INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

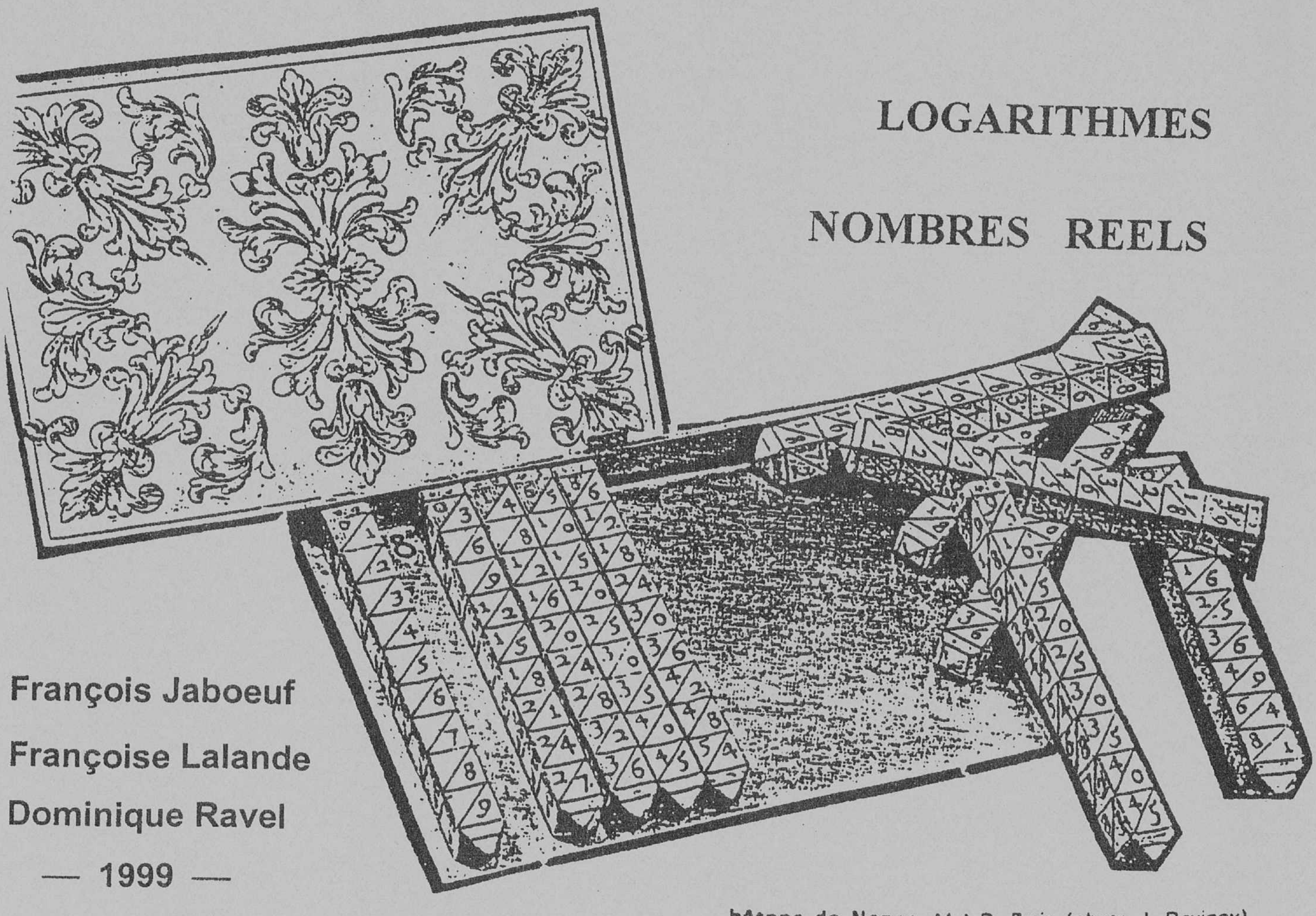
I.R.E.M. de Montpellier

HISTOIRES

DE CONSTRUCTIONS ...

LOGARITHMES

NOMBRES REELS



bâtons de Neper M.A.D. Paris (photo J. Devinoy)

François Jaboeuf

Françoise Lalande

Dominique Ravel

— 1999 —

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
Université Montpellier II
cc 040
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 02
☎ 04.67.14.33.83/84
fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http://www.univ-montp2.fr/~irem

HISTOIRES DE CONSTRUCTIONS

LOGARITHMES - NOMBRES REELS

JABOEUF François
LALANDE Françoise
RAVEL Dominique

- SEPTEMBRE 1999 -

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Nous avons décidé pour cette brochure, de privilégier deux sujets, les **logarithmes** et les **nombres réels**, et de rendre compte de leur **invention** pour les uns et de leurs **diverses constructions** pour les autres, en rappelant les conditions historiques de leurs apparitions. Les **logarithmes** et les **nombres réels** sont en effet des notions mathématiques, largement utilisées par les élèves du secondaire et les étudiants des classes préparatoires et du premier cycle universitaire, sur lesquelles on les éclaire très peu.

La fonction **logarithme** est actuellement introduite comme primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction homographique $x \mapsto \frac{1}{x}$, et le fait qu'elle réalise un isomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$ n'apparaît plus que comme une propriété périphérique, alors qu'elle en est en fait le fondement au début du XVII^e siècle.

Quand aux **nombres réels**, que l'on manipule dans l'enseignement avec parfois les difficultés que l'on sait, comme si cela allait de soi, comme si de toute éternité ils faisaient partie du bagage mathématique, peut-être est-il bon de rappeler que leur construction ne date que de la fin du XIX^e siècle. Il s'agissait alors de se défaire du support de la géométrie euclidienne comme de celui du temps et de la cinématique qui prévalaient jusqu'alors dans les raisonnements de l'Analyse; en effet certaines démonstrations (par exemple celles du "théorème des valeurs intermédiaires" au début du XIX^e siècle) n'étaient essentiellement validées que par des raisonnements géométriques. Il est d'ailleurs intéressant, à ce sujet, de remarquer le rôle joué dans la création des **logarithmes** par le mouvement d'un mobile sur une droite, inventé de toutes pièces pour les besoins de la cause, "virtuel" dirait-on maintenant. Notons encore, avec l'émergence des **logarithmes**, celle de la notion de **continuité**, dont seule une construction précise et rigoureuse des **nombres réels** permettra de tirer la "substantifique moelle".

Cette brochure a été réalisée (en partie) grâce au soutien de la DESCO (ex. DLC), dans le cadre d'une convention pour les années 1995-1996 et 1996-1997.

F. JABOEUF

F. LALANDE

D. RAVEL

MULTIPLIER OU ADDITIONNER ? INVENTION DES LOGARITHMES

Certes, il est plus facile de multiplier 674 par 15 que de l 'additionner avec lui-même quatorze fois de suite, mais, sur l'île déserte, privés de notre calculatrice, laquelle des deux opérations ci-dessous préférerions-nous effectuer:

$$\begin{array}{r}
5973 \\
\times \quad 487 \\
\hline
41811 \\
47784. \\
23892.\,. \\
\hline
2908851
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r}
5973 \\
+ \quad 487 \\
\hline
6460
\end{array}$$

la multiplication ou l'addition ?

Comme dit la chanson : « Sauf les masos, ça va de soi ». Et cela va encore de soi, si nous avons à choisir entre les deux calculs suivants :

$$\begin{array}{r}
1247{,}2 \\
\times \quad 950{,}1 \\
\hline
12472 \\
62360.\,. \\
112248.\,.\,. \\
1184964{,}72 \\
\times \quad 353{,}2 \\
\hline
236992944 \\
355489416. \\
592482360.\,. \\
355489416.\,.\,. \\
\hline
418529539{,}104
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3{,}095936102 \\
+\ 2{,}977769318 \\
+\ 2{,}548020695 \\
\hline
8{,}621726115
\end{array}$$

ou encore entre ceux-ci :

$$368^5 \quad \text{ou} \quad 5 \times 2{,}565847819$$

Dans les deux derniers exemples, le lecteur averti aura pressenti avec raison que les nombres de droite sont les logarithmes décimaux à neuf décimales des facteurs qui interviennent à gauche.

Ce qui est sûr, c'est que nous sommes déjà en passe d'oublier complètement que du XVII^{e} siècle jusqu'à très récemment (la grande généralisation des calculatrices de poche a lieu vers 1970), le seul moyen de mener un calcul numérique un tant soit peu compliqué était l'usage d'une table de logarithmes, ou en première approximation d'une « règle à calculs », graduée suivant une échelle logarithmique. Tout T.P. de physique se faisait règle à calculs en main.

Or, si la science correspond à une certaine intelligibilité de la vie, elle n'est pas indépendante des instruments de mesure existants, ni des techniques de calcul, qui font partie de notre outillage mental. De quelle utilité seraient des mesures extrêmement précises, si les moyens de calculer ne suivaient pas, et réciproquement quels besoins aurait-on de calculer avec des techniques sophistiquées, s'il n'y avait que des nombres très modestes à manier ? Songeons seulement que l'usage des chiffres dits arabes n'est pas encore généralisé à la Renaissance dans le monde occidental, mais qu'il est également bien difficile de mesurer l'écoulement du temps de façon précise. On n'a longtemps connu que les sabliers et les clepsydres. Si on place au XII^{e} siècle l'apparition des horloges, il faut attendre la fin du XVII^{e} siècle pour qu'apparaissent des montres fiables, c'est à dire qui n'aient qu'une variation très faible malgré les mouvements et les déplacements (Huygens inventa le régulateur à ressort spiral en 1674) et le XVIII^{e} siècle pour les montres marines précises, garde-temps permettant de conserver l'heure du point d'origine et de déterminer la longitude d'un navire.

Un premier grand progrès en calcul: la numération décimale de position, avec zéro.

Il nous suffit d'évoquer le système de numération des Romains, et leurs chiffres, pour nous convaincre que leurs outils manquaient de souplesse et ne devaient pas favoriser les activités numériques: essayez donc de diviser MDCXXII par VI ! La notation grecque n'était déjà pas bien commode, mais c'est malheureusement l'utilisation de la numération romaine qui reste pour longtemps celle de l'Occident, bien après la fin de l'empire du même nom.

Pendant la période médiévale, au moins jusqu'à la fin du X^{e} siècle, il faut recourir à des abaques, tablettes sur lesquelles on manipule des cailloux et des lettres conventionnelles, ou à des échiquiers (dont a tiré son nom l'administration financière de Grande -Bretagne !) sur les cases desquelles on effectue les comptes au moyen de jetons. Quant à l'abaque sino-japonais, le boulier-compteur, introduit en Russie par les Mongols, remarquons au passage qu'il n'arrive en France qu'en 1812 (à mettre donc à l'actif de la campagne de Russie napoléonienne !).

C'est essentiellement à partir de la fin du X^{e} siècle, que parviennent en Occident les connaissances des Arabes, l'essor de leur pensée et de leur science culminant au XI^{e} siècle. Sans entrer dans les détails de ce qu'ils doivent aux Grecs et aux Indiens et de ce qui est leur apport personnel, ni dans la description des voies détournées ou directes qu'a emprunté la transmission des savoirs, sachons que le monde occidental leur est redevable de la bonne numération décimale de position munie du zéro, qui va chasser les nombres romains. L'abaque évolue et se simplifie donc : il devient un tableau à colonnes parallèles, la première à droite étant réservée aux unités, la suivante aux dizaines, etc..., les signes inscrits prenant donc une valeur de position. Pour désigner un nombre, on n'inscrit dans chaque colonne qu'un seul signe tout au plus, l'un des neuf nouveaux caractères (les chiffres arabes) désignant les neuf premiers nombres. Puis c'est la suppression des colonnes par l'emploi du zéro, qui fait passer de l'abaque proprement dit à l'algorithme, c'est à dire, dans l'acception primitive du mot, au véritable système de position. (Le mot algorithme a pris maintenant une signification plus large. Primitivement, c'est la déformation latinisée du nom d'Al-Khwârizmî, savant du VIII^{e} siècle.)

Les besoins et les progrès du calcul numérique au XVI^{e} siècle.

Certes la numération arabe avait rendu la pratique du calcul bien plus facile, mais dès que les difficultés d'une époque sont réduites, il en apparaît d'autres réclamant des procédés plus expéditifs. Le processus technique et scientifique fait apparaître de nouveaux besoins.

On peut commencer par citer les recherches internes aux mathématiques elles -mêmes. Il est alors important de rappeler que c'est en 1450 qu'est fondé l'atelier d'imprimerie de Gütemberg à Mayence. C'est le début d'une ère de plus grande circulation des travaux scientifiques et de diffusion des traductions en latin des textes grecs originaux (qui peuvent eux même contribuer à relancer les sciences). Une avancée importante concerne les équations algébriques : c'est en 1535 que, lors d'un tournoi mathématique, Tartaglia trouve une solution à l'équation du troisième degré $x^3 + px = q$, et c'est en 1545 que Cardan publie son « Ars magna » sur l'équation du troisième degré.

« La Disme », le célèbre ouvrage de Simon Stevin, parait en 1585. Stevin y introduit une écriture décimale qui lui permet de se libérer de la manipulation des fractions. Au lieu d'écrire $43\frac{21}{100}$ ou encore $43\frac{2}{10}\frac{1}{10}$ (ce que nous notons 43,21 ou 43.21 de nos jours), Stevin l'écrit désormais 43(0)2(1)1(2) ou encore $4\overset{(0)}{3}\overset{(1)}{2}\overset{(2)}{1}$. On peut alors disposer et effectuer les multiplications, comme nous le faisons « à la main » encore aujourd'hui, si d'aventure notre calculatrice nous fait défaut. Voici comment sur un exemple :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & {\scriptstyle (2)} \\
 & & 3 & 2 & 5 & 1 \\
 & \times & & 1 & 7 & 2 \\
\hline
 & & 6 & 5 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 7 & 5 & 7 & . \\
3 & 2 & 5 & 1 & . & . \\
\hline
5 & 5 & 9 & 1 & 7 & 2 \\
 & {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & {\scriptstyle (2)} & {\scriptstyle (3)} & {\scriptstyle (4)}
\end{array}
$$

Signalons encore que c'est au mathématicien Viète en 1591 que nous devons l'introduction de l'usage des lettres pour représenter les valeurs numériques, pour les inconnues comme pour les données.

Le XVI^{e} siècle est également un siècle de progrès en astronomie. C'est en 1543 que Copernic publie « De Revolutionibus orbium celestium ». En 1574 Tycho Brahé s'installe à l'observatoire d'Uranienbourg. Il y reste une vingtaine d'années et y fait un nombre considérable d'observations astronomiques qui serviront à Prague à son aide, puis successeur, Kepler.

La navigation, les voyages lointains, sont indirectement un moteur important de la recherche dans la simplification des calculs. En 1492 Christophe Colomb avait atteint l'Amérique avec à son bord la table de sinus de minute en minute établie par Regiomontamus en 1472. Les flottes commerciales constituent des sources d'enrichissement. Gouvernants et armateurs encouragent la science nautique: il faut limiter les pertes et donc naviguer en contrôlant les positions. Mercator publie en 1569, dans la projection qui porte son nom, la première grande carte du monde à l'usage des navigateurs. Les progrès de la navigation sont évidemment inséparables de ceux de l'astronomie, en tout cas de l'astronomie nautique, grande utilisatrice de trigonométrie, et donc de tables de trigonométrie, dont les auteurs ne viennent à bout qu'avec beaucoup de mal et de temps. Les calculs « astronomiques » sont fastidieux et demandent des armées de calculateurs. L'astronome allemand Rheticus, disciple et ami de Copernic, aidé de nombreux calculateurs se consacre de 1542 à 1576 au calcul de la table des sinus, de 10'' en 10'', avec dix, puis quinze décimales, publiée en 1596. Magini, professeur d'astronomie à l'Université de Bologne, suggère très prosaïquement le gain non méprisable que l'on pourrait réaliser en réduisant les calculs, et avec eux les frais d'entretien des calculateurs.

C'est dans cet esprit qu'il publie en 1592 des tables qui donnent les carrés des nombres entiers de 1 à 11000, qui permettent donc par simple lecture l'extraction des racines carrées. Par exemple, de la donnée $42\,994\,249 = (6557)^2$, on tire $\sqrt{43} = 6{,}557$, résultat plus exact, se flatte

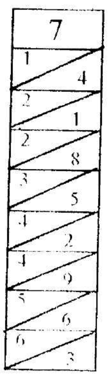
Magini, que celui donné par la règle $\sqrt{x^2+a} = x + \dfrac{a}{2x}$, qui appliquée à 43 donne $\sqrt{43} = \sqrt{36+7} = 6 + \dfrac{7}{12} = 6{,}583$. (Au lecteur de vérifier à la calculatrice -).

Kepler, grand consommateur de calculs, est le créateur de la multiplication réduite : il faut maintenir la correspondance entre nombres calculés et nombres provenant des mesures effectives. Il est donc inutile d'obtenir à l'arrivée plus de décimales que l'on en avait au départ. Soit donc à calculer, par exemple, le produit de deux sinus 0,4062051 par 0,1163818. Kepler dispose ainsi le calcul :

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 & 5 & 1 & & \\
\times & 1 & 1 & 6 & 3 & 8 & 1 & 8 & & \\
\hline
 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 & 5 & 1 & & (4\ 0\ 6\ 2\ 0\ 5\ 1 \times 1) \\
 & & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 & 5 & & (4\ 0\ 6\ 2\ 0\ 5\ 1 \times 0{,}1) \\
 & & 2 & 4 & 3 & 7 & 2 & 3 & & (4\ 0\ 6\ 2\ 0\ 5\ 1 \times 0{,}06) \\
 & & & 1 & 2 & 1 & 8 & 6 & & \\
 & & & & 3 & 2 & 5 & 0 & & \text{etc} \\
 & & & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & & & 3 & 2 & & \\
\hline
 & 4 & 7 & 2 & 7 & 4 & 8 & 7 & &
\end{array}
$$

D'où le résultat 0,4727487

Parmi les très nombreuses tentatives de méthodes rendant compte de l'ampleur des efforts déployés pour réduire les calculs, citons les « bâtons ou réglettes de Neper » : ce sont les éléments mobiles d'une table de multiplication, combinables entre eux et transformant une multiplication en additions. Voici par exemple, une réglette de Neper portant les multiples de 7 :



$(7\times2) = 14$

$(7\times5) = 35$

Soit donc à calculer 768×52. On juxtapose les réglettes portant les multiples de 7, les multiples de 6 et les multiples de 8.

	7	6	8	
ligne des multiples de 2	1/4	1/2	1/6	$768 \times 2 = 1536$ (← (1)(4+1)(2+1)(6))
ligne des multiples de 5	3/5	3/0	4/0	$768 \times 5 = 3840$ (← (3)(5+3)(0+4)(0))
	....	....	....	
	....	....	....	

Reste à sommer les produits partiels :

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 3\ 6 \\ 3\ 8\ 4\ 0 \\ \hline 3\ 9\ 9\ 3\ 6 \end{array}$$

d'où le résultat $768 \times 52 = 39\,936$

Il existe aussi des tables de multiplication donnant tous les produits d'entiers $n \times m$ ($1 \leq n \leq 999$, $1 \leq m \leq 999$) destinées aux astronomes et permettant de remplacer une multiplication par une addition de produits partiels.

Tycho Brahé connaît et utilise une règle qui, elle aussi, permet de remplacer un produit par une somme : c'est la prostaphérèse qui correspond à notre formule de trigonométrie :

$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

Il n'est pas possible de citer toutes les recettes de calcul et toutes les tentatives pour les alléger qui fleurissent dans la seconde moitié du XVI^{e} siècle et au tout début du XVII^{e} siècle. Mais, pour tous ceux qui ont besoin de calculer, quel soulagement ce serait de pouvoir remplacer toute multiplication, quelle qu'elle soit, par une addition, sans même parler des divisions et des extractions de racines carrées dont les dispositifs ne sont pas des plus simples...

Les logarithmes :

Les logarithmes sont inventés pendant la même période par Neper et Bürgi. Ils les construisent de façon suffisamment différente pour que l'on puisse affirmer qu'ils ont travaillé indépendamment l'un de l'autre. Il est probable que Bürgi a calculé ses tables à Prague entre 1603 et 1611. On sait de source sûre que les travaux de l'Ecossais Neper étaient commencés dès 1592.

Dans les deux cas les logarithmes transforment la multiplication en addition et la division en soustraction : $\log xy = \log x + \log y$, $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

L'établissement des tables de logarithmes est laborieux, mais les lourds calculs qu'il nécessite sont faits une fois pour toutes et les tables sont mises à la disposition des calculateurs.

Soit à calculer le produit xy. On cherche dans la table le nombre α qui est le logarithme de x, le nombre β qui est le logarithme de y. On calcule le nombre $\alpha+\beta$. Puis par lecture réciproque de la table on cherche le nombre $z = xy$ dont le logarithme est égal à $\gamma = \alpha+\beta$.

Nombres		Logarithmes
x	→	α
y	→	β
$z = xy$	←	$\gamma = \alpha+\beta$

De quoi disposaient les inventeurs de logarithmes

La propriété fondamentale qui pouvait inspirer les inventeurs résultait seulement de la juxtaposition d'une progression géométrique et d'une progression arithmétique.

Cette juxtaposition avait déjà attiré l'attention d'Archimède (-287,-212). En donnant dans son traité de « l'Arénaire » un procédé commode pour représenter les très grands nombres, il a corrélé la suite arithmétique des entiers avec la suite géométrique des puissances de 10 (exprimé par $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ dans nos notations actuelles).

Nicolas Chuquet, médecin lyonnais, est un précurseur. A la fin du XV^e siècle, en 1484, il a écrit le « Triparty en la science des nombres », ouvrage d'arithmétique où il introduit, entre autres, des exposants négatifs ou nuls, et ce que l'on peut transcrire en $x^n \times x^m = x^{n+m}$. Chuquet entrevoit, sans lui trouver de forme utilisable, que cette relation pourrait permettre une solution correcte au problème dit du « tonneau » :

« Un tonneau se vide chaque jour du dixième de son contenu ; au bout de combien de temps sera-t-il à moitié vide ? »

au bout de 6 jours, il reste $(0,9)^6 = 0,531441$ du volume initial

au bout de 7 jours, il reste $(0,9)^7 = 0,478297$ du volume initial

La solution qui consiste à trouver 6 jours $+\dfrac{0{,}531441 - 0{,}5}{0{,}531441 - 0{,}47897}$, soit 6 jours $\dfrac{314410}{531441}$ par interpolation linéaire, ne le satisfait pas. Mais pour résoudre le problème, il lui aurait fallu inaugurer le calcul logarithmique (et le calcul infinitésimal).

Si on ne connait pas l'influence réelle de Chuquet, on sait que Neper et Bürgi connaissaient l'un et l'autre l'oeuvre de l'Allemand Michael Stiefel (Bürgi reproduit des passages de Stiefel dans ses tables). Stiefel a publié en 1544 son « Arithmetica integra », où il est le premier à étendre aux exposants négatifs la correspondance entre suite arithmétique et géométrique, en considérant les progressions particulières suivantes :

....	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	....
....	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	....

c'est à dire, qu'à (-1) + (-2), correspond $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Les logarithmes de Bürgi

Jost Bürgi (1552-1632) est un Suisse Allemand qui doit sa réputation à ses travaux d'horlogerie, à ses horloges astronomiques et à ses sphères célestes dont quelques unes fonctionnent encore de nos jours. Après avoir reçu la charge d'horloger impérial à Prague, il travailla à l'observatoire avec Tycho Brahé, lui aussi accueilli à Prague, puis après la mort de celui-ci en 1601, avec son aide et élève Johann Kepler qui lui succéda comme astronome de l'empereur.

Les tables de logarithmes de Bürgi sont publiées en 1620 sous le titre « Arithmetische und geometrische Progress Tabulen ». Dans ses tables, Bürgi juxtapose une progression arithmétique de « nombres rouges » avec une progression géométrique de « nombres noirs », de raison $(1+10^{-4})$, disposés en colonnes :

« nombres rouges »	« nombres noirs »
10n	$10^8(1+10^{-4})^n$

Pour n variant de 1 à 23027, ses nombres noirs couvrent alors l'intervalle $[10^8, 10^9]$. Bürgi donne le mode d'emploi de ses tables, mais ne donne pas d'indication sur leur confection.

Publiés après ceux de Neper, sans précision sur leur construction, sans théorisation et d'une portée plus restreinte, les logarithmes de Bürgi ne sont pas ceux qui passent à la postérité.

Les logarithmes de Neper

John Napier (1551-1617), dont le nom a été latinisé en Neperus et francisé en Neper, est Ecossais, sieur de Merchiston, près d'Edimbourg. Après des études à l'Université écossaise de Saint-Andrews, puis des voyages sur le continent, il consacre aux mathématiques les loisirs que lui laisse la gestion des terres de son fief.

En 1614, il publie le « Mirifici logarithmorum canonis descriptio... », dont la préface est on ne peut plus explicite :

> *« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée, que les multiplications, les divisions et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. A la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux ou par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ? Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens... »*

Pour obtenir ses logarithmes, Neper construit ses progressions d'une façon bien différente de la nôtre, et ses logarithmes se trouvent être décroissants. Remarquons également que pour éviter la manipulation des parties décimales, Neper fait varier le sinus non pas de 0 à 1, mais de 0 à 10^7.

Pour définir ses logarithmes, Neper met en correspondance deux mouvements rectilignes : *« Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps et, au commencement, avec la même vitesse. »*.

Soit donc une demi-droite d'origine N_0 et un segment $S_0\Omega$ de longueur le sinus total, à savoir $\sin 90° = 10^7$

Deux mobiles N et S partent respectivement de N_0 et S_0 à l'instant initial $t_0 = 0$, avec la même vitesse initiale $v_0 = 10^7$.

La vitesse de N est constante et égale à $v_0 = 10^7$.

La vitesse de S est décroissante et telle que son rapport à la distance qui reste à parcourir pour atteindre Ω est constant, c'est à dire, qu'à l'instant t, on a : $\frac{v}{x} = \frac{v_0}{S_0\Omega} = 1$, soit encore $v = x = S\Omega$.

Au bout du temps $\Delta t = 10^{-7}$, le mobile S est en S_1, tel que : $S_0S_1 = v_0\,\Delta t = 10^7 \times 10^{-7} = 1$.

S repart de S_1 avec la vitesse $v_1 = S_1\Omega = 10^7 - 1$, que l'on peut aussi écrire $v_1 = 10^7(1-10^{-7})$.

Au temps $2\Delta t$, S se trouve en S_2 tel que : $S_1S_2 = v_1\,\Delta t = 10^7(1-10^{-7}) \times 10^{-7} = 1-10^{-7}$.

Donc $S_2\Omega = S_1\Omega - S_1S_2 = (10^7-1)-(1-10^{-7}) = (10^7-1)(1-10^{-7}) = 10^7(1-10^{-7})^2$

Et ainsi de suite: au temps $n\Delta t$, S se trouve en S_n tel que : $S_n\Omega = 10^7(1-10^{-7})^n$ et repart de S_n avec la vitesse $v_n = S_n\Omega = 10^7(1-10^{-7})^n$.

Le mouvement de N étant uniforme, aux instants Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$..., le mobile N se trouve successivement en N_1, N_2, N_3, ... tel que $N_0N_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = ... = 1$.

Par la suite, nous noterons N(x) le logarithme défini par Neper, pour ne pas le confondre avec notre « ln » ou notre « log ». Nous transcrivons donc la définition du logarithme de Neper par :

$$N(x) = N_0N$$

Cela donne, à une restriction près :

x	10^7	$10^7(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^2$	...	$10^7(1-10^{-7})^n$	...	$10^7(1-10^{-7})^{10^7}$
N(x)	0	1	2	...	n	...	10^7

En réalité, nous verrons pourquoi un peu plus loin, la progression arithmétique de Neper est donnée en fonction de $N[10^7(1-10^{-7})] = N(10^7-1)$, ce qui peut se traduire pour nous, par :

$x = 10^7(1-10^{-7})^n \Leftrightarrow N(x) = n\,N(10^7-1)$, ou mieux encore pour nous par :

$$x = 10^7(1-10^{-7})^y \Leftrightarrow N(x) = y\,N(10^7-1)$$

On se rend alors compte que tels quels les nombres « N(x) » ne sont pas des logarithmes au sens où nous l'entendons. En effet :

$x_1 = 10^7(1-10^{-7})^{y_1} \Leftrightarrow N(x_1) = y_1\,N(10^7-1)$

$x_2 = 10^7(1-10^{-7})^{y_2} \Leftrightarrow N(x_2) = y_2\,N(10^7-1)$

d'où : $N(x_1) + N(x_2) = (y_1 + y_2)\,N(10^7-1) = N[10^7(1-10^{-7})^{y_1+y_2}] = N(x_1 x_2 / 10^7)$.

On n'obtient donc pas la formule $N(x_1x_2) = N(x_1) + N(x_2)$, mais $N\left(\frac{x_1x_2}{10^7}\right) = N(x_1) + N(x_2)$ (ce qui nous gêne certainement beaucoup plus que les lecteurs contemporains de Neper).De fait, Neper ne démontre pas explicitement N(ab) = N(a)N(b). Ce qu'il démontre c'est : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow N(a) - N(b) = N(c) - N(d)$.

Après donc avoir exposé la définition de ses logarithmes et les avoir appliqués aux proportions, Neper en explique l'usage en trigonométrie plane et sphérique, puis termine le traité de 1614 par les tables proprement dites. Dans le mode d'emploi qu'il en donne, il revient aux règles annoncées dans sa préface, et non plus seulement aux proportions, à savoir :

$N(ab) = N(a) + N(b)$;	$N(a^n) = n(a)$;	$N(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}N(a)$;	$N(\frac{a}{b}) = N(a) - N(b)$

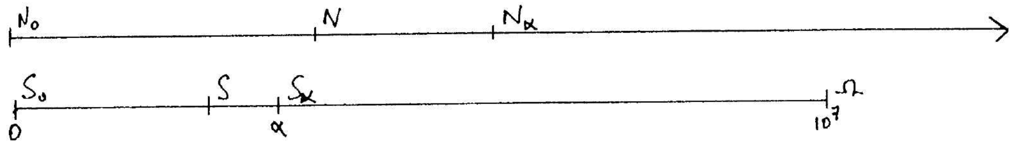
Au facteur « 10^7 » près qu'il faut contrôler, Neper a donc rempli son contrat.

C'est en 1619, que parait, à titre posthume, le deuxième traité de Neper, publié par son fils : « Mirifici logarithmorum canonis constructio... », où sont exposées les méthodes effectives du calcul des tables, que nous n'allons pas reprendre ici. Nous allons seulement indiquer les interpolations pratiquées par Neper et revenir sur la valeur attribuée à $N(10^7(1-10^{-7})) = N(10^7-1)$.

Le recours à la cinématique permet en quelque sorte de lever les difficultés liées aux notions de limite et de continuité, bien loin d'être dégagées au début du XVII^e siècle. Neper imagine le mouvement du point N servant d'horloge, le point N parcourant la demi droite d'origine N_0 comme l'échelle horaire d'une clepsydre (où l'on peut repenser à Chuquet et à son tonneau !) Neper emploie lui même la notion de flux, fluxion, ecoulement : *« ducenda sit linea fluxu alterius puncti »*.(*« qu'une ligne soit tracée par l'écoulement d'un deuxième point »*)

Si Neper avait eu une conception discontinue de la vitesse du point S, dans les termes où nous l'avons envisagée au début, il aurait attribué à $N(10^7(1-10^{-7}))$ la valeur 1, et il se serait contenté de vitesse décroissant par bonds successifs : ses tables y auraient perdu en exactitude.

Neper met au point une interpolation pour le calcul de ses logarithmes. « *la vitesse d'un point S s'approchant géométriquement d'un point fixe Ω est proportionnelle à la distance à celui-ci* ». La vitesse de S est même très exactement, avec les hypothèses choisies, égale à la distance de S à Ω.



Lorsque le mobile S, parti de S_0, arrive en S_α tel que $S_0S_\alpha = \alpha$, la vitesse de S a donc été décroissante de 10^7 à $10^7 - \alpha$. La durée nécessaire a donc été comprise entre $\frac{\alpha}{10^7}$ et $\frac{\alpha}{10^7-\alpha}$.

Le mobile N, parti de N_0 à vitesse constante égale à 10^7, a donc parcouru une distance comprise entre $10^7\frac{\alpha}{10^7}$ et $10^7\frac{\alpha}{10^7-\alpha}$.

Donc, lorsque le mobile S passe en S_α tel que $S_0S_\alpha = \alpha$, le mobile N a une position N_α telle que :

$\alpha < N_0N_\alpha < 10^7\frac{\alpha}{10^7-\alpha}$, soit : $\alpha < N_0N_\alpha < \frac{\alpha}{1-\alpha 10^{-7}}$.

Or, par définition, $N_0N_\alpha = N(10^7-\alpha)$, d'où :

$$\boxed{\alpha < N(10^7-\alpha) < \frac{\alpha}{1-\alpha 10^{-7}}}$$

Si $\alpha = 1$, on obtient : $1 < N(10^7-1) < \frac{1}{1-10^{-7}}$. Comme $\frac{1}{1-10^{-7}}$ est très proche de 1, Neper choisit d'attribuer à $N(10^7-1)$ la valeur moyenne $\frac{1}{2}[1+\frac{1}{1-10^{-7}}] = 1{,}000\,000\,05$

$$\boxed{N(10^7(1-10^{-7})) = N(10^7-1) = N(9\,999\,999) = 1{,}000\,000\,05}$$

Voyons comment Neper utilise encore son interpolation. En posant $\alpha = 10^7\varepsilon$, on obtient

$\varepsilon < N(1-\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Soit a et b très proches l'un de l'autre, tel que $a < b$. Posons $\frac{a}{b} = 1-\varepsilon$ (et n'oublions pas que $N(a) > N(b)$).

$\varepsilon = 1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$, $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{b-a}{b}\frac{b}{a} = \frac{b-a}{a}$, d'où : $\frac{b-a}{b} < N(\frac{a}{b}) < \frac{b-a}{a}$.

Puisque $\frac{b-a}{b}$ et $\frac{b-a}{a}$ sont proches, on prend :

$$N\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{b} + \frac{b-a}{a}\right] = \frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Soit c tel que $a \leq c \leq b$. On prend $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$, d'où $N\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b-a}{c}$.

Dans ses calculs, Neper utilise $N(a) = N(b) + \frac{b-a}{c}$. Sans que l'on trouve explicitement $\Delta N(b) = \frac{\Delta b}{b}$, c'est à dire $\Delta \log x = \frac{\Delta x}{x}$, Neper énonce une propriété qui s'exprime par $\frac{\Delta \log a}{\Delta \log b} = \frac{b}{a}$.

Reprenons en langage moderne, les deux mouvements rectilignes de Neper. On les traduit par : $\frac{dx}{dt} = -x$ et $\frac{dy}{dt} = 10^7$. D'où $\ln\frac{x}{k} = -t$ et $y = 10^7 t$, soit $x = ke^{-t}$ et $y = 10^7 t$

Or pour $t_0 = 0$, on a $x_0 = 10^7$, on a donc $x = 10^7 e^{-t}$ et $y = 10^7 t$

On peut donc écrire: $y = -10^7 \ln(x.10^{-7})$.

De la définition de Neper : $x = 10^7(1-10^{-7})^y \Leftrightarrow N(x) = yN(10^7-1)$,

on tire $N(x) = \frac{\ln(10^{-7}x)}{\ln(1-10^{-7})}.N(10^7-1)$. Or $\ln(1-10^{-7}) = -10^{-7} - \frac{1}{2}10^{-14} + o(10^{-14})$.

$N(x) = -10^7 \ln(10^{-7}x)\,[1 - 10^{-7}/2 + o\,(10^{-7})].N(10^7-1)$, avec $N(10^7-1) = 1{,}000\,000\,05 = 1+10^{-7}/2$

On a donc:

$$\boxed{N(x) = -10^7 \ln(10^{-7}x)\,[1+o\,(10^{-7})]}$$

Les sept chiffres de N(x) sont donc les mêmes que ceux que donnerait le calcul de $-10^7\ln(10^{-7}x)$.

Indépendamment donc de la résolution très satisfaisante du problème arithmétique posé par les calculateurs, sans oublier les pas en avant qu'il fait faire au calcul approché, retenons dans la conception de Neper l'approche cinématique : apparition de la notion de vitesse instantanée, de la notion de « fluxions » qui présideront chez Newton à l'élaboration du calcul infinitésimal, et résolution très correcte, avec les moyens dont il dispose d'une équation différentielle.

Mais, à propos, d'où vient le mot logarithme ?

C'est une création de Neper lui même. Il a accouplé les deux racines grecques λογοσ (logos = raison) et αριθμοσ (arithmos = nombre), le mot logarithme peut donc se comprendre littéralement par « nombre de raisons » (au sens : nombre cardinal des raisons de différence, la raison étant celle constante de la progression arithmétique). Pour nous, plus souvent ignorants du grec, le mot logarithme a perdu de son pouvoir de suggestion, d'autant plus, qu'après le calcul infinitésimal, les logarithmes ne se réduisent plus à leur propriétés fondatrices, à savoir qu'ils sont les nombres d'une progression arithmétique associée à une progression géométrique. Mais au XVII[e] siècle le terme de logarithme parlait de lui même et entraînait l'identification à l'idée fondatrice. Dès le départ, le mot logarithme a donc eu un succès certain, tel qu'il a résisté au calcul infinitésimal et nous est parvenu indemne.

Et ce , à l'encontre même de Neper, à sa barbe : s'il crée bien le mot logarithme, et s'il l'emploie dans son traité de 1614, ce terme devient complètement absent de celui de 1619, remplacé par l'expression « nombre artificiel ». Ce changement de terminologie nous permet d'enfoncer le clou ; si Neper n'est plus satisfait du mot logarithme, c'est que celui ci ne rend plus compte de ses idées, qui se sont précisées et sont passées du domaine primitif du discontinu à celui du continu avec la notion de vitesse instantanée en un point, les segments séparant les positions des points mobiles étant imaginés comme infiniment petits. Comment, dans ces conditions, compter encore les raisons de différence ?

Mais le choix de l'expression « nombre artificiel » n'est pas très heureux et ne renvoie à rien ; et entre temps, le mot logarithme a pris son envol.. ...

Les logarithmes décimaux de Briggs.

Henry Briggs (1561-1630), d'abord professeur de géométrie au collège de Graham House à Londres, obtient en 1619 l'une des deux premières chaires saviliennes d'0xford: celle d'astronomie (l'autre étant une chaire de géographie). Son enseignement a trait à l'astronomie nautique, la trigonométrie sphérique et la recherche des longitudes en mer. Les calculs y sont particulièrement lourds, et Briggs comprend immédiatement l'importance des travaux de Neper.

Dès l'été 1615, c'est à dire très rapidement après la parution en 1614 de son premier traité, Briggs rend visite à Neper à Edimbourg, où il séjourne tout un mois. Ils conviennent tous deux qu'il serait plus commode que le logarithme de 1 soit égal à 0, et celui de 10 égal à 1: ainsi naissent les logarithmes décimaux. Briggs retourne à Edimbourg l'été suivant en 1616, puis il se retrouve seul pour mener à bien les calculs, Neper étant mort en 1617 et n'ayant eu ni le temps ni la force de reconstruire ses tables.

« L'Arithmetica Logarithmetica » de Briggs parait en 1624: les tables contiennent les logarithmes décimaux des nombres de 1 à 20000, puis de 90000 à 100000 avec quinze décimales. Elles sont donc incomplètes

Briggs travaille avec trente décimales et n'en conserve que la moitié pour ses nombres définitifs, ce qui lui assure une bonne marge de sécurité. Son plan est le suivant:

- d'abord calculer les logarithmes des nombres premiers compris entre 1 et 100.

- calculer ensuite les logarithmes des nombres composés.

- terminer par interpolation à partir des logarithmes déjà calculés par la méthode dite des différences, dont on peut dire qu'il est l'inventeur.

Montrons, par exemple, comment Briggs obtient log2 à partir de l'extrait ci-joint.(page 20)

Chaque ligne du tableau est numérotée n, n variant de 0 à 54, une $55^{\text{ième}}$ ligne étant adjointe en-dessous.

Dans la première colonne du tableau, on lit les termes de la suite (x_n) définie par : $x_0 = 10$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

Dans la deuxième colonne, on lit les termes de la suite (y_n) définie par: $y_n = \log x_n$.

$$y_{n+1} = \log x_{n+1} = \log\sqrt{x_n} = \frac{1}{2}\log x_n = \frac{y_n}{2}$$

On a donc: $\dfrac{y_n}{y_{n+1}} = 2$

En appliquant la règle $\sqrt{1+\alpha} = \dfrac{\alpha}{2}$ dès que α est très petit, on obtient, à partir de la ligne 16:

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n - 1} = 1 + \frac{x_n - 1}{2}$$

d'où : $\dfrac{x_n - 1}{x_{n+1} - 1} = 2$, et $\dfrac{x_n - 1}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{y_n}{y_{n+1}}$

Pour obtenir log2 , Briggs commence par calculer le nombre $\sqrt[2^{47}]{2}$ en extrayant 47 racines carrées successives $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{2}$, etc....., ce qui évidemment n'est pas rien !

Le résultat x qu'il trouve est situé entre la $53^{\text{ième}}$ et la $54^{\text{ième}}$ ligne .

Soit $y = \log x$

On a donc $\log\left(\sqrt[2^{47}]{2}\right) = y$, soit $\log 2 = 2^{47} y$,

Reste donc à calculer y : $\dfrac{x-1}{x_{54}-1} = \dfrac{y}{y_{54}}$ d'où : $y = \dfrac{x-1}{x_{54}-1} \times y_{54}$

Système logarithmique de Briggs
(Extrait)

	Nombres	Logarithmes
	10, 0000 00	1
1	3, 1622.77660.16387.93319.98893.54	0,5
2	1, 7782 79410 03892 28011 97304 13	0,25
3	1, 3335 21432 16322 40256 65389 308	0,125
4	1, 1547 81984 68945 81796 61918 213	0,0625
16	1, 0000 35135 27746 18566 08581 37077	0,00001 52587 89062 5
17	1, 0000 17567 48442 26738 33846 78274	0,00000 76293 94531 25
18	1, 0000 08783 70363 46121 46574 07431	0,00000 38146 97265 625
47	1, 0000 00000 00001 63608 51112 96427 283	»
48	1, 0000 00000 00000 81804 25556 48210 295	»
49	1, 0000 00000 00000 40902 12778 24104 311	»
52	1, 0000 00000 00000 05112 76597 28102 947	0,00000.00000.00002.2204.46059.25031
53	1, 0000 00000 00000 02556 38298 64006 470	0,00000.00000.00001.1102 .23024.62515
54	1, 0000 00000 00000 01278 19149 32003 235	0,00000.00000.00000.05561.11512.31257
	1, 0000 00000 00000 01	0,00000.00000.00000.04342.94481.90325.1804

Extrait paru dans "Histoire des logarithmes" de C. Naux chez Blanchard.

