INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr

I. R. E. M. de Montpellier

Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée

René Bernard - Christian Faure - Maryse Noguès
Yvon Nouazé - Luc Trouche

1998

Préface

En 1993, notre équipe publiait une brochure : « pour une prise en compte des calculatrices graphiques au lycée » ; la similitude avec le titre de celle-ci n'est pas fortuite. En effet, nous avons continué depuis à nous interroger sur la façon dont pouvaient être intégrées de façon raisonnée les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques. L'apparition, il y a trois ans, des calculatrices symboliques, en particulier des TI-92, nous a conduit à repenser cette intégration en prenant en compte les possibilités de calcul formel qui sont données par cet outil.

C'est dans le cadre de l'Irem de Montpellier que nous avons pu mener a bien notre travail et c'est celui-ci qui en permet aujourd'hui sa publication. Ce travail a été également soutenu par la Direction des Lycées et Collèges et par la DISTNB. Nous tenons à les remercier pour l'aide qu'ils nous ont ainsi apportée.

Nous avons dans la première partie de cette brochure tenu à souligner l'importance des interactions entre outils de calcul et mathématiques. Ces outils de calcul permettent de renforcer la dimension expérimentale des mathématiques, en accord avec l'esprit des programmes. Mais un travail en environnement « calculatrices symboliques » ne peut être réalisé sans tenir compte des effets générés par ce type de matériel. On trouvera donc dans cette brochure des pistes pour repenser l'organisation de la classe, aussi bien en termes spatiaux ou temporels qu'en termes de contenus.

De façon plus pragmatique, nos propositions thématiques reprennent les grands thèmes de l'enseignement de l'analyse au lycée : limites, calcul différentiel, calcul intégral, suites et fonctions. Pour chacun de ces thèmes, nous proposons des activités ou des exercices qui peuvent permettre de renouveler leur enseignement en relation avec les potentialités et les contraintes imposées par cet outil.

Nous invitons bien sûr tous nos lecteurs à nous faire part de leurs remarques et suggestions et sollicitons leur indulgence pour d'éventuelles erreurs.

L'Equipe analyse de l'IREM de Montpellier
René Bernard - Christian Faure - Maryse Noguès
Yvon Nouazé - Luc Trouche

NB : Au moment où nous publions cette brochure, deux nouvelles collègues, viennent de rejoindre notre équipe : Joëlle Fontana et Nathalie Briant. Nous les remercions pour la part qu'elles ont prises aux dernières mises en forme de l'ouvrage.

Sommaire

PARTIE I. ANALYSE ET CALCULATRICES

I.1. L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE 2

I.1.a. L'émergence chaotique des grands concepts de l'analyse. 2

I.1.b. L'analyse au lycée : une situation assurée, des approches fluctuantes. 5

Faire des mathématiques 5

Des contenus en évolution 8

Les textes récents 13

I.1.c. Mathématiques et outils de calcul : une influence réciproque. 17

Des mathématiques qui évoluent 17

Un enseignement qui se cherche 18

I.2. TRAVAILLER EN ENVIRONNEMENT « CALCULATRICES SYMBOLIQUES » 20

I.2.a. Le matériel. 20

La représentation des nombres 20

La représentation graphique 27

La transposition de compétences fondamentales 29

I.2.b. Organisation de la classe. 32

Préambule 32

L'organisation dans l'espace 33

L'organisation dans le temps 34

De nouveaux énoncés 35

De nouveaux contrats de travail 37

PARTIE II. PROPOSITIONS THEMATIQUES

II.1. LIMITES 42

II.1.a. Conceptions. 42

II.1.b. Transposition didactique et informatique. 44

La transposition didactique 44

La transposition informatique 44

II.1.c. Limites en 1ère S. 49

Objectifs 49

Limite infinie en $+\infty$ 50

Limite infinie en $+\infty$, en $-\infty$ 53

Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$ 54

Limite en a, a réel. 56

Limites et opérations 56

II.1.d. Limites en TS. 60
Objectifs 60
Activités et exercices 60

II.2. SUITES 66

II.2.a. Enseignement et calculatrices. 66
Enseignement 66
Calculatrices 67

II.2.b. Première activité. 73

II.2.c. Comportement asymptotique. 74
$u_n = f(n)$ 74
$u_n = f(u_{n-1})$ 76
Des comportements asymptotiques différents : suites de Feigenbaum 77
Autres exemples : $u_n = f(u_{n-1};n)$, suites définies par une somme, suites périodiques 79
Autour de e 82

II.2.d. Activités 85
Une petite différence qui a de grandes conséquences 85
Dérangements 88
Coloriages 91

II.3. CALCUL DIFFERENTIEL 94

II.3.a. Le double caractère du calcul différentiel. 94

II.3.b. La calculatrice : intérêt et contraintes. 96

II.3.c. Activités. 104
Vitesse sans précipitation 104
En longeant les racines 107
Drôles de récipients 112

II.3.d. Définition et calcul de dérivées. 119
Définition 119
Recherche de fonctions dérivées 120

II.3.e. Le point de vue local. 122
Développement limité en un point 122
Une valeur très approchée 123

II.3.f. Le point de vue global. 125
Dérivée et sens de variation 125

II.3.g. Des exemples de problèmes. 127
Le pavé dans la sphère 127
Les dérivées successives 130
Du graphique au calcul 133

II.4. A LA QUETE DE L'INTEGRALE, UNE HISTOIRE SANS FIN 134

II.4.a. L'intégrale, une double transposition problématique. 135

La transposition didactique 135

La transposition informatique 135

II.4.b. Les potentialités « intégrales » d'un logiciel de calcul symbolique. 137

Dériver, intégrer, deux processus qui peuvent s'alimenter l'un l'autre 138

Sommes discrètes, sommes continues, deux processus proches et lointains 138

Différentes applications, différents cadres d'étude 139

II.4.c. Une introduction possible de l'intégrale en Terminale. 141

Le problème : calculer l'aire définie par un arc de parabole 141

II.4.d. Eléments de cours. 144

Définition 144

Propriétés algébriques de l'intégrale 146

Intégrale et calcul d'aire 147

Intégrale et relation d'ordre 154

II.4.e. Exercices. 157

Limite de la « série harmonique » 157

Une suite d'intégrales 159

Pour chercher 163

II. 5. FONCTIONS 164

II.5.a. Gérer la calculatrice. 164

Définir une fonction 164

Manipuler, étudier une fonction 165

Quelques problèmes qui se posent 166

II. 5. b. Fonctions Logarithme et exponentielle. 168

Introduction 168

Une équation fonctionnelle 169

Une équation différentielle 169

II.5.c. Un exercice et deux problèmes. 171

Ecrans Log-Log et Semi-Log 171

Approximation d'un logarithme 173

Calcul de e 176

PARTIE III. PROBLEMES DE RECHERCHE

III.1. LE SKIEUR DE MORZINE 180

Un exemple de réponse. 181

Des solutions d'élèves. 182

A. Un essai avec le calcul statistique 182

B. Faire simple avec plus de morceaux 183

C. Une quasi-solution en un seul morceau 183

D. Une solution définitive inspirée par la recherche précédente 184

E. Un raisonnement d'expert avec trois morceaux 185

III.2. SUITES DE FEIGENBAUM **187**

Etude graphique. **187**

Des preuves ou des réfutations. **188**

Cas 1 : $a < 1 \rightarrow$ suite décroissante, convergente vers 0 188

Cas 2 : $1 \leq a < 2 \rightarrow$ suite décroissante convergente vers c 189

Cas 3 : $2 < a < 3 \rightarrow$ suite non monotone convergente vers c 189

Cas 4 : $3 < a < 1 + \sqrt{5} \rightarrow$ suite non monotone à deux points d'accumulation 190

Cas 5 : $1 + \sqrt{5} < a < 4 \rightarrow$ suite dont le comportement semble erratique 193

Cas 6 : $a > 4 \rightarrow$ suite décroissante de limite $-\infty$ 195

III.3. RECHERCHE DE POINTS FIXES **197**

Observer, analyser, accumuler des informations **197**

Preuves **199**

1. Une idée naturelle : décomposer un nombre en facteurs premiers. 199

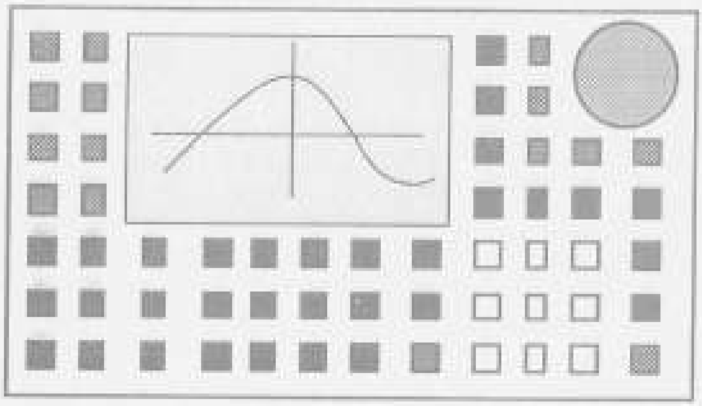
2. Une première généralisation : tous les p^p, p premier, sont des points fixes. 200

3. Une réciproque. 201

4. Où l'on finit par où on aurait du commencer : les problèmes d'existence de la suite d. 201

BIBLIOGRAPHIE

Partie I



Analyse et calculatrices

I.1. L'enseignement de l'analyse

I.1.a. L'émergence chaotique des grands concepts de l'analyse.

Ce sont les problèmes soulevés par le calcul infinitésimal, la construction des nombres réels, la représentation des fonctions par des séries entières qui permettent en même temps, à la fin du XIX^ème^ siècle, l'émergence du concept actuel de fonction (correspondance univoque entre une variable indépendante x et une variable dépendante y) et de celui de suite numérique (application de $\mathbb{N}$, ou une partie de $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$). Cette émergence est le résultat d'un long cheminement depuis l'antiquité, la juxtaposition des cadres de recherche, les influences philosophiques pouvant selon les périodes être des freins ou des éléments de progrès. Enfin après bien des bouleversements apparaît la nécessité d'avoir une théorie rigoureuse des nombres qui permet de fonder l'analyse[1]... mais les recherches continuent encore actuellement : l'analyse non standard par exemple qui développe une théorie des infinitésimaux.

Quatre cadres vont essentiellement intervenir dans la construction du concept :

- géométrique ;
- cinématique ;
- algébrique ;
- numérique.

Aux différentes époques, tel ou tel cadre sera privilégié et il ne s'agit pas là d'un choix gratuit, il correspond à une « philosophie » plus générale et une conception du monde à une époque donnée. Si l'utilisation d'un cadre se révélera producteur bien des fois, il pourra aussi se constituer en obstacle et c'est seulement à partir de la fusion des divers cadres et de la mise en oeuvre de leur complémentarité qu'a pu se constituer le concept de fonction.

Dans l'antiquité, des correspondances sont établies essentiellement sur le plan numérique, dans un but pratique (tables). Avec Pythagore et son école, se développe une arithmétique géométrique (« toutes les choses connues ont un nombre ») qui limite son étude aux nombres entiers. Mais l'importance du cadre géométrique apparaît comme un obstacle au dégagement de la notion de nombre.

La découverte des irrationnels qui détruit la correspondance entre nombres et longueurs introduit une crise : deux conceptions s'affrontent alors, une *conception continuiste* qui pense « le nombre, l'espace et la matière comme divisible à l'infini » ; une *conception atomiste* qui préconise « l'existence d'éléments premiers indivisibles ». Les paradoxes de Zénon tentent d'établir que dans les deux cas on aboutit à une impasse.

[1] *[Dahan -Dalmedico et Peiffer, 1986].*

> Le paradoxe « d'Achille et la tortue » s'oppose à la divisibilité infinie de l'espace : si l'espace est divisible à l'infini, Achille ne rattrapera jamais la tortue.
> Le paradoxe de la « flèche » suppose que l'espace et le temps sont composés de parties indivisibles : si à chaque instant de son vol, la flèche occupe un instant et un point, elle ne peut alors être en mouvement car au repos en chaque instant.

Avec Eudoxe et Archimède la mathématique grecque admet l'intrusion des nombres incommensurables. <u>Le cadre reste géométrique</u>, il ne s'agit pas de mesurer mais surtout de déterminer le rapport de deux grandeurs géométriques: longueurs, aires. Des problèmes de quadrature d'une surface (construction d'un carré ou d'un triangle ayant même aire qu'une surface donnée) sont traités par Archimède, qui évite toute considération sur l'infini, et développe la méthode d'exhaustion.

> La méthode d'exhaustion permet de comparer l'aire d'une surface A (segment de parabole par exemple) à l'aire d'une surface S connue (triangle par exemple) en construisant deux surfaces U et V qui encadrent à la fois A et S, la différence V-U étant aussi petite que l'on veut. On démontre ensuite par l'absurde que A = S. Il s'agit alors de calculer la somme d'une série : Archimède évite de calculer la somme de la série infinie, mais calcule celle des premiers termes.

Au XIV^{ème} siècle, les écoles d'Oxford et de Paris, avec Nicole Oresme en particulier, permettent de réaliser de grands progrès théoriques. L'étude des mouvements, qui <u>associe au cadre géométrique le cadre cinématique</u> (reposant sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps) amène à considérer « chaque chose mesurable, à l'exception des nombres … comme une quantité continue ». Pour rendre compte de la variation continue dans la relation temps-vitesse, il utilise alors une représentation graphique (une des premières de l'histoire).

Si au XVII^{ème} siècle, l'étude des mouvements, trajectoires et l'optique entraînent le développement des recherches sur la vitesse instantanée, les tangentes, les extremums..., <u>la géométrie reste à la base des problèmes mais ceux-ci sont traités dans un cadre qui devient de plus en plus algébrique</u>. Descartes, Fermat, Wallis sont les artisans de cette éclosion du calcul infinitésimal. Les méthodes analytiques utilisées renforcent l'utilisation de techniques de plus en plus opératoires et l'emploi de formules algébriques que les travaux de Viète sur le calcul littéral ont rendues possibles.

La première définition d'une fonction apparaît avec Bernouilli,

> « on appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur et de constantes »,

pendant que Newton et Leibniz essayent de rassembler et d'ordonner les résultats des méthodes infinitésimales indépendamment de la géométrie, même si la manipulation des infiniments petits reste un sujet de controverse. Par exemple, Berkeley, qui reproche au raisonnement de Guillaume de l'Hospital de ne pouvoir énoncer une règle rigoureuse, précisant :

> si dx est un infiniment petit pour quelles valeur de n, n dx est encore un infiniment petit.

Les travaux d'Euler et Lagrange au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle affranchissent le calcul infinitésimal de la géométrie et de considérations métaphysiques sur l'infini. Celui-ci devient alors seulement <u>une algèbre formelle</u> qui ne se préoccupe pas des problèmes de convergence : c'est une extension de l'algèbre à laquelle sont adjointes deux opérations, différentiation et intégration.

Mais le concept de fonction, trop lié à l'étude analytique des courbes, amène Euler à considérer, dans un premier temps, comme « vraies fonctions » celles qui sont déterminées par une expression analytique unique. S'il introduit ensuite des fonctions qui nécessitent différentes expressions analytiques, il conservera l'idée de l'unicité de l'expression analytique pour définir la continuité. Enfin les problèmes soulevés par le logarithme d'un nombre complexe amènent Euler à distinguer et introduire les notions de fonctions multiformes (plusieurs images) et uniformes ou univoques (une image), qui seules seront retenues par la suite.

Toutefois, la production d'énoncés nouveaux a reporté au siècle suivant l'effort de rigueur et la recherche de fondements qui vont apparaître au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, imposés en particulier par un souci d'enseignement et la volonté de sortir des impasses et des contradictions auxquelles conduisaient les travaux antérieurs.

Cauchy s'oppose au point de vue formel d'Euler et de Lagrange. Il veut donner aux méthodes « toute la rigueur qu'on exige en géométrie » sans recourir « aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre ». Ainsi que Bolzano, il propose une définition de la continuité et des critères de convergence.

> Cauchy : « La fonction f(x) restera continue par rapport à x entre des limites données si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle même. »
> Bolzano : « La différence f(x-w)-f(x) peut être rendue aussi petite que toute grandeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra. »

Mais il manque à ces définitions une rigueur « quantifiable » que Weierstrass va essayer d'apporter par ses travaux. Il préconise et introduit un formalisme arithmétique précis pour l'analyse, mais il a besoin pour cela <u>d'un cadre numérique</u> comportant une théorie rigoureuse des nombres. Sa construction des nombres réels ne reste pas isolée, les travaux de Cantor et Dedekind ont aussi pour but de permettre d'exposer les principes de l'analyse infinitésimale de façon rigoureuse.

I.1.b. L'analyse au lycée : une situation assurée, des approches fluctuantes.

Certes, dans le demi-siècle qui s'achève, l'enseignement des mathématiques en général et de l'analyse en particulier a évolué. Certes, on a vu certaines notions disparaître et d'autres apparaître dans les programmes. Certes, la période des « maths modernes » a modifié en profondeur la conception de l'enseignement des mathématiques en valorisant, dans la pratique de l'enseignant, l'organisation logique du cours, la linéarité de l'exposé. Les conséquences en ont été un recul considérable des démarches expérimentales d'essais-erreurs, des phases de travail inductif, au profit de la déduction considérée comme l' axe du travail mathématique.

Pourtant, au-delà des contenus particuliers et des ruptures diverses, les textes d'accompagnement des programmes, qui expriment les objectifs fondamentaux, ont conservé le même état d'esprit : c'est l'activité des élèves, la mise en œuvre de leur capacité d'observation, d'expérimentation, dans la résolution des problèmes qui constituent le moteur de l'acquisition des savoirs. Posé voici cinquante ans, ce principe retrouve aujourd'hui toute sa valeur et prend d'autant plus de force que le développement des nouvelles technologies permet d'explorer davantage de problèmes et d'aller plus profondément dans ces explorations. Le tâtonnement, l'erreur, la recherche de conjectures prennent une place accrue dans la démarche mathématique et favorisent l'apprentissage des élèves. C'est l'un des points de vue que nous défendons dans cet ouvrage.

Faire des mathématiques

Les instructions générales du 1er octobre 1946 définissent l'objet, l'esprit et les méthodes de l'enseignement des mathématiques dans le second degré. La vision très générale, allant dans le sens de ce qu'on appelle aujourd'hui « la formation de l'homme et du citoyen », permet, dès le premier paragraphe, de donner aux mathématiques enseignées un statut prenant en compte la part de l'expérimentation dans l'apprentissage.

> Et il suffit, sans doute, d'énumérer quelques-unes des tâches essentielles qui incombent à l'enseignement du second degré pour saisir avec évidence l'importance de la discipline mathématique dans la formation intégrale de l'enfant : apprendre à « démêler le vrai du faux, à travers les contradictions des hommes » ; à « examiner toutes choses en les rapportant à leur principe » et à « raisonner sur elles en ne faisant état que des faits bien et dûment constatés » ; à « observer, mesurer, critiquer ses propres observations, en procédant à des vérifications rigoureuses, à des dénombrements complets, à des expériences décisives » ; à « embrasser une question complexe dans son ensemble et à l'analyser dans ses détails, en mettant chaque chose à sa place et sur son plan » ; à « exposer clairement, méthodiquement, objectivement une affaire » ; à « lire un document et à le lire entre les lignes, en en saisissant exactement la signification, la portée, la

> valeur » ; à « exprimer, par la parole et par la plume, tout ce que l'on a à dire, sans rester en deça et sans aller au-delà de sa pensée ».

Cette idée est développée un peu plus loin ; l'auteur du texte, en exposant l'esprit de l'enseignement des mathématiques, oppose la « méthode d'autorité » jugée « absolument étrangère à l'esprit de l'enseignement du second degré » à la méthode « libérale » qu'il définit ainsi :

> Et l'on doit retrouver, à chaque instant, dans une classe bien conduite, la manifestation de ce « libéralisme » : une question étant à résoudre, on acceptera, dans les tâtonnements de la recherche, toute idée raisonnable ; on comparera les démarches possibles ; on montrera comment l'on fixe son choix ; on fera comprendre la nécessité d'une mise au point ; on guidera peu à peu vers une solution harmonieuse et satisfaisante, dont on fera apprécier la valeur.

La méthode préconisée met en évidence deux idées-forces : partir de l'expérience de l'élève et faire une très large part à la résolution de problèmes.

> La participation constante des élèves à l'élaboration du « cours », c'est-à-dire à l'exposé et à l'application des questions nouvelles, sera facile à obtenir si le professeur sait partir de l'expérience accessible à l'enfant, enchaîner les faits dans une progression naturelle, élargir peu à peu le champ des acquisitions, construire logiquement un édifice solide et harmonieux.
> D'ailleurs, une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de « problèmes », depuis le simple exercice d'application proposé pour illustrer un théorème, pour rendre vivante une formule, jusqu'au « devoir », exigeant un effort plus personnel, rédigé hors de la classe et donnant lieu ensuite à un compte rendu précis et détaillé.
> Par là sera éprouvée et pourra être efficacement suivie l'aptitude de chacun à « mettre en oeuvre le savoir acquis », aptitude dont le développement doit être l'un des objets essentiels d'un enseignement de culture.

En janvier 1957, soit 10 ans plus tard, des « instructions complémentaires relatives à l'enseignement des mathématiques » développent l'idée déjà fortement exprimée précédemment : l'observation et l'expérimentation constituent les bases de l'enseignement. Cette explicitation semble suffisamment « moderne » pour que nous ayons transcrit une page entière de ce texte.

> Observation et expérimentation : s'agit-il vraiment d'aligner les mathématiques sur les autres disciplines scientifiques ?
> Il n'est pas douteux qu'au départ, dans l'élaboration de toutes les sciences, les démarches intellectuelles sont du même ordre ; une discrimination intervient après, lorsque le mathématicien, ayant créé des êtres de raison, va s'efforcer d'en étudier les propriétés. Mais son travail n'a de valeur profonde que si sa construction, toute

abstraite qu'elle soit, prend solidement appui sur le réel, si elle est capable de le rejoindre et de s'y adapter dans une large mesure.
N'est-il pas indispensable de faire bien saisir à l'enfant, puis à l'adolescent, les liens étroits qui unissent les mathématiques au monde sensible ? N'est-ce pas là un moyen - l'un des meilleurs sans doute - pour mettre en confiance le débutant, pour éviter qu'il ne se sente très vite rebuté par une étude où il pourrait ne voir, si elle reste privée de toute vraie lumière, qu'une sorte de jonglerie, souvent purement verbale, et sans signification apparente ?
Lors des premières étapes de l'initiation et de l'apprentissage, c'est par l'observation et l'expérimentation que cette liaison peut être réalisée et rendue évidente. Leur rôle apparaît clairement dans la création des êtres mathématiques, munis de leur définition complète. Il n'est pas moindre lorsqu'il s'agit de découvrir certaines de leurs propriétés et, à cette occasion, d'accéder aux voies du raisonnement.
L'observation des faits, des individus, de leur comportement, que les éléments en cause soient concrets ou abstraits, est la première opération, sensorielle et mentale, intervenant dans toute recherche. Mais l'expérimentation, c'est-à-dire une observation de phénomènes volontairement provoqués dans des conditions déterminées d'avance, et non pas imposées de l'extérieur, se présente naturellement à l'esprit actif et curieux comme une espèce de nécessité. Bien entendu, elle ne porte pas obligatoirement sur les objets matériels ; elle peut être, ou devenir, une sorte d'expérimentation figurée, comportant une série de gestes imaginés mais qui seraient effectivement réalisables.
La phase essentielle d'une telle recherche est, bien entendu, celle de l'interprétation des résultats, qui permettra de dégager des conclusions : elle nécessite une analyse qui doit être conduite avec un soin extrême et, en mathématiques, la nature des êtres mis en jeu oblige à prendre des précautions particulières qu'il importe de faire comprendre aux débutants. Car une expérience, quelle qu'elle soit, ne met en jeu que des objets particuliers, en nombre limité : dès lors, même si elle est répétée plusieurs fois en modifiant quelque donnée, elle ne révèle, en toute rigueur, qu'un résultat valable dans telle ou telle condition ; c'est là le premier point qui doit être expliqué et acquis. Vient alors la critique : « les opérations que j'ai réalisées, ou que j'ai imaginées sont-elles conditionnées inévitablement par les situations et par les éléments *particuliers* sur lesquels j'ai travaillé ? » Si oui, les conséquences obtenues n'ont de valeur que pour *ces* situations et pour *ces* éléments ; si non, une nouvelle question se pose, ou plutôt une suite de questions, où l'abstraction devient peu à peu dominante : « Les opérations restent-elles possibles et les résultats restent-ils valables si je modifie certaines données ? Ces modifications sont-elles, à leur tour, assujetties à quelque restriction ? Les résultats restent-ils valables *quelles que soient* ces modifications ? » Ainsi s'organise une réflexion,

> lente et progressive, qui doit accrocher et retenir l'attention, et donner accès aux formes, abstraites et générales, propres à la pensée mathématique.

Il est étonnant de noter, avant même d'entrer dans l'évolution des programmes d'analyse, que l'esprit d'un enseignement des mathématiques faisant place à l'expérimentation, au tâtonnement, participe d'une longue tradition posée en exigence dès la fin de la guerre.

Des contenus en évolution

On ne trouve pas de commentaires ou d'instructions concernant les programmes d'avant 1970. Peut-être parce que les auteurs des programmes estimaient qu'ils se suffisaient à eux-mêmes ou que les professeurs étaient parfaitement formés aux contenus à enseigner. Par contre, les commentaires sont denses au moment de l'introduction des mathématiques modernes.

Limites et calcul différentiel

En 1970, en ce qui concerne le calcul différentiel, les programmes demandent d'introduire en Première : d'abord le développement limité d'ordre 1, puis l'application linéaire tangente d'où on déduit la définition du nombre dérivé. Les raisons de ce choix sont précisées :

> N.B. - Cette nouvelle présentation de la dérivée simplifie les calculs, se rapproche de l'usage des physiciens et se prête aisément à des généralisations ultérieures.

En Terminale, limites et continuité que l'on peut présenter dans n'importe quel ordre sont définies à partir des définitions de Cauchy, c'est à dire par ε et α (les commentaires insistent sur ces écritures). La limite en x_0 se fait en considérant $D_f \cap V^*(x_0)$ (intersection de l'ensemble de définition et d'un voisinage « pointé » de x_0). Les limites infinies, à l'infini, sont des « extensions » de la notion. La continuité en x_0 se fait en considérant $D_f \cap V(x_0)$ (intersection de l'ensemble de définition contenant x_0 et voisinage de x_0). De nombreuses propriétés (l'unicité de la limite par exemple) doivent être démontrées alors qu'on les admettait jusqu'ici. La notion de différentielle avait fait une courte apparition entre 1965 et 1971. A cette même date, l'enseignement du théorème de Rolle disparaît. Les compétences attendues sont : le raisonnement « a fortiori » et le traitement algébrique des limites.

De 1981 à 1985, les instructions suggèrent une approchent plus quantitative et expérimentale de la notion de limite. La notion de limite en $x_0 = 0$ est présentée dès la classe de première par encadrement de la fonction à étudier à partir des fonctions de référence (ce terme sera utilisé dans des instructions ultérieures), on insiste sur une vision graphique (la courbe peut être enfermée dans ...). C'est l'époque de la « limite 0 en 0 », des fonctions de références et des fonctions associées. Les limites infinies à l'infini, sont des « extensions » de la notion. Les compétences attendues sont : savoir encadrer localement une fonction donnée, savoir traiter algébriquement les limites (en terminale). La continuité est le cas particulier où la limite finie en x_0 est égale à $f(x_0)$.

A partir de 1985, la notion de continuité devient centrale et est admise pour toute une classe de fonctions, leur limite en x_0 est alors évidente : $f(x_0)$. La limite pour une fonction non définie en x_0 s'obtient par les théorème sur les limites (limite d'une somme…) ou en considérant le prolongement continu de f en x_0. L'introduction des limites en première est souvent perçue comme un pensum puisque en terminale les problèmes de limites se ramèneront à un traitement algébrique de l'expression de f(x). Les limites à l'infini sont des « extensions » de la notion. Les compétences attendues sont : manipulation des restrictions / prolongements, traitement algébrique des limites.

Depuis 1990, les limites sont abordées en première par les limites à l'infini, à travers des exemples. Les représentations graphiques illustrent la notion ; d'ailleurs on ne parle plus depuis la réforme de 1985 de définition ni de notion mais de « langage des limites ». Seul le problème de la limite de la fonction ln en $+\infty$ nécessiterait un retour à LA définition de la limite infinie en $+\infty$. Pour une fonction définie en x_0 , la limite, si elle existe, ne peut être que $f(x_0)$. La continuité n'apparaît qu'en terminale et est une « commodité » d'énonciation avant de disparaître en 1998.

Les suites : une entrée discrète derrière le calcul différentiel

Malgré l'aspect très théorique du cours sur le calcul différentiel, toute cette période se caractérise par une absence d'étude des phénomènes discrets. En 1962 le terme de « suite » n'est pas utilisé. Les « progressions arithmétiques et géométriques » constituent le paragraphe 7 du titre « Arithmétique ».

> 7° *Progressions arithmétiques, progressions géométriques*. Définition ; calcul de la somme d'un nombre fini de termes.

En 1965, les suites sont placées dans le chapitre sur l'étude de quelques fonctions numériques. Pas de statut particulier pour les suites : ce sont des fonctions parmi d'autres. On n'envisage que le cas particulier des suites arithmétiques et géométriques.

> V. Étude de quelques fonctions numériques
> 1° Suites. Suite arithmétique , définie par la relation de récurrence $u_n=u_{n-1} + r$; expression de u_n en fonction de n ; calcul de la somme des n premiers termes.
> Suite géométrique définie par la relation de récurrence $u_n = qu_{n-1}$; expression de u_n en fonction de n ; calcul de la somme des n premiers termes, étude de cette somme quand n tend vers l'infini.

Et en 1971, une simple ligne, intercalée entre les fonctions puissances et circulaires.

> 3. Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

Il faudra attendre le programme de 1982 pour voir en classe de Première une véritable introduction des suites avec, par exemple, l'utilisation de majorations pour démontrer une convergence. Ce chapitre à part entière est placé, ce n'est pas par hasard, en tête des programmes.

En 1982, le théorème de Rolle, disparu dix ans plus tôt, revient, mais le but est d'introduire les inégalités des accroissements finis rendues nécessaires par l'étude de la convergence des suites récurrentes.

> g) Accroissements finis :
> Énoncé sans démonstration du Théorème de Rolle : interprétation géométrique.
> Pour une fonction f continue sur [a ; b], dérivable sur]a ; b[:
> si la fonction dérivée f' a ses valeurs comprises entre les réels m et M,
> alors on a $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$;
> si la fonction dérivée f' admet au point a une limite ℓ, alors on a également
> $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. Extension a une limite finie.

Cependant, le commentaire précise que l'introduction aux accroissements finis peut se faire de deux manières, dont l'une est le théorème de Rolle. Ce qui prépare l'abandon de ce dernier dans les versions suivantes.

À cette même époque, dès la classe de Première, l'étude des suites prend de l'ampleur et l'idée de majoration et d'encadrement devient dominante. Le commentaire du programme utilise le mot « curiosité » qu'il associe déjà à l'usage de calculatrices (qui ne sont pas encore graphiques mais déjà programmables).

> I. a) Le programme propose de s'intéresser, dans l'étude d'une suite, aux différences entre termes consécutifs ou aux rapports entres ces termes. C'est en premier lieu pour faire apparaître assez naturellement les suites arithmétiques et géométriques. Mais on ne se privera pas d'avoir les mêmes **curiosités dans des situations d'accès facile avec une calculatrice**, par exemple dans les itérations $u_{n+1} = \cos u_n$ ($u_0 = 0$) ; $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ ou $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$. On enrichira ces expériences de quelques cas de divergence.
> Dans tous les cas étudiés l'expérimentation doit être conjuguée avec l'obtention théorique de majorations et d'encadrements, qui permettront de confirmer ou d'infirmer les conjectures issues de l'expérimentation, de contrôler les algorithmes utilisés, de comparer leurs performances et d'apprécier la pertinence des moyens de calculs. On entraînera les élèves, devant un problème à résoudre, à construire un algorithme et à l'exprimer clairement.

Au même moment, les commentaires de Terminale insistent sur le double aspect des problèmes tant sur les suites que sur les fonctions : l'aspect qualitatif et l'aspect quantitatif.

Le calcul intégral ne manque pas d'aires

L'apparition du calcul intégral dans l'enseignement secondaire a précédé de peu celle des suites : en 1962, le dernier paragraphe d'un titre V intitulé « Généralités sur les fonctions d'une variable réelle » introduit la notion de primitives d'une fonction continue, en admettant son existence. Aucun élément de calcul intégral n'apparaît, sauf la lecture inverse d'un tableau de dérivées. Le mot « intégrale » ne figure pas dans le programme, le symbole « $\int$ » n'est pas utilisé.

> 8° *Fonctions primitives.* Définition d'une fonction primitive d'une fonction (on admettra l'existence d'au moins une primitive pour toute fonction continue). Relation entre deux primitives d'une fonction sur un même intervalle ; existence d'une primitive unique prenant, en un point donné de l'intervalle de définition, une valeur fixée.
> Exemples de primitives déduites de la connaissance des dérivées de quelques fonctions usuelles ; en particulier : primitive d'un polynôme, de $\frac{1}{x^n}$ (n entier supérieur à 1), de sin (ax + b), de cos (ax + b).
> 9° *Application des primitives au calcul d'aires et de volume.* (Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume. On admettra l'existence et les propriétés des aires et des volumes dont le calcul est demandé ici).
> Aire d'un domaine plan limité par un arc de la courbe représentative, relative à un repère cartésien orthonormé, d'une fonction f(x) continue (on pourra se borner au cas d'une fonction monotone), positive ou nulle, par l'axe des abscisses, et par deux « ordonnées », l'une fixe, l'autre variable (abscisse x) ; cette aire représente une primitive de la fonction donnée. Convention de signes pour la définition de l'aire lorsque le fonction donnée n'est pas toujours positive ou nulle. Application à des calculs d'aires planes.

En 1967, on introduit les notations aujourd'hui usuelles, on démontre le lien entre aire et primitive pour une fonction positive.

> 7° *Fonctions primitives.* Définition d'une fonction primitive d'une fonction (on admettra l'existence d'au moins une primitive pour toute fonction continue). Relation entre deux primitives d'une fonction sur un même intervalle ; existence d'une primitive unique prenant, en un point donné de l'intervalle de définition, une valeur fixée.
> Exemples de primitives déduites de la connaissance des dérivées de quelques fonctions usuelles ; en particulier : primitive d'un polynôme, de $\frac{1}{x^n}$ (n entier supérieur à 1), de sin (ax + b), de cos (ax + b).
> Notation $\int f(x)\,dx$.

> 8° *Application des primitives au calcul d'aires et de volume.* (Aucune difficulté ne sera soulevée au sujet des notions d'aire et de volume. On admettra l'existence et les propriétés des aires et des volumes dont le calcul est demandé ici).
> Aire d'un domaine plan défini dans un repère orthonormé par les relations $a \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq f(x)$, f étant une fonction continue positive ; cette aire est la valeur F(X) de la fonction primitive de f qui s'annule pour X = a (on pourra se borner pour la démonstration au cas où f est monotone) ; extension à X < a et à une fonction f négative. Application à des calculs d'aires planes.
> Notation $\int_a^b f(t)\,dt$.

À partir de 1971, le point de vue est profondément modifié : les sommes de Riemann permettent de définir l'intégrale dont on démontre l'existence au moins pour des fonctions monotones. Le calcul intégral précède l'application aux aires et volumes, il devient un chapitre à part entière.

> IV. CALCUL INTÉGRAL
>
> 1. Définitions des sommes de Riemann d'une fonction numérique d'une variable réelle sur un intervalle fermé, borné. Existence de l'intégrale pour une fonction monotone ; notation $\int_a^b f(t)\,dt$; premières propriétés. On admettra que ces propriétés s'étendent à des fonctions continues, ou monotones par morceaux.
> Moyenne d'une telle fonction sur un intervalle fermé, borné. Lien avec le dérivation en des points ou la fonction est continue.
> Primitives ; ensemble des primitives ; égalité $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, f étant continue sur [a ; b] et admettant F pour primitive. Calcul de primitives ; intégration par parties.
> 2. On énoncera, sans démonstration, les propriétés des aires dont l'existence est admise ici (additivité, unité d'aire...)
> Application du calcul intégral à l'évaluation de l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $a \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq f(x)$; f étant une fonction positive monoione par morceaux, puis une fonction positive continue.
> Extensions à b < a et à une fonction négative.
> 3. * Applications géométriques, mécaniques, physiques etc. (calcul de volume, masses, moments d'inertie ; vitesse et distance parcourue ; intensité et quantité d'électricité ; puissance et énergie, etc.).
> Valeur efficace d'un phénomène périodique.
> (Le paragraphe IV.3 ne fait pas partie - voir Préambule, a - du programme des épreuves de mathématiques du baccalauréat).

Ce dernier paragraphe fera l'objet en 1975 d'un « allégement ».

Le programme de 1982 sur le calcul intégral perd quelques unes de ses constructions théoriques (exit les sommes de Riemann) mais est enrichi par des techniques et des problèmes jusqu'ici ignorés.

> En d'autres termes, $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est donc l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 au point a.
>
> On traitera les questions suivantes :
>
> Relation de Chasles (additivité par rapport aux intervalles) :
>
> Linéarité par rapport aux fonctions ;
>
> Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \ge 0$;
>
> Changement de variable affine ;
>
> Intégration par parties.
>
> Exemples d'études d'une fonction de la forme $x \to \int_a^x f(t)\,dt$, où f n'a pas de primitive explicitée.
>
> b) Obtention d'une valeur approchée d'une intégrale : on exposera seulement le méthode des rectangles, avec une majoration du reste ; on en déduira une interprétation de la valeur moyenne d'une fonction comme limite d'une suite.

Les textes récents

Avec les programmes suivants, les commentaires présentés en regard des contenus ainsi que le « chapeau introductif » de chaque chapitre permettent une lecture plus précise des exigences et des restrictions.

Ainsi, en ce qui concerne les programmes de Première et Terminale, un « exposé des motifs », en préambule, précise l'esprit général de l'enseignement. La comparaison avec les anciens textes de 1946 et 1957 peut être intéressante. Par delà leur formulation plus « scientifique » sous forme d'objectifs à atteindre, qui s'oppose aux textes lyriques du milieu du siècle, on y retrouve le même état d'esprit : la place prépondérante de l'activité scientifique par la découverte et la résolution de problèmes (30 juin 1994).

> **2. Objectifs et fonctions des différents types d'activité**
>
> a) Organisation du travail de la classe
>
> Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
>
> - Entraîner les élèves à **l'activité scientifique** et promouvoir **l'acquisition de méthodes** : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte, d'exploitation de situations**, de **réflexion** et de **débat** sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de **synthèse** dégageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.
>
> - Développer les **capacités de communication** : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...).

Dans cette perspective, la **résolution de problèmes** et **l'étude de situations** occupent une **part importante** du temps de travail. En particulier, il convient d'articuler la mise en place de contenus nouveaux avec l'étude de situations assez riches, qui peuvent, selon les questions étudiées, servir de motivation, fournir des secteurs d'intervention, ou constituer le support même pour cette mise en place. La **synthèse**, qui constitue le cours proprement dit, est **indispensable** mais doit être **brève** ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

Bien entendu, le choix d'une stratégie pour la mise en place de notions, de résultats et d'outils nouveaux ne saurait être uniforme : l'analyse des concepts à étudier et de leur articulation avec le champ des problèmes à résoudre, les acquis antérieurs des élèves, la simplicité, l'efficacité... sont autant de facteurs à prendre en compte.

Les objectifs propres à chaque partie du programme sont indiqués avec assez de précision pour définir l'état d'esprit dans lequel son enseignement doit être envisagé. Il est à noter qu'aucune modification n'est intervenue entre les versions de 1994 et de 1998 concernant l'exposé des motifs, l'organisation du travail, la présentation du programme, les objectifs et capacités à l'exception de l'introduction des calculatrices graphiques en Terminale.

4 - Emploi des calculatrices programmables ou ordinateurs de poche

L'emploi des calculatrices programmables ou ordinateurs de poche en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique. Les élèves doivent savoir utiliser leur matériel personnel dans les situations liées au programme de la classe. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres ;
- savoir utiliser les commandes des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir faire effectuer le calcul des valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces commandes ;
- savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction ;
- savoir recourir à une instruction séquentielle ou conditionnelle et, en classe de terminale, à une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt.

Il est conseillé de disposer d'un modèle dont les caractéristiques, notamment graphiques, répondent aux spécifications et aux objectifs précédents et comportant en vue de l'emploi dans les autres disciplines et dans les études supérieures, les fonctions statistiques (à une ou deux variables).

Voici la partie essentielle du texte concernant les objectifs et capacités repris en 1998.

IV. OBJECTIFS ET CAPACITÉS VALABLES POUR L'ENSEMBLE DU PROGRAMME

(Note de service n° 94-192 du 30 juin 1994)

1. Représentation graphiques

Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de **donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés** dans les différentes parties du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique. Plus largement, on développera une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation.

2. Problèmes numériques

Les **problèmes et méthodes numériques** sont largement exploités, car Ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à **combiner l'expérimentation et le raisonnement** en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.

3. Problèmes algorithmiques

Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur **les aspects algorithmiques** des problèmes étudiés (approximation d'un nombre à l'aide de suites, recherche de solutions approchées d'une équation numérique, calcul de valeurs approchées d'une intégrale, représentation graphique d'objets définis géométriquement ou analytiquement, résolution de systèmes linéaires, dénombrements associés à des situations combinatoires...). On explicitera ce type de démarche sur **quelques exemples simples** ; construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leurs performances pour le traitement d'un même problème ; mais **aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible des élèves.**

4. Emploi des calculatrices

L'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de **contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique**.

7. Formation scientifique

Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en oeuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de progression. **On se gardera donc de toute formalisation excessive**, aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le **vocabulaire** et les **notations** ne sont pas imposés a priori ; ils s'introduisent en cours d'étude selon un critère d'utilité.

Par delà les ruptures diverses de contenus depuis quarante ans et le recul temporaire de l'observation et de l'expérimentation lié à l'exigence d'abstraction de la période des « maths modernes », l'activité des élèves, les démarches expérimentales dans l'enseignement des mathématiques apparaissent comme un principe (au moins dans les textes !) que nous souhaitons, par cet ouvrage, contribuer à mettre en actes.

I.1.c. Mathématiques et outils de calcul : une influence réciproque.

L'apparition de nouveaux outils de calcul modifie profondément l'enseignement des mathématiques[1]. Mais les mathématiques elles-mêmes évoluent sous l'effet des ordinateurs et de l'informatique. Cette interaction constante peut être source d'enrichissement aussi bien pour les mathématiques elles-mêmes que pour leur enseignement.

En ce qui concerne l'enseignement, une des conséquences essentielles de cette interaction constante est la possibilité qui est ainsi donnée de faire des mathématiques plus expérimentales, de multiplier les exemples, de pouvoir faire des conjectures.

Des mathématiques qui évoluent

Qu'il s'agisse d'ordinateurs ou de calculatrices, et en particulier de celles dotés d'un logiciel de calcul symbolique, on peut recenser les principales influences de ces outils sur les mathématiques.

- 1. Au niveau du calcul.

La possibilité de calculer plus vite modifie complètement les approches numériques que l'on pouvait avoir. Toutefois, les ensembles de nombres sur lesquels « travaillent » les calculateurs n'ont vraiment plus grand chose à voir avec les ensembles classiques (cf. Chap. I.2.a). Mais en raison d'erreurs d'arrondis, même un puissant ordinateur peut donner des résultats « faux ». De nombreuses recherches essayent de mettre au point des systèmes de représentation des nombres mieux adaptés[2].

Quant aux possibilités de calcul formel qui se développent, si certaines opérations « simples » sont maîtrisées jusqu'à un certain point, elles ouvrent un champ de recherche important en ce qui concerne l'étude et la mise au point d'algorithmes complexes portant sur des symboles.

- 2. Au niveau des graphiques.

La visualisation de phénomènes selon un mode discret indissociable des écrans graphiques permet de trouver de nouveaux résultats et d'interroger les liens entre l'image écran obtenue et l'objet représenté. Si déjà les visualisations de fonctions usuelles peuvent illustrer les propriétés de ces fonctions, des systèmes performants pour la visualisation des surfaces ont également permis des découvertes et la visualisation d'itérées de fonctions complexes a aussi permis de relancer l'intérêt pour les courbes fractales. Ceci a entraîné un développement des théories « discrètes » que l'on cherche ensuite à généraliser à des phénomènes continus.

---

[1] *[Cornu, 1992].*
[2] *[Muller, 1995].*

- 3. Au niveau de la preuve.

Les ordinateurs peuvent aussi être dans certains cas des outils pour la démonstration. C'est dans le cadre de la recherche en « Intelligence Artificielle » que sont testées ces possibilités. Les ordinateurs peuvent initier des raisonnements « simples », mais aussi réaliser certaines parties de démonstration, des calculs par exemple portant, soit sur de très grands nombres, soit sur un nombre important de cas particuliers[1]. Le concept de preuve a ainsi évolué ; il a fallu renoncer à l'idée que tout devait obligatoirement être fait « à la main », ou contrôlé de bout en bout par une même personne.

- 4. Au niveau des algorithmes.

Mais, par ailleurs, afin de développer de telles preuves, il est devenu nécessaire de trouver des algorithmes performants qui font gagner du temps aux processus de calcul et limitent le temps machine lorsque beaucoup d'opérations sont en jeu. La recherche de tels algorithmes a entraîné le développement des études sur les algorithmes eux-mêmes qui deviennent ainsi à leur tour « objets » mathématiques. C'est « l'algorithmique » qui a trouvé sa place dans la recherche mathématique.

- 5. Au niveau de l'expérimentation.

Sous l'influence de ces outils, les mathématiques peuvent devenir une activité plus expérimentale : le mathématicien a parfois la possibilité de tester sur des exemples un phénomène, il peut établir des conjectures, faire des hypothèses et essayer de valider ensuite celles-ci.

Si dans un premier temps, l'ordinateur est apparu comme un outil que les mathématiciens pouvait utiliser, l'informatique demande maintenant aux mathématiciens de résoudre certains problèmes.

Un enseignement qui se cherche

Dans les classes, et particulièrement au lycée pour ce qui nous concerne, les élèves sont plus fréquemment confrontés à l'emploi de calculatrices graphiques et symboliques qu'à l'utilisation d'un ordinateur. En terme de coût, d'encombrement, de disponibilité permanente et individuelle, c'est un outil « assez facilement accessible » qui se généralise de plus en plus.

Mais des questions se posent.

- Qu'est-ce qu'apprendre les mathématiques avec de tels instruments : doit-on enseigner des outils, des méthodes, des résultats, une façon de raisonner, des techniques ?

---

[1] *L'exemple le plus célèbre est celui du théorème des 4 couleurs où 1482 cas différents devaient être traités. La communauté mathématique a accepté la démonstration faite à l'aide d'un ordinateur après de longs débats.*

- Comment gérer efficacement ces outils : quelles connaissances sont nécessaires (car il n'y a qu'une correspondance illusoire entre leur interface et les concepts mathématiques en jeu) pour en faire des instruments d'apprentissage pour l'élève et des moyens d'enseignement pour le maître ?
- Comment ces connaissances interagissent-elles sur les connaissances proprement mathématiques et quels effets ont-elles sur les représentations des élèves ?

Nous pensons qu'essentiellement leur rôle est de promouvoir (et permettre de faire) des mathématiques avec un autre état d'esprit, plus expérimental, comme ce serait le cas avec un ordinateur plus complexe. D'ailleurs les programmes officiels se font l'écho de plus en plus de cette intégration nécessaire et de cet état d'esprit (voir le chap. I.1.b).

Toutefois la grande diversité de produits informatiques :

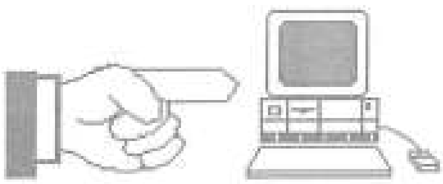
- logiciels (calcul et calcul symbolique, tableurs, graphiques, géométriques..) ;
- didacticiels (exercices interactifs...) ;
- langages de programmation ;

et les différentes utilisations qui peuvent en être faites en classe

- illustration d'un cours ;
- aide à la résolution d'exercices ;
- recherche de problèmes ;

même si elles sont source d'enrichissement et peuvent faciliter le travail individuel, l'activité propre des élèves et contribuer ainsi à la construction de leurs connaissances, posent des problèmes de gestion de la classe, du temps... Dans l'activité des élèves, différentes situations devront se combiner : ordinateur / tableau noir, ordinateur / recherche individuelle, ordinateur / ressource.

Ainsi utiliser et exploiter en classe ces outils suppose une prise en compte par les enseignants des possibilités qui sont données mais aussi des problèmes spécifiques qui leur sont liés afin de cerner au mieux les difficultés des différents apprentissages.



I.2. Travailler en environnement « calculatrices symboliques »

I.2.a. Le matériel.

L'intégration des calculatrices graphiques et symboliques dans le cours ne doit pas s'entendre comme la simple autorisation d'utilisation, mais plutôt comme une possibilité supplémentaire de construction des savoirs[1] . Pour notre conception de l'intégration, la calculatrice est une référence dans le discours du professeur, dans les débats dans la classe, dans le questionnement des élèves.

Cet environnement d'apprentissage des mathématiques peut conduire à des démarches expérimentales dont se prévalent d'autres matières, les textes des programmes soulignent l'intérêt de telles démarches.

La présence d'un support informatique à la science mathématique nécessite une transposition[2]. Lors de cette transposition des mathématiques vers l'informatique surviennent d'inéluctables perturbations. Ces perturbations vont façonner chez les élèves et avec une autorité qui semble liée aux performances de la calculatrice, des savoirs qui vont, à terme ou instantanément, entrer en conflit avec les savoirs enseignés par le professeur.

Une prise de conscience et une connaissance de ces problèmes de transposition nous semble donc nécessaire en vue d'une intégration maîtrisée par le professeur et contrôlée par les élèves.

La représentation des nombres

Les problèmes soulevés par la représentation des nombres sont sûrement parmi les plus anciens sinon les plus notoires. Pour notre point de vue, celui de la pédagogie des mathématiques, nous distinguerons deux cas : la « représentation par troncature » et la « représentation symbolique ».

Sans prétendre être exhaustif, nous détaillerons « une représentation par troncature » telle qu'elle est faite dans la TI-81 (calculatrice graphique de Texas Instrument). Les représentations en « virgule flottante » utilisées dans la génération des calculatrices non formelles et les langages classiques (PASCAL...) relèvent du même concept.

La « représentation symbolique » que l'on trouve sur la TI-92 81 (calculatrice symbolique et graphique de Texas Instrument) à travers le mode **exact**, coexiste avec une « représentation par troncature », c'est le mode **approx** (que l'on obtient par exemple à l'aide des commandes ◊ $\boxed{\text{enter}}$). Cette cohabitation génère quelques situations paradoxales que nous essayerons d'analyser.

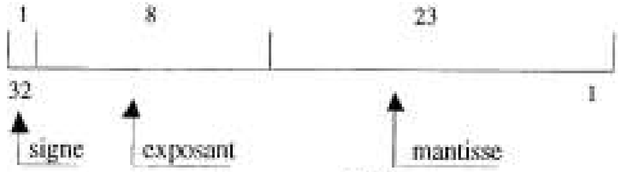
---

[1] *[Trouche, 1996].*
[2] *[Balacheff, 1994].*

La représentation par troncature

Principe

Certaines représentations des nombres réels dans un ordinateur s'appuient sur un codage binaire. Il existe plusieurs formats, on peut citer la norme IEEE utilisée par le langage PASCAL où un réel x est représenté sur quatre octets selon le schéma :



$$x = (-1)^{\text{signe}} \times 2^{(\text{exposant} - 127)} \times (1+\text{mantisse})$$

Exemple : +1,0117875 est représenté par : 1 01110111 00000000000000100000011
signe exposant mantisse

D'autres formats existent, utilisant 8 ou 16 octets (ou plus), permettant une plus grande précision. Certains programmes produisent des représentations de réels avec une précision adaptable par l'utilisateur (*Derive* ...).

En fait, les processeurs des ordinateurs actuels optimisent ces transformations d'écriture.

Dans les calculatrices, le codage interne des réels se fait selon un codage DCB (Décimal Codé Binaire) après une mise sous forme « scientifique » (*signe | mantisse [[1;10[| exposant de 10*) où chaque chiffre est codé sur quatre bits.

Exemple : pour les TI-81 les nombres sont représentés sur 8 octets.

$$1.\ 34201\ 10^{-15}$$

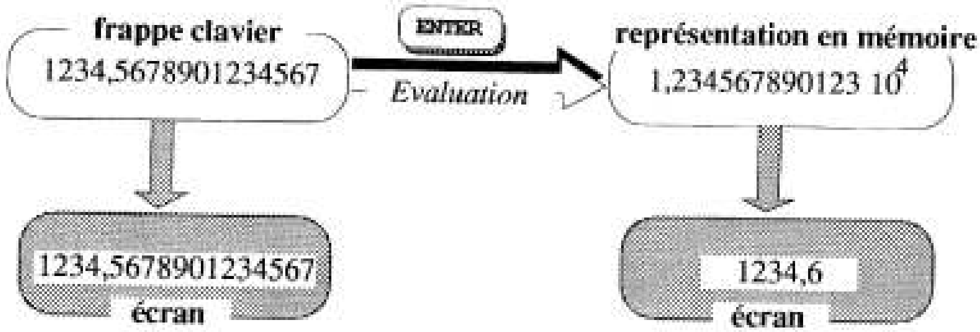
Ceci nous donne 13 chiffres significatifs et une plage d'exposants allant de -99 à 99.

Cette représentation n'est certes pas optimale au sens des théories de l'information mais le codage[1] est nettement plus immédiat que celui exposé plus haut et vraisemblablement mieux adapté aux processeurs des calculatrices.

D'autre part, il convient de ne pas confondre la représentation d'un nombre à l'écran et sa représentation en mémoire, en particulier l'affichage d'un nombre contenu en mémoire dépend du format d'affichage qui est souvent adaptable par l'utilisateur.

---

[1] *C'est le travail de « l'interpréteur », programme qui saisit les symboles affichés et remplit une zone mémoire avec le nombre dans un format donné.*



<u>Les nombres représentables par une calculatrice</u>

Dans le cas d'une représentation par troncature décimale fixe (type IEEE ou DCB), le nombre d'octets dédiés à l'exposant et à la mantisse va définir le champ des décimaux représentables. Cet ensemble de décimaux représentables est bien sûr fini et ne saurait être un intervalle (même borné) de $\mathbb{D}$ (vu le cardinal d'un tel intervalle).

On peut d'ailleurs majorer le cardinal de l'ensemble des nombres représentables sur la TI-81. On dispose de 15 demi octets soit une « quinze-liste » dont les éléments sont pris dans {0000 ; ... ; 1001}(c'est à dire {0; ... ;9}). On a ainsi 10^{15} éléments. Or il y a deux signes différents pour l'exposant et la mantisse : il y a **au plus** 4.10^{15} nombres représentables par la TI-81. Ce nombre est-il atteint ? C'est ce que nous allons voir...

Les nombres représentables constituent une suite finie. Dans le cas de la TI-81 la suite des positifs se présente comme une « progression arithmétique par morceaux » :

u_0 0

u_1 1.10^{-99} {Tout nombre positif inférieur est interprété comme 0}

u_2 $1{,}000\,000\,000\,001.10^{-99}$ {13 chiffres significatifs}

... *puis par pas de* $0{,}000\,000\,000\,001.10^{-99}$ *jusqu'à* :

u_i $9{,}999\,999\,999\,999.10^{-99}$

u_{i+1} 1.10^{-98}

... *puis par pas de* $0{,}000\,000\,000\,001.10^{-98}$ *jusqu'à* :

u_j $9{,}999\,999\,999\,999.10^{-98}$

u_{j+1} 1.10^{-97} {puis pas de $0{,}000\,000\,000\,001.10^{-97}$}

— —

u_k $9{,}999\,999\,999\,999.10^{-1}$

u_{k+1} 1 {puis pas de $0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$}

... .

u_l $9{,}999\,999\,999\,999.10^{11}$

u_{l+1} 1.10^{12} {puis un pas de $0{,}000\,000\,000\,001.10^{12} = 1$}

u_m $1{,}234\,567\,890\,123.10^{52}$ {le suivant s'obtient en incrémentant de 1.10^{52-12}}

....

u_n $9{,}999\,999\,999\,999.10^{99}$ {le plus grand nombre représentable}

La suite obtenue avec les nombres négatifs est symétrique. La totalisation (calcul laissé au lecteur...) donne 3 582 000 000 000 001 nombres représentables par la TI-81. On n'atteint pas le nombre maximum d'éléments, évalué ci-dessus à 4.10^{15}. En effet, cette évaluation avait conduit à compter plusieurs fois des nombres égaux (par exemple $0{,}9.10^{-3}$ et 9.10^{-4}).

Conséquences

Quelle que soit la représentation (DCB, virgule fixe, flottante ou précision « infinie ») ou le logiciel utilisant ce type de représentation, celle-ci produit :

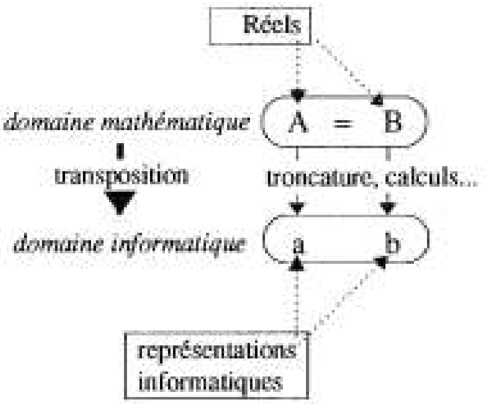
- un ensemble qui est une suite finie de décimaux et limite ainsi le concept de nombre réel aux éléments de cet ensemble ;
- une perte des propriétés usuelles de $\mathbb{D}$: en particulier associativité, distributivité et régularité font défaut . En effet :

9,999 999 999 999 $\text{EE}^{11} \neq 1\ \text{EE}^{12}$. En ajoutant 0,1 à chacun de ces nombres, on obtient une égalité : $1\ \text{EE}^{12} = 1\ \text{EE}^{12}$ (pour le mettre en évidence, il faut faire attention aux calculatrices qui, cachant quelques chiffres significatifs, se permettent d'arrondir l'affichage) :

(1,000 000 000 001 + 9) - 10 donne 0 ;

alors que 1,000 000 000 001 + (9 - 10) donne $1\ \text{EE}^{-12}$.

Dans une machine utilisant des troncatures pour la représentation des réels, le traitement de l'égalité de deux réels suit le schéma ci-contre :



Ainsi, la réponse :

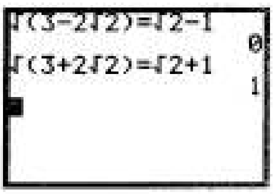
true (= 1) : indique que les représentations sont identiques ;

false (= 0) : indique que les représentations diffèrent.

Nous notons que : $A = B \not\Rightarrow a = b$

$a = b \not\Rightarrow A = B$

Dans cet exemple (TI-82), les représentations de $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et de $\sqrt{2} - 1$ diffèrent d'où la réponse 0 (« faux ») au test d'égalité alors que celles de $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ et de $\sqrt{2} + 1$ coïncident comme l'exprime la réponse 1 (« vrai »).



Lors de l'évaluation de $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, on a :

3[14 chiffres significatifs] - $2\sqrt{2}$ [≈2,8...14 chiffres significatifs] =

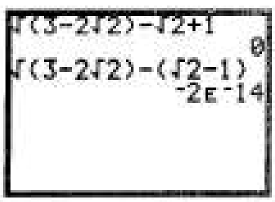
3 - $2\sqrt{2}$ [≈1,71...13 chiffres significatifs] puis algorithme de calcul de la racine :

[$4{,}4142...10^{-1}$ avec 14 chiffres significatifs].

Lors de l'évaluation de $\sqrt{2} + 1$, on a :

algorithme de calcul de $\sqrt{2}$ [1,414...14 chiffres significatifs] - 1

[1,414...14 chiffres significatifs] = [$4{,}4142...10^{-1}$ avec 13 chiffres significatifs].



Pour les mêmes raisons de troncature, une modification des priorités de calcul entraînera les deux résultats différents ci-contre.

En fait l'ordre des opérations peut donner un résultat intermédiaire qui se trouve dans une autre « tranche » de la progression évoquée précédemment et faire ainsi perdre des chiffres significatifs.

Remarque

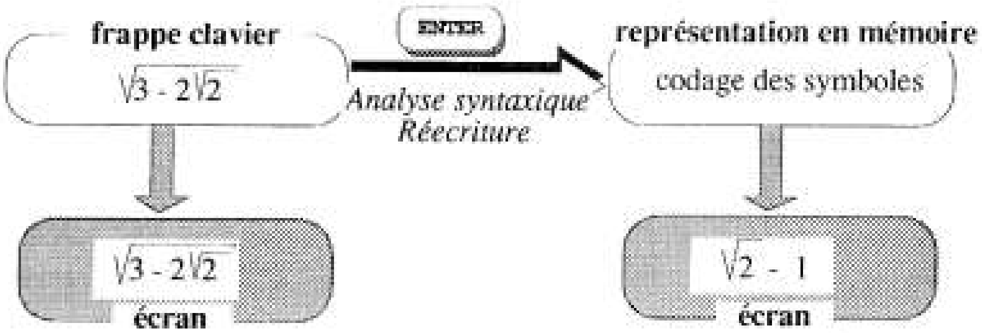
Pour les logiciels qui autorisent une représentation des nombres sur une quantité d'octets fixée par l'utilisateur (l'option : « précision infinie »), les limites seront imposées par la taille mémoire de la machine et les même lacunes vont apparaître.

Certains calculateurs permettent le calcul fractionnaire, la structure de la suite sera alors nettement plus élaborée mais on retrouve inexorablement les mêmes limitations vu que le calcul fractionnaire se ramène à un algorithme utilisant des opérations entre entiers.

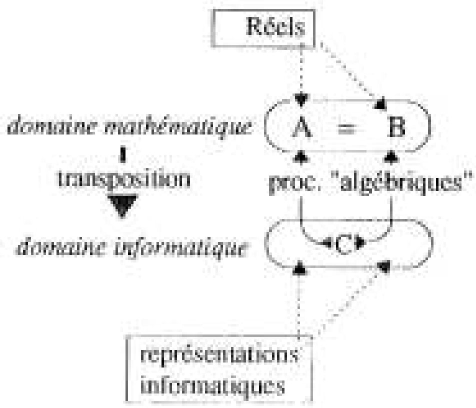
La représentation formelle

Depuis quelques années, des logiciels traitant formellement les nombres et les symboles (MATHEMATICA, DERIVE...) sont largement diffusés. Texas Instruments, Hewlet-Packard puis Casio ont implanté des logiciels de ce type sur des calculatrices « grand public ».

La représentation en mémoire d'un réel correspondra au codage d'un ensemble de symboles issus d'une analyse syntaxique de ce qui a été frappé au clavier (analyse qui vérifie de plus la validité syntaxique de ce qui est frappé), une réécriture sous une forme « privilégiée » est ensuite renvoyée sur l'écran.



Le traitement de l'égalité de deux réels en mode exact suit le schéma ci-contre :
les réels A et B seront reconnus comme égaux si et seulement si un enchaînement de procédures de réécriture a pu réduire A en B (ou B en A) (ou A et B en C).
En l'absence d'une représentation canonique, cet enchaînement peut se modéliser en la recherche d'un chemin dans un graphe, recherche qui échappe à tout contrôle de l'utilisateur.

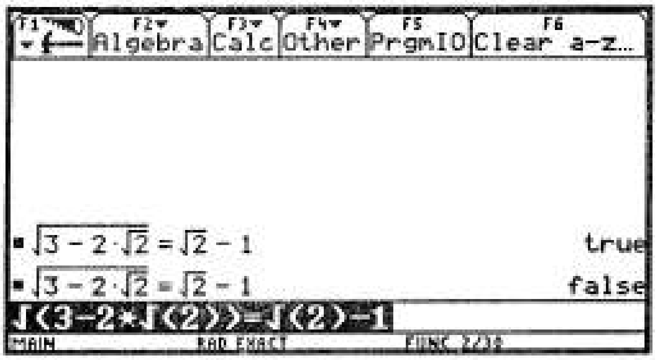


Dans la TI-92, les deux modes coexistent. C'est le mode **approx** (ou via la combinaison ◊ [enter]), qui permet d'obtenir une représentation par troncatures, le mode **exact** permet lui d'obtenir une représentation symbolique des réels entrés au clavier. Ces deux modes sont confrontés dans les quelques situations qui suivent.

Situation 1

mode exact ———>

◊ [enter] ———>

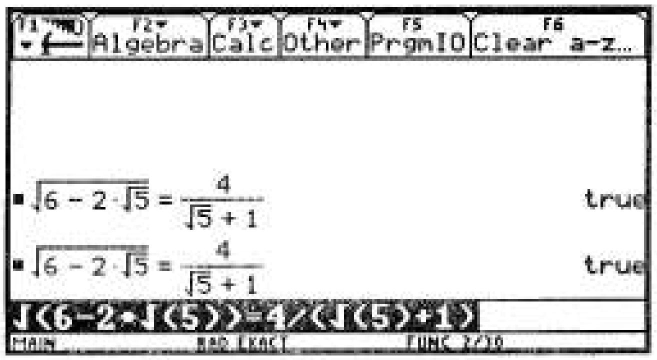


- En mode **exact**, les programmes de traitement algébrique ont trouvé un chemin de $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ jusqu'à $\sqrt{2} - 1$, d'où la réponse « true » ;
- En mode **approché** (◊ [enter]), les représentations de $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2} - 1$ sont différentes, il y a eu des troncatures *fatales* d'où la réponse « false ».

Situation 2

mode exact ———>

◊ [enter] ———>



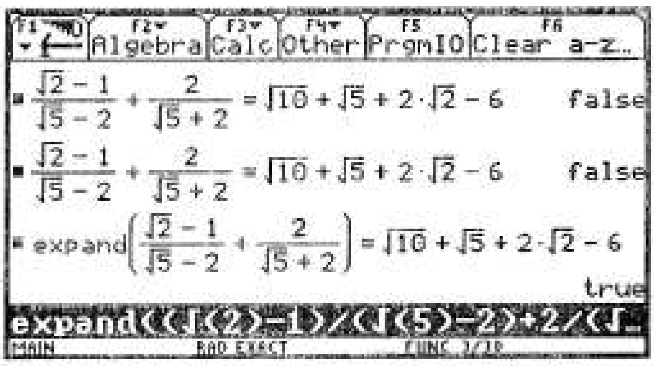
- En mode **exact**, les programmes de traitement algébrique ont trouvé un chemin de $\sqrt{6- 2\sqrt{5}}$ à $\frac{1}{\sqrt{5} + 1}$ (via $\sqrt{5}$ -1 ?) d'où la réponse « true » ;
- En mode **approché** (◊ [enter]), les représentations de $\sqrt{6- 2\sqrt{5}}$ à $\frac{1}{\sqrt{5} + 1}$ sont identiques, il y a eu des troncatures *bénignes* .

