRIERE – Martine LEWILLION – Richard MARGUERIT – Sylvie PELLEQUER – Jean Marc RAVIER – Mireille SAUTER avec la collaboration de Daniel BOUTTE et Thierry MURGIER.

EDITEUR
IREM de Montpellier

MOTS CLES
Démonstration – Calcul littéral – Activités – Cycle central – Collège.

RESUME

Ce document réalisé à partir d'une réflexion sur les nouveaux programmes du cycle central, concerne des activités sur les notions qui nous ont paru essentielles dans les programmes de 1997.

Le choix des auteurs s'est porté sur deux thèmes, "démonstration" et "calcul littéral" qui sont des thèmes transversaux des programmes.

Chacune des activités proposées a été utilisée en classe par les enseignants qui ont rédigé ce document. Pour chacune d'entre elles, sont mentionnés les objectifs qu'elle vise, le détail de son organisation dans une classe et ses prolongements possibles.

NOMBRE DE PAGES
112 pages

N° ISBN
2-909916-36-7