Dans tous ses calculs, Briggs utilise toutes sortes d'astuces, par exemple, celle-ci: il ajoute à son tableau une $55^{ième}$ ligne, ce qui donne $y = \frac{x-1}{x_{55}-1} \times y_{55}$

Or $x_{55} - 1 = 1 \times 10^{-16}$ et $y_{55} = 0,434294481903251804 \times 10^{-16}$ d'où $y = (x-1) \times 0,434294481903251804$.

La règle de trois précédente se transforme donc en une simple multiplication, où il n'est pas sans intérêt pour nous de remarquer que 0,434294481903251804 est le nombre traditionnellement noté M qui nous permet de passer de nos logarithmes népériens aux logarithmes décimaux (ceux de Briggs). En effet : $y = \log x = M \ln x = M \ln(1+x-1) = M(x-1)$, pour $x-1$ très petit. Mais Briggs n'en était pas encore là ....!

Montrons maintenant sur un exemple , schématiquement et sans garder toutes les décimales, comment opère le calcul des différences.

Supposons connus les logarithmes de $550 = 2 \times 5^2 \times 11$ et de $555 = 3 \times 5 \times 37$

On a: $\log 555 - \log 550 = 393 \times 10^{-5} = 5 \times 78,6 \times 10^{-5}$

Sachant que l'augmentation des logarithmes est décroissante, Briggs écrit :

$$\log 551 = \log 550 + 79 \times 10^{-5}$$

$$\log 552 = \log 551 + 79 \times 10^{-5}$$

$$\log 553 = \log 552 + 79 \times 10^{-5}$$

$$\log 554 = \log 553 + 79 \times 10^{-5}$$

$$\log 555 = \log 554 + 77 \times 10^{-5}$$

La méthode donne des résultats corrects, car, ne l'oublions pas, Briggs fait ses calculs avec deux fois plus de décimales qu'il n'en conserve à la fin.

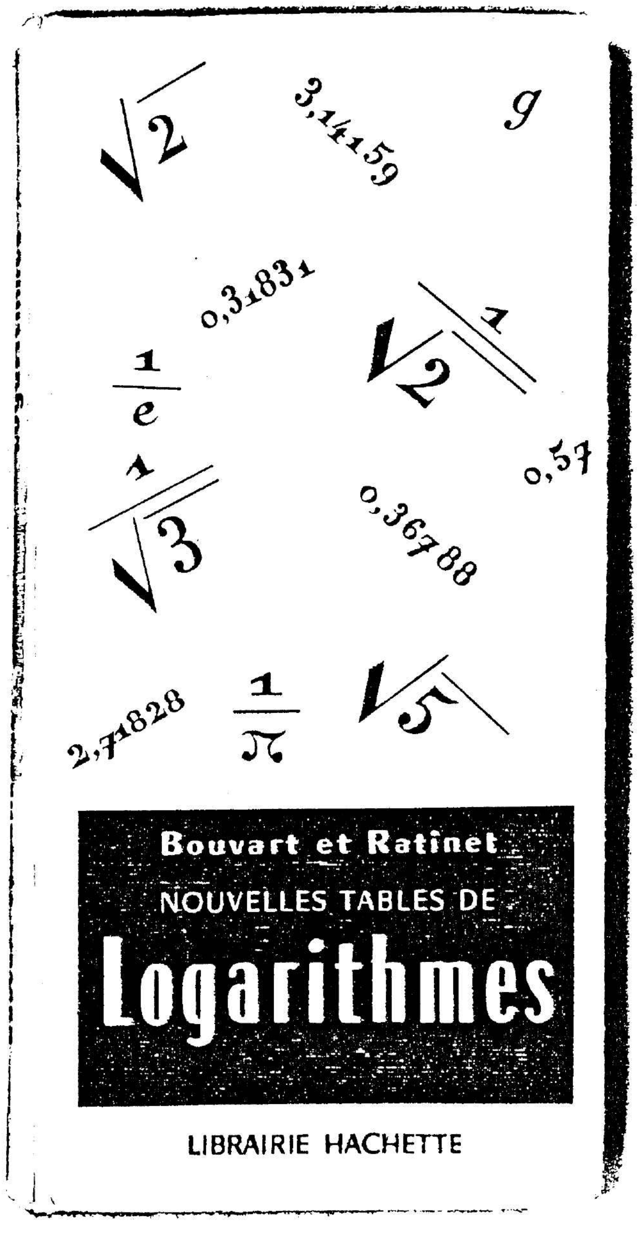
Soit par manque de temps ou d'énergie, soit par manque de calculateurs ou d'argent pour les payer, Briggs n'achève pas ses tables. Le relais est pris par l'imprimeur-éditeur belge Adrien Vlacq qui édite en 1629 une « Arithmétique Logarithmique » donnant une table complète des logarithmes de 1 à 100000, avec un nombre de décimales réduit à dix.

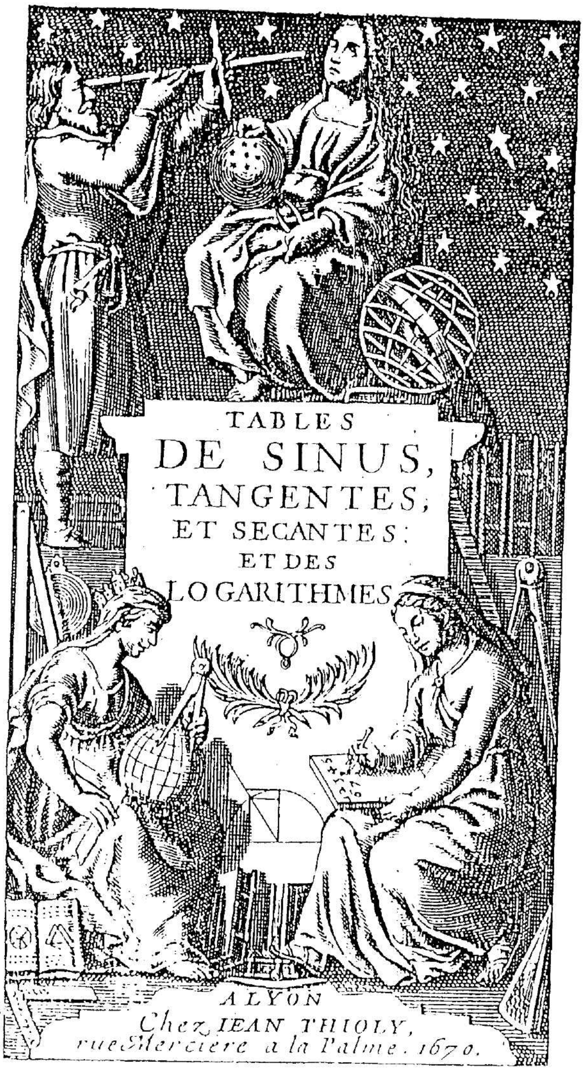
Et après ?

A son apparition la théorie des logarithmes a beaucoup de détracteurs chez les mathématiciens « purs » de l'époque (des « géomètres »), parce que le fondement de la théorie fait appel à un mouvement. Certes, Képler, qui tient aux tables de logarithmes, tentera bien de les refonder avec une théorie « naturelle » sans cinématique, mais pour que les logarithmes acquièrent droit de cité, il faudra attendre que Grégoire de Saint-Vincent fasse la relation entre les logarithmes et la quadrature de l'hyperbole, découverte datée de 1630, mais qui n'est publiée qu'en 1647.

Mais alors les tables de logarithmes se sont déjà largement répandues avec succès dans toute l'Europe, avec de multiples éditions, rééditions, corrections et améliorations. A peu de choses près, ces tables ont été utilisées dans l'enseignement jusqu'à l'introduction des calculatrices.

Certains des lecteurs se souviennent sans doute de « Bouvard et Ratinet ».....





TABLES DE SINUS, TANGENTES, ET SECANTES: ET DE LOGARITHMES DES SINVS, TANGENTES, & des Nombres depuis l'unité jusques à 10000.

Avec une Methode de resoudre tres facilement par leur moyen tous les Triangles, Rectilignes & Spheriques, & plusieurs Questions Astronomiques.

Par A. VLACQ.

Derniere Edition, corrigée & augmentée.

A LYON,
Chez IEAN THIOLY, ruë Merciere à la Palme.

M. DC. LXX.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Historiogramme du logarithme

Antiquité	XIe s.	XIIIe s.	1484	1550	1600	1614-1619	1624	1630 (publié en 1647)
ARCHIMEDE	Arabes	Arabes	CHUQUET	STIFEL	Astronome Italien	NEPER (BURGI)	BRIGGS	ST-VINCENT
$x^{n+p}=x^n x^p$ $(n,p)\in N^2$		Numération de position	$x^{n+p} = x^n x^p$ $(n,p)\in Z^2$	$x^{n+p} = x^n x^p$ $(n,p)\in Q^2$	sina cosb = $\frac{1}{2}$(sin(a+b)+sin(a−b)) Prostaphérèse	Déf. du log - 1ère table $Log_{in} = -Log$	$Log_{10}\,x$ $x \in \{0, \ldots, 10^5\}$	Relation Log et hyperbole

1646 (inédit de son temps)	1665-1668	1694	1697	1702-1712	1769	1979		
TORICELLI	NEWTON - MERCATOR	LEIBNIZ-BERNOULLI	BERNOULLI	BERNOULLI-LEIBNIZ	EULER	?	?	?
Trace la 1ère Logarithmique	$Log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ $e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$	Courbes exponentielles	$\frac{d}{dx} Logx = \frac{1}{x}$ $d\,LogF(x) = \frac{dF(x)}{F(x)}$	Controverse Log négatifs et complexes	$Log(a+ib) = Log\sqrt{a^2+b^2} \pm i\,(Arctg\frac{b}{a} + 2k\pi)$ C^{te} d'Euler	$e^{\pi\sqrt{163}} \in N$?	$C \notin Q$? $C \in Q$	

Bibliographie

NAUX Charles	Histoire des logarithmes de Neper à Euler.(2 tomes)
	Blanchard , Paris 1966.
PAGES Gil	Elements d'histoire des logarithmes,revue Quadrature n°2,
	Editions du Choix , Bréançon 1990.

LES NOMBRES REELS : CONSTRUCTIONS ET REALITE

1) Des raisons d'Euclide aux constructions modernes des Réels

A) Des proportions d'Euclide à l'Analyse d'avant le XVIII^{ème} siècle

Les nombres réels nous semblent familiers, mais que sont-ils exactement ? Notre appréhension du nombre, autre qu'entier, n'est-elle pas dans le rapport des grandeurs (surfaces, volumes, poids, vitesses...) et surtout des longueurs. Dans les civilisations antiques d'avant l'ère pythagoricienne les nombres étaient essentiellement entiers (issus des dénombrements) ou fractionnaires (issus de la comparaison de mesures commensurables c'est-à-dire multiples d'une même grandeur commune) et écrits dans différents systèmes (base 60 pour la civilisation babylonienne; utilisation de fractions inverses d'entier pour la civilisation égyptienne...) Au Vème siècle avant J.C. le théorème de Pythagore permet de mettre en évidence l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son coté : les rapports fractionnaires ne suffisent donc plus! C'est Euclide qui, au IVème siècle avant notre ère, codifie dans le livre V des Eléments la théorie des "raisons" ou rapports de grandeurs, théorie attribuée à Eudoxe de Cnide. Voici quelques unes des définitions qu'il pose et qui peuvent nous surprendre aussi bien par l'obscurité de leur rédaction que par l'ingéniosité des propriétés énoncées :

- Définition 3: *Une raison est certaine manière de d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la qualité.*
- Définition 4 : *Une proportion est une identité de raisons.*
- Définition 5: *Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.*
- Définition 6: *Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des equimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres equimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers equimultiples surpassent chacun à chacun, , les seconds equimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois .*

- *Définition 7: Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.*
- *Définition 8: Lorsque, parmi ces equimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième .*

Les définitions 3 et 5 précisent le statut des grandeurs (A, B) qui peuvent 'former' une raison : elles doivent être **homogènes** (A et B de même type: lignes ou surfaces ou volumes) et satisfaire à ce qu'on appelle aujourd'hui **l'axiome d'Archimède** : Il existe deux entiers n et p tels que nA>B et pB>A. La définition 6 est plus subtile et fondamentale car elle précise, indépendamment de notion de nombre, l'égalité de deux rapports de grandeurs: Deux couples de grandeurs (A,B) et (C,D) définissent la même raison si et seulement si pour tous entiers p et q les implications suivantes sont toujours vraies :

1.Si pA>qB alors pC>qD

2.Si pA=qB alors pC=qD

3.Si pA<qB alors pC<qD

Il est implicite que l'on peut toujours comparer des multiples quelconques de deux grandeurs homogènes et on a ainsi, en termes modernes une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence ne sont autres que les **'raisons'**. La définition 8 définit l'ordre (total) entre les raisons : {(A,B) > (C,D) si et seulement si il existe deux entiers p et q tels que pA>qB et pC<qD}. On peut facilement vérifier la compatibilité de cette relation avec la définition 6. Pour Euclide ces raisons n'ont rien de numérique et il traite le cas des fractions (d'entiers) séparément dans les livres VII-VIII-IX., mais on peut dire grâce à la définition 6 que deux grandeurs A et B sont commensurables s'il existe une grandeur (quelconque) C et deux entiers p et q tels que (A,B) et (pC,qC) aient même raison, raison que l'on pourra identifier à la fraction p/q (cf. proposition 5 du livre X). Le lecteur se convaincra alors aisément que la définition 6 revient à caractériser la raison "A/B" par sa position par rapport à toutes les fractions rationnelles. Ainsi une "relecture moderne" de ces définitions nous conduit à dire qu'une "raison" d'Euclide est définie par une séparation des rationnels en deux catégories: ceux qui lui sont inférieurs et ceux qui lui sont supérieurs. XXII siècles plus tard, ce seront les coupures de Dedekind d'où naîtront **les nombres REELS**. Toutefois il faut noter que les opérations (additions, multiplications) sur les raisons sont à peu près absentes chez Euclide qui mentionne

principalement les raisons "doubles" ou "triples" (définitions 10 et 11, correspondant au carré, cube) et des raisons inverses (définition 14).

Des bases performantes sont ainsi jetées sur lesquelles s'appuyèrent pendant plusieurs siècles les mathématiciens pour apprivoiser la géométrie et la numériser, jusqu'à l'obtention à la fin du XIXè siècle d'une construction purement "arithmétique" des nombres réels.

VIETE à la fin du XVIème siècle et DESCARTES (1637 - *Géométrie*) au début du XVIIè siècle, développent un nouveau calcul : l'Algèbre ; il s'agit d'une "Arithmétique" symbolique et littérale qui va permettre de résoudre de nouveaux problèmes géométriques en les "mettant en équation" où "l'inconnue" peut représenter aussi bien une proportion qu'un nombre. De plus DESCARTES rompt avec l'*homogénéité* des grandeurs: tous les rapports géométriques peuvent être représentés par des longueurs, et les opérations sont validées par des constructions géométriques. Le statut numérique des rapports va progressivement s'imposer depuis Stevin(1548-1620) qui dans le "*Traité des incommensurables grandeurs* " (1585) affirme "*la communauté et la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identité*" et " *Que nombre n'est point quantité discontinue*", puis au XVIIIè siècle avec Newton(1707-*Arithmétique universelle*) , Legendre(1794-*Elémens de géométrie*), et D'Alembert(1759-*Essais sur les Eléments de la Philosophie naturelle*) où il écrit : "*Si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres , c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres proprement dits, il ne s'en faut de rien, pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, puisque la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite qu'on voudra.*" .

B) L'Analyse des XVIIè et XVIIIè siècle

A partir du XVIIème siècle la théorie des "Indivisibles" avec Cavalieri (1635 - *Géométrie des continus indivisibles*) et Roberval (1634 - *Traité des indivisibles*) marque les débuts du calcul intégral et conduit à quelques succès (ex: calcul de l'aire de l'arche d'une cycloïde) mais aussi à des paradoxes. Ses fondements ne sont pas toujours acceptés, notamment par NEWTON (1642 - 1727) (*Principes mathématiques de philosophie naturelle*, I, 1687 - *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, 1671) qui en s'appuyant sur le concept mécanique de "vitesse instantanée", jette les bases du calcul infinitésimal et intégral avec les notions de quantités "évanouissantes" et de "fluxions". Puis les "différentielles" de Leibniz (1645 - 1716) (*Histoire et origine du calcul différentiel*, 1713) , par la simplicité et l'universalité du calcul symbolique mis en oeuvre, viennent renforcer la construction de ce nouvel édifice de l'Analyse . Les mécanismes de ce calcul différentiel sont d'ailleurs repris par le marquis de L'HOSPITAL (1661 - 1704) dans son traité de 1696 : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes et des courbes.*

La notion de fonction apparue dès le XIVème siècle chez N. ORESME(1320 - 1382) s'est développée aux XVIè et XVIIè siècles avec par exemple l'introduction des logarithmes par J. Napier(1550 - 1617) à partir encore de considérations cinématiques. Mais ce n'est qu'à partir du milieu du XVIIIè siècle, avec L. EULER(1707 - 1783) (*Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1748) que le concept de fonction devient la base de l'Analyse. De nombreux résultats sont alors obtenus dans le cadre de l'Analyse infinitésimale (développement des fonctions en séries entières, séries trigonométriques, cordes vibrantes, intégrales elliptiques, équations différentielles...) mais le calcul différentiel non rattaché à la logique euclidienne n'est pas reconnu par tous. La manipulation de séries infinies (LEIBNIZ, EULER...) sans notion de limite ni de convergence, s'effectue avec un formalisme polynomial mais conduit à des paradoxes sur des séries "divergentes" comme : $\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$ donne pour x=1 : 1/2=1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1+ ...

Au début du XIXème siècle, en rapport avec les enseignements que doivent dispenser les mathématiciens, apparaît la nécessité d'une nouvelle rigueur en particulier pour les définitions et notions de base de l'Analyse . Les justifications géométriques ou mécaniques ne suffisent plus ! Dans son Cours d'Analyse à l'Ecole Royale Polytechnique (1821) CAUCHY , partant des raisons euclidiennes, définit le concept de **limite,** puis celui de **continuité** d'une fonction et jette les bases de toute notre analyse moderne même si certaines ambiguïtés ne sont pas encore levées :

" Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe , de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra , cette dernière est appelée la limite de toute les autres. Ainsi par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées."

"Cela posé, la fonction f(x) sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites , la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α *. En d'autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x, entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction f(x) est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, mêmes très rapprochées, qui renferment le valeur dont il s'agit.

Après avoir étudié la somme de la série géométrique Cauchy affirme :

" D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ *soit convergente il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme* $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ *vers une limite fixe s; en d'autres termes ,il est nécessaire et il suffit que pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes* $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$ *diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs les différences successives entre la première somme* S_n *et chacune des suivantes sont déterminées par :*

$$S_{n+1} - S_n = u_n$$

$$S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1}$$

$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

Donc pour que la série soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n *décroisse indéfiniment tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes*

$$u_n + u_{n+1}$$

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

C'est à dire les sommes des quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

Prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable;

Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la suite est assurée. »

On aura reconnu l'énoncé du 'critère de Cauchy' pour les séries. Si les développements ci-dessus sont tout à fait corrects pour la détermination de conditions nécessaires à la convergence d'une série la réciproque n'est pas démontrée et est admise comme une vérité évidente.

C) Rupture du XIX^{ème} siècle : Rigueur et rejet du support géométrique

(BOLZANO (1781 - 1848) et le théorème des valeurs intermédiaires)

Le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème fondamental de l'algèbre sont révélateurs des difficultés à s'écarter du modèle géométrique grec: Une simple visualisation géométrique de l'intersection de deux courbes permet à CAUCHY comme à GAUSS de justifier leur raisonnement ! Dès 1817 BOLZANO (1781 - 1848) dans son mémoire: "*Démonstration purement analytique du théorème: Entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*", rejette les précédentes démonstrations s'appuyant sur la géométrie ou sur la cinématique et propose une démonstration nouvelle mettant en oeuvre un procédé de dichotomie. La racine cherchée est alors déterminée comme borne supérieure d'une partie dont l'existence est acquise grâce au critère de convergence des suites réelles, dit de CAUCHY, énoncé ici par BOLZANO quelques années avant CAUCHY. Bien entendu la convergence vers la borne supérieure cherchée ne peut être établie sans une construction rigoureuse des réels, construction qui ne tardera plus très longtemps!

Ce texte de BOLZANO, écrit à Prague en 1817, est tout à fait remarquable :

- Sa structure qui montre un souci d'efficacité pédagogique avec une longue préface introductive argumentant et réfutant les démonstrations précédentes, dénonçant "*la faute intolérable contre la bonne méthode*" et précisant sa conception de la rigueur : "*les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de fabrication d'évidences ,mais doivent être bien plutôt des fondements*" . Suit alors un résumé de la démarche qu'il va suivre en insistant sur la propriété centrale de sa démonstration: le théorème de la borne supérieure (c'est maintenant le théorème de Bolzano-Weïerstrass) et la préface se termine sur des considérations d'édition où BOLZANO qui vient de dénoncer les fausses démonstrations d'éminents savants comme GAUSS, LAGRANGE ou LAPLACE a sans doute "réglé quelques comptes " à une communauté scientifique accusée de désintérêt pour son oeuvre qui "*a eu la malchance de ne pas être annoncée du tout dans certaines revues savantes et d'être annoncé et critiquée seulement de manière superficielle dans d'autres*" ! La suite du texte est un cours très clair avec définitions, théorèmes, démonstrations, exemples et contre-exemples .

- La démonstration de ce théorème des valeurs intermédiaires, outre qu'elle nécessite une définition de la continuité d'une fonction numérique, définition donc antérieure à celle donnée par Cauchy dans son cours à l'école polytechnique de 1821, repose sur deux résultats clés:

  1) La définition des suites de Cauchy et le critère de convergence de Cauchy.

  2) Le théorème de la borne supérieure .

Or à chacun de ces résultats correspondra, une cinquantaine d'années plus tard, un type de construction des nombres réels : **Construction de Meray et Cantor par les suites de Cauchy et celle de Dedekind par les coupures** (cf. plus loin §2)).

Nous sommes donc avec ce texte de BOLZANO au coeur de la problématique du statut et de la construction des nombres réels:

Démonstration purement analytique du théorème[1] :

entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation

par BERNARD BOLZANO

Prêtre séculier, Docteur de Philosophie, Professeur Royal et Impérial de la Science de la Religion

et Membre titulaire de la Société Royale des Sciences à Prague

[1817]

PREFACE

Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est inconnue. L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation. *Voici l'autre :* toute fonction algébrique rationnelle entière[2] d'une grandeur variable peut être décomposée en facteurs réels du premier ou du second degré. *Après plusieurs tentatives infructueuses dues à* D'ALEMBERT, EULER, DE FONCENEX, LAGRANGE, LAPLACE, KLÜGEL *et d'autres, l'année dernière, M.* GAUSS *nous a enfin fourni quelques démonstrations du second théorème qui ne laissent guère à désirer quelque chose de plus. Déjà en 1799, ce savant éminent nous a offert pour ce théorème une démonstration[3] qui cependant, comme il l'a reconnu lui-même, contenait une lacune en fondant une vérité purement analytique sur une* considération géométrique. *Mais cette erreur est absente de ses deux démonstrations les plus récentes[4], parce que les fonctions trigonométriques qui figurent dans la deuxième peuvent et doivent être conçues dans un sens purement analytique.*

---

[1] Traduction française par J. SEBESTIK parue dans la revue d'Histoire des Sciences 17 (1964) p. 129-163 .

[2] C'est-à-dire toute fonction polynomiale .

[3] Demonstratio nova Theoremalis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in *factores reales* primi vel secundi gradus *resolvi* posse Helmstadi In-4°, 1799.

[4] Demonstratio nova altera etc. et Demonstratio nova tertia; les deux de 1816 .

Le premier théorème que nous avons mentionné ci-dessus ne fait pas précisément partie des théorèmes qui se sont trouvés jusqu'à présent au premier plan des réflexions des savants. Nous trouvons cependant de temps en temps que des mathématiciens d'une grande réputation se sont penchés sur ce théorème et ont essayé déjà des méthodes différentes pour le démontrer. Celui qui veut se convaincre de cela n'a qu'à comparer les exposés divers qu'en ont donnés par exemple KÄSTNER[5], CLAIRAULT[6], LACROIX[7], METTERNICH[8], KLÜGEL[9], LAGRANGE[10], RÖSLING[11] et plusieurs autres. Lorsqu'on examine de plus près leurs méthodes de démonstration, il apparaît très vite qu'aucune ne peut être considérée comme suffisante.

Dans le premier paragraphe, Bolzano dénonce les démonstrations s'appuyant sur des "évidences géométriques" car elles ne sont pas des "fondements". Il faut faire la distinction entre les "principes ou vérités primitives" (nous dirions aujourd'hui les axiomes) et leurs conséquences. Le fait qu'une ligne coupe l'axe des abscisses, dans les conditions indiquées, est une conséquence du théorème à démontrer et non le fondement de celui-ci.

I) Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule,

---

[5] Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen [" Eléments de l'Analyse des grandeurs finies "], 3è ed., § 316.

[6] Eléments d'algèbre, 5° éd., Suppléments, chap. I, n°16.

[7] Eléments d'algèbre, 7° éd.

[8] Dans sa traduction de l'oeuvre précédente de Lacroix, Mainz, 1811, § 211.

[9] Dans son Mathematisches Wörterbuch, t. II, p. 447 sq.

[10] Traité de la résolution des équations numériques de tous la degrés, Paris, 1808

[11] Grundlehren von den Formen, Differenzen, differentialien und Integralien der Funklionen [" Eléments de la théorie des formes, des différences, des différentielles et des intégrales des fonctions "], 1ère Partie, § 49.

à savoir à la géométrie. N'a-t-on pas, depuis longtemps, senti et reconnu l'incongruité d'une pareille μεταβασιζ ειζ αλλο γενοζ ? Ne l'a-t-on pas déjà évité dans cent autres cas, où l'on connaissait le moyen de le faire, et n'a-t-on pas considéré cette élimination comme un mérite[12] *? Si l'on insiste pour être conséquent ailleurs, ne doit-on pas s'efforcer de l'être ici aussi ? En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de " fabrication d'évidences " (Gewissmachungen) mais doivent être bien plutôt des fondements (Begründungen) ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. Conformément à cette opinion, une telle démonstration géométrique est un vrai cercle vicieux dans la plupart des cas et en particulier dans le cas présent, comme on le comprend facilement. Même si la vérité géométrique à laquelle on se réfère ici est (comme nous l'avons déjà dit) évidente au plus haut point et n'a donc point besoin de démonstration en tant que " fabrication d'évidence ", elle n'a pourtant pas moins besoin d'un fondement. Les concepts dont elle est composée sont visiblement si complexes qu'on ne peut hésiter un instant à dire qu'elle n'appartient nullement à ces vérités simples dites principes ou vérités primitives, parce que, précisément, ces vérités ne sont que les fondements (Grund) des autres et ne sont pas elles-mêmes des conséquences ; il s'agit plutôt ici d'un théorème ou d'une vérité déduite c'est-à-dire d'une vérité qui a son fondement dans certaines autres et qui doit donc être démontrée aussi dans la science par une déduction à partir des principes*[13]*. Réfléchisse qui veut sur le fondement objectif du fait que, dans les conditions mentionnées ci-dessus, une ligne coupe l'axe des abscisses. Comme tout le monde le saura certainement bientôt, ce fondement se trouve dans cette vérité générale suivant laquelle toute fonction continue de x qui est positive pour une valeur de x, négative pour une autre, doit être nulle pour*

---

[12] Un exemple est donné dans les mémoires de M. le Pr. GAUSS mentionnés ci-dessus.

[13] Que l'on compare, concernant tout cela, mes Beiträge zu einer begründeleren Darstellung der Mathematik ["Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques "], 1er fascicule, Prague, 1810, section 41, §§2,10, 20, 21, où on trouve le développement des concepts logiques que je suppose ici connus.

une certaine valeur intermédiaire de x. Et ceci est précisément la vérité qui doit être prouvée ici. Ce serait donc une grande erreur que d'oser déduire cette vérité de la précédente (comme cela se produit dans la méthode de démonstration que nous sommes en train d'examiner): inversement il faut dériver la première de la seconde, si l'on veut exposer les vérités contenues dans la science de la manière même dont elles sont liées les unes aux autres selon leur connexion objective.

Bolzano va réfuter maintenant les démonstrations utilisant les concepts de temps et de cinématique, qui bien qu'utiles comme exemples et éclaircissements ne peuvent en aucun cas tenir lieux de fondements; là encore il ne faut pas confondre le théorème et une de ses conséquences: deux corps qui se doublent se croisent ! Ensuite il définit de façon très moderne le concept de fonction continue (à comparer avec la définition de Cauchy vue plus haut). Le fait qu'une fonction continue prenne toutes les valeurs intermédiaires entre deux de ses valeurs, qui apparaît comme évident lorsque la variable est le **temps**, n'est qu'un cas particulier du théorème à démontrer et non la définition de cette continuité.
Il faut signaler ici que les inégalités "$f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ et $f(\beta) > \varphi(\beta)$" doivent être comprises en valeurs absolues, ce qui explique la difficulté signalée au b) car on ne peut considérer directement la fonction $f - \varphi$.

II) *Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de* continuité *d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du* temps *et du* mouvement *" Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, disent- ils, varient suivant la loi de continuité, et si pour $x = \alpha$, $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \varphi(\beta)$: alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u) = \varphi(u)$. Car si l'on imagine que la grandeur variable x dans ces deux fonctions prend successivement toutes les valeurs intermédiaires entre α et β et prend au même instant toujours la même valeur à gauche et à droite: alors au* début *de cette variation continue de la valeur de x, on a $f(x) < \varphi(x)$ et à la* fin *$f(x) > \varphi(x)$. Mais comme les deux fonctions doivent d'abord, grâce à leur continuité, parcourir toutes les valeurs intermédiaires avant de pouvoir atteindre une valeur supérieure x, de même, il faut qu'il y ait un certain* instant intermédiaire *pour lequel les deux valeurs sont égales. " On rend sensible ceci encore par l'exemple du mouvement de deux corps dont l'un était au début* *derrière l'autre, l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui.*

Les concepts de temps *et de* mouvement *(et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'espace, cela ne peut être mis en doute par personne. Toutefois, nous n'aurions rien à objecter si ces deux concepts n'y étaient introduits qu'en tant qu'*éclaircissement. *Car nous ne sommes en aucune façon partisan d'un* purisme *tel qu'il exige, pour maintenir la science pure de tout élément étranger, de refuser dans l'exposé de la science toute* expression *empruntée à un domaine étranger, ne serait-ce qu'avec une signification figurée et dans l'intention de désigner ainsi une chose d'une façon plus brève et plus claire que ce n'est possible par une description conçue uniquement dans des termes particuliers, ne serait-ce même que pour éviter la cacophonie de la répétition continuelle des mêmes mots ou pour rappeler un exemple qui peut servir à confirmer la thèse simplement par un nom donné à la chose. Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les* exemples *et les* applications *pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci: on ne proposera jamais des exemples en place des* démonstrations *; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles, la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression.*

Selon cette opinion, on pourrait donc à la rigueur excuser l'intervention du concept de temps *dans la démonstration ci-dessus, parce que sur les expressions qui en sont dérivées on ne fonde aucune déduction qui ne serait pas valable, même sans ce concept de temps. Mais la* représentation sensible *par le* mouvement *d'un corps donné dans le dernier exemple ne peut être considérée aucunement comme quelque chose de plus qu'un simple* exemple *qui ne démontre pas le théorème lui-même, mais qui plutôt ne doit être démontré que par celui-ci.*

a) Tenons-nous donc, en omettant cet exemple, seulement au reste du raisonnement. Remarquons d'abord *qu'il a pour base un concept incorrect de la* continuité. *Car dans une* explication correcte, *on entend par l'expression:* une fonction f (x) varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes[14], *rien d'autre que ceci:* si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x+\omega)$ - $f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra, *c'est-à-dire lorsqu'on a (selon les notations que nous avons introduites dans le §14 du " Théorème du binôme", etc., Prague, 1816):* [15]

$$f(x+\omega) = f(x) + \Omega$$

Or, c'est certainement une affirmation tout à fait vraie *qu'une fonction continue n'atteint jamais une valeur supérieure avant d'avoir d'abord parcouru toutes les valeurs inférieures, comme on l'admet dans cette démonstration, c'est-à-dire que $f(x+n\Delta x)$ peut prendre toute valeur entre $f(x)$ et $f(x+\Delta x)$ lorsqu'on prend n arbitrairement entre O et 1; mais on ne peut pas considérer cette affirmation comme l'*explication *du concept de continuité; c'est plutôt un* théorème *sur la continuité et un théorème qui ne peut se démontrer qu'après avoir supposé le théorème même qui doit servir à sa propre démonstration. Car si M désigne une grandeur située quelque part entre $f(x)$ et $f(x+\Delta x)$, l'affirmation : il y a une valeur intermédiaire de n entre 0 et +1 pour laquelle :*

$$f(x+n\,\Delta x) = M$$

n'est qu'un cas particulier de la vérité générale selon laquelle, lorsque :

$$f(x) < \varphi(x) \text{ et } f(x+\Delta x) > \varphi(x+\Delta x),$$

il faut qu'il y ait une certaine valeur intermédiaire $x+n\Delta x$ pour laquelle :

$$f(x+n\,\Delta x) = \varphi(x+n\,\Delta x)$$

Car l'affirmation précédente s'ensuit de cette vérité générale dans le cas particulier où la fonction $\varphi(x)$ devient une grandeur constante M.

---

[14] Il y a des fonctions qui varient de façon continue pour *toutes* les valeurs de leurs racines, par exemple : $\alpha x+\beta$. *Mais* il y en a aussi d'autres qui ne sont continues qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines valeurs limites de leurs racines. Ainsi, $x+\sqrt{(1-x)(2-x)}$ n'est continue que pour toutes les valeurs de x qui sont $< +1$ ou $> +2$, mais non pour les valeurs situées entre +1 et +2.

[15] Bolzano définit la continuité d'une fonction *réelle*. Il faut préciser cette définition en y faisant intervenir la *valeur absolue* de la différence, $|f(x+\omega)-f(x)|$. Bolzano le fera dans sa *Functionenlehre* (cf. éd. de Prague, 1930, p. 14). Comparer avec la définition de Cauchy de 1821. cf § II.B*(N.D.R.)*

b) Mais la démonstration que nous examinons contiendrait encore une autre erreur, même en supposant qu'on pourrait démontrer cette proposition par une autre voie. Car des inégalités :

$$f(\alpha) < \varphi(\alpha) \text{ et } f(\beta) > \varphi(\beta)$$

il s'ensuivrait seulement que lorsque u est une certaine valeur intermédiaire entre α et β pour laquelle $\varphi(u) > \varphi(\alpha)$, mais $< \varphi(\beta)$, f(x) deviendrait de même égal à $\varphi(u)$ avant de passer de $f(\alpha)$ en $f(\beta)$ pour un certain *x situé entre α et β. Mais il ne s'ensuit pas toujours qu'il en est ainsi pour la* même valeur *de x qui est = u, c'est-à-dire (parce que u peut désigner n'importe quelle valeur entre α et β qui rend $\varphi(u)>\varphi(\alpha)$ et $< \varphi(\beta)$) qu'il existe une valeur intermédiaire de x entre α et β pour laquelle les deux fonctions deviennent égales.*

c) L'élément trompeur de toute la démonstration ne repose entièrement que sur l'intervention du concept de temps. *Car du moment qu'on l'omet, il apparaît que la démonstration n'est rien d'autre qu'une répétition en d'autres termes de théorème à démontrer . En effet, dire que la fonction f(x) doit d'abord passer par l'état de l'égalité avec $\varphi(x)$, avant de passer de son état d'être plus petite à celui d'être plus grande, cela revient à dire, en omettant le concept de temps, que, parmi les valeurs prises par f(x) lorsqu'on choisit pour x n'importe qu'elle valeur entre α et β, il y a aussi une valeur qui rend $f(x) = \varphi(x)$, ce qui est le théorème à démontrer lui-même.* /...

III) .../

L'erreur dénoncée maintenant est l'affirmation de l'existence d'une plus grande ou d'une plus petite valeur d'une variable rendant positive ou négative une fonction continue de cette variable.

IV) On lit dans certains ouvrages la conclusion suivante : "Parce que f(x) est positive pour $x=\alpha$, négative pour $x=\beta$, il faut qu'il y ait, entre α et β, deux grandeurs a et b pour lesquelles se fait le passage des valeurs positives de f(x) aux valeurs négatives; de cette sorte, il n'existe plus aucune valeur de x entre a et b pour laquelle f(x) serait encore positive ou déjà négative", *etc. Une affirmation aussi incorrecte nécessite à peine une réfutation, et elle ne serait même pas mentionnée ici, si elle ne nous servait à montrer à quel point les concepts de plusieurs mathématiciens, même* *réputés, concernant ce sujet sont encore indistincts. Il est pourtant bien connu qu'il existe une infinité de valeurs intermédiaires entre deux valeurs d'une grandeur continûment variable indépendante aussi rapprochées que l'on veut - et la racine x d'une fonction est une telle grandeur - et, aussi, qu'une fonction continue n'a aucun dernier x qui la rende positive et aucun premier x qui la rende négative, et par conséquent aucun a et b tels qu'on les a décrits ici !*

Au début de ce paragraphe V), Bolzano dénonce l'idée de démontrer le premier théorème comme conséquence du second (les fonctions polynomiales se décomposent en facteurs du premier ou du second degré) alors que c'est ce dernier qui est certainement déductible du premier. Il passe ensuite en revue les démonstrations d'éminents mathématiciens contemporains dont aucune n'est valable et revient sur la troisième démonstrations de Gauss qui se fonde sur un théorème démontré par LAGRANGE (la positivité de l'intégrale) mais comportant une lacune.

V) L'échec des tentatives de démonstration immédiate du théorème dont nous traitons a mené à l'idée de le dériver d'un deuxième théorème que nous avons mentionné au début; il s'agit du théorème de la décomposition de toute fonction en certains facteurs. Il n'y a pas non plus de doute que si ce deuxième théorème est accordé, le premier puisse en être déduit. Mais dans ces circonstances, on ne peut pas désigner une telle déduction du théorème comme un fondement vraiment scientifique, parce que le deuxième théorème énonce manifestement une vérité bien plus complexe que notre théorème; cette vérité peut par conséquent être basée sur celui-ci, mais réciproquement, le premier ne peut pas être basé sur l'autre. Et, en réalité, personne n'a encore réussi à démontrer le second sans supposer le premier. Quand aux démonstrations dont M. GAUSS a montré l'inadmissibilité déjà dans son Mémoire de 1799, il n'est pas nécessaire d'examiner si elles peuvent ou non se fonder sur notre théorème pour la raison même qu'elles sont déjà prouvées inadmissibles. La démonstration de M. LAPLACE[16] contient également des erreurs que nous n'avons cependant pas besoin de discuter ici pour la raison même qu'elle est basée explicite-

ment sur le théorème que nous sommes en train d'examiner. Et de même, nous n'avons pas à tenir compte non plus de la première *démonstration qu'a donné M.* GAUSS*, parce qu'elle s'appuie sur de considérations* géométriques. *En attendant, il serait facile de prouver que même sa démonstration suppose tacitement notre théorème, puisque les considérations géométriques que l'on y met en jeu sont tout à fait semblables à celles que nous avons mentionnées au n° I. - Tout revient donc à la* Demonstratio nova altera et tertia *de M.* GAUSS. *La première fait expressément appel à notre théorème en supposant à la page 30:* aequationem ordinis imparis certo solubilem esse; *affirmation qui n'est, comme on sait, rien d'autre qu'un corollaire facile de notre théorème. Or, il est moins évident que* la Demonstratio nova tertia *dépend de notre théorème. Elle se fonde, entre autres, sur le théorème suivant :* Si une fonction reste positive pour toutes les valeurs de la grandeur x qui sont situées entre α et β, alors son intégrale prise de telle sorte qu'elle s'annule pour $x=\alpha$ a également une valeur positive lorsqu'on pose ensuite $x=\beta$. *Il est vrai que dans la démonstration que nous donne M.* LAGRANGE [17] *pour ce théorème, on ne trouve aucune référence expresse au nôtre. Seulement, cette démonstration de* LAGRANGE *a également une lacune. Car elle demande de prendre la grandeur i si petite que :*

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x)$$

devient :

$$< \frac{f'(x)+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots+f'(x+(n-1)i)}{n},$$

expression dans laquelle le produit i.n doit rester égal à une grandeur donnée et où la désignation connue f'(x) représente la première fonction dérivée de f(x). Ici se pose maintenant la question de savoir s'il est possible de satisfaire à cette demande. Plus petit on prend i pour diminuer la différence :

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x)$$

---

[16] Dans le *Journal de l'Ecole Normale*, ou aussi dans le *Traité du calcul différentiel et intégral* de Lacroix, t. 1, n°s 162, 163.

[17] *Leçons sur le calcul des fonctions*, nouvelle édition. Paris, 1806. Leçon 9, p. 89.

plus grand on doit prendre n qui est le diviseur dans l'expression à droite de l'inégalité, si i.n doit toujours rester égal à une grandeur donnée. Il est vrai que l'ensemble des termes dans le numérateur augmente également; mais il reste encore à prouver que cette augmentation fait croître le numérateur dans la même proportion dans laquelle augmente le dénominateur. Il reste donc à voir si, par suite de la diminution de i, la valeur de toute la fraction ne diminue pas de la même façon ou encore plus rapidement que l'expression :

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x).$$

Pour remplir cette lacune dans la démonstration, il faudra sans doute faire appel à notre théorème présent, parce que nous étions obligés de nous y référer déjà à propos de la démonstration d'un théorème apparenté au théorème ci-dessus de LAGRANGE[18]*, quoique beaucoup plus simple.*

Bolzano peut maintenant présenter un résumé de sa démonstration "*fondement objectif de la vérité à démontrer* ". Il se ramène à un énoncé plus général, à savoir que si deux fonctions continues f et φ vérifient $|f(\alpha)| < |\varphi(\alpha)|$ et $|f(\beta)| > |\varphi(\beta)|$, alors il existe une valeur intermédiaire x entre α et β qui rende l'égalité $|f(x)| = |\varphi(x)|$ vraie. Il faut noter que les valeurs absolues ne sont pas explicitées dans le texte (cf. note 2O). En fait Bolzano va considérer les valeurs de la variable i telles qu'elles rendent les inégalités: $|f(\alpha+j)| < |\varphi(\alpha+j)|$ vraies pour **toutes les valeurs de j inférieures** (strictement) **à i** et, mais c'est implicite, positives. L'existence de telles valeurs de i est assurée par la continuité supposée pour f et nous pourrions dire aujourd'hui qu'elles forment clairement un intervalle d'origine 0, non vide et majoré par $\beta-\alpha$.