Situation 3

mode exact ———>

◊ [enter] ———>

mode exact ———>



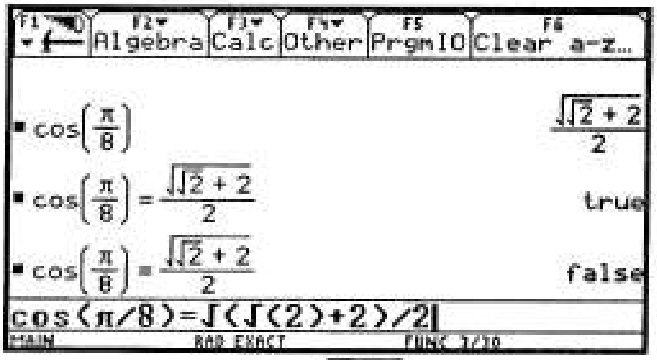
- En mode **exact** : les procédures algébriques ne parviennent pas à trouver un chemin de $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2}+\frac{2}{\sqrt{5}+2}$ jusqu'à $\sqrt{10}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}-6$ d'où cette réponse surprenante : « false » ;
- En mode **approché** : troncatures *fatales* d'où la réponse : « false » ;
- De nouveau en mode **exact**, la commande de développement : [expand] de $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2}+\frac{2}{\sqrt{5}+2}$, permet d'aiguiller les procédures algébriques et d'obtenir la bonne réponse : « true ».

Situation 4

mode exact ⟶

mode exact ⟶

◊ enter ⟶



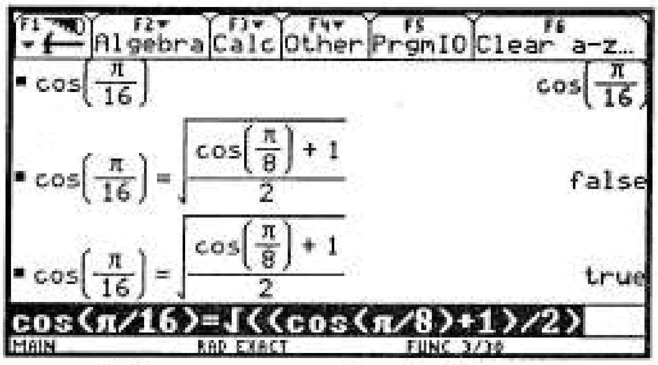
- La valeur exacte de cos π/8 est définie comme le réel $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$;
- En mode **exact**, le chemin de cos π/8 à $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ est immédiat, d'où la réponse « true » ;
- En mode **approché**, la valeur approchée de cos π/8 donnée par un algorithme et celle de $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ ne coïncident pas exactement d'où la réponse : « false ».

Situation 5

mode exact ⟶

mode exact ⟶

◊ enter ⟶



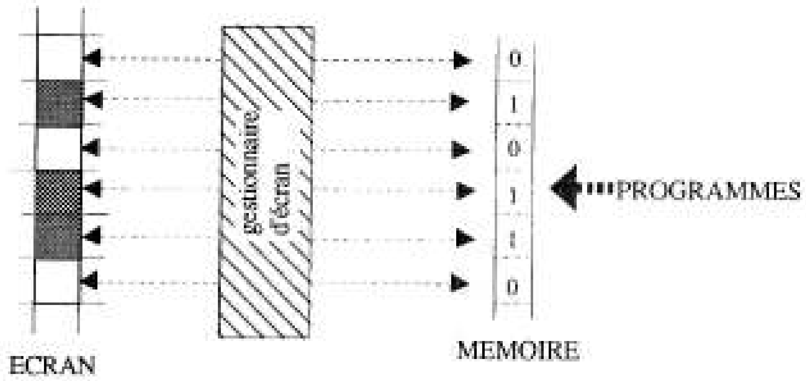
- En mode **exact**, cos π/16 n'est associé à aucune expression algébrique ;
- En mode **exact**, il est donc impossible à la machine de trouver un chemin de cos π/16 jusqu'à l'expression algébrique que nous donne la trigonométrie. Réponse : « false ».
- En mode **approché**, les valeurs approchées de cos π/16 et de $\sqrt{\frac{\cos \pi/8+1}{2}}$ coïncident (hasard des algorithmes), d'où la réponse : « true ».

La représentation graphique

De 1966 à nos jours, les références aux représentations graphiques sont devenues omniprésentes en analyse. Ainsi les courbes représentatives des fonctions sont devenues des « passages obligés » de la plupart des problèmes d'analyse au lycée (et c'est même parfois leur thème essentiel). Le statut de la représentation graphique par rapport aux objets mathématiques mis en jeu demande encore à être précisé (élément de vérification, de conjecture, argument de preuve...). La diffusion des calculatrices graphiques a de plus introduit une scission entre image/papier et image/écran[1].

L'écran graphique

D'un point de vue conceptuel, un écran rectangulaire (à balayage ou à cristaux liquides) est une matrice. Les éléments de cette matrice (les « pixels ») sont associés biunivoquement à une zone mémoire. Selon l'état de ces mémoires sur lesquelles agissent les programmes, le pixel associé est marqué ou non.



Il relève du système d'exploitation de préciser cette association ; de toute façon, elle est transparente (elle n'apparaît pas) pour l'utilisateur.

La représentation graphique sur un écran est, elle aussi, touchée par la discrétisation et la finitude. Un élève de TS peut, sans difficultés, dénombrer toutes les situations graphiques représentables sur un écran donné, dénombrer toutes les courbes issues de fonctions (facile en mode DOT, plus délicat en mode CONNECTED)[2].

---

[1] *[Bernard & Al. 1993].*

[2] *On peut alors faire un constat qui ferait plaisir à Gödel : modulo l'association MEMOIRE - ECRAN, une image écran « est » un nombre entier (dépendant du gestionnaire d'écran).*

Étude d'un cas

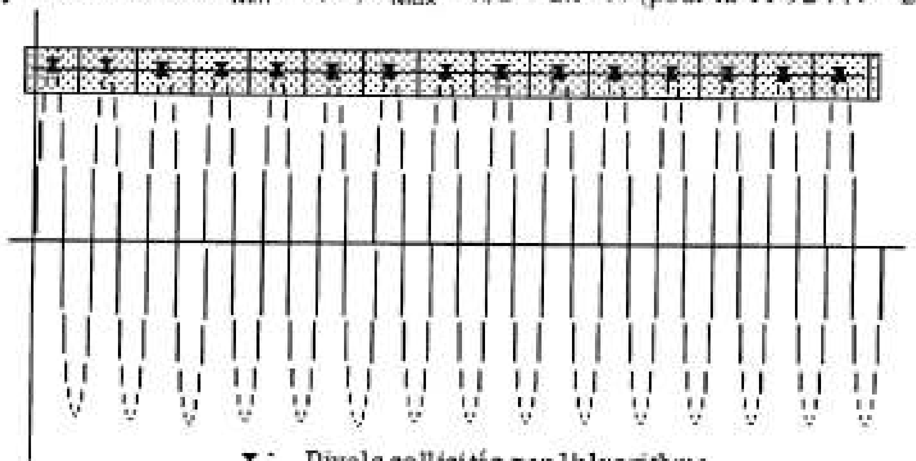
Considérons la représentation d'une fonction sur un écran de TI-92.
La matrice utilisée est de 239 x 103 pixels. L'utilisateur définit une fenêtre : X_{Max}, X_{Min} et Y_{Max}, Y_{Min} ; $\frac{X_{Max} - X_{Min}}{238}$ donne un pas de tracé point par point si la résolution est de 1.

L'algorithme de traçage en mode DOT est le suivant :
{une fenêtre et une fonction F sont donnés}

POUR i := 0 JUSQU'A 238 FAIRE	{Pour chaque colonne de la matrice,
$X := X_{Min} + i * \frac{X_{Max} - X_{Min}}{238}$;	{Calculer la valeur de X correspondante
$Y := F(X)$;	{Calculer l'image de X par F
$j := 102 * \frac{Y - Y_{Min}}{Y_{Max} - Y_{Min}}$; ARRONDIR (j) ;	{Calcul de la ligne correspondant à Y
ALLUMER-PIXEL(i;j) ;	{Action sur la mémoire écran et intervention du gestionnaire d'écran

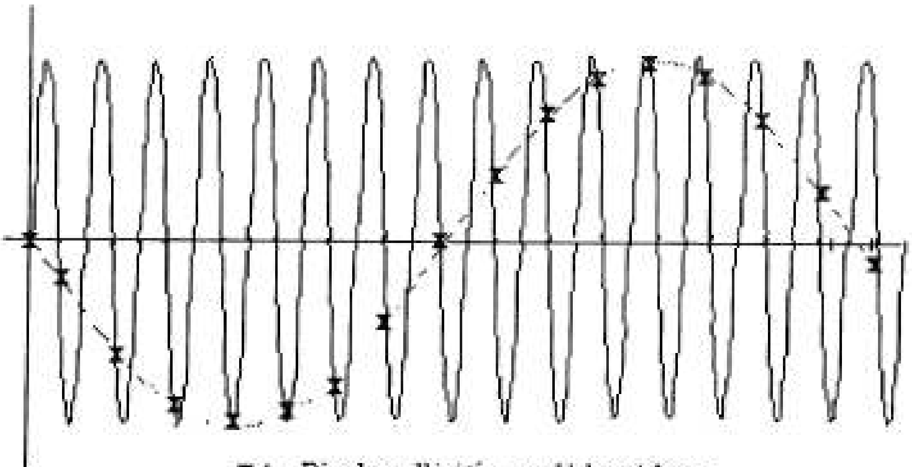
On peut faire apparaître des situations surprenantes :

- 1. Pour un pas de calcul $\frac{X_{Max} - X_{Min}}{N} = 2\pi$, la fonction sinus est représentée par une droite y = k . Ici on a : $X_{Min} = \pi/2$; $X_{Max} = \pi/2 + 2\pi * N$ (pour la TI-92 : N = 238).



x : Pixels sollicités par l'algorithme

- 2. Pour un pas de calcul $\frac{X_{Max} - X_{Min}}{N-1} = 2\pi$, la fonction sinus est représentée par une pseudo-sinusoïde :



x : Pixels sollicités par l'algorithme

- 3. Une question ouverte pour notre lecteur attentif... Pour quel(s) pas aura-t-on deux, trois « périodes » ? Une indication : on pourra explorer les pas $\frac{X_{Max} - X_{Min}}{N-k}$.

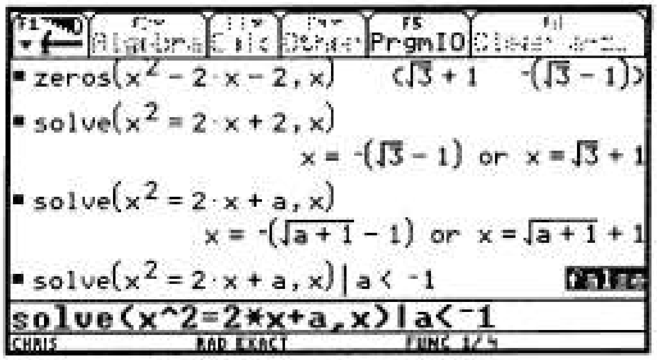
La transposition de compétences fondamentales

Nous entendons par là les compétences classiques attendues d'un élève de lycée sur les réels et les fonctions de la variable réelle : résolution d'équations et d'inéquations, calculs de l'expression de la fonction dérivée, calcul de limites, recherche d'extrema... Ces transpositions vers l'informatique seront détaillées dans les chapitres consacrés à ces thèmes. Ici nous n'aborderons que quelques compétences omniprésentes : résolutions d'équations[1], factorisations, développement.

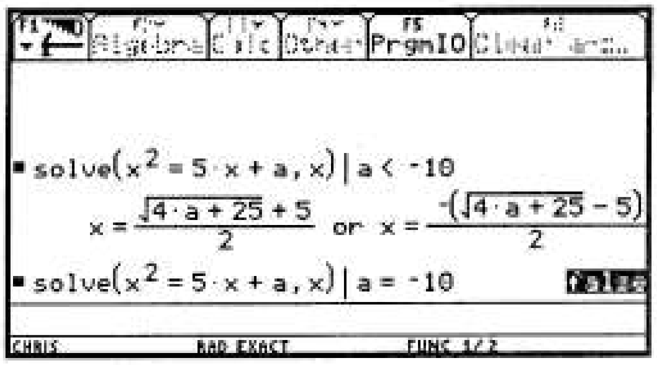
La résolution d'équations

Cette fonctionnalité est en particulier atteinte par les commandes **solve** et **zeros** proposées par le logiciel installé sur la TI-92.

Ici, tout se passe au mieux, la fonctionnalité **zeros** renvoie une liste de réels alors que **solve** retourne une proposition équivalente.
Mais la gestion du problème avec un paramètre se fait avec un certain optimisme quant aux valeurs du paramètre. On a une réponse satisfaisante en précisant a < -1.



Avec cette autre équation, on obtient des réponses correctes ou totalement erronées ; la gestion du paramètre devient « chaotique ».

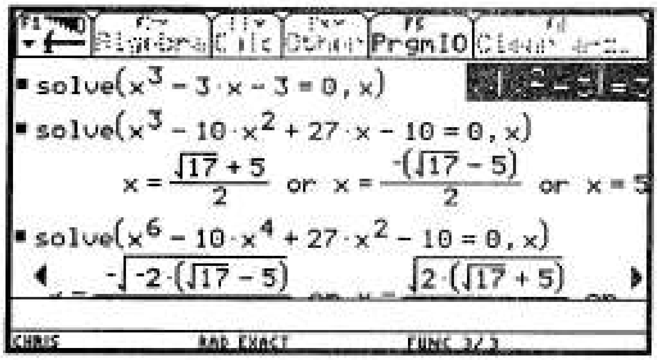


Il n'y a pas d'algorithme de résolution général des équations du troisième degré, mais les méthodes de recherche des solutions entières sont programmées. Ceci, combiné aux changements classiques d'inconnues, donne une efficacité qui crédite la machine d'une autorité certaine.

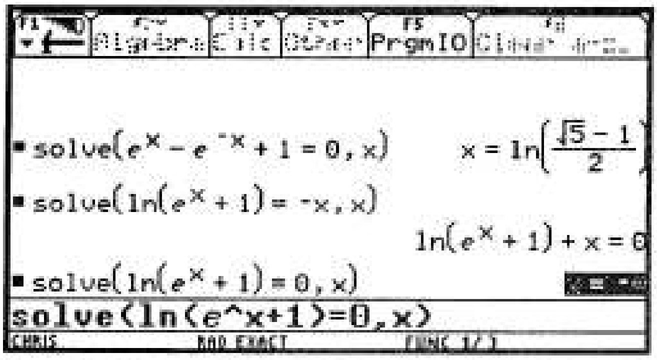
---

[1] *[Trouche, 1997].*

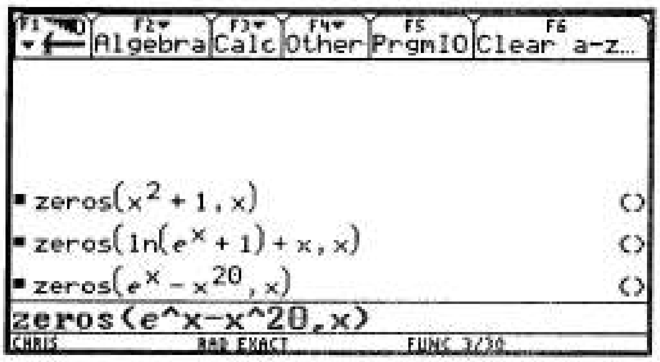
Il reste toutefois à interpréter correctement la première réponse qui invite à l'erreur classique chez les élèves : x = 3/(x² - 3))



La situation est nettement moins favorable quand on considère des équations non algébriques. Les grands « classiques » sont maîtrisés. Mais d'autres problèmes peuvent donner des résultats décevants, voire aberrants.

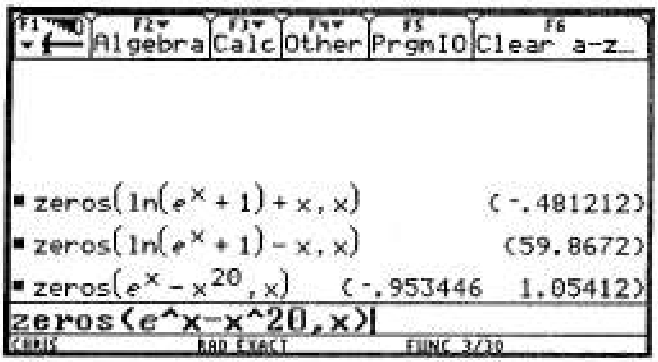


La fonctionnalité **zeros**, en mode **exact**, retourne une liste contenant les solutions. Mais la sémantique de { } (la liste vide) peut être tout aussi bien « il n'y a pas de solution » que « je ne trouve pas de solution ».



En mode **approx**, la situation devient chaotique : le logiciel peut :

- trouver la solution inaccessible par calcul formel ;
- trouver une solution quand il n'y en a pas ;
- ignorer certaines solutions.



La fonctionnalité **solve** a donc à son crédit une efficacité parfois remarquable, à son débit une syntaxe (certes pas rédhibitoire) et quelques comportements aléatoires.

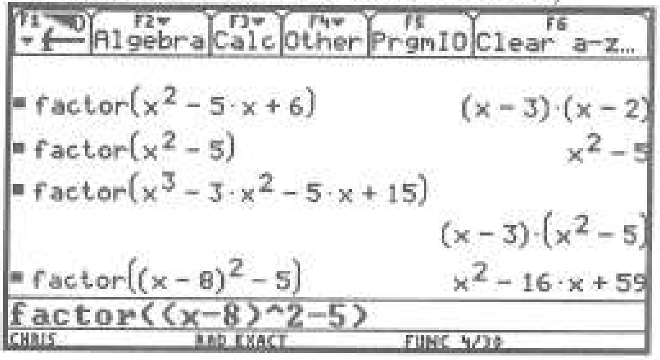
La résolution d'inéquations n'est opératoire que pour les problèmes du premier degré.

Les fonctionnalités **solve** et **zeros** se complètent aussi des méthodes graphiques sur lesquelles pèsent tous les effets du calcul approché par troncature et de la discrétisation de l'écran.

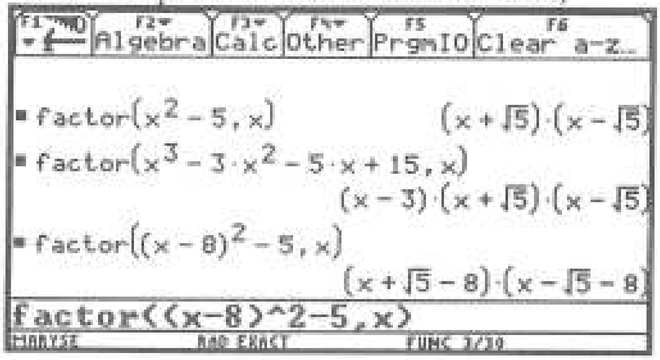
La factorisation

C'est la commande **factor** qui peut permettre d'obtenir une expression sous forme d'un produit de facteurs. Toutefois deux syntaxes coexistent.

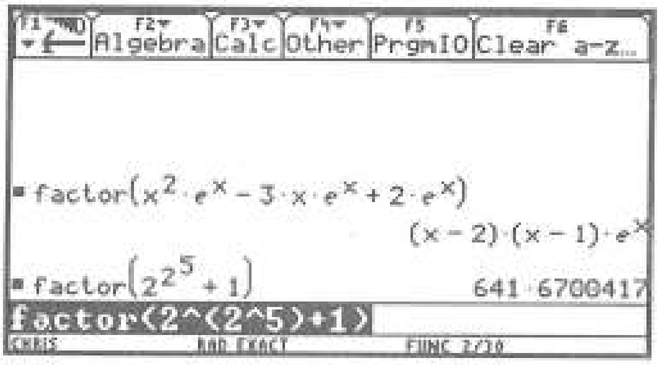
- **factor(f(x))** permet d'obtenir seulement une factorisation à racines rationnelles, ce qui pour les expressions polynomiales, entraîne une efficacité qui ne semble pas directement corrélée à celle des commandes de résolutions présentées plus haut. Elle peut même générer une attitude de doute sur l'efficacité de la commande.



- Mais la commande **factor(f(x),x)** permet de récupérer les racines irrationnelles, et des résultats plus cohérents avec ce qui est fait de façon usuelle dans le cours de mathématique.



La commande **factor** peut être utilisée sur des expressions qui ne sont pas des polynômes ou des nombres. Ainsi Fermat aurait été intéressé par un tel outil ! Ci-contre la factorisation du 5° nombre de Fermat dont lui-même avait pensé, pendant un certain temps, qu'il était premier.



I.2.b. Organisation de la classe.

Préambule

L'organisation d'une classe dépend bien sûr de l'environnement dans lequel se déroulent l'enseignement, pour le professeur, et l'apprentissage, pour les élèves. Imaginons un instant que les élèves ne disposent ni de manuels, ni de cahiers et que le professeur ne dispose que d'un tableau et de craies : il devrait alors probablement organiser très clairement l'espace de son tableau, regrouper les éléments essentiels dans un coin non effacé, contrôler que ce qui est écrit est bien lu et interprété convenablement, faire appel régulièrement à la mémoire des élèves... toutes choses qui sont peut-être de mise dans un environnement traditionnel, mais qui prendraient dans ce contexte une importance particulière.

Est-il exagéré d'imaginer, à propos des environnements de calculatrices symboliques, un tel écart avec la réalité actuelle des classes ? Nous le pensons. En effet :

- le fait que chaque élève dispose d'un outil qui, sur le plan numérique, graphique et symbolique, fournisse la plupart des résultats établis auparavant à la main modifie nécessairement le rôle de l'enseignant ;

- le fait que, dans le mouvement même de représentation des objets mathématiques, il y ait <u>déformation</u> de ceux-ci (cf. I.2.a.) entraîne une responsabilité particulière de l'enseignant, de <u>traduction</u> et <u>d'interprétation</u> ;

- le fait que ce type d'environnement induise un travail <u>individuel</u> de l'élève (lié à la petitesse de l'écran et du clavier) et un travail <u>clavier/écran</u> plutôt que papier/crayon, entraîne une responsabilité particulière de l'enseignant, de <u>socialisation</u> et <u>d'explicitation</u> du travail.

Il est clair que l'organisation de la classe n'est pas la même, suivant le nombre de calculatrices possédées par les élèves, suivant la diversité des modèles... Nous nous placerons ici dans un cas de figure « idéal » : tous les élèves possèdent le même modèle de calculatrice graphique et symbolique. Nous faisons ce choix pour trois raisons :

- nous pensons que, d'ici deux ou trois ans, les calculatrices symboliques seront généralisées dans les classes scientifiques de lycée (comme le sont aujourd'hui les calculatrices graphiques) ;

- nous pensons que le même processus de normalisation des commandes constaté pour les calculatrices graphiques s'appliquera aussi aux calculatrices symboliques : même si les modèles diffèrent, des adaptations mineures permettront de passer de l'un à l'autre ;

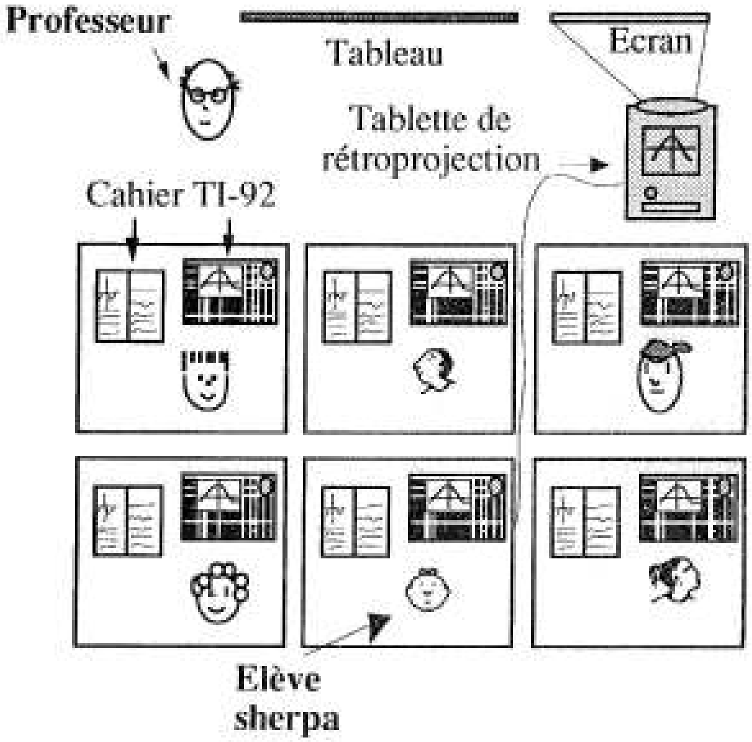
- nous pourrons nous appuyer ici sur les expérimentations en cours dans une vingtaine de classes en France, toutes équipées du même modèle de calculatrice symbolique (TI-92). Les premiers bilans (cf. bibliographie) permettent de savoir ce que l'on peut faire... et ce que l'on ne doit pas faire.

Nous sommes donc bien conscients que le type d'environnement que nous allons décrire ne peut pas s'appliquer tel quel à toutes les classes ! Cependant le « modèle » qui s'en dégage donne un cadre qui peut utilement être discuté, contesté, ajusté en fonction des environnements des classes et des objectifs de l'enseignant. On pourra constater d'ailleurs que l'organisation décrite peut tout à fait s'appliquer à des classes où tous les élèves sont pourvus d'une calculatrice simplement graphique (ce qui correspond à la plupart des classes scientifiques de lycée aujourd'hui).

L'organisation dans l'espace

La combinaison du « travail calculatrice » et du travail écrit nécessite une organisation particulière sur la table de chaque élève, le cahier au centre, la calculatrice à côté.

Le dispositif de cours dans un environnement calculatrice : la combinaison du travail papier/crayon et du travail calculatrice, le rôle pivot de l'élève sherpa.[1]



Cela suppose que le maître organise son travail sur le même modèle : le tableau au centre de la classe (ce qui correspond à la situation ordinaire des classes), l'écran sur le côté. Sur cet écran est projeté (via un dispositif spécifique) l'écran d'une **calculatrice témoin** qui fera référence pour toute la classe ; il reste à rendre habituel la combinaison des deux types de travail, ce qui suppose que :

- la présence du dispositif de rétroprojection soit systématique (ce qui ne veut pas dire qu'il est sollicité en permanence) ; cela manifeste qu'il s'agit d'un environnement habituel et que l'on aura le choix d'utiliser, ou non, la calculatrice ;

- le maître organise des aller-retour réguliers entre les résultats obtenus par la calculatrice témoin et ceux obtenus à la main ;

---

[1] *Les schémas de ce chapitre sont extraits des Actes (à paraître) du colloque : « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques » qui s'est tenu au mois de mai 1998 à la Grande Motte.*

- en plus de ces aller-retour, il met en évidence la spécificité des deux supports : le tableau (comme le cahier) permet de sauvegarder les résultats fondamentaux, les articulations logiques... alors que la calculatrice permet, via la mémorisation des lignes de calcul, de conserver quelques calculs intermédiaires de façon linéaire.

L'organisation de la classe suppose aussi que l'enseignant ne soit pas un homme orchestre, mais assure une fonction de **chef d'orchestre** : le professeur ne peut pas à la fois et en même temps faire le cours, suivre la progression des élèves, manipuler une calculatrice, répondre aux sollicitations des élèves...

Cette fonction de chef d'orchestre est possible quand la charge de la calculatrice témoin est dévolue à un élève que nous appellerons **élève sherpa** [1]. Ce dispositif présente plusieurs avantages :

- il permet au professeur, en donnant à tour de rôle cette responsabilité à l'ensemble des élèves de la classe, de s'assurer des capacités de chacun à utiliser cet outil ;
- il permet au professeur de se guider sur le rythme d'un élève et non sur son rythme propre ;
- il favorise le débat dans la classe (on critique plus facilement ce que fait un élève que ce que fait le professeur) ;
- il décharge le professeur qui, dès lors, est davantage disponible pour réguler l'activité de la classe, combiner les résultats qui apparaissent sur l'écran et les résultats qu'il écrit au tableau.

L'organisation dans le temps

Cette organisation dans l'espace n'a de sens que si différents moments, du point de vue de l'utilisation des outils de calcul, sont distingués dans l'activité de la classe :

- des moments de non-utilisation : le rétroprojecteur est éteint, les calculatrices des élèves sont fermées. C'est le cas lors de la démonstration de certains théorèmes, plus généralement lorsque ce qui se passe dans la classe recquiert l'attention de tous ;
- des moments d'utilisation guidée : le rétroprojecteur est allumé, le professeur donne des consignes précises : utiliser telle application ; tel menu ; telle commande.... Cela suppose alors que tous les élèves obtiennent sur leur écran de calculatrice ce qui apparaît sur l'écran de référence rétroprojeté. Bien entendu, la discussion est toujours possible : un élève peut demander « pourquoi ne pas choisir telle commande plutôt que telle autre ? » ; mais alors la suggestion est prise en compte par l'ensemble de la classe. L'élève sherpa la suit, les résultats sont comparés. Cette organisation permet de répondre aux difficultés momentanées de certains élèves, de débloquer des situations : « je n'arrive pas à obtenir le même résultat, pourtant je suis dans la même application, et j'ai exécuté la même commande. Pourquoi ? ». Cela permet d'en revenir aux réglages de la calculatrice : quel mode de

---

[1] Le mot est choisi en référence à la fois à l'homme qui porte les charges lors des expéditions himalayennes et aux diplomates qui servent de médiateurs lors des conférences internationales.

calcul ? Quel format d'affichage des nombres ? Quel type d'écriture des nombres complexes ? etc.). Cette organisation est donc de mise dans les plages de certaines parties de cours assistées par calculatrice ou lors de l'apprentissage de nouvelles commandes ;

- des moments courts d'utilisation libre : le rétroprojecteur reste allumé, mais l'utilisation de l'instrument est libre. C'est le cas lors de la résolution de certains exercices : pendant une dizaine de minutes, l'élève sherpa utilise la calculatrice de référence, mais les autres élèves peuvent, ou non, suivre cette référence. A la fin de cette plage de travail, le bilan est fait des différentes stratégies ;

- des moments longs d'utilisation libre : le rétroprojecteur est éteint. Il n'y a plus, ni de calculatrice témoin, ni d'élève sherpa. A chaque élève revient la responsabilité d'utiliser, ou non, sa calculatrice, et, s'il l'utilise, de choisir telle ou telle application.

Cette organisation particulière de l'espace et du temps nécessite, on le comprend bien, des activités (c'est-à-dire des énoncés et des contrats de travail) particulières.

De nouveaux énoncés

Quelques principes peuvent guider l'élaboration de nouveaux énoncés.

♦ Utiliser les potentialités des calculatrices pour multiplier les points de vue.

Nous partons de l'idée que le changement de point de vue sur un objet mathématique donné est essentiel pour l'apprentissage : c'est une activité complexe (passer de la formule donnant une fonction à sa représentation graphique, ou de sa représentation graphique à une formule, ne requiert pas tout à fait les mêmes compétences) mais indispensable pour la compréhension des phénomènes. Les calculatrices symboliques permettent ces changements, en mettant à disposition de l'utilisateur une application graphique, des tableaux de valeurs, une étude formelle, des calculs exacts ou approchés. Stimuler ces changements de points de vue nécessite des énoncés adaptés.

♦ Choisir des activités qui demandent la combinaison de l'instrument et de la théorie.

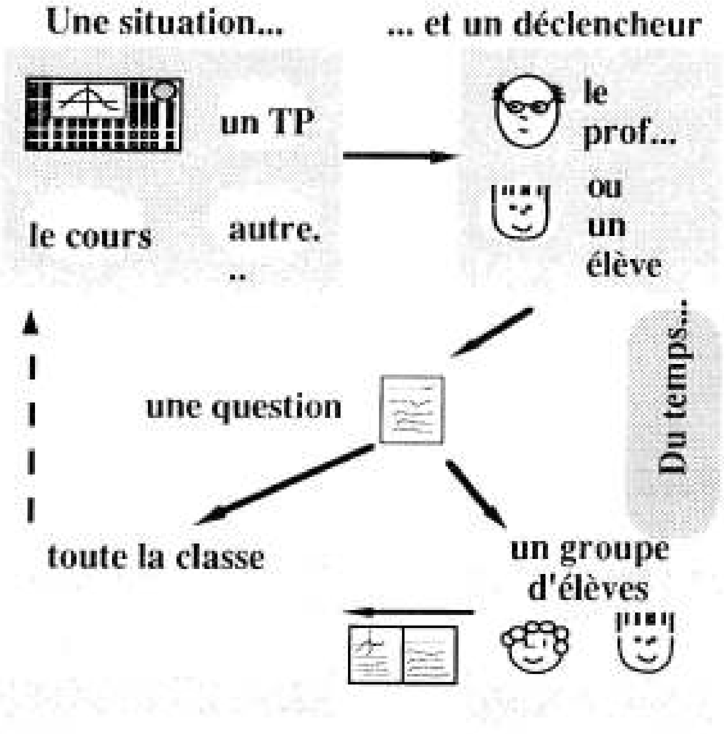
Le choix d'un problème mathématique dépend des connaissances disponibles chez les élèves et des connaissances visées. Il dépend aussi des outils de calcul. Ainsi l'algorithme d'extraction d'une racine carrée n'a plus grand intérêt dès lors qu'une calculatrice en donne une valeur approchée avec une précision suffisante. Les apprentissages techniques, toujours nécessaires, se déplacent alors : quelles sont les propriétés des racines carrées, quels sont les ordres de grandeur des résultats attendus ? Il s'agit alors de mettre en oeuvre des mécanismes de contrôle des résultats obtenus « automatiquement ». On peut penser aussi que les techniques de calcul de dérivée, de recherche de primitives, la mémorisation des développements limités usuels, pour ne donner que quelques exemples, vont perdre de l'importance au profit de l'étude des propriétés et des mécanismes de contrôles de ces différents résultats. **Le champ des apprentissages élémentaires se déplace, le champ des problèmes aussi.**

Il est possible de construire des problèmes nécessitant l'utilisation judicieuse de la calculatrice et l'utilisation des résultats du cours de mathématique (ainsi, au lieu de demander la dérivée d'une fonction, que la calculatrice donne immédiatement, on peut demander la dérivée $n^{\text{ème}}$, qui exige une réflexion particulière).

♦ En revenir aux sources de l'activité scientifique.

Dans cette mise en oeuvre, on retrouve différentes facettes de l'activité scientifique, dans laquelle l'aspect « expérimental » prend peut-être une importance plus grande que dans le cadre mathématique traditionnel. Quand c'est le maître qui définit les problèmes, les questions et les réponses (« montrer que... »), l'initiative de l'élève est souvent assez mince. Dans un « environnement calculatrice », la possession par les élèves d'outils de calculs puissants incite à modifier fortement le contenu des questions et les réponses ne seront pas forcément induites par le professeur. On trouvera souvent des questions du type « que penser de telle situation ? ». La place est alors libre pour un travail de conjectures, de preuves partielles, de réfutations...

Un processus de recherche multiforme



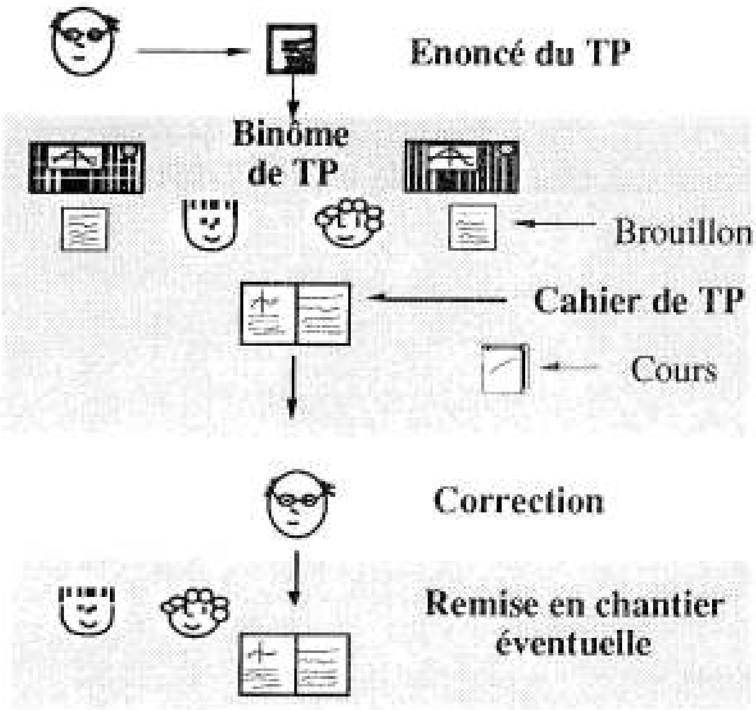
Le déroulement de « la » résolution est moins linéaire, il est alors possible de discuter de l'intérêt plus ou moins grand de telle ou telle approche, de telle ou telle méthode. Cela ne veut pas dire nécessairement qu'il s'agit d'une approche nouvelle se substituant aux approches traditionnelles : les séances de cours, de démonstrations guidées par le maître sont toujours aussi indispensables. Mais il s'agit d'un nouvel équilibre à créer, dans lequel les initiatives des élèves, le débat scientifique dans la classe, prennent une importance plus grande.

De nouveaux contrats de travail

♦ <u>Des moments spécifiques de recherche</u>

Une telle orientation suppose que les élèves aient le temps d'observer, d'échanger, de réfléchir vraiment. Comme dans les sciences expérimentales, des séances de TP sont indispensables.

Un TP, comme dispositif spécifique et comme processus



Les élèves, par groupes de deux (la petitesse des écrans de calculatrice rend difficile les échanges dans des groupes plus grands) s'approprient une situation, utilisent leur calculatrice (dans ses différentes applications) pour avoir différents points de vue sur la situation proposée, émettent des hypothèses, testent leur pertinence, recherchent des outils théoriques adaptés aux preuves ou réfutations. Pendant la séance, les groupes écrivent un rapport de recherche faisant le point sur les impasses et les découvertes. Ce moment d'explicitation des démarches est essentiel pour permettre le recul critique sur les différentes approches, la mémorisation des acquis, préparer les retours ultérieurs sur les différents TP. Ce n'est que dans un deuxième temps, lors d'une autre séance, que le maître fait le bilan des différents travaux, compare les méthodes mises en oeuvre, met en valeur les apports de chaque groupe. De tels dispositifs ont été mis en oeuvre avec profit dans des classes expérimentales (cf. bibliographie). Le bilan de celles-ci semble indiquer que, loin d'être du temps perdu, ces moments permettent d'approfondir les points essentiels du programme.

♦ <u>Le problème de l'évaluation</u>

Il est bien sûr loin d'être réglé. Il est d'ailleurs lié aux questions des programmes et des examens. Distinguons donc ce qui est possible et ce qui est souhaitable...

Ce qui est possible aujourd'hui. Dans le cadre de la relative autonomie qui est la sienne, le professeur peut organiser différents types d'évaluation. Il existe des notes de « devoir maison », des notes de devoir surveillé, d'éventuelles notes d'oral. Il peut exister aussi des notes liées au travail de recherche réalisé en TP. Dans le cadre des devoirs surveillés, il peut exister aussi des questions qui nécessitent une utilisation pertinente de la calculatrice. Mais il ne peut pas y avoir de mélange des genres :

- soit il s'agit d'un travail où seront évaluées les capacités d'initiative, l'aptitude à formuler des conjectures, à articuler les différentes applications de la calculatrice et les références théoriques. Il s'agit alors d'un travail de type TP où le professeur accepte de laisser du temps, de laisser s'organiser des échanges à l'intérieur de petits groupes de recherche. L'énoncé peut alors être très bref, laissant aux élèves la charge de construire différents itinéraires d'accès (exemple d'énoncé : par combien de zéros de termine l'écriture décimale de n! ?) ;

- soit il s'agit d'un travail où seront évaluées les connaissances acquises, la compréhension des théorèmes, l'appropriation des commandes de la calculatrice présentées en cours. Les questions seront alors davantage détaillées, organisées autour des points centraux du programme. Le sujet sera choisi de telle façon que la calculatrice ne donne pas directement la réponse.

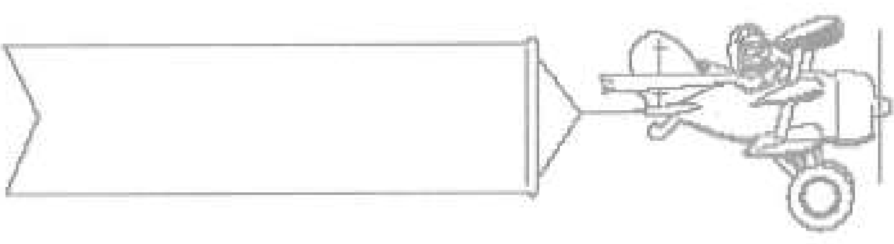
Exemple d'un tel sujet, donné dans une classe expérimentale :

> Soit n un entier naturel non nul, on définit :
>
> - la fonction f_n sur [0, 1] par $x \to f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} = e^{-x} (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!})$;
>
> - la suite u par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$.
>
> 1. Montrer que f_n est dérivable sur [0 ; 1] et que $f_n'(x) = - e^{-x}. \frac{x^n}{n!}$.
>
> 2. En déduire que, pour tout x de [0 ; 1], on a $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$.
>
> 3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre 0 et 1, prouver l'inégalité : $|\frac{u_n}{e} - 1| < \frac{1}{n!}$
>
> 4. En déduire l'inégalité $|u_n - e| < \frac{3}{n!}$, puis la convergence de la suite u vers e.
>
> 5. A partir de quel rang n est-on sûr que l'écart entre u_n et e est inférieur à 10^{-20} ?
>
> 6. En utilisant une calculatrice TI-92, en déduire une valeur approchée de e, sous forme de fraction $\frac{p}{q}$ (avec p et q entiers)à 10^{-20} près.
>
> 7. Peut-on en déduire, en utilisant de façon adaptée la calculatrice, les 20 premières décimales de e ?

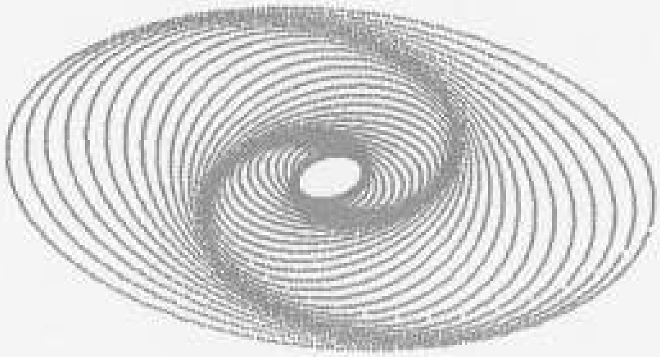
Notons que les calculatrices symboliques ne peuvent pas traiter les premières questions. Elles peuvent donner une indication des simplifications qui s'opèrent dans la dérivation pour des valeurs particulières de n (de la même façon qu'une calculatrice graphique peut donner une indication sur les variations d'une fonction). La démonstration générale, pour n quelconque, reste à la charge de l'élève.

Mais dans ces classes expérimentales, les choses sont relativement simples, puisque l'apprentissage de la calculatrice fait partie intégrante de l'apprentissage des mathématiques et que le modèle de calculatrice est le même pour tous les élèves. Le sujet peut donc être choisi en conséquence.

<u>Ce qui est souhaitable</u>. C'est sans doute une évolution des programmes et de la réglementation des examens. Du point de vue des programmes, il serait souhaitable que soit réintroduit à tous les niveaux l'arithmétique qui permet une compréhension des nombres, qui permet de situer les rapports entre discret et continu, entre calcul exact et approché... Si cette réintroduction a bien eu lieu dans les programmes de 1998, il est toutefois paradoxal que cette étude d'intérêt général pour tous les élèves, soit réservée aux seuls élèves des classes de terminale scientifique, spécialité mathématique. Du point de vue des examens, il n'est guère possible d'en rester à une réglementation qui ne fixe pour les calculatrices que des contraintes de dimension et qui n'annonce même pas à l'avance si elles seront autorisées ou non... Clarifier la situation supposerait d'indiquer quelles sont les connaissances exigibles relativement aux calculatrices, d'organiser un apprentissage réel de ces connaissances et d'évaluer celui-ci grâce à des sujets adaptés. Nous en sommes encore loin, puisque cette tâche élémentaire n'a pas encore été réalisée à propos des modèles à disposition de tous les élèves et qui seront bientôt dépassés : les calculatrices graphiques.



Partie II



Propositions thématiques

II.1. Limites

II.1.a. Conceptions.

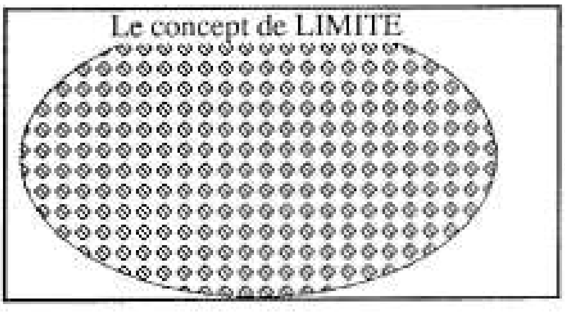
La construction du concept de limite d'une fonction « par la définition » est hors programme au lycée aujourd'hui. Cette définition intervient surtout dans les démonstrations des théorèmes sur les limites et opérations, limites et ordre... qui sont admises dans le secondaire .

Les pratiques pédagogiques qui consistent à faire un « pattern matching »[1] sur une définition donnée a priori se sont souvent révélées inadéquates pour la construction des savoirs des élèves du secondaire.

La construction du concept de limite se fait donc « par l'exemple ». Cette pratique est en cohérence avec une philosophie qui traverse beaucoup de notions mathématiques des programmes du secondaire où, sans nécessairement suivre pas à pas un historique de la construction du concept, on évite la « descente » de la définition vers des situations particulières.

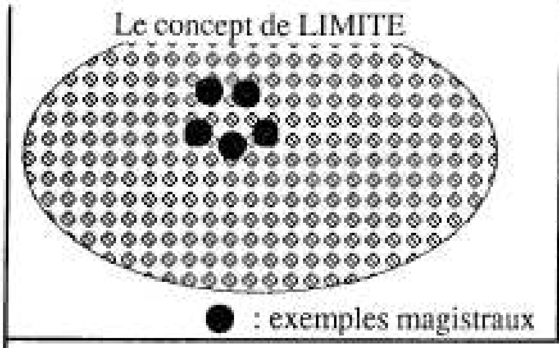
Il est bien d'autres concepts qui apparaissent dans les programmes du secondaire et qui sont complétés dans le supérieur. Celui de limite est notoirement difficile à négocier, d'autant que les étudiants l'abordent avec la conviction d'une compétence en la matière et de nombreuses images mentales fausses. Il semble difficile d'arguer que ce problème ne concerne que la minorité d'étudiants qui fera des études de mathématiques ou de l'abandonner « aux bons soins » des enseignants du supérieur : pourquoi négliger cette occasion formatrice, toutes finalités d'études confondues, qui traite d'une situation où, un objectif étant fixé, il faut en chercher des conditions suffisantes pour sa réalisation ?

La construction d'un concept par l'exemple fait apparaître des obstacles inhérents à la méthode.

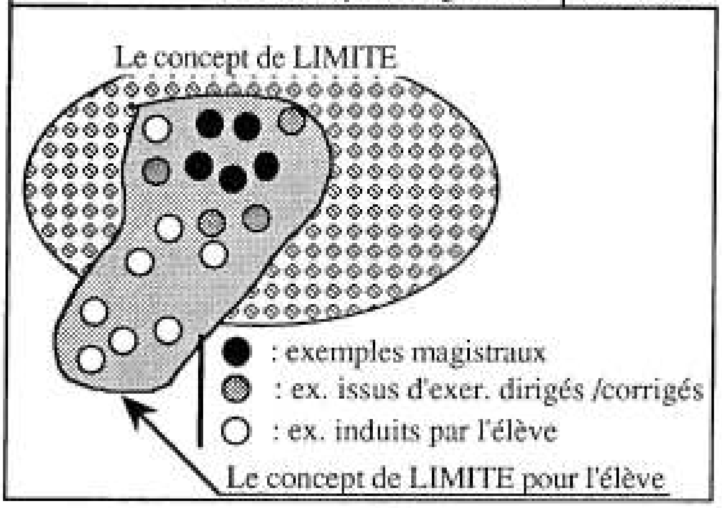


La définition délimite le concept « idéal » de limite (le concept savant).

[1] Langage d'informaticien : « faire coller une situation donnée sur un modèle formel donné ». Cela se pratique en mathématiques quand, par exemple, étant donnée la définition de sous-espace vectoriel, on vérifie si tel ensemble est, ou n'est pas, un sous espace.



Les exemples donnés par le professeur amorcent une approche du concept pour l'élève. Très peu de contre-exemples en général ! D'ailleurs, il est difficile de les présenter en l'absence de définition et en proscrivant les pseudo-définitions du genre « la courbe s'approche …… »).



Après exemples, exercices... l'élève construit son propre concept de limite.

Il y a bien sûr des lacunes qui se trouvent dans le domaine défini par « concept de limite » privé de « concept de limite pour l'élève », recouvrant les situations que l'élève ne connaît pas, ou qu'il n'identifie pas comme liées au concept de limite.

Exemples :
- $x \to x + 10 \sin x$ a une limite en $+\infty$?
- $a x = \sin x$, nombre de solutions ? …

Il y a aussi des « débordements » qui appartiennent au domaine « concept de limite pour l'élève » mais ne font pas partie du domaine « concept de limite », c'est le domaine des propositions erronées.

Exemples :
- $x \to x \sin x$ tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$;
- f tend vers $+\infty$ car f est croissante …

II.1.b. Transposition didactique et informatique.

La transposition didactique

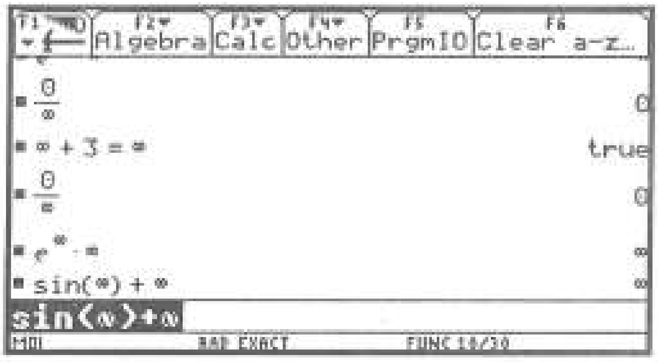
En l'absence de toute espèce de définition, il est fréquemment fait usage d'une terminologie dynamique : « f(x) peut devenir très grand... » ou pire, avec une inversion des contraintes : « quand x grandit... la courbe s'approche de... ». En vue du baccalauréat, les problèmes de limites requièrent essentiellement une compétence « algébrique »[1] et une bonne intuition en termes d'ordre de grandeur, intuition qui permet la mémorisation des théorèmes « limites et opérations sur les fonctions ».

Quant aux problèmes d'existence, les énoncés les affirment implicitement et il est courant de voir un enchaînement d'égalités entre des limites[2]. Quelques situations où s'impose le « théorème des gendarmes » permettent de redonner un peu de sens à cette notion.

Des évolutions technologiques interfèrent maintenant avec cette construction de concept.

♦ Les images-écran des calculatrices dans l'application graphique, ou les tableaux de valeurs, viennent renforcer la perception dynamique de la limite, créant ou consolidant des liens avec d'autres concepts (la variation en particulier, la continuité...) et ceci hors de tout contrôle du professeur.

♦ Les « dérives » algébriques évoquées par les "3 + ∞ = +∞" risquent d'être confortées par des écrans comme ci-contre (produit par un logiciel de calcul formel).
Quel sens en donnerait un élève non averti ?



La transposition informatique

En analyse, les manipulations algébriques sont fortement présentes mais l'idée d'approximation en fait sa spécificité. En jouant avec les mots, on pourrait espérer une heureuse conjonction avec les calculatrices dont la plupart des logiciels manipulent des valeurs approchées.

---

[1] *Elle semble relativement bien atteinte, parfois même trop bien au vu de tous les "+∞ + 3 = +∞" et autres variantes qui fleurissent dans les copies.*

[2] $\lim_{+\infty} f = \ldots\ldots = \lim_{+\infty} x^2 = +\infty$

La réalité est toute autre : d'un côté un ensemble non dénombrable, complet... de l'autre une suite finie de nombres ; quant à la représentation graphique des fonctions : d'un côté un plan euclidien, de l'autre un écran juxtaposition de pixels.

Outre tous les problèmes d'un passage du continu au discret, la transposition du concept d'infini semble receler de nombreux obstacles.

Depuis l'apparition des logiciels de calcul symbolique, il y a deux transpositions à considérer, deux transpositions qui peuvent coexister sur un même support[1].

♦ Pour la représentation *approchée*, la transposition de $\mathbb{R}$ donne une suite finie de nombres où on ne retrouve pas la structure habituelle. Le concept d'infini est spontanément transformé en : « un grand nombre, à la limite de la capacité de la machine », (d'ailleurs on a : $3 + 10^{99} = 10^{99}$ sur toutes les machines pour lesquelles 10^{99} est le plus grand nombre représentable).

♦ Pour la représentation *symbolique* : toute écriture conforme à une « grammaire » est un nombre, la reconnaissance de l'égalité de deux nombres dépend de l'efficacité des algorithmes de transformation d'écriture. L'infini est un symbole : ∞, d'ailleurs $-\infty$ n'est rien d'autre que $\infty \times (-1)$. A ce symbole, sont attachées des règles qui, pour diverses raisons[2], ne coïncident pas avec les savoirs enseignés.

Dans l'application **Graph**

Dans celle-ci, la représentation des nombres est la représentation classique que l'on retrouve dans la plupart des calculatrices ; tous les calculs sont donc faits avec des approximations décimales comportant un nombre fixe de chiffres significatifs.

Les menus ne contiennent pas explicitement la fonctionnalité **Limite**, mais les élèves détournent certaines fonctionnalités pour obtenir un résultat sans justification ou, dans le meilleur des cas : une conjecture, une vérification.

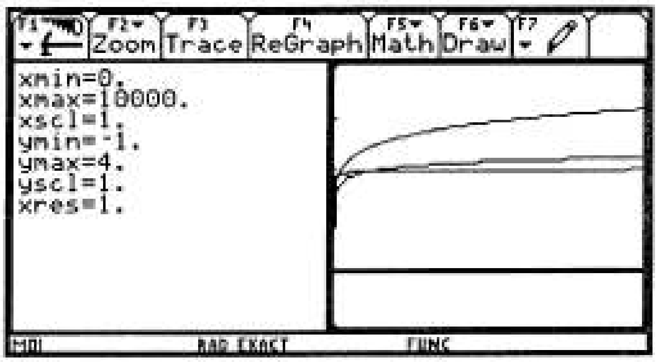
♦ Utilisation de **Window**

Recherche de la limite en $+\infty$ pour

$x \to y1(x) = \ln(\ln(x))$

$x \to y2(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} + 2$

$x \to y3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$



L'élève prend a priori un **XMax**[3] arbitrairement grand, le **YMax** est ensuite ajusté ; la pente apparente de la courbe sera déterminante quant à la réponse.

Erreur engendrée : *« $x \to \ln(\ln x)$ tend vers $+\infty$ car elle continue de croître ».*

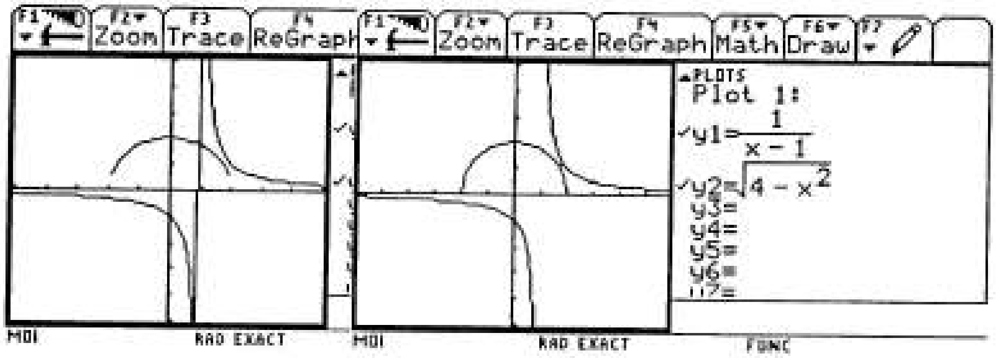
---

[1] *Voir le chapitre I.2.a.*

[2] *Certaines sont conséquentes des procédures de calcul formel, d'autres relèvent d'un choix délibéré des concepteurs du logiciel.*

[3] *Très souvent* **Xmin** *est conservé égal à 0, même pour l'étude de « voisinage de $+\infty$ ». Désir de ne pas perdre le (ses) repère(s) ? Refus d'un calcul d'ordre de grandeur des images ?*

Par ailleurs, l'apparence des courbes est fortement dépendante de la fenêtre choisie, ci-dessous, on a respectivement [-5 ; 5] et [-5.8 ; 5.8] pour [**XMin** ; **Xmax**].
Le non raccordement de la courbe avec l'axe des abscisses et l'apparition de « pseudo » asymptotes qui dépendent des valeurs de la fonction effectivement calculées (voir chap I.2.a) disparaissent dans la deuxième fenêtre car -2, 1 et 2 sont alors des valeurs de calcul pour la calculatrice.

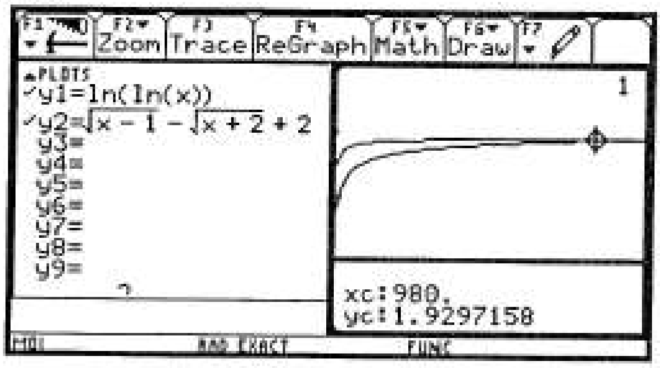


- Utilisation du **Zoom**

Les facteurs de **Zoom** ne sont en général pas contrôlés, le « centre » de la transformation est souvent laissé au hasard, l'élève espère voir se dégager une direction dans le cas de branches infinies.

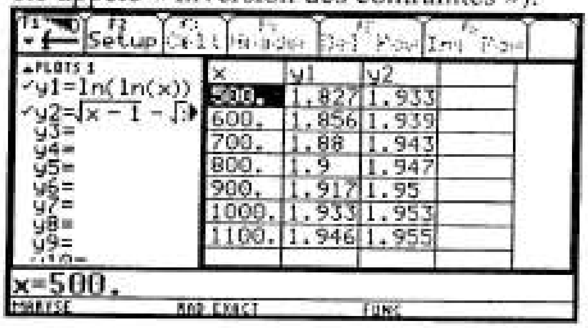
L'utilisation de **Trace** va servir de support aux locutions de type dynamique « quand x tend vers… f(x) tend vers … ».

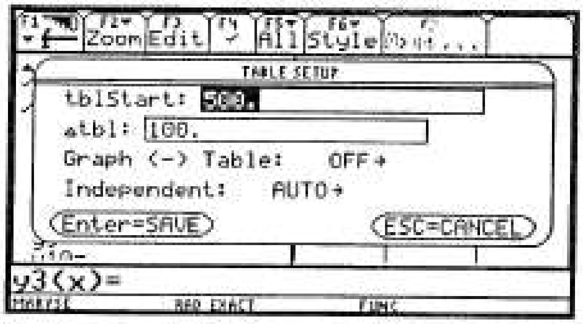
La manipulation de **Trace** montre une croissance et des images de plus en proches de la valeur « exacte » : 2.
Il reste difficile de distinguer l'existence de la non existence d'une droite asymptote horizontale.



- Utilisation de **Table**

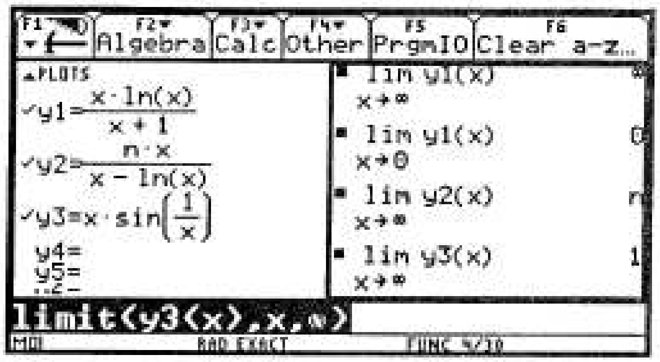
Un élève un peu averti réglera (via **Tblset**) les paramètres qui définissent une table de valeurs de f(x) sur laquelle pourra être vérifiée (/ conjecturée / induite) la limite de la fonction. Il faut noter que, encore ici, la recherche de la limite est faite en conditionnant x, puis en observant les valeurs de l'image f(x) données par la machine (comportement qui a été appelé « inversion des contraintes »).



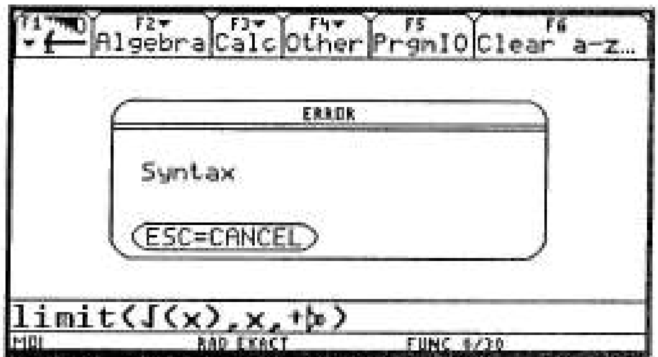


Dans l'application **Home**

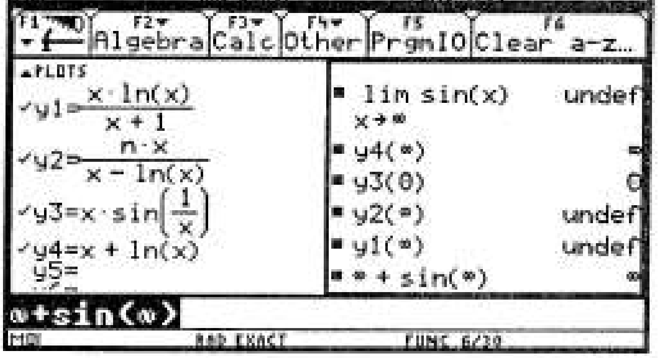
On est en présence d'un fonctionnement de type « boîte noire » d'une excellente efficacité devant les exercices classiques qui sont posés aux élèves de terminale : fonctions avec logarithmes, exponentielles, sin, cos et même famille de fonctions…



On repère sur le clavier la présence remarquable du symbole « infini » : ∞, présent, bien sûr, pour une utilisation dans la syntaxe de la commande **limit**.
Mais toute utilisation avec + est rejetée comme faute de syntaxe !

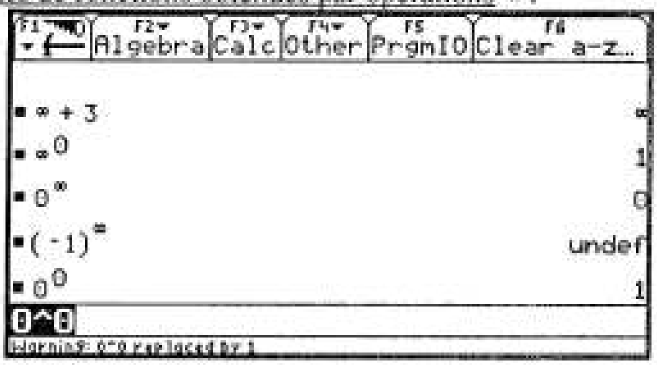


Les concepteurs du programme sont d'un pragmatisme qui repose sur une sémantique très particulière, ainsi, **undef** (indéfinie ?) apparaît dans la plupart des cas comme la réponse signifiant « la limite n'existe pas » .



Et l'utilisateur à tout loisir de découvrir quelques nouvelles règles de forme très algébrique qui, dans le meilleur des cas évoquent des « opérations sur les limites » alors que les théorèmes portent sur les « limites de fonctions obtenues par opérations » .

Le dernier résultat (0^0) est plus inquiétant…, il est certes accompagné d'un microscopique et évanescent « **Warning : 0^0 replaced by 1** ».



D'autres cas peuvent susciter quelques interrogations et ils n'échapperont pas à quelques élèves « bricoleurs ». Par exemple : limite en -∞ de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

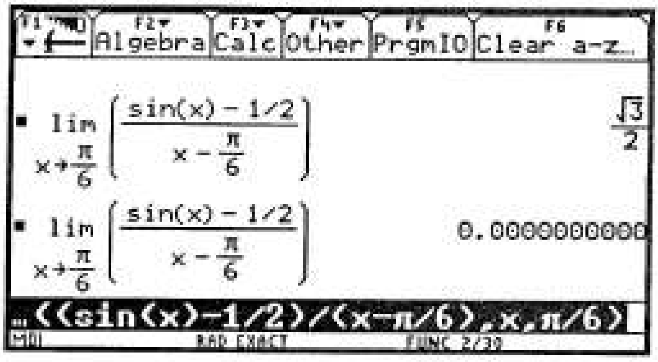
Heureusement, ∞ n'est pas associé à une « valeur approchée », on peut essayer :

∞ … $\boxed{\bullet}$ $\boxed{\text{enter}}$ …(réponse)………∞ (ouf !).

Mais la cohabitation d'un mode **exact** et d'un mode **approx** apporte son lot de surprises.

en mode **exact** —>

en mode **approx** —>



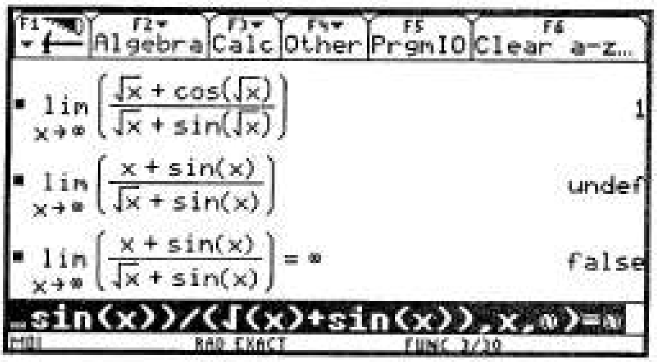
Ce conflit entre les résultats peut devenir délicat à gérer car plus rien n'indique, sur l'écran, que l'un a été obtenu en mode **exact** et l'autre en mode **approx**. Un utilisateur ayant quelque habitude du logiciel induira un indicateur de calcul **approx** implicite : c'est l'écriture des résultats sous un format décimal !

Ceci conforte encore une croyance construite tout au long de la scolarité :

présence de virgule <==> résultat approché.

Sur l'exemple qui suit, on peut encore souligner les insuffisances des algorithmes utilisés par la fonctionnalité **limit**.

La réponse **undef** est ici très inquiétante, car on peut la comprendre comme associée à « n'existe pas ». D'ailleurs, l'interrogation sous forme logique donne une réponse très explicite : **false** !

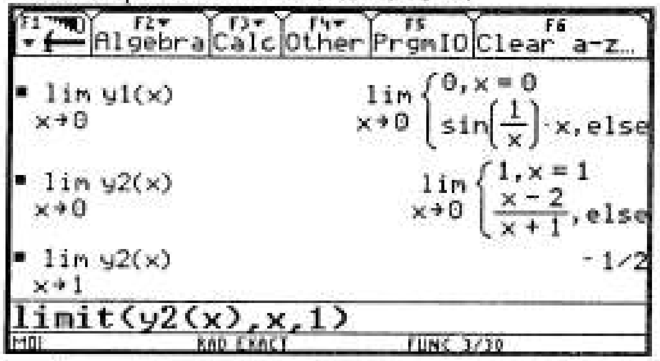


Si l'on s'intéresse à des fonctions définies à partir de prolongements, on obtient quelques situations qui justifient un contrôle critique de cette « boîte noire » :

$$y1 : x \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Réponse par... la question, ce qui s'interprète sans équivoque.

$$y2 : x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$



En $x_0 = 0$, la réponse est sans équivoque mais cet échec de l'algorithme est surprenant[1].