Bolzano peut alors sortir sa carte maîtresse : son **théorème de la borne supérieure** (en fait ici de la borne inférieure cf. plus loin 12.) qui lui permet d'affirmer l'existence **d'un plus grand élément u** pour les valeurs de i précédemment indiquées. Il ne lui reste plus qu'à conclure pour l'égalité cherchée $|f(\alpha+u)| = |\varphi(\alpha+u)|$, en montrant par un double raisonnement par l'absurde que l'on ne peut avoir l'inégalité stricte ni dans un sens, ni dans l'autre, sans contredire la définition de u ou la continuité de f.

[18] A savoir le théorème du § 29 dans le Mémoire *Der binomische Lehrsalz*, etc. [" Théorème du binôme "].

De telles lacunes se retrouvent donc dans toutes les démonstrations du théorème, qui est énoncé dans le titre de ce mémoire, connues jusqu'ici. Or, la démonstration que je présente ici au jugement des savants contient, comme je m'en flatte, non seulement une simple affirmation d'évidence *(Gewissmachung), mais un* fondement *objectif de la vérité à démontrer; elle est donc véritablement scientifique*[19]

Voici un bref aperçu de la démarche de la démonstration.

La vérité à démontrer : il y a toujours au moins une racine réelle entre deux valeurs α *et* β *qui correspondent à des résultats de signes opposés, repose manifestement sur une autre,* plus générale, *: si deux fonctions continues de x,* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *ont la propriété que pour* $x=\alpha$, *on ait* $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, *mais pour* $x=\beta$, $f(\beta) > \varphi(\beta)$,[20] *alors il doit toujours exister une certaine valeur intermédiaire entre* α *et* β *pour laquelle* $f(x)=\varphi(x)$. *Seulement, si* $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, *en vertu de la loi de continuité on a également :*

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i),$$

lorsqu'on prend i suffisamment petit. La propriété d'être plus petite *appartient donc à la fonction de i représentée par l'expression* $f(\alpha + i)$ *pour toutes les valeurs de i qui sont plus petites qu'une certaine valeur. Toutefois, cette propriété ne lui appartient pas pour toutes les valeurs de i sans restriction; en particulier elle ne lui appartient pas pour un i qui serait* $= \beta-\alpha$, *parce que* $f(\beta)$ *est déjà* $> \varphi(\beta)$. *Or, on a le théorème suivant : aussi souvent qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs d'une grandeur variable i qui sont plus petites qu'une valeur donnée, sans appartenir pour autant à* toutes les valeurs en général, *il existe toujours une certaine valeur*

---

[19] Qu'on ne s'attende pas à ce que je suive déjà ici *toutes* les règles que j'ai moi-même établies pour la construction d'un *exposé véritablement scientifique* dans les *Beiträge zu einer begründeleren Darstellung der Mathematik* [" Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques "] (IIè Partie) . Je suis toujours entièrement persuadé de la justesse de ces règles ; cependant, il n'est possible de les suivre exactement que dans le cas où l'on commence l'exposé d'une science à partir de ses *premières* propositions et concepts, mais non là où l'on ne traite que quelques théories d'une science isolées du contexte de l'ensemble, comme c'est le cas ici. Il va de soi qu'il faut également rapporter cette remarque au mémoire sur le *théorème du binôme*.

[20] Note de Bolzano dans sa démonstration (théorème 15) : Nous devons rappeler qu'il faut comparer les valeurs des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dans ce théorème seulement d'après leur grandeur absolue, c'est-à-dire sans égard au signe, ou bien comme si elles n'étaient point des grandeurs capables d'avoir des signes opposés. Mais il est très important de connaître les signes de α et de β .

maximale *u pour laquelle on peut affirmer que tous les i qui sont < u ont la propriété M. On ne peut pas avoir pour cette valeur même de u :*

$$f(\alpha + u) < \varphi(\alpha + u),$$

car autrement, suivant la loi de continuité, on aurait également :

$$f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega),$$

en prenant ω suffisamment petit. Et il ne serait pas vrai, par conséquent, que u soit la plus grande des valeurs pour lesquelles on a le droit d'affirmer que toutes les valeurs de i inférieures à u rendent :

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i);$$

au contraire u + ω serait une valeur encore plus grande pour laquelle la même chose est valable. Mais on peut encore moins avoir :

$$f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u);$$

sinon, on devrait avoir également :

$$f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha + u - \omega)$$

en prenant ω suffisamment petit; et il ne serait pas vrai par conséquent que l'on ait :

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$$

pour toutes les valeurs de i qui sont < u. Il faut donc aussi que :

$$f(\alpha + u) \text{ soit } = \varphi(\alpha + u),$$

c'est-à-dire qu'il existe une valeur intermédiaire de x entre α et β, à savoir $\alpha + u$, pour laquelle les fonctions f(x) et φ(x) sont égales l'une à l'autre. Il ne s'agit maintenant que de démontrer le théorème que nous venons de mentionner. Nous le prouverons[21] *en montrant que les valeurs de i dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, et celles dont on ne peut plus l'affirmer, peuvent se rapprocher les unes des autres d'aussi près que l'on veut : d'où il s'ensuit pour quiconque a une idée correcte de la* grandeur *que la notion d'un i qui est le plus grand de ceux dont on peut dire que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, est la notion d'une grandeur* ***réelle****, c'est-à-dire* existante *(wirklich).*

[21] cf § 12 plus bas.

Qu'il me soit permis, avant de clore cette préface, de faire une confession et d'exprimer une demande ne se rapportant pas seulement à mon écrit présent, *mais à tout ce que j'ai écrit jusqu'à maintenant et, si Dieu le veut, aussi à mes écrits* futurs.

Même en s'appuyant sur le peu que j'ai publié jusqu'à présent, *mais surtout sur le précis d'une* nouvelle logique *que donne le premier fascicule des* Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques *dans sa deuxième partie sous le titre : "Sur la méthode mathématique ", un lecteur attentif pourrait conclure que je cultive certaines idées qui doivent pour conséquence* une transformation totale de toutes les sciences *à priori* pures, *si toutefois on ne les considère pas tout à fait incorrectes. J'ai déjà examiné la partie la plus grande et la plus importante de ces idées durant une période si longue et avec tant d'impartialité qu'il n'est peut-être plus trop tôt pour oser en parler maintenant et un peu plus fort. Or, on peut faire connaître les opinions qui embrassent la domaine entier d'une ou de plusieurs sciences d'une double manière, en les exposant soit d'un seul coup et dans leur enchaînement, soit aussi par fragments et dans des mémoires particuliers. La* première *manière fut jusqu'à présent de loin la plus habituelle, et c'est sans doute aussi le chemin où doit s'engager quiconque ne vise qu'à atteindre dans le temps le plus court une grande réputation auprès de la partie savante de ses contemporains. Cependant, le* deuxième *procédé est, à mon avis, beaucoup plus avantageux pour le perfectionnement des sciences, et cela pour les raisons suivantes :*

Premièrement, *parce que de cette façon, l'auteur de nouvelles conceptions court beaucoup moins le danger de précipitation, car l'exposé par fragments de ses idées lui permet de reporter à un temps ultérieur son explication des points à propos desquels au début il éprouve lui-même encore des doutes et aussi de profiter des critiques adressées à ce qu'il a déjà exposé et même de corriger plusieurs choses qu'il n'a pas expliquées correctement .*

Deuxièmement, *avec un développement de ses idées qui n'avance ainsi que peu à peu, on peut également s'attendre à un examen beaucoup plus rigoureux de ces dernières de la part de ses lecteurs . Car celui qui apparaît devant le public avec une doctrine déjà achevée, offre d'un coup à l'attention de notre esprit un trop grand nombre de nouvelles affirmations pour qu'on puisse espérer que nous examinions chacune d'elles avec la même précision que si on nous les avait présentées séparé-*

ment. Celui qui livre un système achevé montre, ou doit montrer au moins, comment on peut déduire les vérités que reconnaît le sens commun avec une certitude indéniable aussi à partir de ses propres prémisses qui diffèrent *de celles des autres. Mais c'est précisément cette circonstance qui nous réconcilie avec ces prémisses-là et qui fait que nous accordons à l'auteur ces prémisses avec beaucoup moins d'hésitation que s'il les avait établies une à une et que s'il nous avait laissé dans le doute à propos de savoir si et dans quelle mesure elles sont compatibles avec tout le reste qui est pour nous vérité. Et finalement, on ne peut pas nier que déjà le simple aspect d'un livre* volumineux *qui promet un système complet de telle ou telle science nous inspire une sorte de respect avant que nous l'ayons lu. Si maintenant, en lisant, nous découvrons une certaine connexion dans les affirmations de ce système; si l'édifice du savoir humain dont on nous présente l'esquisse a une forme qui plaît; si tout est disposé selon le mesure, le nombre et la symétrie : notre jugement sera influencé; nous-mêmes nous commençons à souhaiter qu'existe enfin ce* système, le seul à être juste *et que nous avons cherché depuis si longtemps ! Et la moindre conséquence, c'est que nous nous imaginons que nous n'avons, à cause de la connexion remarquée, tout au plus, qu'à choisir entre deux choses : soit accepter le tout, soit rejeter le tout; alors qu'il ne devrait en réalité se produire ni l'un ni l'autre !*

Telles étaient à peu près les raisons pour lesquelles je me suis décidé, déjà en 1804, à ne commencer, dans aucune science, par la publication d'un traité complet; *mais à ne faire connaître d'abord, dans chacune, mes concepts, différents des concepts habituels, que dans des mémoires particuliers. Et c'est seulement lorsque, après de multiples corrections, ces mémoires auront trouvé une approbation auprès d'une partie du public que nous devrons penser à l'édification de tout un système, si toutefois la mort ne nous oblige pas à laisser ce dernier travail aux autres.*

J'ai commencé ma carrière d'auteur avec un mémoire concernant les mathématiques *et j'ai exposé, sous le titre :* Betrachlungen über einige Gegenstände der Elementar geometrie *("Considérations sur certains objets de la géométrie élémentaire") (Prague, chez C. Barth, 1804), avec plusieurs autres idées,* une nouvelle théorie des parallèles[22]. *Quelques années plus tard, j'ai pris la décision de publier, par fascicules, l'ensemble de mes idées touchant le domaine des mathématiques sous le titre: " Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques . " Seulement, déjà le* premier *de ces fascicules (Prague, chez C. Windtmann, 1810), malgré toute l'importance de son contenu, a eu la malchance de ne pas être annoncé du tout dans certaines revues savante et d'être annoncé et critiqué seulement de manière très superficielle dans d'autres. Ceci m'a obligé à reporter la suite de ces contributions à une époque ultérieure et à essayer d'abord, en attendant, de voir si je ne parviendrais pas à me faire un peu mieux connaître au monde savant par la publication de quelques mémoires qui seraient d'avantage susceptibles par leur titre d'éveiller l'attention. A cette fin, a paru en 1816 le "Théoreme du binôme", etc., ci-dessus (Prague, chez Enders). Le présent mémoire doit également, comme je le souhaite, servir à ce but, et sa publication est , de plus, rendue nécessaire par le fait que je me suis appuyé, dans le mémoire antérieur sur le théorème démontré dans le mémoire que voici. Plusieurs autres mémoires qui sont pareillement achevés et prêts pour l'impression, par exemple un qui doit porter le titre : Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Belrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Vorausselzung gelöst ("Les trois problèmes de la rectification des courbes, du calcul des aires et du calcul des volumes, résolus sans intervention de l'infiniment petit, de l'hypothèse d' ARCHIMEDE et de toute autre hypothèse non rigoureusement démontrée ") attendent encore chez l'éditeur.*

Pour avoir la possibilité de poursuivre plus loin ce chemin qui me parait le plus avantageux, la seule faveur *que je dois* solliciter *auprès du public consiste en ceci : de ne pas, à cause de ses petites dimensions, laisser passer ce mémoire particulier, mais de l'examiner au contraire avec toute la rigueur possible et aussi de ne pas hésiter à rendre publics les résultats de cet examen pour qu'on puisse expliquer plus distinctement ce qui ne l'est peut-être pas suffisamment, pour qu'on puisse laisser*

[22] Cette théorie devrait mériter l'attention pour deux raisons au moins : *premièrement*, parce qu'elle est la seule dans laquelle on ne pouvait trouver aucune erreur manifeste; ensuite, parce que la plus grand géomètre français actuellement vivant, LEGENDRE, est tombé sur exactement la même idée concernant ce sujet dans la *dixième* édition de ses *Eléments de Géométrie*, Paris, 1813, certainement tout à fait indépendamment de moi.

tomber ce qui est tout à fait incorrect, mais surtout pour que ce qui est vrai et juste parvienne, le plus tôt sera le mieux, à une acception générale.

Après avoir étudié quelques comportements de suites et de séries, en particulier les progressions géométriques et les séries dont le terme général est (en valeur absolue) plus petit que celui d'une progression géométrique de raison (en valeur absolue) strictement inférieure à 1, Bolzano met en évidence la propriété de "Cauchy" : la différence entre le $n^{ème}$ terme et tout terme ultérieur reste plus petite que toute grandeur donnée si on a pris n suffisamment grand. La convergence d'une telle suite est alors établie au §7 (c'est maintenant le critère de Cauchy), mais il y a un vice de raisonnement : Bolzano assure l'existence d'une grandeur limite invariable X par le fait que les termes de la suite fournissent des approximations aussi proches que l'on veut de X qui *"peut donc être déterminée aussi exactement que l'on voudra"*, mais il suppose déjà cette existence. L'unicité est par contre correctement démontrée. Sans une construction précise des réels il ne pouvait faire mieux !

> *§ 7 Théorème - Si dans une série*[23] *de grandeurs :*
>
> $$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots , F_n(x), \dots , F_{n+r}(x)$$
>
> *la différence entre son $n^{ème}$ terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$, aussi éloigné soit-il du $n^{ème}$, reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine <u>grandeur</u> <u>constante,</u> et <u>une</u> <u>seule,</u> dont s'approchent toujours d'avantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin.*

La première partie de la démonstration qui va suivre développe l'idée de l'existence d'une grandeur invariable X qui approche d'aussi près que l'on veut les termes de la suite $F_n(x)$. Pour une précision d donnée, ce terme $F_n(x)$ est déterminable car le rang n ne dépend que de la précision d imposée et non de X elle -même. L'existence est d'ailleurs affirmée comme **conséquence de sa non-impossibilité** ! Notons encore l'écriture des encadrements "$-\varepsilon<A<\varepsilon$ "sous la forme "$A< \pm\varepsilon$ ".

---

[23] Au sens actuel de suite.

Démonstration - Il ressort du §6[24] *qu'une série telle que la décrit le théorème est possible. La supposition cependant qu'il existe une grandeur X dont s'approchent d'aussi près que l'on veut les termes de cette série lorsqu'on la prolonge plus loin, ne comporte certainement aucune impossibilité, si l'on ne suppose pas encore que cette grandeur soit seulement* ***unique*** *et* ***invariable****. Car si cela doit être uné grandeur qui peut varier, on pourra la prendre assurément toujours telle qu'elle s'approche de très près du terme $F_n(x)$ qu'on est en train de lui comparer , et même telle qu'elle lui soit tout à fait égale. Mais également l'hypothèse d'une grandeur* ***invariable*** *ayant cette propriété d'approcher les termes de notre série* ***ne contient rien d'impossible****: cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra. Car en admettant qu'on veuille déterminer X avec une précision telle que la différence entre la valeur supposée et la vraie valeur de X ne dépasse pas une valeur donnée d si petite qu'elle soit : il suffit de choisir, dans la série donnée, un terme $F_n(x)$ ayant la propriété que tout $F_{n+r}(x)$ en diffère moins que de $\pm d$. Par hypothèse, un tel $F_n(x)$ doit exister. Je dis maintenant que la valeur de $F_n(x)$ diffère au plus de $\pm d$ de la vraie valeur de la grandeur X. Car si l'on augmente arbitrairement r, avec le même n, alors la différence :*

$$X - F_{n+r}(x) = \pm\omega$$

doit être aussi petite que l'on veut. Mais la différence :

$$F_n(x) - F_{n+r}(x)$$

reste toujours < $\pm d$, aussi grand que l'on prenne r. Par conséquent la différence :

$$X - F_n(x) = (X - F_{n+r}(x)) - (F_n(x) - F_{n+r}(x))$$

doit rester toujours :

$$< \pm(d+\omega)$$

Mais comme cette différence est une grandeur ***constante*** *pour le même n et que ω peut être rendu aussi petit que l'on voudra par l'augmentation de r : alors on doit avoir :*

$$X - F_n(x) = ou < \pm d\,.$$

---

[24] Exemples : Les sommes partielles des séries dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang; celles des progressions géométriques dont la raison est en valeur absolue < 1.

Car si elle était ***plus grande*** *et par exemple :*

$$= \pm(d+e),$$

il serait impossible d'avoir le relation :

$$d+e < d+\omega,$$

c'est-à-dire :

$$e < \omega,$$

lorsqu'on continue à diminuer de plus en plus ω. La vraie valeur de X diffère donc au plus de d de la valeur du terme $F_n(x)$, et peut être déterminée aussi exactement que l'on voudra, puisqu'on peut prendre d arbitrairement petit. Il existe donc une ***grandeur réelle*** *dont s'approchent d'aussi près que l'on voudra les termes de la série que nous venons de discuter, si on la prolonge suffisamment loin.*

Puis la deuxième partie de la démonstration de Bolzano montre l'unicité par un raisonnement par l'absurde : si deux grandeurs ont des valeurs différentes, alors on ne peut rendre leur différence aussi petite que l'on veut.

Or il n'existe qu'une valeur unique de cette sorte. Car si nous supposions qu'il existe, à côté de X, encore une autre valeur ***constante*** *Y dont s'approchent d'aussi près que l'on veut le termes de la série lorsqu'on la prolonge suffisamment loin, alors les différences :*

$$X - F_{n+r}(x) = \omega \text{ et } Y - F_{n+r}(x) = \omega_1$$

devraient être aussi petites que l'on veut, lorsqu'on laisse r devenir suffisamment grand. La même chose devrait donc être valable aussi pour leur propre différence, c'est-à-dire pour :

$$X - Y = \omega - \omega_1$$

ce qui est impossible si X et Y doivent être des grandeurs constantes, à moins qu'on ne suppose $X = Y$.

Enfin au S12 Bolzano démontre le **théorème de la borne supérieure**. Remarquons que l'énoncé ne parle pas "d'ensembles", ni de "majorants" ni de "minorants" d'une partie car il faudrait concevoir des "*ensembles*" infinis "en acte" ce qui n'est pas conforme à l'héritage de la pensée grecque. Mais ce n'est sans doute pas un hasard si Bolzano s'attaque à la fin de sa vie à la construction des réels ainsi qu'à celle d'une théorie des ensembles dans une publication posthume "*Paradoxes de l'infini"-1851-* La théorie des ensembles de CANTOR ne date que de 1874 .

Aussi l'énoncé du théorème par Bolzano est-il assez lourd: il ne considère pas l'*ensemble* de tous les x qui vérifient une propriété donnée M, mais s'intéresse à l'existence d'une valeur u (la plus grande possible) telle que M soit vérifiée par tous les nombres inférieurs (strictement) à u. Il démontre alors que si M n'est pas toujours vérifiée, il existe bien une grandeur U maximum ayant la propriété énoncée pour u. En termes modernes les u considérés ne sont autres que les **minorants** de l'ensemble non vide des x **qui ne vérifient pas M** et U est le plus grand de ces minorants: C'est bien la **borne inférieure** de l'ensemble précédent. Il faut souligner l'importance ici des raisonnements par l'absurde et le remarquable procédé de dichotomie mis en oeuvre pour faire apparaître deux séries de Cauchy encadrant leur limite commune qui sera la borne cherchée.

> *§12 Théorème - Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs d'une grandeur variable x, mais appartient à toutes celles qui sont plus petites qu'un certain u : alors il existe toujours une grandeur U qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures x possèdent la propriété M.*

En termes modernes la démonstration de Bolzano ci-dessous consiste à définir un intervalle [u,V] de largeur D >0, tel que l'extrémité V ne vérifie pas la propriété (P) relative à M énoncée pour u, puis à le découper en deux, quatre, ..., 2^n, ...etc., tant que l'extrémité droite de chaque intervalle ainsi obtenu ne vérifie pas (P). Si ce procédé de dichotomie mis en oeuvre ne s'arrête pas alors u est la plus grande valeur U cherchée, car s'il existe un nombre u+d strictement supérieur à u qui vérifie (P), alors pour n suffisamment grand, le nombre u + $\frac{D}{2^n}$ sera aussi près que l'on voudra de u et vérifiera (P) dès qu'il sera inférieur à u+d: le procédé s'arrêtera en un nombre fini d'étapes. Si ce procédé s'arrête au rang m, c'est donc que (P) est vérifiée par le nombre u + $\frac{D}{2^{m-1}}$ et non par u + $\frac{D}{2^m}$ et on peut alors réitérer le processus des dichotomies en partant de l'intervalle [$u+\frac{D}{2^m}$, $u+\frac{D}{2^{m-1}}$] qui vérifie les mêmes conditions que l'intervalle initial [u,V] . Si l'algorithme ainsi mis en oeuvre s'arrête, c'est qu'une extrémité gauche d'un des intervalles obtenus à la fin de chaque procédé de dichotomies est en fait la plus grande valeur U cherchée et sinon, la suite de ces extrémités gauches relève bien du §9 (elle est de Cauchy !) et définit donc une grandeur U qui est bien la **grandeur maximum** cherchée: en effet toute valeur inférieure strictement à U sera inférieure strictement aux termes de la suite considérée à partir d'un certain rang donc, par construction de ces nombres, vérifiera M. Mais toute valeur supérieure strictement à U sera strictement supérieure à l'extrémité droite d'un des intervalles obtenus auparavant et donc ne vérifiera pas (P).

Démonstration- 1)Puisque la propriété M vaut pour tous les x qui sont plus petits que u et non toutefois pour tous les x en général : il existe certainement quelque grandeur V=u+D (où D représente quelque chose de positif) dont on peut affirmer que M n'appartient pas à tous les x qui sont <V=u+D. Si je soulève donc la question, si M appartient bien à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m},$$

en prenant comme valeur de l'exposant m, dans l'ordre, d'abord 0, ensuite 1, ensuite 2, ensuite 3, etc... : je suis certain qu'on devra répondre à la première de mes questions par la négative. Car la question de savoir si M appartient bien à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^0},$$

est la même que celle-ci : M appartient-il à tous les x qui sont < u + D ? ce qu'il faut par hypothèse nier. Il s'agit seulement de savoir si l'on va me répondre par la négative aussi à toutes les questions suivantes qui se posent quand on prend m de plus en plus grand. Si cela doit être le cas il est évident que u lui même est la plus grande valeur pour laquelle est valable l'affirmation que tous les x qui sont plus petits que u possèdent la propriété M. Car s'il y en avait un encore plus grand, par exemple u+d, c'est-à-dire si l'affirmation que tous les x qui sont < u+d ont également la propriété M était vraie, il est évident que, en prenant m suffisamment grand ,

$$u + \frac{D}{2^m}$$

deviendrait une fois = ou < u+d, et, en conséquence, on devrait aussi avoir, si M appartient à tous les x qui sont < u+d, que le même M appartient aussi à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} \; ;$$

il en résulte qu'on devrait me répondre à cette question par l'affirmative et non par la négative. Il est donc prouvé qu'il existe dans ce cas (lorsqu'on répond par la négative à toutes les questions ci-dessus) une certaine valeur U (à savoir u lui-même), qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer avec certitude que tous les x qui lui sont inférieurs possèdent la propriété M.

2) En revanche, si on me répond à la question ci-dessus une fois par l'affirmative , et si m est la valeur déterminée de l'exposant pour laquelle on me répond pour la **première** *fois par l'affirmative (m peut désigner aussi 1; seulement, comme nous l'avons vu, ne peut pas désigner 0) : je sais maintenant que la propriété M appartient à tous les x qui sont :*

$$< u + \frac{D}{2^m} \, ,$$

mais non plus à tous ceux qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^{m-1}} \, .$$

Mais la différence entre :

$$u + \frac{D}{2^m} \quad et \quad u + \frac{D}{2^{m-1}} \quad est = \frac{D}{2^m} \, .$$

Si je procède avec cette dernière de la même façon qu'avec la différence D tout à l'heure, c'est-à-dire si je soulève la question de savoir si M appartient bien à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} \; ;$$

et si je donne à l'exposant n d'abord la valeur 0, ensuite 1, ensuite 2, etc... : je suis de nouveau certain qu'on devra me répondre au moins à la première de ces questions par la négative. Car demander si M appartient à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+0}}$$

ne signifie rien d'autre que de demander si M appartient à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^{m-1}} \;;$$

ce à quoi on a déjà répondu non. Si on devait cependant répondre par la négative aussi à toutes mes questions suivantes, aussi grand que je fasse successivement n: alors il serait évident, comme tout à l'heure, que :

$$u + \frac{D}{2^m}$$

serait cette valeur maximale, c'est-à-dire U, dont on peut affirmer avec certitude que tous les x inférieurs à U possèdent la propriété M.

3) Si, par contre, on me répond à une de ces questions affirmativement et si cela arrive pour la première fois pour une valeur déterminée n : je sais maintenant que M appartient à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} \;;$$

mais qu'il n'appartient plus à tous ceux qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n-1}} \;.$$

La différence entre ces deux grandeurs est :

$$= \frac{D}{2^{m+n}} \;;$$

et je procède avec elle de nouveau de la même façon comme auparavant avec $\frac{D}{2^m}$*, etc...*

4) Si je continue de cette manière aussi loin que l'on voudra, on voit que le résultat que j'obtiens en dernier lieu doit être l'un des deux suivants :

a) Ou bien je trouve une valeur de la forme :

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

qui se présente à moi comme la plus grande dont on peut affirmer avec certitude que tous les x qui lui sont inférieurs possèdent la propriété M. Ceci arrive dans le cas où *on me répondra par la négative pour toutes les valeurs de s aux questions de savoir si M appartient à tous les x qui sont :*

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r+s}} .$$

b) Ou bien je trouve au moins que M appartient certes à tous les x qui sont :

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} ,$$

mais n'appartient plus à tous ceux qui sont

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}} .$$

Il m'est permis ici d'augmenter toujours le nombre de termes dans ces deux grandeurs par de nouvelles questions.

5) Si c'est le premier cas qui a lieu, la vérité de notre théorème est déjà prouvée. Remarquons dans le deuxième cas que la grandeur

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

représente une série dont je peux augmenter arbitrairement le nombre des termes et qui appartient à la classe de celles décrites dans le § 5[25]*, parce qu'elle décroît*[26]*, suivant que m, n, ...,r sont soit tous = 1, soit en partie encore plus grands, ou bien exactement comme une progression géométrique dont la raison est la fraction proprement dite ½ , ou bien encore plus rapidement. Il s'ensuit de là qu'elle a la propriété décrite dans le § 9*[27]*, c'est-à-dire qu'il existe une certaine grandeur constante dont elle peut se rapprocher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on augmente suffisamment l'ensemble de ses termes . Soit U cette grandeur; alors j'affirme que la propriété M vaut pour tous les x qui sont < U. Car si elle ne valait pas pour un certain x qui est < U, par exemple pour :*

---

[25] Le §5 montre (par un calcul classique de sommes partielles) que les séries dont les termes décroissent au moins comme dans une progression géométrique dont la raison est en valeur absolue < 1 sont de Cauchy (au sens moderne).

[26] Ce sont les termes $\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$ qui décroissent.

[27] Les séries vérifiant le critère de Cauchy sont convergentes cf §7 .

$$x = U - \delta,$$

alors la grandeur :

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$$

devrait toujours rester éloignée de U de la distance δ, parce que la propriété M doit avoir lieu pour tous les x qui sont plus petits que cette grandeur. Car tout x qui est :

$$= u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega,$$

aussi petit que soit ω, possède la propriété M qui, par contre, ne doit pas appartenir à :

$$x = U - \delta :$$

on doit donc avoir :

$$U - \delta > u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} - \omega,$$

c'est-à-dire :

$$U - [\, u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}} \,] > \delta - \omega.$$

Par conséquent la différence entre U et la série ne pourrait pas devenir aussi petite que l'on voudra, parce que $\delta - \omega$ ne peut pas devenir aussi petit que l'on veut (δ ne varie pas, tandis que ω peut être rendu aussi petit que toute grandeur donnée). Mais M ne peut être aussi valable pour tous les $x < U + \varepsilon$. Car parce qu'on peut approcher la valeur de la série :

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

d'aussi près qu'on voudra de la valeur de la série :

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$

puisque la différence des deux n'est que :

$$\frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}},$$

parce que, de plus, la valeur de la dernière série peut s'approcher de la grandeur U d'aussi près que l'on voudra : de même, la valeur de la première série et U peuvent s'approcher d'aussi près l'une de l'autre que l'on voudra . Donc,

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

peut certainement devenir < $U + \varepsilon$. Mais alors M n'est plus, d'après l'hypothèse, valable pour tous les x qui sont :

$$< \; u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r-1}}$$

et, par conséquent, d'autant moins pour tous les x qui sont < $U + \varepsilon$. Donc, U est la plus grande valeur dont on peut affirmer avec certitude que tous les x qui lui sont inférieurs possèdent la propriété M.

Dans les paragraphes suivants (non retranscrits ici), Bolzano dénonce quelques énoncés faux proches de son théorème (§13 et 14), puis il démontre au §15, comme il l'a indiqué dans sa préface, le théorème des valeurs intermédiaires et précise au §16 la non unicité de la solution trouvée. Enfin les § 17 et 18 précise le cas des fonctions polynomiales: elles vérifient la loi de continuité et s'annulent si elles changent de signes entre deux valeurs de la variable.

2) Les deux grands types de construction :

A) Les coupures de DEDEKIND (1872)

En 1858, Richard Dedekind (1831-1916) cherche, à propos du théorème de la "limite monotone", à préciser les notions de limites et de continuité des grandeurs. Sans rejeter l'intérêt didactique des "évidences géométriques" il refuse, à l'instar de BOLZANO, de s'en satisfaire et décide de chercher "un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale". C'est, écrira-t-il, le 24 Mars 1858 qu'il y parvint mais il ne publie pas ses découvertes avant 1872. Recevant en mars 1872 un texte de E. Heine construisant les réels par les "suites de Cauchy" (cf. §B) il se décide à publier son essai intitulé "**Continuité et nombres irrationnels**" d'autant qu'il trouve sa propre présentation "plus simple par sa forme" et "soulignant de façon plus précise" le point central. Il reçoit quasi simultanément la construction de Cantor (*Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques - 1872*) dont il souligne qu'il n'a pas dégagé, comme lui, le "**caractère complet**" de sa construction: Cantor, après avoir construit son système des Réels par les "limites" de suites de Cauchy de rationnels, n'hésite pas à définir des systèmes d'ordre supérieur en réitérant sa construction par les "limites" de suites de Cauchy de nombres réels et ainsi de suite et ne s'aperçoit pas du caractère achevé de sa première construction. Dedekind met bien en évidence que son procédé de passage des rationnels aux réels appliqué aux réels ne permet pas de construire de nouveaux nombres à cause du caractère **continu** du système des nombres réels ainsi créés (*cf plus loin 5.)*.

On peut aussi noter que Dedekind n'hésite pas à concevoir et à raisonner globalement sur des domaines ou systèmes numériques **infinis** ce qui est tout à fait inhabituel pour l'époque. Les coupures ne sont-elles pas définies comme des "classes" (ensembles) infinies d'éléments du domaine infini des rationnels ! La "théorie des ensembles" naîtra bien quelques années plus tard (Cantor,...)

Voici donc la préface de ce célèbre essai suivi de quelques extraits significatifs des procédés mis en oeuvre par Dedekind (traduction de J. Milner revue par H. Sinaceur - brochure de l'IREM de Toulouse) .

CONTINUITE ET NOMBRES IRRATIONNELS

Par Richard Dedekind

Dédié à mon père bien-aimé, conseiller aulique, docteur en droit, professeur ·à Brunswick, Julius Levin Ullrich Dedekind, à l'occasion du 50ème anniversaire de son entrée en fonction, le 26 Avril 1872.

Préface

Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur au Polytechnikum fédéral de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. A propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croit constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale. On dit fort souvent que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues et pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité et même les présentations les plus rigoureuses du calcul différentiel ne fondent pas leurs démonstrations sur la continuité, mais font appel soit - plus ou moins consciemment - à des représentations géométriques , soit à des représentations permises par la géométrie, ou bien elles s'appuient sur des théorèmes qui eux-mêmes ne sont jamais démontrés de façon purement arithmétique. Ceux-ci comprennent, par exemple, le théorème cité plus haut, - et un examen plus *précis m'a convaincu que celui-ci ou tout théorème équivalent peut dans une certaine mesure être considéré comme un fondement suffisant de l'analyse infinitésimale. Il ne s'agissait plus alors que de découvrir son origine effective dans les éléments de l'arithmétique et d'obtenir ainsi une définition véritable de la nature de la continuité. J'y parvins le 24 Mars 1858 et quelques jours après, je communiquai le résultat de mes réflexions à mon estimé ami Durège, ce qui amena une discussion longue et animée. Plus tard, j'ai bien exposé à tel ou tel de mes élèves ces idées sur un fondement scientifique de l'arithmétique et ici même, à Brunswick, j'ai fait un exposé sur ce sujet devant le cercle des professeurs scientifiques, mais je ne pouvais me décider vraiment à les publier effectivement, d'abord parce que l'exposé n'(en) est pas très facile et parce que, d'autre part, la chose est si peu féconde. J'avais déjà plus ou moins pensé à prendre ce thème pour objet de cet écrit de circonstances, quand il y a quelques jours, le 14 Mars, j'eus entre les mains, grâce à l'amabilité de son très estimé auteur, l'étude "Les éléments de la théorie des fonctions", de E. Heine (Journal de Crelle, tome 74), et je fus confirmé dans mon intention. Pour l'essentiel, je suis absolument d'accord avec le contenu de cet essai, et il ne peut en être autrement, mais j'avouerai franchement qu'à mon avis, la présentation que j'en donne est plus simple par sa forme, et souligne de façon plus précise ce qui est proprement le point central. Et au moment où je rédige cette préface (20 Mars 1972), je reçois l'intéressante étude de G. Cantor : "De l'extension d'une proposition de la théorie des séries trigonométriques" (Mathematische Annalen de Clebsch et Neumann, tome 5) dont je remercie vivement le pénétrant auteur. Comme je le constate après une lecture rapide, l'axiome du paragraphe 2, mis à part la forme extérieure dont il est revêtu, concorde pleinement avec ce que je désigne plus bas dans le paragraphe 3 comme l'essence de la continuité. Mais par ma conception même du domaine complet des nombres réels, je ne parviens pas encore à reconnaître l'utilité qu'il y a à distinguer, ne fût ce que de manière conceptuelle, des grandeurs numériques réelles d'une espèce encore supérieure.*

I. Propriété des nombres irrationnels :

Dans ce paragraphe, après avoir rappelé les propriétés des nombres entiers, "***Compter même n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des nombres entiers positifs***", structurés par les quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, Dedekind souligne que l'impossibilité "d'inverser" l'addition ainsi que la multiplication a conduit à la création des nombres négatifs puis des rationnels. Introduisant ensuite la notion "d'ordre " sur le système des rationnels par des définitions purement arithmétiques, il en dégage les propriétés de transitivité et d'ordre total ainsi que la non finitude des nombres compris entre deux rationnels différents donnés.

Puis il souligne les propriétés fondamentales de "***corps numérique***" et de "***domaine ordonné unidimensionnel et infini dans deux directions opposées***" du système des nombres rationnels.

> *.../Il suffit de considérer que précisément cette limitation que rencontre le développement des opérations indirectes est devenue la cause véritable d'un nouvel acte de création; c'est ainsi que l'esprit humain crée les nombres négatifs et fractionnaires, et on gagne dans le système de tous les nombres rationnels un instrument d'une perfection infiniment supérieure . Ce système que je désignerai par R*[1] *a avant toutes choses la propriété d'être complet et clos, trait que j'ai désigné ailleurs comme caractéristique d'un* ***corps numérique****, et qui consiste en ceci que les 4 opérations fondamentales peuvent toujours être effectuées avec deux individus dans R, c'est-à-dire que le résultat en est toujours à nouveau un individu déterminé de R, si l'on excepte le cas unique de la division par le nombre zéro.*
>
> *Mais pour notre but immédiat, une autre propriété du système R est encore plus importante; on peut l'exprimer ainsi : le système R constitue un domaine ordonné, unidimensionnel, infini dans deux directions opposées. Ce que l'on veut dire par là est indiqué suffisamment par le choix des expressions empruntées à des représentations géométriques; il est d'autant plus nécessaire de souligner les particularités purement arithmétiques correspondantes, pour que ne subsiste même*

[1] La notation actuelle de l'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q}$.

pas l'apparence que l'arithmétique a besoin de ces représentations qui lui sont étrangères.

Si l'on veut exprimer que les signes a et b signifient un seul et même nombre rationnel, on pose à la fois a=b et b=a . La différence de deux nombres rationnels a et b se montre en ceci que la différence a-b a une valeur soit positive, soit négative . Dans le premier cas, a est dit plus grand que b, b plus petit que a, ce qu'indiquent aussi les signes a>b, b<a. Comme dans le deuxième cas, b-a a une valeur positive, alors b>a, a<b .

2.Comparaison des nombres rationnels avec les points d'une droite

Ici Dedekind met en évidence un ordre sur les points d'une droite "orientée" où l'on a fixé une origine ainsi qu'une unité de longueur et l'analogie avec les propriétés des inégalités entre les nombres rationnels.

Puis il insiste sur la véritable corrélation qui existe entre les deux systèmes, R pour les nombres et L pour les points de la droite.

.../On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite un certain point o, origine ou point-zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. A l'aide de cette dernière on peut construire pour tout nombre rationnel a une longueur correspondante et si l'on reporte celle-ci sur la droite à partir du point o vers la droite ou vers la gauche, selon que a est positif ou au négatif on obtient une extrémité p_ , qui peut être désignée comme le point correspondant au nombre a ; au nombre rationnel zéro correspond le point o. De cette manière à tout nombre rationnel a, c'est-à-dire à tout individu dans R correspond un et un seul point p_ , c'est-à-dire un individu dans L . Si par exemple aux deux nombres a, b correspondent les deux points p_ , q_ et si a>b alors p_ est à gauche de q_ . Aux lois I, II, III du paragraphe précédent correspondent parfaitement les lois I, II, III de celui-ci.

3. Continuité de la droite

En se référant aux "Grecs de l'Antiquité" et à l'existence de longueurs incommensurables, Dedekind montre que le domaine des nombres rationnels est lacunaire et insuffisant pour représenter tous les points d'une droite. Mais réfutant le modèle des rapports de grandeurs pour définir les nombres il réaffirme son rejet de "***considérations étrangères dans l'Arithmétique elle-même***" et son exigence de "***définir complètement les nombres irrationnels eux aussi par les seuls nombres rationnels***" . De cette opposition entre le caractère lacunaire du système des nombres rationnels et celui de continuité de la droite Dedekind dégage alors sa définition de "***l'essence de la continuité*** ": ***Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions*** " .

Mais il est un fait de la plus grande importance : c'est qu'il existe sur la droite L une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel. Si en effet le point p correspond au nombre rationnel a , on sait que la longueur op est commensurable avec l'unité de longueur invariable utilisée pour la construction, c'est-à-dire qu'il existe une troisième longueur, que l'on appelle une mesure commune et dont ces deux longueurs sont des multiples entiers. Mais les Grecs de l'Antiquité ont déjà su et montré qu'il existe des longueurs incommensurables avec une unité de longueur donnée, par exemple[2] la diagonale du carré dont le côté est l'unité de longueur. Si l'on reporte une telle longueur sur la droite à partir du point o, on obtient une extrémité qui ne correspond à aucun nombre rationnel. Comme on peut en outre facilement démontrer qu'il existe une infinité de longueurs incommensurables avec l'unité de longueur, on peut affirmer : la droite L est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels n'est riche en individus numériques. /...

.../ En effet le mode d'introduction des nombres irrationnels pratiqué jusqu'à présent se rattache au concept des grandeurs extensives - concept nulle part rigoureusement défini - et explique le nombre comme le résultat de la mesure d'une telle grandeur par une deuxième de même nature. Au lieu de cela j'exige que l'arithmétique se développe à partir d'elle-même.

---

[2] C'est équivalent à l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Que la liaison ainsi établie avec des représentations non arithmétiques ait fourni l'occasion immédiate à l'élargissement du concept de nombre, on peut sans doute le concéder de façon générale (bien que cela n'ait sûrement pas été le cas pour l'introduction des nombres complexes) , mais cela ne justifie certainement pas que l'on admette ces considérations étrangères dans l'arithmétique elle-même, dans la science des nombres. De même que les nombres négatifs et fractionnaires naissent d'une libre création et de même qu'il est nécessaire et possible de ramener les lois des calculs effectués avec ces nombres aux lois des calculs effectués avec des nombres entiers positifs, de même l'on doit s'efforcer de définir complètement les nombres irrationnels eux aussi par les seuls nombres rationnels. Mais comment ? Telle est la question.

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine R des nombres rationnels et une droite a amené à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ? /...

.../ Au paragraphe précédent on attire l'attention sur le fait que tout point p_ de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telle que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

"Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, alors il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions ." /...

.../ Accepter cette propriété de la ligne n'est rien de plus qu'un axiome, par lequel nous reconnaissons seulement à la ligne sa continuité, par lequel nous pensons la ligne comme continue. Si l'espace a quelque existence réelle, il n'est pas nécessairement continu, et une quantité innombrable de ses propriétés resteraient inchangées même s'il était discontinu. Et si nous savions de façon certaine que l'espace est discontinu, rien ne pourrait nous empêcher, si cela nous convenait, de le rendre continu en remplissant par la pensée les lacunes, mais ce remplissage consisterait à créer de nouveaux individus ponctuels et devrait ce faire selon le principe énoncé ci-dessus.

4. Création des nombres irrationnels

Cette définition de la continuité va rendre possible une construction effective des nombres irrationnels. Dedekind, à l'aide du modèle de la droite, mais avec une formulation purement numérique introduit ici la notion clef de **coupure** dans le système des rationnels. Il s'agit, comme le texte de Dedekind le montre clairement, d'une partition de l'ensemble des rationnels en deux classes A1 et A2 telles que tout nombre de A1 soit plus petit que tout nombre de A2. On peut alors distinguer les coupures produites par un rationnel r qui correspondent avec nos notation actuelles à la partition {]-∞; r],]r ; +∞[}, la borne r pouvant être aussi d'abord ouverte puis fermée, les deux coupures ainsi produites étant qualifiées de "non essentiellement différentes".

Les derniers mots indiquent déjà suffisamment de quelle façon le domaine R des nombres rationnels, non continu, doit être complété en un domaine continu. Dans le paragraphe 1. on souligne (III) que tout nombre rationnel opère une division du système R en deux classes A1, A2 telle que tout nombre a1 de la première classe A1 est plus petit que tout nombre a2 de la deuxième classe A2; le nombre a est soit le plus grand nombre de la classe A1 soit le plus petit nombre de la classe A2. Soit donnée maintenant une certaine partition du système R en deux classes A1, A2 ayant pour seule propriété caractéristique que tout nombre a1 dans A1 est plus petit que tout nombre a2 dans A2; nous nommerons par souci de brièveté une telle partition une "coupure", que nous désignerons par (A1, A2). Nous pouvons dire alors que tout nombre rationnel a "opère" une, ou à vrai dire, deux sections que nous ne considérerons cependant pas comme essentiellement différentes, cette coupure à d'autre part la propriété suivante : ou bien il existe parmi les nombres de la première classe un nombre qui en est le plus grand, ou bien, il existe parmi les nombres de la deuxième classe un nombre qui en est le plus petit. Et réciproquement, si une coupure a aussi cette propriété, elle est opérée par ce nombre rationnel qui est le plus grand ou le plus petit. Mais on se persuade aisément qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels. L'exemple le plus immédiat en est celui-ci : /...

Ici Dedekind étudie de manière détaillée l'exemple de la coupure {A1, A2} où A2 est l'ensemble des rationnels positifs de carré supérieur à un nombre entier D (non carré d'entier) donné et A1 son complémentaire et prouve que cette partition (qui est bien une coupure) ne peut provenir d'un rationnel (en termes actuels $\sqrt{D}$ est irrationnel, A1 (respectivement A2) n'a pas de borne supérieure (respectivement inférieure) rationnelle).

Dedekind peut alors identifier les rationnels aux coupures qu'ils définissent et donner le nom de **nombre irrationnel** aux autres coupures ! Tous ces nombres, rationnels ou irrationnels, forment le système des **nombres réels.**

> /... *Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet ou non-continu du domaine R de tous les nombre rationnels.*
>
> *Chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A1, A2) non produite par un nombre rationnel nous créons un nombre nouveau, irrationnel x, que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A1, A2); nous dirons que le nombre x correspond à cette coupure ou qu'il opère cette coupure. Donc, à partir de maintenant, à toute coupure déterminée correspond un et un seul nombre déterminé, rationnel ou irrationnel, et nous considérons toujours deux nombres comme différents ou non-égaux si (et seulement si) ils correspondent à deux coupures essentiellement différentes.*

Ensuite Dedekind définit une relation d'ordre dans l'ensemble des coupures qui soit compatible avec l'identification entre les rationnels et les coupures qu'ils définissent. Pour comparer deux coupures α = {A1, A2} et β = {B1, B2} il compare les premières classes A1 et B1 par l'inclusion en discutant les différents cas qui peuvent se présenter : $\beta < \alpha$ si B1 $\subset$ A1 et si A1 comporte aux moins deux rationnels distincts qui ne sont pas dans B1 (si B1=A1 alors $\beta = \alpha$ ou si A1 comporte un seul rationnel a1 qui ne soit pas dans B1 alors les deux coupures proviennent de ce nombre a1 et donc à nouveau $\beta = \alpha$). Le cas $\beta > \alpha$ est traité de même et tous les nombres rationnels ou irrationnels sont comparables par cette inégalité : l'ordre est bien total. Enfin le § se termine sur un résultat qui renvoie à la théorie des raisons d'Euclide (cf. §2 - définition 6 du Livre V) :La coupure {A1, A2} définissant un nombre réel α est telle que A1 est constituée des nombres rationnels inférieurs à α et A2 est constituée des nombres rationnels supérieurs à α.

Pour trouver maintenant un principe de l'ordonnance de tous les nombres réels, c'est-à-dire des nombres rationnels et irrationnels, nous devons examiner d'abord les relations existant entre deux coupures quelconques ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) et ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) opérées par deux nombres quelconques α et β. Il est évident qu'une coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) est déjà complètement donnée si l'une des deux classes, par exemple la première $\underline{A}1$ est connue, car la deuxième $\underline{A}2$ consiste en tous les nombres rationnels non contenus dans $\underline{A}1$, et la propriété caractéristique d'une telle première classe $\underline{A}1$ consiste en ceci que si le nombre $\underline{a}1$ y est contenu, elle contient aussi tous les nombres plus petits que $\underline{a}1$. Si maintenant l'on compare entre elles deux premières classes $\underline{A}1$, $\underline{B}1$, il peut se faire 1°) qu'elles soient parfaitement identiques, c'est-à-dire que tout nombre $\underline{a}1$ contenu dans $\underline{A}1$ est aussi contenu dans $\underline{B}1$ et que tout nombre $\underline{b}1$ contenu dans $\underline{B}1$ est aussi contenu dans $\underline{A}1$. Dans ce cas $\underline{A}2$ lui aussi est nécessairement identique à $\underline{B}2$. Les deux coupures sont parfaitement identiques, ce qui s'écrit symboliquement $\alpha=\beta$ ou $\beta=\alpha$.

Mais si les deux classes $\underline{A}1$, $\underline{B}1$ ne sont pas identiques, il existe dans l'une par exemple dans $\underline{A}1$, un nombre $\underline{a}'1=\underline{b}'2$ qui n'est pas contenu dans l'autre classe $\underline{B}1$ et se trouve par suite dans $\underline{B}2$; donc il est certain que tous les nombres $\underline{b}1$ contenus dans $\underline{B}1$ sont plus petits que ce nombre $\underline{a}'1=\underline{b}'2$ et par conséquent tous les nombres $\underline{b}1$ sont aussi contenus dans $\underline{A}1$.

Si maintenant 2°) ce nombre $\underline{a}'1$ est le seul de $\underline{A}1$ qui ne soit pas contenu dans $\underline{B}1$, alors tout autre nombre $\underline{a}1$ contenu dans $\underline{A}1$ est contenu dans $\underline{B}1$ et par conséquent plus petit que $\underline{a}'1$, c'est-à-dire que $\underline{a}'1$ est le plus grand de tous les nombres $\underline{a}1$, donc la coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) est produite par le nombre rationnel $\alpha= \underline{a}'1=\underline{b}'2$. De l'autre coupure ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) nous savons déjà que tous les nombres $\underline{b}1$ dans $\underline{B}1$ sont aussi contenus dans $\underline{A}1$ et plus petits que le nombre $\underline{a}'1=\underline{b}'2$ contenu dans $\underline{B}2$; mais tout autre nombre $\underline{b}2$ contenu dans $\underline{B}2$ doit être plus grand que $\underline{b}'2$ car sinon il serait aussi plus petit que $a'1$, donc contenu dans $\underline{A}1$ et par conséquent aussi dans $\underline{B}1$, donc $\underline{b}'2$ est le plus petit de tous les nombres contenus dans $\underline{B}2$, et par *conséquent la coupure ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$), elle aussi est opérée par le même nombre rationnel $\beta=\underline{b}'2=\underline{a}'1=\alpha$. Ainsi les deux coupures ne diffèrent que de façon inessentielle.*

Mais si 3°) il existe dans $\underline{A}1$ au moins deux nombres différents $\underline{a}'1=\underline{b}'2$ et $\underline{a}''1=\underline{b}''2$ non contenus dans $\underline{B}1$, il en existe aussi une infinité, parce que l'infinité de nombres situés entre $\underline{a}'1$ et $\underline{a}''1$ (par I.II) est évidemment contenue dans $\underline{A}1$, mais non dans $\underline{B}1$. Dans ce cas nous disons que les deux nombres α et β correspondant à ces deux coupures ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) et ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) qui diffèrent de façon essentielle, sont eux aussi différents et en particulier nous disons que α est plus grand que β, que β est plus petit que α, ce qui s'exprime symboliquement aussi bien par $\alpha>\beta$ que par $\beta<\alpha$. On doit souligner que cette définition est en plein accord avec la précédente, où les deux nombres sont rationnels.

Sont encore possibles les cas suivants. S'il existe 4°) dans $\underline{B}1$ un et un seul nombre $\underline{b}'1=\underline{a}'2$ non contenu dans $\underline{A}1$, les deux coupures ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) et ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) ne diffèrent que de façon inessentielle et elles sont produites par un seul et même nombre $\alpha=\underline{a}'2=\underline{b}'1=\beta$. Mais si 5°) il existe dans $\beta 1$ au moins deux nombres différents non contenus dans $\underline{A}1$, alors $\beta>\alpha$, $\alpha<\beta$. Comme on a ainsi épuisé tous les cas, il résulte que de deux nombres différents, l'un est nécessairement le plus grand, l'autre le plus petit, ce qui implique deux possibilités. Un troisième cas est impossible. Cette idée était déjà contenue dans le choix du comparatif (plus grand, plus petit) pour désigner la relation existant entre α et β, mais notre choix est justifié seulement maintenant après coup. C'est dans de telles recherches, précisément, que l'on doit mettre le plus grand soin à ne pas se laisser induire en toute bonne foi, par un choix précipité d'expressions empruntées à d'autres représentations déjà développées, et à effectuer des transpositions illégitimes d'un domaine dans un autre. Si l'on considère bien le cas $\alpha>\beta$, il résulte que le nombre β, qui est le plus petit, appartient certainement quand il est rationnel à la classe $\underline{A}1$, comme il existe en effet dans $\underline{A}1$ un nombre $\underline{a}'1=\underline{b}'2$ appartenant à la classe $\underline{B}2$, le nombre β, qu'il soit le plus grand dans $\underline{B}1$ ou le plus petit dans $\underline{B}2$, est certainement $\leq \underline{a}'1$ et par conséquent contenu dans $\underline{A}1$. De même il résulte de $\alpha>\beta$ que le plus grand nombre α, quand il est rationnel, appartient certainement à la classe $\underline{B}2$, car $\alpha \geq \underline{a}'1$. Si l'on réunit ces deux considérations, on obtient le résultat suivant : si une coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) est produite *par le nombre α, un nombre rationnel quelconque appartient à la classe $\underline{A}1$ ou à la classe $\underline{A}2$ selon qu'il est plus petit ou plus grand que α ; si le nombre α lui-même est rationnel, il peut appartenir à l'une ou l'autre classe.*

Il en résulte encore ce qui suit : Si $\alpha>\beta$, si donc il existe une infinité de nombres dans $\underline{A}1$ non contenus dans $\underline{B}1$, il existe aussi une infinité de nombres qui sont à la fois différents de α et de β, tout nombre rationnel $\underline{c}$ qui remplit ces conditions est $< \alpha$, car il est contenu dans $\underline{A}1$, et il est en même temps $>\beta$, car il est contenu dans $\underline{B}2$.

5. Continuité du domaine des nombres réels

Ici Dedekind énonce les propriétés de transitivité de la nouvelle inégalité dans le système $\mathfrak{R}$ des nombres réels, la non finitude des réels compris entre deux réels distincts, redéfinit les coupures dans le système $\mathfrak{R}$ et s'assure finalement du **caractère complet** de sa construction: toute coupure dans le système des nombres réels est produite par un réel unique: on ne peut donc plus construire de nouveaux nombres par cette méthode et $\mathfrak{R}$ est un domaine **continu**.

Conformément aux différenciations que l'on vient de poser, le système P de tous les nombres réels constitue un domaine ordonné unidimensionnel, on affirme uniquement par là la validité des lois suivantes :

I - Si $\alpha>\beta$ et $\beta>\gamma$, alors aussi $\alpha>\gamma$. Nous disons que le nombre β est situé entre les points α, γ.

II - Si α, γ sont deux nombres différents, il existe toujours une infinité de nombres différents situés entre α et γ.

III - Si α est un nombre déterminé, tous les nombres du système P se subdivisent en deux classes $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$, dont chacune contient une infinité d'individus; la première classe $\underline{A}1$ embrasse tous les nombres $\alpha 1<\alpha$, la deuxième classe $\underline{A}2$ embrasse tous les nombres $\alpha 2>\alpha$, le nombre α lui-même peut être au choix attribué à la première ou à la seconde classe, et il est alors respectivement le plus grand nombre de la 1ère ou le plus petit de la 2ème. Dans tous les cas la

95

Classe de mathématiques.

(9 heures avec le dessin géométrique.)

ARITHMÉTIQUE.

I. — Numération décimale. Addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers. Théorèmes fondamentaux concernant ces opérations. Explication des règles pratiques pour effectuer ces opérations.

Restes de la division d'une somme, d'une différence, d'un produit par un nombre. Application à la division par 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3 et 11.

P. G. C. D. de deux ou plusieurs nombres. Nombres premiers entre eux. Propriété du P. G. C. D. Conséquences relatives à la divisibilité.

P. P. C. M. de deux ou plusieurs nombres.

Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers.

Application aux diviseurs et aux multiples.

II. — Rapport de deux grandeurs de même espèce. Mesure des grandeurs et notions de fraction.

Propriétés des fractions. Opérations. *Fractions décimales.*

Nombres décimaux.

Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent.

Grandeurs directement et inversement proportionnelles.

Système métrique.

III. — Calcul d'un quotient à une approximation décimale donnée. Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Condition de possibilité.

Carré d'un nombre entier ou fractionnaire.

Le carré d'une fraction n'est jamais égal à un nombre entier.

Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une approximation décimale donnée.

Définition de l'erreur absolue et de l'erreur relative. Exercices.

Programme de Mathématiques

1er Juin 1931 (B.O. 2686)

ALGÈBRE.

Nombres positifs et nombres négatifs. *Opérations.*

Monômes, polynômes. *Opérations.*

Principe relatif à la résolution des équations.

Équations du premier degré.

Équations du second degré à une inconnue (on ne parlera pas des imaginaires). Équations simples qui s'y ramènent.

Inégalités du premier et du second degré.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques.

Logarithmes vulgaires. Usage des tables à cinq décimales.

Intérêts composés et annuités.

Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite par une équation du premier degré.

Rappel des variations et représentations graphiques des fonctions étudiées précédemment.

Dérivée. Signification géométrique, dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, d'un sin x, cos x, tg x, cotg x.

Application à l'étude de la variation de quelques fonctions simples. Notion de fonction primitive. Utilisation pour le calcul de certaines aires (on admettra la notion d'aire).

TRIGONOMÉTRIE (1).

Extension de la notion d'arc et d'angle. Fonctions circulaires (sinus, cosinus, tangente et cotangente).

Théorie des projections. Somme géométrique des vecteurs.

Formules d'addition, formules de multiplication par 2.

Toutes les fonctions circulaires de l'arc a s'expriment rationnellement en fonction de tg $\frac{a}{2}$.

Transformer en produit la somme ou la différence de deux fonctions circulaires, sinus, cosinus. Problème inverse.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales.

Exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. Résolution des triangles.

GÉOMÉTRIE.

I. — Transformation des figures. Translation, rotation, symétrie.

Homothétie et similitude.

Puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère.

Axes radicaux. Plans radicaux.

Polaire d'un point par rapport à deux droites.

Polaire d'un point par rapport à un cercle. Plan polaire d'un point par rapport à une sphère.

Inversion. Projection stéréographique.

II. — Coniques. Ellipse. *Intersection avec une droite. Tangente. Equation réduite de l'ellipse. Ellipse et cercle considérés comme projections l'un de l'autre.*

Hyperbole. Intersection avec une droite. Tangentes. Asymptotes. Equation réduite de l'hyperbole.

Parabole. Intersection avec une droite. Tangentes. Equation réduite de la parabole.

Définition commune des coniques au moyen d'un foyer et d'une directrice.

Sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET GÉOMÉTRIE COTÉE.

Représentation du point, de la droite, du plan.

Intersection de droites et de plans. Application à la représentation des prismes et des pyramides.

Droites et plans perpendiculaires.

Changement de plan, rotation, rabattement. Application aux distances et aux angles.

CINÉMATIQUE.

Relativité du mouvement. Trajectoire.

Mouvement rectiligne. Mouvement uniforme, vitesse numérique. Mouvement varié, vitesse numérique moyenne, vitesse numérique à un instant donné. Accélération numérique. Mouvement uniformément varié.

Mouvement curviligne. Equation horaire, diagramme du mouvement. Vecteur vitesse. Vecteur accélération.

Mouvement circulaire. Mouvement circulaire uniforme. Mouvement sinu-soïdal.

Mouvements simples d'un corps solide : translation, rotation, composition des vitesses.

STATIQUE.

Point matériel. Force, sa représentation par un vecteur. Masse.

Indépendance des effets des forces. Composition des forces.

/...

Arrêté du 6 mars 1962

(Organisation et programmes scolaires)

(Vu A. 15-9-1945 mod.)

Objet : **Programme de mathématiques dans la classe de mathématiques.**

ARTICLE PREMIER. — L'enseignement des mathématiques dans la classe de mathématiques sera donné conformément au programme annexé au présent arrêté

ART. 2. — Le directeur général de l'Organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté dont les dispositions entreront en vigueur à la rentrée scolaire 1962.

Pour le ministre et par délégation :
Le directeur général de l'Organisation et des programmes scolaires,

J. CAPELLE.

Vocabulaire et symboles

(L'introduction des définitions et des symboles mentionnés ci-après peut être faite soit à l'occasion de l'étude de telle ou telle question du programme, soit dans un bref chapitre initial ne comportant aucun développement théorique sur les diverses notions présentées, qui seront illustrées par quelques exemples simples).

Définitions et symboles relatifs à quelques notions sur les ensembles : appartenance ; sous-ensemble ; inclusion ; réunion ; intersection ; ensemble vide ; ensembles complémentaires.

Définition d'une relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble.

Définition d'une relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

Symboles conventionnels indiquant : une implication logique, une équivalence logique.

Signification des symboles dits « quantificateurs » : « quel que soit » ; « il existe ».

Arithmétique, algèbre et notions d'analyse

I. — *Les nombres. Extensions successives de la notion de nombre.*

Note préliminaire.

1°) Les trois premiers paragraphes de ce chapitre I (entiers naturels, entiers relatifs, rationnels) sont destinés à résumer, en une sorte de synthèse, les notions sur les nombres acquises dans les classes précédentes, en procédant à une mise au point destinée à faire apparaître les quelques propriétés fondamentales qui permettent de dégager l'idée de certaines « structures ». Quels que soient l'ordre et le mode d'exposition choisis, il importe de ne pas s'attarder sur ces théories, dont les résultats sont déjà connus des élèves.

2°) Aucune question d'ordre théorique ne devra être posée, aux épreuves écrites et orales du baccalauréat, sur les diverses notions qui font l'objet de ce chapitre I. Bien entendu, les résultats généraux concernant les nombres, les propriétés des opérations, leurs conséquences essentielles, qui sont du reste mis en œuvre dans les autres chapitres du programme, doivent être parfaitement connus.

1° *Les entiers naturels.* Comparaison - Addition (somme) ; associativité, commutativité. Le problème de la soustraction n'est pas toujours possible.

Multiplication (produit) ; associativité ; commutativité ; distributivité par rapport à l'addition. Le problème de la division n'est pas toujours possible.

Définition de la puissance n^{me} ; propriétés résultant de l'associativité et de la commutativité de la multiplication.

2° *Les entiers relatifs.*

Définition - Addition (somme) ; propriétés fondamentales. Nombres opposés. Soustraction (différence).

L'ensemble des entiers relatifs à une structure de « groupe » pour l'addition.

Comparaison ; entiers positifs et négatifs. Valeur absolue.

Multiplication (produit) ; propriétés fondamentales. Le problème de la division n'est pas toujours possible.

L'ensemble des entiers relatifs a, pour ces opérations, une structure « d'anneau ».

3° *Les nombres rationnels.*

Fraction ; fractions équivalentes ; notion de « classes d'équivalence » ; nombres rationnels. Egalité.

Addition et soustraction ; propriétés fondamentales. Comparaison.

Multiplication ; propriétés fondamentales ; nombres inverses. Division (quotient exact).

L'ensemble des rationnels a, pour ces opérations, une structure de « corps ».

Puissances entières (exposants entiers positifs, négatifs, nul) ; propriétés fondamentales.

Valeurs absolues ; propriétés relatives aux sommes, aux produits, aux quotients.

4° *Notions sur les nombres réels.*

Nécessité d'une extension de la notion de nombre, au-delà des rationnels ; indications sommaires (à partir d'exemples) sur un mode de construction des réels, sur la définitition des opérations élémentaires les concernant, sur leur comparaison.

Exposé (sans démonstration) des propriétés fondamentales des opérations sur les nombres réels. L'ensemble des nombres réels a une structure de « corps ».

Correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite munie d'une origine et d'un vecteur-unité.

5° *Les nombres complexes.*

Définition. Représentation géométrique. Module, argument - Egalité. Nombres complexes opposés, nombres complexes conjugués. Nombre complexe nul.

Addition, soustraction, multiplication, division. Corps des nombres complexes.

Puissance n^{me} d'un nombre complexe donné sous « forme trigonométrique » ; formule de Moivre - Racines n^{mes} d'un nombre complexe (on se bornera à la démonstration d'existence et à la représentation géométrique des n racines n^{mes}).

/...

CLASSE TERMINALE C

Notions générales

Il n'est pas nécessaire de rassembler dans un chapitre introductif les études proposées ci-dessous, elles pourront occuper dans le cours les places qui seront jugées les meilleures; un certain nombre d'entre elles auront d'ailleurs été dégagées au cours des années précédentes.

Application d'un ensemble dans un ensemble; application injective, surjective; application bijective, application réciproque; composition des applications, fonction composée.

Transformation ponctuelle dans le plan et dans l'espace; composition des transformations (produit) : associativité; transformation réciproque d'une transformation, transformation involutive; groupe de transformations.

Loi de composition; loi interne, loi externe.

Etude particulière des lois internes, associativité, commutativité, élément neutre; structure de groupe. Distributivité d'une loi interne par rapport à une autre; structure d'anneau et de corps commutatif.

Etude d'une loi externe : structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

Isomorphisme entre deux ensembles munis de lois internes, en correspondance bijective, définition; isomorphisme entre deux groupes.

Arithmétique, algèbre et notions d'analyse

I. — Les nombres : extensions successives de la notion de nombre.

Note préliminaire.

1° Quels que soient l'ordre et le mode d'exposition choisis, il importe de ne pas s'attarder sur les théories, dont les résultats sont déjà connus des élèves; en particulier, on supposera connues les propriétés fondamentales de l'ensemble N des entiers naturels et on attirera l'attention des élèves sur l'importance du raisonnement par récurrence.

2° Aucune question d'ordre théorique ne devra être posée aux épreuves écrites et orales du baccalauréat, sur les diverses notions qui font l'objet de ce chapitre I. Les résultats généraux concernant les nombres, les propriétés des opérations, leurs conséquences essentielles, sont du reste mis en œuvre dans les autres chapitres du programme.

1° *Les entiers relatifs.* Construction de l'ensemble Z des entiers relatifs. Pour les lois d'addition et de multiplication, Z a une structure d'anneau commutatif ordonné.

2° *Les nombres rationnels.* — Construction de l'ensemble Q des nombres rationnels. Pour les lois d'addition et de multiplication, Q a une structure de corps commutatif ordonné.

3° *Notions sur les nombres réels.* — Nécessité d'une extension de Q. Exposé sans démonstration des propriétés des réels. Les réels forment un corps commutatif ordonné.

Valeurs absolues, propriétés relatives aux sommes, produits, quotients.

4° *Les nombres complexes.* — Définition; représentation géométrique; module, argument. Egalité. Nombres complexes opposés; nombres complexes conjugués; nombre complexe nul.

Addition, soustraction, multiplication, division. Corps C des nombres complexes.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe, d'un produit; formule de Moivre.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe (on se bornera à la démonstration d'existence et à la représentation géométrique des n racines).

Applications de la formule de Moivre, dans le cas des exposants 2, 3, 4 aux formules de multiplication des arcs et à la linéarisation des polynômes trigonométriques.

Résolution dans C de l'équation du second degré à coefficients complexes, à coefficients réels.

/...

Arrêté du 8/06/66

B.O. n° 26 (30-6-66)

B) Les classes préparatoires aux grandes Ecoles

1904 La première apparition dans les programmes des classes préparatoires d'un procédé de création des réels remonte à **1904** : l'arrêté du **26 Juillet 1904**[2] fixant le programme de la classe de "mathématiques spéciales" prévoit à la rubrique *Mathématiques §A Algèbre et Analyse* :

" Nombres incommensurables. Notion de coupure. "

Ce programme est aussi celui du concours d'entrée à l'école Polytechnique.

On peut d'ailleurs noter que, parallèlement, cette même année **1904,** les Editions Hermann publient la deuxième édition de " l'introduction à la théorie des fonctions d'une variable" de Jules TANNERY alors sous-directeur des études scientifiques à l'E.N.S., texte qui reprend très clairement la construction de Dedekind par les coupures en insistant sur l'aspect "ensembliste".

En **1905** René BAIRE(1874-1932) alors Maître de Conférences à l'Université de MONTPELLIER publie "la théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité" qui sera rééditée jusqu'en 1947 : il s'agit toujours de la construction des réels par les coupures de Dedekind, mais Baire délaisse les opérations algébriques sur les réels au profit des propriétés liées à la relation d'ordre (la "topologie de l'ordre") et démontre l'existence d'une borne supérieure pour tout ensemble majoré (c'est la coupure dont la deuxième classe est constituée des majorants de l'ensemble).

Toutefois ces nouvelles notions doivent provoquer quelques réticences car une circulaire du **30 Décembre 1904** vient limiter la portée du texte du 26 Juillet. Soulignant "*les graves inconvénients pour la formation des débutants présentés par le développement prématuré et trop rigoureux des théories qui touchent aux principes*", elle demande aux professeurs de " *s'abstenir de toute théorie générale sur les principes fondamentaux de la théorie des limites, des incommensurables et des fonctions continues.*"

---

[2] Les photocopies d'extraits des textes principaux sont regroupées à la fin de ce paragraphe B .

1906 Les instructions du **25 Août 1906** pour les professeurs de mathématiques des classes de mathématiques spéciales recommandent à nouveau de "*ne pas abuser des théories générales et d'éviter de s'étendre sur les nombres incommensurables*" .

Les programmes semblent rester en l'état, avec quelques aménagements pour le concours d'entrée à l'école Polytechnique pendant la période de la guerre 1914-1918, et avant 1921 les programmes du concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure ne mentionnent pas de construction des nombres réels.

1921 Mais l'arrêté du **22 Décembre 1920** modifie le programme pour le concours de **1921** pour "l'admission à l'E.N.S. et l'obtention des bourses de licence" en reprenant la formulation de l'arrêté de **1904** : " *Nombres incommensurables - Notion de coupure*" mais il est précisé "*qu'on ne demandera pas de justifier les définitions*" . Ultérieurement les programmes du concours de l'E.N.S. renverront à ceux du concours d'entrée à l'X qui eux-mêmes renvoient au programmes de mathématiques spéciales de **1904**.

1925 Création d'une commission interministérielle pour harmoniser les programmes des classes préparatoires et des concours (Arrêté du **4 Avril 1925**).

Ces programmes apparaissent ensuite assez figés et resteront en vigueur jusqu'en **1941** et **1956**.

1941 L'arrêté du **21 Septembre 1941** (J.O. du 24/9/1941) crée la classe de "Mathématiques Supérieures" qui prépare les élèves à "*entrer dans les classes préparatoires (mathématiques spéciales) et dans les facultés des sciences*". Mais le programme afférent ne comporte pas de construction des nombres réels:

II) 1. Nombres rationnels. Valeurs décimales approchées par excès ou par défaut. Encadrement par deux valeurs approchées de la somme, du produit, du quotient de deux nombres rationnels. Exemple de définition d'un nombre irrationnel et de ses valeurs approchées. La théorie complète des nombres irrationnels est en dehors du programme . On admettra que les opérations élémentaires sur ces nombres peuvent être, comme pour les nombres rationnels, soumises aux mêmes règles.

/...

Il faut attendre l'année **1956** pour qu'une profonde réforme restructure les classes préparatoires.

1956 L'arrêté du **27 Juin 1956** fixe les nouveaux programmes des nouvelles classes préparatoires restructurées en trois filières **A** (mathématiques prépondérantes) - **B** (physique et chimie prépondérantes) - **C** (biologie et géologie prépondérantes) , chaque préparation étant organisée en deux années .On trouve désormais dans les programmes **A** et **B**, pour les classes de première année (Math-Sup) comme pour celles de seconde année (Maths-Spé) un paragraphe intitulé "*Nombres Réels*" comportant une définition des nombres réels mais laissant le choix de la construction par les coupures ou par les suites. Toutefois il est précisé "*qu'aucune démonstration ne sera demandée aux concours sur ces points* ":

I. Nombres réels. Rappel des propriétés des nombres rationnels. Corps des nombres rationnels. Définition des nombres réels (on pourra les définir soit par des suites soit par des coupures). On précisera les définitions générales de la comparaison des nombres réels et des opérations rationnelles, mais il ne sera pas nécessaire d'en donner une théorie complète, et on pourra admettre que les propriétés du calcul des nombres rationnels sont encore valables pour les nombres réels. Approximation d'un nombre à $10^{(-n)}$ près. Tout ensemble de nombres réels qui possède un nombre majorant(ou minorant) admet une borne supérieure(ou inférieure). Corps des nombres réels. /...

1963 Après presque 60 ans de présence dans les programmes des classes préparatoires, les procédés de construction des nombres réels en sont exclus par l'arrêté du **21/01/1963** qui retire des programmes précédents de **1956** "*les démonstrations de l'existence et des propriétés de R* " mais conserve la structure de corps totalement ordonné et la propriété de la borne supérieure.

II.- Nombres réels. Nombres complexes. a) Propriétés du corps R des nombres réels: structure d'ordre total; définition d'un intervalle ouvert, d'un intervalle fermé et d'un segment (intervalle fermé borné); Tout ensemble majoré(resp. minoré) admet une borne supérieure(resp. inférieure). (*Les démonstrations de l'existence* *et des propriétés de R ne sont pas au programme). Approximation d'un nombre réel à $10^{(-n)}$ près.* /...

Rappellons que simultanément le programme de **Math-élem** de la rentrée **1962** (Arrêté du **6 Mars 1962** - cf. §A) prévoit la nécessité d'une construction des nombres réels.

1972 L'arrêté du **4 Février 1972** (B.O. N° 7 du 17-2-1972) restructure les classes préparatoires; les types **A** et **B** deviennent respectivement les sections M-M' et P-P', les classes « ' » correspondent à une préparation aux concours les plus difficiles (ou plus prestigieux) comme les E.N.S. et Polytechnique. Cette classification restera figée jusqu'à la dernière réforme des classes préparatoires de **1995-1996**. L'arrêté du **4 Février 1972** ne mentionne plus de méthode de construction des réels et il est précisé qu'il n'y a pas d'obligation de donner toutes les démonstrations:

- **Annexe I** (Maths-Sup):

VI) "*Eléments de Topologie*": *1)Construction de R : Les propriétés suivantes doivent être dégagées sans que toutes les démonstrations soient nécessairment données : R est un corps totalement ordonné dans lequel est immergé le corps archimédien Q et dont toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).Intervalles.* /...

- **Annexe II** (Maths-Spé):

VI) "*Eléments de Topologie": 1) Rappels, sans démonstration, des propriétés fondamentales de R.* /...

A partir de cette date les programmes des classes préparatoires vont connaître plusieurs réformes (**1984-1985; 1987-1988; 1989; 1995-1996**) mais les constructions des ensembles numériques vont rapidement disparaître puisque dès **1984** (Arrêté du **18/5/1984**) " *aucune construction de R n'est exigée* " et depuis l'arrêté du **17 Juillet 1987** :"*la construction des ensembles de nombres N, Z,Q,R et C est hors programme*".

CIRCULAIRE
relative à l'interprétation du programme de la classe de mathématiques spéciales.

— Du 30 décembre. — (1904)

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS,

à Monsieur le Recteur de l'académie d

M. le Ministre de la Guerre ayant adopté intégralement, comme programme des examens d'entrée à l'École polytechnique, le programme maximum d'enseignement de la classe de mathématiques spéciales, fixé par mon arrêté du 26 juillet 1904, il a paru utile de donner aux professeurs chargés de l'enseignement dans cette classe quelques indications complémentaires destinées à leur permettre de limiter nettement les développements qu'ils auront, en vue de l'examen, à attribuer à un certain nombre de questions pour lesquelles un doute pouvait subsister.

Ces indications, que je vous prie de porter à la connaissance des intéressés, sont d'ailleurs conformes aux désirs exprimés à plusieurs reprises par les Conseils de l'École polytechnique et je suis heureux de constater que l'excellent accord qui existe entre ces Conseils et ceux de l'Université s'est manifesté une fois de plus à cette occasion.

On rappelle, avant tout, aux professeurs que l'enseignement des mathématiques et celui de la physique et de la chimie doivent être dirigés comme il a été marqué dans le rapport présenté à la commission interministérielle par M. P. Appell au nom de la Sous-Commission des mathématiques spéciales; aux conseils donnés dans ce rapport, on joindra les observations suivantes :

Généralités. — L'expérience a montré quels graves inconvénients présente, pour la formation des débutants, le développement prématuré et trop rigoureux des théories qui touchent aux principes. Il est dangereux d'insister sur des subtilités que seules des intelligences déjà rompues aux abstractions peuvent nettement percevoir et un tel enseignement, même compris, ne saurait que rebuter de jeunes esprits.

Pour faciliter, sur ce point, la tâche des professeurs et leur permettre de faire le plus possible appel à l'intuition de leurs élèves, on leur rappelle qu'ils doivent s'abstenir de toute théorie générale sur les principes fondamentaux de la théorie des limites, des incommensurables et des fonctions continues. On admettra sans démonstration les propositions relatives aux opérations arithmétiques élémentaires (addition, multiplication, division, élévation aux puissances entières ou fractionnaires) effectuées sur les nombres incommensurables.

Aucun développement ne sera donné sur les singularités que peuvent présenter les fonctions; relativement aux fonctions continues, on admettra sans démonstration qu'une fonction continue dans un intervalle (limites comprises) y est limitée supérieurement et inférieurement; qu'elle y atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure; qu'elle passe par toutes les valeurs intermédiaires. Il sera donc acquis qu'une fonction continue, qui prend pour a et b des valeurs de signes contraires, s'annule entre a et b. On n'envisagera que des fonctions continues admettant une dérivée.

Arithmétique, géométrie, algèbre élémentaire. — L'arithmétique, l'algèbre élémentaire, la géométrie sont en dehors du programme; toutefois dans les applications on rappellera aux élèves, sans démonstration, les faits sur lesquels ils s'appuient et dont ils devront manifester à l'occasion une connaissance suffisante.

Algèbre et analyse.

1° *Algèbre.* — Les arrangements, permutations, combinaisons avec répétition, les puissances d'un polynôme autres que le carré ou le cube, la sommation des piles de boulets, la formule de Moivre dans le cas d'un exposant non entier, les racines primitives d'une équation binôme sont en dehors du programme.

2° *Séries.* — Pour l'étude de la convergence ou de la divergence d'une série à termes positifs, il suffira de développer les règles mentionnées explicitement au programme, ou la règle évidente qui résulte de la comparaison immédiate avec une série à termes plus grands ou plus petits. En particulier, la règle de Duhamel peut être regardée comme facultative.

Il est superflu de s'occuper de l'influence de l'ordre des termes dans une série non absolument convergente.

3° *Logarithmes.* — La définition arithmétique par deux progressions et la construction des Tables sont en dehors du programme.

4° *Fonctions.* — La même observation s'applique au maximum et au minimum d'une fonction de plusieurs variables.

La formule de Taylor est nettement spécifiée avec le reste dit de Lagrange; elle ne sera appliquée, en dehors des polynômes entiers, qu'aux seuls développements de sin x et cos x.

5° *Séries entières.* — On ne s'occupera pas des difficultés qui se présentent aux limites de l'intervalle de convergence, soit dans la théorie générale, soit sur des exemples particuliers. Les professeurs pourront exposer la multiplication des séries nécessitée par l'étude de e^x sous la forme qui leur paraîtra préférable.

La notion de convergence uniforme et ses applications sont en dehors du programme.

/...

Circulaire du 30/12/1904

INSTRUCTIONS.

Les leçons devront être faites comme devant des élèves.
Les candidats trouveront ci-dessous les instructions ministérielles données aux professeurs en vue de l'enseignement des mathématiques.

CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Enseignement. — Les professeurs resteront maîtres de l'ordre dans lequel ils enseigneront les diverses questions du programme. Il leur est recommandé de ne pas charger les cours, de faire grand usage de livres, de ne pas abuser des théories générales, de n'exposer aucune théorie sans en faire de nombreuses applications poussées jusqu'au bout, de commencer habituellement par les cas les plus simples, les plus faciles à comprendre, pour s'élever ensuite aux théorèmes généraux. Parmi les applications d'une théorie mathématique, il conviendra de préférer celles qui se présentent en physique, celles que les jeunes gens rencontreront plus tard dans le cours de leurs études soit théoriques, soit pratiques : c'est ainsi que, dans la construction des courbes, il conviendra de choisir comme exemples des courbes qui se présentent en physique et en mécanique, comme les courbes de Van der Waals, la cycloïde, la chaînette, etc., que, dans la théorie des enveloppes, il conviendra de prendre comme exemples les enveloppes qui se rencontrent dans la théorie des engrenages cylindriques, et ainsi de suite. Les élèves devront être interrogés en classe, exercés aux calculs numériques, habitués à raisonner directement sur les cas particuliers et non à appliquer des formules. En résumé, on devra développer leur jugement et leur initiative, non leur mémoire.

Nous allons maintenant passer en revue le programme pour préciser certains points.

Algèbre et analyse. — Le professeur devra éviter de *s'étendre sur les nombres incommensurables*; il lui suffira d'en donner des exemples précis en montrant comment on peut définir un nombre incommensurable par la notion de coupure. Ainsi, pour définir $\sqrt{2}$, on divise les nombres commensurables en deux classes, ceux dont le carré est inférieur à 2, et ceux dont le carré est supérieur à 2 ; la coupure entre ces deux classes définit $\sqrt{2}$. Quant aux opérations sur les incommensurables, le professeur pourra admettre qu'elles sont soumises aux mêmes règles que les opérations élémentaires de l'arithmétique. Le professeur devra s'abstenir de toute théorie générale sur la notion de limite et se contenter de faire comprendre cette notion sur les exemples mêmes que fournit le programme.

Dans la résolution des *équations du premier degré*, on devra habituer les élèves à raisonner directement sur des équations numériques, à les résoudre et à les discuter sans employer les *déterminants* : ceux-ci devront servir ensuite à donner à la théorie sa forme la meilleure.

Pour les *séries*, on se bornera à celles dont la convergence ou la divergence peuvent s'établir par l'application directe des règles indiquées au programme ; on en fera de nombreuses applications numériques, et l'on donnera aux élèves l'idée du plus ou moins de rapidité de la convergence, en leur faisant calculer une limite de l'erreur commise quand on prend un nombre déterminé de termes.

Dans la *théorie des fonctions d'une variable réelle*, on s'abstiendra de toute complication pour la notion de continuité ; on n'envisagera que des fonctions continues ayant une dérivée. On emploiera, partout où il sera possible, les représentations graphiques : signification géométrique de la dérivée, du signe de la dérivée seconde, du théorème des accroissements finis, du théorème de Rolle ; relations qui existent entre les courbes représentatives d'une fonction et de ses dérivées première et seconde. Enfin la notion de la fonction primitive d'une fonction $f(x)$ sera obtenue en remarquant que l'aire d'un segment de la courbe $y=f(x)$ est une fonction ayant pour dérivée $f(x)$. /...

FASCICULES DE DOCUMENTATION ADMINISTRATIVE

SECTION B
PROGRAMMES

Arrêté du 27 juin 1956

(Second Degré, 1er Bureau)

(Vu A. 18-7-1925; A. 20-7-1925; A. 21-9-1941; A. 28-3-1949)

OBJET : *Programmes des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques.*

ARTICLE PREMIER. — Les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques et aux écoles d'ingénieurs qui seront organisées dans les établissements d'enseignement du second degré auront des programmes de l'un des types suivants :

— A : mathématiques prépondérantes, physique, chimie;

— B : physique et chimie prépondérantes, mathématiques;

— C : biologie et géologie prépondérantes, chimie, physique, mathématiques.

ART. 2. — La préparation sera organisée en deux années, les classes de première année étant consacrées à un enseignement intermédiaire entre celui des classes terminales de l'enseignement du second degré, et celui des classes de seconde année qui préparent directement aux concours.

ART. 3. — Le programme maximum de chacun des types A, B, C est annexé au présent arrêté.

Les classes de première année suivront un programme extrait de l'un des types A1, B1, C1.

Les classes de seconde année suivront un programme extrait de l'un des types A2, B2, C2.

ART. 4. — Les dispositions du présent arrêté entreront en vigueur à partir de l'année scolaire 1956-1957, en ce qui concerne les programmes A. Un arrêté ultérieur fixera la date d'entrée en vigueur des programmes B et C.

Pour le Ministre et par délégation :
Le Directeur du Cabinet,

Louis CROS.

PROGRAMME A_2

MATHÉMATIQUES

I. Nombres réels (1).

Corps des nombres rationnels.

Définition des nombres réels. On précisera les définitions générales de la comparaison des nombres réels et des opérations rationnelles, mais il ne sera pas nécessaire d'en donner une théorie complète, et on pourra admettre que les propriétés du calcul des nombres rationnels sont encore valables pour les nombres réels.

Approximation d'un nombre à 10^{-n} près.

Tout ensemble de nombres réels qui possède un nombre majorant (ou minorant) admet une borne supérieure (ou inférieure).

Corps des nombres réels. Racine n^e (positive) d'un nombre positif.

On associera à la définition des nombres réels la mesure des longueurs. On précisera notamment la correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les nombres réels (axiomes d'Archimède et de Cantor-Dedekind).

---

(1) Aucune démonstration ne sera demandée aux concours sur les questions figurant dans ce paragraphe du programme, déjà vu au programme A_1.

PROGRAMME A_1

MATHÉMATIQUES

I. Nombres réels.

Rappel des propriétés des *nombres rationnels*. Corps des nombres rationnels.