En $x_0 = 1$, la réponse est inexacte, du moins dans le second cycle des lycées : si une limite existe en un point de l'ensemble de définition de la fonction, elle doit être égale à la valeur de la fonction en ce point.

---

[1] *Voir « Liaison Lycée-Université », [Faure, 1997].*

II.1.c. Limites en 1ère S.

Objectifs

Dans cette partie, nous proposons une introduction pour la 1ère S de la limite $+\infty$ en $+\infty$ puis celle de limite finie en $+\infty$.

Il ne s'agit pas d'un cours exhaustif sur ce sujet, mais d'un extrait de cours qui, dans l'esprit de cet ouvrage, illustre nos intentions :

- respecter les compétences exigibles d'un élève de série scientifique ;
- préparer la construction du concept.

Les compétences et images mentales fondamentales seront fortement reliées entre elles :

- compétences « algébriques » pour les calculs de limites (voir chap. II.1.b) ;
- approche en terme d'ordre de grandeur (« ...f(x) $\approx \ell$ pour tous les x assez grands ») indispensable à la mémorisation des théorèmes sur les limites ;
- vision graphique (« ... la courbe est enfermée dans une bande d'axe $y = \ell$... ») indissociable du concept de limite.

Il reste hors de propos de restaurer une introduction des limites par une définition formelle. Dans cette phase sensible de construction, on cherchera à anticiper et contenir les éventuelles contaminations par d'autres concepts (monotonie, convexité ...) et on évitera les images qui pourraient obérer les définitions ultérieures (images dynamiques...). Une des difficultés de la leçon sera de ne pas confondre une susceptibilité tatillonne quant à la terminologie et la rectification des images mentales déviantes.

La problématique de cette leçon peut être introduite via une (brève) discussion sur la signification relative de la locution : *un grand nombre* ; puis, quand ce sera le propos, sur celle de : *un nombre près de*. Cet extrait de cours ne nécessite pas de pré-requis exceptionnel, mais une assez bonne compréhension de la notion de fonction majorée, minorée, bornée sur un intervalle ainsi que la signification de $f < g$.

Limite infinie en $+\infty$

Activité 1

On considère la fonction $f : x \to \sqrt{x} + 8 \sin(\sqrt{x})$ définie sur $]0 ; +\infty[$.

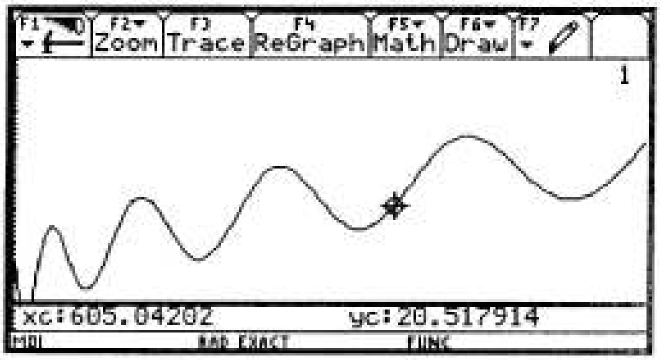
• Pouvez-vous donner une valeur de x qui ait une image supérieure ou égale à 20 ?

• En s'appuyant sur des représentations graphiques de f, proposer (sans démonstration) un intervalle $[a ; +\infty[$ où toutes les images par f sont supérieures à 20 ? Exprimer votre réponse en utilisant le terme « minoré ».

• Toujours avec la fonction $f : x \to \sqrt{x} + 8 \sin(\sqrt{x})$, il s'agit de trouver maintenant un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ où la fonction g définie par : $x \to 1\,000$ est telle que $f > g$.

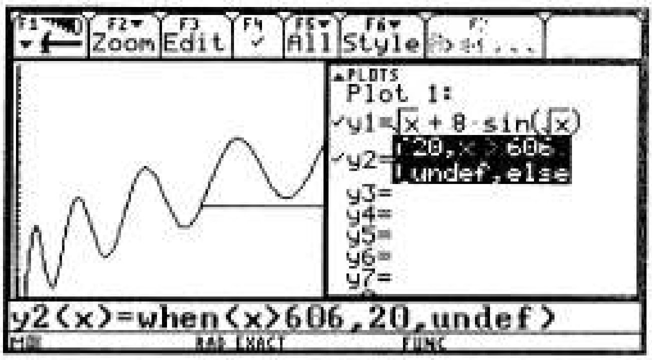
• Toujours avec cette fonction f, il s'agit de voir si on peut « placer la barre plus haut » , par exemple 10 000 ou plus à votre choix ; il faudra aussi prouver que votre intervalle $[a ; +\infty[$ convient.

Après quelques tâtonnements on arrive à une fenêtre convenable, et l'utilisation de trace suggère un intervalle :
$[605,1 ; +\infty[$ par exemple,
ou, plus simple : $[606 ; +\infty[$.



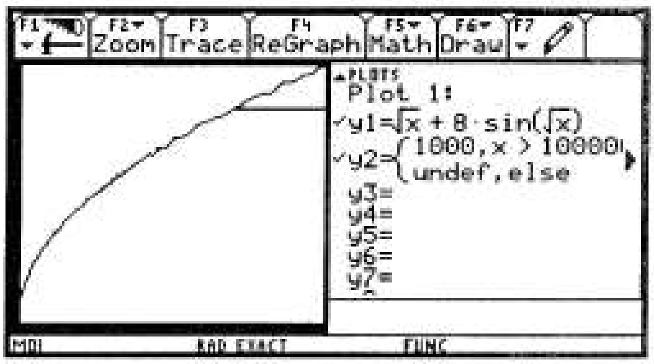
Pour l'interprétation graphique de cette minoration, on trace une demi-droite « horizontale », représentation graphique d'une fonction constante définie sur $[606 ; +\infty[$.

Le problème peut donc se reformuler en : « trouver un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ sur lequel, $g : x \to 20$, est telle que : $f > g$ ».

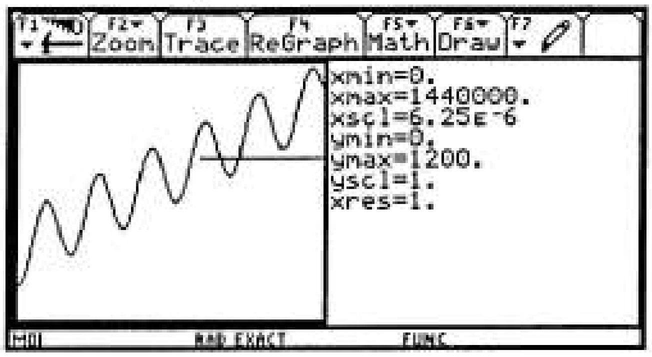


Pour la minoration de f par 1 000, une première tentative, dans la fenêtre : $[0 ; 1\,500\,000] \times [0 ; 1\,200]$ avec la fonction g éditée en y2.

Afin de voir plus précisément ce qui se passe dans le coin supérieur droit, on va utiliser la fonctionnalité **zoom**.



Effectivement, il semblerait que cette fonction g ne convienne pas.
On modifie donc la définition de g en :
g : x → 1000 pour x > 1 010 000.



Remarques.

• *Les* **zoom** *éventuels donnent des images peu explicites, ce qui renforce la demande d'une démonstration, la classe peut être aiguillée vers l'inégalité :* $f(x) \geq \sqrt{x} - 8$. *On peut bien sûr accepter une solution du type :*

$$a = \sqrt{\text{" hauteur de la barre"}} + 100$$

exprimant une condition suffisante sur a ; ce type de réponse est d'ailleurs assez fréquent.

• *La notation « f > g » est en général assez bien comprise et elle s'appuie sur une interprétation graphique bien assimilée, ceci plaide en faveur de l'utilisation de cette notion .*

• *On pourrait aussi conduire vers la notion de limite en utilisant une fonction g constante (définie sur* $\mathbb{R}$*), des comportements de f et g sur* $]-\infty ; a]$ *risquent de parasiter le concept de limite en cours de construction ; d'où notre choix d'une fonction g définie sur* $[a ; +\infty[$ *qui souligne l'aspect local de la notion de limite.*

• *Le choix de la fonction f est critique quant à l'image du concept en construction, cette activité apporte une image qui, complétée par d'autres plus traditionnelles, dissocieront limite/monotonie, limite/convexité... On peut aussi opter pour une fonction plus maniable telle : x → x + 8 sin x qui dissocie d'emblée monotonie/limites mais elle apporte moins de contre exemples et une invariance par translation qui peut être encombrante.*

• *Il semble délicat d'évoquer la notion de droite asymptote à ce niveau hautement sensible de la construction du concept : il y aurait grands risques de contamination entre limite et convexité.*

Activité 2

On considère maintenant la fonction f : x → $x^2 + 4$.

• Montrer qu'on peut minorer f par 100, 1 000, ... sur des intervalles de type $[a ; +\infty[$ que l'on précisera. Continuer avec des nombres aussi grands que vous voulez.

Remarque.

Il faut bien sûr illustrer la notion sur des situations plus banales que celle de l'activité 1, par exemple du type de celle qui est citée.

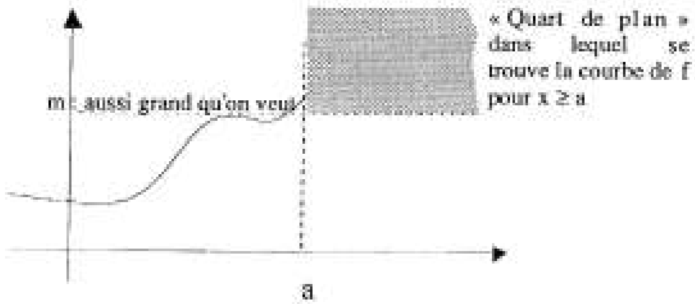
Définition

Soit une fonction f vérifiant la propriété suivante : f(x) est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit assez grand. On dit alors que « la limite de f en +∞ est +∞ » et on note :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \text{ (ou : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\text{).}$$

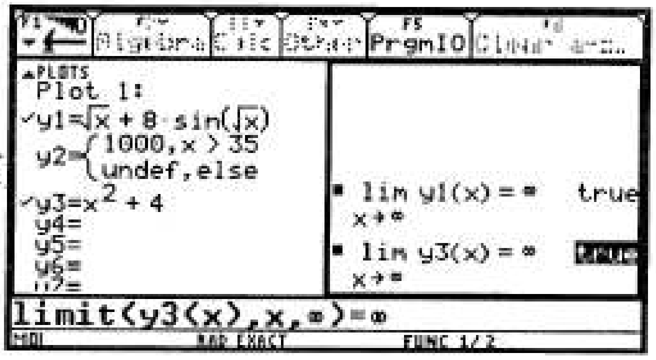
On « met la barre » m aussi haut que l'on veut.

Sur un [a ; +∞[approprié, toutes les images par f seront plus grandes que cet m.



Certaines calculatrices peuvent contrôler si cette propriété est vraie ou non. Ainsi :

- pour la fonction f : x → $\sqrt{x}$ + 8 sin($\sqrt{x}$) la propriété notée $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ est vraie ;
- pour la fonction f : x → $x^2 + 4$, la propriété notée $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ est vraie.



Remarque.

$\lim_{+\infty} f = +\infty$ est une propriété de certaines fonctions : cette option fondée sur les remarques préliminaires reste toutefois discutable. Le symbole $\lim_{+\infty}$ sera ensuite progressivement utilisé de façon opératoire en faisant remarquer ses qualités « algébriques ». Il faut penser à faire remarquer que, quand la fonction se nomme g, on écrit : $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

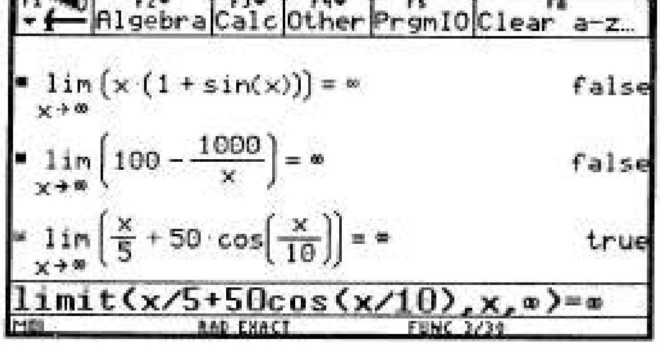
Exercices

1. D'après la calculatrice, la propriété $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ est fausse pour les fonctions définies respectivement par :

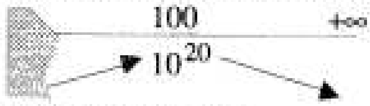
   x → x (1 + sin x) et

   x → 100 - $\frac{1000}{x}$

   • Observer des représentations graphiques de ces fonctions et expliquer les résultats donnés par la calculatrice.



2. Soit f dont un extrait du tableau de variation serait celui-ci :



• Peut-elle avoir la propriété $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$?

3. La calculatrice donne à la fonction $f : x \to \frac{x}{5} + 50\cos(\frac{x}{10})$ la propriété $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

• Préciser une fenêtre où la courbe obtenue plaide en faveur de cette propriété.

• On admet que le résultat donné par la calculatrice est exact et on considère l'équation : $f(x) = 20$. Cette équation a-t-elle un nombre fini ou un nombre infini de solutions positives ?

Limite infinie en $+\infty$, en $-\infty$

<u>Remarque.</u>

Pour définir les propriétés $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, on peut se contenter d'évoquer le caractère « symétrique » de ces trois situations. Il sera toutefois souhaitable de ne pas laisser sans commentaire la notation «∞» utilisée par le logiciel de la TI-92 qui se substitue à la notation «+∞» afin que le sens de certaines notations abusives (mais usitées) telle «± ∞» ne soit pas dégradé.

Il serait judicieux de faire formuler ces propriétés en termes de majoration/minoration ou en termes de comparaison avec des fonctions constantes definies sur des $[a ; +\infty[$ ou $]-\infty ; a]$.

Exercices

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par 1.
Peut-elle vérifier $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$? ; $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$? ; $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$? ; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \sin x$. Observer des représentations graphiques de cette fonction .
Peut-elle vérifier $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$? ; $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$? ; $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$? ; $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$?

<u>Théorème 1</u>

Les fonctions $x \to \sqrt{x}$; x ; x^2 ; x^3 ; ... x^n vérifient la propriété : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ (on peut aussi écrire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$).

Selon leur parité, les fonctions $x \to x$; x^2 ; x^3 ; ... x^n vérifient la propriété : $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

(on peut aussi écrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$).

Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$

Activité 3

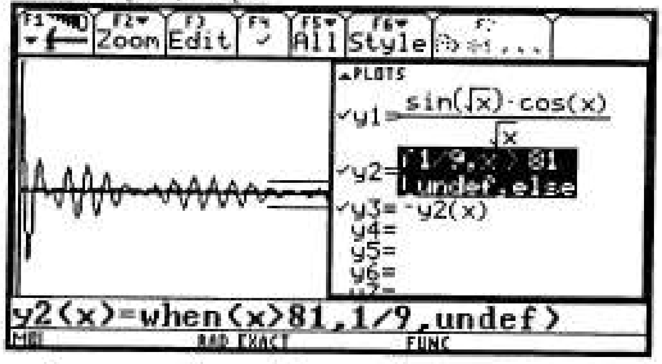
On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{20 \sin(\sqrt{x})}{x + 10 \cos x}$.

• Donner, par calcul mental, un ordre de grandeur de f(10 000), f(1 000 000) ; on pourra comparer aux résultats donnés par la calculatrice.

• D'après l'écran ci-dessous ($[0 ; 200] \times [-1 ; 1]$), il semble que l'on ait : $-g \leq f \leq g$ sur $[81 ; 100]$ où g est définie sur $[81 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1/9$.

Démontrez que cet encadrement est correct.

Est-il encore valable sur $[81 ; +\infty[$?



• Déterminer graphiquement (sans démonstration) un intervalle $[a ; +\infty[$ où on définirait g et -g avec $g(x) = 0{,}01$ qui encadreraient f.

Même question avec, au choix, $g(x) = 0{,}0001$ ou $g(x) = 0{,}00001$ ... (records à battre !).

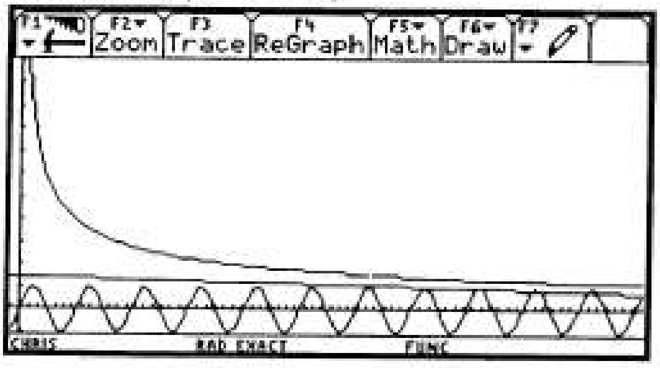
Activité 4

Les courbes (S), (H) et (D) représentent respectivement les fonctions :

$x \rightarrow \sin x$

$x \rightarrow \dfrac{10}{\sqrt{x}}$

$x \rightarrow ax + b$ avec $a = -0{,}01$ et $b = 1{,}5$

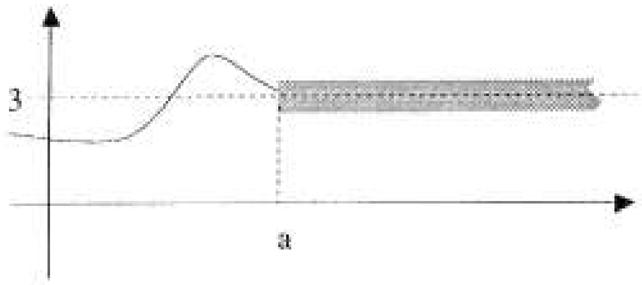


On s'intéresse aux intersections de (S) et (D) et aux intersection de (S) et (H).

Choisir des coefficients a et b pour que les intersection de (S) et (D) soient moins nombreuses que celles de (S) et (H).

On a pu encadrer, les fonctions précédentes aussi « finement » que l'on voulait en prenant un $[a ; +\infty[$ approprié (de façon plus imagée : étant donné une « bande » (un « tube ») axée sur la droite $y = k$, aussi étroite que l'on veut, on peut y enfermer la courbe de f sur un $[a ; +\infty[$ approprié).

Pour la fonction $x \to \dfrac{2x}{x^2+1} + 3$, on aurait les mêmes possibilités d'encadrements autour de la valeur 3 (la « bande » serait axée sur la droite $y = 3$)



Définition

Soit une fonction, dont toutes les images peuvent être enfermées dans une bande (axée sur une droite d'équation $y = k$) aussi étroite que l'on veut en prenant un intervalle $[a ; +\infty[$ approprié, on dit que « la limite de f en $+\infty$ est k » et on note : $\lim\limits_{+\infty} f = k$ (ou : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$).

Remarque.

- *Pour définir les propriétés $\lim\limits_{-\infty} f = k$, on peut évoquer le caractère « symétrique » de cette situation.*
- *On peut aussi solliciter une illustration du type de celle faite pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} + 3 = 3$ et une formulation en termes d'encadrement par des fonctions.*
- *Il faut, à ce niveau de la leçon, parler de droite asymptote «horizontale». Celle-ci doit être perçue le plus simplement possible comme l'axe de ces bandes et être associée de façon critique à une configuration typique de la branche infinie.*

Théorème 2

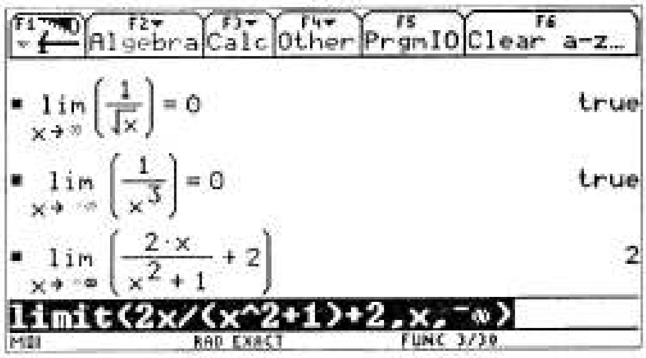
Les fonctions $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^3}$; ... $\dfrac{1}{x^n}$

vérifient la propriété $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$).

Les fonctions $x \to \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^3}$; ... $\dfrac{1}{x^n}$

vérifient la propriété $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$).

Ces propriétés des fonctions de références sont programmées.
On peut même interroger la calculatrice autrement :
« calcule la limite de $\dfrac{2x}{x^2+1} + 2$ en $-\infty$ »
La réponse est « 2 ».



Remarque. On introduit ici l'aspect opératoire du symbole $\lim$.

Limite en a, a réel.

$\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$

La leçon sur les limites se poursuit avec les cas de limites infinies en x_0 qui ne peut pas se construire à partir de comparaisons avec des fonctions constantes. Reste à multiplier les exemples en gardant quelques repères utilisés précédemment :
- on évite les expressions à connotation dynamique ;
- on peut garder l'image de la « bande » (avec axe vertical) ;
- on peut évoquer l'ordre de grandeur pour une image.

Cette notion d'ordre de grandeur d'une image est d'ailleurs critique pour la mémorisation des théorèmes portant sur « limites et opérations » qui amènent à la partie « algébrique » de la notion de limite.

La notion d'ordre de grandeur pourra encore être utilisée quand un résultat relèvera de la notion de continuité.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ (réel)

Sans l'occulter complètement, il n'y a pas lieu de s'étendre longuement sur ce cas au niveau de la 1ère S. On peut par exemple le présenter ainsi :
« $\pi \approx 10$ ne signifie pas grand chose si on ne parle pas d'approximation... $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ signifie que $f(x) \approx 3$, quelle que soit l'approximation voulue, à condition de prendre x assez près de 2. »

Pour les fonctions polynômes, on aura : $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$, par exemple ...

Limites et opérations

Les « ordres de grandeurs » attachés au symboles lim f = ... aideront à la mémorisation de ces théorèmes. Dans le cas des produits et quotients de fonctions, on pourra procéder comme lors de l'apprentissage de la multiplication des nombres relatifs : en dissociant le calcul sur la valeur absolue de celui sur le signe. Cette approche n'a bien sûr pas la valeur d'une loi de psychologie cognitive ; elle peut se révéler efficace pour les débutant ; la compétence dans l'utilisation de ces théorèmes estompera cette distinction en valeur absolue et signe. Elle a au moins l'avantage d'économiser la notion obsolète de « limite en ... égale à l^+ ».

Théorèmes

Limite de la somme de deux fonctions

SI f a une limite en a qui est (cf. ligne n°0)
ET
SI g a une limite en a qui est (cf. col. n°0)
ALORS
f + g a une limite en a qui est (cf. tableau).

g a pour limite \ f a pour limite	l	+∞	-∞
m	*l+m*	+∞	-∞
+∞	*idem*	+∞	?
-∞	*idem*	*idem*	-∞

Remarques :

1. Noter la symétrie du tableau due à la commutativité de l'addition.
2. Le cas signalé par ? se dit : «cas indéterminé "∞ - ∞"».

Limite du produit de deux fonctions

SI |f| a une limite en a qui est (cf. ligne n°0)
ET
SI |g| a une limite en a qui est (cf. col. n°0)
ALORS
|f x g| a une limite en a qui est (cf. tableau).
Pour fxg, utiliser en plus la règle des signes.

|g| a pour limite \ |f| a pour limite	l>0	0	+ ∞
m >0	*l m*	*0*	+ ∞
0	*idem*	*0*	?
+ ∞	*idem*	*idem*	+ ∞

Remarques :

1. Noter la symétrie du tableau due à la commutativité de la multiplication.
2. Le cas signalé par ? se dit : «cas indéterminé "∞ x 0"».

Limite du quotient de deux fonctions

SI |f| a une limite en a qui est (cf. ligne n°0)
ET
SI |g| a une limite en a qui est (cf. col. n°0)
ALORS
|f / g| a une limite en a qui est (cf. tableau)
Pour f/g, utiliser en plus la regle des signe

|g| a pour limite \ |f| a pour limite	l>0	0	+ ∞
m >0	$\frac{l}{m}$	*0*	+ ∞
0	+ ∞	??	+ ∞
+ ∞	*0*	*0*	?

Remarque :

1. Le cas signalé par ? se dit : «cas indéterminé "∞ / ∞"».
2. Le cas signalé par ?? se dit : «cas indeterminé "0 / 0"».

Exercices

1. Pour chacune des fonctions qui suivent, faire des recoupements entre :

- l'image d'un grand nombre (au choix) obtenue par calcul mental ;
- la valeur de la limite en $+\infty$ donnée par la calculatrice ;
- une représentation graphique dans une fenêtre pertinente ;
- votre avis quant à une éventuelle propriété de limite en $+\infty$.

Exemple : soit $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$.

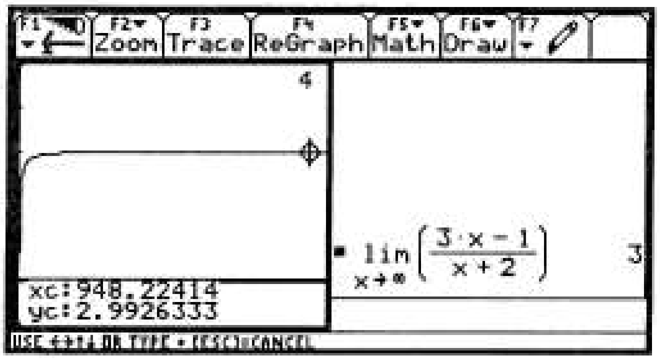
Réponse :

• $f(10^6) \approx 3$ (application graphique, trace ...)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ (application home)

• la courbe semble avoir une asymptote horizontale.

On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ car ...



- Reprendre la même démarche pour :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$; $g(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x}$; $h(x) = \cos\left(\dfrac{x}{50}\right) \times \sin x$.

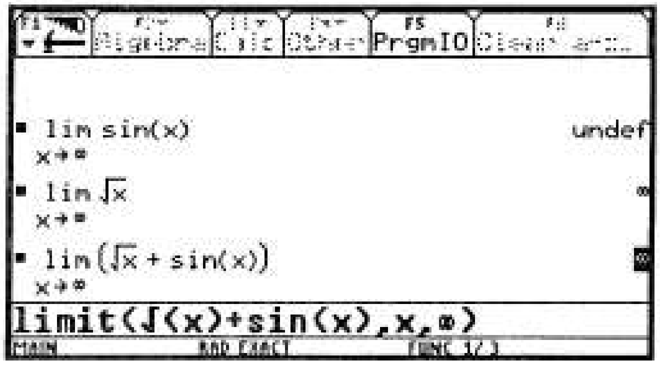
2. On considère l'équation : $\dfrac{1000x}{x^2+1} = m$ ainsi que l'inéquation $\dfrac{1000x}{x^2+1} \leq m$ où m est un réel positif donné. On appelle f la fonction $x \to \dfrac{1000x}{x^2+1}$.

• Observer ce que la calculatrice donne comme solution avec m = 100, avec m = 1000, avec m = 0,1. Démontrez que ces réponses sont valides. Interpréter graphiquement ces réponses.

• En déduire les solutions des trois inéquations obtenues pour ces trois valeurs de m.

• Pouvez-vous, sans calcul, donner et justifier le nombre de solutions de l'équation avec m = 0,000 001 ?

3. Revoir les théorèmes sur la limite de f + g et commenter ces résultats donné par la calculatrice. Pouvez-vous imaginer deux fonctions f et g n'ayant pas de limite en $+\infty$ alors que f + g a une limite en $+\infty$?



Commentaires et remarques sur les exercices précédents

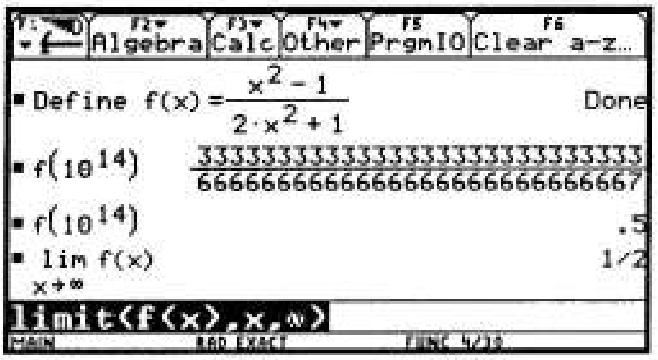
1. Il s'agit essentiellement de verbaliser les diverses facettes du concept de limite et d'en souligner la cohérence.

- Dans le champ numérique « la limite de f en $+\infty$ est 1/2 » donnera l'appréciation subjective de « l'image d'un grand nombre est un nombre près de 1/2 »; on peut profiter de la confrontation du mode exact et du mode approché pour débattre du sens de « près de ».

en mode **exact** ——>

en mode **approx** ——>

calcul formel de la limite ——>



- Dans le champ géométrique (i.e. : graphique) : l'allure de la courbe, pour un cadrage pertinent, est révélatrice de l'existence et de la valeur d'une limite à relier à la présence d'une droite asymptote à la courbe.

La fonction g sera l'occasion de montrer que la valeur de la limite peut être atteinte pour certaines valeurs de x et conjointement, que courbes et asymptotes peuvent se couper.

La fonction h sera l'occasion de rappeler l'exemple fondamental d'une fonction n'ayant pas de limite en $+\infty$ et de revenir sur l'image de la « bande contenant la courbe ».

Avec le même objectif, ce type d'exercice peut aussi se construire pour la limite infinie en x_0 et permettra utilement d'en délimiter le concept tout en évitant de le réduire à une simple manipulation algébrique.

2. Sauf sollicitation, il n'est pas utile ici d'entrer dans le champ des équations du second degré avec paramètre mais plutôt de renforcer les images de limite 0 en $+\infty$ en les reliant au champ des représentation graphiques des équations et inéquations. La calculatrice fournit sans problème l'ensemble des solutions (vide pour m = 1000) il ne s'agit ensuite que d'interpréter ces réponses et de les valider par une résolution algébrique.

3. Sans s'y étendre, cet exercice soulignera les conditions suffisantes qu'expriment les théorèmes dits « limites et opérations » et donnera sens à l'existence des cas indéterminés. Attention toutefois de maîtriser la discussion qui risque de conduire à la recherche de deux fonctions n'ayant pas de limite (en...) alors que f+g a une limite infinie ! {$f(x) = x \sin^2 x$ et $g(x) = x \cos^2 x$ ...}

II.1.d. Limites en TS.

Objectifs

En 1ère, les situations types sont apportées par des fonctions rationnelles qui, par leurs propriétés créent, sinon confortent, des images mentales erronées quant au concept de limite, citons :

- la croissance de f est une condition nécessaire, voire suffisante, à l'existence d'une limite infinie ;
- une courbe ne coupe pas sa droite asymptote (quand elle existe) ;
- si f n'est pas définie en x_0, alors il y a une asymptote verticale ...

Sans perdre de vue l'objectif d'une compétence algébrique quant aux limites, il s'agit de rafraîchir le concept de limite qui, à travers les situations types de 1ère, a quelque peu perdu sens.

En terminale, le concept de limite en $\pm\infty$ se complète par les théorèmes dits « des croissances comparées » : l'expression même comporte une confusion entre comportement local et comportement global des fonctions.

Activités et exercices

Activité 1

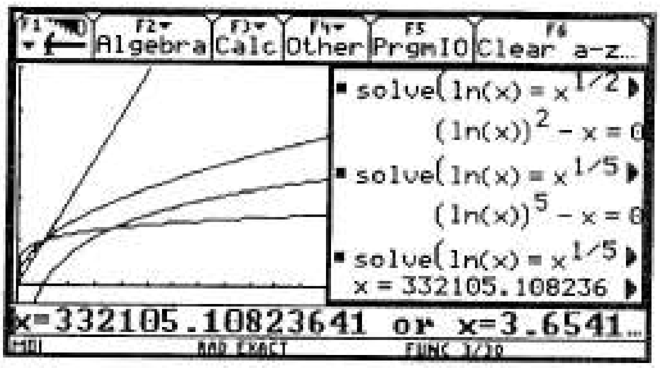
On veut étudier les intersections des courbes (L) et (P) d'équations respectives : $y = \ln x$ et : $y = x^r$.

• Dans une première partie, r est de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier le nombre de solutions ; localiser les abscisses des éventuelles solutions. Démontrez toutes vos affirmations.

• Dans une deuxième partie, on cherchera à généraliser cette étude à $r \in \mathbb{R}$.

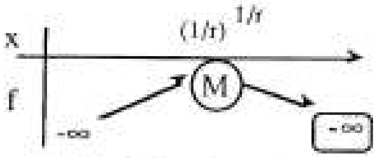
Les représentations graphiques de $y = \ln x$; $y = x$; $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[5]{x}$ permettent d'émettre quelques conjectures.

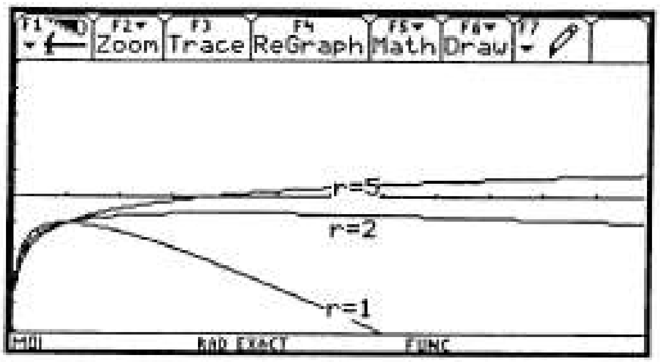
L'utilisation de **solve** en mode **exact** n'apporte pas de réponse, par contre, en mode **approx**, **solve** donne des valeurs approchées des deux solutions.



Une démarche fondamentale en terminale : l'échec de l'algèbre conduit à utiliser l'analyse. On introduit les fonctions :

$$f : x \to \ln x - x^r, \ (r = 1/n)$$





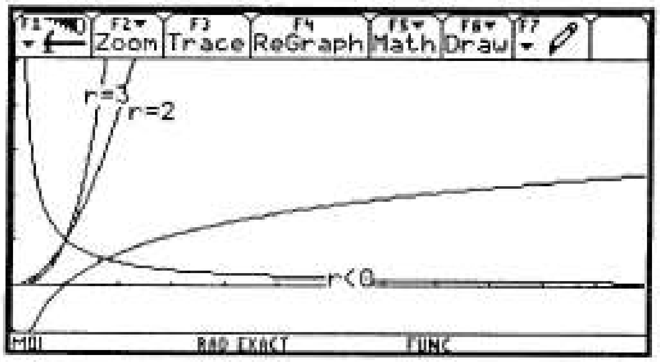
La détermination de M et de la limite en $+\infty$ sont essentielles pour conclure par application du théorème de la bijection. Graphiquement, la limite en $+\infty$ n'est pas évidente dès que n prend des valeurs non triviales et ici s'illustrent bien les théorèmes sur ces « croissances comparées ». On a, quand $n > 2$, deux solutions, l'une a_n sur $[n^n ; +\infty[$ (que solve ne peut pas détecter pour $n \geq 20$), l'autre b_n sur $[e ; n^n]$. Pour l'enseignement de la spécialité mathématique, l'activité peut se prolonger par la recherche des limites des suites (a_n) et (b_n).

On obtient, à l'aide du théorème des gendarmes, $\lim(a_n) = +\infty$.

Le théorème de la convergence monotone permet d'affirmer la convergence de (b_n) vers une limite réelle ℓ, or Lim $\sqrt[n]{\ell} = \ln(\ell)$ donc $\ell = e$.

Pour $r < 0$, la fonction f est strictement croissante de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Pour $r > 1$ on utilise la même étude que pour $r = 1/n$.



Activité 2

Soit (C) la courbe représentative de g définie par : $g(x) = e^{-x}$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- si $f(x) > g(x)$, alors $f'(x) > 0$;
- si $f(x) < g(x)$, alors $f'(x) < 0$;
- si $f(x) = g(x)$, alors $f'(x) = 0$.

Représenter (C) et « à main levée », représenter des courbes susceptibles de représenter f.

Peut-on avoir des solutions affines croissantes ; décroissantes ?

Peut-on avoir une solution de type : ax^n ; de type : $ax^n + b$? (où n entier non nul).

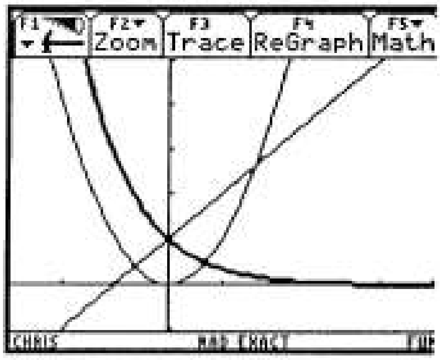
Trouver une (des) solution(s) monotone(s) croissante(s) ; décroissante(s) sur $\mathbb{R}$.

Trouver (des) solution(s) non monotone(s) sur $\mathbb{R}$.

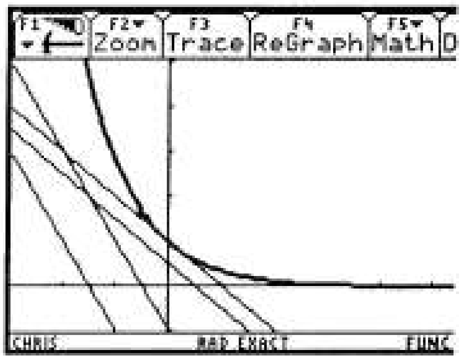
Il sera utile de faire une petite mise au point de logique : on ne donne pas des équivalences et les réciproques s'établissent par des considération de « tiers exclu ». Cette difficulté peut être éludée en modifiant l'énoncé en « $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ ».

• Les deux premières questions peuvent être traitées dans un autre ordre. Ci-contre, on a représenté (C) et les courbes de $x \to x + 1$ et $x \to x^2$, il s'agit d'entrer au mieux dans la problématique :

- à l'intersection des courbes, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas respectée ;
- à « l'extérieur » de (C), la condition $f'(x) < 0$ n'est pas respectée ;
- à « intérieur » de (C), la condition $f'(x) > 0$ semble respectée…

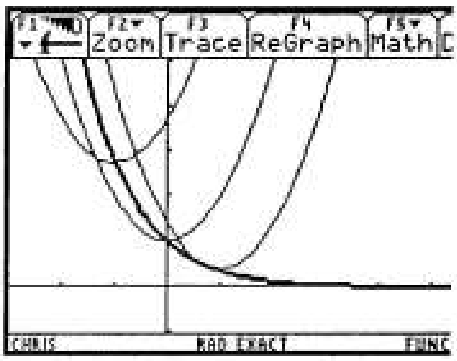


• Les fonctions affines décroissantes fournissent toute une classe de solutions. Il peut être à propos de formaliser ce résultat en cherchant l'expression des fonctions affines solutions.
La fonction représentée par une tangente à (C) n'est pas solution.



• En considérant la parabole représentant une solution, la propriété « le sommet est sur (C) » pourra alimenter un débat sur condition nécessaire / condition suffisante.

• Pour ces paraboles dont le sommet à été choisi sur (C) grâce à un utile retour sur l'expression des fonctions associées à « carré », il semblerait que nous ayons là quelques solutions non monotones… L'activité peut être explorée selon l'axe : « quelles sont les fonctions $x \to (x+a)^2+e^a$ qui vont être solution ». Cette recherche peut s'aborder via l'étude d'une famille de fonctions exprimant la position de (C) par rapport aux paraboles.



• Proposer la recherche de solutions non monotones (autres que les trinômes ci-dessus) sous forme de défi. On pourra suggérer des raccordements. La dérivabilité au point de raccordement pourra être prétexte à un retour sur la définition de dérivabilité en un point.

Exercices

1. Étudier le nombre de solutions sur]0 ; +∞[de l'équation : $\dfrac{10}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin x}{10}$.

2. Étudier le nombre de solutions sur]0 ; +∞[de l'équation : $\sqrt{\sqrt{x}} = 10 \sin x$.

3. Existence de solutions sur [0 ; +∞[de l'équation : $\sqrt{\sqrt{x}} = \ln(x+2)$.

4. Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ peut-elle avoir les deux propriétés :

   a) « $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ » et « f est majorée sur $\mathbb{R}$ ».

   b) « $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ » et « f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ ».

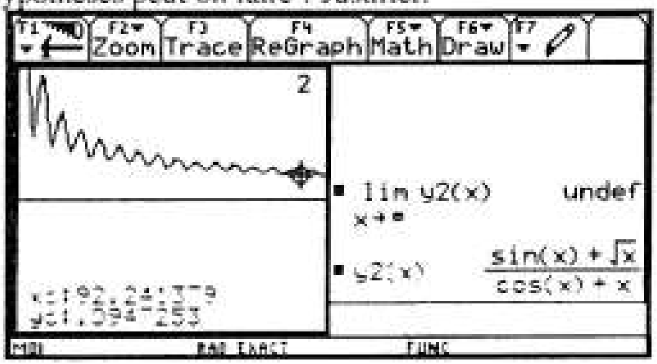
5. Dans une copie d'élève, on relève : « … f est définie sur $\mathbb{R}$ - {1} … et vérifie : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ … l'inéquation sur $\mathbb{R}$: $f(x) > 5$ a pour solution] 0; 10[».

   Chercher la ou les incohérences.

6. Dans le registre y2, on a la fonction $f : x \to \dfrac{\sqrt{x} + \sin x}{x + \cos x}$.

   Dans la fenêtre : [0 ; 100] × [-0.5 ; 0.5], on a la courbe de f.

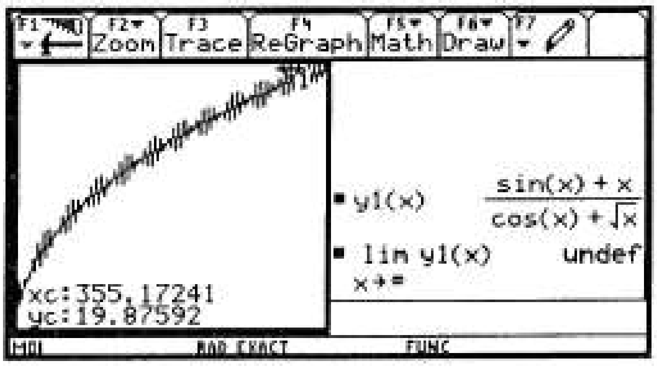
   Quelles hypothèses peut-on faire ? Justifier.



7. Dans le registre y1, on a la fonction $f : x \to \dfrac{x + \sin x}{\sqrt{x} + \cos x}$

   Dans la fenêtre : [0 ; 400] × [0 ; 20], on a la courbe de f.

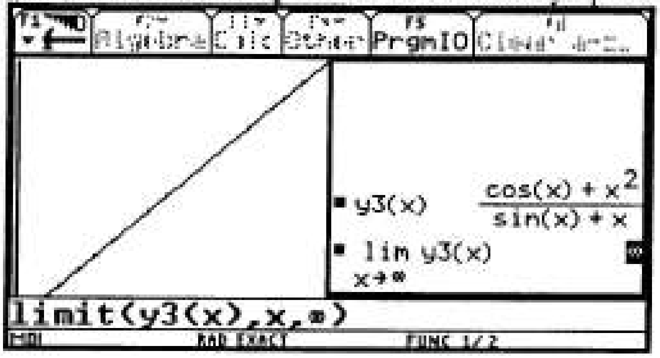
   En remarquant que, sur [1 ; +∞[on a $f(x) \geq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$; quelles hypothèses peut-on faire ? Justifier.



8. Dans le registre y3, on a la fonction f : $x \rightarrow \dfrac{x^2 + \sin x}{x + \cos x}$.

Dans la fenêtre : [0 ; 400] × [0 ; 400], on a la courbe (Cf) de f.

Est-ce que (Cf) admet la droite y = x comme droite asymptote ?



9. On s'intéresse aux intersections de la courbe(C) représentant : x → ln(x) et de la droite (Δ_n) : $y = \dfrac{x}{10^n}$; n entier .

On porte ce problème dans le champ des équations et on utilise **solve(** ou **zeros(** avec diverses valeurs de n : n = 0 ; 1 ; 3 ; 20 ; 100 …

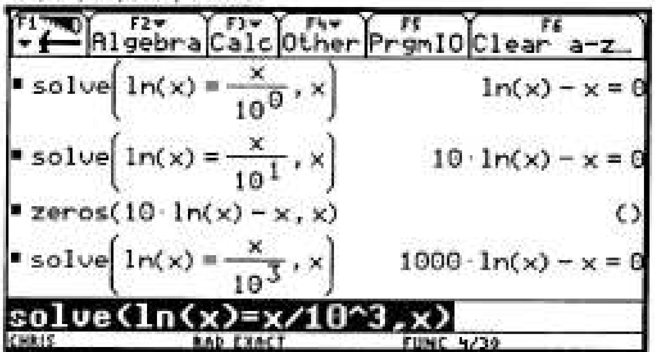
Nous sommes en mode exact, la réponse de la calculatrice peut s'interpréter :

« ne peut pas résoudre»

« ne peut pas résoudre»

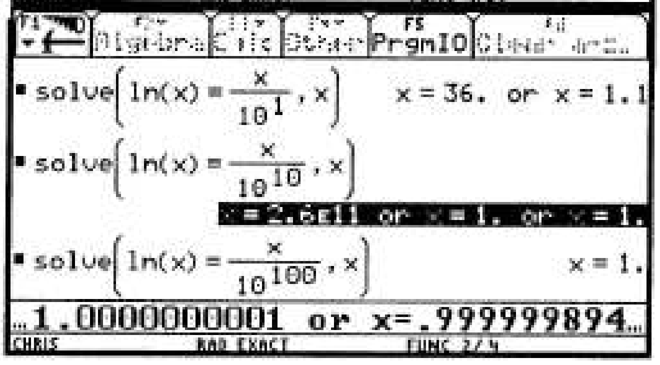
« pas de solution»

« ne peut pas résoudre»



Mais en mode **approx**, on aura aucune, une, deux ou même trois solutions.

Il s'agit de déterminer ce qu'il en est réellement du nombre d'intersections des courbe (C) et (Δ_n).



Commentaires et remarques sur les exercices précédents

1. Mode exact ou mode approx la calculatrice ne peut donner de solution.

On pourra discuter utilement la réponse « $x\ (\sin(x))^2 = 10000$ » donnée, en mode **exact**, par la machine.

Cette reécriture du problème pourra alimenter des approches variées par l'analyse ; la représentation de courbes nécessitera une réflexion sur les ordres de grandeur afin de définir une fenêtre pertinente.

Enfin, un retour au sens de « limite » donnera une solution efficace au problème.

2. En revenant au sens de limite $+\infty$ en $+\infty$ de la fonction $x \to \sqrt{\sqrt{x}}$, on a une réponse qualitative : il existe un nombre fini de solutions.

Le mode **exact** n'apporte pas de solution mais une reécriture en :

« $10000\ (\sin(x))^4 - x = 0$ » .

Le mode **approx** donne quatre solutions !

La représentation graphique laisse entrevoir un grand nombre de solutions, mais il faudra compter avec la résolution de l'écran qui ne permettra pas de représenter $y = 10 \sin x$ sur de grands intervalles.

On pourra solliciter une évaluation du nombre exact de solutions : cela demandera beaucoup de lucidité et la calculatrice sera très utile pour compter les réels de la forme $\pi/2 + 2k\pi$ inférieurs à 10000…

3. Une approche par « croissances comparées » donnera quelques intuitions qu'une étude complète de fonctions viendra confirmer. Sinon, en mode **approx**, la calculatrice donne une (la) solution approchée.

On pourra aussi exploiter la notation x^r avec r rationnel. Beaucoup de variations sont possibles en considérant : $\sqrt{\sqrt{x}} = \ln(x + k)$…

4 et 5. Dans l'esprit « questions rapides » ou « vrai / faux » : ces exercices seront utiles quand, chez lui, l'élève reviendra sur la leçon, puis, en cours, pour créer un débat autour du concept de limite infinie. Les contre-exemples proposés par les élèves seront aussi l'occasion d'un retour sur la notion de majorant et sur l'aspect « local » de la limite (sans s'y attarder).

6, 7 et 8. Un entraînement à la technique d'encadrement (théorème « des gendarmes ») qui doit aussi réveiller une attitude critique chez les élèves.

9. On cherche à développer une attitude expérimentale et critique. On sollicite aussi les élèves dans leurs compétences algébriques, leur culture en analyse et leur imagination lors des déplacements entre contexte d'équation (et ses interprétations graphiques) et contexte d'analyse. Les déplacements à l'intérieur de chaque contexte (réécriture de l'équation en équation équivalente, choix des fonctions considérées…) seront l'occasion de débats critiques sur les méthodes.

II.2. Suites

II.2.a. Enseignement et calculatrices.

Enseignement

L'enseignement des suites au lycée commence seulement en première, on le retrouve dans toutes les sections mais avec des objectifs différents.

Dans les sections non scientifiques

En règle générale, dans les sections non scientifiques, sont privilégiées les notions portant sur les statistiques, probabilités, calculs financiers.., Ainsi, il paraît assez naturel que soient essentiellement développées les seules notions de suites arithmétiques et géométriques. On met l'accent sur la modélisation de systèmes, le calcul de certains termes ou de leur somme. Les problèmes de convergence sont a priori absents ainsi que les problèmes d'approximations de réels. Des introductions à caractère géométrique sont toutefois possibles.

En section scientifique

Une place assez importante est donnée ici encore, en première, aux suites arithmétiques et géométriques mais l'objectif sera d'avoir des « suites de référence » pouvant permettre des comparaisons lors des études de suites, orientées autour de deux pôles :

- comportement global (monotonie, bornes, périodicité) ;
- comportement asymptotique qui comprend lui même deux aspects :
  - qualitatif (convergence ou non) ;
  - quantitatif (évaluation de la rapidité de convergence).

De plus, le programme recommande l'utilisation des suites autour de deux exemples :
- approximation d'un réel ;
- résolution d'une équation (par exemple par la méthde du « point fixe »).

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'un enseignement en série scientifique de lycée. Un des principaux problèmes sera alors la notion de convergence. Luc Trouche[1], à propos des limites de fonctions, relève l'existence de trois points de vue possibles :

- cinématique (la variable tire la fonction) ;
- approximation (le degré d'approximation que l'on veut tire la variable) ;

[1] *Luc Trouche, « Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation », Thèse, 1996, Universite de Montpellier II.*

- opératoire (règles formelles de calcul).

En ce qui concerne les suites au lycée, la notion intuitive de limite s'appuie complètement sur celles des fonctions. Ainsi, de la même façon que pour les fonctions, le point de vue opératoire dans la recherche de limites est dominant, l'observation de graphiques et de tables numériques privilégie toutefois un point de vue cinématique. Mais, le point de vue approximation qui reste fondamentalement et historiquement lié au concept de suite est recommandé par les programmes.

La définition suivante de la convergence d'une suite :

> (u_n) converge vers ℓ si et seulement si, quelle que soit l'approximation de ℓ choisie (quel que soit l'intervalle centré sur ℓ), tous les termes de la suite sont dans cet intervalle, sauf un nombre fini d'entre eux.

nous semble devoir permettre de renforcer ce point de vue approximation.

Calculatrices

Dans l'application Home

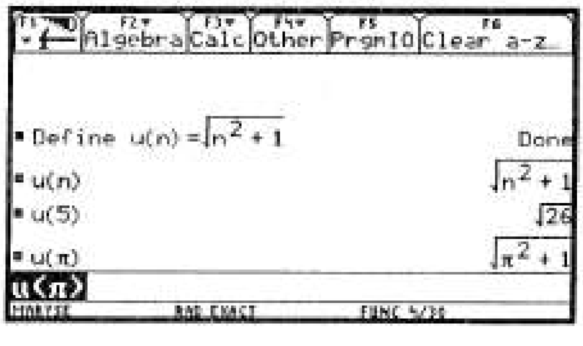
Une des principales innovations d'une calculatrice symbolique est la possibilité d'obtenir <u>une représentation symbolique des termes d'une suite</u>. Avec la TI 92, ceci est possible par exemple dans l'application **Home.**

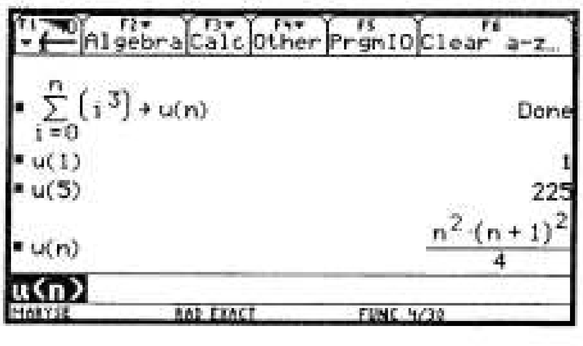
Deux possibilités pour cela :

- soit utiliser l'instruction **Define** (menu F4. 1, ou écrire **Define**) ;
- soit utiliser la touche **STO** (qui se matérialise sur l'écran par $\rightarrow$).

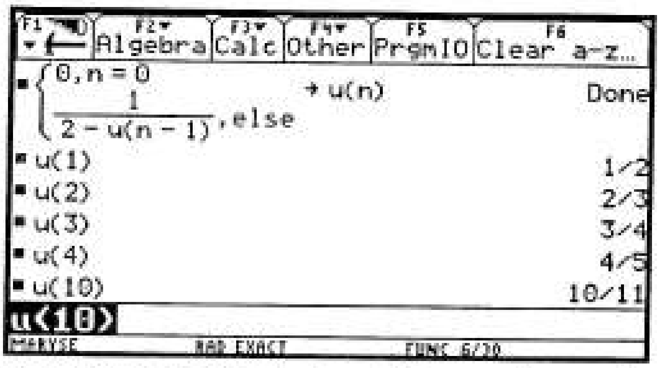
La syntaxe de l'instruction **Define** est peut être plus en accord avec une écriture papier/crayon, puisque l'on écrit **Define u(n) =**, alors que la touche **STO** qui renvoie a une affectation est un processus plus obscur pour les élèves.

Dans les exemples ci-dessous, on a défini une suite du type $u_n = f(n)$, et une suite définie par une somme $u_n = \sum_{i=0}^{i=n} f(i)$, en utilisant conjointement l'instruction Σ. Notons que dans tous les cas n désigne une variable qui n'est pas forcément entière, ainsi la calculatrice ne refuse pas de calculer $u(\pi)$ par exemple. Notons aussi que si u(n) est définie par une somme et qu'une expression simplifiée de u(n) en fonction de n est connue par la calculatrice, u(n) n'apparaît plus sous forme de somme.



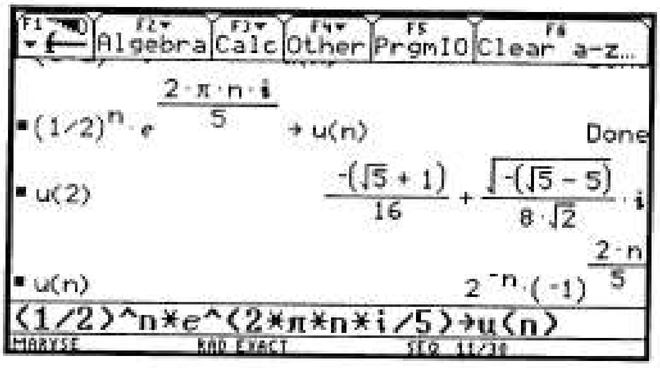


On peut également définir une suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$, en utilisant l'instruction **When** (notons que la définition papier, donnée le plus souvent sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, demande alors a être interprétée et reécrite au rang n-1).



Tout ceci, peut permettre de faire des hypothèses sur l'expression d'un terme général ou sur des expressions de sommes.

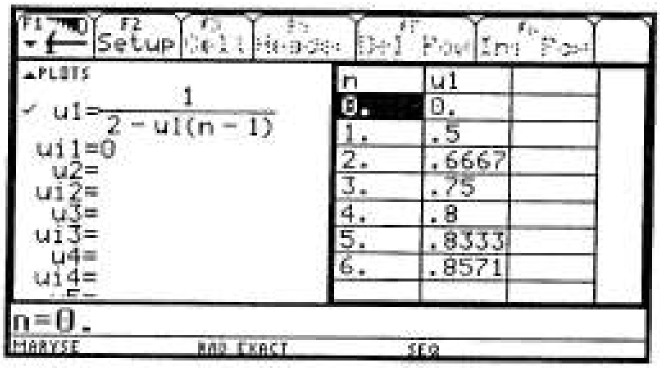
On peut aussi utiliser cette possibilité pour des suites complexes, mais un travail d'interprétation reste alors peut-être à faire.



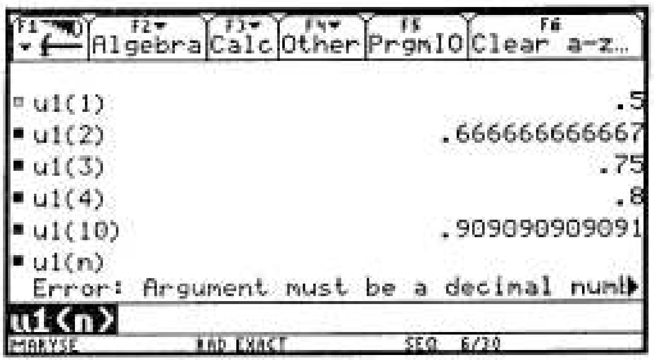
Dans l'application Graph

Un répertoire « suite », peut aussi être utilisé, comme sur les calculatrices graphiques plus anciennes. Pour y accéder, il faut alors régler la calculatrice en mode **séquence**. Ce répertoire permet d'obtenir des tables de valeurs et des représentations de suite.

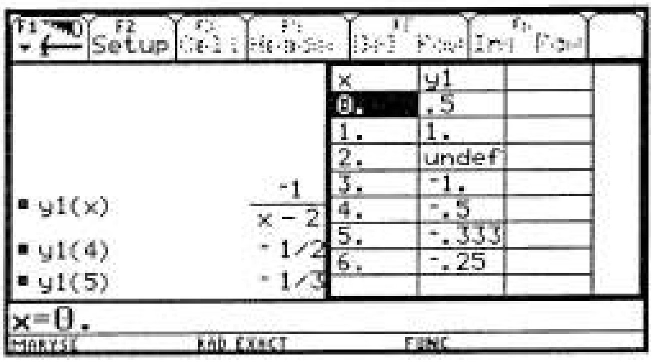
- Tableau de valeurs.



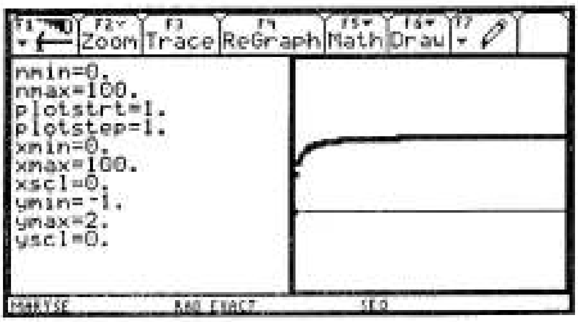
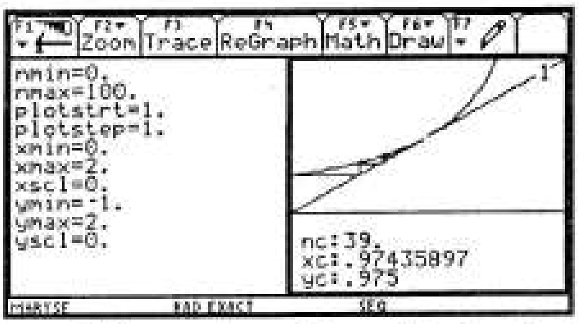
Mais il permet seulement d'obtenir les valeurs de u_n en représentation tronquée, aussi bien dans les tables que dans l'application **Home**, indépendamment du fait que celle-ci soit réglée en mode **exact**. Toutefois, ces tables et valeurs peuvent permettre de faire des hypothèses sur le comportement global et asympotique de la suite.



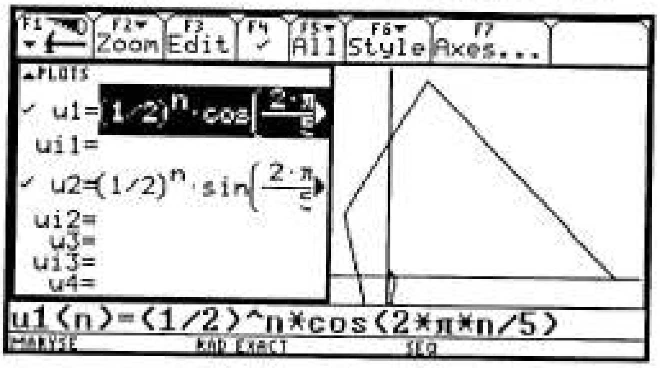
Remarque : notons ici la différence de traitement entre les suites et les fonctions, puisque pour une fonction définie dans le répertoire fonction (y1), on peut retrouver dans l'application **Home** des valeurs de f(x) en représentation symbolique.



- Représentation graphique des termes d'une suite.

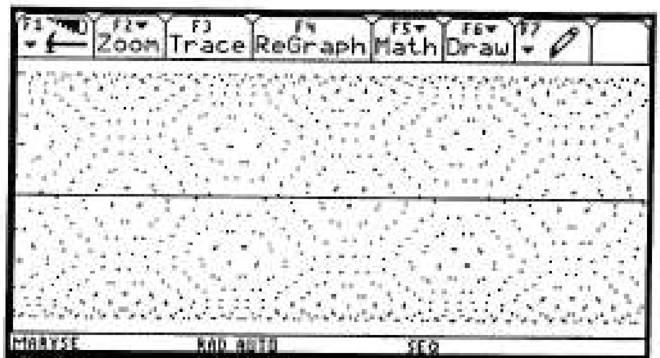
 Soit en mode **time** (de la forme u_n en fonction de n).	 Soit en mode **web** (u_n est l'ordonnée d'un point du graphe de la fonction « support »).

On peut aussi utiliser le répertoire suite de la calculatrice pour des suites complexes et obtenir une représentation des points correspondants en utilisant le mode **custom** (u1(n) définit l'abscisse du point et u2(n) son ordonnée). Ainsi, pour la suite complexe que nous avions déjà définie dans l'application **Home**, on aura en style **line** (les points sont reliés) :



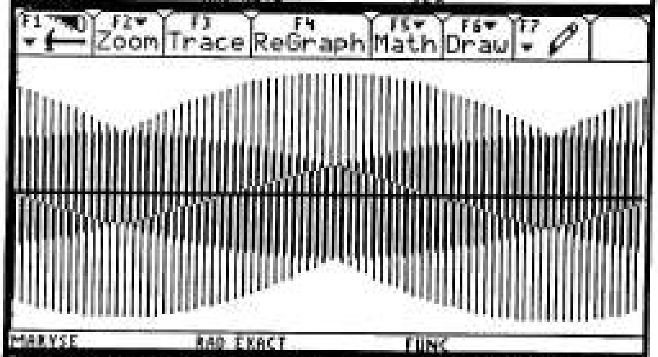
Remarque : notons ici encore la différence de traitement entre la représentation d'une suite, même en mode **time**, et celle d'une fonction en observant la représentation d'une suite de type u(n) = f(n) et la fonction correspondante. Par exemple si l'on compare les représentations de u(n) = sin n et f(x) = sin x. Les différentes « géométries » des représentations observées peuvent surprendre... ou être l'objet d'une tentative d'explicitation.

La suite sin n pour n de 0 à 1000. Il faut régler la fenêtre avec XMin = 0 et XMax = 1000. Les 1000 valeurs correspondantes de u_n sont affichées en style **dot**, mais à ce moment là plusieurs pixels sont « allumés » dans une même colonne.

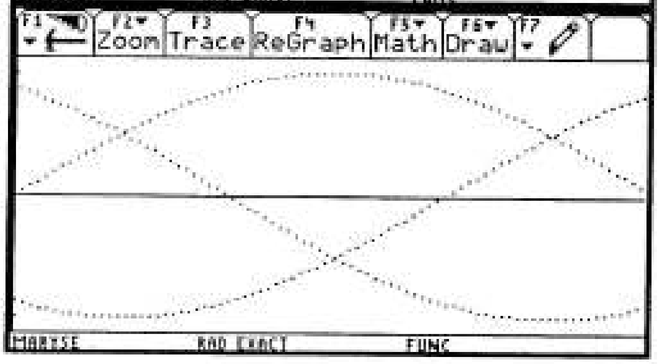


La fonction sinx sur l'intervalle [0 ; 1000].

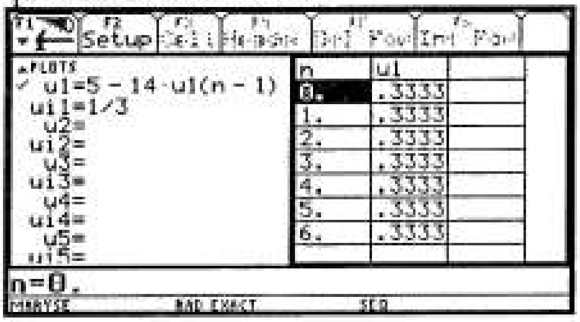
Seules les valeurs correspondant à : $x_k = k \times \frac{1000}{238}$ sont calculées et les pixels correspondants « allumés » et reliés en style **line**...

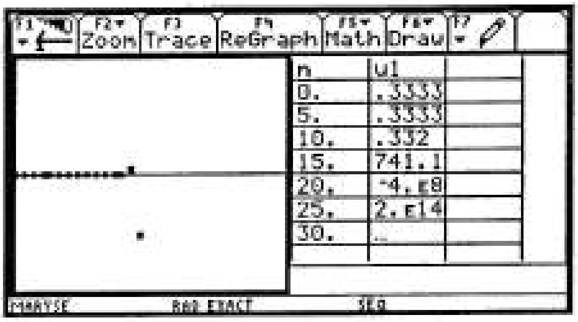


Ou non reliés, en style **dot**, ce qui permet peut être de mieux comprendre le phénomène des pseudo-sinusoïdes qui apparaissent.

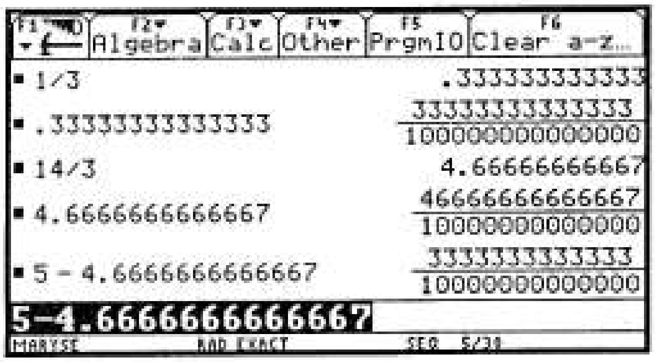


Mais, si l'emploi de calculatrices graphiques et symboliques peut permettre de conjecturer le sens de variation, l'existence ou non d'une limite par une observation graphique des termes de la suite ou par celle d'une table de valeurs, les processus de calcul « approché » des calculatrices peuvent aussi entraîner des comportements « aberrants » qu'il faut savoir identifier.

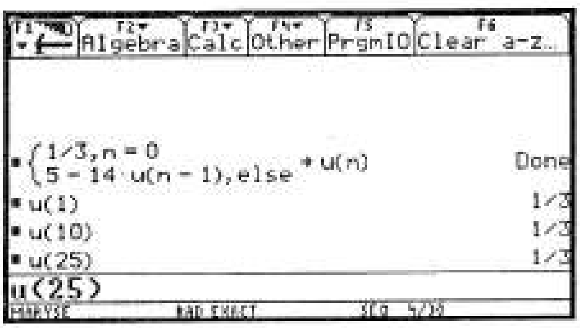


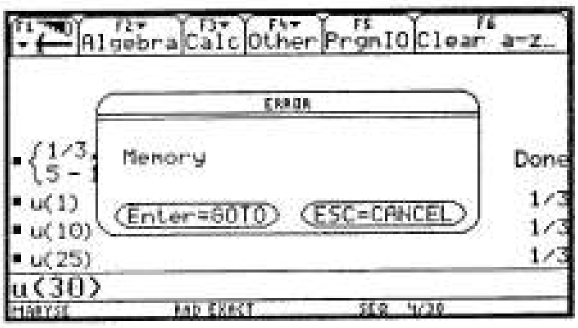


La suite u définie par $u_n = 5 - 14\ u_{n-1}$, $u_0 = \frac{1}{3}$ est stationnaire puisque $\frac{1}{3}$ est un point fixe de $f(x) = 5 - 14\ x$. Le répertoire suite des calculatrices, ne rend pas compte de cette propriété. En effet, dès le calcul du premier terme, u_1 il y a une différence. $\frac{1}{3}$ appartient à l'intervalle [0 ; 1] ; son écriture en représentation tronquée comporte 14 chiffres 3 (12 « apparents » et deux cachés). 5 et $\frac{14}{3}$ appartiennent à l'intervalle [1 ; 10] ; leur écriture comporte seulement 13 chiffres après la virgule (dont deux cachés) ainsi que leur différence... Pour la calculatrice, on a donc déjà $\frac{1}{3}$ différent de $5 - \frac{14}{3}$...



En utilisant l'application **Home**, les calculs pourront être faits en représentation formelle. Ainsi pour la même suite u, on pourra observer le phénomène stationnaire... Mais seulement jusqu'à un certain point...

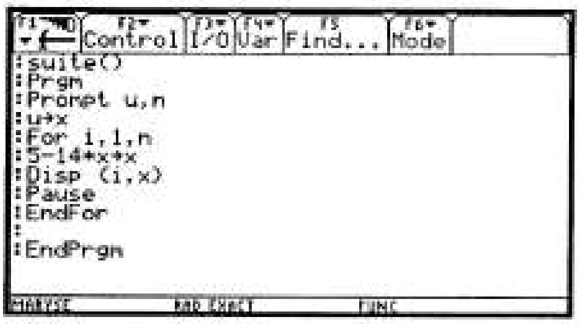


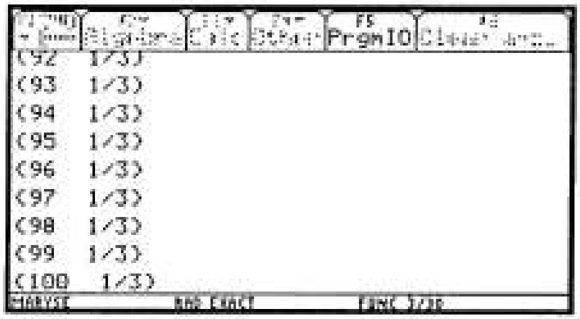


La programmation d'une suite récurrente dans l'application **Home** (par l'intermédiaire de l'instruction **When**) entraîne pour le calcul des termes l'emploi d'un algorithme récursif. Ceci mobilise beaucoup de mémoire car toutes les valeurs antérieures doivent être conservées pour effectuer le calcul du terme demandé, et l'on arrive assez rapidement à avoir un affichage indiquant que les capacités de la mémoire sont insuffisantes. Le procédé algorithmique du répertoire suite évite ce problème... mais fait perdre l'exactitude du résultat.

Dans l'application **Program**

On a bien sûr toujours la possibilité d'écrire un programme pour une suite. Pour la suite précédente, il peut s'écrire ainsi.





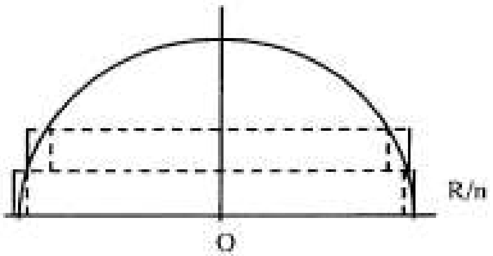
L'intérêt de la programmation par itération, réside dans le fait que l'on pourra obtenir rapidement des valeurs exactes et échapper au phénomène de récursivité qui empêchait d'obtenir seulement le 30[ème] terme en utilisant la commande **When**.

II.2.b. Première activité.

Les suites permettent de modéliser de façon discrète certains phénomènes et cette modélisation a, d'un point de vue historique, permis l'émergence et la formulation de certains concepts de l'analyse. La modélisation discrète d'un problème géométrique - comme c'est le cas ici- ou d'un phénomène cinématique, dont le résultat par ailleurs peut être connu des élèves, peut leur permettre de retrouver cette filiation.

Le thème proposé est classique, il peut permettre en terminale d'utiles rappels sur la notion de suite, fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang et sur la démonstration par récurrence.

L'objectif est de déterminer le volume V d'une sphère de rayon R. Pour cela, on construit des cylindres extérieurs et intérieurs de hauteur R/n dans la demi-sphère de rayon R comme indiqué sur le schéma.



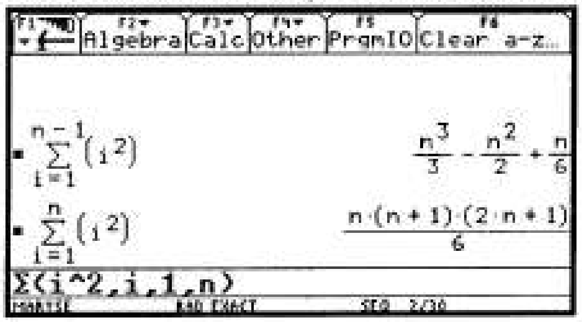
On appellera u_n le volume total des cylindres intérieurs et v_n le volume total des cylindres extérieurs.
On a ainsi $u_n < V/2 < v_n$

1. Montrer que le volume du $k^{\text{ème}}$ cylindre intérieur est : $\frac{R^3}{n^3}\pi\,(n^2 - k^2)$
2. Quel est le volume du $(k+1)^{\text{ème}}$ cylindre extérieur ?
3. En déduire que l'on a :

$$\frac{R^3}{n^3}\pi\,[n^2(n-1) - (1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2)] \leq \frac{V}{2} \leq \frac{R^3}{n^3}\pi\,[n^2 n - (1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2)]$$

4. Conclure sur la valeur de V.

La partie géométrique de l'exercice ne va pas de soi pour les élèves... Lorsque l'encadrement est établi, il reste alors à calculer la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2$.



La calculatrice fournit l'expression de cette somme en fonction de n, il reste à l'établir par récurrence et terminer les calculs...

$$\frac{R^3}{6n^2}\pi\,(4n^2 - 3n - 1) \leq \frac{V}{2} \leq \frac{R^3}{6n^2}\pi\,(4^2 n + 3n - 1)$$

V est obtenu par passage à la limite et application du théorème des gendarmes.

II.2.c. Comportement asymptotique.

$u_n = f(n)$

L'objectif est de préciser la notion de limite et la définition de la convergence.

> 1. Programmer les termes de la suite u définie par $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ pour tout n.
> 2. Observer la table des valeurs et la représentation graphique de la suite.
> 3. Que peut-on supposer pour la suite u en ce qui concerne ses variations et sa convergence ?
> 4. Peut-on déterminer à partir de quel rang N l'écart entre u_n et $\frac{1}{2}$ est inférieur à 10^{-3}, 10^{-6} ?

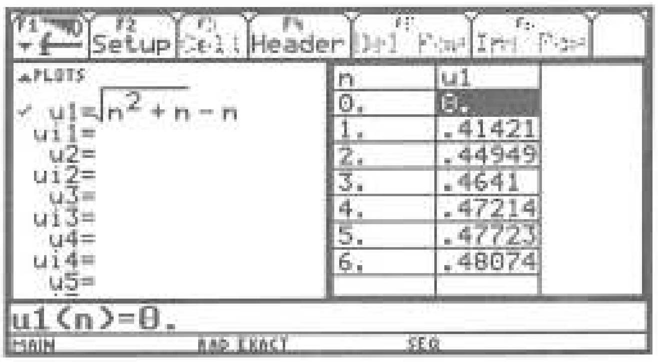
Pour observer le comportement de cette suite, deux possibilités sont données par la calculatrice :

- application **Home**, en programmant $\sqrt{n^2 + n} - n \rightarrow$ STO u(n), ce qui permet d'obtenir des valeurs formelles ;
- le répertoire suite de l'application **Graph** où les termes seront calculés en représentation tronquée même dans l'application **Home**.

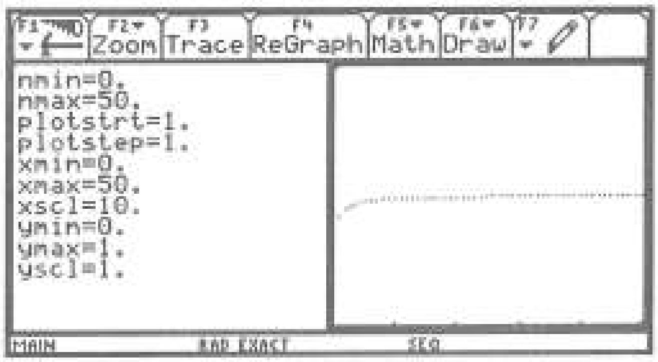
On pourra ainsi faire la conjecture d'une suite croissante qui converge vers $\frac{1}{2}$.

Pour utiliser l'application **Graph**, il faut d'abord régler la calculatrice en mode séquentiel, la fenêtre qui permet de fixer la valeur initiale de n, et **TblSet** qui détermine le pas de calcul dans la table.

On peut se déplacer dans la table pour observer les termes de rang supérieur, ou modifier **TblSet**.



En réglant la fenêtre de représentation, il est possible d'observer le comportement des 50 premiers termes de la suite en mode **Dot** (F6 style) et **Time** (F7 Axes)



Les résultats devront être établis « à la main ».

- <u>Variations.</u>

- si $n \neq 0$, $\sqrt{n^2 + n} > n$ car $n^2 + n > n^2$ et que la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante, la suite est donc à termes positifs si $n \neq 0$;

- ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. Pour vérifier qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}$, on résoud l'inéquation $u_n < \frac{1}{2}$. Ce qui équivaut à $\sqrt{n^2 + n} < \frac{1}{2} + n$. Inégalité vérifiée pour tout entier n ;

- enfin, pour étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut ici avoir recours à l'étude des variations de $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$.

- <u>Convergence.</u>

Nous avons pu observer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite u sont « très proches » de $\frac{1}{2}$ ...

- A partir de quel rang N « l'écart » entre u_n et $\frac{1}{2}$ est-il inférieur à 10^{-3} ?

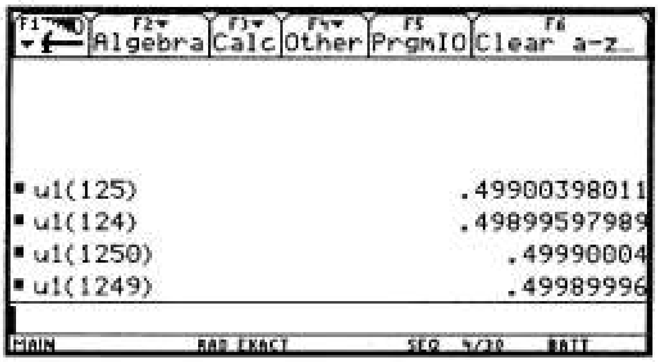
Il s'agit donc de déterminer N tel que $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq 10^{-3}$, si $n > N$, ce qui équivaut ici puisque $u_n < \frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2} - u_n \leq 10^{-3}$ ou encore $\frac{1}{2} - 10^{-3} + n \leq \sqrt{n^2 + n}$. On obtient $N \geq 125$.

- Avec la même question pour 10^{-6}, on obtient $N \geq 125000$.

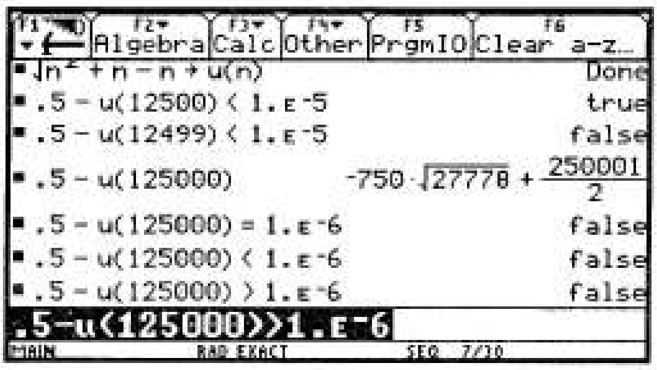
- Et pour 10^{-k}, on obtient $N \geq 0{,}125 \times 10^k$, car alors :

$$N > \frac{1}{8}\ 10^k - \left(\frac{1}{2} - 10^{-k}\right) \text{ et } \frac{1}{2} - 10^{-k} < 1.$$

Il est possible de vérifier en calculant les termes de la suite u1. Mais attention, ce procédé ne peut être répété indéfiniment ; déjà pour 10^{-5}, il y a des problèmes d'arrondis de la calculatrice.



Avec la suite u programmée dans l'application **Home**, la comparaison des termes de la suite avec 0,5 est plus satisfaisante qu'avec les valeurs approchées puisque pour : $0{,}5 - u(12500) < 10^{-5}$ la réponse est « True », mais on obtient aussi les réponse suivantes avec 10^{-6} qui indiquent que la comparaison n'est pas gérée par la calculatrice.



Définition

Soit ℓ un nombre réel, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si pour tout intervalle I centré en ℓ, de la forme $[\ell - e\,;\ \ell + e]$ où $e \in \mathbb{R}$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, alors $u_n \in I$,
Si on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on dit que la suite est convergente

Autres formulations

La différence entre u_n et ℓ est aussi petite que l'on veut, pourvu que n soit assez grand.

Pour tout intervalle centré en ℓ, il n'existe qu'un nombre fini de termes de la suite en dehors de l'intervalle.

Un simple exercice de langage permettra d'établir l'équivalence de ces deux dernières formulations.

Recherche pratique de limite :

- si $u_n = f(n)$, alors f et u_n ont le même comportement en $+\infty$;
- les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions restent vrais pour les suites ainsi que ceux relatifs aux comparaisons et encadrements.

Remarque.

Le comportement à l'infini d'une suite arithmétique, géométrique sert souvent de référence lorsqu'on procède par comparaison.

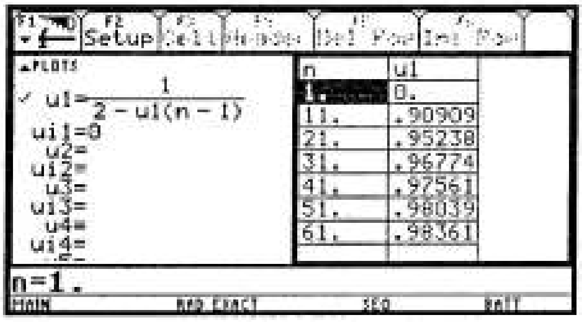
$u_n = f(u_{n-1})$

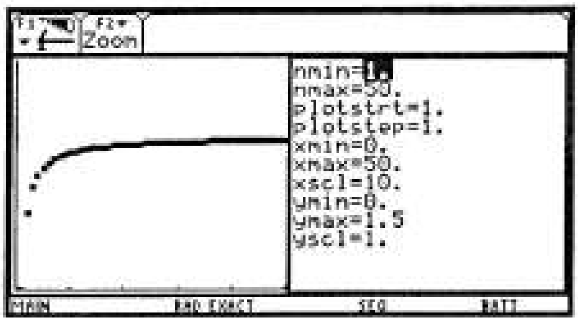
La programmation de celle-ci dans l'application Home *permettra de faire apparaître u_n en fonction de n.*

1. Programmer les termes de la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$, $u_1 = 0$

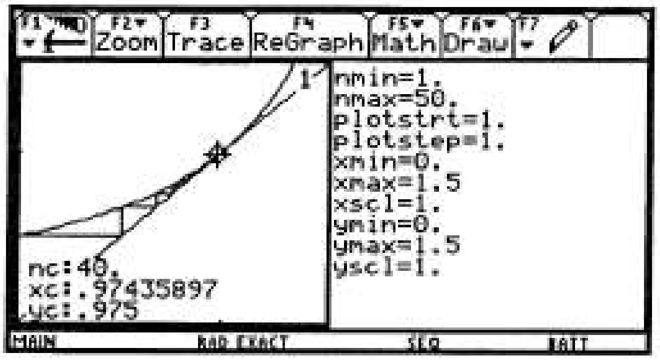
2. Observer la table des valeurs et la représentation graphique de la suite.

3; Que peut-on supposer pour la suite u en ce qui concerne ses variations et sa convergence ?





Représentation de la suite en mode **Web**.
Les tracés correspondent à $y = f(x)$ et $y = x$. En utilisant **Trace**, les termes de la suite apparaissent.



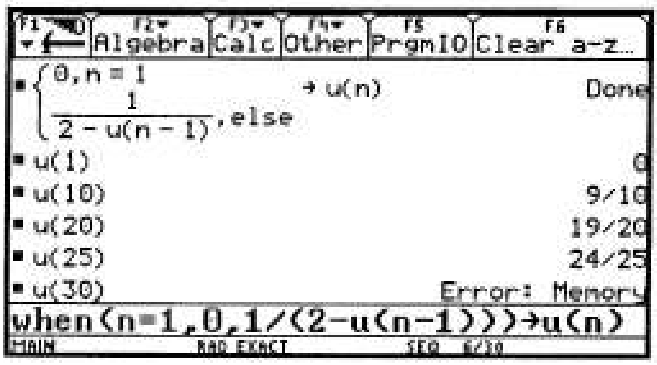
- <u>Bornes</u>. Ici, un raisonnement par récurrence permet d'établir en même temps que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 0 et majorée par 1.
- <u>Variations</u>. La suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2 - u_n} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2 - u_n} = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n} > 0.$$

- <u>Convergence</u>. La suite semble converger vers 1 (le théorème : les suites croissantes majorées convergent, est seulement au programme des TS option Math). En fait, il est assez facile à établir que si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 1$ puisque :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2-u_n} \text{ soit } \ell = \frac{1}{2-\ell} \text{ et l'unique solution de cette équation est 1.}$$

Les premiers termes de la suite dans la table semblent suggérer que $u_n = \frac{n-1}{n}$ (soit encore $u_n = 1 - \frac{1}{n}$), dans l'application **Home**, les valeurs pour u(n) sont plus révélatrices encore.



La vérification par récurrence est immédiate, et la limite est bien 1. Mais attention, ici le procédé de programmation est « récursif » : on dépasse rapidement les possibilités de mémoire de la calculatrice.

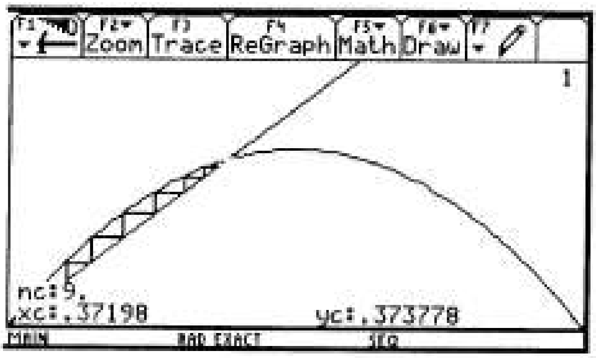
Des comportements asymptotiques différents : suites de Feigenbaum

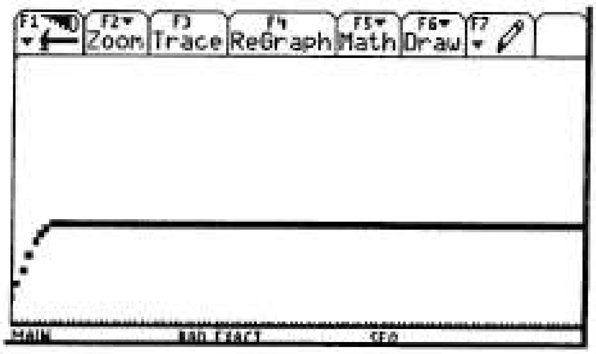
Parmi les suites non convergentes, on a des exemples de suites divergentes en $+\infty$ ou $-\infty$ et aussi des exemples de suites qui n'ont pas de limites (avec ou sans points adhérents). Les suites $sin(n)$, $(-1)^n$ sont des exemples classiques de suites non convergentes.

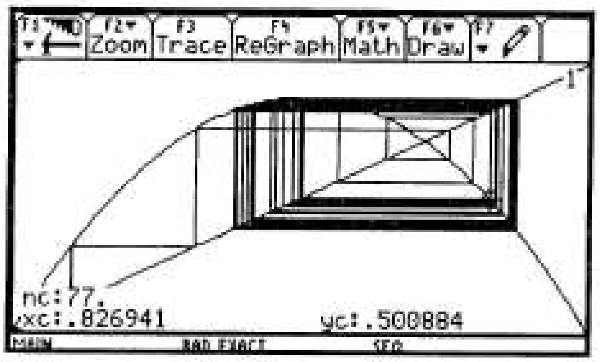
Sans étudier le comportement asymptotique de toutes les suites citées de façon exhaustive, il s'agit surtout ici de repérer les différences et de familiariser ainsi les élèves avec le fait qu'une suite peut converger (et alors, si elle est définie par récurrence, c'est nécessairement vers un point fixe de la fonction « support ») mais *aussi être plus « particulière ». En fait, d'une certaine façon, la notion, même intuitive, de point adhérent va apparaître dans cet exercice*[1].

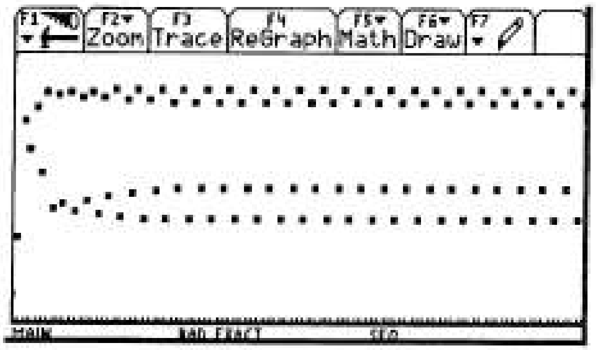
> Ce sont des suites du type, $u_{n+1} = a\, u_n\,(1 - u_n)$, $u_0 = k$.
> On prendra différentes valeurs pour a avec $u_0 = 0{,}1$.
> Soit : a = 1,6 ; a = 2,5 ; a = 3 ; a = 3,2 ; a = 3,5 ; a = 3,6.
> Observer le comportement de ces différentes suites (mode **Web** et/ou **Time**, table de valeurs)

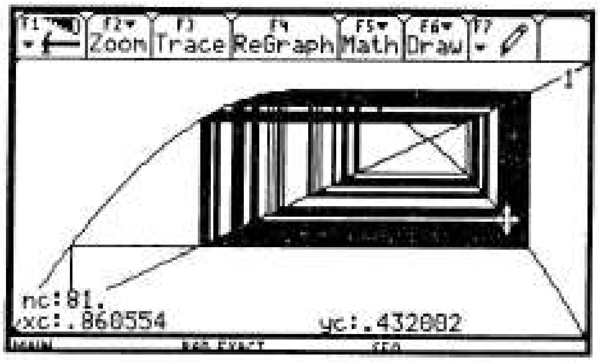
Les représentations suivantes correspondent successivement aux valeurs 1,6 ; 3,5 ; 3,6 de a. Il faut penser à ajuster correctement la fenêtre pour obtenir des écrans convenables.

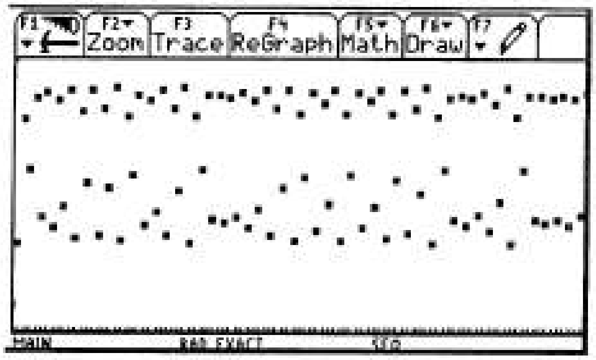












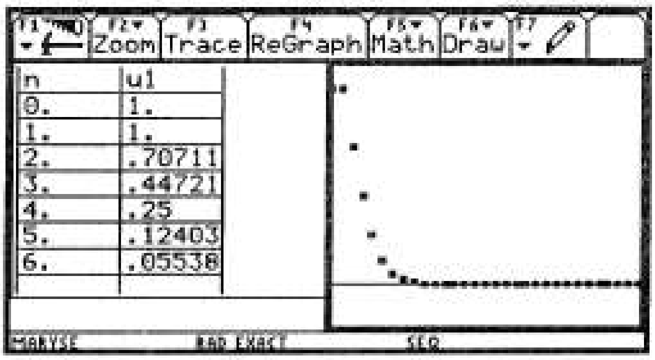
[1] *Pour ceux qui voudrait aborder de façon plus explicite le comportement de telles suites, on trouvera dans la troisième partie de cette brochure une étude exhaustive de leur comportement.*

Autres exemples : $u_n = f(u_{n-1};n)$, suites définies par une somme, suites périodiques

1. $u_n = f(u_{n-1};n)$

Etudier la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+n}}$, $u_0 = 1$.

La suite semble décroissante, à termes positifs, bornée par 0 et 1 et convergente, de limite 0.



- Positivité. La vérification est immédiate par récurrence car :

$u_0 = 1$ et si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.

- Décroissance. En étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2+n}}$.

Comme pour tout n, $\sqrt{u_n^2+n} \geq 1$, on a bien $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, d'où la suite décroît.

- Convergence. Pour la limite, une façon de procéder est d'encadrer la suite.

Puisque $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n, on a $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2+n}}$, et $\sqrt{u_n^2+n} \geq \sqrt{n}$

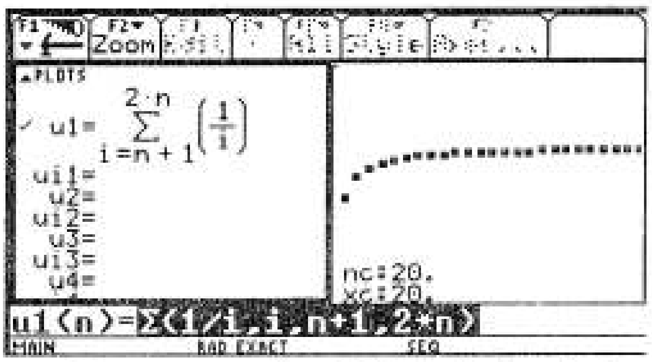
d'où $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par encadrement on a bien limite de u_{n+1} (ou u_n) qui est 0.

2. u_n est défini par une somme

Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

Pour entrer la suite il faut utiliser le symbole de sommation Σ.

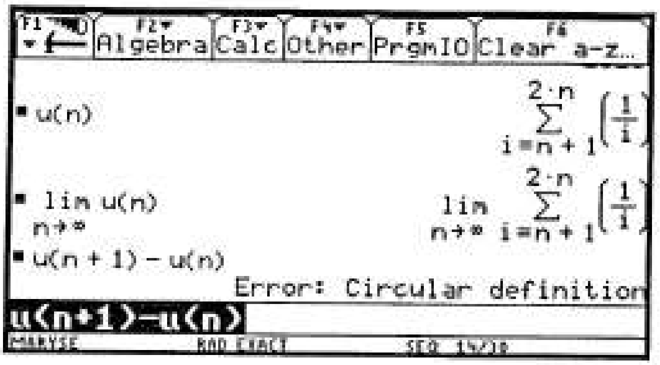
La suite semble croissante, à termes positifs, d'où minorée par 0, majorée, et convergente.



La calculatrice ne sera pas d'un grand secours... même à l'aide de l'application **Home**[1].

---

[1] *La nouvelle TI-92 plus ou la TI-89 accepte l'écriture u(n+1) - u(n) mais ne permet pas de transformer cette écriture utilement.*



- Bornes. A termes positifs est immédiat, de plus majorée par 1 puisque u_n est la somme de n termes plus petits que $\frac{1}{n+1}$,

$$\text{d'où } u_n \leq \frac{n}{n+1} \quad ; u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \quad ; u_n \leq 1.$$

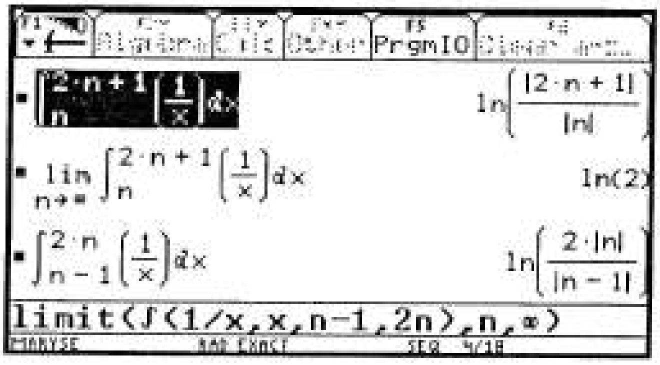
- Variations. Suite croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

- Convergence. En ce qui concerne la convergence, si elle semble « assez évidente » pour les élèves surtout s'ils connaissent le théorème sur les suites croissantes majorées, ils ont d'une part quelques difficultés, malgré l'observation du tableau de valeurs à imaginer sa limite, et d'autre part ils sont certainement encore trop peu habitués aux intégrales et aires pour voir sous cette somme une aire...

Il va donc falloir les aiguiller sur la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. Deux voies sont possibles :

- soit par des considérations d'aires, écrire que $\int_n^{2n+1} f(x)\,dx \leq u_n \leq \int_{n-1}^{2n} f(x)\,dx$ et obtenir ainsi $\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right)$. La conclusion est obtenue par encadrement, ce que confirmera beaucoup plus facilement la calculatrice.



- soit utiliser l'inégalité des accroissement finis sur l'intervalle [k ; k+1] puisque l'on a, $\frac{1}{k+1} < f(x) \leq \frac{1}{k}$. On va obtenir une inégalité du même type que la précédente par sommation d'inégalités.

3. Suites périodiques

1. Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)$

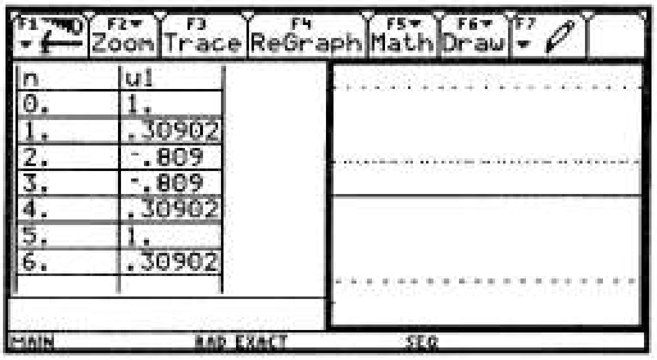
2. Programmer la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$, $u_0 = 2$.

Que peut-on observer pour les termes de cette suite ? Comment le prouver ?

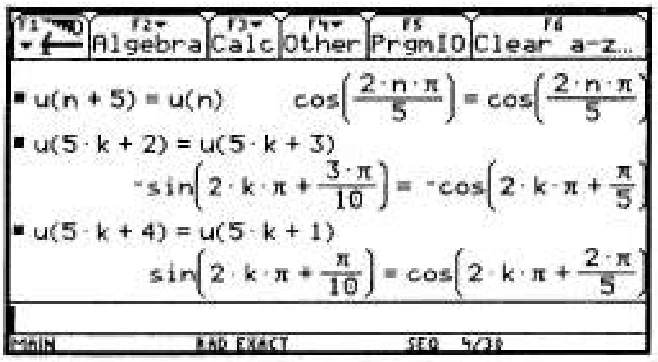
3. Programmer la suite définie par $v_{n+1} = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$, $v_0 = 2$.

Que peut-on observer pour les termes de cette suite ? Comment le prouver ?

1. La suite est périodique de période 5 : $u_{n+5} = u_n$ (on le vérifie facilement) mais elle a aussi d'autres propriétés, $u_{5k+2} = u_{5k+3}$ et $u_{5k+4} = u_{5k+1}$.



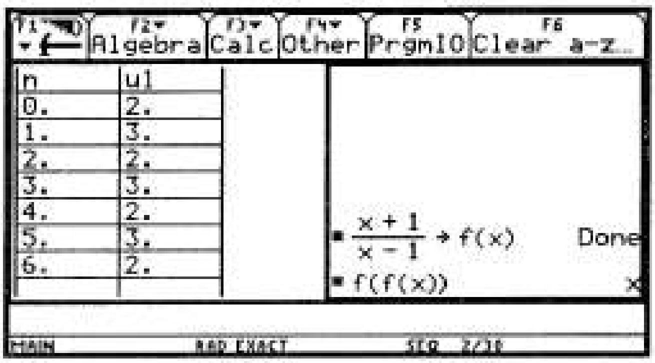
En programmant la suite dans l'application **Home**, on peut tester la validité des égalités, il restera alors à faire un travail d'interprétation de celles-ci.



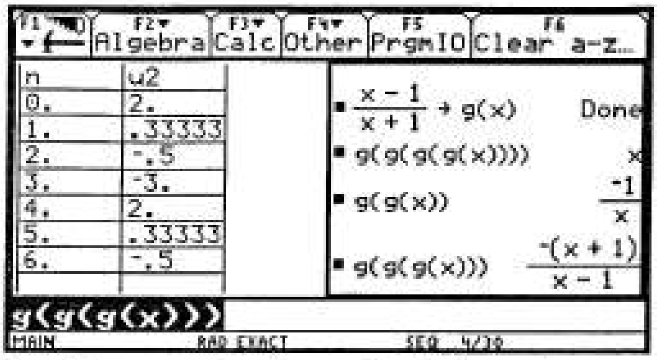
2. La suite u prend seulement deux valeurs, 2 et 3.

En utilisant la fonction support, on vérifie facilement que fof est l'identité.

A partir de n'importe quelle valeur $u_0 = a$ $(\neq 1)$, la suite prendra seulement deux valeurs a et f(a), puisque le terme suivant sera à nouveau a.



3. La suite v est, elle, périodique de période 4.
Un procédé analogue de composition de la fonction support permet de prouver le résultat.



Où alors, on peut simplement composer deux fois g... et chercher quelle relation existe entre les termes de la suite u du 2° et ceux de la suite v.

On a $v_0 = u_0 = 2$

comme $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{3}$

comme $g(g(x)) = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{f(f(x))}$, $v_2 = -\frac{1}{u_2} = -\frac{1}{2}$

comme $g(g(g(x))) = -\frac{x+1}{x-1} = -f(x) = -f(f(f(x)))$, $v_3 = -u_3 = -3$

enfin $g(g(g(g(x)))) = x$, $v_4 = u_4$

Autour de e

Les trois exercices qui suivent sont très classiques, ils sont présents dans différents manuels de terminale, ils permettent de privilégier l'approximation de e, nombre « mythique » de la classe de terminale.

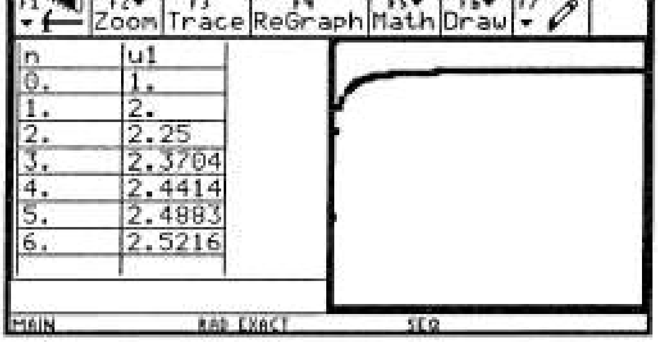
1. Etudier la suite définie par $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ pour $n \neq 0$.

2. Etudier la suite définie par $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln t)^n \, dt$, pour $n \neq 0$.

3. Etudier la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$, pour $n \neq 0$.

1. Les élèves sont facilement tentés de dire que la limite est 1, $\frac{1}{n}$ a pour limite 0 et 1^n a pour limite 1. Application du théorème sur les limites de produit...

Le problème est ici qu'il ne s'agit pas d'un produit ayant un nombre fini de termes, et les observations ci-contre les dissuadent rapidement.



La démonstration est classique via le recours à la suite :

$$v_n = \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}},$$

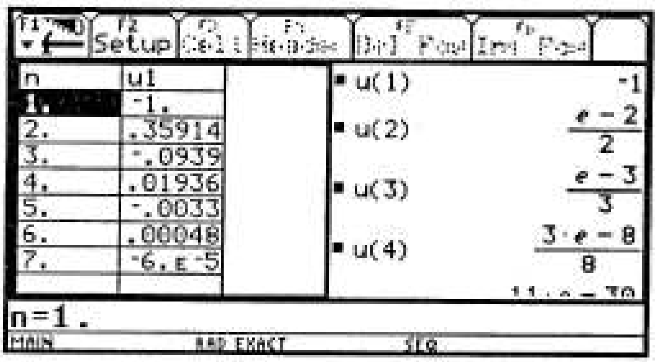
on reconnaît puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, une limite du cours qui est 1.

<u>Le théorème (admis) :</u>

> **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.**

permet de conclure puisque $u_n = e^{v_n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

2. Les valeurs obtenues dans la table en utilisant le répertoire suite semblent suggérer une convergence vers 0. Les valeurs obtenues en programmant la suite dans l'application **Home** suggèrent une certaine « régularité » pour les termes.



Deux voies sont possibles :

- essayer d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. On peut ainsi obtenir par récurrence l'expression de I_n en fonction de n, et peut-être reconnaître une suite qui donne le résultat.

- essayer de prouver la convergence par encadrement avec des suites de référence ou plus faciles à étudier.

- <u>1. Expression de I_n en fonction de n.</u>

En intégrant par parties, on obtient $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1!)} e + I_n$ (la calculatrice ne sera pas ici d'un grand secours) et par récurrence :

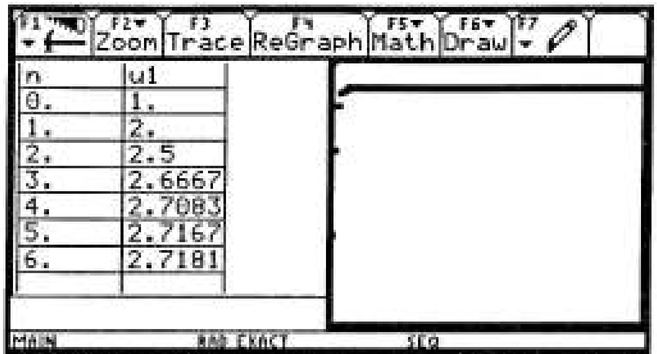
$$I_n = e\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - 1.$$

Petit problème..., on ne connaît pas la limite du facteur $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$.

- <u>2. Encadrement de I_n.</u>

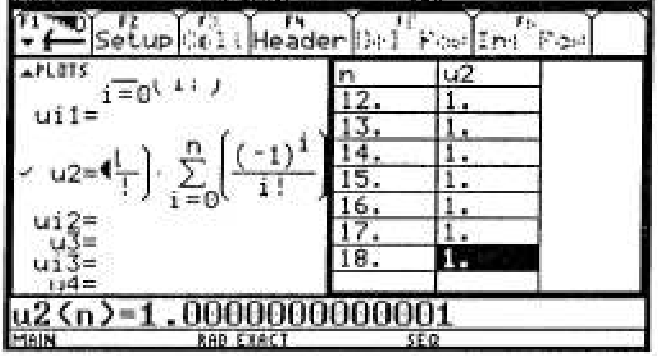
En fait ce n'est pas très compliqué, on a rapidement sur [1,e], $0 \le \int_1^e (\ln t)^n\, dt \le e - 1$. Ce qui donne $\left|I_n\right| = \frac{1}{n!} \int_1^e (\ln t)^n\, dt \le \frac{e-1}{n!}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ par encadrement et aussi $S_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{I_n+1}{e}$ a pour limite $\frac{1}{e}$.



3. Si les valeurs obtenues dans la table semblent suggérer une convergence, la valeur de la limite n'est pas immédiate pour les élèves.

Si la suite $u_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$ converge effectivement vers e, alors en



utilisant la suite de l'exercice précédent $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!}$

la suite produit $v_n = u_n\ S_n$ doit converger vers 1. Ce qui semble vrai mais ne nous avance guère en terme de démonstration...

Un procédé de démonstration classique demande le recours à la fonction définie par :

$f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$. Il suffit ensuite de montrer que sur [0 ; 1], on a :

$\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{n!}$ et l'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir $\left|u_n - e\right| \leq \frac{e}{n!}$ d'où le résultat[1].

Remarque : ceci donne par la même occasion les limites de $\sum\limits_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(2i)!}$ et de $\sum\limits_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(2i+1)!}$.

---

[1] *On peut se reporter au chapitre I.2.b. de cet ouvrage, pour voir un énoncé de sujet relatif à cette suite.*

II.2.d. Activités

Une petite différence qui a de grandes conséquences[1]

> Le directeur de la Société Chaotique de Banque propose à M. Logarithme son nouveau plan d'épargne en ces termes : « votre apport initial est de e-1 francs. La première année, vous êtes perdant, on multiplie votre capital par 1, et on prélève 1 franc pour frais de gestion. La deuxième année, c'est beaucoup mieux, on multiplie votre capital par 2 et l'on prélève toujours 1 franc pour frais de gestion. La troisième année, on multiplie votre capital par 3 et l'on prélève 1 franc, et ainsi de suite : la n-ième année on multiplie votre capital par n et l'on prélève 1 franc. Au bout de 25 ans vous pouvez retirer votre argent. Intéressant n'est-ce pas ? »
> Prudent M. Logarithme décide de réserver sa réponse. Pouvons nous l'aider à prendre sa décision ?

Dans un premier temps, il faut déjà écrire la suite permettant de modéliser la situation. On obtient $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ et $u_0 = e - 1$.

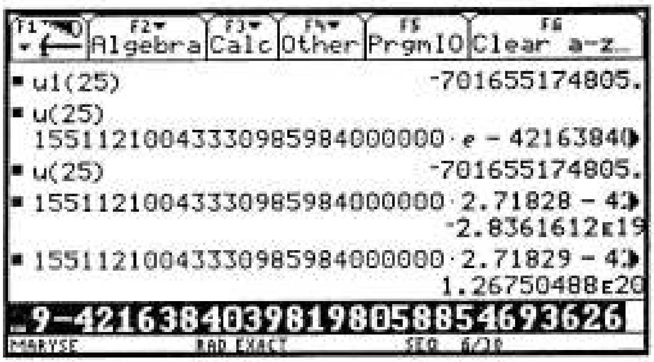
- Quelques observations.

En utilisant deux des possibilités de la TI-92, observons la suite u et son terme u_{25} :

- utilisation du répertoire suite ;

- utilisation des possibilités de calcul en représentation formelle à l'aide de la commande **When** dans l'application **Home**.

On a programmé la suite u en utilisant u1 du répertoire suite et dans l'application **Home** la suite u.



- Le résultat formel ne renseigne pas vraiment sur « la valeur » du terme u_{25}.

- La valeur approchée, soit par l'intermédiaire de u1(25) soit par l'intermédiaire de ◆ **ENTER** u(25), est assez surprenant (-700 milliards environ !) et ne semble vraiment pas encourageant pour un investissement !.

D'autant plus, que si l'on essaye d'évaluer u(25), en remplaçant successivement e dans l'expression de u(25) par 2,71828 (valeur approchée par défaut à 10^{-5} près) puis par 2,71829 (valeur approchée par excés à 10^{-5} près), les résultats sont déroutants... : de l'ordre de $-2{,}8.10^{19}$ et $1{,}3.10^{20}$ respectivement.

La nécessité d'une étude théorique semble s'imposer...[2]

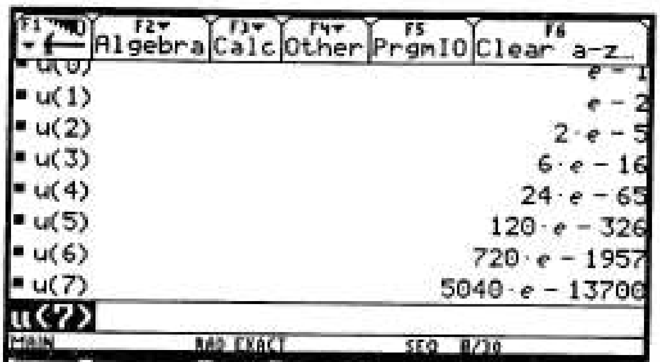
---

[1] *Enoncé paru dans la Recherche, "spécial nombre", n°278, juillet-août 1995. [Muller. 1995].*

- $u_n = a_n e - b_n$.

Observons les premiers termes en mode exact...

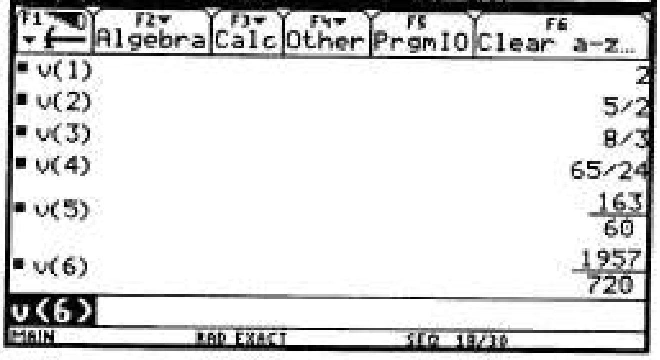
Avec un peu d'attention, on identifie le coefficient de e dans u_n comme étant n!.



Le second terme de u_n est plus difficile à identifier, mais si nous nous souvenons de la suite de l'exercice précédent : il semble que ce soit :

$b_n = n!\, v_n$ où $v_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$.

Ainsi on aurait $u_n = n!\, e - n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$.



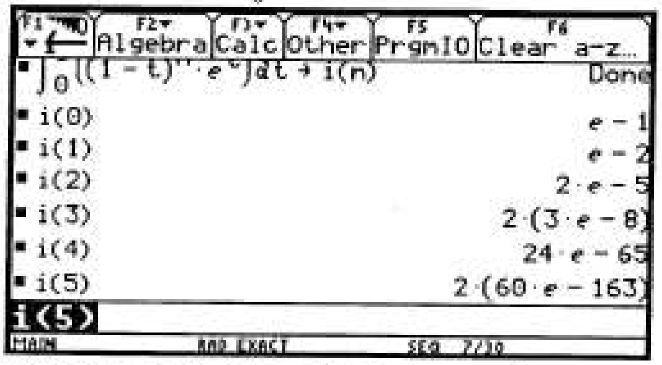
La formule se démontre par récurrence (on peut aussi établir la formule par une « récurrence descendante » à partir de $u_n = n\, u_{n-1} - 1$.

Là, petit problème, la tentation est grande de conclure assez rapidement, si l'on fait référence aux exercices précédents (puisque $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$ converge vers e) que $e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$ converge vers 0 d'où $u_n = n!\,(e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!})$, converge vers 0 mais on a une forme indéterminée...

- Pour conclure. Considérons la suite définie par $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\, dt$.

Il semble bien que I_n et u_n soit la même suite...

On établit la relation de récurrence vérifiée par I_n en intégrant par parties et on obtient bien $I_n = n\, I_{n-1} - 1$ et comme $I_0 = e - 1$, les deux suites sont bien égales.



Ce qui permet de prouver la convergence de I_n et par là de u_n vers 0, car par encadrement, on a $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$.

- Comment procède la calculatrice ? Elle travaille avec une suite définie par :

$$w_n = n\, w_{n-1} - 1 \text{ et } w_0 = a \neq e.$$

---

[2] *On peut aussi étudier les suites u et v définies par :* $u_n = (1-\sqrt{5})\, u_{n-1}/2$ et $u_0 = 1$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, $v_0 = 1$ et $v_1 = (1-\sqrt{5})/2$ pour observer *les problèmes liés aux approximations. Cet exemple est traité dans la brochure « Enseigner en terminale scientifique avec des calculatrices graphiques ».*

Or, pour une telle suite, on peut montrer par récurrence que $w_n = u_n + n!\ (a + 1 - e)$[1]. Ainsi, sachant que u_n converge vers 0, w_n converge vers $+\infty$ dès que $a > e - 1$ (ou inversement $-\infty$ si $a < e - 1$). Comme 25! est de l'ordre de $1{,}55.10^{25}$, même si l'écart entre a et e est de l'ordre de 10^{-13}, il reste pour le 25ème terme une valeur de l'ordre de 10^{12} en plus ou en moins.

- <u>Un prolongement possible : mieux « approcher » e.</u>[2]

Si on ne la connaissait pas déjà, l'étude précédente permet de déterminer la limite de $v_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$.

On avait : $u_n = n!\ (e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!})$; et $u_n = I_n = \int_0^1 (1 - t)^n e^t\, dt$.

d'où : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} u_n \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ (par produit des limites).

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}) = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} = e$.

Mais permet surtout permet d'encadrer $e - v_n$.

L'encadrement $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ permet d'obtenir puisque, $e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} = \frac{I_n}{n!}$:

$\frac{1}{(n+1)!} \le e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} \le \frac{e}{(n+1)!}$. Ou, en majorant e par 3 : $\frac{1}{(n+1)!} \le e - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} \le \frac{3}{(n+1)!}$.

On programme la suite $s_n = \frac{3}{(n+1)!}$, et $s_8 < 10^{-5}$, ainsi on est sûr que $\sum_{i=0}^{i=8} \frac{1}{i!}$ est une valeur approchée de e à 10^{-5} près. Avec une remarque, cela ne nous assure pas que la cinquième décimale soit exacte... Si l'on veut être sûr de la cinquième décimale, on prendra donc n tel que $s_n < 10^{-6}$, soit ici $n = 9$.

Comme, $s_{20} < 10^{-19}$, cela nous garantit, pour les mêmes raisons, d'obtenir avec v_{20}, les 18 premières décimales de e.

Mais, si v_{20} nous assure de pouvoir les obtenir, encore faut-il il pouvoir les récupérer et les lire... Dans l'application **Home**, on a :

$$v_{20} = \sum_{i=0}^{i=20} \frac{1}{i!} = \frac{6613313319248080001}{2432902008176640000} = N$$

(en mode approché 2,71828182846... rien de plus... que l'approximation de la calculatrice)

Le processus est alors classique à l'aide de la commande « Ipart » (partie entière) : Ipart(N . 10^{18}) = 2718281828459045235, soit la partie entière de e et les 18 décimales exactes...

---

[1] *En fait d'autres troncatures peuvent encore intervenir dans le calcul des termes de la suite, cette justification est seulement « approchée ».*

[2] *[Trouche, 1997].*

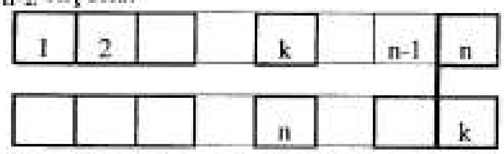
Dérangements

> Pour n éléments donnés, on appelle dérangement une permutation sans point fixe. On note d_n le nombre de dérangement à n éléments. On veut exprimer d_n en fonction de n.

• si n = 1 ;	1	$\rightarrow$ 1	: point fixe ;	$d_1 = 0$.
• si n = 2 ;	1, 2	$\rightarrow$ 1, 2	: point fixe ;	
		2, 1	: pas de point fixe;	$d_2 = 1$.
• si n = 3 ;	1, 2, 3	$\rightarrow$ 1, 2, 3	: point fixe ;	
		1, 3, 2	: point fixe ;	
		2, 1, 3	: point fixe ;	
		2, 3, 1	: pas de point fixe;	
		3, 2, 1	: point fixe;	
		3, 1, 2	: pas de point fixe;	$d_3 = 2$.

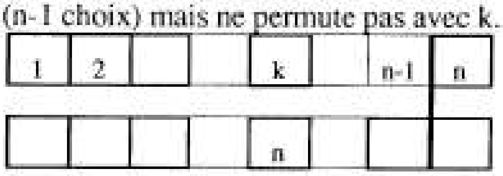
Supposons connus les nombres d_n jusqu'à n-1. On suppose ainsi que l'on sait déranger des éléments jusqu'à n-1 éléments. Si on a n éléments, il faut placer le $n^{ème}$ sans point fixe. On peut considérer avoir les deux schémas suivants :

- a) n et un élément k pris parmi les n-1 restant permutent. Il faut donc placer n-2 éléments sans point fixe, il y a d_{n-2} façons.

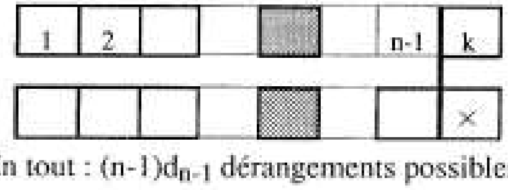


En tout : $(n-1)d_{n-2}$ dérangements possibles.

- b) n prend la $k^{ème}$ place (n-1 choix) mais ne permute pas avec k.



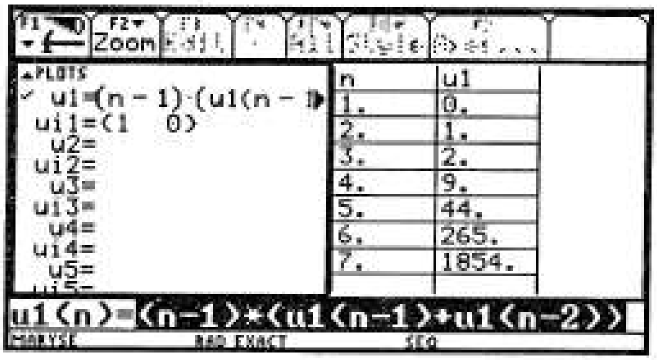
C'est comme si l'on avait rangés les éléments dans l'ordre ci-dessous et k ne peut pas aller dans la case qu'il occupe, il y a donc d_{n-1} façons de procéder.



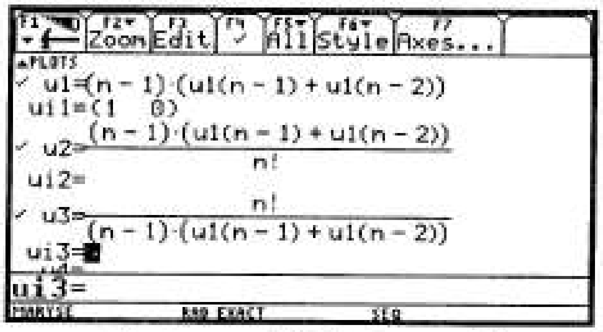
En tout : $(n-1)d_{n-1}$ dérangements possibles.

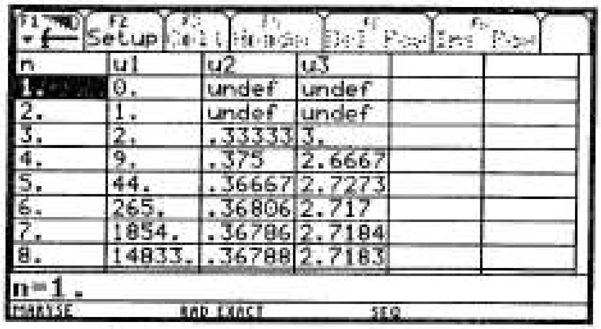
D'où $d_n = (n-1)\,(d_{n-1} + d_{n-2})$ pour $n \geq 2$ avec $d_1 = 0$; $d_2 = 1$.

Il s'agit maintenant d'exprimer d_n en fonction de n.



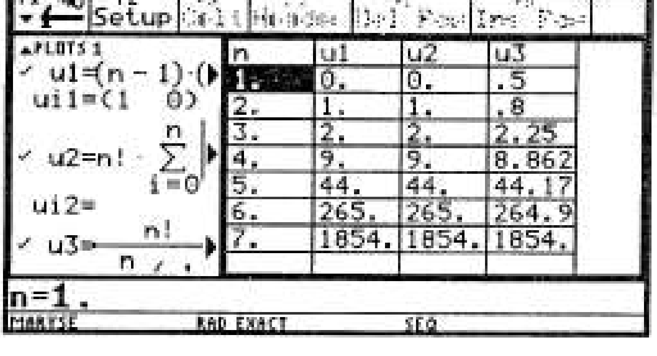
Pour essayer de trouver une relation avec n cela semble un peu compromis a priori, mais comme le nombre d'arrangements est n!, et que le facteur (n-1) amènerait par une « récurrence descendante » à un facteur de cet ordre, nous pouvons essayer de comparer d_n et n! et si le rapport $\frac{d_n}{n!}$ n'est pas vraiment explicite, nous pouvons tenter $\frac{n!}{d_n}$.





Il est normal d'obtenir « undef » pour les premiers termes des deux suites. Mais par ailleurs, si $d_n = n!\, u_n$, il semble que (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$.

Plusieurs suites convergent vers $\frac{1}{e}$. Le choix peut être problématique, toutefois si l'on utilise la suite $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!}$ de l'exercice précédent (autour de e), on observe qu'il y a coïncidence entre d_n (dans u1) et $c_n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!}$ (dans u2), tout au moins pour les premiers termes, ce qui n'est pas le cas par exemple avec la suite définie par $n! \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}}$ (dans u3) alors que $\frac{1}{\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}}$ converge aussi vers $\frac{1}{e}$.



Il reste à vérifier si la suite (c_n) est bien telle que :
$c_n = (n-1)(c_{n-1} + c_{n-2})$ avec $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$, ce qui prouvera l'égalité de (d_n) et (c_n). Seule une démonstration peut le confirmer.

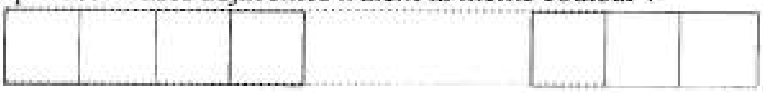
On a :
$$\begin{aligned}
(n-1)(c_{n-1} + c_{n-2}) &= (n-1)\left[(n-1)! \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-2)! \sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!}\right] \\
&= (n-1)(n-2)! \left[(n-1) \sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-1) \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!}\right] \\
&= (n-1)! \left[n \sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\
&= (n-1)! \left[n \sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} - n \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right] \\
&= (n-1)!\, n \left[\sum_{i=0}^{i=n-2} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right] = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!} = c_n
\end{aligned}$$

De plus $c_1 = 1! \left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} \right] = 0$ et $c_2 = 2! \left[\frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} \right] = 1.$

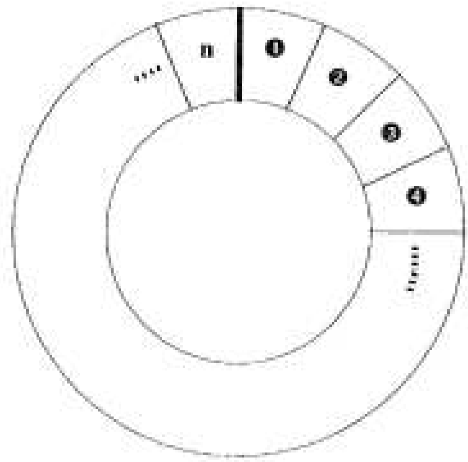
On a bien $d_n = c_n$.

Coloriages

1. On dispose de ***p*** couleurs, combien il y a t il de façons de colorer une **bande** de ***n*** cases sans que deux cases adjacentes n'aient la même couleur ?



2. On dispose de ***p*** couleurs, combien il y a t il de façons de colorer une **couronne** de ***n*** cases sans que deux cases adjacentes n'aient la même couleur ?



1. Avec la bande.

On a p couleurs possibles pour la première case, (p-1) pour chacune des suivantes, ainsi on établit sans problème qu'il y a : $p.(p-1)^{n-1}$ façons de colorer une bande de n cases.

2. Avec la couronne.

Pour un nombre $p \geq 1$ de couleurs, on notera v_n le nombre de possibilités de colorer une couronne à n cases. On remarquera que $v_1 = 0$[1] et que $v_2 = p(p-1)$

Lorsque n est supérieur à 2, les possibilités de colorer la case n dépendent de la couleur de la case n-1, qui dépendent de la couleur de la case n-2…

Ces quelques tâtonnements mettent en évidence l'intérêt de la formalisation par une suite sous forme récurrente.

* <u>Une première tentative utilisant le principe additif en deux cas disjoints.</u>

En considérant la case (n-1), celle-ci peut être :

(a) d'une couleur différente de la case 1 → p-2 possibilités de colorer la case n ;
(b) de la même couleur que la case 1 → p-1 possibilités de colorer la case n.

---

[1] Pour les couronnes à une case, un petit problème se pose en fait :
- poser $v_1 = 0$ suppose que l'on a compris la règle comme : on ne doit jamais terminer le coloriage comme on l'a commencé ;
- si l'on comprends la règle comme : deux cases contigues distinctes ne doivent pas être de la même couleur, on obtient $v_1 = p$.
C'est la première convention qui est adoptée ici.

Dans les cas (a), cette $(n-1)^{ème}$ case de couleur différente de la case 1 permet de faire une couronne qui convient de n-1 cases, soit donc v_{n-1} couronnes et par suite le cas (a) conduit à $(p-2)\ v_{n-1}$ façons de faire une telle couronne de n cases.

Dans les cas (b), la case (n-2) est nécessairement d'une couleur différente de la case 1, puisque la case 1 et la case n-1 ont la même couleur. Cette disposition permet alors de faire une couronne de n-2 cases, il y en a donc v_{n-2} et le cas (b) conduit à $(p-1)\ v_{n-2}$ façons de faire une telle couronne de n cases.

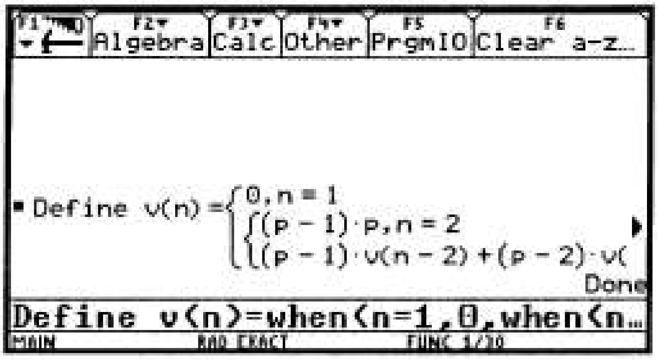
Ces cas étant disjoints, le nombre de façons de colorer une couronne de n cases avec p couleurs est v_n avec :

$$\begin{cases} v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = p(p-1) \\ v_n = (p-2)\ v_{n-1} + (p-1)\ v_{n-2} \end{cases}$$

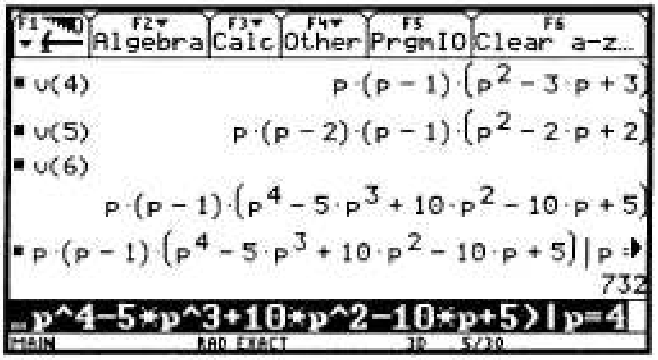
<u>Etude de la suite (v_n).</u>

L'expression récurrente linéaire d'ordre 2 qui permet de définir (v_n) peut être explicitée, mais par des moyens qui ne sont pas à portée des élèves de terminale.

C'est le moment de procéder à quelques expériences ; on utilise l'instruction **Define** avec des **When** imbriqués afin de définir la suite (v_n)

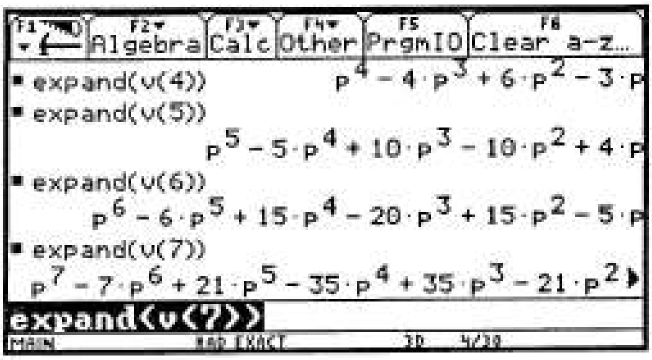


On obtient facilement les premiers termes de cette suite, en se gardant de trop solliciter la récursivité qui conduit à des temps de calcul rédhibitoires.
En combinant avec la commande | p=... , par exemple : v(5) | p = 4 , on obtient 732 qui est le nombre de façons de colorer avec 4 couleurs une couronne à 5 cases .



Un retour sur la sémantique du facteur (p-1) et celle du facteur (p-2){pour les termes de rang impair} est assez intéressante : pas de solution avec une seule couleur ; pas de solution avec deux couleurs quand on a un nombre impair de cases.

Avec un peu de curiosité, on découvre les expressions développées des premiers termes.
Cette expression n'est pas sans rappeler quelque chose !
Sans difficulté, on vérifie :
$v(4) = (p-1)^4 + (p-1)$;
$v(5) = (p-1)^5 - (p-1)$;
$v(6) = (p-1)^6 + (p-1)$

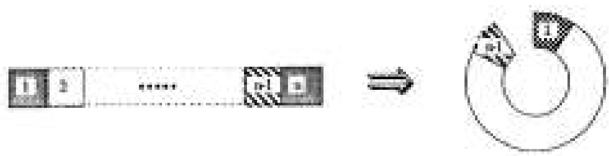


La conjecture qui s'impose est : $v_n = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$. Il reste à la démontrer par une récurrence[1] qui demande une bonne maîtrise de la notation indicielle.

- Une deuxième solution.

Une autre solution du problème consiste à rapprocher les deux questions, celle de la couronne et celle de la bande. On formalise encore par des suites.

Pour faire une couronne à n cases {v_n possibilités}, on construit d'abord une bande à n cases { $p(p-1)^{n-1}$ possibilités}, mais il faut retirer les bandes qui ne conviennent pas car leur couleur terminale est la même que la couleur initiale.
Cependant ces bandes qu'il faut rejeter, conviendraient pour faire une couronne à (n-1) cases en enlevant la dernière case.
Il y a donc v_{n-1} cas qui doivent être retirés.



On obtient : $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_n = p(p-1)^{n-1} - v_{n-1} \end{cases}$

Une fois programmée, on obtient les mêmes valeurs pour les termes de cette suite que dans le cas précédent, et de la même façon on pourra démontrer par récurrence que :
$v_n = (p-1)^n + (-1)^n (p-1)$.

n\p	2	3	4	5	6
2	2	6	12	20	30
3	0	6	24	60	120
4	2	18	84	260	630
5	0	30	240	1020	3120
6	2	66	732	4100	15630

[1] *On vérifiera immédiatement ici que l'hypothèse $v_1 = 0$ est bien celle qui convient pour que l'expression de v_n soit valide.*

II.3. Calcul différentiel

II.3.a. Le double caractère du calcul différentiel.

Le calcul différentiel est utilisé principalement dans deux types de circonstances : l'approximation *locale* de fonctions d'une part, l'étude *globale* du sens de variation des fonctions d'autre part.

La première difficulté apparaît dans ce double caractère. Si l'aspect global est très vite utilisé par les élèves via le calcul de dérivées et le théorème (admis) sur le sens de variation et le signe de la dérivée, l'aspect local est plus difficile à mettre en place. Pour preuve la difficulté de nombre d'élèves de Première à accepter l'idée que le nombre noté $f'(x_0)$ est aussi bien le nombre dérivé (limite du taux de variation) que la valeur de la fonction dérivée en x_0. Il y a difficulté à passer d'un point de vue global (la fonction dérivée) à un point de vue local (une limite en un point) et réciproquement. D'autant que le point de vue global, parce qu'il est essentiellement porté par des procédures algorithmiques sécurise les élèves et, de ce fait, constitue un obstacle au changement de point de vue.