Définition des *nombres réels* (on pourra les définir soit par des suites, soit par des coupures). On précisera les définitions générales de la comparaison des nombres réels et des opérations rationnelles, mais il ne sera pas nécessaire d'en donner une théorie complète, et on pourra admettre que les propriétés du calcul des nombres rationnels sont encore valables pour les nombres réels.

Approximation d'un nombre à 10^{-n} près.

Tout ensemble de nombres réels qui possède un nombre *majorant* (ou *minorant*) admet une *borne supérieure* (ou *inférieure*).

Corps des nombres réels. Racine n^e (positive) d'un nombre positif.

On associera à la définition des nombres réels la mesure des longueurs. On précisera notamment la correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les nombres réels (*axiomes d'Archimède et de Cantor-Dedekind*).

Arrêté du 27/6/1956

109

Arrêté du 21 janvier 1963

(Enseignement, bureau E 3)

(Vu A. 27-6-1956 mod.)

Objet : **Modification de l'arrêté du 27 juin 1956 qui fixe le programme des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques.**

ARTICLE PREMIER. — Le texte de l'article 3 de l'arrêté du 27 juin 1956, modifié par les arrêtés du 1er avril 1959, 23 décembre 1959, est abrogé et remplacé par le texte suivant :

« *Art.* 3. — Le programme maximum de mathématiques du type A comporte, en seconde année, deux options notées A-2 et A'-2. En première année, un programme complémentaire d'optique, extérieur au programme de physique A-1, est prévu pour certaines catégories d'élèves.

Le programme maximum de chacun des types B et C est le programme annexé à l'arrêté du 27 juin 1956, modifié par les arrêtés du 1er avril 1959, 23 décembre 1959.

Les programmes A-1, A-2, A'-2 et le programme complémentaire d'optique (première année) sont annexés au présent arrêté.

Les classes de première année suivront un programme extrait de l'un des programmes A-1, B-1, C-1.

Les classes de seconde année suivront un programme extrait de l'un des programmes A_2, A'_2, B_2, C_2. »

ART. 2. — Les dispositions du présent arrêté entreront en vigueur pour les classes de première année, à la rentrée scolaire de 1963, et pour les classes de seconde année, à la rentrée scolaire de 1964.

ART. 3. — Le directeur général de l'Organisation et des programmes scolaires est chargé de l'exécution du présent arrêté qui sera publié au *Journal Officiel* de la République française.

PROGRAMME A1

MATHEMATIQUES

Programme maximum de mathématiques des classes de première année de préparation aux grandes écoles scientifiques (type A)

(Les subdivisions sont communes à ce programme et aux programmes A2 et A'2.)

I. — Algèbre élémentaire

Vocabulaire de la théorie des ensembles: élément, appartenance ; sous-ensembles, inclusion, intersection, réunion, complémentaire, ensembles disjoints, partition d'un ensemble ; produit d'un nombre fini d'ensembles.

Relations définies dans un ensemble : relation d'équivalence, ensemble-quotient ; relation d'ordre.

Application d'un ensemble dans un ensemble (ou fonction) ; application injective, surjective, bijective ; application réciproque (ou inverse). Restriction Composition des applications.

Loi de composition interne ; loi de composition externe ; leurs propriétés seront mises en évidence sur des exemples.

Définition d'une structure de groupe. Notion de sous-groupe d'un groupe. Groupe additif des entiers relatifs. Exemples tirés de l'étude des transformations géométriques.

Substitutions sur un ensemble fini; groupe symétrique d'ordre n; décomposition d'une substitution en un produit de transpositions; substitutions paires et impaires.

Permutations de n objets distincts ; arrangements et combinaisons de n objets distincts p à p (sans répétition).

Définition d'une structure d'anneau. Anneau des entiers relatifs.

Définition d'une structure de corps. Corps des rationnels.

II. — Nombres réels. Nombres complexes

a) *Propriétés du corps R des nombres réels :*

— structure d'ordre total ; définition d'un intervalle ouvert, d'un intervalle fermé et d'un segment (intervalle fermé borné) ;

— tout ensemble majoré (resp. minoré) a une borne supérieure (resp. inférieure).

(Les démonstrations de l'existence et des propriétés de R ne sont pas au programme.)

Approximation d'un nombre réel à 10^{-n} près.

b) *Définition du corps C des nombres complexes :*

Nombres complexes conjugués, module d'un nombre complexe.

Argument d'un nombre complexe. Formule de Moivre pour un exposant entier, positif ou négatif ; multiplication des arcs.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe (la théorie des racines primitives de l'unité n'est pas au programme).

Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Interprétation géométrique des opérations. Etude des correspondances données par $z' = az + b$, $zz' = k$.

- /...

C) Le C.A.P.E.S. et l'Agrégation de Mathématiques

• *Le C.A.P.E.S. de Mathématiques*

Initialement il s'agit du "Certificat d'Aptitude à l'Enseignement des Mathématiques" et les programmes correspondants sont très proches de ceux des classes des lycées et bien éloignés de toute construction des nombres réels.

1950 Le décret du **1er Avril 1950** institue le "**C.A.P.E.S.**" c'est-à-dire le "Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement public du Second degré".

1952 Le décret du **17 Janvier 1952** définit pour la session **1952** le C.A.P.E.S. "nouveau régime" et l'arrêté du **22 Janvier 1952**[3] en fixe les programmes et l'organisation pratique: une partie théorique qui comporte deux épreuves écrites et une épreuve orale - une partie pratique comportant deux leçons en présence d'élèves. Les programmes se réfèrent exclusivement aux programmes en vigueur dans les classes du second degré (et de Maths Sup. pour la géométrie). Les nombres réels et leurs constructions en sont donc totalement absents.

1971 L'instruction du **19 Octobre 1970** (B.O. N° 41 du 29/10/1970) fixe le programme du CAPES de Mathématiques pour la session **1971** et sera reconduit en **1972**. Les "*propriétés du corps des réels*" y sont mentionnées mais non leur construction.

1973 La note du **30 Juin 1972** (B.O. du 29/7/1972) renouvelle les programmes du CAPES de Mathématiques pour la rentrée **1973** et ajoute au programme des épreuves théoriques des extraits des programmes des classes de Maths Sup. et de Maths Spé M définis par l'arrêté du **4/2/1972** (cf. §B) ; on trouve ainsi :

__V. - Analyse 1. Eléments de Topologie a)__ Construction de R. Les propriétés suivantes sont admises : R est un corps totalement ordonné dans lequel est immergé le corps archimédien Q et dont toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). Intervalles /...

[3] Les photocopies d'extraits des textes principaux sont regroupées à la fin de ce paragraphe C .

Ces programmes seront modifiés par la suite et la construction des nombres réels n'y figurera que durant **12 années**; en effet la session de **1985** est la dernière où le programme du CAPES la mentionne encore explicitement (B.O. N° 24 du 14/6/1984).

1986 La note du **27 Septembre 1985** (B.O. N° 34 du 3/10/1985) modifie le programme complémentaire des épreuves écrites: le chapitre d'Analyse étudie maintenant en détail "*les suites numériques de réels et de complexes, la convergence, les relations de comparaison, les suites de Cauchy, les suites "récurrentes" et le théorème du point fixe, les suites adjacentes, le développement décimal d'un réel, et bien sûr, le théorème de la borne supérieure...* **Mais toute construction des nombres réels a bel et bien disparu du programme et ceci jusqu'à la session 2000 !**

1987 Le décret du **14 Mars 1986** (B.O. spécial N°5 du 26/6/1986) modifie le décret du **4/7/1972** relatif au statut particulier des professeurs certifiés et crée le **CAPES Interne** de Mathématiques dont la première session se tiendra donc en **1987**. Le programme complémentaire pour l'écrit est extrait de celui du concours externe: on y trouve toujours des suites numériques et le théorème de la borne supérieure, mais pas de suites de Cauchy et encore moins de construction des nombres réels.

2000 Le B.O. spécial N°4 du **21 Mai 1999** fixe les programmes des concours externes et internes du CAPES pour la session 2000 ; il n'y a pas de changement notable concernant les réels dont toute construction est désormais occultée depuis 1986 dans les programmes des CAPES de Mathématiques.

- *L'Agrégation de Mathématiques*

L'arrêté du **29 Juillet 1885** précise les épreuves et les programmes de l'Agrégation de Mathématiques; le concours comporte quatre épreuves écrites: une composition de mathématiques élémentaires (niveau lycée), une composition de mathématiques spéciales (niveau "prépas"), deux compositions d'Analyse et de Mécanique (niveau certificats de licence), et deux épreuves orales: les leçons de niveau seconde, première ou de la classe de mathématiques ou de mathématiques spéciales. Aucune construction des nombres réels n'y est explicitement mentionnée.

Dès le début du XXè siècle apparaît une Agrégation "Jeunes Filles" de Mathématiques dont le programme est très allégé. Mais les deux Agrégations de Mathématiques (hommes -

femmes), se rapprochent à partir de **1929** , pouvant avoir les mêmes programmes et la même organisation (sessions de **1957** & **1958** mais pas en **1959**). A partir de la session de **1960** les deux agrégations seront identiques: l'arrêté du **9 Juillet 1959** étend les dispositions de l'Agrégation masculine à l'Agrégation féminine- "*Les deux concours ont donc la même structure quant aux épreuves et aux coefficients dont elles sont affectées*"- Il faudra quand même attendre la fin des années **70** pour que les deux concours fusionnent.

Toutefois le B.O. du **15 Décembre 1931** qui fixe le programme pour **1932** précise: " *la composition sur les mathématiques spéciales portera sur les matières enseignées dans la classe correspondante des lycées* " ; or la construction des nombres réels y figure comme on l'a vu au **§B**. Mais il n'y a toujours pas de construction des réels dans les programmes des leçons.

A partir de la session de **1957,** les nombres réels et leur construction font leur véritable entrée dans les programmes de l'Agrégation, d'abord seulement à l'écrit et dans les années suivantes aussi dans les leçons.

1957 La note du **21 septembre 1956** (B.O.E.N. N° 33 du **27/09/56**) définit les nouveaux programmes des épreuves écrites et pratiques et le programme maximum des épreuves orales des agrégations masculines et féminines de mathématiques pour les années **1957** et suivantes. Il se réfère au nouveau programme A1 et A2 des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques du **27 Juin 1956** qui, comme on l'a vu au **§B**, mentionne explicitement au titre I les constructions des nombres réels par les suites ou les coupures .

- ***Programme des épreuves écrites - A.- Composition de "Mathématiques élémentaires "*** *- Programme complémentaire d'arithmétique et d'algèbre* ***4.***: *les questions constituant* ***le Titre I, Nombres réels,*** *du programme A1.*
- ***Programme des épreuves écrites - B.- Composition de "Mathématiques spéciales":*** *Cette épreuve portera sur les questions figurant , d'une part dans les programmes A1 et A2, d'autre part /...*

1958 Le programme précédent ne durera en fait qu'une année et les nombres réels disparaissent de la composition écrite de mathématiques élémentaires et réapparaissent dans la composition de Calcul différentiel et intégral ainsi qu'à l'oral pour les leçons de mathématiques spéciales. (note du **13 septembre 1957** - B.O. N° 34 du 26/9/1957):

- ***Programme des épreuves écrites - A.- Composition de "Calcul différentiel et intégral " 1.*** *: Eléments de Topologie; construction de l'ensemble des nombres réels; ensembles linéaires; point d'accumulation, théorème de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue; limite supérieure ou inférieure; condition de Cauchy pour la convergence d'une suite. ...*
- ***Programme maximum des épreuves orales - Programme maximum des leçons de "Mathématiques spéciales"*** *: Il se confond sensiblement avec celui des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (A1 et A2) fixé par l'arrêté du **27/06/56** (cf. **§B** plus haut). Il est toutefois précisé :*

  "N.B. Les démonstrations de toutes les questions ou propriétés figurant à ce programme pourront, sauf indication contraire, être demandées au concours d'agrégation."

Mais une note du **16/09/57**, publiée dans le même B.O. N° 34, **supprime** du programme des épreuves orales, **pour la session de 1958**, le §I bis concernant les nombres réels et leurs constructions.

1959 L'arrêté du **31 Juillet 1958** réorganise l'agrégation **1959** de mathématiques (hommes): les deux épreuves écrites de mathématiques élémentaires et spéciales fusionnent en une seule composition; la composition de calcul différentiel et intégral devient composition d'analyse; la composition de mécanique générale est conservée et les épreuves pratiques de géométrie et ce calcul numérique deviennent une composition de mathématiques appliquées; les deux leçons de mathématiques élémentaires et spéciales sont conservées. La note du **5 Septembre 1958** (B.O.E.N. N° 32 du 11/09/58) définit les programmes de ces épreuves; les nombres réels et leurs constructions sont à nouveau présents dans le programme maximum des leçons de mathématiques spéciales ainsi qu'à l'écrit pour les compositions d'Analyse et aussi cette fois de mathématiques élémentaires et spéciales. La note du **6 Septembre 1958** reconduit la suppression des nombres réels pour l'oral de **1959**.

1965 Le B.O.E.N. (N°36) du **1er Octobre 1964** fixant le programme pour la session **1965** se réfère à nouveau au programme des classes préparatoires fixé par l'arrêté du **21/01/1963** (cf. **§B** plus haut). Le programme maximum des leçons de Mathématiques spéciales précise:

II-Nombres réels- Nombres complexes.

1°. Définition de l'ensemble des nombres réels. Propriétés: structure de corps; structure d'ordre total; tout ensemble majoré (resp. minoré) a une borne supérieure(resp. inférieure). Tout ensemble infini borné a un point d'accumulation; théorème de convergence de Cauchy. Approximation d'un nombre réel à $10^{(-n)}$ près. /...

A partir de ces années les programmes des agrégations de mathématiques vont s'étoffer sensiblement et comporteront les mentions suivantes qui englobent les constructions des réels: *"définition et propriétés des nombres réels"* ou à partir de la session 1975 : *"définition du corps R des nombres réels. Caractérisations de R".*

1971 B.O.E.N. du **10 Septembre 1970** (note du 13/81970) :

XII - Notions élémentaires de topologie générale - Fonctions d'une ou plusieurs variables réelles

*.../ 2° Définition et propriétés du corps **R** des nombres réels: corps totalement ordonné archimédien. Corps topologique localement compact. **R** n'est pas dénombrable (existence de nombres transcendants). Approximation d'un nombre réel par des rationnels; fractions continues. Valeurs approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel par une suite décimale illimitée.* /...

1975 B.O.E.N. N° 25 du **20 Juin 1974** (note du 28/5/1974):

XII - Notions élémentaires de topologie générale - Fonctions d'une ou plusieurs variables réelles

*...2° Définition du corps **R** des nombres réels. Caractérisations de **R**.*

*Le corps **R** n'est pas dénombrable. Nombres transcendants: définition, existence. Droite numérique achevée. Approximation d'un nombre réel par des ra-*

tionnels; fractions continues. Valeurs approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel par une suite décimale illimitée. /...

1989 Première session du concours interne de l'agrégation, dont le programme complémentaire, assez proche de celui du CAPES (cf. ci-dessus) pour les nombres et le chapitre d'Analyse, ne mentionne aucune construction ni définition des nombres réels. Il en sera ainsi jusqu'à la session de l'an **2000** .

2000 B.O.E.N. spécial N° 3 du **29 Avril 1999** (concours interne); "la" construction de R est désormais explicitement admise :

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels et complexes. Corps R et C des réels et complexes. ***La construction de R étant admise****. Suites convergentes, divergentes .../ /... Toute partie non vide majorée de R possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes . Droite numérique achevée. Complétude de R: toute suite de Cauchy de R ou de C converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass: de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels. /...*

1990 B.O.E.N. N° 23 du **8 JUIN 1989** (note du 30/5/1989) (concours externe):

X. *Notions élémentaires de topologie générale, fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.*

2. Définition du corps ***R*** *des nombres réels. Caractérisations de R. Le corps R n'est pas dénombrable. Nombres transcendants : définition, existence. Droite numérique achevée: suite à valeurs dans R: limites, limites supérieures, inférieures. Valeurs approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel par une suite décimale illimitée. Représentation des nombres réels en ordinateur. Approximation d'un nombre réel par des rationnels; fractions continues.* /...

2000 B.O.E.N. spéciaux N° 3 du **29 Avril 1999** et N° 4 du **21 Mai 1998** (concours externe).

VI -Analyse à une variable réelle.

*1. Nombres réels. Définition du corps **R** des nombres réels. Caractérisations de R. Topologie de R. Structure des sous-groupes additifs de R. Droite numérique achevée. Suites de nombres réels: convergence, valeur d'adhérence. Suites de Cauchy. Complétude de R /... .../ Théorème de Bolzano-Weierstrass. /...*

.../ Développement d'un nombre réel en base a. Nombres algébriques et transcendants. Exemples. /...

Par ailleurs citons quelques sujets récents de leçons d'agrégation:

Le corps des nombres réels: une construction et les propriétés fondamentales. Approximation des nombres réels.

*Définition et propriétés de **R**.*

Topologie de la droite numérique. Droite numérique achevée

*Une construction de **R** et ses principales propriétés.*

*Une construction de **R** étant acquise, donner différentes caractérisations de **R***

*Une définition de **R** étant choisie, en déduire les principales propriétés*

*Topologie de la droite numérique **R** et de la droite numérique achevée.*

*Une caractérisation de **R** (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres.*

*Propriétés fondamentales de **R**.*

Ainsi les nombres réels et leurs constructions ont été enseignés aux élèves des classes préparatoires pendant une soixante d'années(**1904 - 1963**) et ont fait une brève apparition dans les classes de mathématiques élémentaires, préparant au Baccalauréat, pendant 4 ans (**1962 - 1967**) alors que les programmes actuels en font l'impasse totale. Seuls les futurs enseignants ayant préparé le CAPES au cours des 12 années **1973 - 1985** et l' agrégation depuis **1957** (externe seulement après 1989) auront pu se confronter aux difficultés de la création des nombres réels.

Arrêté du 22 janvier 1952

(Second Degré, 1er Bureau)

(Vu D. n° 50-386 du 1-4-1950 mod. p. D. 17-1-1952 ; A. 22-5-1950 mod. p. A. 6-12-1950.)

Objet : **Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement public du second degré.**

/...

117

... /

TITRE IV

DES EPREUVES

ART. 12. — Le concours comprend deux parties :

1° — Une partie théorique comportant des épreuves écrites et une épreuve orale ;

2° — Une partie pratique dont les épreuves sont subies dans les classes fréquentées par le candidat auprès de ses conseillers pédagogiques.

La nature des épreuves varie suivant la spécialité. Le classement des candidats est effectué à l'issue des épreuves de la partie théorique.

Les épreuves pratiques donnent lieu à un rapport et à l'attribution de mentions : très bien, bien, assez bien ou passable.

ART. 13. — Les épreuves du concours sont fixées comme suit dans les différentes sections.

CAPES - 1952

... /

F. — SECTION MATHEMATIQUES

I. — *Partie théorique*

a) *Epreuves écrites.*

1) Première composition constituée par un ou plusieurs problèmes (durée : 5 heures).

2) Deuxième composition, constituée par un ou plusieurs exercices tels qu'ils peuvent être proposés aux élèves d'une classe du second degré des lycées et collèges, et devant faire l'objet d'une solution raisonnée soulignant les méthodes utilisées et suggérant certaines réflexions d'ordre général — telle qu'elle pourrait être proposée aux élèves en corrigé oral de devoir — puis une rédaction soignée, figures comprises (durée : 5 heures).

Les épreuves écrites portent sur le programme en vigueur dans les classes du second degré. Toutefois, en ce qui concerne la première composition, la géométrie comprend également les compléments de géométrie pure figurant actuellement en mathématiques supérieures (cf. arrêté du 21 septembre 1941, titre VIII).

b) *Epreuves orales.*

1) Exposé (durée : une demi-heure environ, préparation : 3 heures).

2) Interrogation, sans préparation (durée : une demi-heure environ).

L'exposé est relatif à une question extraite du programme de mathématiques des classes de seconde, première, philosophie, sciences expérimentales et mathématiques.

L'interrogation qui complète l'exposé, peut porter en tout ou partie, soit sur des questions suggérées par l'exposé précédent et qui leur sont connexes, soit sur des questions indépendantes relatives à d'autres parties du programme.

II. — *Partie pratique*

Deux leçons d'une heure, faites dans deux classes différentes, l'une du premier cycle, l'autre du second et suivies d'un entretien avec le candidat comportant présentation de documents.

L'une des leçons comportera un exposé, l'autre la correction d'un devoir ou d'une composition.

/...

C.A.P.E.S. (1973)

Objet : **Programme des épreuves écrites et orales de la partie théorique du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré (mathématiques).**

a) **Programmes des classes de second cycle des lycées classiques, modernes et techniques, en vigueur durant l'année scolaire où se passe le concours, dans toutes les sections de ces établissements**

Les alinéas de ces programmes qui sont, éventuellement, écartés des épreuves du baccalauréat font partie du programme du concours.

Les démonstrations que ces programmes dispensent d'enseigner dans les classes secondaires devront néanmoins être connues des candidats.

Les programmes des classes de seconde A, C, T, de première et de terminale A, B, C, D, E ainsi que les commentaires officiels sur ces programmes figurent dans la brochure n° 61 Pg de l'I.N.R.D.P. intitulée « Horaires. Programmes. Instructions/Mathématiques (classes du second cycle) ».

Les parties des programmes des sections F, G, H qui ne font pas partie des programmes des sections A, B, C, D, E ont été détaillées dans les rubriques suivantes.

Sections F

Pratique de la division de deux polynômes ordonnés suivant les puissances décroissantes de la variable. Cas particulier de la division par x — a. Condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine de l'équation f (x) = 0, f (x) désignant un polynôme entier.

Notions sur les incertitudes. Incertitude absolue et incertitude relative.

Incertitude relative d'un produit, d'un quotient.

Notions sur les abaques cartésiens. Echelles fonctionnelles. Anamorphose. Usage du papier logarithmique.

Définition et usage des abaques à points alignés.

Exemples simples de construction d'abaques à supports parallèles et à supports concourants.

Cycloïde, épi et hypocycloïdes, développante de cercle, spirale d'Archimède et spirale logarithmique : définition et tracés.

Exercices simples de calculs d'aires, de volumes, de moments d'inertie. Détermination des centres de gravité. Théorème de Guldin.

Moment d'inertie de la surface d'un rectangle par rapport à un axe de symétrie ; moment d'inertie d'un cercle par rapport à son centre, à un diamètre.

Détermination du centre de gravité d'un arc de demi-cercle, de la surface d'un demi-cercle.

Géométrie plane

Relations.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \; ; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = = 2\,R \; ;$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \; ; \quad S = pr$$

dans un triangle donné.

Géométrie dans l'espace

Aire de la projection d'un polygone plan. Prismes et pyramides ; sections par des plans parallèles au plan de base.

Surfaces cylindriques et surfaces coniques ; plan tangent.

Surfaces cylindriques et surfaces coniques de révolution.

Sphère. Symétries. Plan tangent, intersection d'une sphère et d'une droite. Positions relatives d'une sphère et d'un plan ; sections planes d'une sphère. Positions relatives de deux sphères. Intersection de deux sphères.

Géométrie descriptive

Rabattement.

Rotations autour d'un axe vertical et d'un axe de bout.

Projections d'un cercle.

Cônes et cylindres de révolution dont l'axe de révolution est une frontale, plan tangent, contour apparent ; sections planes par un plan de bout, point courant, tangente.

(Les rubriques précédentes sont extraites des brochures n° 361 Pg : 362 Pg ; 363 Pg ; 368 Pg ; 367 Pg ; 366 Pg ; 365 Pg de l'I.N.R.D.P.)

Sections G et H

Arithmétique

Systèmes de numération. Bases de numération. Le système binaire. Opérations arithmétiques en système binaire.

Familiarisation avec les systèmes à base huit, seize...

Représentation des nombres à l'aide de code à forme binaire. Opérations à l'aide de nombres décimaux codés en binaire.

Initiation à la statistique

Séries statistiques. Présentation des documents statistiques : observation, enregistrement et groupement des données. Tableaux numériques. Diverses représentations graphiques. Polygone et courbe de fréquence, courbe cumulative.

Eléments caractéristiques d'une série statistique. Médiane, moyennes, dominantes. Evaluation de la dispersion : quartiles, écart moyen arithmétique, fluctuation, écart type.

Ajustement linéaire. Méthode graphique, méthode des moyennes discontinues, méthodes des moindres carrés.

Notions sur la corrélation. Définition. Droite de régression, covariance, coefficient de corrélation linéaire.

subdivision du système P en deux classes $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$ est telle que tout nombre de la classe $\underline{A}1$ est plus petit que tout nombre de la classe $\underline{A}2$ et nous disons que la division est opérée par le nombre α.

Par souci de brièveté et pour ne pas fatiguer le lecteur, je supprime les démonstrations de ces propositions qui suivent immédiatement des définitions des paragraphes précédents.

*Mais en dehors de ces propriétés le domaine P possède encore la **continuité**, c'est-à-dire qu'est valable la proposition suivante :*

IV - Si le système P de tous les nombres réels se subdivise en deux classes $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$ telles que tout nombre $\alpha 1$ de la classe $\underline{A}1$ est plus petit que tout nombre $\alpha 2$ de la classe $\underline{A}2$, il existe un et un seul nombre α par lequel est opéré cette division.

<u>Démonstration :</u> Par la division ou la coupure de P en $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$ est donnée en même temps une coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) du système $\underline{R}$ de tous les nombres rationnels, définie par le fait que $\underline{A}1$ contient tous les nombres rationnels de la classe $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$ tous les nombres rationnels restants, c'est-à-dire tous les nombres rationnels de la classe $\underline{A}2$. Soit α le nombre complètement déterminé opérant cette coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$). Soit maintenant β un nombre quelconque différent de α, il existe toujours une infinité de nombres rationnels $\underline{c}$ situés entre α et β. Si $\beta<\alpha$ alors $\underline{c}<\alpha$, donc $\underline{c}$ appartient à la classe $\underline{A}1$ et donc aussi à la classe $\underline{A}1$ et comme en même temps $\beta<\underline{c}$, β lui aussi appartient à cette même classe $\underline{A}1$, car tout nombre de $\underline{A}2$ est plus grand que tout nombre $\underline{c}$ de $\underline{A}1$. Mais si $\beta>\alpha$ alors $\underline{c}>\alpha$, donc $\underline{c}$ appartient à la classe $\underline{A}2$ et donc aussi à la classe $\underline{A}2$ et comme en même temps $\beta>\underline{c}$, β lui aussi appartient à la même classe $\underline{A}2$, car tout nombre de $\underline{A}1$ est plus petit que tout nombre $\underline{c}$ de $\underline{A}2$. Donc tout nombre β différent de α appartient à la classe $\underline{A}1$ ou à la classe $\underline{A}2$, selon que $\beta<\alpha$ ou que $\beta>\alpha$; par suite α lui-même est soit le plus grand nombre de $\underline{A}1$, soit le plus petit nombre de $\underline{A}2$, c'est-à-dire que α est un nombre et évidemment le seul par lequel est opéré la division de P en deux classes $\underline{A}1$ et $\underline{A}2$, ce qu'il fallait démontrer.

6. Calculs sur les nombres réels

Il s'agit maintenant de structurer le nouveau système $\mathbb{R}$ en lui adjoignant des opérations et des propriétés de calculs prolongeant celles du système des rationnels. Dedekind traite le cas de l'addition de deux réels (coupures) et vérifie la compatibilité avec l'addition de deux rationnels mais il esquive le cas des autres opérations.

Pour ramener un calcul quelconque effectué sur deux nombres réels α et β aux calculs effectués sur des nombres rationnels, il ne s'agit que de définir à partir de coupures ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) et ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) opérées par les nombres α et β dans le système P, la coupure ($\underline{C}1$, $\underline{C}2$) qui doit correspondre au résultat γ du calcul. Je me contente ici de développer l'exemple le plus simple, l'addition.

Soit $\underline{c}$ un nombre rationnel quelconque, rangeons-le dans la classe $\underline{C}1$ quand il existe un nombre $\underline{a}1$ dans $\underline{A}1$ et un nombre $\underline{b}1$ dans $\underline{B}1$ tels que leur somme $\underline{a}1+\underline{b}1 \geq \underline{c}$, rangeons tous les autres nombres rationnels $\underline{c}$ dans la classe $\underline{C}2$. Cette partition de tous les rationnels en deux classes $\underline{C}1$, $\underline{C}2$ constitue évidemment une coupure car tout nombre $\underline{c}1$ dans $\underline{C}1$ est plus petit que tout nombre $\underline{c}2$ dans $\underline{C}2$. Si maintenant les deux nombres α, β sont rationnels, tout nombre $\underline{c}1$ contenu dans $\underline{C}1$ est $\leq \alpha+\beta$, car $\underline{a}1 \leq \alpha$, $\underline{b}1 \leq \beta$ donc aussi $\underline{a}1+\underline{b}1 \leq \alpha+\beta$; s'il y avait d'autre part, contenu dans $\underline{C}2$, un nombre $\underline{c}2 < \alpha+\beta$, donc $\alpha+\beta = \underline{c}2+p$ où p désigne un nombre rationnel positif, l'on aurait :

$$\underline{c}2 = (\alpha - 1/2p) + (\beta - 1/2p)$$

ce qui contredit la définition du nombre $\underline{c}2$ car (α - 1/2p) est un nombre de $\underline{A}1$ et (β - 1/2p) un nombre de $\underline{B}1$; par suite tout nombre $\underline{c}2$ contenu dans $\underline{C}2$ est $\geq \alpha+\beta$. Donc dans ce cas la coupure ($\underline{C}1$, $\underline{C}2$) est produite par la somme $\alpha+\beta$. Pour cette raison on ne va pas à l'encontre de la définition valant dans l'arithmétique des nombres rationnels, lorsque l'on entend, dans tous les cas, par la somme $\alpha+\beta$ de deux nombres réels quelconques α, β le nombre γ par lequel est opérée la coupure ($\underline{C}1$, $\underline{C}2$). Si de plus un seul des deux nombres α, β par exemple α est rationnel, on se convainc aisément qu'il est sans influence sur la somme $\gamma = \alpha+\beta$, de ranger le nombre α soit dans la classe $\underline{A}1$ soit dans la classe $\underline{A}2$.

On peut définir de même les autres opérations de ce qu'on nomme l'arithmétique élémentaire, à savoir la formation des différences, produits, quotients, puissances, racines, logarithmes, et l'on parvient par cette méthode à démontrer effectivement des théorèmes (par exemple $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$), que l'on a que je sache jamais encore démontrés. /...

Puis il définit la notion d'intervalle de rationnels, d'intervalle "fini" (en fait "borné" au sens actuel) dont il montre l'existence d'une borne inférieure (respectivement supérieure) qui n'est autre que la coupure dont la première (respectivement deuxième) classe est constituée des minorants (respectivement majorants) rationnels de l'intervalle initial.

Suit une définition "moderne" de la continuité d'un "calcul" à plusieurs variables à l'aide d'intervalles et l'idée non développée que la notion de "valeurs-limites" serait plus efficace pour alléger des démonstrations d'une "*effroyable lourdeur*" :

/... *Il faut semble-t-il, s'attendre à des longueurs encore plus excessives, quand on se préoccupe ensuite de transposer à des nombres réels quelconques les innombrables théorèmes de l'arithmétique des nombres rationnels (par exemple le théorème $(\underline{a}+\underline{b})\underline{c}=\underline{a}\ \underline{c} + \underline{b}\ \underline{c}$) . Il n'en est pourtant pas ainsi : on se convainc bientôt que tout revient ici à démontrer que les opérations arithmétiques possèdent elles-mêmes une certaine continuité. J'exprimerai ce que je veux dire par là sous la forme d'une proposition générale :*

"Si le nombre λ est le résultat d'un calcul effectué sur les nombres α, β, γ... et si λ est situé à l'intérieur de l'intervalle $\underline{L}$, on peut indiquer les intervalles $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ ... à l'intérieur desquels sont situés les nombres α, β, γ... et tels que le résultat du même calcul, où l'on remplace les nombres α, β, γ... par des nombres arbitrairement pris dans les intervalles $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$... sera toujours un nombre situé dans l'intervalle $\underline{L}$."

Mais l'effroyable lourdeur qui s'est attachée à l'expression d'une telle proposition nous convainc qu'il doit se produire ici quelque chose pour venir en aide au langage; ce but est en fait parfaitement atteint si l'on introduit les concepts de grandeurs variables, de fonctions, de valeurs-limites et le plus efficace sera certainement de *fonder même les définitions des opérations arithmétiques les plus simples sur ces concepts, ce que l'on ne peut pourtant pas développer d'avantage ici.*

7.Analyse infinitésimale

Le dernier § de cet essai permet à Dedekind de démontrer le théorème de la limite monotone (c'était un des objectifs précisés dans la préface !) . Le raisonnement est moderne et très simple puisqu'il suffit de considérer la coupure (de réels) α dont la deuxième classe est constituée des majorants de l'ensemble des valeurs prises par la grandeur variable croissante : ce sera la limite cherchée. Il n'oublie d'ailleurs pas de mettre en évidence l'équivalence de ce théorème avec la continuité du système des réels.

Puis Dedekind termine cet essai par la démonstration du critère de Cauchy, démonstration élégante où toujours à l'aide des coupures (de réels) il définit les notions de limite-supérieure (respectivement inférieure) de la grandeur variable: La coupure dont la deuxième (respectivement première) classe est constituée des majorants (respectivement minorants) des valeurs prises par la grandeur variable "à partir d'un certain rang" définit sa limite supérieure (respectivement inférieure). La conclusion tombe ensuite par un raisonnement par l'absurde: l'hypothèse que la limite-inférieure diffère de la limite supérieure contredit la propriété de Cauchy.

C'est ici le lien avec les autres constructions de Heine et Cantor mentionnées par Dedekind dans sa préface et que nous allons étudier plus loin.

Il faut encore pour finir éclairer la connexion existant entre les considérations exposées jusque là et certains théorèmes fondamentaux de l'analyse infinitésimale.

On dit qu'une grandeur variable $\underline{x}$ qui parcourt des valeurs déterminées successives tend vers une valeur-limite fixe α quand au cours du processus, $\underline{x}$ se tient définitivement entre deux nombres entre lesquels α lui-même est situé ou bien, ce qui est la même chose, quand la différence prise absolument tombe définitivement en dessous de toute valeur donnée, différente de zéro.

L'un des théorèmes les plus importants s'énonce ainsi : "Quand une grandeur x *croit constamment, mais non au-delà de toute limite, elle tend vers une valeur limite."*

Je le démontre ainsi : par hypothèse, il existe un et par conséquent une infinité de nombres $\alpha 2$ *tels que l'on ait toujours* $\underline{x} < \alpha 2$*, je désigne par* $\underline{A}2$ *le système de tous ces nombres* $\alpha 2$*, par* $\underline{A}1$ *le système de tous les autres nombres* $\alpha 1$*, chacun de ces derniers a pour propriété qu'au cours du processus on obtient définitivement* $\underline{x} \geq \alpha 1$*; donc tout nombre* $\alpha 1$ *est plus petit que tout nombre* $\alpha 2$ *et par conséquent il existe un nombre* α *qui est soit le plus grand dans* $\underline{A}1$ *soit le plus petit dans* $\underline{A}2$ *(§5.IV) . La première possibilité ne peut se produire puisque* x *ne cesse jamais de croître, donc* α *est le plus petit nombre dans* $\underline{A}2$*. Quelque soit le nombre* $\alpha 1$ *que l'on prenne, finalement on a en définitive* $\alpha 1 < \underline{x} < \alpha$*, c'est-à-dire que* x *se rapproche de la valeur limite* α*.*

Ce théorème équivaut au principe de la continuité, c'est-à-dire qu'il perd sa validité pour peu que l'on tienne pour absent du domaine P ne fut-ce qu'un seul nombre réel ou pour le dire autrement si ce théorème est vrai, le théorème IV du paragraphe est vrai.

Un autre théorème de l'analyse infinitésimale, également équivalent à celui-ci et que l'on utilise encore plus fréquemment s'énonce ainsi: " Si dans le processus de variation d'une grandeur x*, on peut toujours indiquer pour toute grandeur positive* δ *donnée une place correspondante à partir de laquelle* x *varie d'une quantité inférieure à* δ*, alors* x *tend vers une valeur-limite."*[3]

Cette réciproque du théorème facilement démontrable que toute grandeur variable tendant vers une valeur limite, change finalement moins qu'une grandeur positive donnée quelconque, peut être déduite aussi bien du théorème précédent que directement du principe de la continuité. J'adopte cette dernière voie. Soit une grandeur positive quelconque (c'est-à-dire $\delta > 0$*), il arrivera par hypothèse un moment à partir duquel* x *variera d'une quantité inférieure à* δ*, c'est-à-dire que si* x *possède à ce moment la valeur* $\underline{a}$ *, alors* x *sera dans la suite toujours* $> \underline{a} - \delta$ *et* $< \underline{a}$ *-*

[3] On reconnait le critère de Cauchy .

δ. Je laisse provisoirement l'hypothèse initiale de coté et ne retiens que le fait, que l'on vient de prouver, à savoir que les valeurs ultérieures de la variable $\underline{x}$ sont situées entre deux valeurs finies que l'on peut indiquer. Sur ce fait je fonde une double répartition de tous les nombres réels. Je range dans le système $\underline{A}2$ un nombre $\alpha2$ (par exemple $\underline{a}+\delta$) quand dans le cours du processus on a définitivement $\underline{x} \leq \alpha2$, je range dans le système $\underline{A}1$ tout nombre non contenu dans $\underline{A}2$; si $\alpha1$ est un tel nombre, il arrivera infiniment souvent et si avancé que soit le processus, que $\underline{x} > \alpha1$. Comme tout nombre $\alpha1$ est plus petit que tout nombre $\alpha2$, il existe un nombre α parfaitement défini qui opère cette coupure ($\underline{A}1$, $\underline{A}2$) du système P et que je nommerai la valeur limite supérieure de la variable $\underline{x}$ qui reste constamment finie. De même le comportement de la variable $\underline{x}$ opère une seconde coupure ($\underline{B}1$, $\underline{B}2$) du système P, un nombre $\beta1$ (par exemple $\underline{a} - \delta$) est rangé dans $\underline{B}1$ quand au cours du processus on a définitivement $\underline{x} \geq \beta1$, tout autre nombre $\beta2$ à ranger dans $\underline{B}2$ à la propriété qu'on n'a jamais définitivement $\underline{x} \geq \beta2$, donc que $\underline{x}$ est toujours infiniment souvent $< \beta2$; le nombre β par lequel est opéré cette coupure sera dit la valeur limite inférieure de la variable $\underline{x}$. Les deux nombres α, β se caractérisent évidemment par la propriété suivante : soit ε une grandeur positive, si petite que l'on veut, alors on aura toujours définitivement $\underline{x} < \alpha+\varepsilon$ et $\underline{x} > \beta - \varepsilon$, mais jamais définitivement $\underline{x} < \alpha - \varepsilon$ ni $\underline{x} > \beta + \varepsilon$.

Deux cas sont maintenant possibles. Soit α et β diffèrent l'un de l'autre, alors on a nécessairement $\alpha > \beta$, car $\alpha2$ est toujours $> \beta$; la variable $\underline{x}$ oscille, et si avancé que soit le processus, elle subit toujours encore des variations dont la valeur est supérieure à ($\alpha - \beta - 2\varepsilon$), où ε est un nombre positif, aussi petit que l'on veut. Mais l'hypothèse initiale à laquelle je reviens maintenant est en contradiction avec cette conséquence; il ne reste par conséquent que le deuxième cas $\alpha = \beta$ et comme l'on a déjà démontré que si petite soit la grandeur positive ε, on a toujours définitivement $\underline{x} < \alpha+\varepsilon$ et $\underline{x} > \beta - \varepsilon$, alors $\underline{x}$ tend vers la valeur limite α, ce qu'il fallait démontrer.
Ces exemples peuvent suffire à démontrer le rapport existant entre le principe de la continuité et l'analyse infinitésimale.

B) Les suites de Cauchy : C. MERAY - G. CANTOR - E. HEINE

Parmi les publications qui traitent de la construction des nombres réels par les suites de Cauchy, nous avons choisi de présenter des extraits des textes de **Charles Méray** (1835-1911) qui fut le premier à publier en 1867 un « développement arithmétique des systèmes de nombres » puis approfondit sa théorie dans diverses publications.

Karl Weierstrass (1815-1897) a publié en 1872 une construction des nombres réels, imaginée dès 1863, qui fait appel à la notion d'agrégat, notion qui ne nous est pas familière et rend ses textes difficiles à étudier.

Georg Cantor (1845-1918) à l'occasion de l'étude des séries trigonométriques cherche à préciser la nature des nombres; il publiera en 1883 un mémoire sur la théorie des nombres irrationnels mais avait, dès avant, inspiré le travail de Heine et la publication de l'article cité ci-dessous.

Edouard Heine (1821-1881), élève de Cantor, expose en 1872 dans le journal de Crelle « Die Elemente der Functionlehre » ce que nous appelons la théorie de Cantor-Heine. Sa présentation est proche de celle de Méray, les notations sont toutefois très différentes et les extraits suivants (traduction de J.P. Friedelmeyer et de M.Guillemot - IREM de Toulouse) de son introduction précisent son objectif:

Le progrès de la théorie des fonctions est entravé fondamentalement par le fait que, même certaines propositions élémentaires, bien que démontrées par un savant plein de finesse sont encore aujourd'hui mises en doute, de telle sorte que les résultats d'une recherche ne sont pas jugés partout comme étant corrects, lorsqu'ils s'appuient sur ces propositions fondamentales indispensables. J'en trouve l'explication dans le fait, qu'à la vérité, les principes de Monsieur ***Weierstrass*** *se sont propagés tout seuls dans de vastes cercles, directement par ses leçons et autres communications orales, indirectement par des copies de cahiers écrits d'après ces leçons, mais qui n'ont pas été publiés dans une version authentifiée par lui même de sorte qu'il n'existe aucun endroit où l'on peut trouver les propositions* ***développées systématiquement****. Mais leur vérité repose sur cette définition non totalement fondée des nombres irrationnels par laquelle des représentations géométriques, par exemple la génération d'une ligne par le mouvement, ont semé le trouble et la confusion. /...*

.../ J'exprime mes remerciements en particulier à Monsieur ***Cantor****, de Halle, pour ses communications orales qui ont eu une influence considérable dans la*

réalisation de mon travail. J'y ai emprunté l'idée que les nombres généraux s'introduisent à l'aide de ces suites particulières convenables que j'appellerai ici suite-de-nombres /...