Une deuxième difficulté est liée à la notion d'approximation affine locale d'une fonction, ce qui, dans l'esprit des élèves n'est pas nécessairement associé à la notion de tangente (surtout si le problème n'apparaît pas naturellement dans le champ graphique). Par exemple, que répondrait un élève à la question suivante :

> « La fonction f définie par $f(x) = 2x + x^2g(x)$ où g est une fonction définie en 0 est-elle dérivable en 0 et si oui préciser $f'(0)$? »

Il y a fort à parier que l'approximation affine évidente ne serait pas d'emblée observée et la présence de la fonction « inconnue » g (même pas dérivable en 0 !) provoquerait quelques questionnements. Et pourtant, on est là aux origines mêmes du calcul différentiel.

Enfin, une troisième difficulté, d'autant plus manifeste qu'elle est peu soulevée en mathématiques jusqu'au baccalauréat, - malgré son importance en physique par exemple - est celle qui est liée à la maîtrise des approximations. L'idée qu'on puisse contrôler une approximation est loin d'être claire dans l'esprit des élèves et s'ils admettent que l'approximation affine « remplace de manière approchée la fonction » sur un « petit » intervalle, le fait que l'on puisse évaluer l'écart est loin d'être maîtrisé. Tout se passe comme si, parlant d'approximation, il n'y avait pas lieu d'être rigoureux. Rigueur et approximation seraient antinomiques.

> « En fait, l'approximation, bien que constitutive du calcul différentiel, apparaît souvent plutôt comme une invitation à des raisonnements peu rigoureux. La compatibilité conceptuelle entre approximation et rigueur n'est pas atteinte »[1].

Rendre au calcul différentiel son double caractère local et global, en développant les notions d'approximation affine et de maîtrise de l'approximation, est l'objectif général de ce chapitre.

---

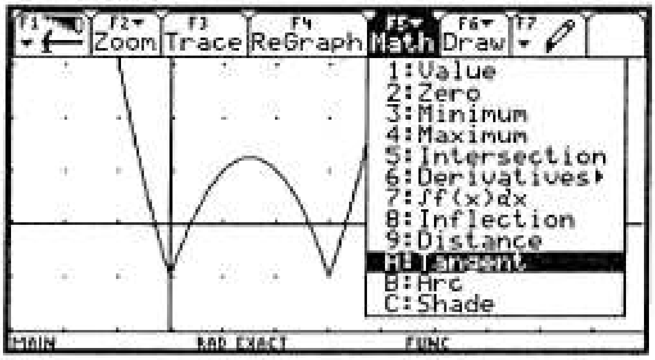
[1] *Voir « Introduction à la didactique des Sciences et des Mathématiques ». [J ohsua & Dupin. 1993].*

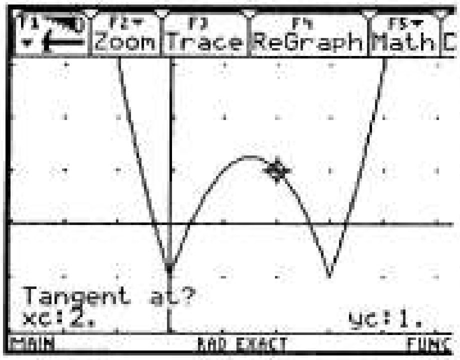
II.3.b. La calculatrice : intérêt et contraintes.

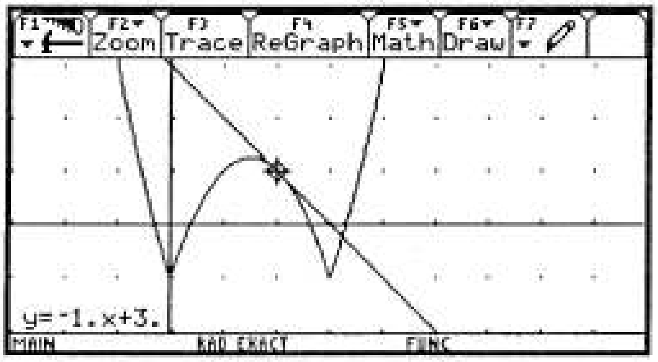
Né de la géométrie, ce chapitre est indissociable d'une exploitation graphique. La notion de tangente y est centrale et, préalablement à tout apprentissage du calcul différentiel, tout élève entrant en première associe une image forte à la notion de tangente à un cercle. Cette image donnera naissance à une première pré-définition : *« La tangente à une courbe est une droite qui coupe la courbe en un seul point »*. C'est évidemment en s'appuyant sur ce « déjà-là » et en le mettant en difficulté que le concept définitif de tangente se construira.

Dans l'application **Graph**

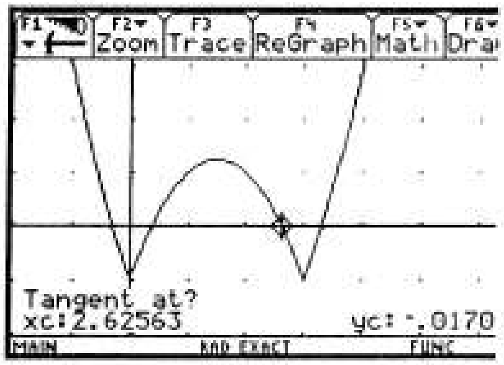
L'application **Graph** de la TI-92 peut permettre cette mise en place en associant visuellement une « bonne » tangente à l'idée non encore formulée, mais déjà présente d'approximation affine. Cependant, il est possible d'obtenir directement, grâce aux potentialités de la calculatrice, la tangente en un point sans faire référence à une quelconque idée d'approximation comme le montre l'exemple suivant :

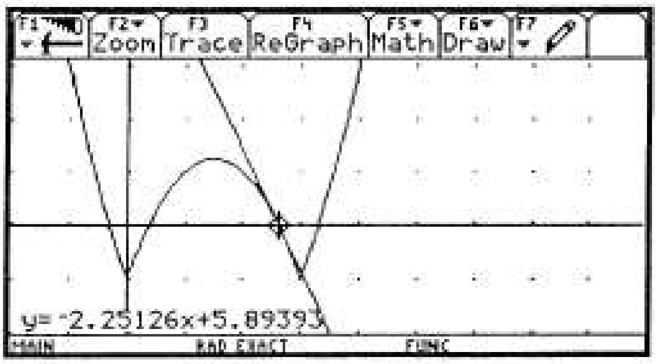




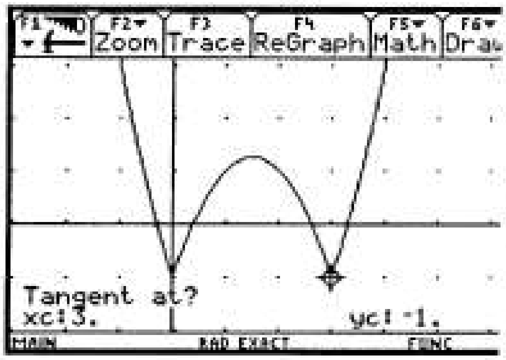


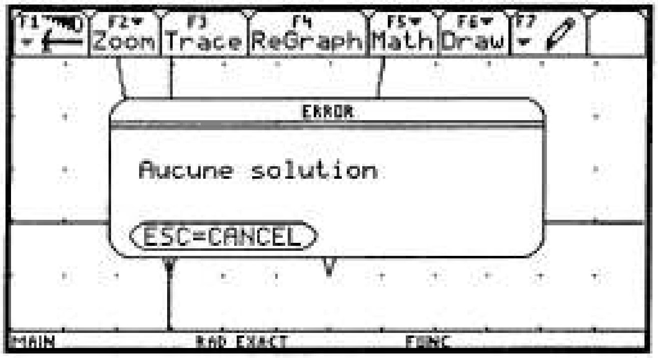
Cependant l'application graphique travaille en valeurs approchées et conduit donc à des équations de tangentes elles-mêmes approximatives :



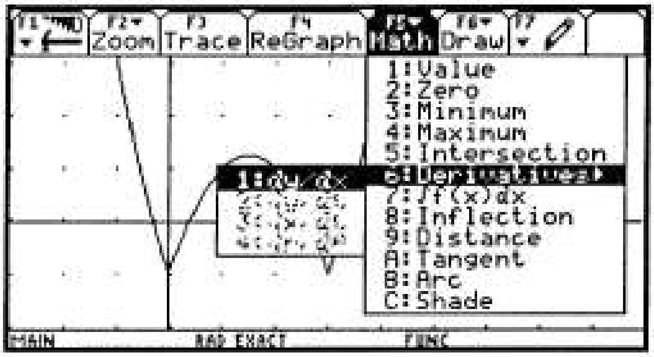


Par ailleurs, l'application reconnaît-elle les valeurs de non dérivabilité ?

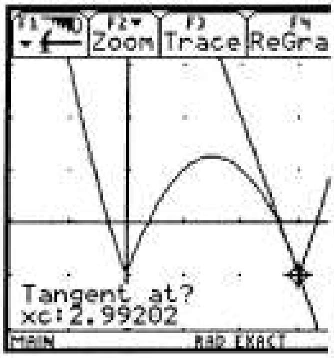


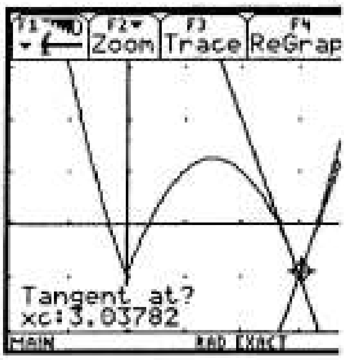


Comme pour la recherche de la tangente, la demande de $\frac{dy}{dx}$, nombre dérivé de f en 3 provoque également l'affichage du message d'erreur : « Aucune solution ».

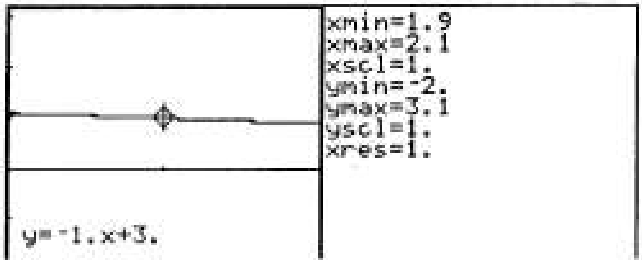


L'application **Graph** est donc capable de reconnaître qu'une fonction n'est pas dérivable en un point. Si ce point n'est pas accessible au curseur dans l'application **Graph**, il suffit de taper sa valeur au clavier.





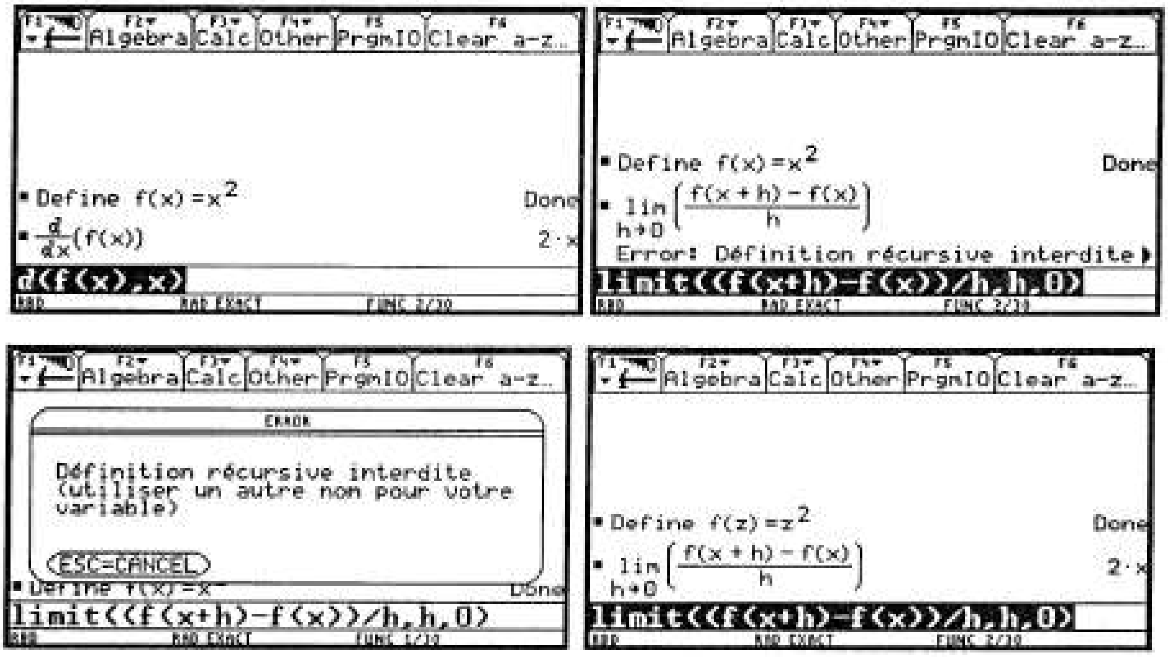
Par ailleurs, les effets d'écrasement dus aux changements de fenêtres peuvent conforter l'idée d'une infinité de points communs entre la courbe et sa tangente.



Dans l'application Home

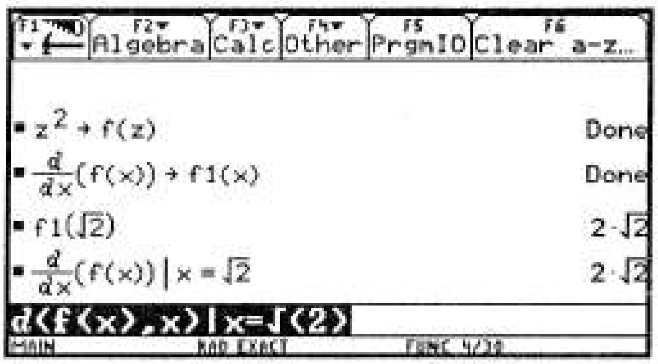
Les possibilités de calcul symbolique automatique vont permettre de multiplier les exemples, de n'hésiter à entreprendre aucun calcul, d'explorer toutes les pistes, de chercher toutes les justifications. Le choix des fonctions proposées pour la construction du concept n'est pas aussi limité par les problèmes de temps nécessaire à la réalisation des calculs : ainsi le problème des deux récipients proposé plus loin permet de mettre en évidence un cas de non-dérivabilité en un point qui ne soit ni trop parachuté, ni trop trivial. Le cheminement vers la connaissance peut éviter de se perdre dans les maladresses ou des lourdeurs opératoires en gardant plus facilement présent à l'esprit le fil conducteur de cette construction.

Il n'empêche que le concepteur de l'application principale **Home**, en effectuant certains choix, provoque lui-même des lourdeurs désagréables.



Dans le premier cas, il est légitime de demander la dérivée de f en utilisant la variable x, mais, dans le deuxième cas, on ne peut pas demander la limite du taux de variation en x... On notera l'absence de la notation f'(x) pour la fonction dérivée qui impose d'utiliser **dy/dx** avec la syntaxe **d(f(x),x)**. La gêne principale est liée à la notion de nombre dérivé dont une valeur approchée est accessible dans l'application **Graph** sous la dénomination **dy/dx** comme nous l'avons vu précédemment.

Le nombre dérivé de f en a, traditionnellement noté f'(a), devra être cherché sous la forme **d(f(x),x)|x = a**. On peut bien entendu contourner la difficulté en affectant un nouveau nom de fonction à la fonction dérivée.



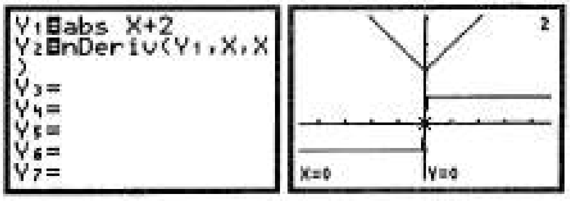
Le problème de la dérivée symétrique

Déjà présente sur les modèles graphiques non symboliques, la fonction **nDeriv** (dérivée numérique) présente une similitude avec la dérivée qui peut poser certains problèmes. D'autant plus que sa dénomination risque de suggérer l'expression « nombre Dérivé » et entretenir la confusion.

Cette fonction, que nous noterons f*, est définie[1] par : $f^*(x,h) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

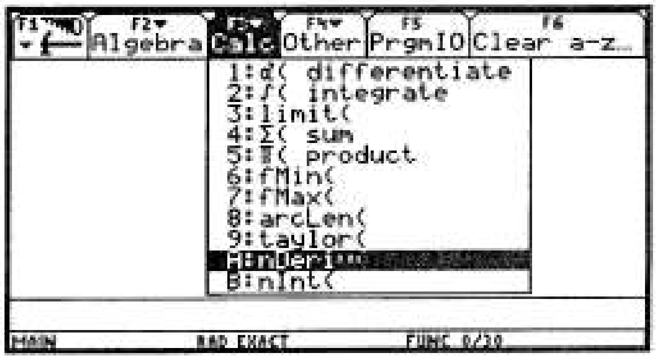
Par défaut h = 0,001 pour une TI 82. Il est aisé de démontrer que si f est dérivable en x alors $\lim_{h \to 0} f^*(x,h) = f'(x)$, ce qui n'est pas le cas pour une fonction non dérivable en x.

Par exemple, pour la fonction valeur absolue, la commande **nDeriv** affiche 0 en 0, comme le montrent les écrans de TI-82 ci-contre.

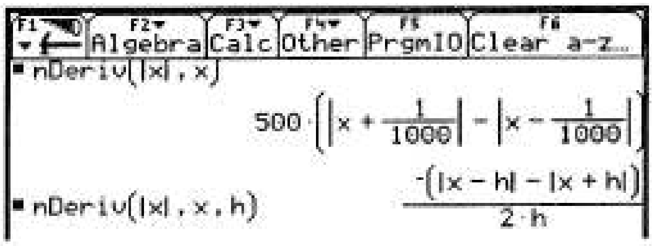


Autrement dit : si f(x) = | x | , alors f n'est pas dérivable en 0 mais f*(0) = 0 [**nDeriv(f,x,0) = 0**]

Dans une calculatrice symbolique (TI-92), la commande **nDeriv** figure dans l'application **Home** qui gère le calcul symbolique.



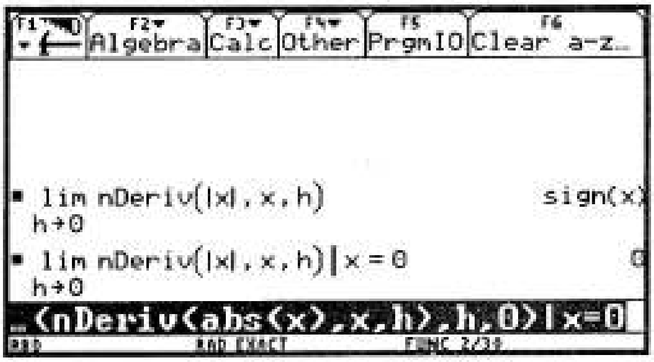
On retrouve la même fonction définie de la même manière que sur la TI-82.



Le passage à la limite lorsque h tend vers 0 fait apparaître quelques apparentes contradictions :

$\lim_{h \to 0} f^*(x,h) = \text{sgn}(x)$

et $\lim_{h \to 0} f^*(0,h) = 0$ car $f^*(0,h) = 0$.



On notera que la TI-92 ne différencie pas les écritures :

$\lim_{h \to 0}$ (nDeriv(f(x),x,h)/x=0) ;

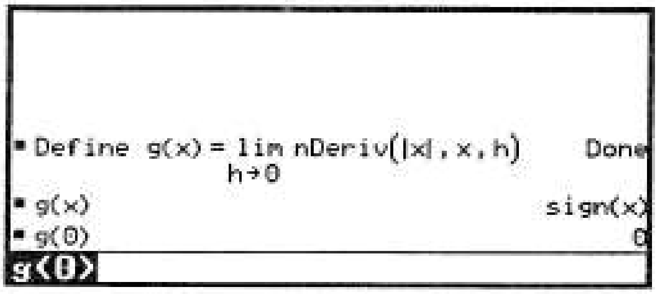
et ($\lim_{h \to 0}$ nDeriv(f(x),x,h))/x=0.

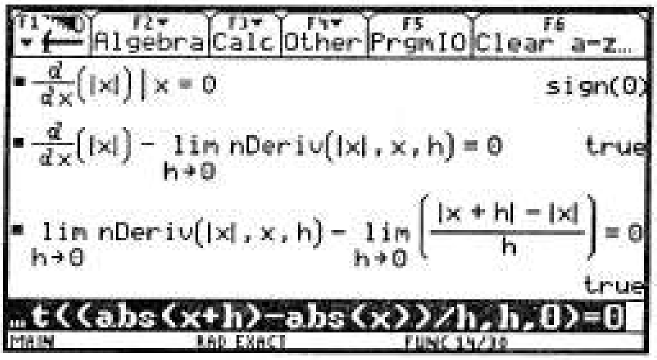
Ainsi, il peut paraître raisonnable de

Mais tous les risques et difficultés ne sont pas surmontés. Voici un écran étonnant :

[1] *Pour de plus amples informations concernant cette fonction, voir les brochures « Des activités mathématiques en Classes scientifiques,1S et TS », 1994 et « Des fonctions et des graphes », 1995, IREM de Montpellier.*

penser que sgn(0) = 0, mais la fonction « signe » implantée dans le système est définie par $\frac{|x|}{x}$ et donc n'est pas définie en 0.



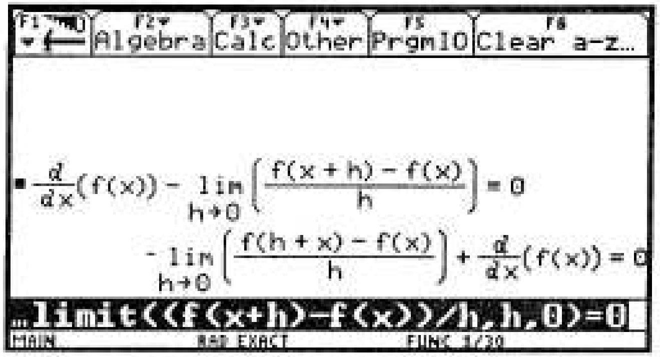


Quels résultats donne la comparaison des fonctions f' et f* ?

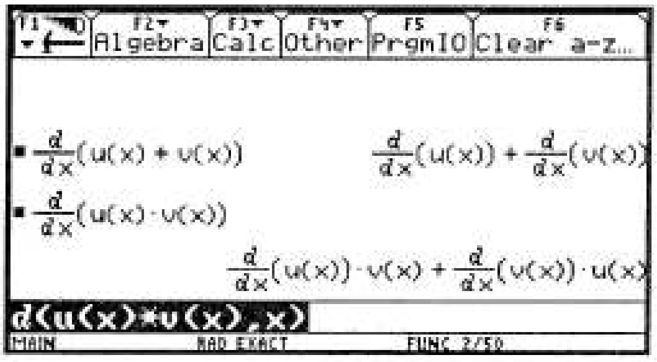
Pour la fonction « valeur absolue », le logiciel (compte tenu de ce qui précède, on pouvait s'y attendre) déclare égales les fonctions f' et $\lim_{h \to 0}$ f*(x , h).

Des algorithmes sans définition

On peut observer que le logiciel ne reconnaît pas la définition (par la limite du taux de variation) de la dérivée d'une fonction f quelconque. Il est nécessaire de préciser la fonction utilisée et, dans ce cas, il y a confusion des notions voisines définissant f' et f*.

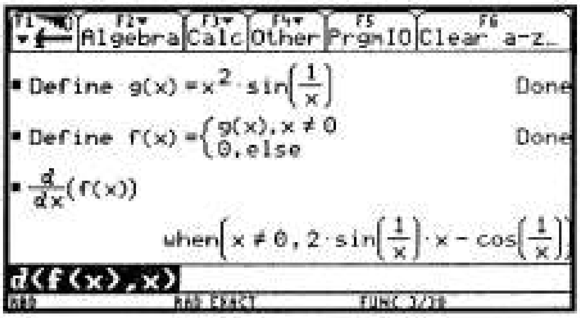


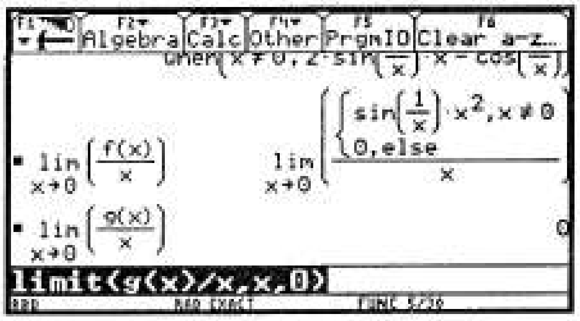
Pourtant, le logiciel connaît les formules de dérivation classique sans que les fonctions utilisées soient précisées.



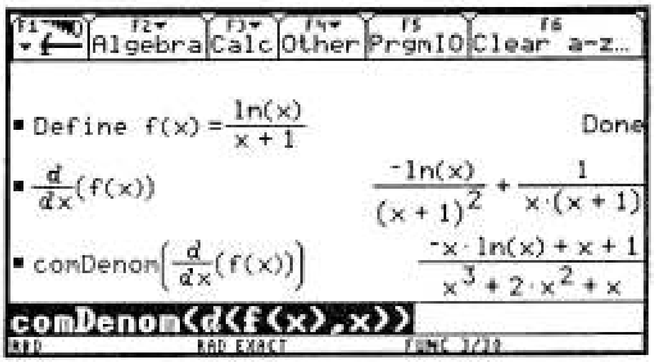
Il apparaît donc que le calcul des dérivées intégré dans le logiciel reste purement formel : il n'est pas construit à partir de la définition usuellement en vigueur dans l'enseignement secondaire et il ne la reconnaît pas ; son fonctionnement est purement algorithmique sur la base des formules concernant les opérations sur les dérivées, sans qu'une quelconque restriction concernant la dérivabilité des fonctions utilisées ne soit prise en compte. Conçu pour être un outil de calcul formel, le logiciel ne s'embarrasse pas de sens.

Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est non dérivable en 0 d'après la TI-92, autant par la demande directe de la dérivée que par celle de la limite du taux de variation. Pourtant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en 0 est immédiate, mais le rapprochement de ces deux informations n'est pas prévu par le logiciel. De ce fait, il faut s'attendre à ce que l'étude d'une fonction définie par un prolongement en un point présente quelques imperfections.





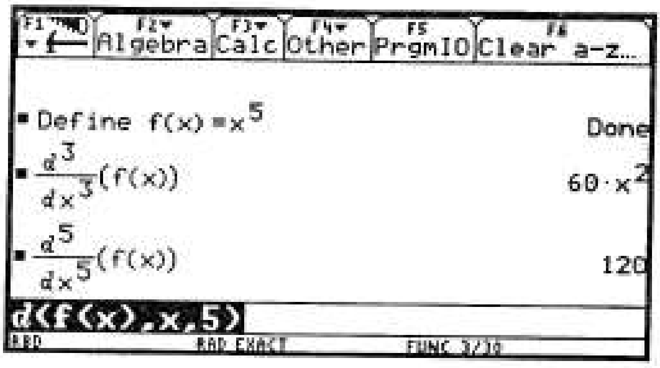
Dériver, avec une calculatrice graphique symbolique, est une simple opération presse-bouton. Elle est dans la ligne de l'attitude habituelle de nos élèves. Toutes les formules classiques de dérivation sont contenues dans la « boîte noire » (à l'exception de la formule générale de la dérivée des fonctions composées). Il est donc naturel de ne pas centrer le chapitre sur la connaissance de ces formules et sur la dextérité dans leurs manipulations. Il reste cependant un certain nombre de difficultés liées aux formes des réponses choisies par le logiciel et qui ne sont pas toujours les formes attendues, comme ici, par exemple, le développement non souhaitable du dénominateur.



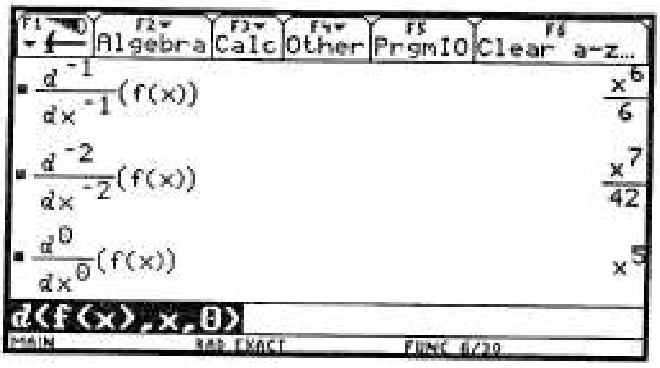
C'est l'occasion de travailler sur le sens dans le calcul algébrique : quelle est la forme visée et pourquoi ?

Les dérivées successives

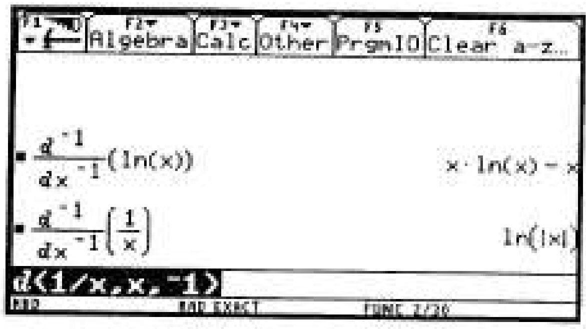
La syntaxe de la dérivée permet de traiter les dérivées successives avec beaucoup de facilité comme le montre l'exemple ci-contre. Le troisième argument, entier positif, spécifie l'ordre de la dérivée. Un nombre non entier est refusé (**erreur de domaine de définition**).

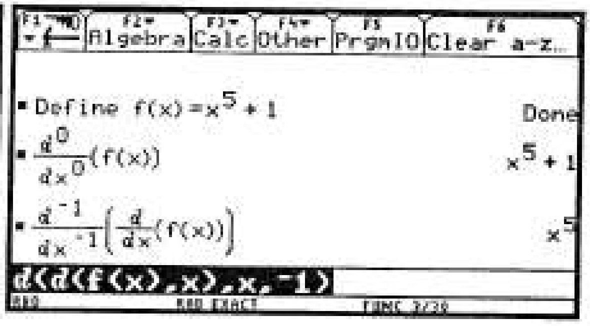


Si le troisième argument est un entier négatif, le logiciel retourne des primitives successives. Celles dont la constante additive est nulle quelle que soit sa valeur en 0. On observe donc une symétrie absolue entre dérivation et primitivation.



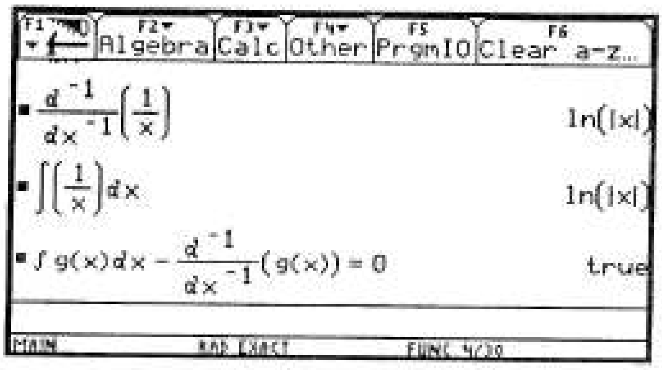
Les dangers liés à la pluralité des primitives sont totalement passés sous silence. Et de plus, la notation est pour le moins très inhabituelle.





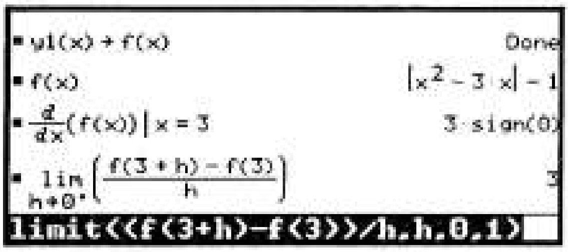
Observons que la dérivée « d'ordre 0 » est la fonction elle-même, ce qui est naturel.

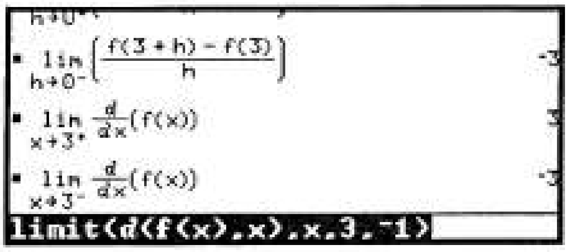
Il y a donc identité entre les commandes `d(f(x),x,-1)` et `∫(f(x),x)` reconnue comme telles par le logiciel pour une fonction quelconque, avec cependant d'importantes différences de syntaxe. En particulier la commande $\int$ ne prévoit aucune possibilité d'itération.



Dérivée à droite, à gauche

Revenons sur la fonction **y1** définie par **y1(x)=|x²-3x|-1**. Cette fonction n'est pas dérivable en 3. Cependant, il existe un nombre dérivé à gauche et un nombre dérivé à droite en 3. Comment demander ces nombres à la calculatrice ?





Il n'existe pas de méthode directe, il faut alors revenir à un calcul de limite (du taux de variation de préférence). Rappelons que le dernier nombre dans **limit(g(x),x,3,1)** n'est autre que le signe de x.

En conclusion

La calculatrice ne donne pas de sens au calcul différentiel. Les contraintes sont nombreuses depuis les contraintes graphiques bien connues (discrétisation de l'écran, effets d'écrasement et de changement d'échelle, problèmes liés aux arrondis et aux valeurs approchées), jusqu'aux difficultés nouvelles liées au logiciel de calcul symbolique (absence d'indications concernant le domaine de définition ou de validité, notations particulières, généralisations imprévues comme pour les primitives, réponses ambiguës du logiciel, formes inattendues des résultats). Une démarche didactique volontaire du maître peut seule permettre à cet outil de contribuer à donner du sens aux mathématiques en général et au calcul différentiel en particulier.

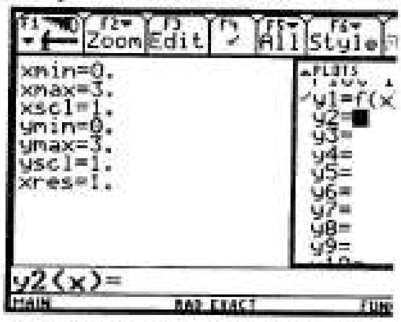
II.3.c. Activités.

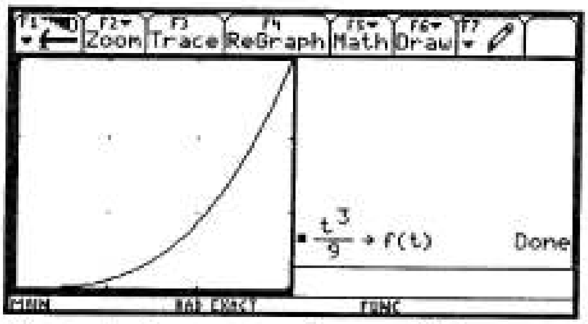
Sont supposées connues les notions de limite en zéro d'une fonction. La construction de la notion de dérivée est l'objectif de cette activité. Elle s'adresse donc a priori à des élèves de Première Scientifique mais peut être traitée sans inconvénient en Terminale. Cependant, dans ce cas, on trouvera certaines phases tout à fait superflues.

Vitesse sans précipitation

Un point M se déplace et la distance z parcourue en fonction du temps t (exprimé en secondes) est donnée par la formule $z = \frac{1}{9} t^3$ définie sur l'intervalle [0 ; 3].

On représente la fonction $f : t \to z$.

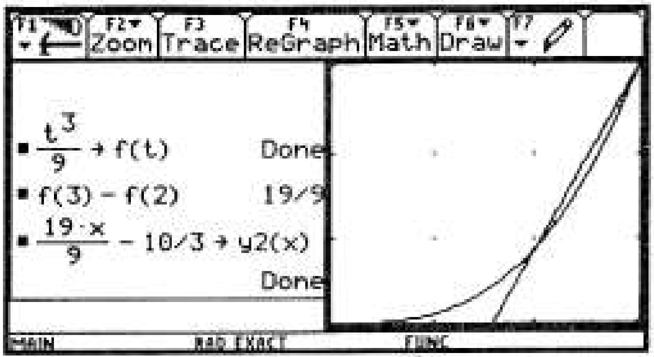




1. Quelle est la vitesse moyenne de M entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 3$?
Quelle serait la fonction $g : t \to z$ si la vitesse moyenne de M avait été sa vitesse constante entre t_0 et t_1 ? Quelle aurait été sa représentation graphique ?
2. Mêmes questions entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2{,}1$.
3. Mêmes questions entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2{,}01$.
4. Mêmes questions entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2+h$ (h étant un réel quelconque non nul). Que se passe-t-il si h tend vers 0 ? On appelera la limite obtenue (si elle existe) « la vitesse instantanée de M à l'instant $t_0 = 2$ ».
Quelle serait la fonction g : t a z si la vitesse instantanée de M à l'instant t_0 avait été sa vitesse constante ? Quelle aurait été sa représentation graphique ?
5. Écrire la formule $v(t_0) = ...$

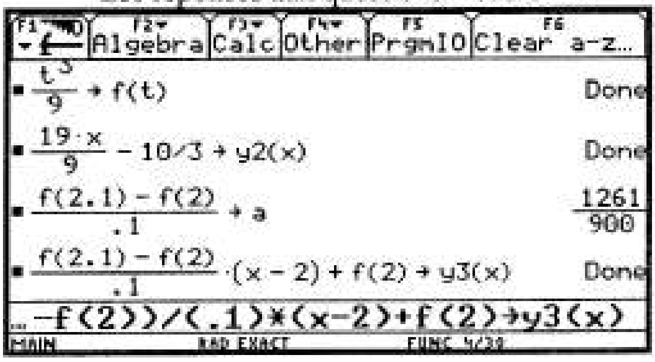
1. La vitesse moyenne entre deux instants t_0 et t_1 s'obtient aisément et la représentation graphique aurait été un segment de droite de coefficient directeur $a = \frac{19}{9}$ passant par le point de coordonnées (2 ; f(2)) ou encore (3 ; f(3)). Son équation est donc : $y = \frac{19}{9}x - \frac{10}{3}$.

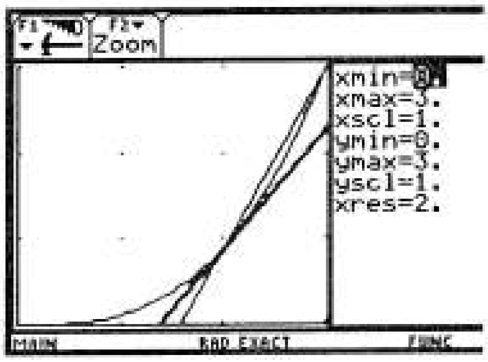
En effet, le point de coordonnées (2 ; f(2)) vérifiant l'équation y = ax + b, on obtient b = f(2) - 2a et donc une équation du type : y = a(x - 2) + f(2).

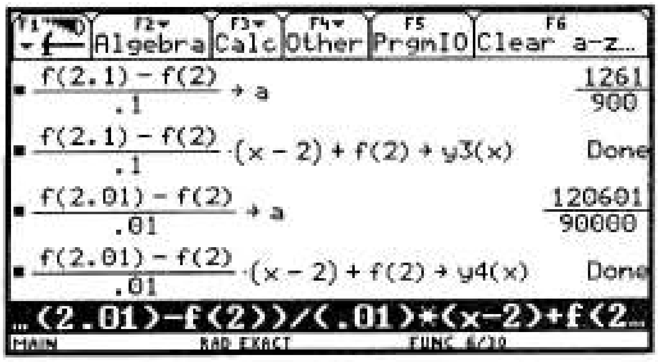


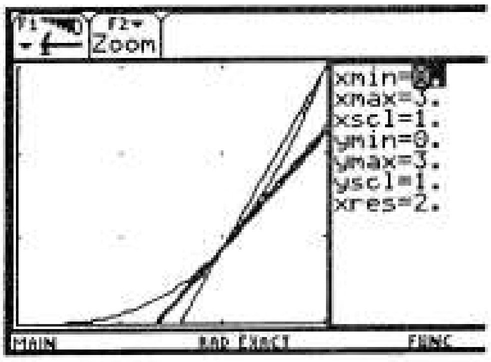
Pour définir la fonction f, on a utilisé ici la commande **STO** : $\frac{t^3}{9}$ **STO f(t)**, à la place de **Define f(t) =** $\frac{t^3}{9}$. Sur les calculatrices classiques, cette commande affecte une valeur à une variable, ici, elle affecte la fonction a une « variable » dépendante. Cette syntaxe, d'apparence plus aisée, ne nous semble pas favorable à une bonne construction du concept de fonction et nous ne l'utiliserons pas en général avec les élèves.

Les réponses aux questions 2 et 3 sont :

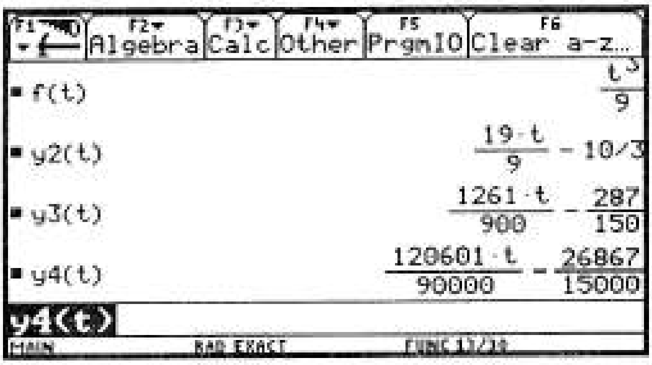








Les deux droites définies par **y3** et **y4** semblent presque confondues : leurs coefficients directeurs sont très voisins.



4. La vitesse entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2+h$ est $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

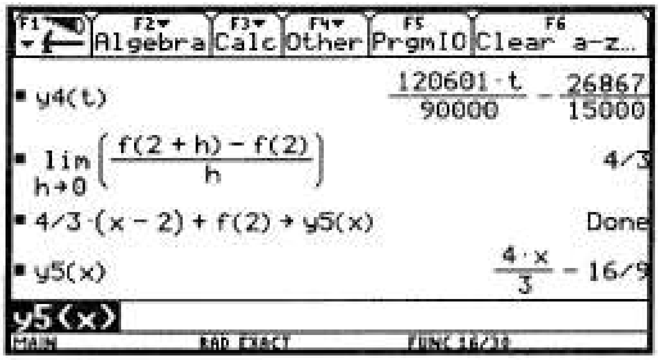
La vitesse instantanée de M à l'instant $t_0 = 2$ est donc :

$$\mathbf{v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4}{3}},$$

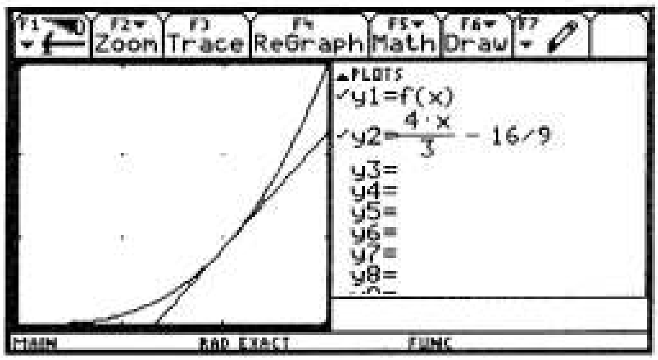
ceci conduit à l'équation :

$$y = \frac{4}{3}(x - 2) + f(2) = \frac{4}{3}x - \frac{16}{9}$$

dont la représentation ne se distingue pas graphiquement de celles des fonctions **y3** et **y4**.



La vitesse instantanée d'un mobile à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers 0 de la vitesse moyenne entre t_0 et t_0+h. Par ailleurs, si le mobile avait gardé la vitesse instantanée à l'instant t_0 comme vitesse constante sur un intervalle « autour » de t_0, alors la trajectoire aurait été une droite « qui suit d'assez près » la trajectoire réelle, du moins « tant qu'on ne s'éloigne pas trop » du point d'abscisse t_0.



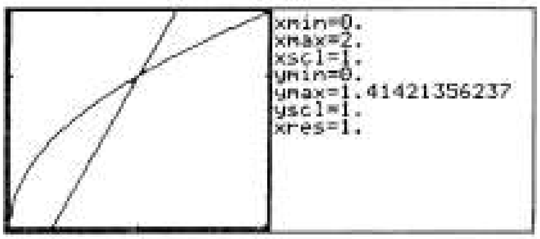
En longeant les racines

Cette activité ne doit pas être considérée comme un « cours ». Elle s'apparente à une démarche expérimentale d'élèves de Première n'ayant de la notion de tangente que l'idée géométrique de tangente à un cercle et l'idée algébrique de tangente à une parabole associée à la notion de racine double d'un polynôme du second degré. Bien sûr, une introduction magistrale de la dérivabilité par la limite du taux de variation entre x_0 et x permettrait d'économiser les essais et approximations successifs qui suivent mais ce n'est pas l'objectif de cette activité.

1. Soit la fonction f : x a $\sqrt{x}$. Déterminer, sous la forme y = ax + b, une équation d'une droite passant par le point A de coordonnées (1 ; f(1)) et de coefficient directeur a (réel quelconque). Tracer sur l'écran de la calculatrice l'une de ces droites.
En vous fiant à votre idée intuitive de la tangente en A à cette courbe, rechercher le coefficient directeur de la droite qui vous semble tangente en A à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.
2. Peut-on utiliser une méthode analogue dans le cas de la recherche de la tangente à la courbe de g telle que g(x) = sin x, au point de coordonnées ($\frac{\pi}{6}$; g($\frac{\pi}{6}$)).
3. • Déterminer le coefficient directeur de la droite "sécante" qui coupe la courbe de g aux points A($\frac{\pi}{6}$; g($\frac{\pi}{6}$)) et M($\frac{\pi}{6}$ +0,1 ; g($\frac{\pi}{6}$ + 0,1)).

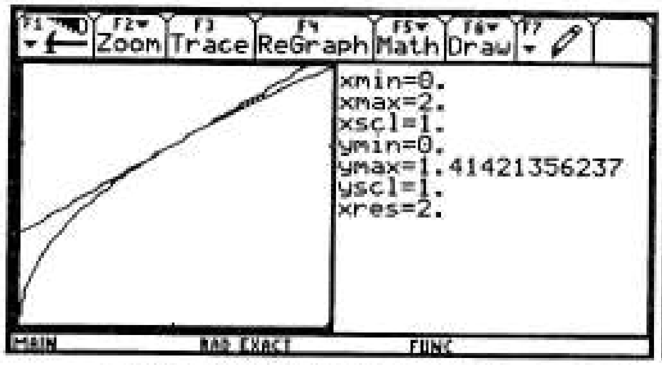
• Déterminer le coefficient directeur de la droite « sécante » qui coupe la courbe de g aux points A(($\frac{\pi}{6}$; g($\frac{\pi}{6}$)) et M($\frac{\pi}{6}$ + h ; g($\frac{\pi}{6}$+ h)).

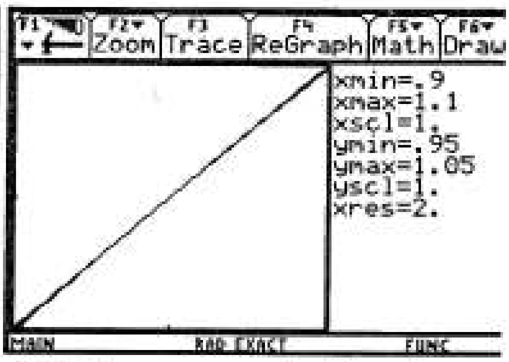
• Que pensez-vous faire pour obtenir le coefficient directeur (et donc l'équation) de la tangente en A à la courbe de g ?
4. Peut-on utiliser une méthode analogue dans le cas de la recherche de la tangente à la courbe de f telle que $f(x) = \sqrt{x}$, au point de coordonnées (1 ; f(1)).



La droite cherchée, passant par le point de coordonnées (1 ; f(1)), a une équation de la forme y = ax + b vérifiée pour x =1 et y =f(1) d'où b = -a + f(1) et donc y = a(x -1) + f(1).
Si, par exemple, a = 1,5 l'équation de cette droite est y = 1,5x - 0,5

Quelques essais, pour obtenir une position intuitive de la tangente, conduisent à l'estimation a = 0,5. On en déduit une équation possible : y = 0,5x + 0,5, qui semble en cohérence avec le graphique, y compris en utilisant une fenêtre plus « serrée ».





Pour vérifier l'exactitude de cette conjecture, il faut trouver un point d'appui ferme par une définition (au moins) provisoire de la tangente. La première définition venant à l'esprit :

> *La tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse x_0 est une droite qui coupe la courbe seulement en ce point.*

apparaît très vite inexacte car toute droite passant par ce point répond à cette définition. Il faudra peut-être un temps de maturation, s'appuyant sur les connaissances concernant les polynômes et notamment le second degré, pour parvenir à une définition provisoire mais exploitable (du moins tant que la fonction est un polynôme ou peut s'y ramener par des procédures algébriques) comme celle qui suit :

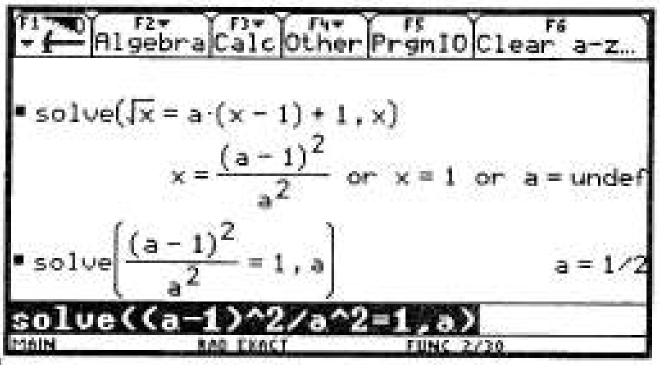
> *Une droite d'équation $y = ax+b$ est tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point d'abscisse x_0 lorsque l'équation $f(x)=ax+b$ admet x_0 pour solution double au moins.*

Dans ce cas, l'équation s'écrit : $\sqrt{x} = \dfrac{x+1}{2}$ soit pour tout $x > 0$, $x - 2\sqrt{x} +1 = 0$ qui admet après un changement de variable classique, 1 pour racine double.

Notons que la détermination du coefficient de la tangente par utilisation de cette définition n'impose pas une conjecture préalable.

En effet, il suffit de rechercher pour quelles valeurs du paramètre « a » l'équation $\sqrt{x}= a(x -1) +1$ possède une racine double. Pour $x \geq 0$, l'équation posée est équivalente à : $aX^2 - X +1 - a = 0$ avec $X = \sqrt{x}$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4a + 4a^2 = (1 - 2a)^2$ qui est nul si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.

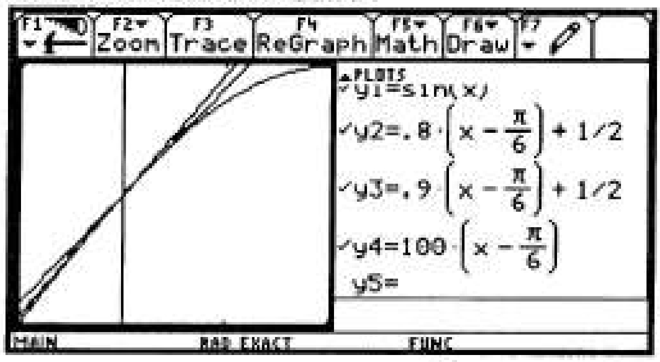
Ou encore : l'équation initiale possède deux solutions : $\dfrac{(a-1)^2}{a^2}$ et 1 qui sont égales (solution double) pour $a = \frac{1}{2}$.

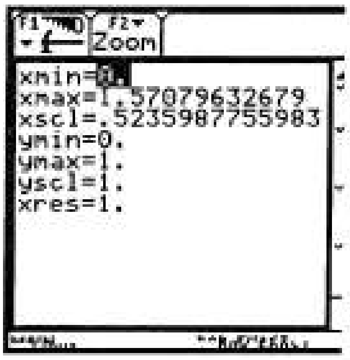


Observons que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$ n'est pas, malgré l'apparence graphique, confondue avec la courbe d'équation $y = f(x)$ puisque, pour tout $x \neq 1$, $f(x) \neq \frac{1}{2}(x-1) +1$.

Est-ce à dire que la détermination du coefficient directeur d'une tangente à une courbe peut se traiter par une procédure purement algébrique ?

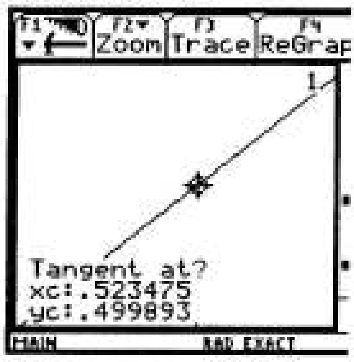
Voyons ce qu'il en est pour la fonction g. Sachant que $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, l'équation de la tangente est de la forme $y = a(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$. La recherche de son coefficient directeur par tâtonnements successifs conduit à :

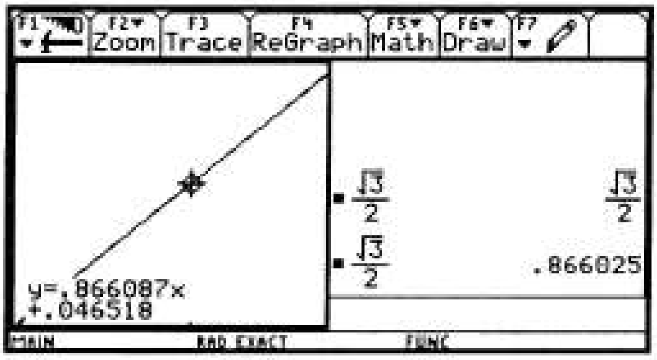




La droite d'équation **y4=100(x - $\frac{\pi}{6}$)** est une simulation de la droite d'équation $x = \frac{\pi}{6}$.

Après avoir effectué quelques « zooms » autour du point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$, on obtient les résultats suivants :

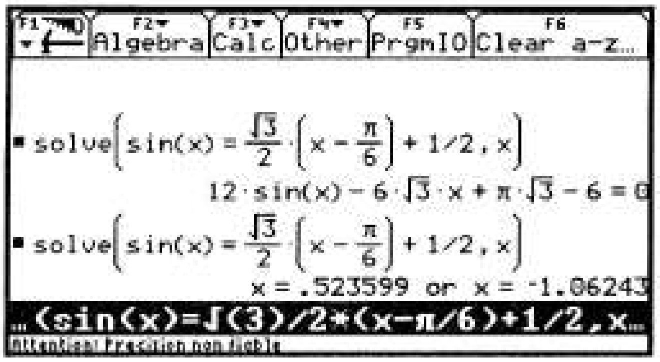




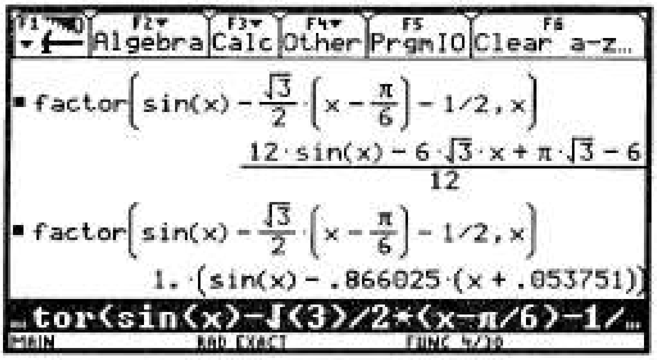
Il paraît difficile d'aller beaucoup plus loin. On peut supposer que la valeur : $a \approx 0,8660$ est une valeur approchée de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans ce cas, la validation de cette conjecture impose la résolution de l'équation suivante : $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

- d'abord en mode exact (pas de réponse),
- puis en mode approché avec une remarque décourageante : **precision non fiable**.

Mais c'est surtout l'impossibilité de déterminer si l'une des solutions est double qui nous arrête !



Pour cela, il faudrait factoriser, mais la calculatrice ne le peut, ni en mode exact, ni en mode approché.

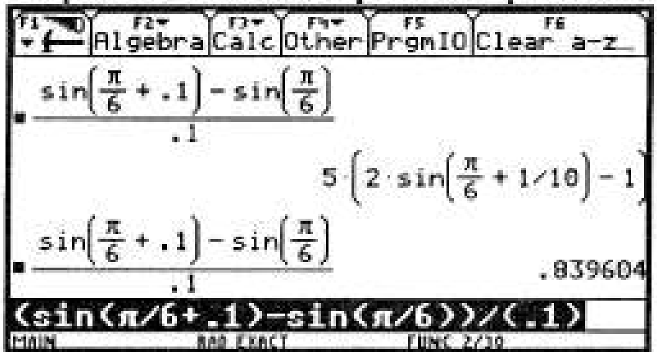


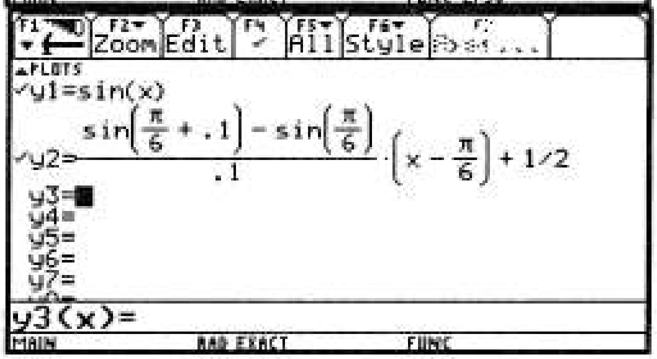
Remarque : la commande **tCollect** donne sensiblement le même résultat.

La situation est bloquée ! Il faut renoncer ou trouver une autre piste.

...... et on emprunte la piste de vitesse du problème précédent.

La droite (sécante à la courbe de g en deux points au moins : A($\frac{\pi}{6}$; g($\frac{\pi}{6}$)) et M($\frac{\pi}{6}$+0,1 ; g($\frac{\pi}{6}$+0,1)) a un coefficient directeur a égal à $\frac{g(\frac{\pi}{6}+0{,}1) - g(\frac{\pi}{6})}{0{,}1}$, dont une valeur approchée est 0,8396.



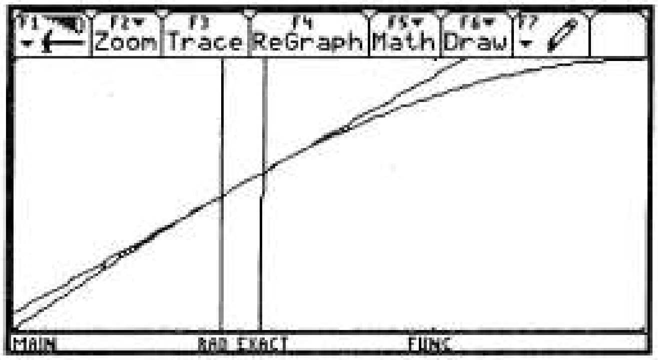


On peut alors tracer la courbe de g et la droite d'équation :

$y = a(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

La figure suivante montre la courbe de g, la droite ci-dessus et les droites d'équation $y = \frac{\pi}{6}$ et $y = \frac{\pi}{6} + 0{,}1$.

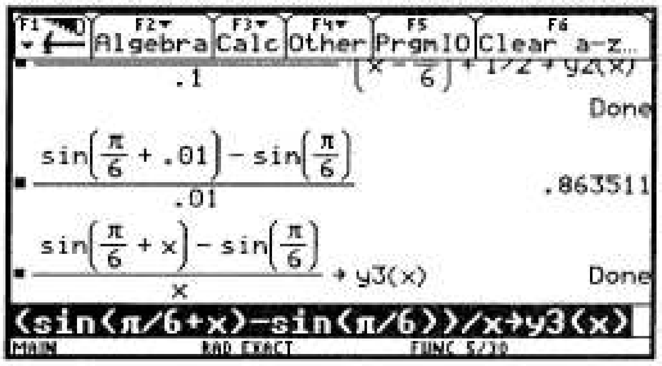
Ce qui met en évidence les deux points communs.

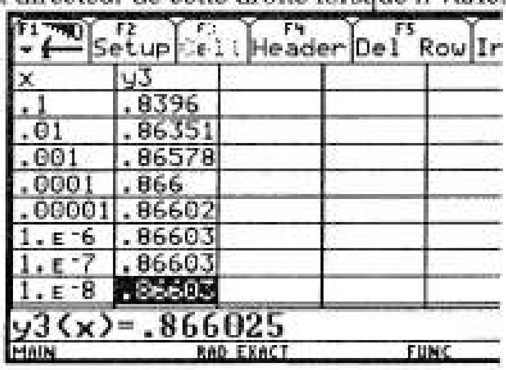


On pose $\overline{AM} = h$. Le coefficient directeur de la droite est lorsque h varie donné par :

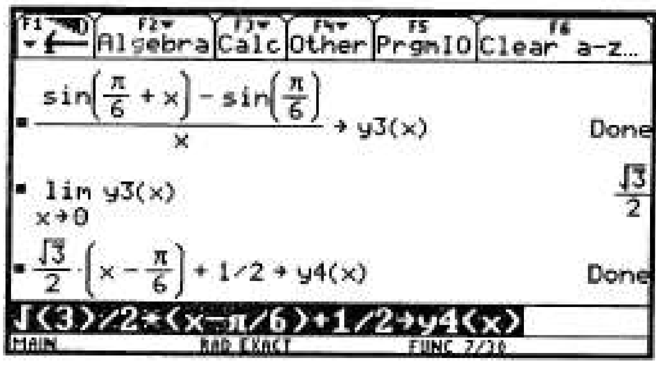
$$y3(h) = \frac{g(\frac{\pi}{6}+h) - g(\frac{\pi}{6})}{h}.$$

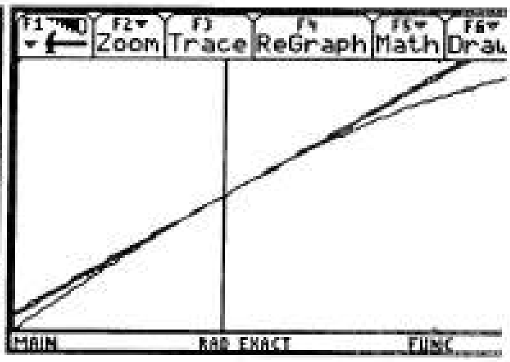
La table ci-dessous montre l'évolution du coefficient directeur de cette droite lorsque h varie.



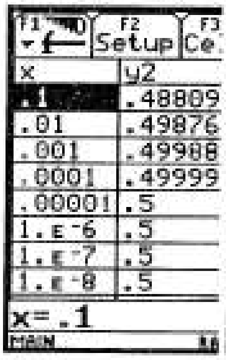


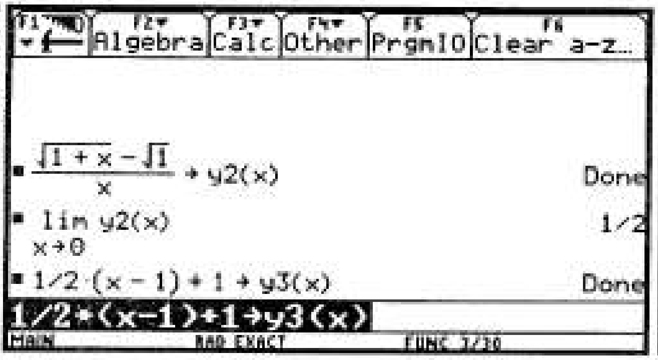
Il reste alors à envisager « le passage à la limite en 0 ». En effet, il paraît naturel d'imaginer que le rapprochement de M et de A provoque une « position limite » de la droite passant par ces deux points que nous appelons tangente en A à la courbe de g. On obtient aisément, avec la calculatrice, son coefficient directeur puis son équation. La représentation graphique de **y3** suit de très près celle de **y2** :

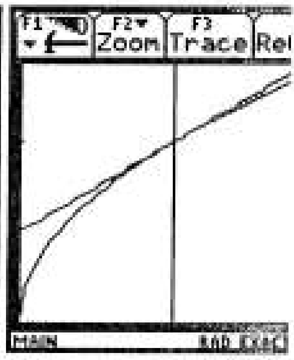




Le retour sur la fonction f : x → $\sqrt{x}$ ne présente pas de difficultés particulières : la méthode mise en place pour g « fonctionne » également pour f. On obtient successivement :







Il y a donc coïncidence entre les deux définitions utilisées. La définition algébrique étant très limitée dans son domaine d'utilisation, la définition analytique mise en place dans cette activité est celle que nous retiendrons.

On retiendra :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et (C) sa représentation graphique dans un repère donné.

* Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (ou ce qui lui est égal $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$) existe et est un **réel** noté $f'(x_0)$, on dit que **f est dérivable** en x_0 et le réel $f'(x_0)$ est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0.

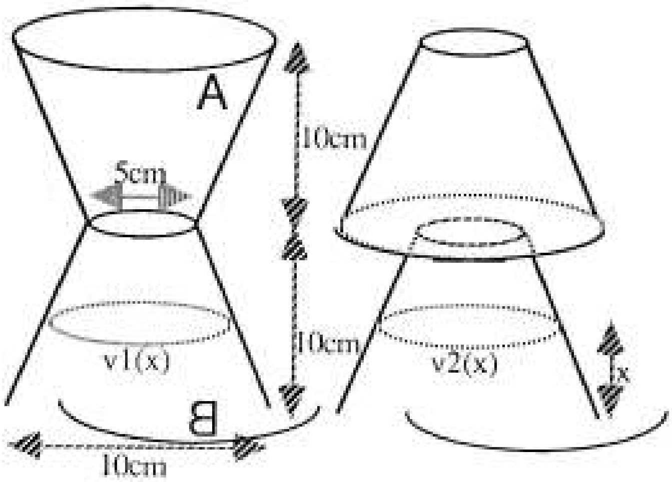
* Dans cette situation on appelle **tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x_0** la droite (T) passant par le point de coordonnées (x_0 ; $f(x_0)$) et dont le **coefficient directeur est $f'(x_0)$**.

Cette tangente (lorsqu'elle existe) a pour équation : $y = f'(x_0)\ (x - x_0) + f(x_0)$ et n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Drôles de récipients

.... où ça ne marche pas comme on le voudrait !

Ce dessin représente deux récipients creux. Les dimensions indiquées sont les dimensions intérieures qui peuvent donc être prises en compte pour les calculs de surface et de volume.



Chaque volume est constitué de deux troncs de cône identiques. On étudie sur l'intervalle [0 ; 20] les variations des volumes v_1 et v_2 occupés par une hauteur x de liquide.

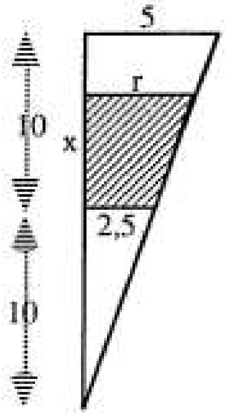
Les étapes de cette étude seront les suivantes :

- Expression de v_1 et v_2 en fonction de x.
- Représentation graphique de v_1 et v_2.
- Étude de la fonction « surface du liquide ».
- Recherche d'une relation entre volume et surface.
- Étude de la relation entre volume et surface.
- Fonction dérivée de v_1 et v_2.

Exprimer v1 et v2 en fonction de x

On dispose de deux types de tronc de cône : A (la grande base en haut) et B (la grande base en bas).

• Voici, en coupe, le demi tronc de cône de type A.



Ce volume a des bases de rayons 2,5 pour l'une et $r = \frac{1}{4}(x + 10)$ pour l'autre en utilisant le théorème de Thalès. Sa hauteur est x.

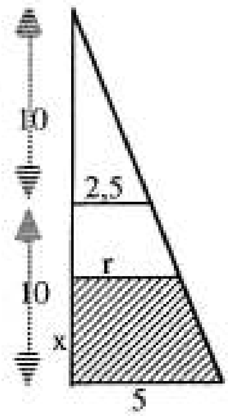
Son volume s'écrit[1] :

$$V_A(x) = \frac{\pi}{3}x\left[\frac{25}{4} + \frac{1}{16}(x+10)^2 + \frac{5}{8}(x+10)\right]$$

Notons que la surface du liquide est :

$$S_A(x) = \frac{\pi}{16}(x+10)^2, \text{ où x est un réel compris entre 0 et 10.}$$

• Voici, en coupe, le demi tronc de cône de type B.