..../ Monsieur ***Cantor*** *trouve la justification de cette façon de considérer une grandeur-de-nombres comme introduite par des suites en ceci qu'il est possible d'établir les concepts d'égal, de plus grand et de plus petit.*

Si je ne veux pas m'en tenir aux rationnels positifs je ne réponds pas à la question: qu'est-ce qu'un nombre? en définissant un nombre abstrait qui introduirait les irrationnels en quelque sorte comme limites dont l'existence serait présupposées. Je me place, pour la définition, sur un plan purement formel en ce sens que ***je qualifie de nombres certains symboles explicitement connus,*** *de sorte que l'existence de ces nombres ne pose pas de problème.* ***Une importance capitale est accordée aux règles opératoires*** *et le symbole-numérique doit être muni d'un apparat tel qu'il assure un soutien aux définitions des opérations /....*

..../ et on élargit la définition des opérations de manière appropriée, de sorte qu'elles fournissent encore un résultat pour les nouveaux symboles alors que pour les anciens elles rendent le précédent.

Nous allons suivre Méray dans sa démarche pour clarifier la notion de nombre réel (le texte en annexe a paru en 1869 dans la revue des sociétés savantes.)

I) Méray énonce deux principes:

« 1.Une quantité variable v, qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

tend vers une certaine limite, si les termes de cette limite vont toujours soit en augmentant, soit en diminuant, pourvu qu'ils restent dans le premier cas inférieurs, dans le second supérieurs à une quantité fixe quelconque.

2.La variable v, définie comme ci-dessus, jouit encore de la même propriété si la différence $v_{n+p}-v_n$ *tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n et p.*

Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme deux axiomes »

On reconnaît dans ces deux principes :

1° Les théorèmes sur les suites croissantes majorées et décroissantes minorées.

2° L'énoncé du critère de Cauchy pour les suites.

" Toutefois en les examinant avec attention, j'ai reconnu qu'on peut ramener la seconde à la première, dont le caractère d'évidence est plus prononcé, et même finalement qu'il est possible de se passer de l'une et de l'autre. En procédant de cette manière, on suit, il est vrai, une voie plus détournée, mais elle est plus sûre, et on échappe à la nécessité d'introduire dans le raisonnement la conception assez obscure de nombre incommensurable. C'est ce que je me propose d'exposer aussi brièvement que le commande la nature élémentaire et aride d'un pareil sujet. "

II) Il montre alors que dès lors que l'on admet le principe 1., le principe 2. est vrai.

Pour ce faire, il suppose que v_{n+p}-v_n a pour limite 0 pour tout p puis il montre l'existence de deux suites l_k et L_k 'adjacentes' au sens moderne, telles que $l_k < v_n < L_k$ pour tout n > k.

Ces deux suites ayant une limite commune λ, il montre ensuite que limite (λ- v_n) = 0 .

"Je commence par la démonstration du dernier principe; ce point n'est pas sans intérêt, surtout si l'on n'adopte pas les idées que je proposerai tout à l'heure. On n'oubliera pas que j'admets en ce moment l'exactitude de l'autre proposition.

1° Quel que soit le nombre n il existe deux quantités l_k , L_k telles que l'on a: $l_k < v_n < L_k$ pour toute valeur de n supérieure à k.

En effet, si la limite supérieure L_k n'existait pas, v_n pourrait être rendue plus grande que toute quantitée donnée, et il serait possible de choisir successivement et indéfiniment les nombres k', k'', k'''... de manière à obtenir :

$v_{k'} > v_k + a$, $v_{k''} > v_{k'} + a$, $v_{k'''} > v_{k''} + a$,... où a désigne une quantité positive quelconque. Or on en conclurait, contrairement à l'hypothèse, qu'en attribuant à n les valeurs successives k, k', k'', k''', .., qui croissent à l'infini, et à p les valeurs correspondantes k'-k, k''-k', k'''-k'',... la différence v_{n+p} - v_n conserverait une valeur supérieure à a.

L'existence de l_k s'établit de la même manière.

2°Quel que soit k, on peut, sauf à prendre h suffisamment grand, supposer à la fois ($l_h > l_k$ et $L_h \leq l_k$) ou ($l_h \geq l_k$ et $L_h < l_k$)

sinon en effet, concevons deux quantités l', L', dont la seconde surpasse la première et qui satisfasse à toutes ces conditions c'est à dire telles que l'on ait :

$l_k < l' < L' < L_k$ *quelque valeur de v que l'on considère, il en existera de rangs plus éloignés qui seront les unes égales ou supérieures à L', les autres égales ou inférieures à l'; car autrement on pourrait prendre soit* $l_h = l'$, *soit* $L_h = L'$. *Ainsi on peut trouver un nombre h assez grand pour avoir* $v_h \geq L'$, *puis un autre h' > h qui fasse* $v_{h'} \leq l'$, *puis un troisième h''>h' qui ramène à la première inégalité* $v_{h''} \geq L'$ *et ainsi alternativement jusqu'à l'infini.*

Il arriverait donc, contrairement à l'hypothèse, que la différence $v_{n+p} - v_n$ *conserverait une valeur numérique au moins égale à L'-l' pour les valeurs infiniment croissantes h, h', h'',... attribuées à n, et les valeurs correspondantes h'-h, h''-h', h'''-h'', ... imposées à p.*

On pourra ainsi assigner successivement à v deux premières limites l_{h0}, L_{h0} *puis deux autres* l_{h1}, L_{h1}, *renfermées (l'une au moins) dans l'intervalle des précédentes, puis deux nouvelles* l_{h2}, L_{h2}, *encore plus rapprochées que celles-ci, et cela indéfiniment.*

3°Si les termes de la suite l_{h0}, l_{h1}, l_{h2} ***,..ne finissent pas par conserver une valeur constante, ils tendent nécessairement vers une certaine limite.***

Il en est de même pour ceux de $L_{h0}, L_{h1}, L_{h2}, \ldots$

car alors les premiers vont toujours soit en augmentant sans pouvoir surpasser L_{h0}, *puisqu'ils sont inférieurs à des valeurs de v, elles même inférieures à* L_{h0}. *Les derniers diminuent sans cesse en restant de même au dessus de* l_{h0}, *et on peut appliquer à ces deux suites l'axiome I.*

Nous nommerons l, L les limites de ces suites ou bien les valeurs constantes que leurs termes finissent par conserver. Cette dernière particularité ne peut pas avoir lieu pour toutes les deux à la fois. (2°)

4° les quantités l,L sont égales

Car autrement on aurait $l < L$, *et la considération de deux quantités l', L', choisies de manière à satisfaire aux conditions* $l < l' < L' < L$ *amènerait comme ci dessus (2°), à trouver pour n des valeurs croissant à l'infini et pour p des valeurs correspondantes qui maintiendraient la valeur numérique de* $v_{n+p} - v_n$ *au moins égale à L'-l'.*

5°La variable v converge vers λ valeur commune de l , L.

En effet les quantités $\lambda - l_{ni}$, $\lambda - L_{ni}$ sont infiniment petites, et par suite aussi leur différence $L_{ni} - l_{ni}$. Or en valeur absolue celle ci surpasse $\lambda - v_n$, donc cette dernière a pour limite zéro.

Maintenant faisons croître n indéfiniment d'une manière quelconque ,on a:

$$\lambda - v_n = (\lambda - v_{ni}) + (v_{ni} - v_n)$$

où on peut supposer n_i supérieur à n, et où par suite, en vertu de l'hypothèse admise, $v_{ni} - v_n$ est une quantité infiniment petite. Donc comme on voulait le prouver, v_n converge vers une certaine limite λ .

Une fois démontrée pour les quantités réelles, cette proposition s'étend d'elle même aux quantités imaginaires.

III) Ce paragraphe, intéressant à lire en entier, pose le problème de l'existence de la limite obtenue grâce au premier principe.

Revenons au premier principe. Toute méthode propre à constater l'existence d'une quantité remplissant des conditions déterminées repose essentiellement sur quelque procédé à l'aide duquel on pourrait calculer d'après les données la ***valeur*** *même de cette inconnue. Or les notions fournies par notre axiome sur la nature de la variable ne permettent pas à elles seules de découvrir la valeur de sa limite; donc elles ne suffisent pas non plus à en établir l'existence. Et l'axiome lui même devient inutile dès qu'il s'agit d'une variable dont les données accessoires de la question permettent de calculer la limite. Dans ce cas, en effet, on a que faire de savoir que l'existence de la limite tient à ce que la variable se modifie progressivement de telle ou telle manière.*

Mais, en outre, n'est-ce pas se contredire soi même que de vouloir rattacher l'existence ***analytique*** *d'un objet à une hypothèse qui ne l'assujettit à correspondre à aucun nombre, et qui, partant, ne lui confère pas le seul titre auquel il soit permis de l'introduire dans les calculs? Je suis porté à le croire et à attribuer précisément à cette cause la difficulté qu'on éprouve toujours à approfondir la notion de quantité incommensurable.*

Ainsi la théorie dont nous nous occupons repose encore sur une vérité qui sera toujours précaire et sur une notion qu'il ne parait pas bien facile de préciser. Mais *les énoncés actuels dissimulent des propriétés spéciales des nombres proprement dits; Il suffira de les en extraire pour tourner ce double obstacle. C'est ainsi qu'il a fallu procéder pour ressaisir la véritable nature des quantités imaginaires oubliée un instant dans le développement rapide de cette admirable conception.*

IV) Méray se propose alors de définir les irrationnels : Il appelle nombre un rationnel et définit les 'variables progressives' qui sont des suites infinies.

Si une telle variable progressive admet un nombre V pour limite alors $(v_{n+p} - v_n)$ a pour limite 0 lorsque n tend vers l'∞ et ceci pour tout p de **N.**

Si la variable n'admet pas de limite mais si toutefois $v_{n+p}-v_n$ tend encore vers 0 on dira, par analogie, que cette suite est convergente bien qu'elle n'ait pas de limite "numériquement assignable".

Il définit alors l'équivalence de deux variables convergentes.

Le nombre réel est alors construit: c'est, avec un vocabulaire actuel, une classe d'équivalence de la relation définie précédemment sur l'ensemble des suites de Cauchy.

Dans le cas ou les deux suites (de Cauchy) u et v ne sont pas équivalentes, leur différence est une suite de Cauchy et est donc convergente au sens de Méray.

Je réserverai maintenant la dénomination de nombre ou quantité aux entiers et fractions; j'appellerai ***variable progressive*** *toute quantité v qui reçoit successivement diverses valeurs en nombre illimité.*

Soit v_n la valeur de rang n de v: si n croissant à l'infini il existe un nombre V tel que, à partir d'une valeur convenable de n , $V - v_n$ reste inférieure à une quantité quelconque aussi petite qu'on puisse le supposer, on dit que v a pour limite V, et on voit immédiatement que $v_{n+p} - v_n$ a pour limite zéro , quelle que soit la loi de croissance simultanée imposée à n et p.

S'il n'y a point de semblable nombre , il n'est plus permis , analytiquement parlant, d'affirmer que v a une limite; mais si dans ce cas la différence $v_{n+p} - v_n$ converge vers zéro, la nature de v offre une ressemblance extraordinaire avec celle des variables réellement douées de limites. Il nous faut un terme spécial pour exprimer la propriété remarquable de cette différence dont il s'agit: je dirai que la variable progressive v est convergente, quelle ait ou non une limite numériquement assignable.

L'existence d'une limite pour une variable convergente rend facile l'énonciation de certaines de ses propriétés qui ne dépendent point de cette particularité, et qu'il serait souvent beaucoup plus incommode de formuler directement. On conçoit donc qu'il soit avantageux, dans le cas où il n'y a point de limite, de conserver le langage abrégé propre à celui où il en existe une; et pour exprimer la convergence de la variable, on dira simplement : ***elle a une limite(fictive)***

Voici un premier exemple de l'utilité de cette convention: si m, n augmentant tous deux à l'infini, la différence $u_m - v_n$ de deux variables convergentes tend vers 0 pour une certaine dépendance mutuelle entre ces indices, on prouve aisément qu'elle reste infiniment petite pour toute autre loi; je dirai alors que les variables u et v sont équivalentes, et on voit de suite que deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles. Quand $u_m - v_n$ ne tend pas vers zéro on prouve que cette différence est convergente et reste équivalente à elle même, soit que la relation de m à n vienne à changer soit que l'on remplace u, v par des variables respectivement équivalentes.

Maintenant supposons que u, v aient des limites U, V: si u ,v sont équivalentes U, V seront égales, sinon U-V sera la limite de $u_m - v_n$, et son signe celui que cette quantité finira par conserver. Supposons, au contraire, que u, v n'aient de limites (numériques) : il y aura avantage à dire toujours (au figuré) qu'elles ont des limites égales, si elles sont équivalentes, sinon que la limite (fictive) de u est supérieure ou inférieure à celle de v, selon que u-v finit par rester positive ou négative .

Pour préciser la structure de **R** il suffit de lire maintenant le paragraphe intitulé 'Nombres incommensurables' du 'Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale' du même Méray. Méray appelle ici 'variante' une suite à un ou plusieurs indices et la lecture du paragraphe sera plus aisée en remplaçant $v_{m,n,...}$ par v_m .

Nouveau Précis d'analyse infinitésimale

Charles Méray

Nombres incommensurables

.....

4. Nous nommerons convergente toute variante $v_{m,n..}$ telle que la différence $v_{m+p,n+q'}..- v_{m,n...}$ soit , quels que soient p,q,...inférieure à une variante infiniment petite , aux indices m,n..;;ou bien, plus brièvement , telle que cette différence tende vers 0 pour m,n ..infinis quels que soient p,q,...

Par exemple sont convergentes :

1° les variantes pourvues de limites. Car $v_{m+p,n+q..}-v_{m,n..} = (V-v_{m,n.}) - (V-v_{m+p,n+q,..})$ différence de deux quantités infiniment petites.

2° Les variantes finies qui, à partir de certaines valeurs des indices,vont toujours, soit sans croître, soit sans décroître (algébriquement parlant). On le vérifie sans difficulté.

5. Deux variantes $v_{m,n...}$, $v'_{m',n'..}$,sont équivalentes quand leur différence $v_{m,n...}$ - $v'_{m',n'...}$, considérée comme une variante aux indices m, n...m' ,n',...est infiniment petite. Quand l'une est pourvue d'une limite, l'autre converge nécessairement vers la même quantité.

Cela posé, on démontre facilement ce qui suit :
la somme, le produit (un produit de puissances) d'un nombre déterminé quelconque de variantes convergentes et de quantité invariables, est une variante convergente qui reste équivalente à elle même quand on substitue aux variantes proposées d'autres qui leur soient respectivement équivalentes. De même pour un quotient dont le diviseur n'est pas infiniment petit.

6 ..../ Toutefois, on peut convenir de dire au figuré qu'une variante tend vers une limite fictive incommensurable, quand elle est convergente et n'a point de limite numériquement assignable; que les limites incommensurables de deux variantes convergentes sont égales quand celles ci sont équivalentes; que la somme le produit ,etc.., de variantes convergentes a pour limite (véritable ou fictive selon le cas) la somme, le produit, etc, de leurs limites commensurables ou incommensurables. /...

Telle est pour nous la nature des nombres incommensurables; ce sont des fictions permettant d'énoncer d'une manière uniforme et plus pittoresque des propositions relatives aux variantes convergentes.

7. Une variante convergente non infiniment petite finit par conserver un signe déterminé. Car il existe par hypothèses une infinité de combinaisons de valeurs de m,n ... qui rendent $v_{m,n..}$ supérieure en valeur absolue à un certain nombre fixe δ. Donnons à m,n ... de semblables valeurs qui soient en même temps assez grandes pour que $v_{m+p,n+q...}$ - $v_{m,n,..}$ soit numériquement inférieure à δ quels que soient p,q,..

Comme $v_{m+p,n+q..}$ est égale à $v_{m,n,..}+(v_{m+p,n+q,..}-v_{m,n,..})$; cette quantité conservera nécessairement quels que soient p,q,.., c'est-à-dire pour tous indices égaux ou supérieurs à m,n,..le signe de $v_{m,n,..}$

D'après cela, si deux variantes convergentes sans limites commensurables $v_{m,n,..}, v'_{m',n',..}$ ne sont pas équivalentes, leur différence $v_{m,n,..}-v'_{m',n',..}$ finit par conserver un signe déterminé. Selon que ce signe est + ou -, on dit que la limite incommensurable de la première est supérieure ou inférieure à celle de la seconde.

De même on dira qu'un nombre commensurable a est supérieur ou inférieur à un nombre incommensurable défini par la variante $v_{m,n,..}$ selon que a - $v_{m,n,..}$ finit par être > 0 ou < 0.

Si, en valeur absolue, cette différence finit par rester inférieure à ε, a se nomme la valeur du nombre incommensurable approchée à ε près, par excès dans le premier cas, par défaut dans le second.

On peut assigner à tout nombre incommensurable une valeur approchée à moins d'une quantité donnée quelconque δ, si petite qu'on la suppose.

Soit en effet la variante convergente correspondante et prenons m,n,.. assez grands pour qu'au delà $v_{m+p,n+q,...}-v_{m,n,...}$ reste en valeur absolue inférieure à ½ δ, quels que soient p,p,..

De l'identité $v_{m+p,n+q..} = v_{m,n,..}+(v_{m+p,n+q,..}-v_{m,n,..})$, on tire quels que soient p,q,.. :

$(v_{m,n,..}+ \frac{1}{2}\delta) - v_{m+p,n+q,..}>0$ et $< \delta$; $(v_{m,n,.}- \frac{1}{2}\delta) - v_{m+p,n+q,.} < 0$ et en valeur numérique $< \delta$ donc $v_{m,n,..}+ \frac{1}{2}\delta$, $v_{m,n,..} - \frac{1}{2}\delta$ sont des valeurs approchées à δ près du nombre incommensurable dont il s'agit, l'une par excès, l'autre par défaut.

3) La Construction des Réels dans les programmes officiels

Nous avons recherché dans les Bulletins Officiels de l'Instruction Publique de **1900** à **1932** (entre **1932** et **1944** la parution des B.O. est interrompue et il faut se référer aux J.O.), puis dans les Bulletins Officiels de l'Education Nationale de **1944** à **1999** quelle était la place de la construction des nombres réels dans les concours de l'enseignement des mathématiques (Agrégation - Capes), dans les concours d'entrée aux grandes écoles et les programmes des classes préparatoires ainsi qu'au Baccalauréat (scientifique).

A) Le BACCALAUREAT

Le décret du **8 Août 1890** (B.O. du 16/8/1890) substitue aux baccalauréats ès lettres, ès sciences et "ès sciences restreint" un baccalauréat unique de l'enseignement secondaire *classique* dont les épreuves se déroulent en deux parties séparées d'une année; le baccalauréat de l'enseignement secondaire *moderne* est créé par un décret du 5 Juin 1891. Après la réforme de 1902, les programmes de mathématiques de la classe de Mathématiques élémentaires (ou Mathématiques A) préparant le baccalauréat "deuxième série" (Lettres, Mathématiques) n'évoluent pas beaucoup pendant la première moitié du siècle en ce qui concerne l'Analyse et les nombres réels. Notons que la classe de Mathématiques élémentaires existera jusqu'en **1966** et deviendra Terminale C à la rentrée **1967** puis fusionnera avec la Terminale D pour donner la Terminale S à la rentrée **1994**.

Les chapitres concernant les nombres traitent essentiellement de questions d'arithmétique (opérations, divisions d'entiers, P.G.C.D., P.P.C.M., nombres premiers ...), des opérations élémentaires sur les fractions et nombres décimaux, de calculs sur les valeurs approchées (décimales) et d'extractions de racines carrées. On trouve même au début du siècle (cf. B.O. du **7 Juin 1902**) [1] le système métrique et la mesure des grandeurs (rapport de deux grandeurs de même espèce), la règle de trois, les calculs d'intérêts et de rentes!

Une réforme est prévue en **1938-39** (J.O. du **11/10/1938**) mais ne sera jamais appliquée pour cause de guerre. Les arrêtés du **18/8/1944** et du **15/9/45** renvoient aux programmes de **1931** (Arrêté du 1/6/1931) et **1925** pour le second cycle.

---

[1] Les photocopies d'extraits des textes principaux sont regroupées à la fin de ce paragraphe A .

Il faut attendre, après la réforme des classes préparatoires de **1956** (cf. **§B**), l'année **1962** pour que les nombres réels et leur construction soient mentionnés dans les programmes du Secondaire.

1962 La nécessité d'une construction des nombres réels apparaît dans l'arrêté du **6 Mars 1962** qui fixe le programme de la classe de mathématiques (rentrée **1962**) préparant au baccalauréat (math-élém) et qui restera en vigueur jusqu'à la rentrée **1967 :**

§4. *Notions sur les nombres réels* : "*Nécessité d'une extension de la notion de nombre, au-delà des rationnels; indications sommaires (à partir d'exemples) sur un mode de construction des réels, sur la définition des opérations élémentaires les concernant, sur leur comparaison. /.../ Structure de corps/.../Correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite munie d'une origine et d'un vecteur unité.*".

1965-67 Le décret N° 65-438 du **10/06/1965** réorganise l'enseignement du secondaire et définit les nouvelles sections de la Seconde (A-C-T à partir de la rentrée 1965), de la Première (à partir de la rentrée 1966) et de la Terminale (A-B-C-D-T à partir de la rentrée 1967). La classe de **math-élem** devient ainsi la classe de **Terminale C** et l'Arrêté du **8/06/1966** qui fixe son programme de mathématiques supprime toute construction des nombres réels tout en précisant :

" *Nécessité d'une extension de Q. Exposé sans démonstration des propriétés des réels. Les réels forment un corps commutatif ordonné. Valeurs absolues, propriétés relatives aux sommes, produits, quotients* ".

1971 L'arrêté du **14 Mai 1971** allège à nouveau la rubrique "nombres réels" puisqu'il n'y subsiste plus que : " *Inventaire (sans démonstration) des propriétés de **R** : C'est un corps commutatif totalement ordonné ; toute partie non vide majorée admet un plus petit majorant - tout intervalle de **R** contenant plus d'un point contient un rationnel* .". Notons que dans ce même programme le corps **C** des nombres complexes est construit comme l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

De plus la circulaire du **26 Juillet 1971** qui commente ce programme précise bien que : " *Toute construction ou partie de construction de **R** est hors programme* " tout en fixant l'orientation suivante :

... / *"Donner aux futurs bacheliers les bases mathématiques solides et fécondes qui leur permettront d'aborder tels ou tels de ces domaines particuliers conduit à leur dispenser d'abord un enseignement général et de ce fait tourné vers l'abstraction. Ce serait toutefois, une erreur de penser que, seules, comptent l'acquisition des concepts, la construction de théories à partir d'axiomes au choix habile ou laborieux : la science mathématique ne peut se passer d'utiliser des techniques, qui doivent faire, dès lors, l'objet d'un enseignement et d'un entraînement."* /**...**

1983 A partir de l'arrêté du **9 Mars 1982** qui fixe les programmes des classes de 1ères **(rentrée 1982)** et de Terminales **(rentrée 1983)** il n'y a plus de construction d'ensembles numériques (à part une "*présentation du corps des nombres complexes... dont une construction détaillée n'est pas souhaitable*" !).

CLASSES DE PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUES.

	PHILOSOPHIE.		MATHÉMATIQUES.	
	SECTION A.	SECTION B.	SECTION A.	SECTION B.
Philosophie	8h pendant 1 semestre.	8h pendant 1 semestre.	3 heures.	3 heures.
Philosophie	9h pendant 1 semestre.	9h pendant 1 semestre.	" —	" —
Grec-latin.	4h facultat.	" —	" —	" —
Latin.	" —	2h facultat.	" —	" —
Langues vivantes..	2h facultat.	1h + 2h (1)	2 —	1h + 2h (1)
Histoire.	3 heures.	3 heures.	3 heures.	3 heures.
Mathématiques....	2 —	2 —	8 —	8 —
Physique et chimie.	3 —	3 —	5 —	5 —
Histoire naturelle.	2 —	2 —	2 —	2 —
Exercices pratiques de sciences.....	" —	" —	2 heures.	2 heures.
Dessin	2h facultat.	2h facultat.	2h fac.(2) + 2(3)	2h fac.(2) + 2(3)
Hygiène (12 confér. de 1 heure (4))..	" —	" —	" —	" —
TOTAL........	18h 1/2 + 8 fac.	21h 1/2 + 4h fa.	27h + 2h fac.	28h + 2 fac.

ART. 2. Des modifications pourront être apportées dans la répartition hebdomadaire des diverses matières de l'enseignement par les chefs d'établissement, après avis des assemblées de professeurs et avec l'autorisation du recteur.

ART. 3. De nouveaux enseignements pourront être créés par les recteurs, après avis des assemblées de professeurs et des conseils d'administration, dans les lycées qui recevront une subvention fixe de l'État pour la dépense de l'externat; dans les autres, par le Ministre, sur la proposition des recteurs, après avis des assemblées de professeurs.

Pour les collèges communaux, les propositions soumises par les recteurs aux municipalités en vue de la création de nouveaux enseignements seront accompagnées de l'avis des assemblées de professeurs.

(1) Les élèves auront la faculté de choisir la distribution de ces deux classes.

(2) Le dessin d'ornement sera facultatif.

(3) 2 heures pour le dessin géométrique.

(4) Ces conférences seront comprises dans le cours de sciences naturelles pour les sections de mathématiques A et B et pour les quatre sections de philosophie et de mathématiques, lorsque ces sections seront réunies. Elles seront faites en dehors du cours de sciences naturelles pour les sections de philosophie A et B, lorsque les sections seront séparées.

p. 745 - p. 839

7 juin 1902

CLASSE DE MATHÉMATIQUES.

SECTIONS A ET B.

MATHÉMATIQUES (8 heures).

Arithmétique.

Numération décimale.

Addition, soustraction, multiplication et division des nombres entiers. Théorèmes fondamentaux concernant ces opérations. Explication des règles pratiques pour effectuer les opérations.

On ne change pas le reste d'une somme, d'une différence, d'un produit, en augmentant ou en diminuant un terme ou un facteur d'un multiple du diviseur. Restes de la division d'un nombre entier par 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3. Caractères de divisibilité par chacun de ces nombres.

Plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres. Nombres premiers entre eux. On ne change pas le plus grand commun diviseur de deux nombres en multipliant ou en divisant l'un d'eux par un nombre premier à l'autre. Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier à l'un de ces facteurs divise l'autre. Le produit de deux nombres premiers à un troisième nombre est premier à ce dernier nombre. Plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers. Décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition ne peut s'effectuer que d'une seule façon. Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers.

Fractions ordinaires. — Réduction d'une fraction à sa plus simple expression. — Réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. — Plus petit dénominateur commun. — Opérations sur les fractions ordinaires ; extension à ces opérations des propositions fondamentales concernant les opérations sur les nombres entiers. — Extension de la théorie aux fractions dont les deux termes sont des fractions ordinaires. — Nombres décimaux. — Opérations (en considérant les fractions décimales comme cas particulier des fractions ordinaires). — Calcul d'un quotient à une approximation donnée.

Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale ; condition de possibilité. — Lorsque la réduction est impossible, la fraction ordinaire peut être regardée comme la limite d'une fraction décimale périodique illimitée.

Carré d'un nombre entier ou fractionnaire ; composition du carré de la somme de deux nombres. — Le carré d'une fraction n'est jamais égal à un nombre entier. — Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une approximation donnée.

Système métrique. — Exercices.

Rapport de deux nombres. — Rapports égaux. — Partage en parties proportionnelles.

Mesure des grandeurs. — Définition du rapport de deux grandeurs de même espèce. — Théorème : le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent.

Grandeurs directement ou inversement proportionnelles. — Problèmes. — Règle de trois simple ou composée.

Intérêt simple. — Rentes françaises. — Escompte. — Questions sur les mélanges et les alliages.

Définition de l'erreur absolue et de l'erreur relative. — Détermination de la limite supérieure de l'erreur commise sur une somme, une différence, un produit, un quotient, connaissant les limites supérieures des erreurs dont les données sont entachées. — Calcul, à une approximation donnée, d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.

Algèbre.

Introduction des nombres positifs et négatifs ; leur utilité pour la représentation des grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés. Opérations sur ces nombres ; extension aux fractions algébriques des propriétés démontrées en arithmétique.

Monomes, polynomes ; addition, soustraction, multiplication et division des monomes et des polynomes.

Principes relatifs à la résolution des équations.

Équations du premier degré à une ou deux inconnues ; résolution et discussion. Exemples de systèmes d'équations du premier degré à plusieurs inconnues.

Équation du second degré à une inconnue. (On ne développera pas la théorie des imaginaires.) Relations entre les coefficients et les racines. Nature et signe des racines. Équation bicarrée.

Changements de signe et variations des expressions :

$$ax + b, \; ax^2 + bx + c.$$

Inégalités du premier et du second degré.

Problèmes du premier et du second degré : mise en équations. Discussion des résultats.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques. Somme des carrés et des cubes des n premiers nombres entiers.

Logarithmes vulgaires. Usage des tables à cinq décimales. Intérêts composés et annuités.

Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite par une équation du premier degré. Coefficient angulaire d'une droite. Construction d'une droite donnée par son équation. Représentation d'une fonction par une courbe.

7 juin 1902.

Variations et représentation graphique des fonctions :

$$y = ax + b, \qquad y = \frac{ax + b}{a'x + b'},$$

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad y = ax^3 + bx^2 + c.$$

Notion de la dérivée. Signification géométrique (coefficient angulaire de la tangente) et cinématique (vitesse dans le mouvement rectiligne) de la dérivée ; le sens de la variation d'une fonction est indiqué par le signe de la dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$.

Application à l'étude de la variation, à la recherche des maximums ou des minimums de quelques fonctions simples, en particulier des fractions de la forme

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \qquad x^3 + px + q$$

où les coefficients ont des valeurs numériques. Dérivée de l'aire d'une courbe considérée comme fonction de l'abscisse. (On admettra la notion d'aire.) Le professeur laissera de côté toutes les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas de faire appel à l'intuition.

Trigonométrie.

Revision du programme des classes précédentes.

Applications de la trigonométrie aux diverses questions relatives au levé des plans [1].

Géométrie.

Figures planes.

Ligne droite et plan. — Angles. — Droites perpendiculaires.

Triangles. — Triangle isocèle. — Cas d'égalité des triangles.

Perpendiculaires et obliques. — Triangles rectangles. — Cas d'égalité.

Définition d'un lieu géométrique. — Lieu géométrique des points équidistants de deux points ou de deux droites.

Droites parallèles.

Somme des angles d'un triangle, d'un polygone convexe.

Parallélogrammes.

Figures symétriques par rapport à un point ou à une droite. — Deux figures planes symétriques sont égales.

Translation d'une figure plane de forme invariable.

Composition de plusieurs translations.

Usage de la règle et de l'équerre.

---

[1] On ne parlera pas de la construction des tables trigonométriques.

Cercle. — Intersection d'une droite et d'un cercle.

Tangente au cercle; les deux définitions de la tangente. — Arcs et cordes.

Positions relatives de deux cercles.

Mesure des angles.

Mouvement de rotation autour d'un point. — Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan se ramène à une rotation ou à une translation.

Usage de la règle et du compas. — Rapporteur.

Problèmes élémentaires et lieux géométriques.

Longueurs proportionnelles. — Toute parallèle à l'un des deux côtés d'un triangle divise les deux autres côtés en parties proportionnelles. — Réciproque.

Propriétés des bissectrices d'un triangle. — Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

Triangles semblables. — Cas de similitude.

Homothétie. — Centres de similitude de deux cercles. — Polygones semblables.

Relations métriques dans un triangle rectangle et dans un triangle quelconque. — Théorème de Stewart. — Lignes proportionnelles dans le cercle.

Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical. — Centre radical. — Inversion. — Diviser une droite en parties proportionnelles à des droites données. — Quatrième proportionnelle; moyenne proportionnelle. — Division d'une droite en moyenne et extrême raison.

Polygones réguliers. — Démontrer qu'il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés. — Inscription du carré, de l'hexagone, du triangle équilatéral, du décagone, du pentédécagone. — Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables. — Rapport de leurs périmètres. — Longueur d'un arc de cercle. — Rapport de la circonférence au diamètre. — Calcul de π [1].

Aire des polygones; aire du cercle.

Mesure de l'aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze d'un polygone quelconque.

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Rapport des aires de deux polygones semblables.

Aire d'un polygone régulier convexe. — Aire d'un cercle, d'un secteur et d'un segment de cercle. — Rapport des aires de deux cercles.

Notions d'arpentage. — Usage de la chaîne et de l'équerre d'arpenteur.

Figures dans l'espace.

Plan et ligne droite.

Détermination d'un plan. — Droite et plan perpendiculaires.

Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan.

---

[1] On se bornera à la méthode des périmètres.

p. 842-843

7 juin 1902.

Parallélisme des droites et des plans.

Angle dièdre. — Dièdre droit. — Angle plan correspondant à un angle dièdre.

Le rapport de deux angles dièdres est le même que celui de leurs angles plans.

Plans perpendiculaires entre eux.

Angles trièdres. — Chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres. — Limites de la somme des faces d'un trièdre.

Disposition des éléments d'un trièdre.

Trièdres supplémentaires.

Dans tout trièdre chaque dièdre augmenté de deux droits est plus grand que la somme des deux autres.

Limites de la somme des dièdres d'un angle trièdre.

Si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre quelconque au delà de son sommet on forme un nouvel angle trièdre qui ne peut lui être superposé, bien qu'il soit composé des mêmes éléments.

Cas d'égalité des trièdres.

Somme des faces d'un angle polyèdre convexe.

Polyèdres.

Parallélépipède. — Volume du parallélépipède rectangle. — Volume du parallélépipède droit. — Volume du prisme droit. — Volume du parallélépipède oblique. — Volume du prisme oblique.

Pyramide. — Volume de la pyramide. — Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

Polyèdres homothétiques. — Polyèdres semblables. — Rapport des volumes de deux polyèdres semblables. — Translation d'une figure de forme invariable dans l'espace. Rotation autour d'un axe. — Déplacement le plus général d'un corps dans l'espace.

Figures symétriques. — Symétrie par rapport à un point. — Symétrie par rapport à un plan. Ce second mode de symétrie se ramène au premier. — Symétrie par rapport à une droite. — Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

Cylindre droit à base circulaire. — Surface latérale. — Volume.

Cône droit à base circulaire. — Sections parallèles à la base. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles. — Volume du cône du tronc de cône à bases parallèles.

Sphère. — Sections planes, grands cercles, petits cercles. — Pôles d'un cercle. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane.

Plan tangent.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière tournant autour d'un de ses diamètres. — Aire de la zone. — Aire de la sphère. — Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. — Application au volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un de ses diamètres. — Volume d'une sphère. — Volume d'un segment sphérique.

Courbes usuelles.

Ellipse. — Définition de l'ellipse par la propriété des foyers. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axes. — Sommets. — Cercles directeurs. — Intersection d'une droite et d'une ellipse. — Tangente. — Normale. — Mener à une ellipse une tangente : 1° par un point donné; 2° parallèlement à une droite donnée. — Ellipse considérée comme projection d'un cercle.

Parabole. — Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu. — Axe. — Sommet. — Intersection d'une droite et d'une parabole. — Tangente. — Normale. — Sous normale. — Mener à une parabole une tangente : 1° par un point donné; 2° parallèlement à une droite donnée. — Relation entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe et sa distance au sommet.

Sections du cône droit. — Méthode de Dandelin. — Hyperbole.

Hélice. — Définition. — Propriété de la tangente.

Cinématique.

Revision du cours de cinématique de la classe de première (section C et D).

Roulement sans glissement dans un plan d'un cercle sur un autre ou bien sur une ligne droite. — Cycloïde et épicycloïdes. — Application aux engrenages cylindriques. — Crémaillère [1].

Roues intermédiaires. — Exemples simples de trains d'engrenages. — Notions sur les systèmes articulés. — Bielle et manivelle. — Pantographes et inverseurs. — Appareil à ligne droite de Peaucellier.

Statique.

Forces appliquées à un point matériel. — Leur mesure. — Résultante. — Équilibre d'un point matériel libre. — Équilibre d'un point matériel sur un plan quand on tient compte du frottement [2].

Équilibre d'un point pouvant glisser sans frottement sur une courbe ou sur une surface.

Forces appliquées à un corps solide. — Somme géométrique et moment résultant des forces par rapport à un point. — Réduction d'un nombre quelconque de forces appliquées à un solide, d'abord à trois, puis à deux forces.

Les deux forces finales ont même somme géométrique et même moment résultant que les forces primitives.

Conditions d'équilibre d'un solide libre. — Application à trois forces, à des forces parallèles, à des forces situées dans un même plan.

---

(1) Le professeur se bornera à faire remarquer qu'à chaque dent de l'une des roues il correspond une dent de l'autre roue avec laquelle cette dent reste toujours en contact.

(2) On fera remarquer que les conditions d'équilibre s'expriment par des inégalités.

7 juin 1902.

Conditions d'équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un solide libre, exprimées comme les conditions d'équilibre. — Applications; couples, composition des couples; les forces appliquées à un solide peuvent toujours être réduites à une force et à un couple; conditions pour que les forces aient une résultante unique.

Cas particulier de forces situées dans un plan.

Forces parallèles. — Centre des forces parallèles. — Centre de gravité. — Sa recherche dans quelques cas simples : triangle, trapèze, quadrilatère, prisme, pyramide.

Équilibre d'un corps mobile autour d'un axe fixe ou bien assujetti à reposer sur un plan fixe.

Machines simples. — Levier. — Charge du point d'appui. — Treuil. — Poulie fixe et poulie mobile. — Moufles. — Cric. — Plan incliné.

Dynamique.

Notions sur la dynamique du point. — Inertie. — La force est égale géométriquement au produit de la masse par l'accélération.

Travail d'une force appliquée à un point matériel. — Unité de travail. — Travail d'une force constante, d'une force variable. — Travail élémentaire. — Travail total. — Évaluation graphique. — Travail de la résultante de plusieurs forces concourantes. — Théorème des forces vives pour un point matériel. — Exemples simples.

Machines à l'état de mouvement. On vérifiera que si une machine simple est mise en mouvement, les conditions d'équilibre étant remplies à chaque instant, le travail de la puissance est égal et de signe contraire à celui de la résistance.

Énoncé du principe général des forces vives. — Application aux machines. — Travail moteur et travail résistant.

Résistances passives. — Frottement. — Énoncé des lois du frottement. — Travail des résistances passives. — Rendement d'une machine.

Indications sur l'emploi des volants et des freins.

Géométrie descriptive.

Revision du cours de la classe de première. — Méthode des rabattements. Application à la détermination des distances et des angles.

Distance de deux points. — Distance d'un point à un plan. — Distance d'un point à une droite.

Angle de deux droites. — Angle de deux plans. — Angle d'un plan avec les plans de projections. — Angle d'une droite et d'un plan.

Représentation d'une pyramide et d'un prisme. — Section plane.

Développement de la méthode des projections cotées (suite). — Détermination de la distance de deux points. — De la distance d'un point à une droite. — De la distance d'un point à un plan.

Angle de deux droites et angle de deux plans.

Représentation d'une surface par des courbes de niveau. — Problèmes relatifs à ce mode de représentation.

Cote d'un point de la surface dont la projection horizontale est donnée. — Pente d'une ligne tracée sur la surface. — Lignes d'égale pente. — Lignes de pente. — (Tracés approximatifs.) — Lignes de plus grande pente.

Application des considérations précédentes aux cartes topographiques. — Planimétrie et nivellement. — Lignes et teintes conventionnelles. — Lecture d'une carte, et en particulier de la carte d'État-Major. — Usage de la carte sur le terrain.

Compléments.

Notions de géométrie projective. — Plan du tableau. — Perspective d'un point, d'une droite, d'une ligne.

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Sa conservation par projection. — Rapport harmonique.

Point de fuite d'une droite. — Perspective de deux droites parallèles. — Ligne de fuite d'un plan. — Conception de la droite à l'infini d'un plan.

Correspondance homographique entre deux points sur une même droite. — Points doubles. — Deux points homologues forment avec ces points doubles un rapport anharmonique constant. Cas particulier de l'involution.

Faisceaux homographiques autour d'un même point. — Rayons doubles. (On évitera de parler des éléments géométriques imaginaires.)

Faisceaux homographiques autour de deux points différents; le lieu de l'intersection de deux rayons homologues est une droite ou une conique, c'est-à-dire la perspective d'un cercle, convenablement faite, d'un point de vue approprié.

Cosmographie.

La Terre. — Mesure des degrés du méridien en France, en Laponie, au Pérou; leur allongement à mesure que l'on s'approche des pôles. — Aplatissement de la terre. — Longueur du mètre. — Mètre légal.

Cartes géographiques. — Projections orthographique et stéréographique (éviter les développements trop exclusivement géométriques). — Mappemonde. — Système de développement en usage dans la construction de la carte de France. — Indication sur la carte de Mercator.

Soleil. — Diamètre apparent du Soleil. — Il est variable avec le temps. — Conclusion relative à la distance du Soleil à la Terre. — Le Soleil paraît décrire une ellipse autour de la Terre en suivant la loi des aires.

Temps solaire vrai et moyen; heure légale; fuseaux horaires.

Année tropique. — Calendrier. — Réforme julienne. — Réforme grégorienne.

Du jour et de la nuit en un lieu déterminé de la Terre. — Leurs durées variables. — Crépuscule.

Saisons. — Inégalité de leurs durées.

Mouvement de la Terre autour du Soleil.

Lune. — Orbite de la Lune et de la Terre. — Rotation de la Lune sur elle-même.

Éclipses de Lune.

Éclipses partielles et totales. — Ombre et pénombre. — Influence de l'atmosphère terrestre.

Éclipses du soleil. — Éclipses partielles. — Annulaires. — Totales.

Système solaire. — Lois de Kepler.

Gravitation universelle.

Notions sommaires sur les marées.

Notions sommaires sur les planètes et sur les comètes.

Aperçu sur l'histoire de l'astronomie.

Fin du programme de Mathématiques - Classe de Mathématiques A-B
- 1902 -

b) Questions de géométrie affine et métrique dans le plan (ancien programme de la classe T.M., arrêté du 24 mai 1963, B.O. n° 25 du 20 juin 1963)

Ces questions sont résumées dans les rubriques suivantes :

Ensemble des points M d'un plan tels que, A et B étant deux points de ce plan, l'angle orienté de vecteurs $(\vec{MA}, \vec{MB})$ ou l'angle orienté de droites (MA, MB) soit égal à un angle donné.

Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Cercles orthogonaux. Faisceaux linéaires de cercles, faisceaux orthogonaux.

Points conjugués, polaire d'un point par rapport à un cercle ; pôle d'une droite, droites conjuguées. Définition d'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle ; transformée d'une division harmonique de quatre points alignés.

Affinité (géométrie plane). Produit de deux affinités ayant même axe et même direction. Transformée d'une droite ; transformée de la tangente en un point d'une courbe. Affinité orthogonale ; interprétation à l'aide d'une rotation et d'une projection orthogonale.

Inversion (géométrie plane). Conservation du contact, conservation des angles Transformée d'une droite, d'un cercle. Inversions pouvant échanger une droite et un cercle, deux cercles. Transformés par inversion des cercles d'un faisceau linéaire.

Définitions et propriétés caractéristiques, ponctuelles et tangentielles de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole (les sections planes d'un cône de révolution, d'un cylindre de révolution ne sont pas au programme). Equations de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie, de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet. Etude de la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$.

Asymptotes de l'hyperbole ; équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Affinités orthogonales, faisant correspondre une ellipse et son cercle principal; ellipse considérée comme projection orthogonale d'un cercle

c) Extraits des programmes du premier cycle M.P. des facultés - première année et deuxième année (arrêté du 30 juin 1966)

Les développements demandés sont précisés dans les rubriques suivantes, extraites des programmes des classes de mathématiques supérieures et de mathématiques spéciales M fixés par l'arrêté du 4 février 1972.

I. — STRUCTURES FONDAMENTALES

1) *ENSEMBLES*

Vocabulaire des ensembles, applications, relations, lois de composition.

Compatibilité d'une application avec un couple de relations définies, l'une dans l'ensemble de départ, l'autre dans l'ensemble d'arrivée.

Morphismes (ou homomorphismes), endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.

Compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence, loi-quotient.

CAPES - 1973

2) *GROUPE*

Groupe. Sous-groupe. Sous-groupe engendré par une partie. Groupe monogène, groupe cyclique.

Morphisme de groupes. Sous-groupe distingué, groupe-quotient.

Permutations (ou substitutions) sur un ensemble fini. Groupe symétrique. Signature d'une permutation.

3) *ANNEAU*

Anneau. Sous-anneau. Anneau commutatif (formule du binôme). Anneau unitaire. Diviseurs de zéro, anneau intègre. Caractéristique d'un anneau unitaire.

Morphisme d'anneaux. Idéal (bilatère), anneau-quotient. Idéal engendré par une partie, idéal principal.

Exemples d'anneaux : Z, Z/nZ.

4) *CORPS*

Corps. Sous-corps. Caractéristique d'un corps.

Exemples de corps : Z/pZ (p premier), Q, R.

5) *NOMBRES COMPLEXES*

Structure de corps; structure d'algèbre de dimension 2 sur R.

Illustrations géométriques.

Puissance n-ième et racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Applications trigonométriques et géométriques

II. — POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

1) *POLYNOMES CONSTRUITS SUR UN ANNEAU COMMUTATIF UNITAIRE A*

Anneau des polynômes à une indéterminée. Notation A [X]. Degré et valuation d'un polynôme. Fonction polynôme. Composition des polynômes.

Anneau des polynômes à deux, ou plusieurs, indéterminées.

Polynômes dérivés successifs d'un polynôme à une indéterminée. Formule de Taylor

2) *POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES A UNE INDETERMINEE CONSTRUITS SUR UN CORPS COMMUTATIF K*

Structure d'algèbre de K [X].

Division suivant les puissances croissantes dans K [X].

Division euclidienne dans K [X]. Idéaux.

Divisibilité dans K [X]. Diviseurs communs à p polynômes et P.G.C.D.

Multiples communs à p polynômes et P.P.C.M. Polynômes premiers entre eux globalement ou deux à deux. Egalité de Bezout pour deux polynômes.

Polynômes irréductibles. Factorisation d'un polynôme.

Corps des fractions rationnelles. Fonctions rationnelles.

3) *EQUATIONS ALGEBRIQUES*

Racines (ou zéros), dans un sous-corps ou dans un sur-corps commutatif du corps commutatif K, d'un polynôme de K [X].

Egalité numérique et égalité formelle (correspondance entre polynômes et fonctions polynômes). Ordre de multiplicité d'une racine.

Polynômes et équations sur le corps C : théorème de d'Alembert (admis), polynômes irréductibles de C [X], forme de la factorisation d'un polynôme dans C [X]. Relations entre coefficients et racines.

Polynômes conjugués. Racines complexes d'un polynôme de R [X].

Polynômes irréductibles de R [X], forme de la factorisation d'un polynôme dans R [X].

4) *APPLICATIONS*

a) Existence et unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Formes particulières des décompositions lorsque le corps de base est C ou R.

b) Définition d'un polynôme symétrique à plusieurs indéterminées; valeur prise par un tel polynôme pour les racines d'un polynôme de C [X] : exemples de calcul dans des cas simples.

c) Elimination de l'indéterminée entre deux polynômes de K [X], de l'inconnue entre deux équations. Cas de C [X] : exemples de recherche et d'utilisation du résultant.

d) Transformation d'une équation algébrique sur le corps C. Exemples de transformations simples. Equations réciproques.

III. — ALGEBRE LINEAIRE ET MULTILINEAIRE

1) *ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES*

a) Espace vectoriel sur un corps commutatif. Application linéaire d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel; application linéaire composée. Espace vectoriel $\mathcal{L}$ (E, F) des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un autre F. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel. Groupe linéaire GL (E).

b) Sous-espaces vectoriels ; combinaisons linéaires.

Intersection de sous-espaces vectoriels ; sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel ; somme de sous-espaces.

Noyau et image d'une application linéaire.

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace.

c) Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

d) Familles libres, familles génératrices.

2) *ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE*

a) Espace vectoriel engendré par une partie finie : dimension et bases. Existence de supplémentaires pour un sous-espace.

b) Relation entre les dimensions de deux sous-espaces vectoriels, de leur intersection et de leur somme.

c) Base de $\mathcal{L}$ (E, F) associée à une base de E et une base de F. Dimension de $\mathcal{L}$ (E, F).

d) Rang d'une application linéaire.

CAPES 1973

3) *MATRICES*

a) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux.

Opérations sur les matrices ; transposition. Espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps commutatif K. Algèbre des matrices carrées d'ordre n.

Groupe des matrices inversibles d'ordre n.

b) Rang d'une matrice. Rang de la matrice transposée.

c) Matrice de changement de base. Matrices équivalentes. Matrices carrées semblables.

4) *DETERMINANTS*

a) Définition d'une application multilinéaire. Application multilinéaire antisymétrique (le corps de base n'est pas de caractéristique 2).

b) Droite vectorielle des formes n-linéaires antisymétriques sur un espace vectoriel E de dimension n. Déterminant, relatif à une base de E, d'un n-uplet de vecteurs.

c) Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'un endomorphisme composé. Déterminant d'une matrice carrée.

d) Calcul des déterminants : cofacteurs et mineurs.

e) Application des déterminants à la détermination du rang d'une matrice.

f) Application des déterminants à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

5) *SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES*

a) Cas de Cramer. Cas général.

b) Application au calcul d'une matrice inverse.

6) *ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE SUR C*

Valeurs propres d'un endomorphisme ; vecteurs propres associés ; polynôme caractéristique ; diagonalisation dans le cas où le polynôme caractéristique n'a que des racines simples.

IV. — ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET HERMITIENS DE DIMENSION FINIE

1) *FORMES QUADRATIQUES*

Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique associées (le corps de base n'est pas de caractéristique 2). Vecteurs orthogonaux (ou conjugués) par rapport à ces formes ; noyau ; formes non dégénérées.

Matrice, relative à une base de l'espace vectoriel E, d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme quadratique ; changement de base ; discriminant, rang, existence d'une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.

2) *ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS*

a) Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique sur un espace vectoriel réel ; forme positive, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, théorème d'inertie.

b) Produit scalaire ; espace vectoriel euclidien ; groupe orthogonal.

c) Existence de bases orthonormées. Groupe des matrices orthogonales d'ordre n.

3) *ESPACES VECTORIELS HERMITIENS*

a) Forme sesquilinéaire hermitienne sur un espace vectoriel complexe. Vecteurs orthogonaux ; noyau ; forme non dégénérée.

b) Matrice, relative à une base de E, d'une forme sesquilinéaire hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension finie.

c) Forme hermitienne ; forme positive, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire.

d) Produit scalaire hermitien ; espace vectoriel hermitien ; groupe unitaire. Existence de bases orthonormées d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie. Groupe des matrices unitaires d'ordre n.

e) Valeurs propres d'une matrice hermitienne ; cas d'une matrice symétrique réelle.

V. — ANALYSE

1) *ELEMENTS DE TOPOLOGIE*

a) Construction de R. Les propriétés suivantes seront admises : R est un corps totalement ordonné dans lequel est immergé le corps archimédien Q et dont toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). Intervalles.

b) Topologie des espaces métriques. Structure d'espace métrique : distance, boules ouvertes Topologie associée : parties ouvertes, parties fermées ; voisinage d'un point ; point adhérent à une partie ; notion de limite.

Exemple fondamental : distance associée à la norme d'un espace vectoriel normé. L'équivalence de deux normes est une condition suffisante pour qu'elles définissent la même topologie.

Recouvrement. Définition d'une partie compacte.

c) Propriétés de R et de R^n considérés comme espaces vectoriels normés (sans démonstrations) : les parties compactes de R et de R^n sont les parties fermées et bornées.

Suites ; notion de suite convergente, de suite de Cauchy. On admettra que les espaces métriques R et R^n sont complets.

Application de R^n (ou d'une partie de R^n), dans R^p : limite, continuité, continuité uniforme. On admettra la continuité uniforme d'une application continue définie sur une partie fermée bornée.

2) *FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE*

a) Limites. Opérations sur les limites. Infiniment petits et infiniment grands.

Divers qualificatifs : fonction périodique, paire, impaire, bornée, monotone.

Suites réelles. Convergence et divergence. Suites monotones bornées.

Couple de suites adjacentes. Suites définies par une relation de récurrence.

b) Propriétés (admises) d'une fonction continue sur un intervalle (l'ensemble-image est un intervalle), sur un fermé borné (l'ensemble-image est fermé borné, et la fonction est uniformément continue).

B.O.E.N. n° 29 (20-7-72)

CAPES - 1973

Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Dérivabilité en un point, sur un intervalle. Calcul des dérivées (fonction composée, fonction réciproque).

Théorèmes de Rolle, des accroissements finis, de Taylor-Lagrange. Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle. Primitives.

Etude locale d'une fonction. Développements limités.

Formule de Taylor-Young.

c) Intégrale d'une fonction numérique d'une variable réelle.

Fonction intégrable au sens de Riemann, sur un segment : les fonctions continues, les fonctions monotones sont intégrables.

La valeur absolue d'une fonction intégrable, le produit de deux fonctions intégrables, sont intégrables (ces résultats sont admis).

L'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt \qquad (a < b)$

est une forme linéaire croissante.

Inégalité de Schwarz. Première formule de la moyenne.

Valeur moyenne d'une fonction.

Intégrale sur la réunion de deux segments adjacents.

Changement de variable. Intégration par parties.

Intégrale considérée comme fonction de sa borne supérieure.

Définition de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné, sur un intervalle borné ouvert.

Convergence des intégrales de fonctions positives.

Définition de la convergence absolue.

d) Fonctions usuelles et applications.

Fonctions circulaires et circulaires réciproques. Fonctions logarithmiques et exponentielles Fonctions puissances (exposants réels). Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques.

Développements limités classiques.

Fonctions construites à partir des fonctions usuelles. Exemple : fonctions u^v.

Construction de courbes représentatives de fonctions.

Calculs de primitives : changement de variable, intégration par parties. Primitives des fonctions usuelles et des fonctions rationnelles. Calculs simples de primitives, en particulier de fonctions s'exprimant rationnellement en sin x et cos x, en x et $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

3) *FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE REELLE (DIMENSION FINIE)*

Limite. Continuité. Dérivation. Intégrale sur un segment.

4) *CALCUL DIFFERENTIEL*

a) Applications d'un ouvert de R^n dans R^p.

Applications partielles en un point. Continuité partielle (condition nécessaire de continuité). Dérivées partielles.

B.O.E.N. n° 29 (20-7-72)

b) Développements en série entière des fonctions

$$\frac{1}{1-x},\ \mathrm{Arc\,tg}\,x,\ \mathrm{Log}\,(1+x),\ e^x,\ \mathrm{sh}\,x,\ \mathrm{ch}\,x\ (1+x)^\alpha.$$

c) définition de e^z, ch z, sh z, cos z, sin z.

N.B. — Suivant le point de vue adopté, les développements en série entière de cos x et sin x ($x \in R$) seront, soit donnés comme une définition, soit obtenus comme un résultat.

VII. — EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1) *EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE*

a) à variables séparables ;

b) homogènes : $f\left(\dfrac{y}{x}, y'\right) = 0$;

c) linéaires : $y' + a(x)\,y = b(x)$;

d) Système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants avec ou sans second membre.

On se limitera aux cas où on sait diagonaliser la matrice des coefficients.

2) *EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU SECOND ORDRE*

à coefficients constants avec ou sans second membre (on se bornera au cas où le second membre est produit de fonctions polynôme, exponentielle, sinus, cosinus)

VIII. — GEOMETRIE ANALYTIQUE

1) *ESPACES AFFINES DE DIMENSION 2 ET DE DIMENSION 3*

Repères affines. Changement de repère. Orientation. Barycentres ; propriétés. Equations cartésiennes et représentations paramétriques d'une droite affine, d'un plan affine.

Intersections de droites et de plans. Faisceaux linéaires de droites dans le plan, de plans dans l'espace de dimension trois.

2) *GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE*

Espace affine euclidien. Repères orthonormés.

Problèmes métriques dans le plan ou dans l'espace de dimension trois : distance d'un point à une droite, ou à un plan ; perpendiculaire commune à deux droites ; mesure d'angles.

Equations cartésiennes et représentations paramétriques d'un cercle en géométrie plane, faisceaux linéaires de cercles, cercles orthogonaux.

Définition des coordonnées polaires en géométrie plane. Représentations polaires d'une droite, d'un cercle passant par le pôle, d'une conique admettant le pôle pour foyer.

Définition des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques.

Surfaces du second ordre (on les supposera rapportées à leurs éléments de symétrie).

B.O.E.N. n° 29 (20-7-72)

CAPES - 1973

Dérivées partielles d'ordre supérieur. Théorème sur l'interversion de l'ordre des dérivations (admis).

b) Applications différentiables.

Application linéaire tangente (ou différentielle) en un point.

Matrice jacobienne.

Une application différentiable en un point est continue en ce point, et admet en ce point des dérivées partielles.

Une application admettant des dérivées partielles continues en un point est différentiable en ce point.

Composition d'applications différentiables.

c) Cas particulier d'une fonction numérique ($p = 1$).

Formule des accroissements finis ; formule de Taylor-Lagrange.

Extremum ; position de la surface $z = f(x, y)$ par rapport au plan tangent en un point en lequel $rt - s^2 \neq 0$.

5) *COMPLEMENTS DE CALCUL INTEGRAL*

a) Intégrales de fonctions de deux ou trois variables.

Sans démonstrations, méthodes pratiques de calcul et changement de variables (les extensions à des fonctions non bornées ou à des domaines non bornés sont hors programme).

b) Applications géométriques du calcul intégral.

Calcul de longueurs d'arcs, d'aires de domaines plans, de volumes de domaines tridimensionnels.

Masse, moment d'inertie, centre d'inertie d'une ligne, d'une plaque plane, d'un solide tridimensionnel.

(Aucune difficulté ne sera soulevée concernant la définition des questions précédentes.)

c) Intégrales curvilignes ; intégrales de surfaces.

d) Champ de vecteurs : gradient, circulation, divergence, rotationnel, flux, potentiel scalaire et potentiel vecteur.

VI. — SERIES

1) *SERIES NUMERIQUES A TERMES REELS OU COMPLEXES*

a) Convergence, divergence. Condition nécessaire et suffisante de convergence, liée à l'étude des suites de Cauchy.

Séries géométriques.

b) Séries à termes réels positifs. Théorèmes de comparaison. Règles dites de Cauchy et de d'Alembert (la comparaison de ces deux règles est hors du programme)

Comparaison avec une intégrale. Série de terme général $n^{-\alpha}$.

c) Convergence absolue et semi-convergence.

Comparaison avec une intégrale. Série de terme général.

2) *SERIES ENTIERES D'UNE VARIABLE COMPLEXE*

a) Disque ouvert de convergence, continuité, convergence uniforme sur un sous-disque fermé, intégration et dérivation dans R sur l'intervalle ouvert de convergence

Produit de deux séries entières.

B.O.E.N. n° 29 (20-7-72)

3) TORSEURS DANS UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DE DIMENSION 3

Définition. Application antisymétrique associée.

Invariant scalaire d'un torseur. Torseurs élémentaires : couple, glisseur., Axe d'un glisseur non nul.

Espace vectoriel des torseurs. Décomposition d'un torseur en la somme d'un couple et d'un glisseur non nul dont l'axe passe par un point donné ou du torseur nul.

Comoment de deux torseurs. Moment d'un torseur par rapport à un axe.

Coordonnées d'un torseur

4) CONSTRUCTION DE COURBES PLANES

en coordonnées cartésiennes (définies par une équation $y = f(x)$, par une représentation paramétrique) et en coordonnées polaires (définies par une équation $\rho = f(\theta)$) : tangente, concavité, branches infinies (les fonctions qui interviendront ici seront supposées dérivables autant de fois qu'on le jugera bon pour la simplicité de l'exposé, sans chercher à expliciter. dans chaque cas, les hypothèses minimales)

5) GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

(espace affine, ou affine euclidien, de dimension 2 ou de dimension 3)

Courbure des courbes planes Rayon de courbure. Centre de courbure. Cercle osculateur. Développée.

Tangente et plan osculateur à une courbe gauche. Trièdre de Frenet. courbure.

6) CINEMATIQUE

Système de référence ; mouvement d'un point ; trajectoire, vecteur-vitesse, vecteur-accélération ; décompositions suivant différents repères.

Mouvements à accélération centrale (les formules de Binet ne sont pas au programme).

Cinématique du « solide » : champ des vitesses et mouvement uniforme tangent à un instant donné ; vecteur-rotation.

Changement du système de référence ; composition des vitesses, composition des accélérations.

IX. — CALCUL NUMERIQUE

La formation du futur professeur — comme celle du futur chercheur — doit le préparer à savoir appliquer pratiquement toute question donnant lieu à présentation théorique.

Les candidats au C.A.P.E.S. doivent, en particulier, savoir :

— user de toute espèce de tables numériques, ils n'ont pas à y faire d'autre interpolation que l'interpolation linéaire, ni à savoir la formule qui permet de majorer l'erreur commise ainsi ;

— traduire, par une représentation graphique, les résultats de l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle ;

— construire des courbes données paramétriquement, ou, en coordonnées polaires, par une relation de la forme $r = f(\theta)$;

— résoudre une équation à une inconnue par les méthodes dites de Descartes et de Newton ou par la méthode des approximations successives ;

— calculer une intégrale définie par la méthode des trapèzes ;

— calculer la somme d'une série.

Pour ces derniers problèmes, aucune « formule d'erreur » n'est demandée.

∴

Les deux épreuves écrites peuvent porter sur tout ou partie du programme précédent a), b), c).

Les deux épreuves orales (exposé et interrogation) porteront uniquement sur les parties a) et b) de ce programme.

L'exposé n'est pas une leçon professant un sujet dans un souci d'adaptation pédagogique au niveau d'une classe secondaire déterminée ; il invite le candidat à mettre en œuvre l'ensemble de ses connaissances, dans une présentation ordonnée et correcte. A la fin de l'exposé, des questions peuvent être posées à son sujet par le jury au candidat.

B.O.E.N. n° 29 (20-7-72)
2078

CAPES 1973

Programme du CAPES de mathématiques - session 1986

R.L.R. : 822-3

Note du 27 septembre 1985

(Education nationale : bureau DPE 10)

Le programme des épreuves théoriques du CAPES de mathématiques est défini en annexe I. Celui des épreuves écrites porte sur les titres A et B de cette annexe; celui des épreuves orales porte sur le titre A, augmenté du paragraphe 1.I-4 du titre B intitulé « nombres entiers, nombres rationnels ».

ANNEXE — PROGRAMMES

A. Programme de l'enseignement secondaire

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la quatrième à la terminale incluses, dans toutes les sections, tels qu'ils figurent dans les brochures du CNDP, n° 6093 et n° 6012.

Les théorèmes cités dans les programmes et admis sans démonstration font intégralement partie du programme du CAPES, démonstrations comprises.

En outre, les candidats doivent se munir d'une calculatrice scientifique programmable, alphanumérique ou non. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme ; dans ce cadre, ils doivent savoir programmer les valeurs numériques d'une fonction d'une ou deux variables, des termes d'une suite définie par une relation de récurrence et des termes d'une suite définie par additions ou multiplications répétées.

B. Programme complémentaire

1. Algèbre et géométrie

I — Nombres et structures

1. Ensembles

Vocabulaire élémentaire relatif aux ensembles, aux applications, aux lois de composition, aux relations d'équivalence et aux relations d'ordre.

2. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient.

Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Eléments conjugués.

b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

3. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

4. Nombres entiers, nombres rationnels

a) Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels, raisonnement par récurrence. Ensembles finis.

b) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; égalité de Bezout Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers

P.G.C.D., P.P.C.M. ; algorithme d'Euclide.

Corps des nombres rationnels.

Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

/...

.../

2. Analyse et géométrie différentielle

I — Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $f = O(g)$, $f = o(g)$ ou $f \ll g$, et $f \sim g$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente.

Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Etude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.

c) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Espaces vectoriels normés réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) *Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.*

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie. Distance d'un point à une partie. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.

Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point. Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Relations de comparaison en un point : domination (f est dominée par g), prépondérance (f est négligeable /...

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMPOSITIONS ÉCRITES.

Programme général d'Analyse et de Mécanique.

Les programmes des certificats d'études supérieures variant d'une Université à l'autre, le jury indique, dans le programme ci-dessous, le minimum des connaissances générales qui sont supposées acquises par les candidats en calcul différentiel, calcul intégral et mécanique.

Les sujets des compositions sur le calcul différentiel, le calcul intégral et la mécanique seront choisis dans les numéros de ce programme; ils ne dépasseront pas le niveau des sujets de problèmes proposés aux certificats de licence correspondants.

125

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

1° *Opérations fondamentales du calcul différentiel et du calcul intégral.*

Dérivées et différentielles : intégrales simples, intégrales curvilignes, intégrales de différentielles totales; intégrales doubles et triples.

Formule de Green. — Formule de Stokes.

2° *Applications du calcul différentiel.*

Etudes des fonctions de variables réelles (formule de Taylor, maxima et minima, déterminants fonctionnels, fonctions implicites). Calcul des dérivés et différentielles; changement de variables.

3° *Applications du calcul intégral.*

Procédés d'intégration. Longueur d'un arc de courbe, aires planes et gauches, volumes. Différentiation et changement de variables sous le signe $\int$. Etude de l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ quand une limite ou la fonction devient indéfinie.

Etude des fonctions représentées par des séries.

Propriétés des séries entières.

4° *Eléments de géométrie infinitésimale.*

Propriétés infinitésimales des courbes planes ou gauches (courbes enveloppes, courbure, torsion). Propriétés infinitésimales des surfaces; surfaces enveloppes, notions sommaires sur les transformations de contact; surfaces développables, surfaces réglées; congruences rectilignes, surfaces focales; théorème de Meusnier; sections principales; courbure géodésique; torsion géodésique.

Réseaux conjugués, lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques, en coordonnées curvilignes quelconques.

5° *Eléments de géométrie réglée.*

Coordonnées plückériennes; complexe linéaire; complexe tétraédral.

6° *Fonctions élémentaires d'une variable complexe.*

Fonctions algébriques simples; fonctions circulaires et logarithmiques.

7° *Théorie des fonctions analytiques.*

Propriétés de l'intégrale $\int f(z)\, dz$. Séries de Taylor et de Laurent.

Pôles, points singuliers essentiels, résidus.

8° *Equations différentielles du premier ordre.*

Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales singulières.

Types simples d'équations intégrables. Facteur intégrant.

9° *Equations différentielles et systèmes d'équation d'ordre quelconque.*

Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales premières.

Types simples d'équations intégrables. Equations linéaires.

10° *Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire.*

11° *Intégration de l'équation aux différentielles totales du premier ordre. Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre et de l'équation de Monge associée.*

12° *Eléments du calcul des variations.*

(On se bornera à la formation de l'équation d'Euler et à la définition des extrémales.)

AGREGATION 1932

126

MÉCANIQUE.

13° *Statique.*

Composition des forces appliquées à un même point.

Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur ou intérieur. Propriétés élémentaires du potentiel.

Réduction des forces appliquées à un corps solide.

Conditions d'équilibre d'un corps solide et des systèmes. Application aux machines simples.

Théorème du travail virtuel.

Polygone funiculaire. Ponts suspendus.

Equilibre des fils. Chaînette.

14° *Cinématique.*

Vitesse. Accélération.

Mouvement d'une figure plane dans son plan. Représentation du mouvement par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Représentation du mouvement par le roulement d'un cône mobile sur un cône fixe.

Mouvement d'un corps solide dans l'espace. Mouvement hélicoïdal.

Composition des mouvements.

15° *Dynamique du point.*

Travail.

Théorèmes généraux.

Intégrales premières des équations du mouvement.

Application au mouvement des planètes.

Mouvement d'un point sur une courbe ou sur une surface. Mouvement dans un milieu résistant. Pendule, pendule sphérique. Lignes géodésiques.

16° *Géométrie des masses.*

Centres de gravité. Moments d'inertie.

17° *Dynamique des systèmes.*

Théorèmes généraux. Intégrales premières.

Energie. Stabilité de l'équilibre.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. Pressions supportées par l'axe. Pendule composé.

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Mouvement général d'un corps solide.

Lois du frottement de glissement.

Mouvement d'un système de solides soumis à des liaisons. Systèmes holonomes et non holonomes.

Equations de Lagrange. Méthode des multiplicateurs. Petits mouvements.

Mouvements relatifs.

18° *Percussions et chocs.*

Théorèmes généraux pour le point et le corps solide. Application des équations de Lagrange aux problèmes de percussions et de chocs.

19° *Equations canoniques.*

Théorème de Jacobi.

20° *Hydrostatique.*

Equilibre d'une masse fluide. Surface de niveau. Pression sur une paroi plane. Principe d'Archimède. Equilibre des corps flottants.

Programmes généraux de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales.

Ces programmes sont ceux de l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges.

La composition sur les mathématiques élémentaires sera une application des connaissances qu'un bon élève peut acquérir dans les classes de l'enseignement secondaire jusqu'à la classe de mathématiques. La solution n'exigera pas l'emploi de théories dont la véritable place est en mathématiques spéciales, comme l'homographie envisagée du point de vue général; ce serait méconnaître le caractère de l'épreuve que de faire appel à ces théories.

La compoistion sur les mathématiques spéciales portera sur les matières enseignées dans la classe correspondante des lycées. Toutefois, les candidats sont avertis que la connaissance des éléments de la théorie des formes quadratiques, celle des propriétés les plus simples des coordonnées tangentielles, des complexes linéaires ou du second ordre, des foyers et des focales pourront leur être utiles.

127

AGREGATION - 1932

LEÇONS.

PARTIES DES PROGRAMMES D'OÙ SERONT TIRÉS LES SUJETS DES LEÇONS.

I. — Leçons de mathématiques spéciales.

Division des polynomes entiers. Plus grand commun diviseur de deux polynomes.

Déterminants. — Echange des lignes et des colonnes; échanges de deux lignes ou de deux colonnes; combinaison des lignes ou des colonnes. Développement suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne. Produit de deux déterminants.

Equations linéaires. — Résolution au moyen des déterminants.

Formes linéaires. — Conditions d'indépendance.

Nombres complexes. — Opérations. Formule de Moivre. Application à la multiplication et à la division des angles. Résolution trigonométrique des équations binômes.

Séries. — Progression géométrique. Séries à termes positifs. Série $\Sigma \frac{1}{n^\alpha}$. Caractères de convergence tirés de l'étude de $\sqrt[n]{u_n}$ et de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Séries absolument convergentes. Séries alternées dont le terme général décroît constamment en valeur absolue et tend vers zéro.

Calcul approché de la somme d'une série convergente; limite supérieure de l'erreur commise.

Définition du nombre e; ce nombre est incommensurable.

Séries à termes complexes.

Multiplication de deux séries absolument convergentes.

Fonctions d'une variable réelle. — Fonctions usuelles : a^x, $\log x$; fonctions circulaires et hyperboliques, directes et inverses. Emploi de la dérivée pour l'étude et la variation d'une fonction d'une variable; maxima et minima.

Séries entières, à coefficients réels, d'une variable réelle. — Intervalle de convergence. A l'intérieur de l'intervalle de convergence, on obtient la dérivée ou une primitive de la fonction définie par la série, en dérivant ou intégrant terme à terme.

Propriétés générales des équations algébriques. — Relations entre les coefficients et les racines. Calcul d'une fonction entière et symétrique des racines, en fonction des coefficients de l'équation. Elimination d'une

inconnue entre deux équations au moyen des fonctions symétriques. Transformation d'une équation par une substitution rationnelle portant sur une seule racine.

Intégrales. — L'aire d'un segment de courbe est la limite de la somme des aires des rectangles inscrits. Intégrale définie. Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle.

Dérivée d'une intégrale définie considérée comme fonction de sa limite supérieure. Intégrale indéfinie.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Intégration des différentielles rationnelles et de celles qui deviennent rationnelles par un changement de variable simple.

Application du calcul des intégrales simples à la mesure des aires planes, à l'évaluation des volumes, à la rectification des courbes, à l'évaluation de l'aire d'une zone de révolution, à la détermination des centres de gravité, au calcul des moments d'inertie.

Equations différentielles. — Intégration des équations différentielles du premier ordre : 1° dans le cas où les variables se séparent immédiatement; 2° dans le cas où l'équation est homogène ou linéaire.

Intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre; cas où le second membre est un polynome ou une somme d'exponentielles de la forme $Ae^{\alpha x}$.

Lieux géométriques.

Courbes dont l'équation est résolue par rapport à l'une des coordonnées. — Tangente et normale en un point. Sous-tangente et sous-normale. Concavité, convexité, points d'inflexion. Asymptotes. Application à des constructions de courbes.

Courbes définies par l'expression des coordonnées du point courant en fonction d'un paramètre. — Exemples de construction. Les courbes du second ordre et celles du troisième ordre à un point double sont unicursales.

Courbes définies par une équation non résolue. — Tangente et normale en un point. Tangentes à l'origine pour les courbes algébriques dont ce point est un point simple ou multiple. Recherche des asymptotes sur des exemples numériques simples, tels que des courbes du second ou du troisième ordre.

Intersection d'une courbe algébrique donnée par une équation en coordonnées homogènes avec une droite arbitrairement menée par un point donné sur la courbe; tangente en ce point supposé simple. Asymptote considérée comme tangente en un point à l'infini.

Courbes du second ordre. — Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une conique; polaire d'un point. Condition pour que deux droites soient conjuguées; pôle d'une droite.

Homographie et involution sur une conique.

128

AGREGATION - 1932

Deux coniques ont, en général, quatre points communs, réels ou imaginaires, à distance finie ou à l'infini. Notions succinctes sur les coniques appartenant à un faisceau linéaire; ces coniques déterminent, sur une droite quelconque, une involution.

Coordonnées polaires. — Leur transformation en coordonnées rectangulaires. Equations de la droite, du cercle, d'une conique dont le pôle est un foyer. Tangentes, asymptotes; application à la construction de courbes dont l'équation est résolue par rapport au rayon vecteur.

Enveloppes. — Définition d'une courbe par l'équation générale de sa tangente.

Développée d'une courbe plane. Courbure.

Courbes gauches. — Tangente, plan osculateur. Courbure. Application à l'hélice circulaire.

Surfaces. — Plan tangent, normale. Exemples de surfaces définies par un mode de génération simple (cylindres, cônes, surfaces de révolution).

Surfaces du second ordre. — Etude de ces surfaces sur les équations réduites : sections planes, condition de contact d'un plan, problèmes simples relatifs aux plans tangents; normale; sections circulaires; génératrices rectilignes.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE :

Hyperbole de révolution.
Paraboloïde hyperbolique.

Intersections de surfaces. — Deux cônes ou cylindres; deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan.

CINÉMATIQUE :

Cinématique du point. — Mouvement curviligne. Vecteur vitesse, hodographe. Vecteur accélération; accélération tangentielle et accélération normale.

Cinématique d'un système invariable. — Translation. Rotation autour d'un axe fixe. Mouvement hélicoïdal.

Changement du système de comparaison. — Composition des vitesses. Composition des accélérations dans le cas où le mouvement du système de comparaison est un mouvement de translation.

STATIQUE :

Statistique du point. — Equilibre d'un point matériel libre, d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe avec ou sans frottement.

Statistique des systèmes. — Démontrer qu'il existe six conditions nécessaires d'équilibre indépendantes des forces intérieures. Ces six conditions sont suffisantes pour les systèmes invariables. Cas particuliers.

Equivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide. Application à la réduction d'un système de forces. Composition des couples. Centre des forces parallèles; centre de gravité.

Equilibre d'un solide invariable qui n'est pas libre. Cas d'un point fixe, d'un axe fixe avec ou sans glissement le long de cet axe, d'un, deux ou trois points de contact avec un plan fixe. Réactions.

DYNAMIQUE DU POINT :

Théorème de la force vive. Energie cinétique et énergie potentielle d'un point placé dans un champ de forces.

Point libre. — Mouvement d'un point sous l'action d'une force constante en grandeur et en direction, ou sous l'action d'une force attractive issue d'un centre fixe : 1° proportionnelle à la distance; 2° en raison inverse du carré de la distance.

Point non libre. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné, avec ou sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente. Petites oscillations d'un pendule simple.

II. — Leçons sur un sujet du programme de Seconde ou Première ou de Mathématiques.

SECONDE.

ALGÈBRE :

Résolution et discussion d'une équation du premier degré à une inconnue. Inégalité du premier degré.

Coordonnées. — Etude et représentation graphique de la fonction $y = ax + b$.

Résolution et discussion d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Problèmes : mise en équation; discussion des résultats.

GÉOMÉTRIE (figures planes) :

Figures symétriques par rapport à un point ou à une droite. Deux figures planes symétriques sont égales.

Polygones réguliers convexes. Inscription dans le cercle du carré, de l'hexagone, du triangle équilatéral, du décagone et du pentagone réguliers. Deux polygones réguliers d'un même nombre de côté sont semblables. Rapport de leurs périmètres. Longueur d'un arc de cercle. Rapport de la circonférence au diamètre.

Aires. — Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque.

Rapport des aires de deux polygones semblables.

Aire d'un polygone régulier convexe. Aire d'un cercle, d'un secteur, d'un segment de cercle. Rapport des aires de deux cercles.

PREMIERE.

ALGÈBRE :

Equation du second degré à une inconnue.

Existence des racines (on ne parlera pas des imaginaires).

Relations entre les coefficients et les racines. Signe des racines.

Etude du trinôme du second degré. Inégalité du second degré. Problèmes du second degré.

Variation du trinôme du second degré : représentation graphique.

Variation de la fonction $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$; représentation graphique.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques.

Intérêts composés.

GÉOMÉTRIE (figures dans l'espace) :

Symétrie par rapport à une droite. Symétrie par rapport à un point. Symétrie par rapport à un plan.

Angles polyèdres. — Chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres. Limite de la somme des faces d'un trièdre ou d'un angle polyèdre convexe.

Trièdres supplémentaires. Trièdres symétriques.

Cas d'égalité ou de symétrie des trièdres.

Polyèdres. — Prisme. Pyramide.

Volume des parallélipipèdes et des prismes. Volume de la pyramide.

Volume du tronc de la pyramide à bases parallèles. Volume du tronc de prisme triangulaire.

Sphère. — Section plane, pôles, plan tangent. Cône et cylindre circonscrits. Aire et volume.

MATHEMATIQUES.

ARITHMÉTIQUE :

Division des nombres entiers.

Définition et propriétés élémentaires des nombres premiers.

Propriétés des fractions. Opérations. Cas des fractions décimales. Nombres décimaux.

Calcul d'un quotient à une approximation décimale donnée. — Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Condition de possibilité. Fractions décimales périodiques.

Carré d'un nombre entier ou fractionnaire. Composition du carré de la somme de deux nombres. Le carré d'une fraction n'est jamais égal à un nombre entier. Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à une approximation décimale donnée.

ALGÈBRE :

Nombres positifs et nombres négatifs. Opérations.

Equations du second degré à une inconnue (on ne parlera pas des imaginaires). Equations simples qui s'y ramènent.

Inégalités du premier et du second degré.

Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite par une équation du premier degré.

Variations et représentations graphiques des fonctions.

$$ax+b,\ \frac{ax+b}{a'x+b'},\ ax^2+bx+c,\ ax^4+bx^2+c,$$

Dérivée. — Signification géométrique. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Application à l'étude de la variation de quelques fonctions simples, en particulier des fonctions de la forme :

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},\qquad ax^3+bx^2+cx+d,$$

TRIGONOMÉTRIE :

Formules d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente.

Exercices sur la résolution et la discussion de quelques équations trigonométriques simples.

Relations entre les côtés et les angles d'un triangle. Résolution des triangles.

GÉOMÉTRIE :

I. — *Transformation des figures.* — Déplacements. — Translation. — Rotation (géométrie plane).

Symétries.

Homothétie et similitude.

Puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère. Axes radicaux. Plans radicaux.

Polaire d'un point par rapport à deux droites.

Polaire d'un point par rapport à un cercle. Plan polaire d'un point par rapport à une sphère.

Inversion. — Projection stéréographique.

AGREGATION - 1932

129

II. — *Coniques.* — Ellipse. Intersection avec une droite. Tangentes. Équation réduite de l'ellipse. Ellipse et cercle considérés comme projections l'un de l'autre.

Hyperbole. Intersection avec une droite. Tangentes. Asymptotes. Equation réduite de l'hyperbole.

Parabole. — Intersection avec une droite. Tangentes. Equation réduite de la parabole.

Définition commune des coniques au moyen d'un foyer et d'une directrice.

Sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution.

Géométrie descriptive et géométrie cotée. — Changement de plan, rotation, rabattement. Applications.

130

STATIQUE :

Moment d'une force par rapport à un point ou par rapport à une droite. Théorème de Varignon.

COSMOGRAPHIE :

Soleil. — Mouvement propre apparent sur la sphère céleste. Ecliptique. — Inégalité des jours et des nuits aux diverses latitudes. Saisons. Année tropique et année sidérale.

Lune. — Mouvement propre apparent sur la sphère céleste. — Phases. Rotation. — Variations du diamètre apparent.

Eclipses de lune et de soleil.

AGREGATION 1932

Note du 21 septembre 1956

(Second Degré, 1er Bureau)

Objet : **Programme des agrégations (masculine et féminine) de mathématiques en 1957.**

NOTE PRELIMINAIRE. — Le nouveau « *Programme des Classes préparatoires aux Grandes Ecoles Scientifiques* », annexé à l'Arrêté du Ministère de l'Education Nationale (Second Degré — 1er Bureau) en date du 27 juin 1956, est mis en application à partir du 1er octobre 1956 dans les Classes de Mathématiques Supérieures (Programme A_1) et de Mathématiques Spéciales (Programme A_2).

Le programme des agrégations masculine et féminine de mathématiques pour 1957 comporte, en conséquence, des références au texte de ces Programmes A_1 et A_2, tel qu'il figure dans la brochure, publiée par le Centre National de Documentation pédagogique, sous le n° 55 Pg/Sd - Août 1956 (Fasc. de Doc. Adm., chap. 100-Sd-§ 3/A).

2415

PROGRAMME DES EPREUVES ECRITES

A) Composition de « Mathématiques élémentaires ».

Cette épreuve portera sur les questions figurant :

— d'une part, dans les programmes de mathématiques (actuellement en vigueur) des classes du second cycle de l'Enseignement du Second Degré (classes de Seconde, de Première, de Mathématiques et de Sciences expérimentales) ;

— d'autre part, dans les deux programmes complémentaires d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie détaillés ci-après.

(*Dans la solution des problèmes de géométrie qui seraient proposés pour cette épreuve, il ne devra pas être fait appel à des notions de géométrie analytique dépassant le cadre des premiers éléments figurant au programme de la classe de Mathématiques et au programme complémentaire de géométrie précisé ci-après.*)

Programme complémentaire d'arithmétique et d'algèbre (applications et prolongements de questions étudiées dans la classe de Mathématiques).

1° notions élémentaires sur les congruences modulo n (n entier positif) ;

2° recherche des solutions entières de l'équation $ax + by = c$ (a, b, c entiers positifs) et de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$;

3° conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale ; fractions décimales (nombres décimaux) périodiques ;

4° les questions constituant le *Titre I. Nombres réels*, du Programme A_1.

B.O.E.N. n° 33 (27-9-56)

/...

B) **Composition de « Mathématiques spéciales »**

Cette épreuve portera sur les questions figurant, d'une part, dans les programmes A_1 et A_2, d'autre part, dans le programme complémentaire ci-après :

1° Résultant de deux polynomes.

2° Transformation d'une équation algébrique entière par une substitution rationnelle portant sur une seule racine.

3° Recherche des racines rationnelles d'une équation algébrique à coefficients entiers.

4° Coordonnées plückériennes d'une droite.

5° Enveloppe d'une famille de plans, ou d'une famille de sphères, à un ou deux paramètres.

6° Sections circulaires des surfaces du second ordre.

7° Propriétés homographiques des génératrices rectilignes des quadriques.

8° Notions sur les faisceaux linéaires de quadriques.

Nota. Les définitions et les propriétés élémentaires d'un certain nombre de courbes ou de surfaces remarquables, non mentionnées explicitement dans les programmes — telles que les cubiques circulaires unicursales, les conchoïdes de droites ou de cercles, les ovales de Descartes et de Cassini, les cycloïdes, épi- et hypocycloïdes, les hélices, le tore, le conoïde de Plücker — sont naturellement supposées connues des candidats.

D'autre part, pour la composition de « Mathématiques Spéciales », il pourra être fait appel, incidemment, à quelques-unes des notions de géométrie infinitésimale du programme de l'épreuve écrite de Calcul différentiel et intégral.

C) **Composition de « Calcul différentiel et intégral ».**

Même programme que pour le concours de 1956 (1).

D) **Composition de « Mécanique ».**

Même programme que pour le concours de 1956 (1).

PROGRAMME DES EPREUVES PRATIQUES

A) **Epreuve pratique de géométrie.**

Cette épreuve, comprenant l'exécution d'une épure, pourra naturellement faire intervenir toutes les notions géométriques figurant dans les programmes des différentes épreuves écrites du concours, et portera sur le programme suivant de *Géométrie descriptive :*

.../...