Ce volume a des bases de rayons 5 pour l'une et $r = \frac{1}{4}(20 - x)$ pour l'autre en utilisant le théorème de Thalès. Sa hauteur est x.

Son volume s'écrit :

$$V_B(x) = \frac{\pi}{3}x\left[25 + \frac{1}{16}(20-x)^2 + \frac{5}{4}(20-x)\right]$$

Notons que la surface du liquide est :

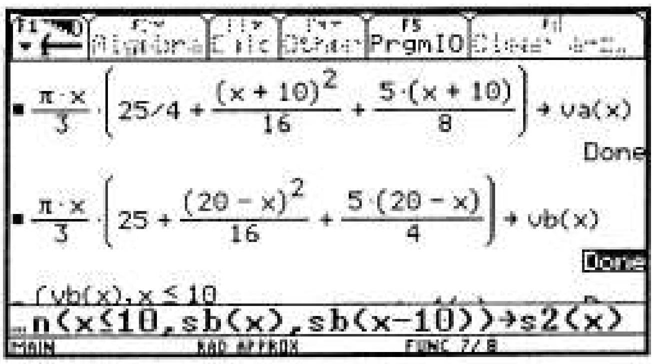
$$S_B(x) = \frac{\pi}{16}(20-x)^2, \text{ où x est un réel compris entre 0 et 10.}$$

On en déduit :

$$v_1 : x \longmapsto \begin{cases} V_B(x) & \text{si } x \le 10 \\ V_B(10) + V_A(x-10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

$$v_2 : x \longmapsto \begin{cases} V_B(x) & \text{si } x \le 10 \\ V_B(10) + V_B(x-10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

On entre ces informations dans la calculatrice : d'abord les fonctions V_A et V_B sous la forme **va** et **vb** :

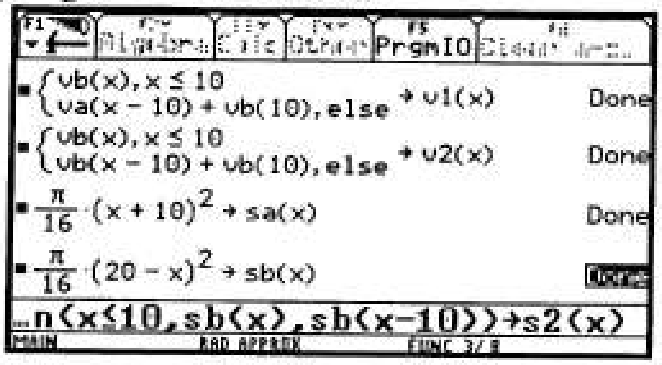


puis **v1** et **v2** en utilisant la syntaxe :

[1] *Le volume du tronc de cône de révolution dont les bases ont pour rayons respectifs R et r et dont la hauteur est h est égal à $V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$. Cette formule peut être obtenue par le volume du cône et quelques manipulations du théorème de Thalès ... ou par un calcul d'intégrale.*

when(condition,si cond. réalisée,si cond. non réalisée).

On a aussi entré S_A et S_B sous la forme **sa** et **sb**.

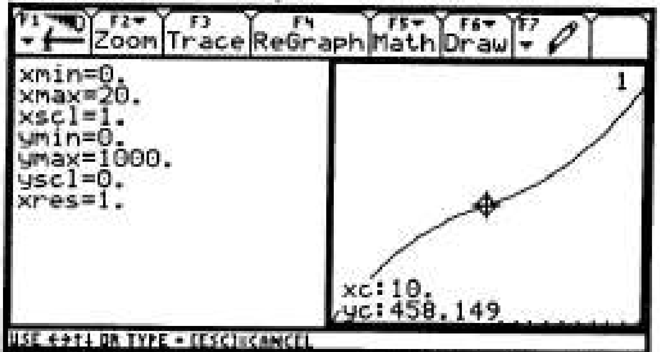


Représenter graphiquement v_1 et v_2

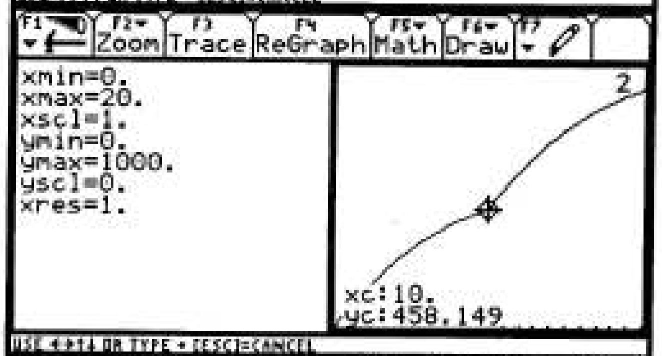
On entre **v1** et **v2** dans le répertoire fonction :

L'allure des représentations graphiques de v_1 et v_2 est prévisible.

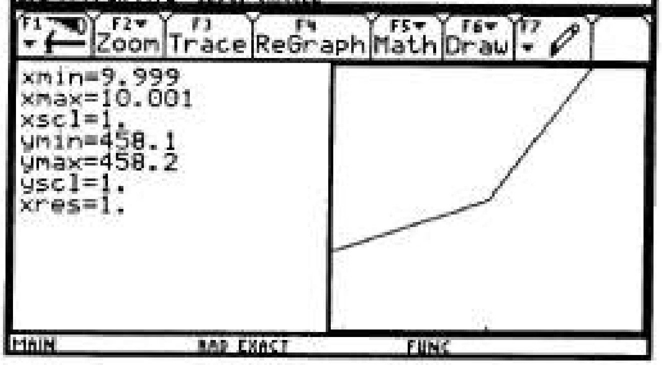
En supposant une variation régulière de x dans le temps, v_1 augmente de moins en moins vite tant que $x < 10$, puis sa croissante devient de plus en plus rapide jusqu'à $x = 20$.



Le comportement de la représentation graphique de v_2 est identique à v_1 pour $x < 10$. Cependant, la courbe de v_2 doit faire apparaître une augmentation brutale de sa croissance lorsque $x = 10$.



Cet écran fait apparaître, plus précisément encore, le changement brutal de direction de la représentation de v_2 au point d'abscisse 10 ce qui n'est pas le cas de la fonction v_1.



Étudier la fonction « surface du liquide »

On observe qu'une surface du liquide importante induit une augmentation du volume plus importante. Il existe un lien étroit entre la **valeur** de cette fonction et les **variations** du volume.

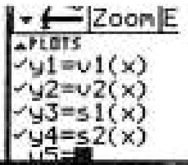
On sait que la surface du liquide est dans chacun des types de tronc de cône A ou B une fonction de x :

$$S_A(x) = \frac{\pi}{16}\,(x + 10)^2$$
$$S_B(x) = \frac{\pi}{16}\,(20 - x)^2$$

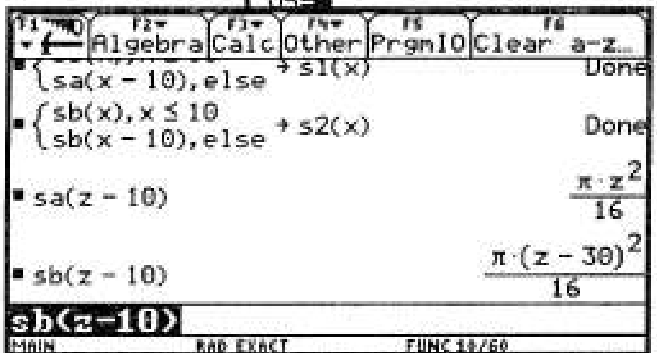
• Une expression de la fonction « surface du liquide » en fonction de x dans le premier cas peut être :

$$s_1 : x \longmapsto \begin{cases} S_B(x) & \text{si } x \leq 10 \\ S_A(x - 10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Il est à noter que l'inégalité large ne pose ici aucun problème. Le calcul de $s_1(x)$ peut se faire avec l'une ou l'autre des deux formules. En effet, $S_B(10) = S_A(0) = \frac{25\pi}{4}$. On a choisi la première.



On a entré s_1 et s_2 dans **y3** et **y4** :

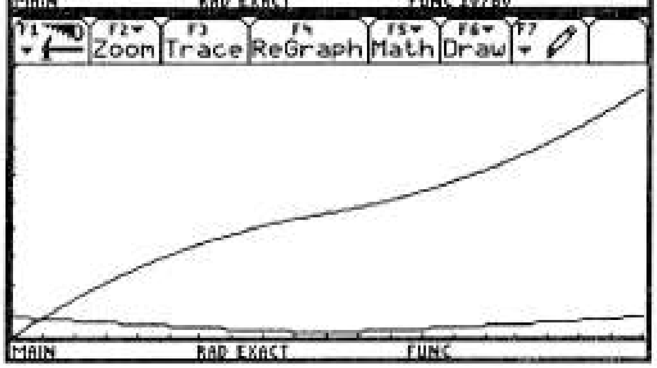


Explicitons les termes

$S_A(z - 10)$ et $S_B(z - 10)$

Le calcul de $S_A(x - 10)$ n'est pas faisable (« définition circulaire »)

Ces expressions se retrouveront ultérieurement.



On a représenté ci-contre les fonctions v_1 et s_1 sur la fenêtre

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 1000 \end{cases}$$

La décroissance de s_1 est liée au ralentissement de la croissance de v_1 comme on pouvait s'y attendre par une simple observation de bon sens.

• Dans le deuxième cas, il est clair qu'on peut écrire :

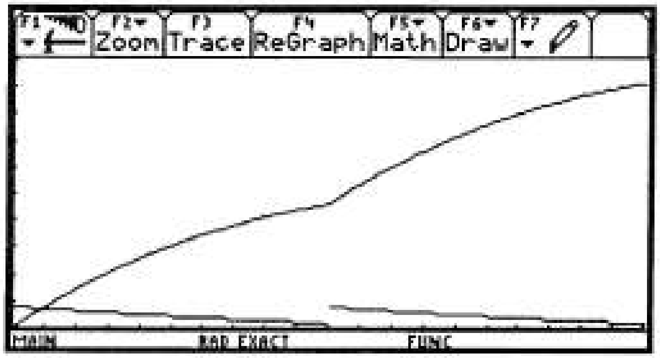
$$s_2 : x \longmapsto \begin{cases} S_B(x) & \text{si } x < 10 \\ S_B(x - 10) & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

Il reste à définir $s_2(10)$ si c'est possible. Intuitivement, il semble difficile de choisir entre $S_B(10)$ et $S_B(0)$ et ceci bien que $v_2(10) = \frac{875\pi}{6}$ soit, lui, défini. Laissons en suspens cette question pour l'instant.

Sur la même fenêtre que pour v_1 et s_1, on a tracé les représentations de v_2 et s_2. (en mode **dot**)

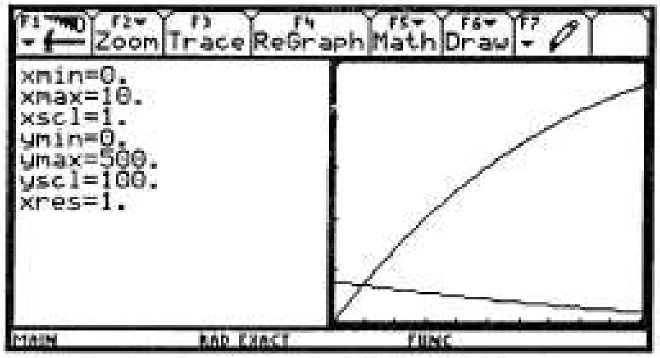
Le changement soudain de valeur de s_2 apparaît distinctement.

Cette augmentation est à relier à l'accélération soudaine de la croissance de v_2.



Rechercher une relation entre V_B et S_B

Ci-contre, les représentations de V_B et S_B. Nous cherchons à établir un lien entre ces deux fonctions et par extension, un lien entre s_1 et v_1 puis entre s_2 et v_2.



Considérons le volume de liquide entre les hauteurs x et (x + 0,0001). Ce volume est égal à $[V_B(x + 0{,}0001) - V_B(x)]$. Compte tenu de la faible hauteur, ce volume n'est que peu différent d'un cylindre dont la hauteur est 0,0001 et la surface de base :

$$d(x) = \frac{V_B(x + 0{,}0001) - V_B(x)}{0{,}0001}.$$

En mode **Approximate** on observe le tableau suivant :

DATA	x	vb(x)	vb(x+	d(x)	sb(x)
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1.	74.678	74.685	70.882	70.882
2	2.	141.9	141.9	63.617	63.617
3	3.	202.04	202.05	56.745	56.745
4	4.	255.52	255.52	50.265	50.265
5	5.	302.71	302.71	44.178	44.179
6	6.	344.	344.01	38.484	38.485
7	7.	379.81	379.81	33.183	33.183

c1=

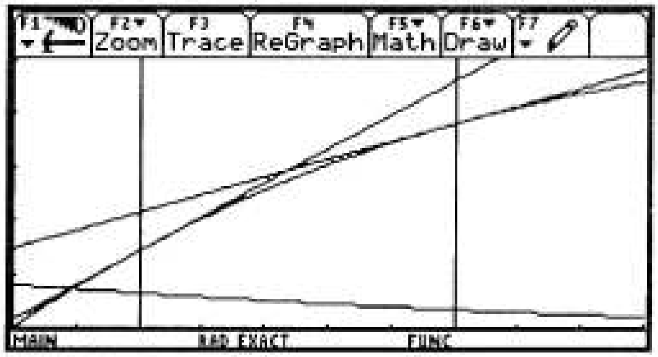
dans lequel **c2** contient $V_B(x)$, **c3** contient $V_B(x + 0{,}0001)$, **c4** contient d(x) et **c5** contient $S_B(x)$.

L'excellente corrélation entre **c4** et **c5** conforte le raisonnement précédent.

De plus, d(x) est le coefficient directeur de la droite passant par les deux points de la représentation de V_B dont les abscisses sont respectivement x et (x + 0,0001). Cette droite n'est graphiquement pas distincte de la "tangente" au point d'abscisse x de la représentation de V_B.

L'écran ci-dessous représente les courbes des fonctions :

- V_B ;
- S_B ;
- la droite (D_a) d'équation $y = d(a)\ (x - a) + V_B(a)$ qui est la droite de coefficient directeur d(a) passant par le point de coordonnées (a , $V_B(a)$) ;
- et la droite d'équation $y = 10^6(x - a)$, pour simuler la verticale d'équation x = a pour a prenant les valeurs 2 et 7.



Étude formelle du lien entre V_B et S_B

Considérons l'expression :

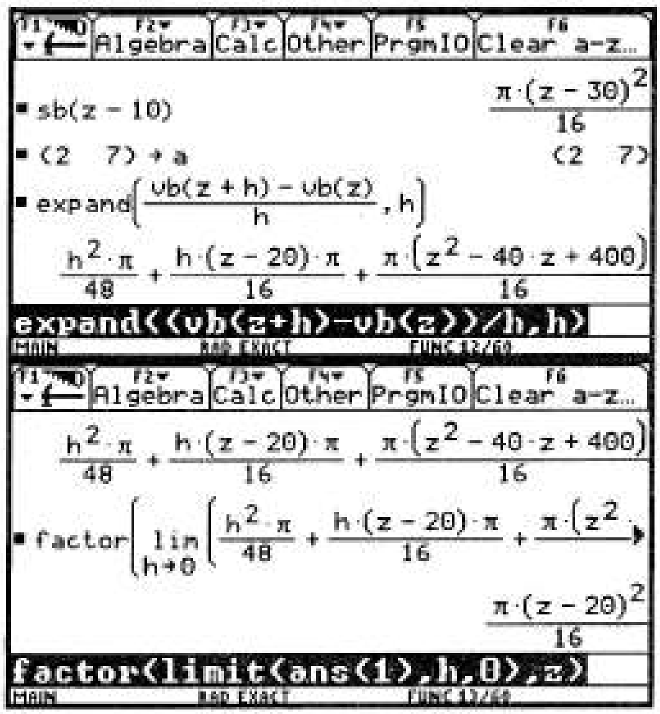
$$d(x,h) = \frac{V_B(x + h) - V_B(x)}{h}$$

qu'on développe selon les puissances décroissantes de h.

La limite lorsque h tend vers 0 de cette expression est totalement évidente.

Sa forme factorisée conduit à écrire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{V_B(x + h) - V_B(x)}{h} = S_B(x).$$



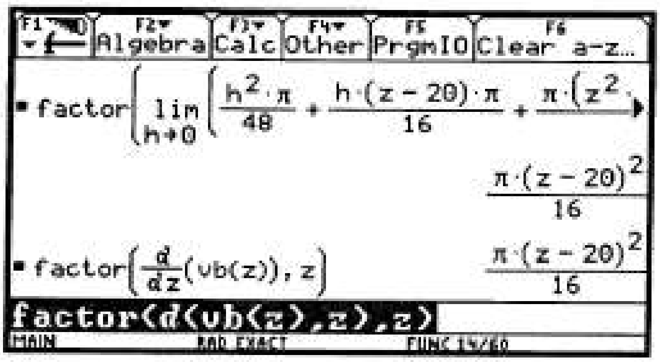
La fonction dérivée

La fonction notée $\dfrac{df}{dx}$ ou f' est définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

lorsqu'elle existe est appelée la fonction dérivée de f.

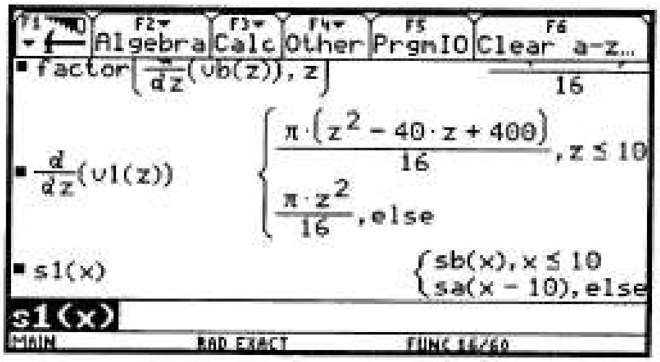
syntaxe : **d(vb(z),z)**



Les fonctions dérivées de v_1 et v_2

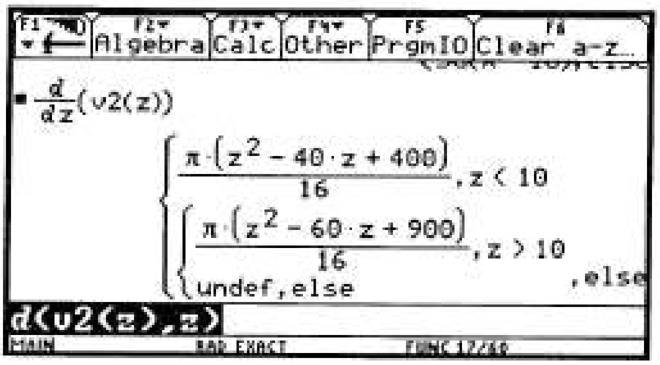
La dérivée de v_1 est égale à s_1 comme le montre l'écran ci-contre. Elle est effectivement définie en 10.

La fonction v_1 est dérivable en 10.



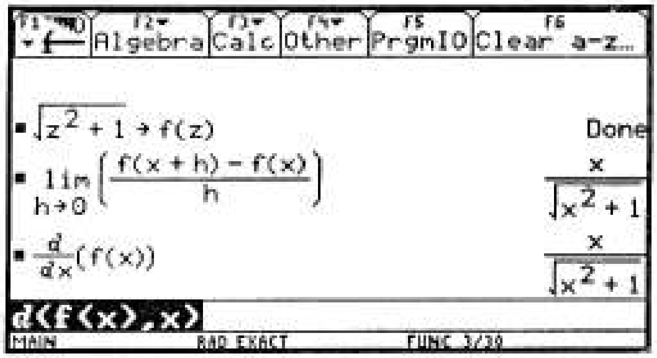
La dérivée de v_2 est égale à s_2 comme le montre l'écran ci-contre. Elle n'est effectivement pas définie en 10.

La fonction v_2 n'est pas dérivable en 10.



II.3.d. Définition et calcul de dérivées.

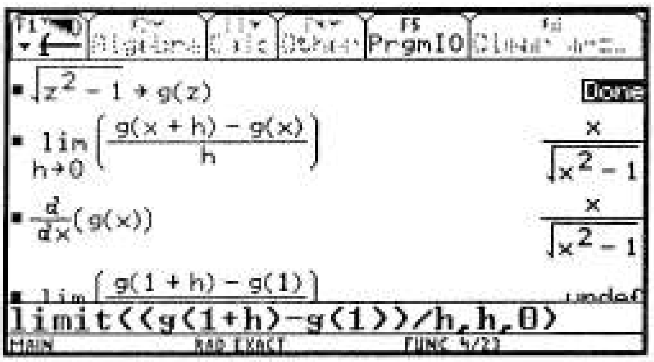
Définition



Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert D. On suppose que, pour tout x élément de D, la fonction f est dérivable et soit f'(x) le nombre dérivé de f en x. On dit alors que f est dérivable sur D et on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle ouvert D, la fonction notée f' ou $\frac{df}{dx}$ définie par

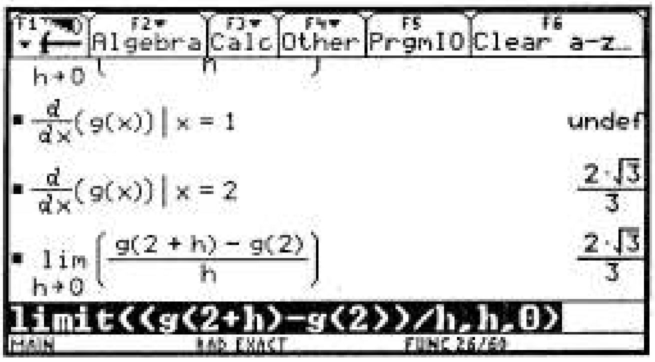
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



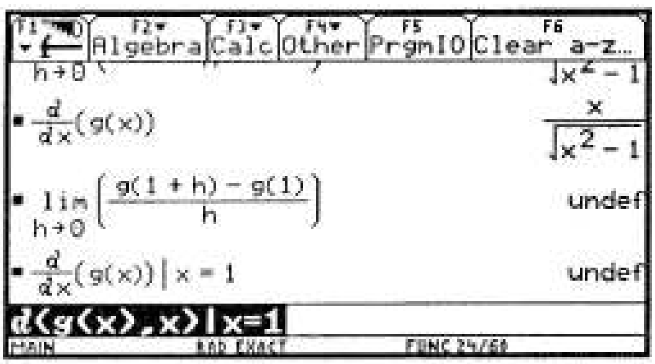
Soit la fonction g telle que :

$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Le nombre dérivé de g en 2 est $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; il est égal à g'(2) : valeur de la fonction g' lorsque x = 2 ; il est égal aussi à $\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$.



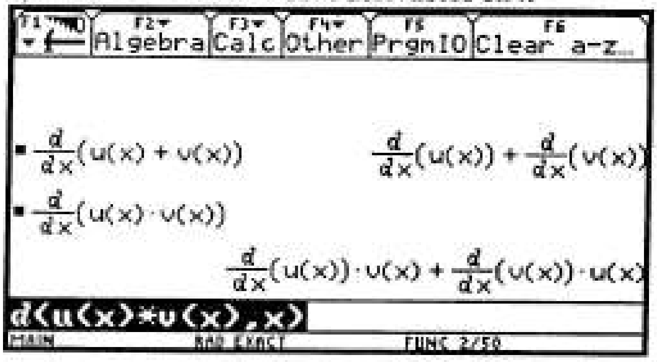
La fonction g définie sur les intervalles $]-\infty ; -1]$ et $[1 ; +\infty[$ n'est pas dérivable en 1 et -1. On remarquera par ailleurs que les ensembles de définition de g et g' ne coïncident pas mais ce n'est pas la raison de la non-dérivabilité de g en 1.



Recherche de fonctions dérivées

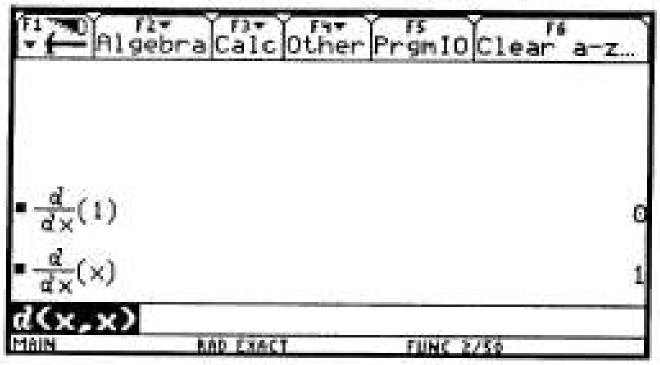
Dérivée d'une somme et d'un produit de deux fonctions

Notons que si **u** et **v** sont dérivables en x, alors **u + v** et **u.v** sont dérivables en x



La calculatrice donne les résultats ci-contre (sous réserve de supposer que les fonctions **u** et **v** sont dérivables en x).

Réécrire ces résultats avec les notations **u'** et **v'** dérivées de **u** et **v**.



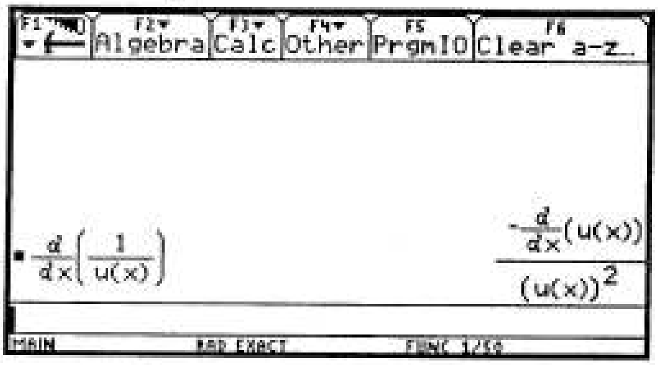
Voici deux résultats élémentaires[1] :

Démontrer ces résultats.

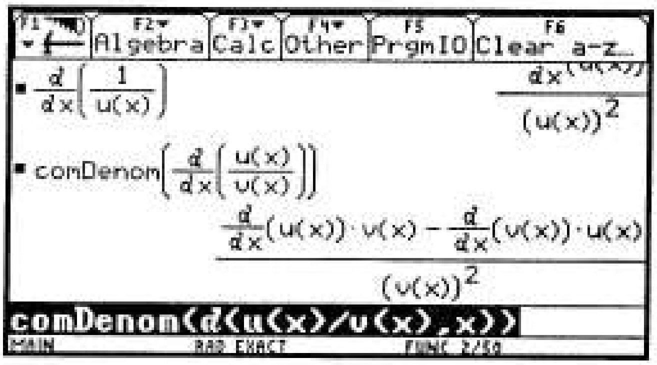
Démontrer que la dérivée d'une fonction constante est nulle et déduire de ce qui précède la dérivée de la fonction k.**u** (dans le cas où **u** est dérivable et k réel).

Dérivée d'un quotient de deux fonctions

Notons que si **u** est dérivable en x et **u**(x) ≠ 0, alors $\frac{1}{\mathbf{u}}$ est dérivable en x



Voici d'autres résultats <u>démontrables</u> donnés par la calculatrice (dans la mesure où ils ont un sens).



Traduire ces résultats avec les notations **u'** et **v'** et les mémoriser.

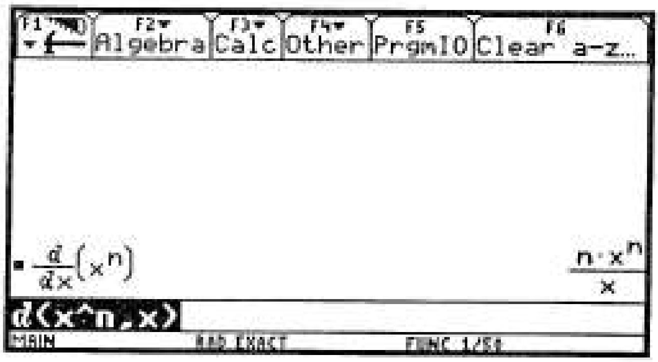
---

[1] *On peut aussi, et ce sera un bon exercice, mettre en évidenceune signification intuitive ou cinématique de ces résultats.*

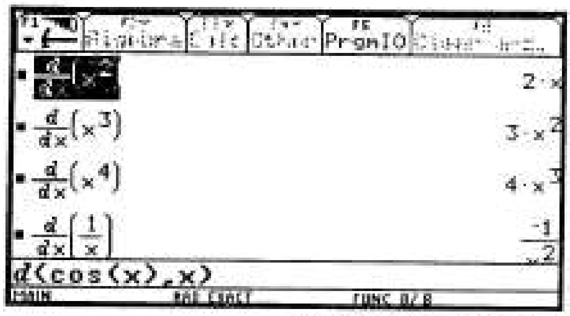
Dérivée de fonctions usuelles

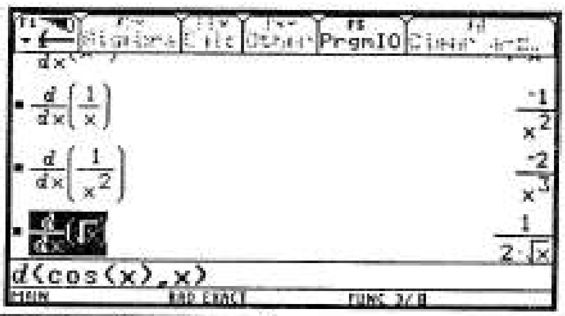
Le résultat ci-contre est donné pour n quelconque. On envisagera seulement le cas où n est entier.

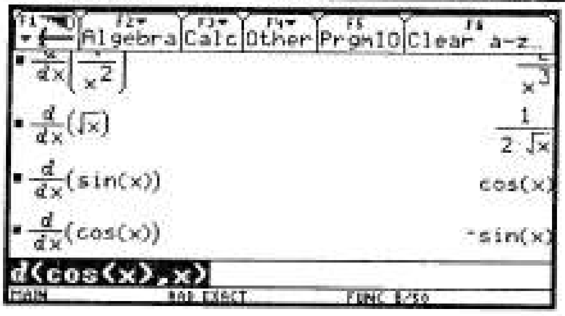
Il semble que la dérivabilité en zéro de la fonction $x \longmapsto x^n$ puisse ne pas être assurée. Qu'en est-il selon les valeurs de n ?



On pourra utilement retenir les résultats suivants :





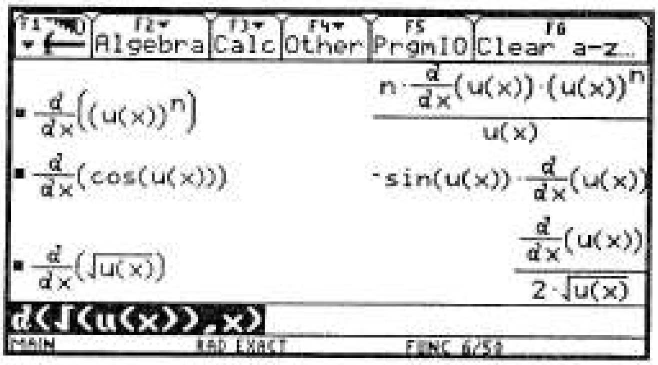


Dérivée de fonction composée

La fonction u étant dérivable en x, voici trois formules pouvant suggérer une formule générale (programme de TS) :

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$$

sous réserve de dérivabilité.



II.3.e. Le point de vue local.

Développement limité en un point

Introduction

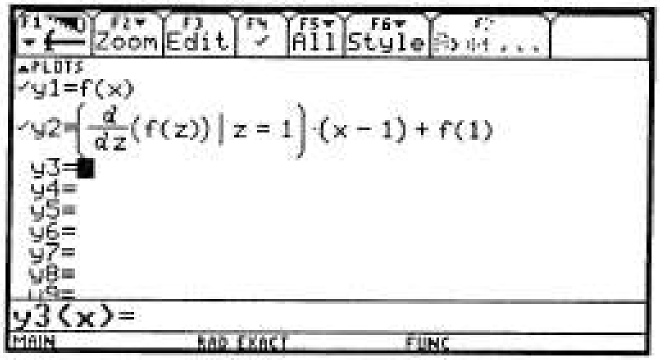
La fonction f est définie par

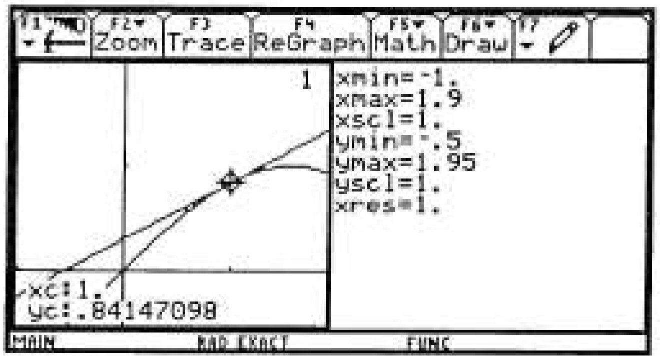
$$f(x) = \sin x.$$

L'expression $\left(\frac{d}{dz}(f(z))\middle|\ z = 1\right)$ est la valeur de la fonction dérivée de f lorsque la variable est 1. L'écriture habituelle est $f'(1)$ encore appelé nombre dérivé de f en 1.

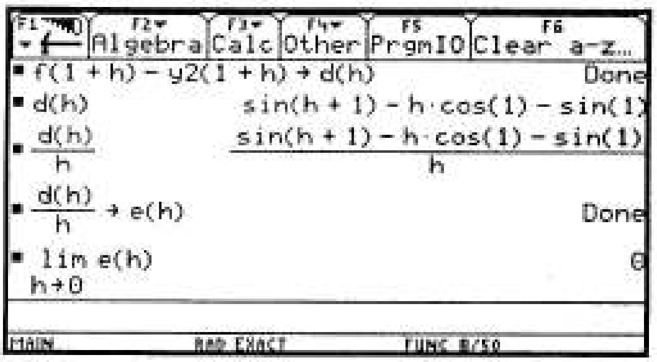
L'équation **y2** est :
$y = f(1) + f'(1)\,(x - 1).$

Il s'agit donc de la tangente à la courbe de f au point de coordonnées $(1\ ;\ f(1))$.





On pose $x = 1 + h$ et on compare les nombres de $f(1 + h)$ et de $y_2(1 + h)$. On note $d(h)$ la différence entre ces deux nombres. Quant à $e(h)$, il s'agit de l'erreur relative dont la limite est nulle en 0.



On a : $$f(1 + h) = y_2(1 + h) + h.e(h)$$

où e est une fonction ayant une limite nulle en 0. Soit, finalement :

$$f(1 + h) = f(1) + f'(1).h + h.e(h)$$

Définitions

Soit f une fonction dérivable en x_0. On appelle développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de x_0 l'écriture de $f(x_0 + h)$ suivante :

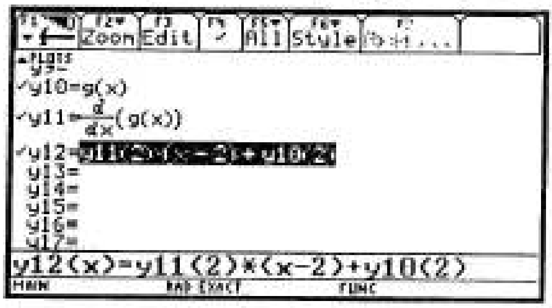
$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.\ f'(x_0) + h.\ \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ a pour limite 0 en 0 ou encore, en posant $x_0 + h = x$:

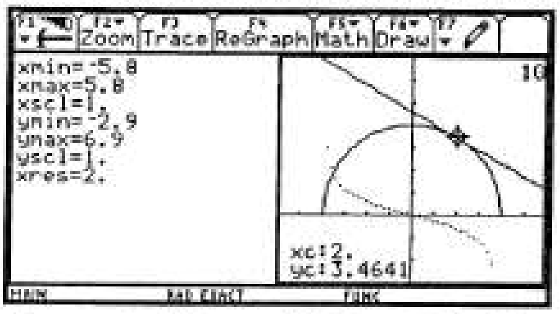
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0).\ f'(x_0) + (x - x_0).\ \varepsilon(x - x_0)$

La droite d'équation $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$ est la tangente au point d'abscisse x_0 à la représentation graphique de f.

Illustration

La fonction g est définie par $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$, définie sur [-4 ; 4] et dérivable sur]-4 ; 4[.





La fonction g' (**y11**), dérivée de g et tracée en pointillés, est définie sur]-4 ; 4[; sa courbe présente deux asymptotes verticales. La fonction écrite en **y11** est affine ; sa représentation est une droite de coefficient directeur g'(2), passant par le point A de coordonnées (2 ; g(2)). Il s'agit de la tangente en A à la courbe représentative de g.

Une valeur très approchée[1]

Le problème

On appelle α le nombre décimal 0,9999...9 dont la partie décimale est formée de 1996 chiffres égaux à 9. Quel est le 1997ème chiffre après la virgule de $\sqrt{\alpha}$?

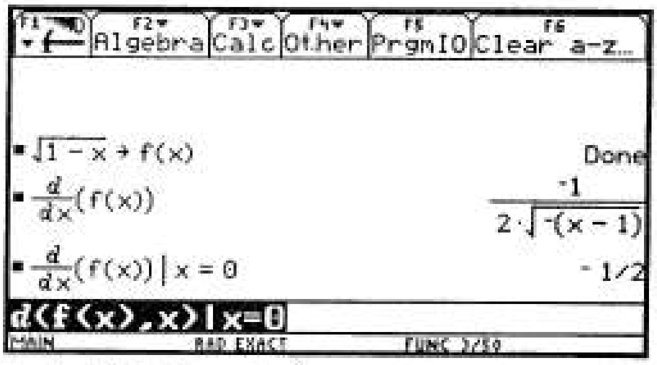
La stratégie de résolution

Posons, sur [0 ; 1[, $f(x) = \sqrt{1 - x}$ et constatons que $f(10^{-1996}) = \sqrt{\alpha}$

1) Le développement limité d'ordre 1 en 0 de f s'écrit :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + x.\,\varepsilon(x)$$

où ε a une limite nulle en 0

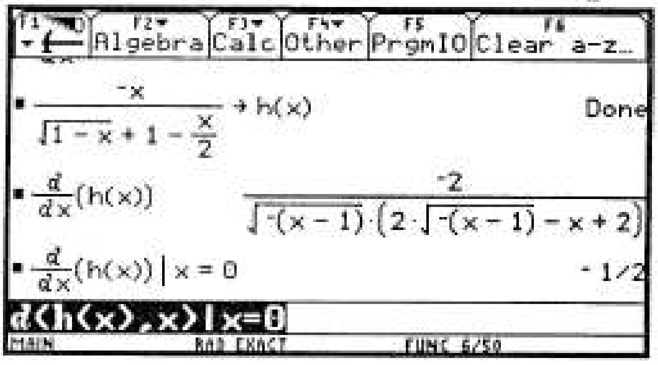


2) On pose $\varphi(x) = \varepsilon(x)$ sur]0 ; 1[et $\varphi(0) = 0$. (D'où $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + x.\,\varphi(x)$ sur [0 ; 1[).

On écrit $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - (1 - \frac{x}{2})}{x}$ et on démontre aisément que $\varphi(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x} + (1 - \frac{x}{2})}$.

φ est dérivable en 0 et $\varphi(x)$ est strictement négatif sur]0 ; 1[, ce qui assure $f(x) < 1 - \frac{x}{2}$.

3) Du calcul de $\varphi'(x)$, on déduit le développement limité d'ordre 1 de φ en 0. Soit $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x + x.\psi(x)$.



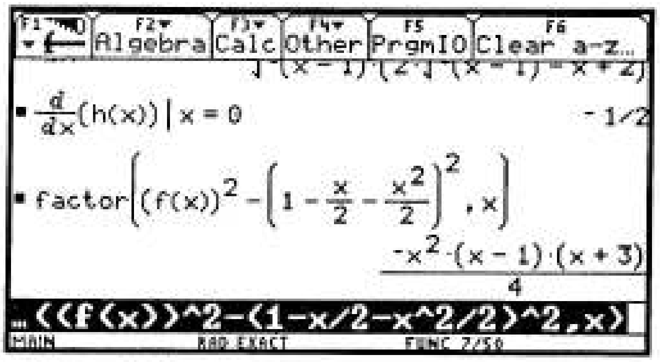
---

[1] *d'après* Math 1°S et E Analyse - *Collection Terracher - Hachette 1991.*

4) Ainsi, $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + x^2.\psi(x)$,

soit $\psi(x) = \dfrac{f(x) - (1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2})}{x^2}$,

ou $\psi(x) = \dfrac{(1 - x)(x + 3)}{4(\sqrt{1 - x} + (1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}))}$



prouvant que $\psi(x)$ est positif sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ d'où l'encadrement :

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} < f(x) < 1 - \frac{x}{2}$$

5) En appliquant ce résultat à la situation du problème :

$$1 - \frac{10^{-1996}}{2} - \frac{(10^{-1996})^2}{2} < f(10^{-1996}) < 1 - \frac{10^{-1996}}{2}$$

$$1 - \frac{10^{-1996}}{2} - \frac{10^{-3992}}{2} < \sqrt{\alpha} < 1 - \frac{10^{-1996}}{2}$$

$$1 - 5.10^{-1997} - 5.10^{-3993} < \sqrt{\alpha} < 1 - 5.10^{-1997}$$

$$0{,}999...9\underline{4}999...9\underline{\underline{5}} < \sqrt{\alpha} < 0{,}999...9\underline{5}000...0\underline{\underline{0}}$$

Les chiffres soulignés sont les décimales n° 1997 et 3992 (double).

La 1997ème décimale de $\sqrt{\alpha}$ est donc 4.

Notons que les chiffres suivants (à l'exception de ce 1997ème) sont des 9 jusqu'au 3992ème !

II.3.f. Le point de vue global.

Dérivée et sens de variation

Si une fonction f, dérivable sur un intervalle I, est croissante sur I, alors pour tout couple (x_0,x_1) d'éléments de I, tels que $x_0 < x_1$, on a $f(x_0) \leq f(x_1)$ et donc $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$.

En posant $x_1 = x_0+h$ et en prenant la limite du rapport précédent, on obtient $f'(x_0) \geq 0$ pour tout x_0 élément de I. Par conséquent, **si une fonction dérivable sur I est croissante sur I, alors sa dérivée est positive sur I.** On peut évidemment adjoindre à ce théorème un théorème analogue : si une fonction dérivable sur I est décroissante sur I, alors sa dérivée est négative sur I.

Cependant, c'est la réciproque des théorèmes précédents qui offrirait une utilité incontestable. On pourrait alors déduire de la connaissance du signe de la dérivée, le sens de variation de la fonction sur I et disposer d'un formidable outil de travail sur les fonctions. Ce passage, intuitivement, semble simple.

En effet, sachant que $f'(x_0)$ est (s'il existe) le coefficient directeur de la tangente à la représentation de f au point d'abscisse x_0, on peut conclure que le signe de $f'(x_0)$ détermine le sens de variation de la fonction affine φ approchant f au voisinage de x_0 et il n'y a qu'un pas à franchir pour passer du sens de variation de la fonction affine φ à la fonction f.

Mais, une démonstration rigoureuse est hors programme. Aussi, nous sommes invités à admettre le résultat suivant :

Si f est dérivable sur un intervalle I, si f' est sa dérivée sur I et si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I.

Remarque importante : si, sur I, f'(x) est strictement positif sauf éventuellement en des valeurs isolées, alors f est strictement croissante sur I.

On dispose bien entendu des théorèmes analogues :

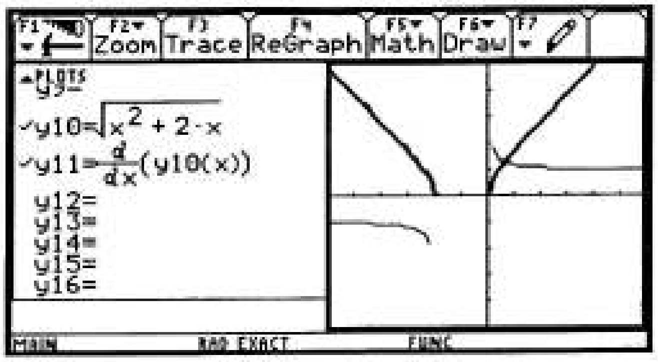
Si f est dérivable sur un intervalle I, si f' est sa dérivée sur I et si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Remarque importante : si, sur I, f'(x) est strictement positif sauf éventuellement en des valeurs isolées, alors f est strictement croissante sur I.

Ces résultats apparaissent nettement sur les graphiques ci-contre où f **(y10)** est tracée en gras :

- sur $]-\infty\ ;\ -2[$, $f' < 0$ et f décroît ;
- sur $]0\ ;\ -\infty[$, $f' > 0$ et f croît.

A noter que le sens de variation de f' est sans rapport avec le sens de variation de f.



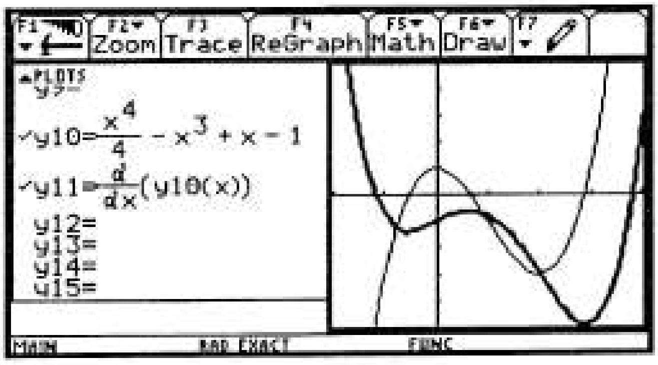
Il s'ensuit des définitions et résultats utiles. Par exemple :

__Définition et théorème__

> **Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x0 .On dit que f possède un maximum local en x0, s'il exite un intervalle [a , b] contenu dans I et contenant x0 tel que pour tout x de [a , b], $f(x) \leq f(x0)$.**
>
> **Si f est dérivable sur l'intervalle]a , b[et possède un maximum local en x0 , alors $f'(x0) = 0$.**
>
> **Réciproquement, si $f'(x0) = 0$, $f' \geq 0$ sur]a , x0[et $f' \leq 0$ sur]x0 , b[alors f admet un maximum local en x0.**

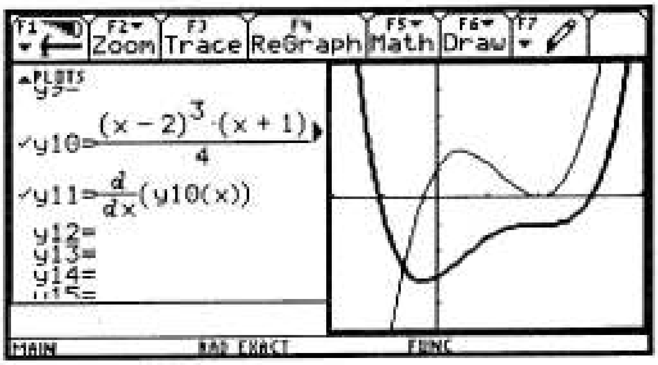
Ainsi que la définition et le théorème analogue définissant un minimum local.

Ci-contre, bien visible, l'alignement sur une « verticale » d'une solution de l'équation $f'(x) = 0$ et des extrema de f. Rechercher les extrema d'une fonction f conduit à résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Cependant, il n'y a pas équivalence comme le montre le graphique suivant.



Si l'on considère la fonction définie par : x a $f(x) = \frac{(x-2)^3.(x+1)}{4} -1$.

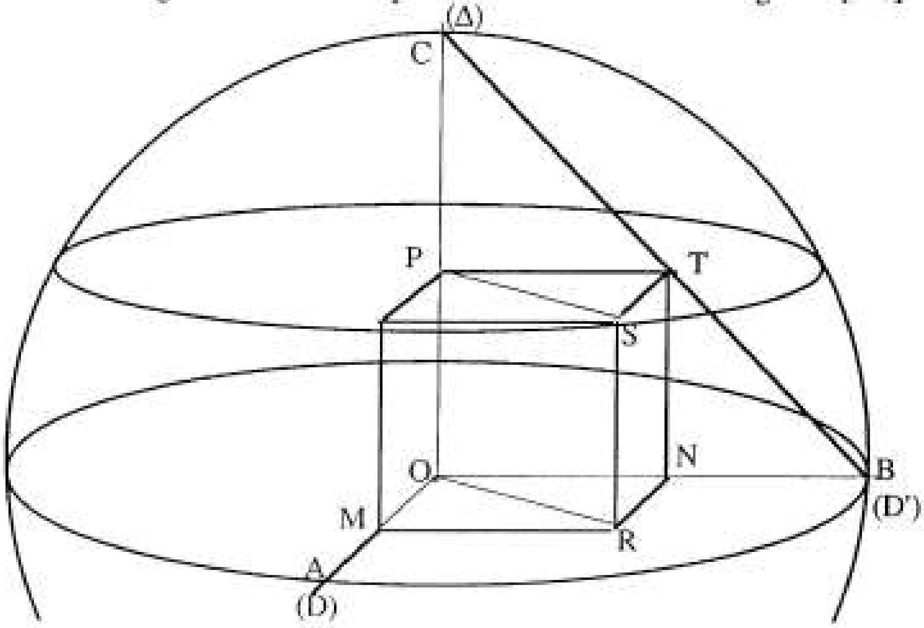
On peut observer que 2 est une racine de f' qui ne correspond pas à un extremum local de f. Comment peut-on expliquer ce fait en s'appuyant sur la définition ?



II.3.g. Des exemples de problèmes.

Le pavé dans la sphère

On considère la demi-sphère (Σ) de centre O et de rayon 10 cm. On trace deux demi-droites perpendiculaires (D) et (D') passant par O dans le plan de "l'équateur" et une demi-droite Δ passant par O perpendiculaire au plan de "l'équateur". La sphère coupe (D) en A , (D') en B et (Δ) en C. Un point N se déplace sur [OB]. On construit un pavé droit de façon que O et N soient deux de ses sommets, que trois de ses faces soient dans les plans formés par les droites (D), (D') et (Δ) et que le sommet S opposé à O soit sur la surface de cette demi-sphère. On fait également en sorte que le sommet T soit sur le segment [BC].



Existe-t-il une (ou des) position(s) de N telle(s) que le volume de ce pavé soit maximal ?

Observons tout d'abord que le choix de la variable n'est pas anodin : si les points N et P peuvent librement parcourir les segments [OB] ou [OC], il n'en est pas de même de M dont certaines positions sont impossibles. (M en A par exemple). Nous prendrons dans la suite du problème ON = x.

Première étape : détermination de OP, OM et du volume du pavé

La configuration de Thalès construite sur les triangles OBC et NBT conduit à :

$$OP = TN = 10 - x.$$

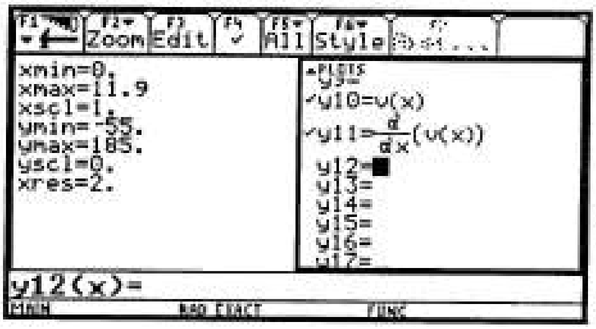
Par une double application du théorème de Pythagore sur les triangles rectangles OMR et ORS, on obtient $OS^2 = 10^2 = OM^2 + ON^2 + OP^2$ et donc :

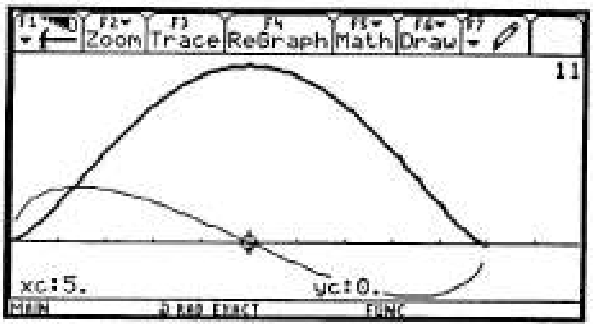
$$OM^2 = 100 - x^2 - (10 - x)^2 = 2x\,(10 - x).$$

Le pavé a pour volume $\mathbf{v(x) = x\,(10 - x)\sqrt{2x\,(10 - x)}}$

Deuxième étape : étude de la fonction v

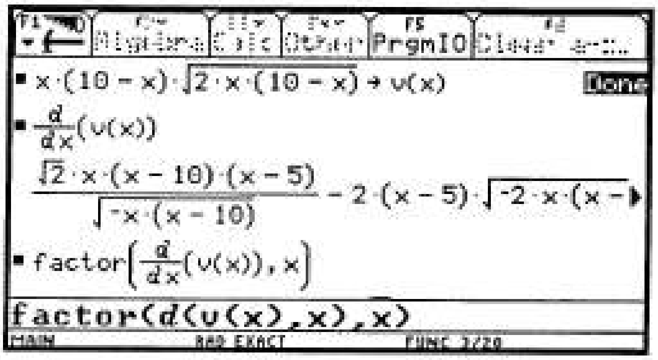
graphiquement, le maximum de v apparaît pour x = 5 puisqu'il semble que 5 soit la valeur de l'intervalle]0 ; 10[pour laquelle v'(x) = 0 .





Il reste à valider (ou infirmer) cette conjecture par une utilisation rigoureuse du calcul différentiel.

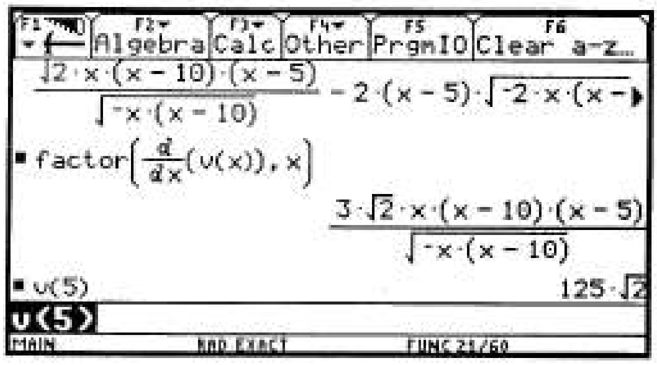
L'expression de v'(x) se présente sous une forme peu maniable : on en demande une factorisation.



Troisième étape : recherche du maximum éventuel

Les solutions de l'équation v'(x) = 0 sur]0 ; 10[sont ici visibles : x = 5 seulement et on peut observer que $v(5) = 5^3.\sqrt{2}$.

Il reste à s'assurer que v'(x) change de signe dans un voisinage de 5.



Autrement dit, résolvons les inéquations v'(x) > 0 et v'(x) < 0

Soit : $\dfrac{x.(10 - x).(5 - x)}{\sqrt{x.(10 - x)}} > 0$ équivalente sur]0 ; 10[à 5 - x > 0 (tous les autres facteurs étant positifs).

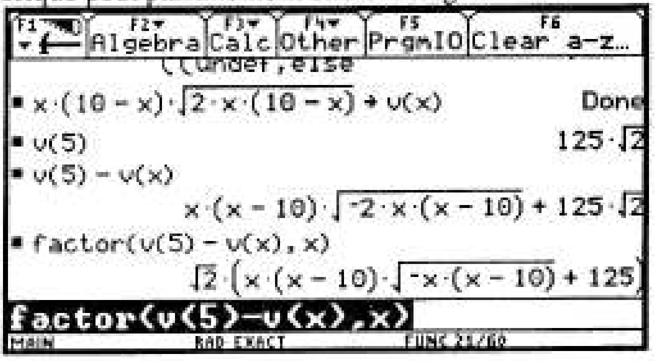
On obtient donc le tableau de variation de v :

x	0		5		10
v'(x)		+	0	−	
v	0	↗	$125\sqrt{2}$	↘	0

et la preuve de l'existence du maximum ainsi que sa valeur.

Mais le cadre du calcul différentiel n'est pas une nécessité absolue

Il est à noter que la résolution de ce problème n'impose pas l'utilisation du calcul différentiel. Une méthode purement algébrique peut parfaitement être envisagée.



Revenons à l'expression initiale de v(x) et après avoir envisagé la conjecture que 5 est la valeur de x pour laquelle le volume est maximum, et s'être assuré que $v(5) = 125\sqrt{2}$, il nous suffirait de prouver que pour tout x de]0 ; 10[sauf 5, l'expression v(5) - v(x) est strictement positive pour être assuré du résultat.

En proposant le changement de variable $u = \sqrt{x.(10 - x)}$, on obtient :
$v(5) - v(x) = \sqrt{2}\ .\ (5^3 - u^3) = (5 - u).(u^2 + 5u + 25)$. Or $u^2 + 5u + 25 > 0$ pour tout u réel (discriminant négatif). De plus, puisque u est positif, (5 - u) a le même signe que $25 - u^2 = 25 - x(10 - x) = (5 - x)^2$.

Par conséquent, v(5) - v(x) est positif pour tout x de l'intervalle [0 ; 10] et nul seulement pour x = 5. Ce qui achève la démonstration ... et le problème. En laissant la réflexion ouverte sur le fait que le calcul différentiel est un outil de résolution de problèmes parmi d'autres outils ...

Les dérivées successives

Démontrer que, pour tout x positif :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$$

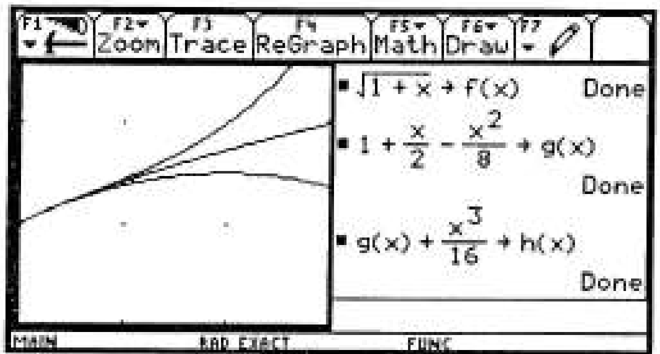
$$x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

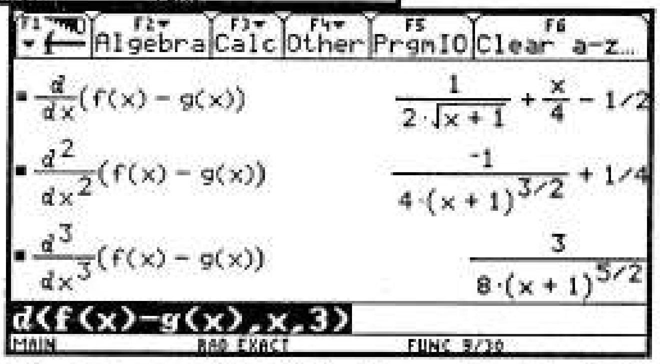
$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

On précisera dans chaque cas les valeurs de x pour lesquelles l'amplitude de l'encadrement obtenu est inférieure à 10^{-3}

A l'aide des inégalités ci-dessus, étudier :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$



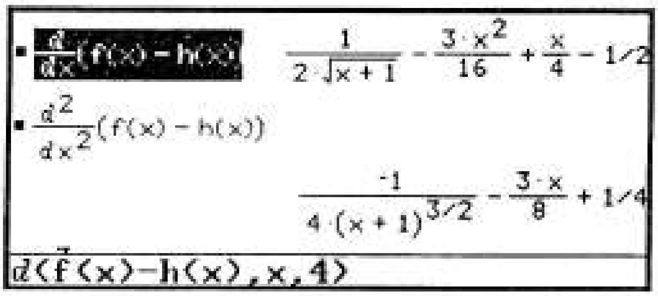


Les signes de f'-g' et f''-g'' ne sont pas directement accessibles. Il est clair que f'''-g'''> 0 sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f''-g'' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

En observant que (f''-g'')(0) = 0, il est clair que f''> 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f'-g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme (f'-g')(0) = 0, on obtient f'-g' > 0 sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f-g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ avec (f-g)(0) = 0. Donc f-g ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$.

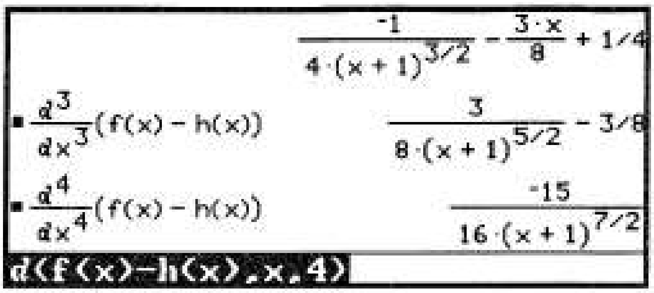
Conclusion : $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.



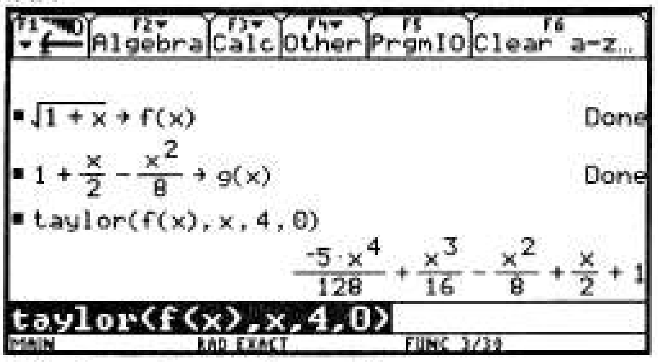
De la même manière, la dérivée quatrième de f-h est strictement négative sur $\mathbb{R}_+$ donc la dérivée troisième de f-h y est strictement décroissante. Elle est donc négative puisqu'elle est nulle en 0.

En remontant ainsi les dérivées successives, on obtient f'-h'< 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f-h est décroissante donc négative car nulle en 0.

Donc $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$.



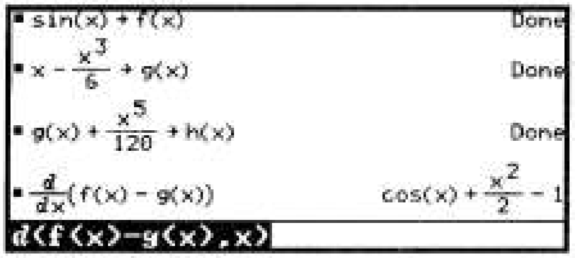
Bien entendu, mais hors programme du Lycée, le développement de Taylor de f à l'ordre 4 en 0 conduit à :

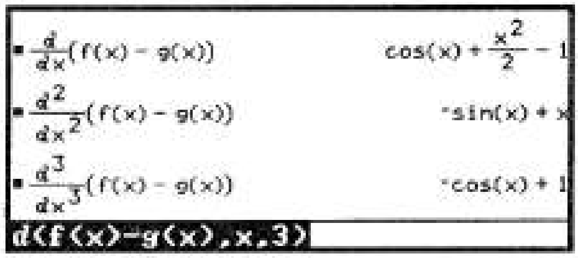


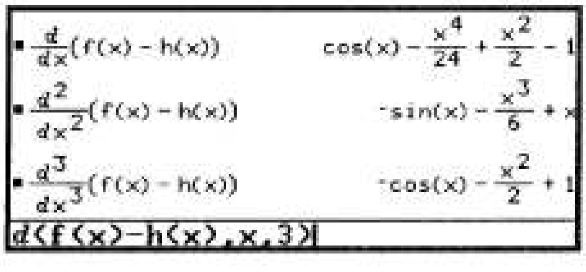
d'où il est aisé de déduire l'encadrement demandé.

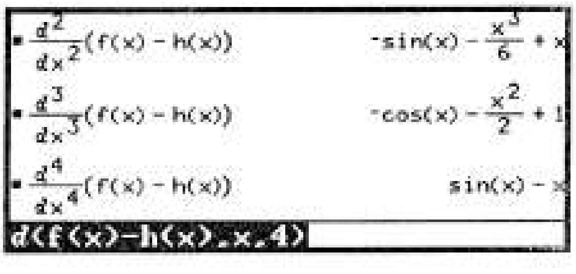
L'amplitude de l'encadrement est $\frac{x^3}{16}$ ce qui conduit à poser $x^3 \leq 16.10^{-3}$ donc $x \leq 0{,}25$. Donc $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ est une valeur approchée par défaut au millième de $\sqrt{1+x}$ pour tout x positif inférieur à 0,25.

Pour les encadrements qui suivent, on procèdera de la même manière :









A noter que sinx - x est positif sur $\mathbb{R}_+$ comme démontré à l'étape précédente (f''-g''≥ 0).

L'amplitude de l'encadrement est $\frac{x^5}{120}$ donc $x \leq 0{,}65$. Donc $x - \frac{x^3}{6}$ est une valeur approchée par défaut au millième de sinx pour tout x positif inférieur à 0,65 radian.

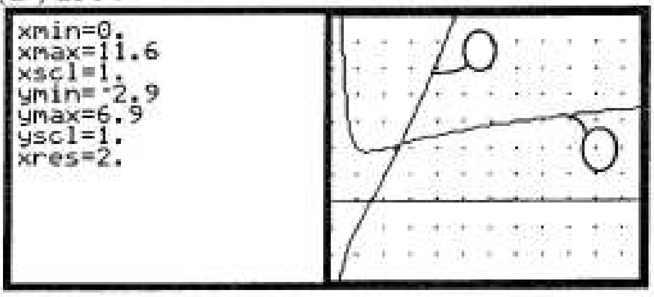
De même, $\frac{x^6}{720}$ est l'amplitude de l'encadrement de cosx et donc $x \leq 0{,}94$. Donc $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ est une valeur approchée par excès au millième de cosx pour tout x positif inférieur à 0,94.

Les inégalités $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ permettent, pour $x > 0$, d'écrire :
$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.
La parité de la fonction faisant le reste, on a $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

De la même façon, de $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, on déduit :
$-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^4}{720} \leq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24}$
donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ et pour cause de parité : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Du graphique au calcul

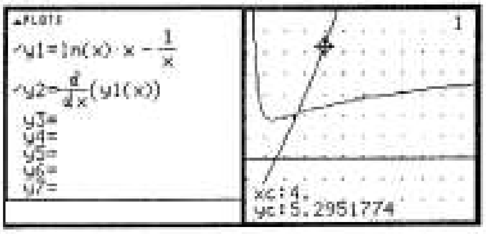
On a représenté ci-dessous une fonction f et sa dérivée f'. Indiquer en légende laquelle est, selon vous, la représentation (C) de f et laquelle est la représentation (C') de f'.



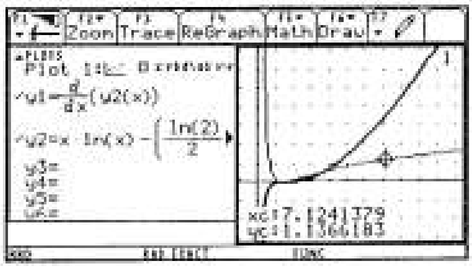
On pourra préciser les indices qui ont permis de faire le choix.

Même question avec le schéma suivant.

Réponse du premier exemple :



Les indices pour décider sont beaucoup plus fins dans le deuxième exemple, en voici la réponse :



II.4. A la quête de l'intégrale, une histoire sans fin

A la rubrique « Analyse mathématique » de l'Encyclopaedia Universalis, on peut trouver un abrégé, par Jean Dieudonné, de l'histoire de l'intégrale :

> La conception de l'intégrale au XVIII^e siècle reposait sur la notion intuitive « d'aire ». Avec la remise en ordre générale de l'analyse entreprise par Cauchy, on revient à une définition rigoureuse n'empruntant rien à l'intuition de l'espace : la valeur de l'intégrale est par définition prise comme limite, pour n tendant vers $+\infty$, des sommes :
>
> $$\frac{b-a}{n}\sum_{1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
>
> dites souvent « sommes de Riemann » (bien qu'en fait l'idée de considérer ces « valeurs approchées » de l'intégrale remontent à Eudoxe et Archimède et ait été l'inspiration des inventeurs du calcul intégral au XVII^e siècle). La contribution de Riemann lui-même fut de s'apercevoir que les sommes précédentes ont encore une limite finie lorsque la fonction f n'est plus nécessairement continue, mais a un ensemble de points de discontinuité qui, pour tout $\varepsilon > 0$, peut être contenu dans une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est $\leq \varepsilon$.
>
> L'intérêt propre de ce résultat est assez mince, mais il déclencha, dans le dernier tiers du XIX^e siècle, toute une série d'études en vue de définir, dans des cas aussi généraux que possible, une notion de « mesure » des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et « d'intégrale » d'une fonction de variable réelle. Elles devaient finalement aboutir, vers 1900, avec Emile Borel et Henri Lebesgue, à la définition de « l'intégrale de Lebesgue » que l'expérience a montré être la notion commode et féconde pour de nombreuses applications.