B) **Epreuve de calcul numérique.**

Le sujet de cette épreuve sera tiré des programmes des différentes épreuves écrites du concours.

B.O.E.N. n° 33 (27-9-56)

AGREGATION 1957

PROGRAMME DES EPREUVES ORALES

Les sujets des deux leçons pourront être soit des questions figurant explicitement dans les programmes précisés ci-après, soit des applications de ces questions, pouvant du reste comporter des rapprochements entre diverses parties des programmes.

A) **Programme des leçons de « Mathématiques élémentaires ».**

Ce programme comprend :

1° Toutes les questions figurant, dans les programmes en vigueur pendant l'année scolaire en cours dans les classes de *Seconde C et Moderne*, de *Première C et Moderne*, de *Sciences Expérimentales* et de *Mathématiques* sous les rubriques : Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie, Géométrie descriptive et Géométrie cotée, Cinématique, — ainsi que les questions du programme de Cosmographie de la Classe de *Mathématiques*, à l'exclusion des paragraphes : II. La terre...; VI. Constitution physique du soleil...; VII. Les étoiles...; VIII La galaxie...

2° Les questions complémentaires suivantes :

a) Arithmétique : conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale; fractions décimales (nombres décimaux) périodiques;

b) Géométrie : polygones réguliers convexes et étoilés;

c) Toutes les questions du Programme complémentaire de géométrie défini ci-dessus pour la composition écrite de « Mathématiques élémentaires », comprises sous les rubriques : II. *Transformations ponctuelles;* V. *Etude géométrique des cercles réels dans le plan;* VI. *Etude géométrique des sphères et des cercles dans l'espace;* VII. *Complément sur les coniques.*

Nota. — Les leçons portant sur ces questions *complémentaires* seront supposées faites dans une classe analogue à la classe de « Mathématiques Supérieures », suivant immédiatement la classe de « Mathématiques ».

B) **Programme des leçons de « Mathématiques spéciales ».**

Ce programme comprend :

1° Les questions suivantes, extraites des programmes A_1 et A_2 :

Prog. A_2. *Titre II. Vecteurs, en entier* (notions métriques et systèmes de vecteurs).

Prog. A_1 *et* A_2. *Titre III. Nombres complexes, en entier.*

Prog. A_1 *et* A_2. *Titre V. Algèbre linéaire, en entier.*

Prog. A_1 ***et*** A_2***. Titre VI. Polynomes et fractions rationnelles. Uniquement les questions suivantes :***

Division des polynomes d'une variable, ordonnés suivant les puissances décroissantes, ou bien suivant les puissances croissantes.
Plus grand commun diviseur de deux polynomes, Identité de Bezout.
Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Prog. A_1 *et* A_2. *Titre VII. Fonctions d'une variable réelle. Uniquement les questions suivantes :*

Continuité d'une fonction en un point ou sur un segment. Propriétés fondamentales des fonctions continues sur un segment; continuité uniforme (Les démonstrations de ces propriétés pourront être demandées).

/...

Note du 13 septembre 1957

(Second Degré, 1er Bureau)

Objet : Agrégations masculine et féminine de mathématiques. — Programmes des épreuves écrites et pratiques et programme maximum des épreuves orales, pour les années 1958 et suivantes.

Note préliminaire.

1° Les programmes ci-après, qui annulent tous les programmes antérieurs, sont communs aux deux agrégations, masculine et féminine, de mathématiques.

2° Afin d'en faciliter la lecture, ces textes ne comportent de renvoi qu'aux programmes des classes du second cycle de l'Enseignement du second degré; toutes les autres rubriques sont explicitement détaillées.

3° Ces programmes sont conçus comme devant s'appliquer durant plusieurs années, à partir de 1958 (inclusivement). En ce qui concerne *les épreuves orales seulement*, le programme ci-après est un programme *maximum*, d'où sera extrait, chaque année, le programme de l'oral des deux concours (masculin et féminin).

PROGRAMME DES EPREUVES ECRITES

A. — Composition de « MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES ».

Cette épreuve portera sur les questions figurant :

a) Dans les programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement du second degré en vigueur au 1er octobre de l'année scolaire du concours (classes de seconde, première, mathématiques et sciences expérimentales).

b) Dans les titres V, VI, VII, VIII et IX du programme maximum des leçons orales de « mathématiques élémentaires » détaillé plus loin, et ce même si certains de ces titres sont éventuellement exclus pour une année déterminée du programme des leçons d'oral.

c) Dans le programme complémentaire suivant :

1° Notions élémentaires sur les congruences modulo n (n entier positif).

2° Recherches des solutions entières des équations

$x^2 + y^2 = z^2$ et $ax + by = c$ (a,b,c, entiers positifs).

3° Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale; développement décimal périodique d'une fraction donnée.

4° Les questions constituant le titre II (Vecteurs), paragraphes 1 et 2, du programme des leçons orales de mathématiques spéciales, à l'exclusion des changements de coordonnées et du tableau des neuf cosinus.

5° Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

AGREGATION 1958

6° Compléments de géométrie :

Polygones réguliers convexes et étoilés.

Relation (d'Euler) entre les nombres des arêtes, des faces et des sommets d'un polyèdre convexe.

Existence de cinq polyèdres réguliers convexes.

NOTA. — Un certain nombre de résultats, non mentionnés explicitement dans les programmes, mais qui sont des applications directes des théories classiques — tels que les théorèmes de Ménélaüs (plan et espace) et de Jean de Céva, les propriétés élémentaires des droites de Simson et du cercle d'Euler d'un triangle, le théorème de Leibniz (barycentre), la formule de Stewart — sont naturellement supposés connus des candidats.

B. — Composition de « MATHEMATIQUES SPECIALES ».

Cette épreuve portera sur les questions figurant :

a) Dans la totalité du programme maximum des leçons orales des « mathématiques spéciales » détaillé plus loin, et ce, même si certains titres sont éventuellement exclus pour une année déterminée du programme des leçons d'oral.

b) Dans le titre 13 (géométrie infinitésimale) du programme de la composition de calcul différentiel et intégral détaillé plus loin.

c) Dans le programme complémentaire suivant :

1° Coordonnées plückériennes d'une droite ;

2° Notions sur les faisceaux linéaires de quadriques ;

3° Notions sur les transformations homographiques dans le plan et dans l'espace ;

4° Usage des coordonnées trilinéaires et tétraédrales.

NOTA. — Les définitions et les propriétés elémentaires d'un certain nombre de courbes ou de surfaces remarquables non mentionnées explicitement dans les programmes — telles que les cubiques circulaires unicursales, les conchoïdes de droites et de cercles, les ovales de Descartes et de Cassini, les cycloïdes, épi- et hypocycloïdes, les hélices, le tore, le conoïde de Plücker — sont naturellement supposées connues des candidats

C. — Composition de « CALCUL DIFFERENTIEL et INTEGRAL ».

Les notions élémentaires et le vocabulaire de la théorie des ensembles et de l'algèbre énumérés ci-après sont supposés connus des candidats : intersection, réunion, complémentaire, produit ; notion de puissance, ensemble dénombrable ou continu ; relation d'ordre, relation d'équivalence ; groupe, anneau, corps, domaine d'intégrité.

1. — Eléments de topologie ; construction de l'ensemble des nombres réels ; ensembles linéaires ; point d'accumulation, théorème de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue ; limite supérieure ou inférieure ; condition de Cauchy pour la convergence d'une suite. Topologie de R^n ; ouverts, fermés, voisinages. Topologie associée à une distance.

2. — Fonctions scalaires d'une variable réelle ; fonctions monotones, à variation bornée, continues, convexes ; continuité uniforme.

3. — Fonctions scalaires ou vectorielles d'une variable réelle, scalaire ou vectorielle ; continuité ; continuité uniforme.

4. — Fonctions différentiables, différentielle totale ; formule de Taylor.

5. — Déterminants fonctionnels, fonctions implicites.

/...

PROGRAMME MAXIMUM DES EPREUVES ORALES

Le programme des épreuves orales sera publié chaque année au début de l'année scolaire, il sera extrait du programme maximum précisé ci-après.

/ . . .

. . . /

Programme maximum des leçons de « Mathématiques spéciales »

Il se confond sensiblement avec celui des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (programmes A1 et A2) annexé à l'arrêté du ministère de l'Education nationale (second degré — 1^er bureau) en date du 27 juin 1956 et publié par le Centre national de Documentation Pédagogique sous le n° 55 Pg/Sd-Août 1956.

Ce programme est détaillé en précisant les classes A1 (Mathématiques supérieures) ou A2 (Mathématiques spéciales) au niveau desquelles sont supposées faites les leçons, ses paragraphes sont numérotés comme ceux de l'arrêté visé ci-dessus, ceci à l'exception des deux premiers I et I *bis*.

N.B. : Les démonstrations de toutes les questions ou propriétés figurant à ce programme pourront, sauf indication contraire, être demandées au concours d'agrégation.

I — (A1 et A2) Eléments d'algèbre.

Notions de groupe, d'anneau et de corps. L'étude générale n'est pas demandée, on se bornera à dégager ces notions de l'étude et de la comparaison des divers ensembles qui figurent au programme (supposé déjà connu) de la classe, et qui engendrent un groupe, un anneau ou un corps.

I bis. — (A1 et A2) Nombres réels.

Corps des nombres rationnels.

Définition des nombres réels. (On pourra les définir soit par des suites, soit par des coupures). Comparaison des nombres réels; opérations rationnelles sur ces nombres; propriétés.

Approximation d'un nombre à 10^{-n} près.

Tout ensemble de nombres réels qui possède un nombre majorant (ou minorant) admet une borne supérieure (ou inférieure).

Corps des nombres réels.

Racine nième (positive) d'un nombre positif.

On associera à la définition des nombres réels la mesure des longueurs. On précisera notamment la correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les nombres réels (axiomes d'Archimède et de Cantor-Dedeking).

/ . . .

AGREGATION 1958

Note du 16 septembre 1957

(Second Degré, 1^er Bureau)

Objet : **Agrégations masculine et féminine de mathématiques : Programme des épreuves pour la session de 1958.**

On est prié d'abord de se reporter à la Note du 13 septembre 1957 (Second Degré, 1^er Bureau), publiée au *Bulletin officiel* n° 34 en date du 26 septembre 1957 (113-Sd-§ 2/A2, p. 5), fixant les programmes des épreuves écrites et pratiques et le programme maximum des épreuves orales, pour les deux agrégations masculine et féminine de mathématiques, à partir de l'année 1958.

PROGRAMMES DES EPREUVES ECRITES ET DES EPREUVES PRATIQUES.

Ces programmes sont fixés par la note du 13 septembre 1957, citée ci-dessus.

PROGRAMME DES EPREUVES ORALES

Le programme des épreuves orales, *pour la session de* 1958, est obtenu en *supprimant* du programme maximum, fixé par la Note du 13 septembre 1957 déjà citée, les rubriques ou portions de rubriques indiquées ci-après.

Leçons de « Mathématiques élémentaires ».

Dans la partie *A* (programme des classes du Second Degré) :

I. — Tout le programme d'algèbre des classes de seconde C et Moderne).

III. — Tout le programme de la classe de Sciences expérimentales.

Dans la partie *B* (programme complémentaire) :

V. — Transformations ponctuelles (plan et espace).

VI. — Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

VII. — Etude géométrique des cercles réels dans le plan.

Leçons de « Mathématiques spéciales ».

I *bis*. — Nombres réels.

II. — Vecteurs.

III. — Nombres complexes.

IV. — Analyse combinatoire.

VI. — Polygones et fractions rationnelles.

IX. — Calcul des intégrales.

XV. — Introduction à la géométrie projective.

XVI. — Courbes algébriques planes.

XIX. — Principes de la mécanique.

XXI. — Uniquement les paragraphes 3 (Tore) et 5 (Paraboloïde hyperbolique) de cette rubrique (géométrie descriptive).

Arrêté du 31 juillet 1958

(Extraits)

(Vu A. 29-7-1885 mod. p. A. 22-11-1895 et 16-1-1897 ; A. 18-6-1904 et A. 31-7-1958.)

Objet : **Coefficients des épreuves de l'agrégation de mathématiques.**

ARTICLE PREMIER. — Les coefficients des épreuves de l'agrégation de mathématiques... définies par l'(es) arrêté(s) du 31 juillet 1958 susvisé(s) sont fixés comme suit :

1° *Agrégation de mathématiques.*

a) Epreuves préparatoires.

Composition de mathématiques élémentaires et spéciales : coefficient 3.
Composition d'analyse : coefficient 3.
Composition de mécanique générale : coefficient 2.
Composition de mathématiques appliquées : coefficient 2.

b) Epreuves définitives.

Leçon de mathématiques élémentaires : coefficient 5.
Leçon de mathématiques spéciales : coefficient 5.

....

ART. 2. — Ces coefficients seront appliqués pour la première fois aux concours de la session de 1959.

....

(J.O. *du* 14 *août* 1958.)

Note du 5 septembre 1958

(Second degré, 1er Bureau)

Objet : **Agrégation de mathématiques (hommes). Programme des épreuves écrites et programme maximum des épreuves orales pour les années 1959 et suivantes.**

Note préliminaire.

1° Les programmes ci-après annulent tous les programmes antérieurs. Afin d'en faciliter la lecture, ces textes ne comportent de renvois qu'aux programmes des classes du second cycle de l'Enseignement du second degré ; toutes les autres rubriques sont explicitement détaillées.

AGREG. MASCULINE DE MATH. 1959

B.O.E.N. n° 32 (11-9-58)

2° Ces programmes sont conçus comme devant s'appliquer durant plusieurs années, à partir de 1959 (inclusivement). En ce qui concerne les épreuves définitives seulement, le programme ci-après est un programme maximum d'où sera extrait chaque année, le programme de l'oral du concours.

EPREUVES PREPARATOIRES

(Compositions écrites)

1. — *Composition de mathématiques élémentaires et spéciales* (durée 6 heures).

Cette épreuve portera sur les questions figurant :

a) Dans les programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement du second degré en vigueur au 1er octobre de l'année scolaire du concours (classes de Seconde, Première, Mathématiques et Sciences expérimentales).

b) Dans les titres V, VI, VII, VIII et IX du programme maximum des leçons orales de « mathématiques élémentaires » détaillé plus loin et ce, même si certains de ces titres sont éventuellement exclus pour une année déterminée du programme des leçons d'oral.

c) Dans la totalité du programme maximum des leçons orales de « mathématiques spéciales » détaillé plus loin, et ce, même si certains titres sont éventuellement exclus pour une année déterminée du programme des leçons d'oral.

/...

Programme maximum des leçons de « mathématiques spéciales ».

Il se confond sensiblement avec celui des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (programme A, et A_2) annexé à l'arrêté du ministère de l'Education nationale (second degré — 1er bureau) en date du 27 juin 1956 et publié par le Centre national de Documentation Pédagogique sous le n° 55 Pg/Sd-août 1956.

Ce programme est détaillé en précisant les classes A_1 (mathématiques supérieures) au A_2 (mathématiques spéciales) au niveau desquelles sont supposées faites les leçons, ses paragraphes sont numérotés comme ceux de l'arrêté visé ci-dessus, ceci à l'exception des deux premiers I et I *bis*.

N.-B. — Les démonstrations de toutes les questions ou propriétés figurant à ce programme pourront, sauf indication contraire, être demandées au concours d'agrégation.

I. — (A_1 et A_2) Eléments d'algèbre

Notions de groupe, d'anneau et de corps. L'étude générale n'est pas demandée, on se bornera à dégager ces notions de l'étude et de la comparaison des divers ensembles qui figurent au programme (supposé déjà connu) de la classe, et qui constituent un groupe, un anneau ou un corps.

I *bis* — (A_1 et A_2) Nombres réels.

Corps des nombres rationnels.
Définition des nombres réels. (On pourra les définir soit par des suites, soit par des coupures). Comparaison des nombres réels ; opérations rationnelles sur ces nombres ; propriétés.
Approximation d'un nombre à 10^{-n} près.
Tout ensemble de nombres réels, qui possède un nombre majorant (ou minorant) admet une borne supérieure (ou inférieure).
Corps des nombres réels.
Racine nième (positive) d'un nombre positif.
On associera à la définition des nombres réels la mesure des longueurs. On précisera notamment la correspondance biunivoque entre les points d'une droite et les nombres réels (axiomes d'Archimède et de Cantor-Dedeking).

/...

Note du 6 septembre 1958

(Second degré, 1er Bureau)

Objet : **Agrégation de Mathématiques (femmes). — Programme des épreuves pour le Concours de 1959.**

I. — La structure du concours de l'Agrégation de Mathématiques (FEMMES) pour la session de 1959 sera la même que pour la session de 1958 ; il y aura donc deux séries d'épreuves : épreuves préparatoires, à la suite desquelles est établie une liste d'admissibilité, et épreuves définitives, imposées à toutes les candidates admissibles.

Les épreuves préparatoires consisteront en quatre compositions écrites : « mathématiques élémentaires », « mathématiques spéciales », « calcul différentiel et intégral », « mécanique rationnelle » (durée de chaque composition : six heures).

Les épreuves définitives comprendront deux épreuves pratiques, l'une de géométrie (durée : quatre heures), l'autre de « calcul numérique » (durée : trois heures), et deux épreuves orales : une leçon de « mathématiques élémentaires » et une leçon de « mathématiques spéciales ».

Les coefficients affectés à chacune des épreuves écrites, pratiques, et orales, seront les mêmes que pour la session de 1958.

II. — La note du 13 septembre 1957 (Second degré — 1er Bureau), parue au B.O.E.N. n° 34 du 26 septembre 1957, p. 2839 (113-Sd-§ 2/A2, p. 5), a fixé « *les programmes des épreuves écrites et pratiques, et le programme maximum des épreuves orales, pour les années 1958 et suivantes* des Agrégations masculine et féminine de mathématiques ». Cette note reste valable pour le concours de 1959 de l'Agrégation de Mathématiques (FEMMES) ; il convient toutefois d'y remplacer les trois alinéas (1°, 2°, 3°), constituant la « *Note préliminaire* » (page 2839 du B.O.E.N. n° 34 du 26-9-1957), par le texte suivant :

Note préliminaire

1° Les programmes ci-après, qui annulent les programmes antérieurs, ne comportent de renvoi qu'aux programmes du Second cycle de l'Enseignement du Second degré : toutes les autres rubriques sont explicitement détaillées ;

2° En ce qui concerne *les épreuves orales seulement*, le texte ci-après définit un programme *maximum*, d'où sera extrait le programme, fixé chaque année, de l'oral du concours.

Aucune modification n'est apportée aux autres parties de la Note du 13 septembre 1957, qui définissent :

— le *programme des épreuves écrites* (p. 2839 — 2842 du B.O.E.N. du 26-9-1957) ;

— le *programme des épreuves pratiques* (p. 2842, d°) ;

— le *programme maximum des épreuves orales* (p. 2842 — 2852, d°).

2° *Programme des épreuves orales.*

Le programme des épreuves orales, pour le concours de 1959, est obtenu en SUPPRIMANT du programme *maximum*, fixé par la Note du 13 septembre 1957 déjà citée (pages 2843 à 2852 du B.O.E.N. n° 34 du 26-9-1957), les rubriques ou parties de rubriques indiquées ci-après :

Leçons de « Mathématiques élémentaires. » /...

.../ *Leçons de « Mathématiques Spéciales ».*

I *bis.* — Nombres réels.

IV. — Analyse combinatoire.

VI. — Polynomes et fractions rationnelles.

IX. — *Uniquement le paragraphe* 2° (Définition des intégrales doubles et triples... Applications... Champs de vecteurs, Intégrale curviligne).

XIII. — Géométrie analytique.

XV. — Introduction à la géométrie projective.

XVI. — Courbes algébriques planes.

XVII. — *Uniquement le paragraphe* 2° (*Coniques*).

XIX. — Principes de la mécanique.

XXI. — Géométrie descriptive.

Note du 6 septembre 1958

(Second degré, 1er Bureau)

Objet : **Agrégation de Mathématiques (hommes). — Programme des épreuves pour la session de 1959.**

On est prié d'abord de se reporter à la note du 5 septembre 1958 (second degré, 1er bureau), publiée ci-dessus au présent bulletin officiel, fixant les programmes des épreuves écrites et le programme maximum des épreuves orales pour l'agrégation masculine de mathématiques, à partir de l'année 1959.

Programmes des épreuves écrites.

Ces programmes sont fixés par la note du 5 septembre 1958 citée ci-dessus.

Programme des épreuves orales.

Le programme des épreuves orales, pour la session de 1959, est obtenu en supprimant du programme maximum fixé par la note du 5 septembre 1958 déjà citée, les rubriques ou portions de rubriques indiquées ci-après.

Leçons de « mathématiques élémentaires ». /.../

Leçons de « mathématiques spéciales ».

I *bis.* — Nombres réels.

IV. — Analyse combinatoire.

VI. — Polynomes et fractions rationnelles.

IX — Uniquement le paragraphe 2° Intégrales doubles et triples t applications : champ de vecteurs : intégrale curviligne.

XIII. — Géométrie analytique.

XV. — Introduction à la géométrie projective.

XVI. — Courbes algébriques planes.

XVII. — Uniquement le paragraphe 2° Coniques.

XIX. — Principes de la mécanique.

XXI. — Géométrie descriptive.

Mathématiques

Un professeur de mathématiques devrait avoir élaboré et intériorisé une vue globale, personnelle et cohérente de ses connaissances dans sa discipline à travers son histoire et ses liens avec les autres disciplines. La préparation à l'agrégation interne peut être l'occasion d'une fructueuse réflexion. C'est dans cet esprit qu'il a été procédé à cette mise à jour du programme complémentaire, la connaissance de ceux de toutes les sections de l'enseignement secondaire étant d'autre-part demandée aux candidats. Ce texte décrit un ensemble de connaissances souhaitable pour un professeur agrégé. Il sera périodiquement remis à jour. Il ne doit pas être interprété de façon rigide et formaliste. Son but est surtout d'aider les candidats dans leur réflexion et dans le nécessaire effort d'unification de leurs connaissances.

S'il est commode de présenter un programme en rubriques, ce découpage ne doit pas dégénérer en cloisonnement. C'est ainsi qu'il est proposé certains rapprochements qui peuvent être complétés par d'autres. Ce texte comporte aussi des répétitions quand une même notion intervient à plusieurs endroits. Ainsi, une même notion peut être d'abord approchée dans un cadre particulier, puis sous un aspect plus général.

A - PROGRAMME DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Ce programme comporte tous les programmes des classes de la seconde à la terminale incluses, dans toutes les sections.

B - PROGRAMME COMPLÉMENTAIRE

1. Ensembles

Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produit d'un nombre fini d'ensembles. Application. Relation d'ordre.

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Ensemble dénombrable. Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

Relation d'équivalence et ensemble quotient.

2. Algorithmique et informatique

Exemples d'algorithmes liés au programme.

Notion de variable, d'adresse. Instruction d'affectation, instructions conditionnelles, programmation itérative et récursive.

Fonctions et sous-programmes ; passage de paramètre. Rédaction en français ou en Pascal de programmes ne comportant qu'un petit nombre d'instructions pouvant utiliser des sous-programmes.

Aucun développement théorique n'est au programme.

3. Algèbre générale

a) Extensions successives de la notion de nombre

Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Division euclidienne. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Congruences.

Applications arithmétiques des anneaux quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Théorème chinois. Groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications à des problèmes de calendriers. Exemples de méthodes de codage et de cryptage. Équations diophantiennes ax+by=c.

Corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ des nombres réels, $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

/...

.../

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ des réels et complexes. La construction de $\mathbb{R}$ étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.

Complétude de $\mathbb{R}$: toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les rela-

/...

4) Constructions modernes des nombres Réels (dans les manuels)

Au début des années soixante, avec les réformes des programmes des classes préparatoires (**1956**) puis du secondaire (**1962**), s'est posé le problème de l'introduction de la construction des nombres réels dans l'enseignement.

Les mathématiciens de l'époque ont alors défendu l'une ou l'autre des présentations classiques et ont aussi quelquefois innové avec des motivations pédagogiques. Cette réflexion s'est traduite par un grand nombre de publications d'ouvrages scolaires ou destinés au corps enseignant. Par exemple le cours de Valiron et celui de Chazel utilisent la méthode des coupures tandis que le cours de Lelong -Ferrand et Arnaudiès présente une construction utilisant les suites de Cauchy, ainsi que le cours de Chambadal et Ovaert que nous survolerons plus loin. (Tous ces ouvrages se trouvent encore dans les documentations de lycées possédant des classes préparatoires ainsi que dans les bibliothèques des I.R.E.M.)

Ainsi Doneddu, en 1963 dans « Les bases de l'analyse mathématique moderne » propose une construction des nombres réels positifs à l'aide des nombres b-naires et Jacqueline Lelong-Ferrand défend en 1964, dans un ouvrage intitulé « Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement secondaire », la construction des nombres réels par leurs représentations décimales (ou en base b) .Voici la justification qu'elle donne de cette présentation dans sa conclusion:

« *Nous venons de voir qu'il est possible de définir les nombres réels de bien des manières: développements décimaux illimités, suites croissantes, doubles suites encadrantes, suites de Cauchy, coupures, sections commençantes; toutes ces méthodes sont intéressantes et rigoureuses; et elles conduisent à des exposés de longueur sensiblement égales. Les nouveaux programmes de Mathématiques élémentaires, qui proposent de donner des notions sommaires sur la définition des nombres réels, placent donc le professeur devant une situation embarrassante; car quelle que soit la méthode adoptée, il n'est pas possible d'en donner un exposé rigoureux sans lui consacrer plusieurs leçons, au détriment du reste du cours. Les méthodes fondées sur la théorie des limites présentent, de plus, l'inconvénient de retarder la définition des* *nombres réels jusqu'à ce qu'on ait exposé les premières notions de « théorie des fonctions », ce qui amène à exposer le cours dans un ordre peu naturel à ce niveau.*

Le souci de rigueur ne doit pas, non plus, nous faire oublier le point de vue pratique: la plupart de nos élèves deviendront plutôt des utilisateurs des mathématiques que des mathématiciens professionnels; et nous ne devons pas mépriser le point de vue du calculateur obligé (souvent pour notre propre sécurité) de faire des calculs corrects sur les nombres réels.....

Il nous semble donc que l'on gagnerait un temps précieux en définissant les nombres réels au moyen de leurs représentations décimales; car on traiterait en même temps le problème important des valeurs approchées, et celui de la caractérisation axiomatique de la « droite géométrique », si négligée en général...... »

Nous allons rapidement exposer la méthode employée par madame Lelong Ferrand, le lecteur intéressé trouvera les démonstrations complètes dans son manuel.

Dans un premier temps elle définit les nombres décimaux comme les rationnels pouvant être représentés par une fraction décimale $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier non divisible par 10 ce qui assure l'unicité de la représentation et tout nombre décimal admet une écriture de la forme $a_0,a_1....a_n$ (a_0 est un entier relatif et a_i où $i \geq 1$ est un entier positif de $\{0,1...9\}$.

La valeur décimale approchée à 10^{-n} près, par défaut, d'un nombre rationnel x est x_n tel que $x_n \leq x < x_n + 10^{-n}$

Un paragraphe est ensuite consacré à la définition des D.D.I, développements décimaux illimités:

A est un D.D.I. ssi A est une suite infinie de nombres entiers $a_0,a_1...a_n...$ où a_0 est un entier relatif et a_i est un entier positif pour tout $i \geq 1$. On note Δ l'ensemble des D.D.I. et Δ_0 l'ensemble des D.D.I. qui se terminent par une infinité de zéros.

Il existe alors de façon évidente une bijection entre l'ensemble D des décimaux et Δ_0.

On appelle $A_n = a_0,a_1...a_n = \sum_{i=0}^{n} 10^{-i} a_i$, valeur approchée, d'ordre n, par défaut de A et A est noté $A = a_0,a_1...a_n...$

Madame Lelong-Ferrand définit alors une relation d'ordre sur Δ :

$A \leq B$ si pour toute valeur de n, on a $A_n \leq B_n$.

Cette relation présente les deux propriétés suivantes:

-Si l'on identifie Δ_0 et D cette relation n'est autre que la relation d'ordre classique dans D pour les éléments de Δ_0.

-C'est une relation d'ordre total dans Δ (se reporter au texte pour la démonstration non évidente).

Cette relation permet alors de définir les D.D.I positifs ou nuls et les D.D.I. négatifs. Par ailleurs A est le plus petit de tous les D.D.I. qui vérifient $A \geq A_n$ pour tout n, A est donc la borne supérieure des A_n.

L'auteur définit alors les suite monotones de Δ:

Soit $A^\alpha = a_0^\alpha, a_1^\alpha \ldots a_n^\alpha \ldots (\alpha = 1,2,\ldots p)$ une suite infinie de D.D.I.. cette suite est dite croissante [respectivement décroissante]si, quel que soit α, on a $A^{\alpha+1} \geq A^\alpha$ [respectivement $A^{\alpha+1} \leq A^\alpha$]; et elle est dite majorée [resp.minorée]s'il existe un développement décimal illimité B tel que l'on ait $A^\alpha \leq B$ [$A^\alpha \geq B$] quel que soit α.

Il ne reste plus qu'à montrer que, dans Δ, toute suite croissante majorée admet une borne supérieure et que toute suite décroissante minorée admet une borne inférieure: en effet si $B=b_0,b_1 \ldots b_n \ldots$est le majorant de A, on peut montrer que chacune des suites infinies a_i^α (suites indicées par α) est stationnaire car a_i^α est une suite croissante d'entiers compris entre 0 et 9 si $i \geq 1$ et pour i = 0 les a_0^α prennent un nombre fini de valeurs comprises entre a_0^1 et b_0.

Les D.D.I. ne possédant qu'un nombre fini de décimales distinctes de 9 constituent l'ensemble Δ_9 et l'auteur exhibe une bijection de Δ_9 sur Δ_0.

Dans un paragraphe suivant les nombres réels sont alors définis comme les D.D.I. qui possèdent une infinité de décimales différentes de 9.

Ainsi l'on obtient *deux sortes de nombres réels :*

1° les nombres décimaux ordinaires, qui admettent chacun deux représentations par des D.D.I; l'une qui sera dite régulière, par un élément de Δ_0 l'autre qui sera dite irrégulière, par un élément de Δ_9 ;

2° les nombres décimaux illimités qui sont représentés par un seul D.D.I. n'appartenant ni à Δ_0 ni à Δ_9 .

Sans l'introduction de Δ_9 il était impossible de définir dans l'ensemble des D.D.I. une addition possédant les propriétés de l'addition dans D.

Dans l'ensemble des réels ainsi défini on peut aisément définir une addition et une multiplication (c'est l'objet des paragraphes suivants) donnant à cet ensemble une structure de corps commutatif totalement ordonné. Après avoir défini la limite de manière classique on montre que dans **R** toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) admet une limite.

Le choix des nombres décimaux peut paraître arbitraire et l'on peut montrer qu'en choisissant un système de numération de base k on obtient, en réalisant la même construction, un ensemble isomorphe à celui construit à l'aide des nombres décimaux.

Le chapitre se poursuit par l'étude d'une caractérisation axiomatique des nombres réels et de la droite géométrique que nous ne développerons pas ici.

Voyons maintenant rapidement le mode de présentation utilisé dans le cours de Mathématiques de Chambadal et Ovaert publié en 1966 chez Gauthiers-Villard:

On se place dans un corps commutatif totalement ordonné et après avoir défini des suites d'éléments de ce corps ainsi que la convergence de telles suites, on suppose que de plus le corps est « *de type dénombrable* », c'est à dire qu'il existe, dans ce corps, des suites convergentes non stationnaires. L'ensemble des rationnels, **Q**, est un exemple d'un tel corps.

Après l'étude des propriétés des suites de Cauchy d'un tel corps et la mise en évidence dans **Q** de suites de Cauchy non convergentes, les auteurs énoncent et démontrent le théorème suivant:

Soit K un corps commutatif totalement ordonné de type dénombrable.

1. Il existe un corps commutatif totalement ordonné de type dénombrable K' contenant K, et possédant les propriétés suivantes:

a)Les lois et l'ordre de K' induisent les lois et l'ordre de K.

b)Dans K' toute suite de Cauchy converge .

c)Le corps K est dense dans le corps K'

2. Soit L un autre corps commutatif satisfaisant aux mêmes conditions que K' ; il existe alors un isomorphisme et un seul de L sur K' qui laisse fixe K.

3. Si le corps K est archimédien, le corps K' l'est aussi.

*Ces résultats s'appliquent en particulier au corps **Q** des nombres rationnels*

L'ensemble Q' s'appelle l'ensemble des nombres réels ; on le note R.

Cet exposé, qui ne s'adresse évidemment qu'aux étudiants de l'enseignement supérieur présente la construction des réels comme un cas particulier du théorème ci-dessus et, bien que l'idée de départ soit la même on est loin de l'exposé de Méray.

Qu'en est-il des manuels actuels? Dans l'enseignement secondaire la construction des nombres réels a totalement disparu des programmes et des manuels. Dans les classes préparatoires les constructions ne figurent plus au programme, on trouve toutefois dans certains cours très complets un exposé; en particulier le premier chapitre du cours de Mathématiques d'Arnaudiès et Fraysse (Dunod 1991) est entièrement consacré aux nombres réels, à leur construction et à leurs propriétés.

<u>5) Conclusions</u>

On a pu voir dans les paragraphes précédents comment s'est imposée, à partir de Bolzano et Cauchy, la nécessité d'une construction rigoureuse de l'ensemble des nombres réels. Pour asseoir les notions de limite et de continuité sur un édifice solide, cette construction est indispensable.

Les premiers travaux sur les réels sont élaborés par des chercheurs professionnels et sont enseignés par leurs auteurs à l'université (Weierstrass à l'université de Berlin) ou publiés dans des mémoires destinés à un cercle de spécialistes (Heine, Cantor...); ils donnent lieu à des échanges de courrier (correspondance entre Cantor et Dedekind...) et des débats d'idées. Ces recherches déboucheront avec Dedekind et Cantor sur la **théorie des ensembles**.

On voit en 1904 apparaître dans les programmes de "Prépas", la construction des nombres réels dont les premières ébauches datent de moins d'un demi-siècle. On peut donc penser qu'à l'époque une clarification du statut des nombres réels semblait nécessaire. Pendant longtemps aucune des méthodes présentées ne s'est imposée et on peut voir dans le texte suivant de Tannery que le débat est encore ouvert en 1908 et que, suivant les pays, l'une ou l'autre avait la préférence des universitaires.

Voici quelques extraits d'une comparaison entre trois méthodes, rédigée en 1908, dans le bulletin des sciences mathématiques par Jules Tannery:

> *"/... Je remarque tout d'abord que les trois définitions, quand il s'agit d'un nombre irrationnel, définissent plutôt, si l'on me permet de m'exprimer ainsi, une détermination du nombre que ce nombre lui-même; cet inconvénient, que je ne saurais d'ailleurs mieux préciser est dans la nature des choses, ou de notre esprit, et il n'enlève rien à la rigueur des développements. Il me semble que la définition qu'on doit à M. Dedekind offre plusieurs avantages sur les deux autres; d'abord, elle détermine immédiatement le nombre irrationnel de façon univoque. Dans cette définition la question de l'égalité ne se pose pas: deux nombres irrationnels égaux sont le même nombre; ils résultent d'une même coupure. M. Méray et Weierstrass sont obligés de définir ce que sont deux nombres irrationnels égaux....*
>
> */... Dans cette conception aussi, la comparaison de deux nombres, la notion de plus grand et de plus petit sont immédiates. Enfin la distinction entre le nombre irrationnel et le nombre rationnel apparaît encore immédiatement, puisque les deux*

classes de nombres rationnels que sépare la coupure n'ont pas le même caractère suivant qu'on a à faire à un nombre rationnel ou à un nombre irrationnel .../

/... Il semble que en France au moins, la définition de M. Méray ait séduit davantage la plupart des professeurs, et cela tient peut-être à ce qu'elle plaçait au début une idée qui leur était familière, celle de suite; les raisonnements et les calculs qu'elle implique pour se développer sont de la nature de ceux auxquels on était habitué; pour se l'assimiler, il n'y qu'un effort à faire: accepter comme définition d'une suite ayant une limite la règle donnée par Cauchy pour reconnaître si une série est convergente, ou si une suite à une limite. La définition de M. Dedekind, celle de Weierstrass, surtout, sont liées à la notion d'ensemble, qui, il y a vingt ans, était familière à peu de personnes. Peut-être cette notion est-elle moins difficile qu'on se le figure à comprendre pour des débutants, pour ceux dont la pensée n'est pas cristallisée par l'habitude, et il se peut que des maîtres, d'ailleurs excellents, se soient effrayés plus qu'il ne convenait de cette notion, qu'ils n'étaient pas accoutumés à introduire dans leur enseignement. Les développements considérables qu'a pris rapidement la théorie des ensembles, les conséquences inattendues et parfois paradoxales qu'on en tirait, le caractère très abstrait de ces développements ont peut-être ajouté à cette frayeur. Assurément, il n'a jamais été question de faire pénétrer ces développements dans l'enseignement élémentaire; mais la notion d'ensemble, qui suffit parfaitement à la définition des nombres irrationnels, est, en elle-même, très simple; elle apparaît comme telle à tous ceux qui s'y sont accoutumés. "

Dans ce texte J. Tannery donne sa préférence à la construction des réels par les coupures et suggère que seul le poids des pesanteurs empêche cette méthode d'être à l'honneur dans les programmes.

Encore dans les années 60 nombre d'étudiants de "Prépas" ont abordé la notion de nombre réel par les suites de Cauchy, d'autres par les coupures, d'autres encore par les développements décimaux. On peut se demander pour quelles raisons ces notions disparaissent des programmes (**1963**) alors que, particulièrement pour les coupures, l'exposé est relativement simple. Parallèlement à cette disparition en "Prépas", les procédés de construction des réels sont traités en Math.-Elem. entre les années **1963** et **1967**. Les propriétés fondamentales des réels (borne supérieure...) restent au programme de "Prépas" alors qu'elles n'apparaissent pas en Terminale avant **1971**.

Dans ces années-là (cf. extrait de Chambadal-Ovaert plus haut, Bourbaki...) apparaissent des exposés plus modernes mais aussi plus ardus de ces notions. Depuis maintenant un bon nombre d'années, seuls les étudiants se spécialisant au niveau de l'agrégation dans l'enseignement ou la recherche mathématique sont amenés, dans leur cursus, à rencontrer la construction des nombres réels.

L'apparition des calculatrices dans toute la scolarité, si elle permet de mieux appréhender les approximations et calculs numériques, ne laisse subsister que l'aspect **opératoire** des nombres au détriment de leur statut de **Nombre**. Il n'est donc pas étonnant, comme le signale Madame E. Cousquer, que des étudiants préparant le C.A.P.E.S. de mathématiques ne sachent plus différencier un nombre décimal, un nombre rationnel, un nombre réel, puisqu'ils sont tous confondus dans une même écriture (à la précision de la calculatrice). Si ces confusions sont sans importance pour un non spécialiste, il n'en est pas de même pour de futurs enseignants qui peuvent difficilement enseigner clairement ce qu'ils conçoivent mal.

Nous espérons que cette brochure, malgré toutes ses insuffisances, saura répondre à l'interrogation de certains étudiants particulièrement curieux.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES GENERAUX

COLETTE Jean-Paul Histoire des mathématiques (2 tomes), Vuibert, 1979

COUSQUER Eliane Histoire du concept de nombre, I.R.E.M. de Lille, 1992

COUSQUER Eliane Actes de l'université d'été de Besançon, (les constructions des réels), 1995

COUSQUER Eliane La fabuleuse Histoire des Nombres, Diderot , 1998

DHOMBRES Jean Nombre,mesure et continu-épistémologie et histoire Cedic-Nathan(1973)

DIEUDONNE Jean Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann, 1978

I. R.E.M. (Epistémologie et Histoire) Mathématiques au fil des ages, Gauthier-Villars, 1987

GUILLEMOT Michel Actes du colloque inter-I.R.E.M. Epistémologie et His toire des mathématiques de Besançon, (Bolzano et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires), 1989

OUVRAGES HISTORIQUES

BAIRE René Théorie des nombres irrationnels des limites et de la continuité(1947), Vuibert

BOLZANO Bernard Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse(1817) traduction de J.Sebestik, Revue d'histoire des sciences, 1964

CANTOR Georg De l'extension d'une proposition de la théorie de séries trigonométriques,1872 (cf I.R.E.M. de Toulouse)

CAUCHY Augustin-Louis Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, 1821

DEDEKIND Richard Continuité et nombres irrationnels(1872), traduction de J. Milner revue par H. Sinaceur

HEINE Heinrich Les éléments de la théorie des fonctions, Journal de Crelle, 1872, traduction par J.P. Friedelmeyer et M. Guillemot à l'I.R.E.M. de Toulouse)

MERAY Charles Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, Revue des société savantes, 1869

Nouveau précis d'analyse infinitésimale , 1872

TANNERY Jules Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle, Hermann, 1886

Bulletin de sciences Mathématiques,tome 32, 1908

OUVRAGES MODERNES

CHAMBADAL-OVAERT Cours de mathématiques, Gauthier-Villars,1966

DONEDDU Les bases de l'analyse mathématique moderne, 1963

LELONG-FERRAND J. Les notions de mathématique de base dans l'enseignement secondaire, Armand Colin,1964

LELONG-FERRAND J.
ARNAUDIES J.M. Cours de mathématiques, Tome 2, Analyse, Dunod, 1972

Auteurs: F.JABOEUF, F.LALANDE, D.RAVEL

Titre : « Histoires de constructions....., logarithmes, nombres réels »

Editeur: I.R.E.M. de Montpellier

Date: Deuxième trimestre 1999

Nombre de pages: 146

ISBN: 2 – 909916 – 35 - 9

Type de document: Fascicule I.R.E.M.

Support: Papier

Types d'utilisateurs:

Elèves de terminales et de classes préparatoires, étudiants, stagiaires I.U.F.M., enseignants.

Niveau:

Classes terminales et préparatoires , D.E.U.G., licence, maitrise, C.A.P.E.S., agrégation.

Résumé:

Une partie est consacrée à l'invention des logarithmes, l'autre aux diverses constructions des nombres réels, en rappelant dans les deux cas les conditions historiques de leur apparition.

Mots clés:

Addition, baccalauréat, Bolzano, borne supérieure, Briggs, calculs, Cantor, construction, continuité, coupures, Dedekind, enseignement, Euclide, histoire, Heine, limites, logarithmes, Méray, multiplication, Neper, prépas, programmes, raton-laveur, réels, suites de Cauchy.

CLEPSYDRE

Clepsydre d'Aménophis III (vers – 1400) et coupe de l'instrument.