Nulle trace de cet émergence tumultueuse dans les programmes de terminale, qui suggèrent une introduction de l'intégrale assez artificielle. D'autres introductions sont cependant possible. On pourra se reporter avec profit à ce sujet à un numéro spécial de la revue Repères-Irem, consacré à l'intégration (Repères-Irem n°31, avril 1998, Topiques éditions).

II.4.a. L'intégrale, une double transposition problématique.

La transposition didactique

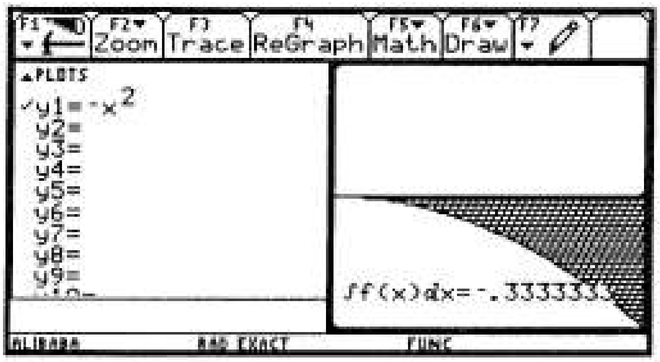
Elle aboutit à définir l'intégrale comme un objet assez curieux : définie par les programmes actuels en TS comme différence entre les valeurs prises par une primitive de la fonction considérée entre a et b, l'intégration est d'emblée définie comme l'inverse de la dérivation. Du coup, tout dans l'écriture symbolique relève de l'arbitraire le plus total : l'intégration apparaît détachée des procédures de sommation qui lui ont donné naissance ; les calculs d'aire, reposant eux sur des sommes finies, n'arrivent qu'en second temps.

La transposition informatique

Pour le même objet, cette transposition (du moins à partir des calculatrices symboliques type TI-92) est assez différente. On doit la considérer sous trois aspects :

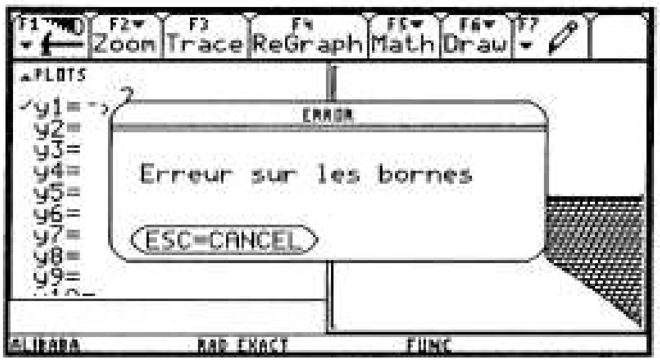
Dans l'application Graph

L'objet est directement lié à une aire : le calcul d'une intégrale (Menu F5 Math) donne (c'est toujours le cas dans l'application graphique) une valeur approchée de celle-ci. Simultanément est hachurée la surface correspondante (cf. ci-dessous). Ce type d'association pose deux problèmes :



- il s'agit bien sûr d'une « aire algébrique ». Mais il y a risque de confusion pour les élèves dans cette association étroite intégrale-aire :

- une aire peut alors être négative ;
- l'intégrale peut perdre sa valeur intrinsèque et dépendre des unités choisies.



- deuxième problème, le logiciel impose ici que les bornes soient dans « le bon sens ». Si on échange les bornes en demandant l'intégrale de 1 à 0, on s'attire la réponse ci-contre.

Ainsi $\int_1^0 f(t)dt$ n'existe pas...

On voit bien ainsi les problèmes créés ici par le concepteur du logiciel : l'illustration de l'intégrale par une aire entraîne des problèmes pour la définition même de l'objet.

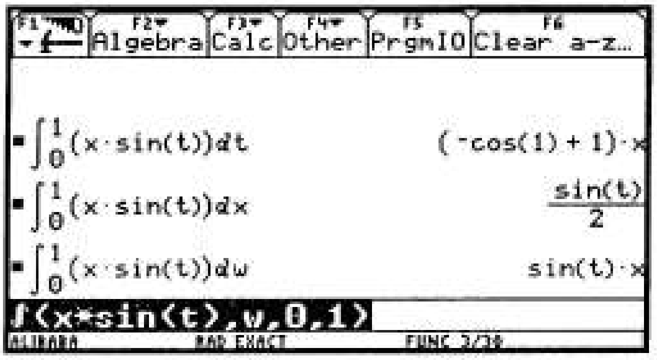
Dans l'application Home

<u>En mode « calcul exact »</u>

La syntaxe $\int(f(t), t)$ permet d'obtenir une primitive de f (si le logiciel en connaît une). La syntaxe $\int(f(t), t, a, b)$ permet d'obtenir $\int_a^b f(t)dt$. Cette syntaxe fait perdre à l'élément dt son caractère différentiel :

désormais, il n'indique plus que la variable dans le processus d'intégration, comme on peut le voir ci-contre.

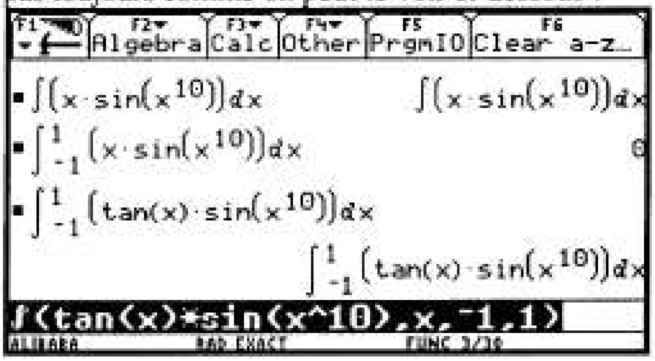
L'intégrale de la fonction x.sint prend ainsi différentes valeurs suivant la spécification de la variable : t, x ou w.



La connaissance par le logiciel d'une primitive de f semble être en général une condition du calcul de l'intégrale... mais pas toujours comme on peut le voir ci-dessous :

- le logiciel ne connaît pas une primitive de $x\sin(x^{10})$;
- cependant il donne l'intégrale : $\int_{-1}^{1} x.\sin(x^{10})dx$.

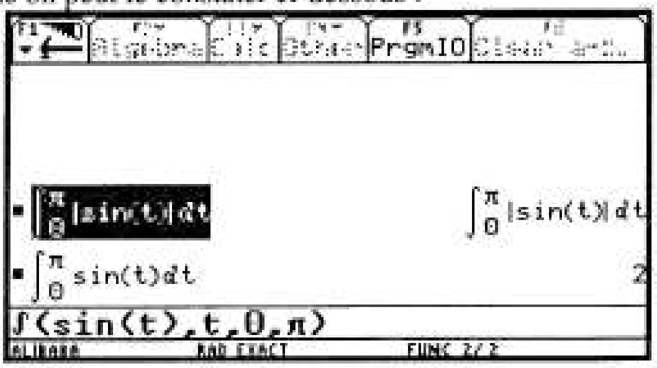
On peut penser qu'il identifie une fonction impaire et « sait » que l'intégrale sur le segment [-1; 1] est nulle.



Ce n'est pas aussi simple, puisque l'intégrale d'une autre fonction impaire, $\tan x.\sin(x^{10})$, sur le même segment, n'est pas calculée par le logiciel... Les choix du logiciel ne sont pas toujours évidents, et ne dispensent pas d'une interprétation mathématique...

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'aller très loin pour rencontrer des problèmes de calcul de primitive ou d'intégrale, comme on peut le constater ci-dessous :

- le logiciel ne sait pas calculer l'intégrale de la valeur absolue de la fonction sinus entre 0 et π, alors même que cette fonction est positive sur cet intervalle...
- il suffit d'utiliser ce fait pour obtenir l'intégrale cherchée...



Le problème est ici que le logiciel fonctionne comme une boîte noire. Il fournit, ou ne fournit pas, la réponse souhaitée sans le contexte qui permet de la comprendre :

- on ne connaît pas la technique utilisée si une réponse effective est proposée ;

- le logiciel n'évoque pas l'intervalle de validité de cette réponse (ainsi il propose comme primitive de $\frac{1}{x}$ la fonction ln|x|, sans préciser bien sûr que la réponse n'est valide que sur tout intervalle inclus dans $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$;

- si le logiciel renvoie la question, on ne sait pas s'il n'existe pas de primitive à partir des fonctions usuelles, ou s'il s'agit d'une simple ignorance du logiciel.

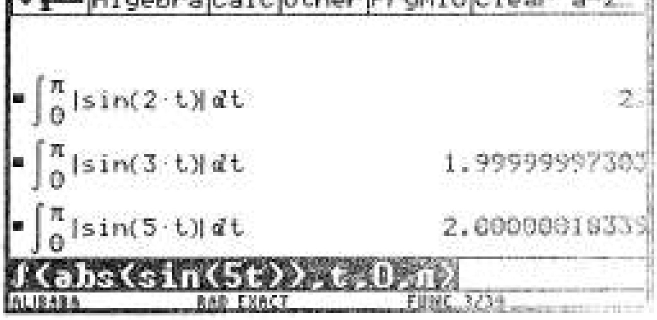
Ce travail d'interprétation est à la charge de l'utilisateur. Si celui-ci n'est pas réalisé, l'intégrale d'une fonction n'aura pas plus de sens que le résultat d'une transformation automatique obtenue par pression sur une touche donnée. A ce sujet, on peut constater que le concepteur du clavier a choisi de placer les touches de dérivation et d'intégration l'une à côté de l'autre. On peut se poser la question : pourquoi ne pas avoir choisi d'attribuer les deux fonctions à la même touche (l'une directement, l'autre à partir de l'utilisation préalable de la touche 2nd), comme pour la fonction exponentielle et logarithme népérien, pour manifester clairement leur caractère « réciproque » l'une de l'autre ?

<u>En mode « calcul approché »</u>

Celui-ci permet d'obtenir des valeurs approchées d'intégrales dont on aurait pas pu obtenir de valeurs exactes par le biais de calcul de primitives. On retouve ici, poussé encore plus loin, le principe de la boîte noire : en effet, le concepteur du logiciel a choisi de ne pas préciser la méthode utilisée pour ce calcul approché. L'utilisateur est donc conduit à demander **<u>la</u>** valeur approchée de l'intégrale cherchée, indépendamment de toute évocation de précision souhaitée, de nombre de subdivisions imposé (comme c'était le cas dans les calculatrices de la génération précédente, fonctionnant souvent à partir de la méthode de Simpson).

Dans ces conditions, l'utilisateur peut être conduit à imaginer que la dernière décimale (ou l'avant dernière...) est convenable. Bien entendu, il n'y a aucune raison que cela soit le cas, comme on peut le voir ci-dessous :

Les intégrales ci-contre, toutes égales (en principe) à deux, ne sont données qu'en valeur approchée par le logiciel, avec des fortunes diverses. On le voit, la précision n'est pas, comme on aurait pu l'espérer, de l'ordre de 10^{-12}, correspondant aux décimales fournies par le logiciel !

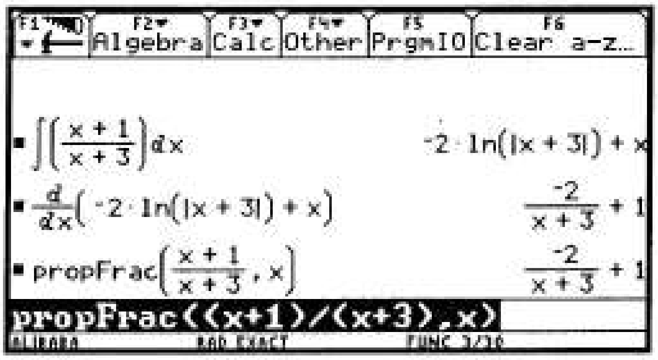


II.4.b. Les potentialités « intégrales » d'un logiciel de calcul symbolique.

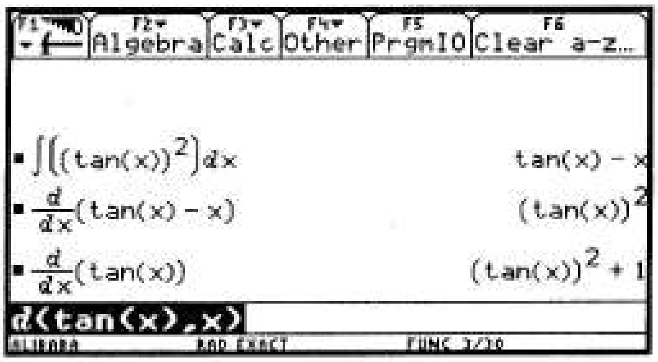
Nous venons de passer en revue les formes sous lesquelles la TI-92 présente l'objet « intégrale ». Pour pouvoir utiliser cette calculatrice dans un cours sur l'intégrale, il faut aller au delà : il va s'agir ici de présenter **l'environnement** de l'objet « intégrale » sur une telle calculatrice, c'est-à-dire la contribution possible des différentes commandes de la TI-92 pour donner un contenu à l'enseignement de l'intégration.

Dériver, intégrer, deux processus qui peuvent s'alimenter l'un l'autre

Nous l'avons déjà constaté : sur la TI-92, les touches de dérivation et d'intégration sont l'une à côté de l'autre. L'utilisation successive de ces deux commandes peut permettre de comprendre le processus qui aboutit à une primitive, à partir de la reécriture de la fonction sous une autre forme.



<u>Premier exemple</u> : le calcul d'une primitive de $\frac{x+1}{x+3}$, puis la dérivation de celle-ci aboutit à une nouvelle écriture de la fonction initiale. Cette nouvelle écriture peut donner l'idée de la division euclidienne qui permet alors l'intégration facile de la fonction.



<u>Deuxième exemple</u> : ici, les choses se passent un peu moins bien. La dérivée d'une primitive de la fonction $(\tan x)^2$ redonne exactement la fonction intiale.

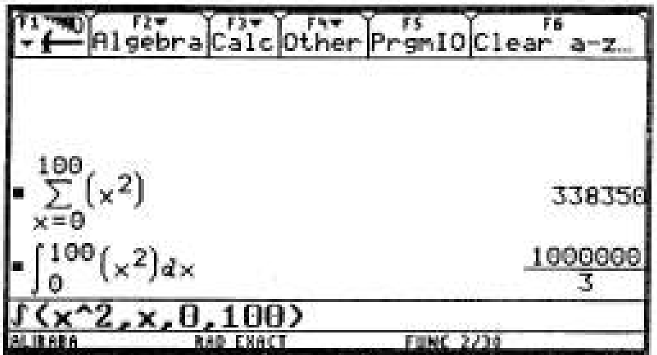
C'est la considération séparée des deux termes tanx et x qui peut donner l'idée de la réécriture de la fonction initiale : $(\tan x)^2 = (\tan x)^2+1-1$

Sommes discrètes, sommes continues, deux processus proches et lointains

Sur le clavier de la TI-92, les touches $\int$ et $\sum$ sont au-dessus l'une de l'autre. Les syntaxes des deux commandes sont très proches.

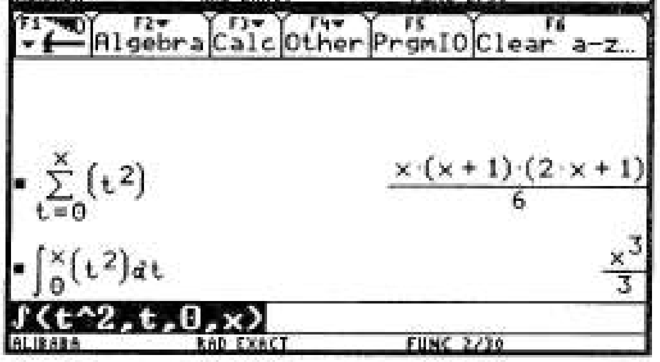
Cette proximité peut être exploitée pour redonner au processus intégral son caractère de somme.

La proximité des résultats des deux commandes relatives aux sommes discrètes et continues est en effet assez troublante, pour des sommes fixées...



... comme pour des sommes variables : dans les deux cas, on trouve des résultats asymptotiquement égaux.

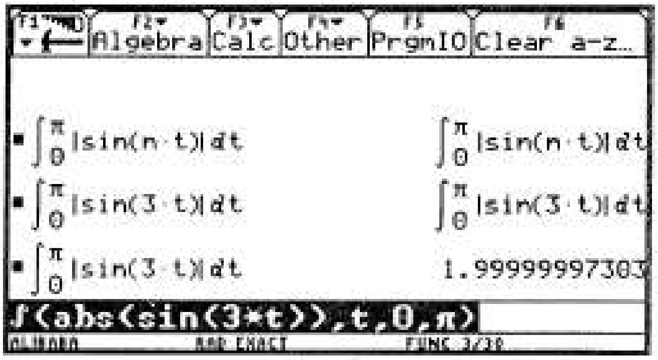
Le fait de pouvoir multiplier facilement de tels calculs rend possible l'établissement de parallèles fructueux.



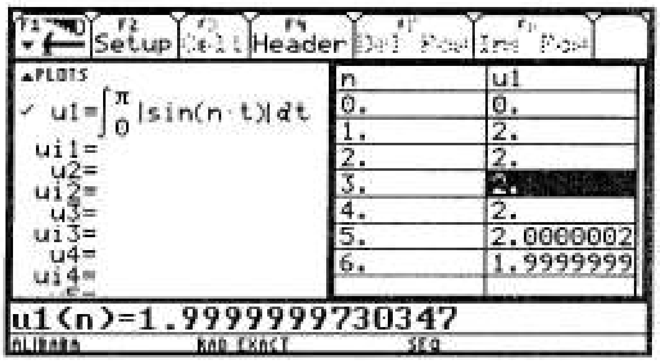
Différentes applications, différents cadres d'étude

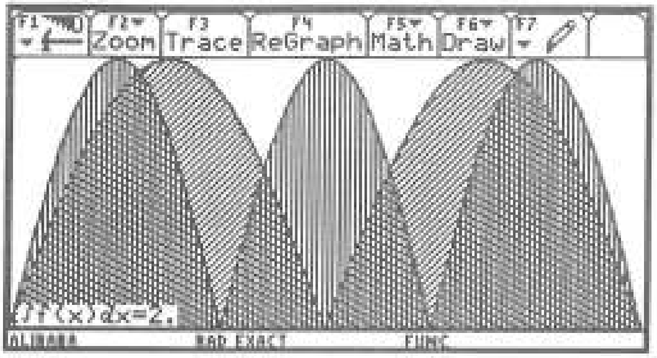
Ainsi, par exemple, pour le calcul de $\int_0^{\pi}|\sin(nt)|\,dt$ déjà évoqué :

Le logiciel refuse de donner une primitive de ces fonctions, sous une forme générale ou particulière. On peut alors demander une valeur approchée de l'intégrale pour des valeurs particulières de n...



... ou systématiser l'étude en considérant la suite des intégrales définie dans le répertoire suites de la calculatrice. On a alors accès « automatiquement » aux valeurs approchées de l'intégrale pour les valeurs successives de n. On peut d'ailleurs comparer les valeurs approchées de l'intégrale pour n=2 avec la valeur approchée donnée dans l'application initiale (cf. supra).

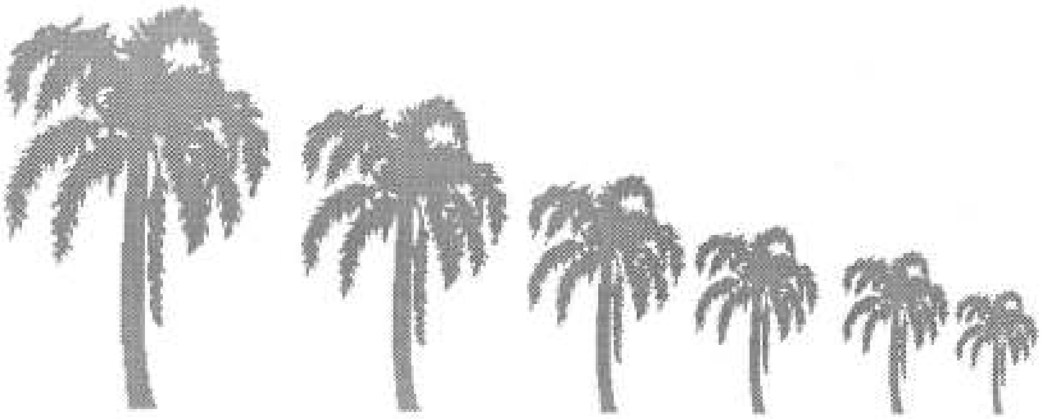




On peut enfin considérer les intégrales dans l'application graphique, ce qui peut suggérer une découpe de l'intervalle d'intégration et permettre ainsi d'aboutir au résultat exact.
On voit ci-contre que des phénomènes de « compensation » peuvent expliquer que l'intégrale ne dépende pas de la valeur attribuée à n (entier!).

Une chose doit cependant être claire : les potentialités du logiciel que nous venons d'évoquer ne sont que des virtualités. Elles ne seront pas exploitées naturellement par les élèves : une telle mise en oeuvre demande des capacités... qui sont justement le but de l'apprentissage.

Ces virtualités ne seront effectives qu'au prix d'une démarche volontaire du professeur, d'une intégration réfléchie de l'instrument dans le processus d'enseignement. C'est ce que nous allons tenter d'illustrer maintenant à partir de quelques éléments de cours.



II.4.c. Une introduction possible de l'intégrale en Terminale.

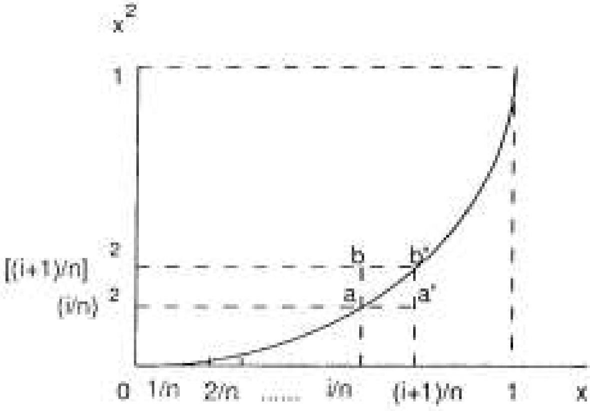
On essaiera ici de faire ressortir le double caractère de l'intégration : procédé de « sommation continue », processus inverse de la dérivation.

Le problème : calculer l'aire définie par un arc de parabole

On veut calculer l'aire A de la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$ (on suppose ici définies les notions de surface et d'aire).

Première stratégie, par découpe en pseudo-trapèzes

On choisit une subdivision de $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles d'amplitude égale donc à $\frac{1}{n}$.

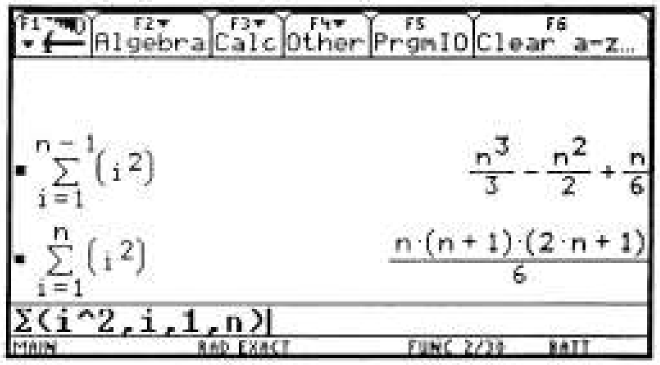


Le nombre A cherché peut être encadré par deux nombres : S_n est la somme des aires des rectangles qui bordent la courbe « par en dessous », T_n est la somme des aires des rectangles qui bordent la courbe « par en dessus ».

On a alors
$$S_n = \frac{1}{n} . 0 + \frac{1}{n} . (\frac{1}{n})^2 + ... + \frac{1}{n} . (\frac{i}{n})^2 + ... + \frac{1}{n} . (\frac{n-1}{n})^2.$$
$$= \frac{1}{n} . [\ (\frac{1}{n})^2 + ... + (\frac{i}{n})^2 + ... + (\frac{n-1}{n})^2\ ]$$
$$= \frac{1}{n^3} . [\ 1^2 + 2^2 + ... + i^2 + ... + (n-1)^2\ ]..$$

De la même façon, par simple décalage, on obtient :
$$T_n = \frac{1}{n^3} . (1^2 + 2^2 + ... + i^2 + ... + n^2).$$

L'encadrement $S_n < A < T_n$ donne alors :
$$\frac{1}{n^3} . [\ 1^2 + 2^2 + ... + i^2 + ... + (n-1)^2\ ] < A < \frac{1}{n^3} . (1^2 + 2^2 + ... + i^2 + ... + n^2).$$



La calculatrice peut alors être utilisée pour obtenir une expression synthétique des deux sommes. La « relation » à la machine entraîne un double travail :

- le premier, indispensable : exprimer correctement la commande.

Cette exigence de correction syntaxique est sans doute formatrice. Ainsi les élèves verbalisent : je fais la somme des « i carrés », de i égal 1 à i égal n. Le retour écran de la question permet une vérification de la syntaxe de la question posée ;

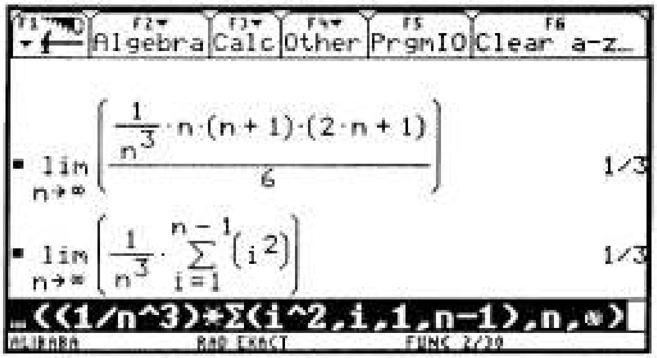
- deuxième travail, qui, lui, n'apparaît pas indispensable aux élèves : la vérification de la cohérence des résultats. Celui-ci doit être suscité par le maître : *« la machine affiche des résultats assez différents pour les deux sommes. Est-ce normal ? Pourquoi un résultat est-il factorisé et pas l'autre ? Que doit-il se passer si on substitue n à n-1 dans la première formule ? »*

Bref, l'utilisation de la calculatrice pour obtenir ces sommes n'est pas un temps mort.

On dispose donc du résultat : $\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) < A < \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Les deux suites « encadrantes » ont même limite, $\frac{1}{3}$ par utilisation du théorème sur les limites des fonctions rationnelles. A est à la fois supérieur et inférieur à cette limite, d'où $A = \frac{1}{3}$.

On peut aussi vérifier ce résultat avec la calculatrice :



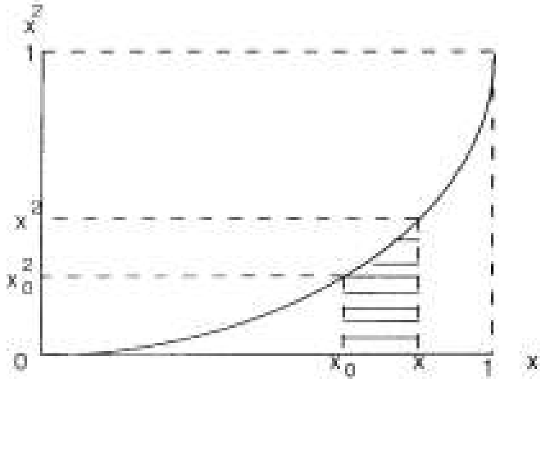
Notons que l'on a là plusieurs possibilités :

- on peut utiliser le résultat synthétique déjà obtenu ;
- on peut aussi en revenir à l'expression initiale ; mais dans ce dernier cas, la syntaxe de la commande est plus complexe à mettre en oeuvre.

Cette syntaxe confronte l'élève à des questions théoriques (rapport entre la limite et la somme) assez délicates. La relativité du caractère « variable » d'un objet apparaît clairement : « n » est d'abord fixe, puis variable...

Deuxième stratégie, par recours aux variations des fonctions

Même objectif que précédemment, le calcul de A. On va faire un détour, pour obtenir plus que cela : on définit une fonction h, qui associe à tout x positif l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et la droite parallèle à l'axe des ordonnées ensemble des points d'abscisse x.



Ainsi $h(0) = 0$, $h(x) - h(x_0)$ est l'aire de la surface hachurée sur le dessin ci-contre et on recherche $A = h(1)$.

Avec une stratégie comparable à celle de la question précédente, on encadre $h(x) - h(x_0)$. On obtient sans peine pour $x > x_0$, (on adaptera pour $x < x_0$).

$$(x - x_0)\, x_0^2 < h(x) - h(x_0) < (x - x_0)\, x^2$$

Ce qui peut se mettre sous la forme (avec $x > x_0$) :

$$x_0^2 < \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < x^2$$

Quand x tend vers x_0, il est clair que x^2 tend vers x_0^2. Le théorème des gendarmes s'applique alors : la limite de $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ existe et est x_0^2.

Ce qui prouve que h est dérivable et $h'(x) = x^2$.

Ainsi, h est une primitive de la fonction « carrée » : $h(x) = \frac{x^3}{3} + k$, comme $h(0) = 0$, on a $k = 0$. Pour finir $h(x) = \frac{x^3}{3}$ et on retrouve bien $h(1) = \frac{1}{3}$.

On a même plus, puisque pour tout x (positif, pour le moment), on a l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la parabole et la droite ensemble des points d'abscisse x.

Cette introduction a permis de voir, sur un exemple, le rapport entre calcul d'aire et recherche de primitive. On va le reprendre dans le cas général. A l'inverse de la démarche suivie dans les exemples, on va partir du calcul des primitives, pour en arriver au calcul d'aire un peu plus tard.

II.4.d. Eléments de cours.

Définition

Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur [a ; b]

Soit f une fonction continue sur [a ; b]. On sait qu'elle admet une infinité de fonctions primitives, définies « à une constante près ». Soit F une de ces fonctions primitives. Le réel F(b) - F(a) ne dépend donc pas de la primitive choisie. On l'appelle intégrale de la fonction f entre a et b.

Notation : $\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarques sur la notation.

- Sur la forme « somme de f(x) dx » : cela ne peut se comprendre qu'en référence au calcul d'aire. Dans l'introduction de l'intégrale, on a sommé des aires de rectangle ayant une base de Δt et une « hauteur » de f(t) (si on assimile la fonction, sur un intervalle « petit » à une fonction constante). On effectue alors la somme de $f(t).\Delta t$.

  Par passage à la limite, on en arrive à la somme de f(x)dx. De la même façon, dans le calcul différentiel, on passe de Δx à dx. Cette notation se comprendra mieux à travers les premiers calculs.

- L'élément différentiel dx indique quelle est la variable considérée. Son rôle est très important : s'il y a, dans l'expression de la fonction, plusieurs lettres, il faut bien savoir quelle est la variable, et quelles sont les constantes (pour le calcul de l'intégrale.)

Premiers calculs

Les exercices sont traités suivant deux modalités :

- machines fermées, on calcule puis on vérifie ;

- on calcule d'abord avec la machine puis on essaie de retrouver l'origine du résultat.

Première modalité. Calculer, puis vérifier avec la machine :

$\int_0^1 e^t\,dt$; $\int_0^1 e^u\,du$; $\int_0^1 e^u\,dt$; $\int_0^1 x\sin t\,dx$;

$\int_0^1 x\sin t\,dt$; $\int_0^1 x\sin t\,dw$

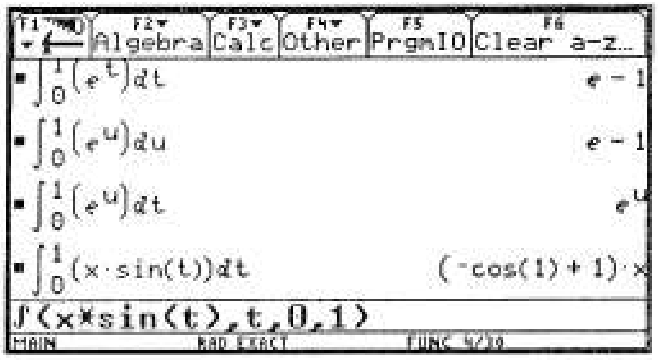
Deuxième modalité. Observer un résultat donné par la machine puis retrouver son « historique », c'est-à-dire le processus de sa fabrication. Il s'agit de « remonter la chaîne de fabrication ».

1. Calculer : $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$.

2. Calculer : $\int_0^{\pi/4} \tan u\,du$.

Première modalité.

L'exigence syntaxique de la machine a un caractère formateur certain. Les élèves doivent distinguer la fonction, la variable, les bornes : on peut faire l'hypothèse que l'oubli dans les copies de l'élément différentiel « dt » sera plus rare.

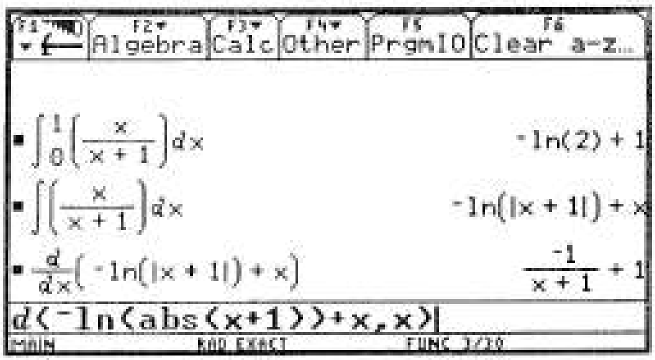


Deuxième modalité.

1. On voit ci-contre qu'on a obtenu successivement :

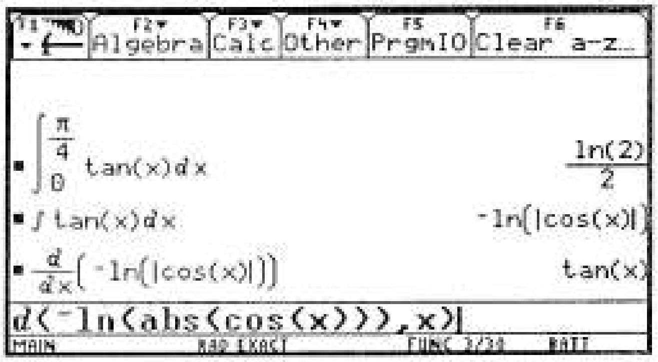
- l'intégrale demandée ;
- une primitive de la fonction ;
- la dérivée de cette primitive, qui ne redonne pas la fonction de départ sous la même forme.

On peut alors repartir dans l'autre sens, à condition de savoir exploiter convenablement ces résultats !



2. L'historique n'est pas toujours aussi facile à retrouver. Il faut mettre en oeuvre ici d'autres mécanismes de reconnaissance de forme : *« que me rappelle ln |u| ? »*

- c'est une primitive de $\frac{u'}{u}$;
- cela peut induire l'idée d'écrire la fonction tangente sous la forme $\frac{\sin x}{\cos x}$.



Théorème 1 (conséquence immédiate de la définition de l'intégrale).

> **Soit f continue sur [a ; b], et c élément de [a ; b]. Alors la fonction F, définie sur [a ; b] par $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en c.**

Application : une nouvelle notation de la fonction logarithme : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Exercices

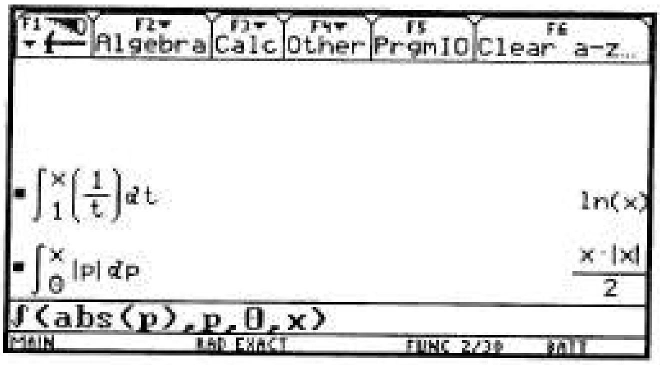
Pour terminer cette partie, on propose différents exercices de mise en pratique en rappelant qu'__avant__ toute « manoeuvre » d'intégration, il faut veiller à ce que les objets manipulés aient un sens. Pour que l'intégrale soit calculable, il __suffit__ que la fonction soit continue sur l'intervalle d'intégration.

> 1. Déterminer l'unique primitive de la fonction qui à x associe $|x|$, nulle en 0.
> 2. Calculer $\int_2^3 \frac{1}{t^2 - 1}\,dt$.

Pour l'exercice 1, deux problèmes :

- un problème de syntaxe. Il faut distinguer la variable d'intégration et la borne variable (on a choisi ci-contre la lettre p, inhabituelle, pour bien insister sur la relativité du choix) ;

- un problème d'analyse du résultat. Il faut bien distinguer deux cas pour comprendre.



Propriétés algébriques de l'intégrale

__Propriétés liées aux bornes__

> **Par application directe de la définition de l'intégrale, on dispose des propriétés suivantes :**
>
> $\int_a^a f(t)\,dt = 0$; $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)\,dt$; $\int_b^a f(t)\,dt = \int_c^a f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$,
>
> **et cela quels que soient les réels a, b et c appartenant à un intervalle de continuité de la fonction f.**

__Remarque__ : cela rappelle les propriétés des vecteurs :

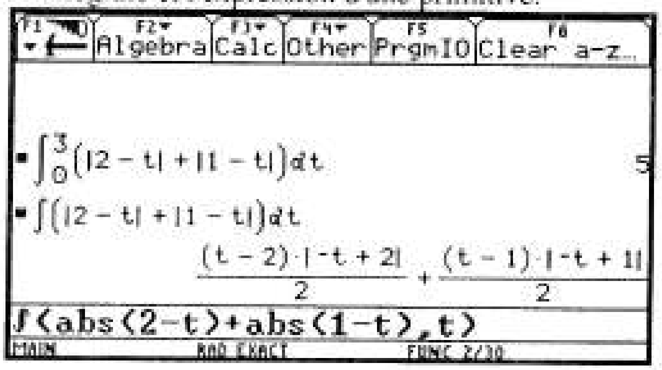
$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice

> Calculer $\int_0^3 (|2 - t| + |1 - t|)\,dt$.

La calculatrice donne la valeur de l'intégrale et l'expression d'une primitive.

Mais, pour comprendre ce qui se passe, on a intérêt à décomposer le calcul en utilisant la relation de Chasles à l'aide des intervalles où on contrôle le signe de l'intérieur des valeurs absolues, c'est-à-dire sur $[0 ; 1[$, $[1 ; 2]$ puis $[2 ; 3]$.



Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$$

Exercices

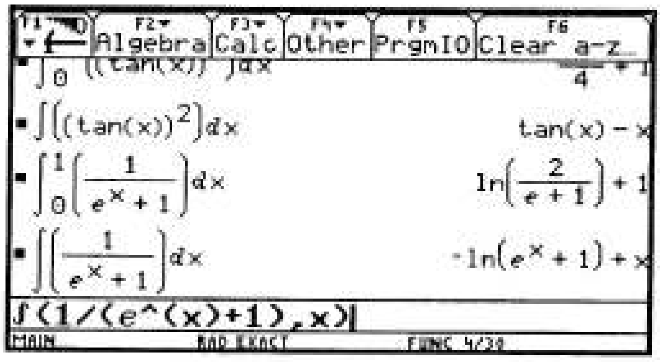
On peut proposer comme applications immédiates des exercices portant sur l'intégrale de polynômes ; puis des intégrales de fonctions demandant une certaine transformation.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x+3}dx \quad ; \quad \int_0^{\pi/4} (\tan u)^2\,du \quad ; \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx.$$

Les observations des intégrales ou des primitives données par la machine ne renseignent pas immédiatement, il faut réfléchir un peu...

Si une primitive de $(\tan x)^2$ est $\tan x - x$, c'est que la dérivée de $\tan x - x$ est $((\tan x)^2 + 1 - 1$.

Il suffit donc de remplacer $(\tan x)^2$ par $(\tan x)^2 + 1 - 1$, et le tour est joué.



Intégrale et calcul d'aire

Il s'agit de généraliser ici ce qui a été vu dans l'introduction.

Intégrale et aire du domaine défini par f continue et positive sur [a ; b]

La notion d'aire est supposée intuitive, basée sur l'aire des rectangles. On se situe ici dans un repère orthogonal, pas nécessairement orthonormé.

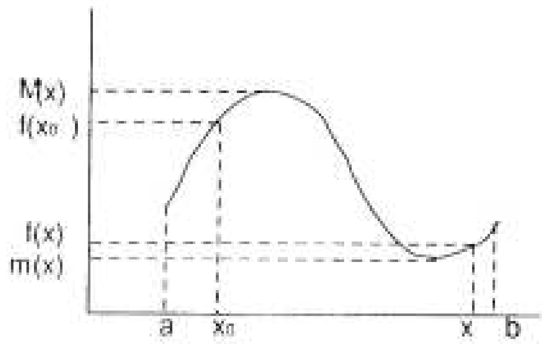
Définition :

Le domaine délimité par f continue et positive entre a et b est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Comme dans l'introduction, on définit $h(x)$ comme étant l'aire du domaine délimité par f entre a et x. On obtient sans peine :

$$m(x) < \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < M(x),$$

$m(x)$ et $M(x)$ étant les minimum et maximum de f sur l'intervalle [C ; x] (la fonction f étant continue, ces objets existent bien).



Quand x tend vers x_0, pour des raisons de continuité aussi, m(x) et M(x) tendent vers $f(x_0)$. Par application du théorème d'encadrement, la limite en x_0 de $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ est $f(x_0)$. On a ainsi h'(x) = f(x). Comme h(a) = 0, h est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Par application du théorème 1, on peut affirmer que : $h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. L'aire cherchée est donc $h(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

<u>**Théorème 2**</u>

L'aire du domaine défini par f continue et positive sur [a ; b], exprimée en unité d'aire, est $\int_a^b f(t)\,dt$.

<u>Attention</u> : cette aire est exprimée en unité d'aire, l'unité d'aire étant définie comme l'aire du « rectangle unité », basé sur les segments unité des deux axes. Alors que l'intégrale est intrinsèque, l'aire est liée au type de repère donné. Ainsi, si l'on veut calculer une aire en cm^2, suivant les unités choisies, il faudra utiliser un coefficient correcteur pour passer de l'aire en « unité d'aire » à l'aire « en cm^2 ».

Applications et exercices

1. « Visualisation du logarithme » : $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$.

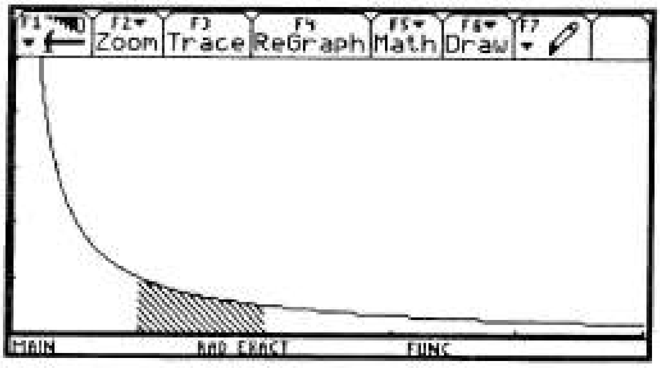
2. Calcul d'aire et asymptote

Soit A(t) et B(t) les aires des domaines limités par les fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ entre 1 et t. Calculer A(t) et B(t) et les limites quand t tend vers $+\infty$.

On demande d'abord un calcul sans machine, suivi d'une vérification (aucune difficulté technique, ou nécessité de conjecture, ne justifie ici l'utilisation préalable d'une calculatrice).

3. A partir de considérations d'aires, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1. C'est l'occasion ici de montrer le calcul d'intégrale dans l'application graphique, associé au hachurage de l'aire correspondante. Attention :
- il s'agit de calcul approché !
- le domaine est hachuré, même si la fonction n'est pas positive !



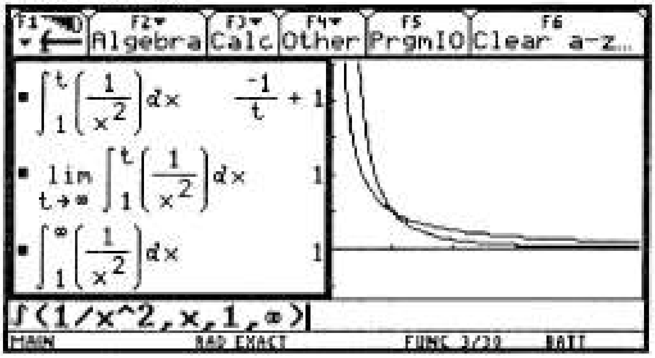
2. On a : $A(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^t = \ln t$. D'où la limite de A(t) en $+\infty$ est $+\infty$.

Et, $B(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = [-\frac{1}{x}]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$. D'où la limite de B(t) en $+\infty$ est 1.

Remarque : des phénomènes asymptotiques apparemment proches ne se traduisent pas semblablement par des « fermetures d'aire à l'infini » !

Vérification machine.

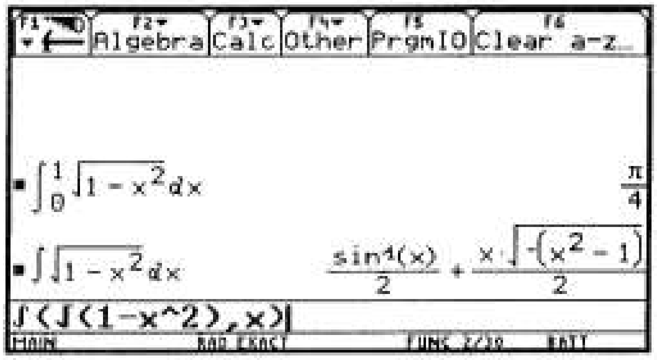
Celle-ci peut prendre différentes formes, comme on le voit ci-contre. Les syntaxes peuvent être assez complexes, posant à nouveau le problème des rapports entre limite et somme.



3. Le calcul machine de l'intégrale ne pose pas de problème.

L'interprétation est plus délicate, surtout si l'on regarde la primitive suggérée !

Il faut bien suivre alors les conseils de l'énoncé.

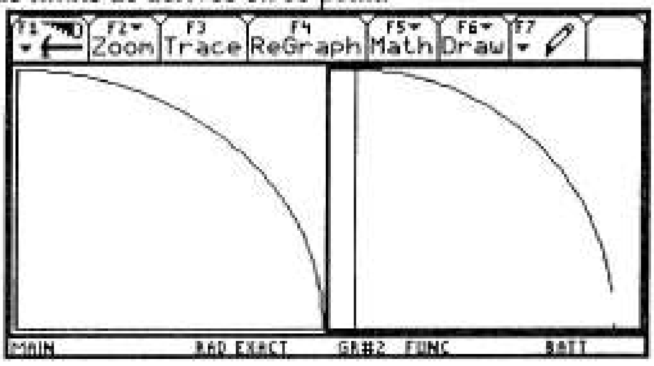


Puiqu'on parle de considérations d'aires, on peut construire la courbe de la fonction envisagée sur [0 ; 1]. Eventuellement sans calculatrice, puisque l'on sait que c'est une fonction décroissante (par composition de fonctions), de dérivée nulle en 0 (puisque c'est une fonction paire, dérivable en 0, sa dérivée est nécessairement impaire et nulle en 0), avec une tangente verticale en 1, pour raison de limite de dérivée en ce point.

Vérification machine. On a fait apparaître la courbe sur [0 ; 1] :

- à gauche dans la fenêtre [0 ; 1].[0 ; 1] ;
- à droite dans un repère orthonormé.

Le non contact, dans la deuxième fenêtre, entre la courbe et l'axe des abscisses peut donner lieu à d'utiles discussions...



L'intérêt du repère orthonormé est qu'il indique davantage l'idée du cercle. C'est une idée qui peut venir aussi du croisement des résultats graphiques et du résultat donné par la machine pour l'intégrale (« s'il y a π, le cercle n'est pas loin »). En effet, par élévation au carré, on a bien l'équation d'un cercle, d'où l'intégrale, égale au quart de l'aire du cercle. Ceci ne donne pas d'indication pour le calcul de primitives, mais ceci est une autre histoire !

Cas où f est négative et continue sur [a ; b]

On appelle alors domaine délimité par f, continue et négative sur [a ; b], l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) telles que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq O$.

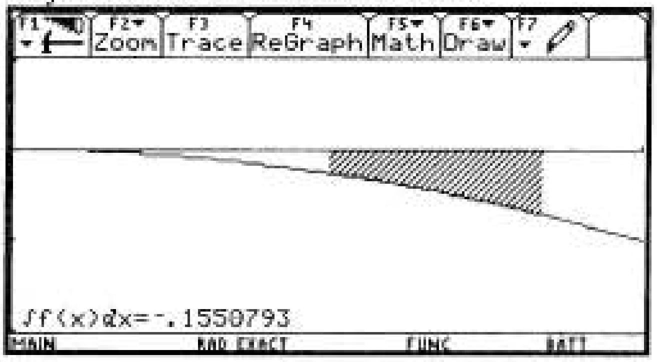
On pose alors $g = -f$. Ainsi g est positive, et l'aire du domaine délimité par g est égale, par symétrie orthogonale, à l'aire du domaine délimité par f,. Le théorème précédent s'applique à g. Si on appelle A l'aire en question, on obtient :

<u>Théorème 3</u>

Si f est négative et continue sur [a ; b], l'aire du domaine délimité par f est : $A = \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b -[f(t)]\,dt. = -\int_a^b f(t)\,dt$ (par linéarité).

<u>Remarques</u>

- Faut-il le répéter, une aire est toujours positive. Attention aux résultats de la calculatrice qui, dans l'application graphique, donne des résultats pour l'intégrale qui ne correspondent pas toujours à l'aire du domaine hachuré.



- Attention à ce qui se passe si la fonction n'a pas un signe constant... Dans ce cas, si on veut faire des calculs d'aire, il faut décomposer l'intervalle d'intégration en intervalles où on contrôle le signe de la fonction.

Cas où $f \leq g$ sur [a ; b]

La fonction g - f est alors positive. L'intégrale de (g-f) entre a et b donne l'aire du domaine délimité par les deux courbes (aire exprimée en unité d'aire).

Démonstration : on utilise m, minimum de f sur [a, b]. On a alors :

$$\int_a^b (g-f)(t)\,dt = \int_a^b (g(t)+m)\,dt - \int_a^b (f(t)+m)\,dt\,.$$

On conclut à partir de considérations d'aire (les deux fonctions intégrées sont bien positives, du fait de l'ajout de m).

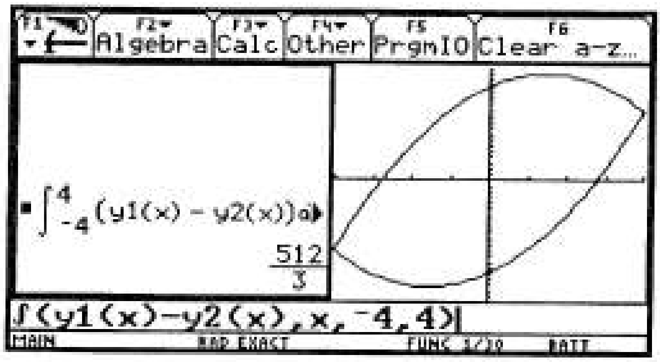
Exercices

1. Montrer que les deux paraboles d'équation $y = -x^2 + 3x + 16$ et $y = x^2 + 3x - 16$ délimitent une « boucle ». Déterminer l'aire de la boucle.

2. Les fonctions puissances x^a et $x^{1/a}$, pour $a > 1$, déterminent une boucle entre 0 et 1. Déterminer a pour que l'aire de cette boucle soit égale à k.

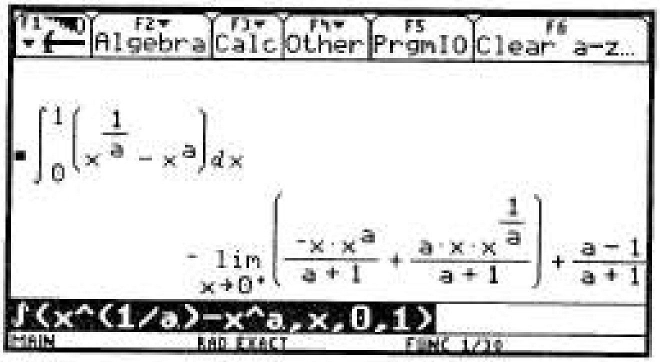
1. Les deux coefficients du terme en x^2 étant de signe contraire, les paraboles sont de « convexité opposée ». Comme elles se coupent en deux points, elles déterminent bien une boucle.

La calculatrice joue ici un simple rôle d'appoint, aussi bien pour la visualisation des courbes que pour le calcul exact de l'intégrale.



2. Il y a là quelques considérations implicites, que la résolution devra éclairer ; si a n'est pas rationnel, les deux fonctions devront être prolongées par continuité en 0 ; quant à k, il est nécessairement dans l'intervalle]0 ; 1[.

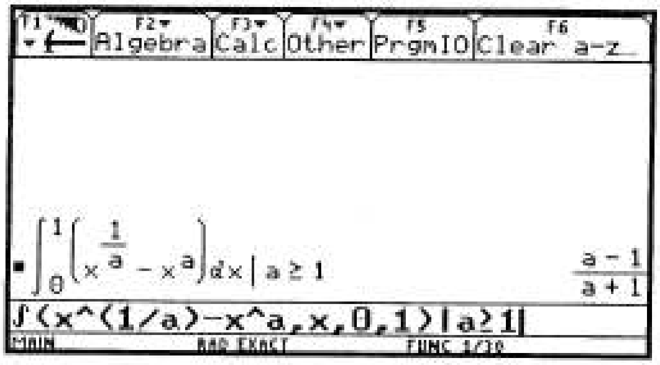
Le calcul, à la main, est fait sans difficulté. C'est la vérification machine qui réserve une petite surprise : que vient faire une limite ici ?



La raison en est claire -après réflexion- : les fonctions « puissances réelles » ne sont pas nécessairement définies en zéro, ni même prolongeable par continuité.

On peut alors faire le calcul de limite, qui ici ne pose pas de problèmes particuliers...

Ou reformuler la question, en indiquant la précision contenue dans l'énoncé : la puissance a est supérieure à 1.

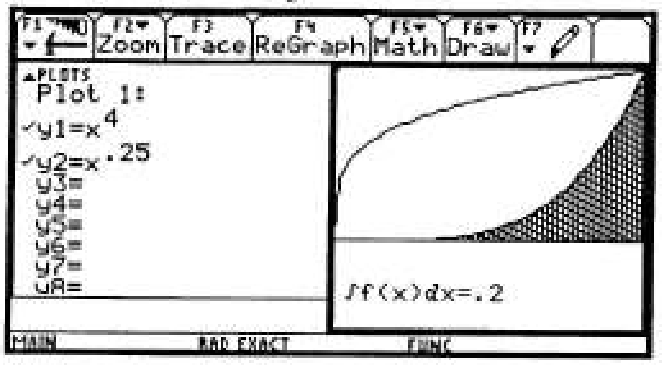


On retrouve alors le résultat calculé « à la main ».

Il reste à résoudre l'équation $\frac{a-1}{a+1} = k$, ce qui donne sans peine $a = \frac{k+1}{1-k}$.

La considération des résultats ci-dessus donne les conditions pour que les objets aient un sens : k est une aire, donc positif, ainsi a doit être supérieur à 1 (ou inférieur à -1, mais alors on aurait un problème de prolongement par continuité et la limite étudiée ci-dessus ne serait pas finie !). On trouve de même que k doit être dans]0 ; 1[.

Un petit coup de vérification : avec a = 4 on trouve $k = \frac{3}{5} = 0,6$.



L'aire du domaine déterminé par la première fonction entre 0 et 1 est 0,2 (valeur approchée, puisqu'on est dans l'application graphique).

Pour raison de symétrie, l'aire de la boucle est 1 - 0,4 = 0, 6.

Le compte est bon. Ce que l'on peut vérifier, en mode exact, dans l'application **Home**.

Application aux fonctions paires, impaires, périodiques

Théorème 4

Soit f impaire, définie et continue sur [-a ; a]. $I(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

On a sans peine : $I(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = F(a) - F(-a)$ (en notant F une primitive de f). En dérivant, on obtient $I'(a) = f(a) + f(-a)$ (attention à la dérivation de F(-a) : il s'agit d'une fonction composée !). Puis, comme f est impaire, $I'(a) = f(a) - f(a) = 0$. Ainsi I est une fonction constante. D'où, pour tout a, $I(a) = I(0) = 0$

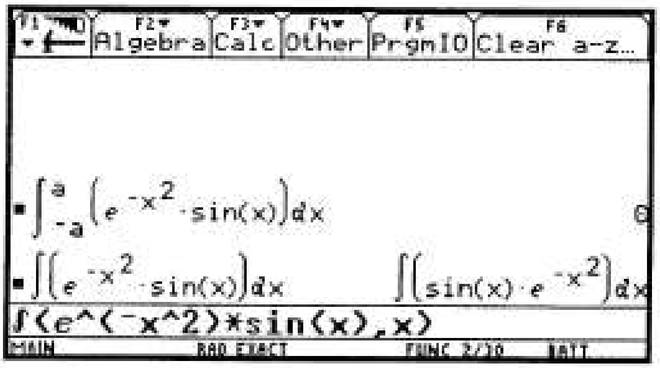
Soit f paire, définie et continue sur [-a ; a].
$I(a) = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.

Soit f continue sur $\mathbb{R}$, de période T. On a alors, pour tout a réel :
$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$.

Exercices

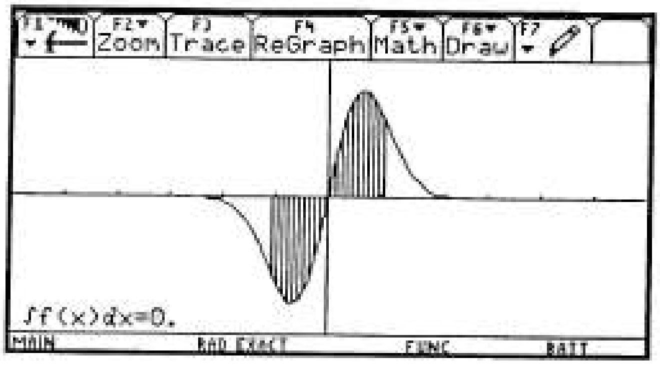
1. Calculer $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin x\,dx$.

2. Calculer $I_n = \int_{0}^{\pi} |\sin(nt)|\,dt$.

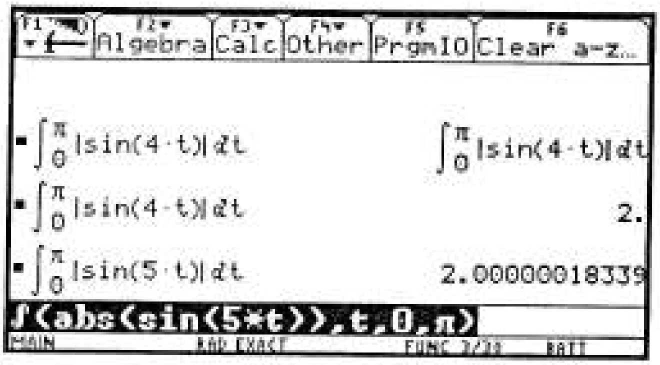


1. C'est évidemment 0, puisque la fonction à intégrer est impaire.
Notons que la calculatrice le reconnait aussi, mais qu'elle ne connaît pas de primitive de cette fonction...

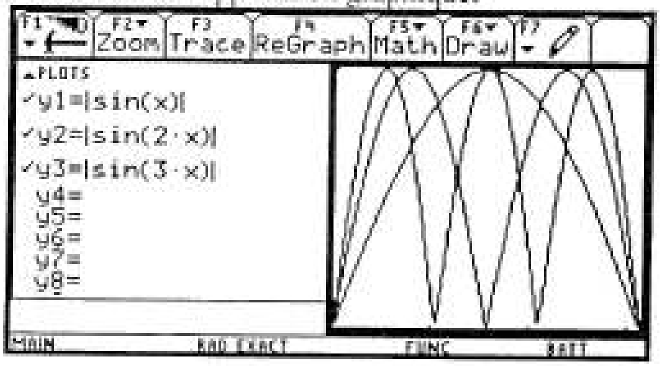
Résultat confirmé aussi dans l'application graphique (avec visualisation à la clé).
Mais attention, il s'agit ici de valeur approchée !



2. Petit problème : la calculatrice refuse de donner une réponse tant en mode exact qu'approché pour n quelconque.
Pire, même pour des valeurs particulières de n, on n'obtient pas de valeurs exactes. Les valeurs approchées données par la machine sont 2 (pour n = 4), un peu plus de 2 pour n = 5., etc. Que faire ?



Le calcul laisse perplexe. On peut alors utiliser l'application graphique.
Du désordre apparent, il faut arriver à extraire une cohérence :
- pour n = 1, une arche de sinusoïde ;
- pour n = 2, deux arches de sinusoïde ;
- pour n = 3, etc.
Il suffit peut-être d'intégrer « pour une seule arche » ?

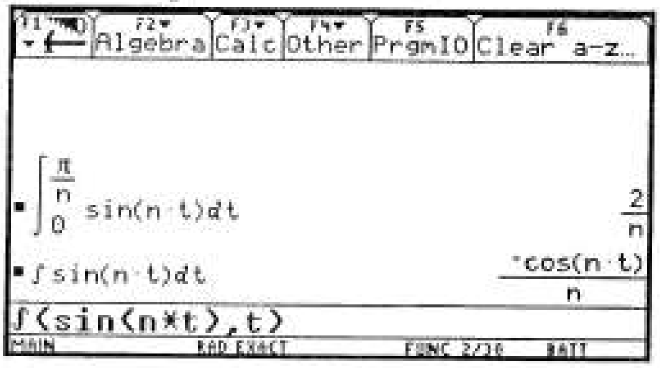


Et pour cela, on démontre que la fonction est périodique, de période $\frac{\pi}{n}$. Ce qui est immédiat : $|\sin n\,(x+\frac{\pi}{n})| = |\sin(nx+\pi)| = |-\sin(nx)| = |\sin(nx)|$

L'intervalle d'intégration contenant n périodes :

$$I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,dt = n\int_0^{\pi/n} \sin(nt)\,dt = n\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi/n} = -[\cos\pi - \cos 0] = 2.$$

La calculatrice veut alors bien répondre.
Mais reformuler la question a exigé un détour théorique qui n'est rien d'autre qu'un retour aux fonctions de référence « valeur absolue », et « sinus ».



Intégrale et relation d'ordre

On retrouve ici, d'une autre façon, les résultats établis au c : si $f \geq 0$, et $a \leq b$, alors $I = \int_a^b f(t)\,dt$ est une aire, donc I est positif.

Intégrale d'une fonction positive sur [a ; b]

Soit f continue et positive sur [a ; b], et F une primitive de f. On a alors : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Mais f est la dérivée de F et f est positive. D'où F est croissante et, comme $a \leq b$, on a $F(a) \leq F(b)$. D'où $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

Théorème 5

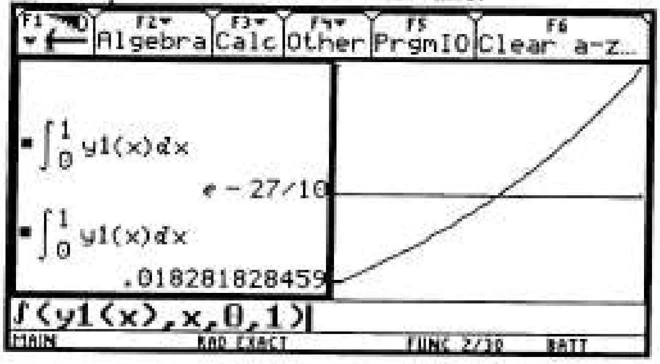
L'intégrale de a à b (avec $a \leq b$) d'une fonction continue et positive sur [a ; b] est un réel positif.

Attention aux erreurs usuelles :

- l'hypothèse $a \leq b$ est essentielle ;
- le théorème 3 n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur [a, b], sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

Ainsi la fonction $e^x - 1{,}7$ est « plus longtemps » négative que positive sur [0, 1]. Et pourtant son intégrale est positive sur cet intervalle.

On « voit » bien les compensations, en terme d'aires, qui donnent ce résultat et que l'on retrouvera quand on parlera de valeur moyenne d'une fonction.



Corollaire 1

Si une fonction est continue et négative entre a et b, $a \leq b$, alors l'intégrale de f entre a et b est négative.

Corollaire 2

Si, entre a et b, $a \leq b$, la fonction f est inférieure à la fonction g, alors l'intégrale de f entre a et b est inférieure à l'intégrale de g entre a et b.

Inégalité de la moyenne

Soit f continue sur [a ; b], avec $a < b$ (inégalité stricte). Il existe donc m et M, minimum et maximum de f sur cet intervalle.

Pour tout t de [a ; b], on a donc : $m \leq f(t) \leq M$. Par intégration et application du corollaire 2 du théorème 3, on obtient :

$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt$, c'est à dire : $m\,(b-a) \leq \int_a^b (t)\,dt \leq M\,(b-a)$.

Ce que l'on peut écrire aussi : $m < \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\,dt < M$.

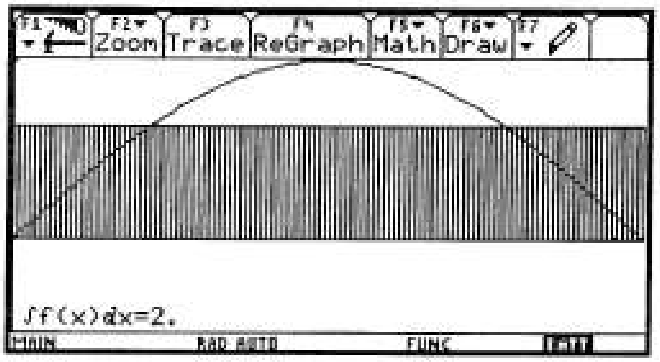
<u>Théorème 6</u>

> **Soit f continue sur [a ; b], a < b. Le réel $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\,dt$ est compris entre le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.**
> **Définition : ce réel est appelé valeur moyenne de f sur [a ; b].**

<u>Remarques</u>

- 1. Cette formule traduit une extension de la définition discrète de « moyenne arithmétique » au domaine continu (une certaine prudence s'impose, à propos de cette remarque : le rapport entre $\sum$ et $\int$ n'a rien de trivial...).
- 2. Cette inégalité, résultat fondamental du cours d'Analyse de Terminale, n'est qu'une autre version de l'Inégalité des Accroissements Finis, autre résultat fondamental. Il suffit pour cela d'appliquer l'IAF à la fonction $h : x \to \int_a^x f(t)\,dt$.
- 3. Signification graphique pour une fonction positive : l'aire du rectangle de base (b - a) et de hauteur $y = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\,dt$ est égale évidemment à $\int_a^b f(t)\,dt$. le calcul de la moyenne réalise ainsi une rectification de la courbe. On « rabote » les sommets pour combler les « fossés ».

Ci contre la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. La valeur moyenne de la fonction sur cet intervalle est $\frac{2}{\pi}$. L'aire du rectangle hachuré, de base π et de hauteur la valeur moyenne est précisément l'aire de l'arche de sinusoïde.



Exercice

> Prouver que la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur [a ; b] est égale à la pente de la corde passant par les points d'abscisse a et b.

Intégrale et valeur absolue

- Si f est positive sur l'intervalle [a, b], on a sans peine :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

- si f est négative sur [a, b] , on obtient le même résultat. En effet :

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)\,dt = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right|.$$

- si f n'a pas un signe constant, on décompose l'intervalle [a, b] en intervalles où le signe de f soit constant. Par exemple si f est négative sur [a, c] puis positive sur [c, b], on écrit :

$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\right|$ par application de la linéarité de l'intégrale.

Puis $\left|\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^c f(t)\,dt\right| + \left|\int_c^b f(t)\,dt\right|$ par inégalité triangulaire.

Et pour chacune des intégrales, on peut appliquer l'égalité précédente. D'où, pour finir :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

II.4.e. Exercices.

Limite de la « série harmonique »

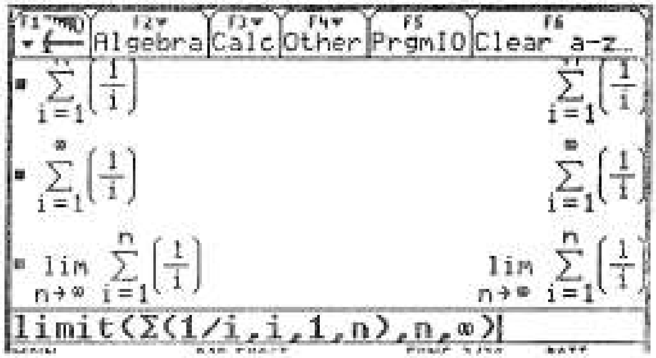
Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Quelle est la limite de cette suite ?

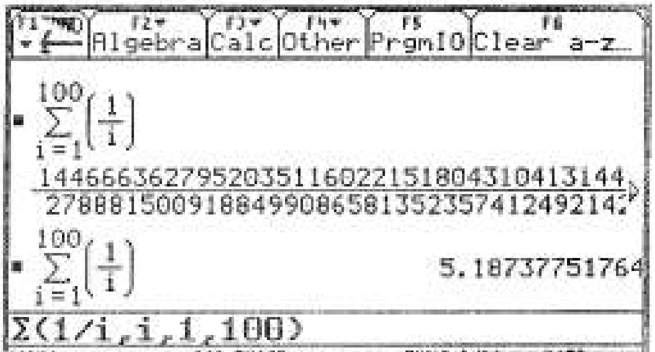
On constate que ce problème, qui a posé quelques difficultés dans l'histoire des mathématiques et qui en pose pour les élèves en général, laisse la calculatrice « perplexe ».

Ni réduction des sommes partielles, ni indication de la limite, quelle que soit la syntaxe de la question...

On peut faire alors quelques sondages en mode exact ou approchée. Une valeur approchée de S_{100} est 5,18.

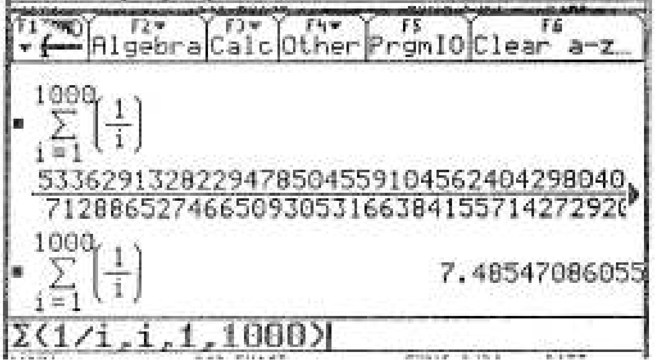
Si on prospecte pour de plus grandes valeurs de n, ceci devient rapidement coûteux en terme de temps !





On constate cependant que le mode exact est beaucoup, beaucoup plus long que le mode approché.

Par ailleurs, la croissance de la suite est extrêmement lente. L'observation permet-elle de trancher entre limite infinie et limite finie ?

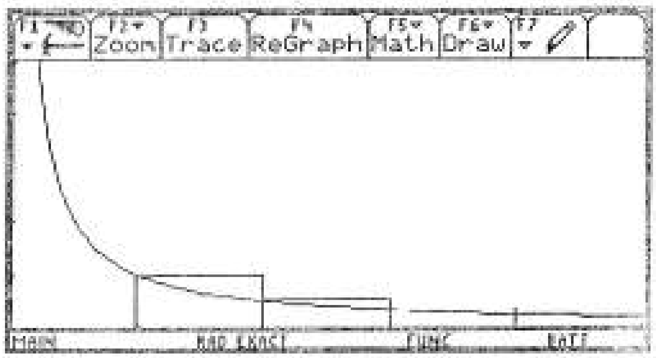


Un détour théorique s'impose... On peut penser à introduire la fonction $\frac{1}{x}$ on retrouve ici les rapports complexes entre domaine discret et domaine continu.

On « voit » ci-contre que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \int_1^4 f(t)\,dt.$$

Ce que l'on peut généraliser sans difficulté.



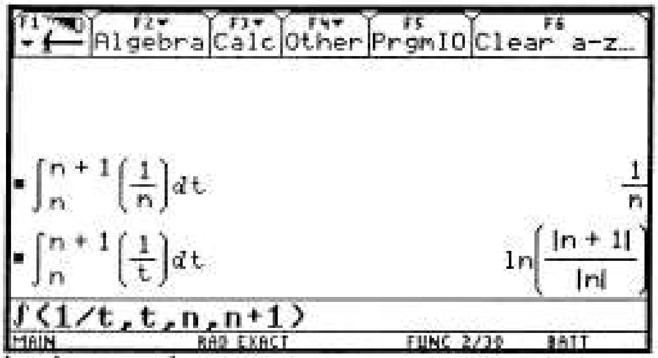
Pour tout t de l'intervalle [n ; n+1], on dispose de n ≤ t, donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{t}$, et par application du corollaire 2 on a : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dt. \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt.$

Le calcul des deux intégrales donne : $\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n$.

Il est évidemment décisif ici de distinguer variable d'intégration, t, et constante, pour l'intervalle considéré, n. L'utilisation de la calculatrice, par l'obligation de syntaxe, peut être tout à fait utile.

Le résultat est obtenu pour la première intégrale.

Pour la deuxième aussi. Cependant, le résultat peut être simplifié, en tenant compte du fait que n est positif !

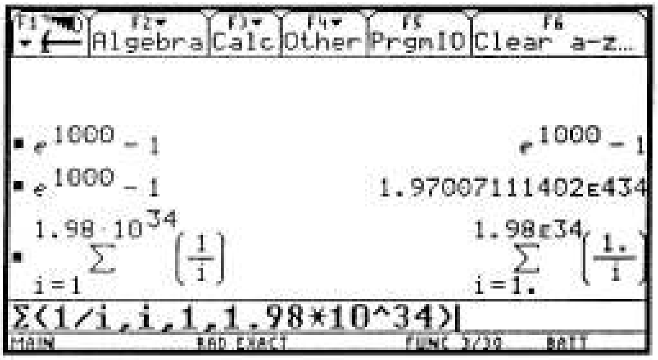


Par somme, on obtient alors $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$.

D'où, par application, des théorèmes de minoration, la limite de S_n égale à $+\infty$. On a aussi là une idée de la vitesse de divergence de cette suite : à partir de quelle valeur de n est-on sûr que S_n sera supérieur à 1000 ? Il suffit que ln (n+1) soit supérieur à 1000, c'est à dire que n soit supérieur à $e^{1000} - 1$. Cela fait évidemment beaucoup et est un indicateur de la lenteur de divergence de cette suite.

La calculatrice veut bien donner une valeur approchée de $e^{1000} - 1$ mais refuse de donner une valeur approchée de la suite à ce niveau.

Il est vrai que cela ferait beaucoup d'opérations... Le temps de calcul nécessaire, même avec un milliard d'opérations par seconde, dépasserait « l'âge de l'univers »...



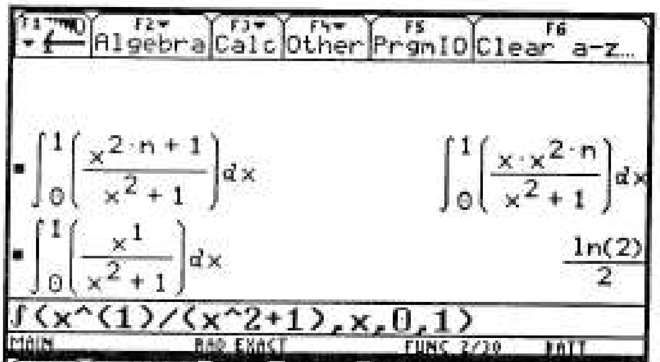
Une suite d'intégrales

Etude de la suite d'intégrales définies par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\,dx$.

Observations, conjectures, preuves.

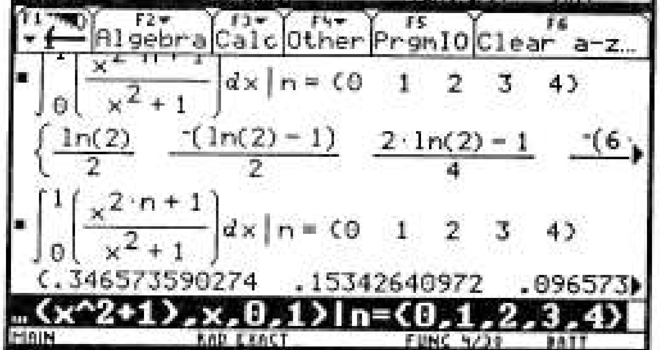
Utilisation de l'application initiale :

- le calcul de I_n ne donne rien avec avec la calculatrice.
- on peut alors observer l'évolution de la suite, en donnant à n successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4…



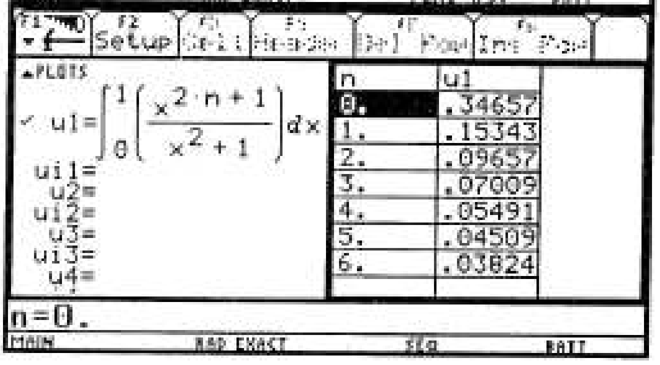
On peut rationaliser le procédé en définissant une liste.

Ci-contre, la machine donne les valeurs exactes puis approchées, de I_n pour n = 0, 1, 2, 3 et 4.



On peut améliorer la collecte des résultats en utilisant le répertoire suite et en considérant une table de valeurs.

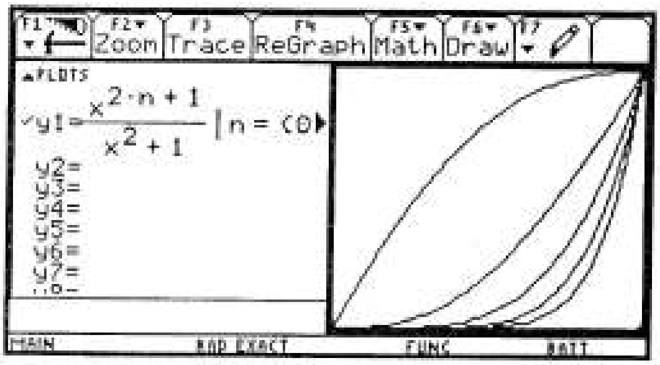
On n'a bien sûr ici que des valeurs approchées mais les conjectures sont peut être plus aisées sous cette forme.



On a bien l'impression que la suite est décroissante (et positive, ce qui paraît bien naturel). On peut, pour comprendre ce qui se passe, observer la situation graphiquement.

Dans le répertoire fonction, on a défini, à l'aide d'une liste, les fonctions, pour n entier variant de 0 à 4.

Les fonctions obtenues semblent croître de 0 à 0, 5 et « s'écraser sur l'axe des abscisses », ce qui permet d'interpréter, en terme d'aire, la décroissance de la suite d'intégrales.



La suite semble bien décroître. Une question se pose cependant concernant sa limite. le fait que la fonction reste « accrochée » au point $(1 ; \frac{1}{2})$ peut sembler problématique. La suite, dans ces conditions, tend-elle vers 0 ?

Pour aller plus avant, on peut étudier théoriquement les questions soulevées par l'observation :

- la suite est-elle vraiment positive ? Il suffit d'appliquer le théorème 2. On intègre, entre 0 et 1, une fonction positive...

- la suite est-elle vraiment décroissante ? Classiquement, on évalue :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\,dx.$$

On utilise la linéarité de l'intégration : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{x^2+1}\,dx$. La fonction à intégrer est négative sur l'intervalle [0,1]. Application du corollaire 1 et conclusion : la suite est bien décroissante.

Si on dispose du théorème sur les suites décroissantes minorées (c'est le cas en TS spécialité math, ce n'est pas le cas sinon), on peut conclure ici à la convergence de la suite vers un réel positif. Mais, même si on dispose de ce résultat, on peut aller plus loin, en cherchant « à quelle allure » la suite converge (et vers quoi...).

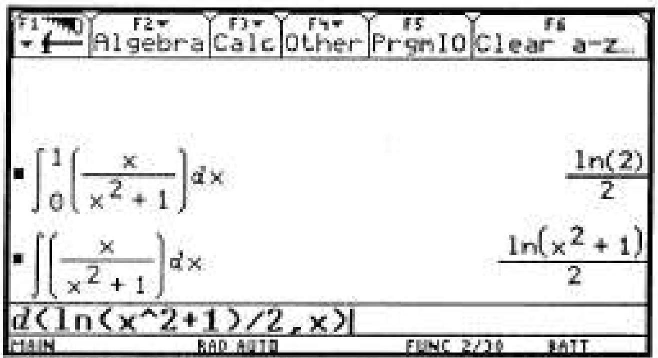
Que ferait un « expert » ? Il rechercherait peut être une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, par exemple en faisant une intégration par parties. On ne dispose pas encore ici du théorème d'intégration par parties. On peut alors aider à la formulation d'une conjecture :

- en calculant les premiers termes de la suite ;

- en proposant de s'inspirer du calcul de $I_{n+1} - I_n$ pour trouver une relation simple entre I_{n+1} et I_n (*« si on remplace - par + on a une simplification intéressante... »*).

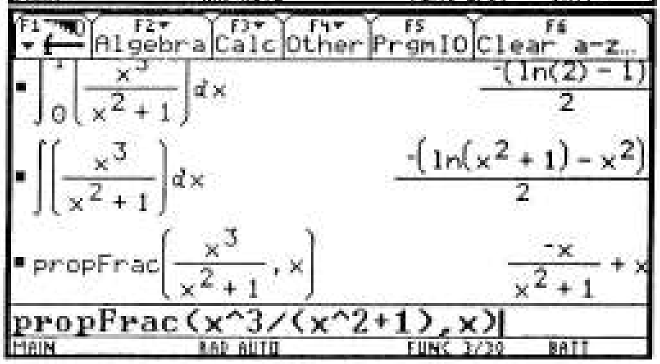
Le calcul de I_1 peut être assisté par la machine qui donne une primitive de la fonction.

Le logarithme peut faire songer alors à une forme $\frac{u'}{u}$.

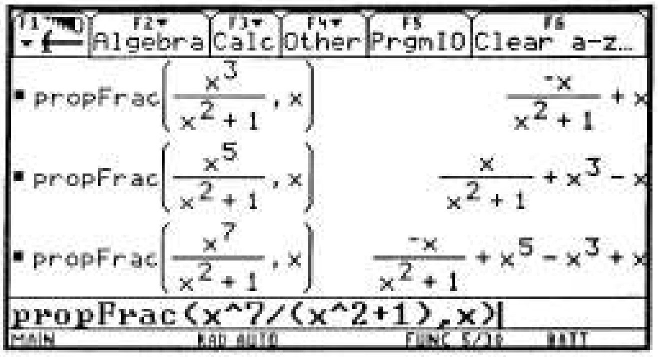


Le calcul de I_2 peut être fait de la même façon.

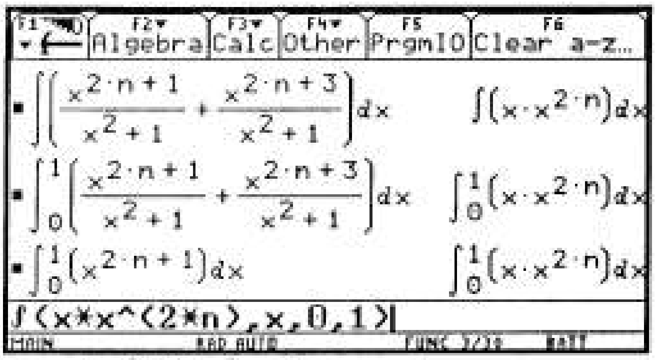
On peut essayer la commande **propFrac** pour retrouver l'historique des calculs.



On peut itérer le processus et constater une régularité intéressante : si on ajoute deux fonctions successives, le résultat, donc l'intégrale, est assez simple puisque ne reste qu'une seule fonction puissance...



Utilisons la calculatrice : la machine veut bien simplifier l'expression mais refuse de calculer l'intégrale, faute d'indication sur n.



On calcule alors la somme $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x^{2n+1}\,dx$

$$= \frac{1}{2n+2}\;[x^{2n+2}]_0^1 = \frac{1}{2n+2}.$$

La vérification sur les premiers termes est immédiate. On peut alors en déduire un encadrement de I_n, en usant à la fois de l'inégalité de décroissance $(I_{+1} - I_n \le 0)$ et de l'égalité qui vient d'être établie.

$\frac{1}{2n+2} = I_n + I_{n+1} \le 2\,I_n$. D'où $I_n \ge \frac{1}{4n+4}$

Le rôle particulier joué par l'un peut être joué par l'autre :

$\frac{1}{2n+2} = I_n + I_{n+1} \ge 2\;I_{n+1}$. D' où $I_{n+1} \le \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4(n+1)}$

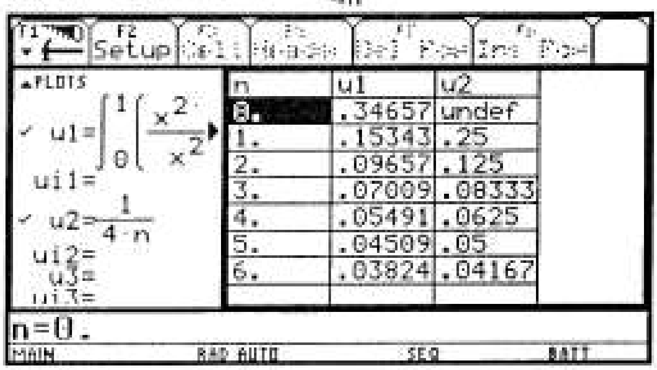
Par glissement d'indice, on obtient $I_n \le \frac{1}{4n}$.

D'où pour finir :

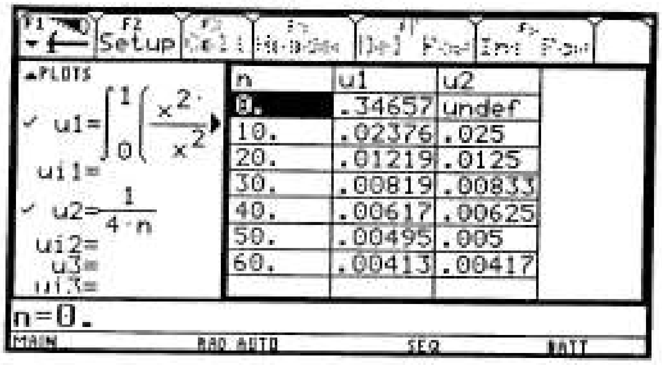
$$\frac{1}{4n+4} \le I_n \le \frac{1}{4n}.$$

On a bien, par application du théorème d'encadrement, la limite de I_n égale à 0. On a même mieux, puisque, par multiplication de la double inégalité ci-dessus par 4n, on sait que $4nI_n$ a pour limite 1. On dit que la suite (I_n) est « équivalente » à $\frac{1}{4n}$.

On peut observer cette « convergence lente » en programmant la suite I_n et la suite $\frac{1}{4n}$. On peut voir le lent rapprochement des deux suites.



Avec une table de valeurs de 10 en 10, le mouvement s'accélère évidemment (accélération en ce qui concerne le rapprochement des deux suites, pas en ce qui concerne le calcul qui est là extrêmement long : 30mn).



La suite (I_n) se comporte comme la suite $(\frac{1}{4n})$. Mais l'encadrement obtenu est encore plus intéressant, puisqu'il nous donne, pour chaque terme de la suite une valeur approchée et la qualité de l'approximation.

On sait par exemple que : $\frac{1}{4000004} < I_{1000000} < \frac{1}{4000000}$.

Signalons que, si on voulait directement obtenir une valeur approchée de $I_{1000000}$ avec la calculatrice, celle-ci déclarerait forfait immédiatement : avec un bandeau « Illegal Instruction » sur le haut de la machine, celle-ci se bloque immédiatement.

On le comprend, si on imagine le calcul approché auquel la machine procède : la machine va devoir calculer $\frac{x^{2000001}}{x^2+1}$, pour des points de l'intervalle $[0 ; 1]$, par exemple pour $x = 0,1$. C'est-à-dire qu'il s'agira d' exprimer $10^{-2000001}$. Cela fait beaucoup pour une machine qui ne connaît pas d'exposant supérieur à 1000...

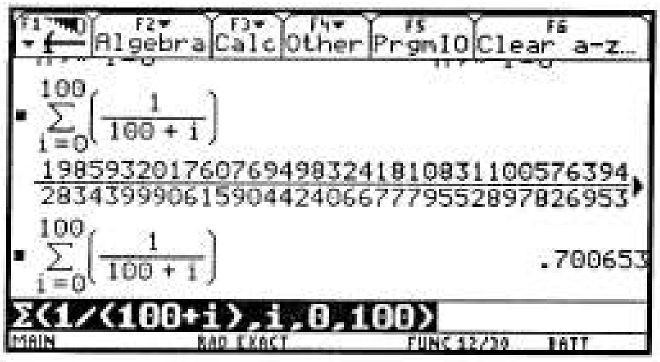
Le détour théorique nous donne ainsi un peu plus d'informations que le seul recours à la machine...

Pour chercher

1. Quelles sont les fonctions continues f qui vérifient, pour tout couple [a ; b], $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f^2(t)\,dt$.
2. Etudier la limite de la suite : $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$.
3. Rechercher des stratégies d'encadrement de $I = \int_\pi^{3\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1. Une méthode possible : on fixe a et on rend b variable. $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f^2(t)\,dt$. Deux fonctions égales ont leurs dérivées égales. D'où, pour tout x, $f(x) = f^2(x)$. f(x) ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, et comme f est continue...

2. La calculatrice ne donne pas d'expression synthétique de S_n, pas d'indication pour la limite. On ne peut avoir que des valeurs exactes, ou approchées, de termes particuliers de la suite. Il faut avoir recours à un encadrement par des intégrales.



3. On constate que la calculatrice ne donne pas de valeur exacte de I mais une valeur approchée. On peut vouloir contrôler cette approximation, en utilisant les théorèmes d'encadrement, la relation de Chasles sur les bornes, etc. Les encadrements obtenus sont plus ou moins brutaux :

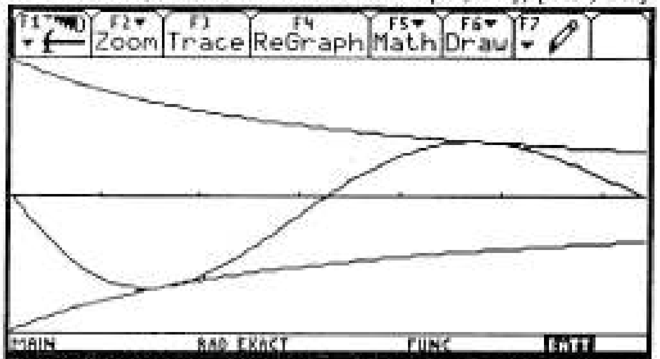
- on peut encadrer t et laisser varier sint (ou le contraire) sur tout l'intervalle d'intégration ;
- on peut s'adapter aux fluctuations de la fonction, en la considérant sur [π ; 2π], [2π ; 3π].

Cela correspond à des visions différentes des phénomènes.

Ci-contre, on encadre f entre :

1/x et - 1/x.

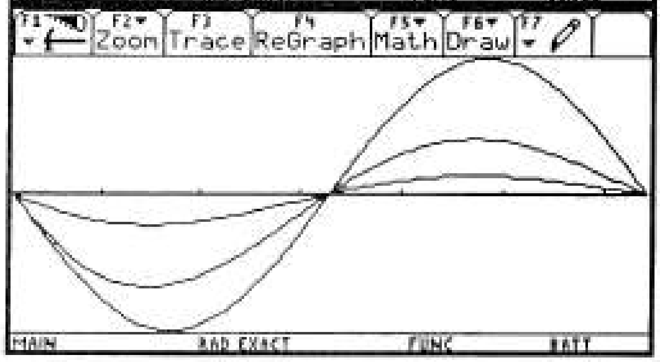
Le résultat, en terme d'intégrale, sera probablement assez grossier.



Ici, la fonction est encadrée entre :

sinx / π et sinx / (2π) .

Une autre vision du monde...



Cela prépare les méthodes plus systématiques de calcul approché d'intégrales.

II. 5. Fonctions

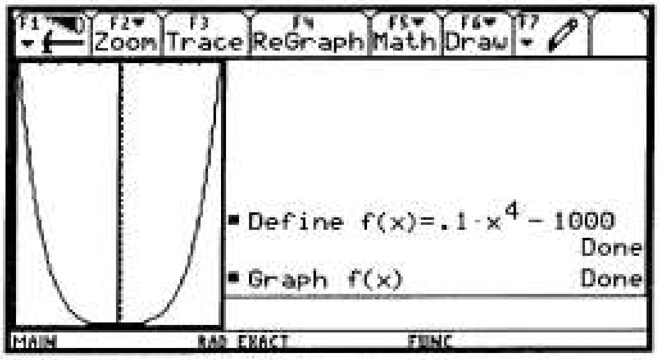
II.5.a. Gérer la calculatrice.

Nous ne rappellerons pas ici les problèmes liés à la représentation des graphes de manière discrète, nous renvoyons pour cela au chapitre I.2.a.

Définir une fonction

Diverses possibilités s'offrent à l'utilisateur, dont certaines sont mieux adaptées selon les cas.

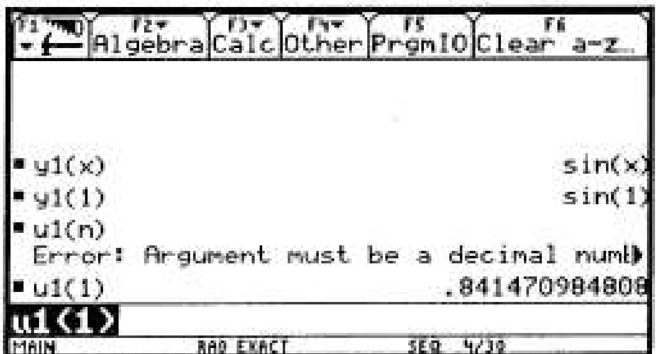
- Dans l'application **Home**, on peut utiliser comme pour les suites, soit la commande **Define**, soit la commande **STO**.



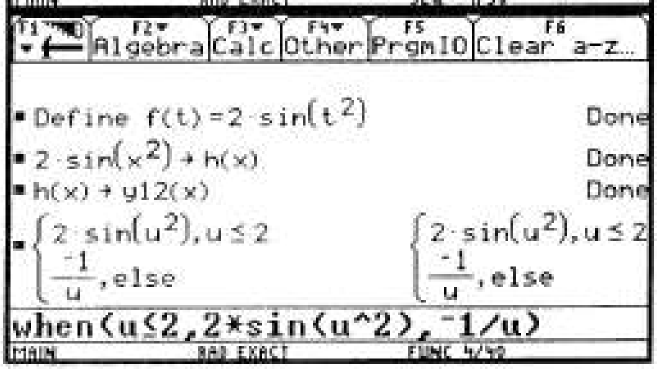
On peut obtenir le tracé de la fonction par l'intermédiaire de la commande **Graph f(x)**.
C'est l'emploi de la commande **Zoom fit** qui a permis d'obtenir le cadrage ci-contre.

- Dans l'application **Graph**, (la calculatrice étant alors réglée en mode **Function**), l'éditeur de fonctions permet de stocker plusieurs fonctions : y1, y2, y3, ...

Mais contrairement aux suites, l'éditeur de fonctions de l'application **Graph** permet un travail symbolique sur les fonctions.



Ci-contre, on peut observer la différence de traitement pour :
y1(x) = sin x et u1(n) = sin n.
Notons aussi que des fonctions définies en dehors de l'éditeur des fonctions peuvent y être insérées de manière simple.



Si l'on veut, par exemple, que la fonction h(x) soit la fonction y12(x), il suffit d'écrire :
- en étant dans l'éditeur d'équations :
y12(x) = h(x) ;
- à partir de l'application **Home** :
h(x) **STO** y12(x).

Dans l'application **Graph**, on retrouve toutes les possibilités d'une calculatrice graphique ordinaire de traçage d'une courbe (fenêtre, trace, zoom...) et de table de valeurs.

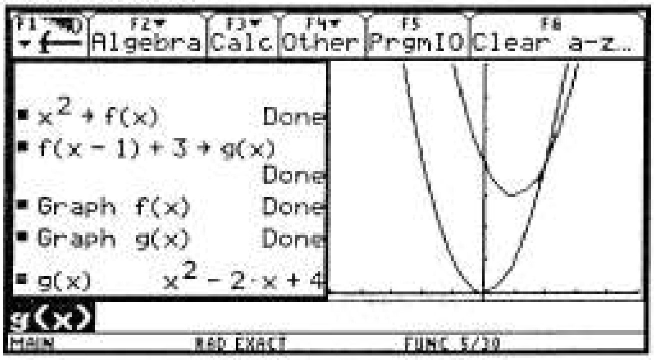
- Dans l'application **Program**, à l'aide d'une liste d'instructions.

C'est exactement la « function » de l'informatique. Cette possibilité est utile dans le cas d'une fonction un peu compliquée (cette construction d'une fonction est en particulier celle qui est sous-jacente quand, dans l'application **Home**, on utilise l'instruction **When**. En fait, dans ce cas il s'agit d'une macro commande).

Manipuler, étudier une fonction

- À partir des fonctions définies comme ci-dessus, on peut en définir d'autres par les procédés suivants :
  - somme, différence, multiplication par un nombre ;
  - multiplication, division (quand cela est possible !) ;
  - composition ;
  - intervention de paramètres.

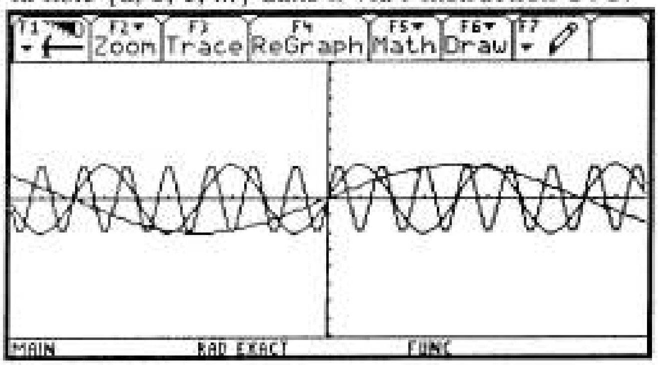
Ainsi par exemple, la possibilité de définir une fonction g à partir d'une fonction **f**, aussi bien en utilisant l'application **Home** que l'application **Graph**, permet de représenter rapidement des fonctions associées.



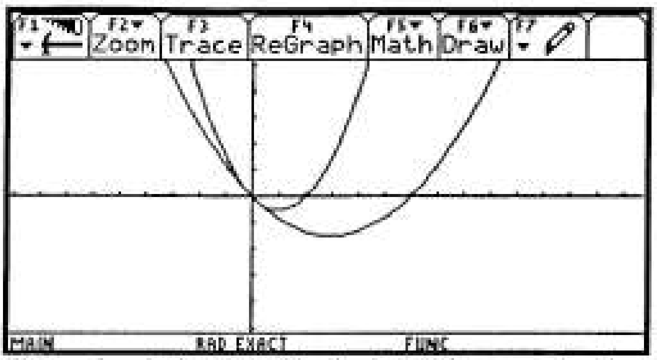
Dans l'application **Graph**, il suffirait d'écrire $y1(x)= x^2$ et $y2(x) = y1(x-1)+3$. Si l'on demande dans l'application **Home** $y2(x)$, on obtient l'affichage $x^2 - 2x + 4$.

On pourra de la même façon obtenir très rapidement le graphe d'une famille de fonction, par exemple de la forme $f_k(x) = f(k.x)$, où k prend diverses valeurs réelles. Si f est donnée, il suffit de composer avec la fonction y définie par $y(x) = k.x$, où k est une liste {a, b, c,..}. Pour ce faire, il suffit de ranger la liste {a, b, c, ...} dans k via l'instruction **STO**.

Voici un exemple :
f = sin, et k = {1, 0.25, 3}.
On a entré y1(x) = sin (k.x)

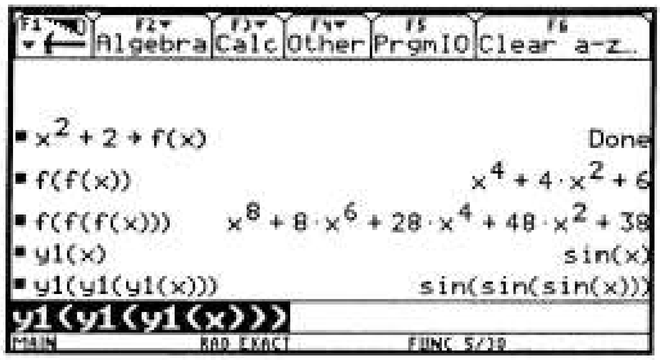


De la même manière, on peut obtenir le graphe des fonctions k.f. Rien n'empêche d'ailleurs de visualiser aussi les fonctions $x \to k.f(1/k.x)$. C'est le cas ci-contre, avec : $f(x) = 2x^2 - x$ et $k = \{1, 3\}$. (Pour la valeur 1, on trouve bien évidemment le graphe de f !).



(Il peut être intéressant d'étudier la relation entre les deux graphes).

En ce qui concerne la composition, on peut aussi obtenir les expressions de fof, ... dans l'application **Home**.



Si ces opérations sont celles, habituelles de toutes les calculatrices graphiques, à la différence que l'on peut obtenir ici des expressions symboliques pour des fonctions composées, d'autres opérations à caractère formel sont disponibles.

- Dérivation et intégration.

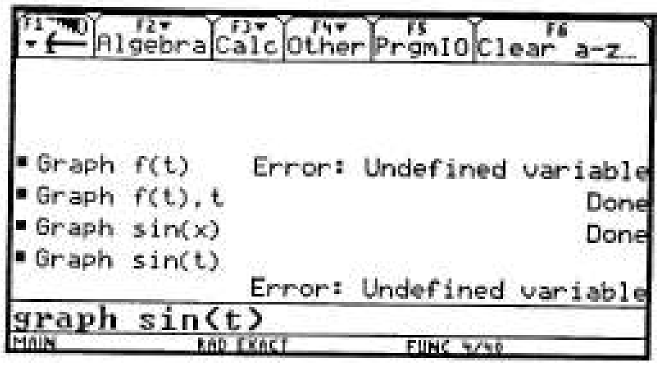
  - dérivation, attention toutefois, cette opération n'est pas possible si la fonction est définie par un programme (on pourra se reporter au chapitre II.3.b. pour retrouver les différentes possibilités que permet la calculatrice pour le calcul de « dérivée », et la coexistence dans l'application **Home** des commandes **d(differentiate** et **nDeriv**).

  - calcul de primitives, ... quand la calculatrice sait le faire (se reporter aux chapitres II.4.a et b de la partie calcul intégral de cet ouvrage pour retrouver les différentes possibilités de la calculatrice).

Quelques problèmes qui se posent

1. La variable x est une variable particulière dans le sens suivant. Si l'on a défini, via **Define** par exemple, une fonction f dont l'expression fait intervenir la variable t, la commande **Graph f(t)** va provoquer l'affichage d'un message d'erreur : **Variable non définie** (ou **Undefined variable**).

Ce problème est résolu simplement en spécifiant la variable : la commande **Graph f(t),t** va provoquer l'affichage du graphe de la fonction f.



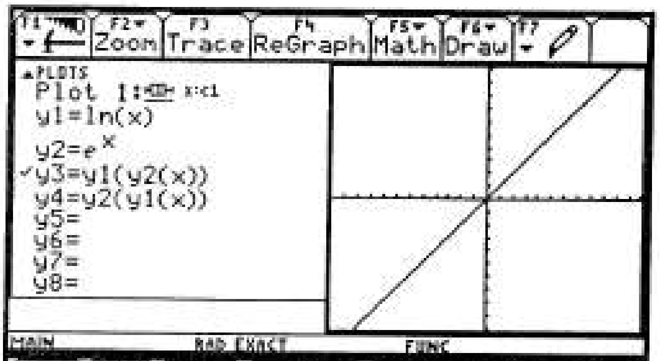
2. On considère les deux fonctions ln et exp qui sont inverses (ou réciproques) l'une de l'autre. On a donc :

ln o exp = $1_{\mathbb{R}}$ et exp o ln = $1_{\mathbb{R}_+^*}$ (où 1_E désigne l'application identique de l'ensemble E).

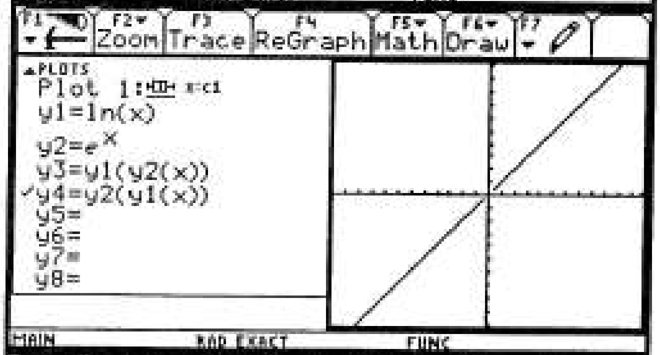
Ces deux relations caractérisent le fait que les deux fonctions sont inverses l'une de l'autre.

Les graphes de $1_{\mathbb{R}}$ et $1_{\mathbb{R}_+^*}$ sont donc respectivement la première bissectrice et la première bissectrice réduite à sa partie située dans le premier quadrant.

Voici le graphe de ln o exp = $1_{\mathbb{R}}$.



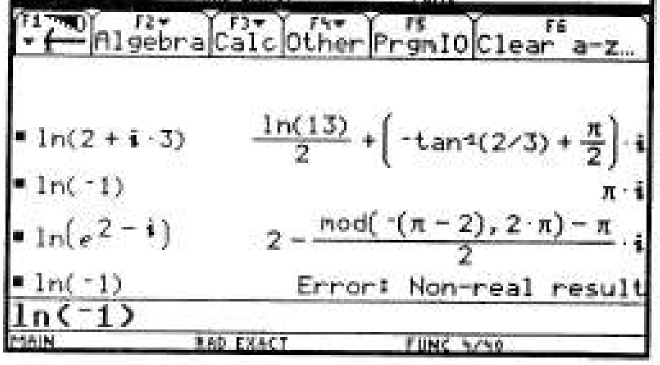
Voici le graphe de exp o ln = $1_{\mathbb{R}_+^*}$.



Alors que le graphe devrait exister seulement dans le premier quadrant, puisque la fonction ln est définie pour x > 0, cela n'est pas le cas !

On remarquera aussi que : en modes **Complex Format** ; **RECTANGULAR** ou **POLAR**, on obtient les résultats ci-contre.

Toutefois, en mode **Complex Format** ; **REAL**, ln (-1) est présenté comme un nombre non réel.



Tous ces problèmes se retrouvent également avec les fonctions sinus et Arc sin, cos et Arc cos. Ainsi, alors que la fonction Arc sin + Arc cos n'est bien évidemment définie que pour $-1 \le x \le 1$, et est constante, égale à $\pi/2$, la calculatrice affiche un graphe comme si la fonction en question était définie pour tout x réel !

II. 5. b. Fonctions Logarithme et exponentielle.

Introduction

La comparaison de la suite des entiers et de la suite des puissances correspondantes d'un nombre a : 1, 2, 3, ..., n et a, a^2, a^3,..., a^n avait été déjà faite dès l'Antiquité, notamment par Archimède. En 1484, Nicolas Chuquet remarque que si l'on fait correspondre les termes de même rang de ces deux suites, la somme de deux termes de la progression arithmétique correspond au produit des deux termes correspondants de la suite géométrique.

En langage plus moderne, si à p on associe a^p et à q on associe a^q, alors on associe a^{p+q} à p+q. Ou encore si l'on note $f(n) = a^n$, on a $f(p+q) = f(p)\times f(q)$. Idée que l'on synthétise aussi en disant que l'exponentielle d'une suite arithmétique est une suite géométrique (et réciproquement que le logarithme d'une suite géométrique est une suite arithmétique, le tout sous les conditions usuelles d'existence).

Cette remarque est étendue par Michael Stifel (1544), aux exposants négatifs et fractionnaires. Toutefois, la notion de logarithme ne commence à se formaliser qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, quand l'Écossais John Napier (ou Neper) en 1614 et le Suisse Joost Bürgi, en 1620, ont l'idée d'introduire entre les éléments a^p et a^{p+1} des nombres intercalaires en « assez grand nombre » et établissent des tables permettant de passer d'une suite à l'autre. Les premières tables de logarithmes décimaux sont dues à Henry Briggs (*Arithmetica logarithmica*, 1624) qui fait des logarithmes un moyen de calcul numérique pratique.

L'aspect « continu » des logarithmes, par opposition au caractère discret des tables, se développe au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, en même temps que la fonction exponentielle. Ces deux fonctions, exponentielle et logarithme, interviennent dans quasiment tous les domaines de l'activité humaine : physique, biologie, sciences humaines, médecine,... Quand, dans un phénomène naturel, interviennent deux quantités x et y telles que le taux de variation $\Delta y/\Delta x$ de y est proportionnel à y, la quantité y est une fonction exponentielle de x.

La définition et la présentation de la fonction logarithme ne posent aucun problème particulier. Il en est de même de la fonction exponentielle qui n'est autre que l'application inverse -ou réciproque- de la fonction logarithme. C'est à dire que la fonction exponentielle, notée exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *caractérisée par les deux relations :* $\ln(\exp(t)) = t$ *, pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\exp(\ln(x)) = x$*, pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Signalons toutefois que la fonction logarithme peut être présentée de deux manières, qui ne trouvent pas la même place dans un cours. La différence porte sur le fait que l'on ait fait, ou non, le lien entre aire et primitive. Dans un des cas, l'étude qui est faite est la première étude d'une fonction définie par une intégrale. Suivant le cas, certaines propriétés sont plus faciles à établir. Ceci étant, rien n'empêche de mettre en œuvre des activités préparatoires, autant pour la fonction logarithme que pour la fonction exponentielle ; en voici deux exemples.

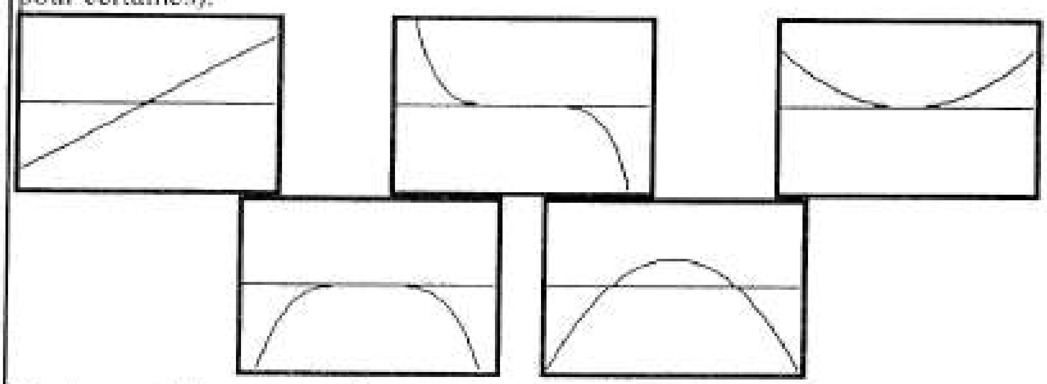
Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer, si elles existent, les fonctions dérivables f définies sur une partie D de $\mathbb{R}$, et vérifiant :
pour tout couple (x,y) de DxD, $f(xy) = f(x) + f(y)$, (1)
1. Que peut-on dire de f si f est constante ? Si la fonction n'est pas constante, montrer qu'elle n'est pas définie en zéro (de sorte que $0 \notin D$). Quelle est alors la valeur de f en 1 ?
2. On suppose maintenant que $D = \mathbb{R}_+^*$. Si a est un nombre réel strictement positif, soit g définie par $g(x) = f(ax)$.
   a) Quelle est la dérivée de g, considérée comme fonction composée ?
   b) En utilisant la relation (1), donner une autre expression de $g'(x)$.
   c) En utilisant les résultats de a) et b), et en donnant une valeur particulière à x, montrer qu'il existe un réel k, tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on ait : $f'(a) = \frac{k}{a}$.

Une équation différentielle

Cette activité suppose évidemment une introduction, qui peut être très rapide, à la notion d'équation différentielle.

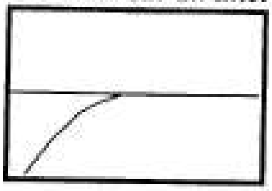
On se propose d'étudier, si elles existent, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, ou sur une partie de $\mathbb{R}$, vérifiant $y' = y$, (1).
1. Donner un exemple d'une telle fonction. Montrer que si y_1 et y_2 vérifient la relation (1), il en est de même de $y_1 + y_2$ et de $a.y_1$, où a est un nombre réel quelconque.
2. Montrer que si y vérifie (1), y est indéfiniment dérivable.
3. Les courbes suivantes peuvent-elles être des courbes représentatives de fonctions vérifiant $y' = y$? (La droite horizontale est l'axe des x, et chaque courbe est censée couper l'axe en un seul point, même si cela n'apparaît pas clairement pour certaines).

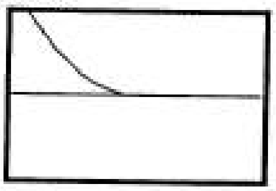


Quelle conclusion peut-on tirer pour le graphe d'une solution ?

4. Une solution peut-elle être nulle sur un intervalle de $\mathbb{R}$?

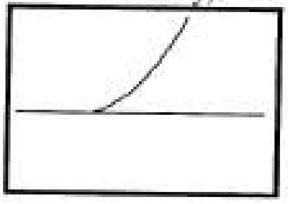
Montrer que les courbes suivantes ne peuvent pas être le graphe d'une solution.

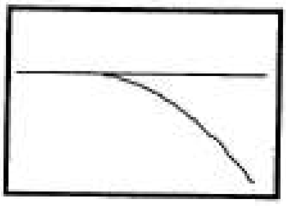




En déduire que si une solution s'annule sur un intervalle, celui-ci est nécessairement de la forme $]-\infty ; a]$. On considère alors deux courbes qui correspondent à cette propriété. Montrer qu'en fait, il suffit d'en considérer une seule (car si y est solution, il en est de même de -y).

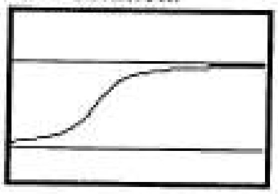
Montrer que cette situation n'est pas possible et en déduire qu'une solution non nulle ne s'annule jamais et est toujours du même signe.





5. Existence éventuelle d'une asymptote horizontale pour une solution.

Quite à remplacer y par -y, on peut se restreindre à la situation ci-contre.(la droite horizontale inférieure est l'axe des x, la droite horizontale supérieure est l'asymptote). Montrer que cela n'est pas possible.



6. Si une solution existe, en donner un graphe vraisemblable.

7. Si une solution y existe, autre que la solution nulle, on a vu que y(x) n'est jamais nul. Soit donc une autre solution non nulle z. Montrer qu'il existe un nombre réel (non nul) a tel que y = a z. (considérer la dérivée de y/z). (Autrement dit, toute solution non nulle s'écrit sous la forme a.y). Parmi toutes les solutions (supposées exister), montrer qu'il n'en existe qu'une seule prenant la valeur 1 en 0.

Ce type d'étude qualitative d'une équation différentielle du premier ordre est intéressante, en ce sens que des considérations très simples permettent d'obtenir des résultats non négligeables et qu'elle permet de bien appréhender le sens de la dérivée. En outre, dans bien des cas, une étude qualitative est suffisante, et même quelquefois, c'est le seul moyen d'avoir des renseignements sur les solutions.

On trouvera dans : « Des fonctions et des graphes » [Bernard & al. 1995], un autre exemple d'une telle étude qualitative (et aussi quantitative), à savoir la recherche des fonctions f, si elles existent, qui vérifient : fof = exp.

II.5.c. Un exercice et deux problèmes.

Ecrans Log-Log et Semi-Log

Les papiers dits Semi-Log et Log-Log sont utilisés dans les sciences expérimentales lors de l'étude de certains phénomènes pour lesquels les fonctions logarithme et exponentielle interviennent. De manière plus précise :

- sur le papier Semi-Log, le point de coordonnées physiques (a,b) représente le couple $(a,10^b)$. Ainsi, les points (a,1), (a,2) et (a,3) sur la feuille de papier, points qui sont équidistants, représentent les couples (a,10), $(a,10^2)$ et $(a,10^3)$. Autrement dit, le couple (x,y) a pour image sur le papier le point (x,Log y) ;
- sur le papier Log-Log, le point de coordonnées physiques (a,b) de la feuille de papier représente le couple $(10^a,10^b)$. Autrement dit, le couple (x,y) a pour image sur le papier le point (Log (x) , Log(y)).

Il résulte de ceci que si sur le papier Semi-Log, les points sont alignés, les coordonnées (x,z) de ces points vérifient une équation du type z = px + q, c'est à dire, puisque z = Log (y) et $y = 10^z$ que l'on a : $y = 10^{Log(y)} = 10^{px+q} = K.10^{px}$. En ce qui concerne le papier Log-Log, l'alignement des points sur le papier signifie que l'on a, avec des notations évidentes Log(y) = p Log(x) + q, ou encore, $y = K.x^p$.

En définitive, pour mettre en évidence un phénomène du type exponentiel on utilise le papier Semi-Log, pour mettre en évidence un phénomène de type puissance on utilise le papier Log-Log. Il va de soi que l'on peut utiliser le papier Semi-Log (respectivement Log-Log) pour étudier des fonctions exponentielles (resp. puissance), dans chacun des cas, on obtiendra des droites.

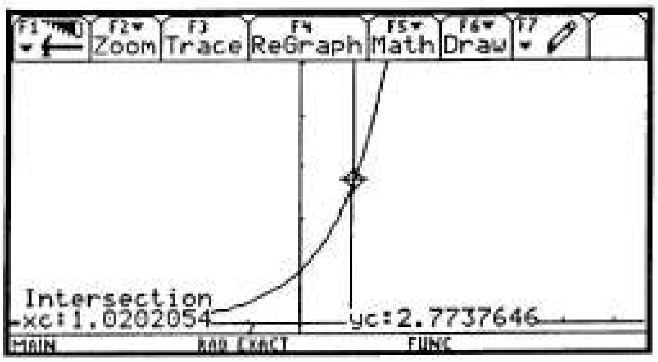
Il faut bien savoir que l'utilisation de tels papiers est tombé en désuétude, avantageusement remplacés par les calculatrices qui, à partir de données expérimentales, donnent de la manière la plus fiable possible, les coefficients K et p ci-dessus, en utilisant les outils statistiques que sont les régressions puissance et exponentielle, en particulier.

Exercice

> Déterminer [1] le nombre et donner une valeur approchée des racines de l'équation $e^x = x^{51}$.

[1] *Voir une approche de cet exercice dans « Enseigner en Terminale S avec des calculatrices graphiques et formelles » [Trouche. 1996].*

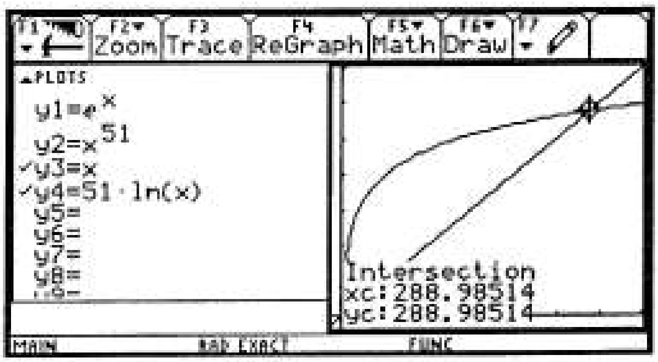
La représentation des graphes de ces deux fonctions montre nettement une solution que l'on peut déterminer, de manière approchée.



Par contre, la deuxième solution n'est pas évidente, sauf si l'on sait que « l'exponentielle dépasse toute fonction puissance ».

Mais on ne peut pas faire apparaître le point d'intersection pour cause de dépassement de capacité.

Le passage à l'écran Semi-Log (en fait, ici Semi-ln), montre le point d'intersection manquant et permet de calculer son abscisse, ce qui nous donne la seconde solution.



Il faut savoir que la recherche des solutions à l'aide la fonctionnalité **solve** réserve bien des surprises. En mode **exact**, il n'y a aucune solution, en ce sens que la calculatrice affiche l'équation proposée : $e^x - x^{51} = 0$. En mode **appprox**, aucune solution n'est proposée ; avec la contrainte $x > 100$, aucune solution ; avec la contrainte $x > 200$, la solution approchée est fournie !

Approximation d'un logarithme

Ce problème permet de répondre, partiellement, à une question souvent posée par les élèves, et bien légitime, à savoir : « Comment calcule-t-on le logarithme d'un nombre, puisque l'on ne connaît pas de primitive de la fonction : $x \to \frac{1}{x}$ *? »*

Pour tout entier n positif ou nul, on définit la fonction f_n, pour $x \neq -1$, par :

$f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)}$, (de sorte que $f_0(x) = \frac{1}{(1+x)}$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(x) = 1 - x + (-x)^2 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1}$.

1. Montrer que $S_n(x) = f_0(x) - (-1)^n f_n(x)$ pour $x \neq -1$.
2. Pour $|x| < 1$ et pour $x = 1$, étudier la limite quand n tend vers l'infini de $s_n(x)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Quelle relation existe entre $\sigma_n(x)$ et $S_n(x)$?
4. Sans calculer l'intégrale, montrer que la quantité :

$$\sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\ dt - \ln(1+x) \text{ est constante.}$$

a) En déduire que : $\ln(1+x) = \sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\ dt$.

b) Comparer $\ln(1+x)$ et $\sigma_n(x)$ suivant la parité de n.

c) Donner une majoration simple de $|\ln(1+x) - \sigma_n(x)|$.

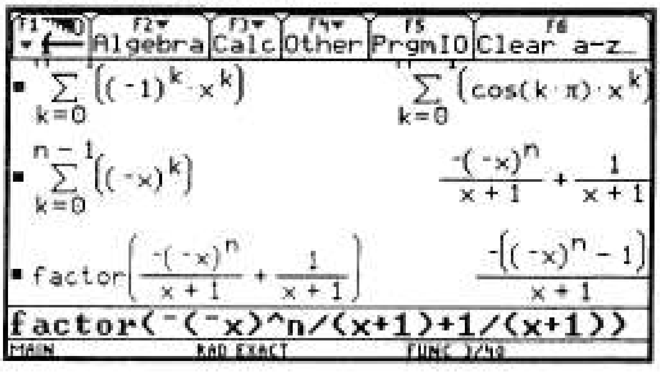
d) Donner une valeur approchée avec une erreur inférieure à 10^{-11} de $\ln(\frac{11}{10})$.

Quel est le sens de l'erreur commise ? Comparer avec la valeur donnée par la calculatrice.

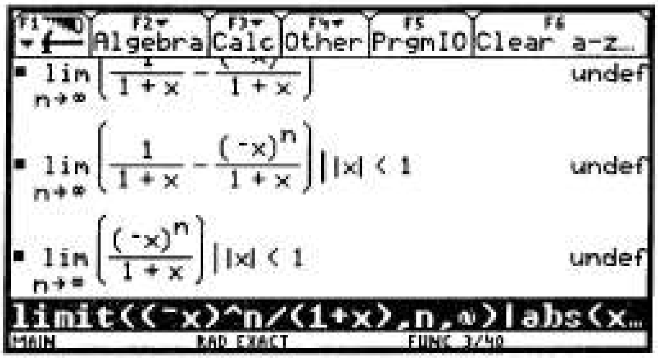
5. Si x est un nombre réel vérifiant $0 \leq x \leq 1$, montrer que ln (1+x) est la limite quand n tend vers l'infini de $\sigma_n(x)$. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

1. Compte tenu de la définition de S_n, (somme des termes d'une suite géométrique), on obtient $S_n(x) = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$ et le résultat en découle immédiatement.

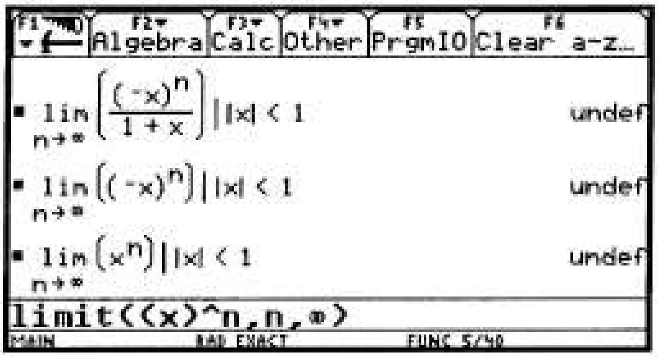
On remarquera que la TI-92 ne reconnaît pas toujours dans une somme, la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique : il faut lui préparer le travail. Voici ce qu'elle affiche.



2. On déduit de la question précédente que la limite de $S_n(x)$ quand n tend vers l'infini est $\frac{1}{1+x}$, car pour $|x| < 1$, la limite de x^n est nulle. Quand $x = 1$, il n'y a pas de limite.

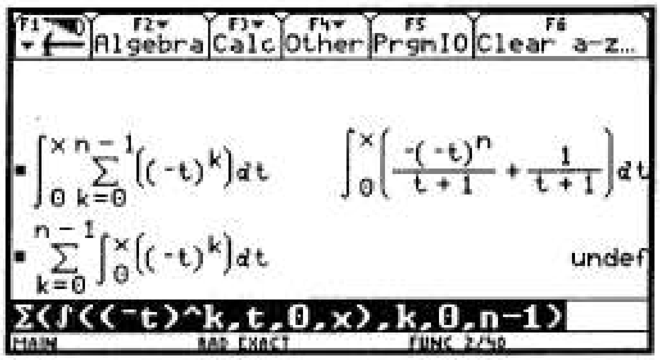


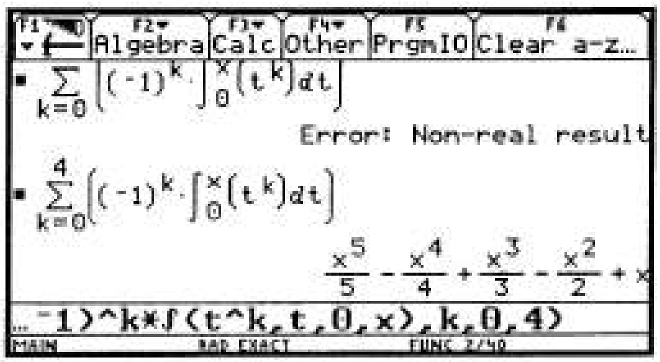
On remarquera ici encore que la TI-92 ne sait pas calculer la limite de x^n quand n tend vers l'infini. Si cela est compréhensible quand aucune condition n'est imposée à x, cela l'est beaucoup moins quand on impose à x la condition $|x| < 1$. Par contre, si l'on donne à x une valeur particulière, par exemple : $x = 0,3$ ou $x = 3$, il n'y a aucun problème.



3. On vérifie immédiatement que $\sigma_n(x)$ est la primitive de $S_n(x)$ qui s'annule en 0.

Si l'on veut utiliser la calculatrice pour calculer une primitive de S_n, il faut bien sûr lui donner la forme qu'elle reconnaît. Le résultat n'est pas très intéressant, ce qui est normal, puisqu'elle ne sait pas intégrer $\frac{t^n}{1+t}$. On peut alors intervertir des signes $\sum$ et $\int$ et l'on peut espérer obtenir un résultat « raisonnable » : c'est loin d'être le cas ! Un retour à l'écriture avec les $(-1)^k$ n'est pas plus concluant ! Par contre, dans un cas particulier $n = 5$, il n'y a aucun problème.





4. a) Compte tenu de la remarque précédente, on vérifie que la quantité considérée a une dérivée nulle et est donc constante, puisque :

- $(-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt$ a pour dérivée $(-1)^n f_n(x)$;
- la dérivée de $-\ln(1+x)$ est égale à $\frac{-1}{1+x}$, qui vaut $f_0(x)$;
- la dérivée de $\sigma_n(x)$ est $S_n(x)$ d'après le 3 ;
- et $S_n(x) = f_0(x) - (-1)^n f_n(x)$ pour $x \neq -1$, d'après le 1.

b) L'égalité $\ln(1+x) = \sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t)\,dt$ résulte immédiatement du a).

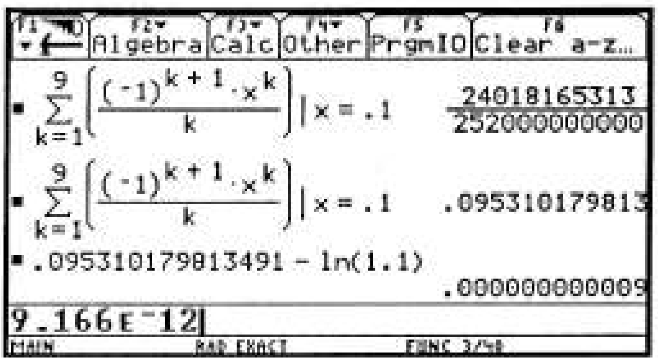
c) Comme l'intégrale $\int_0^x f_n(t)\,dt$ est positive pour $x \in]0 ; 1]$, on a $\ln(1+x) < \sigma_n(x)$ quand n est impair, et $\ln(1+x) > \sigma_n(x)$ quand n est pair. [Il est clair que le cas $x = 0$ ne présente aucune intérêt, car l'égalité se résume à $0 = 0$. C'est pour cela que nous considérons l'intervalle $]0 ; 1]$).

d) Comme $\frac{t^n}{(1+t)}$ est majoré par t^n sur $]0 ; 1]$, on obtient, pour $n > 0$:

$$|\ln(1+x) - \sigma_n(x)| < \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

e) Valeur approchée de $\ln\left(\frac{11}{10}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$. Compte tenu du résultat d), il suffit de choisir n pour que $\frac{(0,1)^{n+1}}{n+1} = (10)^{-(n+1)}.\frac{1}{n+1}$ soit inférieur ou égal à 10^{-11}. Il suffit donc de prendre $n = 9$.

Dans ce cas, la TI-92 nous donne le résultat suivant. Comme n est impair, on sait que cette valeur est une valeur par excès. On peut en outre comparer cette valeur approchée de ln (1,1) avec celle donnée par la calculatrice ; la différence est $9{,}166\ 10^{-12}$, ce qui est conforme à ce que l'on attendait.



5. Cette question ne présente aucune difficulté. La limite de $\sigma_n(x)$ quand n tend vers l'infini est évidemment $\ln(1+x)$, et la suite considérée n'est autre que la suite $(\sigma_n(1))$ qui a donc pour limite $\ln(2)$.

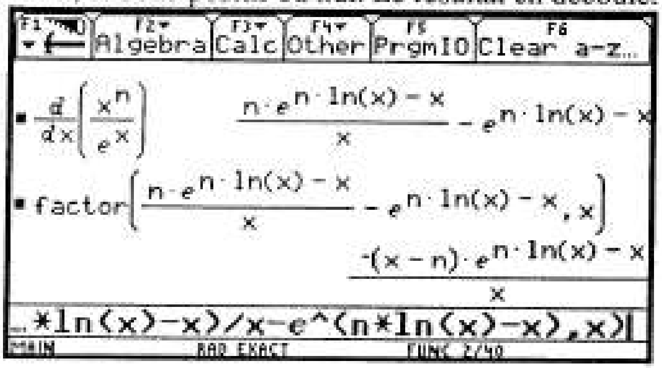
Calcul de e

De la même manière que dans le cas précédent, ce problème va permettre de calculer les nombres exp (x), et plus précisément exp(1) = e, du moins de manière approchée, et avec une précision aussi grande que l'on veut.

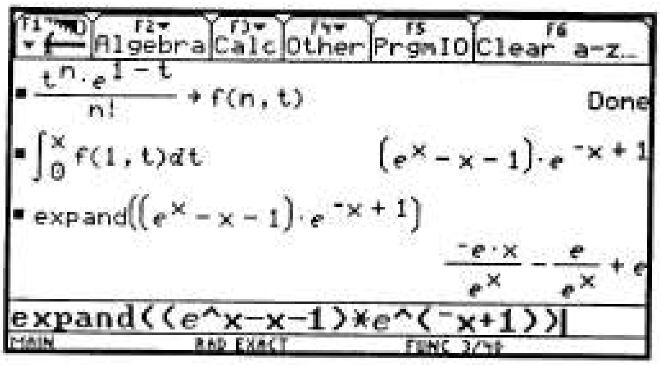
> Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}.e^{1-x} = \frac{x^n}{n!}.\frac{e}{e^x}$.
>
> 1. Montrer que si $x \in [0\,;1]$, on a : $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.
>
> 2. Soit $I_n = I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!}.e^{1-t}\,dt$ où x est un nombre réel fixe. Par une intégration par parties, calculer I_1. Par la même méthode, établir une relation entre I_n et I_{n-1}.
>
> 3. En utilisant la relation établie à la question précédente, montrer que :
> $I_n = e - e^{1-x}.[\,1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\,]$. Quelle est la limite, pour n fixé, de I_n quand x tend vers l'infini ?
>
> 4. Dans toute la suite le nombre réel x vaut 1. On désigne alors par J_n l'intégrale $I_n(1)$, à savoir : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}.e^{1-t}\,dt$.
>
> a) Démontrer que J_n vérifie : $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$;
>
> b) Montrer que : $0 \leq e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{n!}$ et $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq (\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}) + \frac{1}{n!}$;
>
> c) En déduire la limite quand n tend vers l'infini de $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et donner un majorant de l'erreur commise en remplaçant e par $\sum_{p=0}^{10} \frac{1}{p!}$.

1. On remarque que l'on a $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{1}{n!}$; il suffit donc de vérifier que f_n est croissante sur [0 ; 1]. Au coefficient multiplicatif positif $\frac{e}{n!}$ près, $f'_n(x) = e^{-x}.x^{n-1}(n-x)$ qui est du signe, sur l'intervalle considéré, de n-x, et donc positif ou nul. Le résultat en découle.

On pourrait vouloir effectuer le calcul de la dérivée de $\frac{x^n}{e^x}$ à l'aide de la calculatrice, mais le résultat affiché ne correspond guère aux notations habituelles et est ainsi un peu déroutant. La remise aux « normes habituelles » donne le résultat obtenu précédemment.



2. Le calcul de I_1 par intégration par parties ne pose pas de problème. En outre, la calculatrice donne directement le résultat.



D'autre part, en posant :

$u = \frac{t^n}{n!}$ et $v' = e^{1-t}$, on a :

$u' = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v = -e^{1-t}$,

ce qui donne la relation :

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!} \cdot e^{1-x}.$$

3. En sommant les égalités obtenues à la question précédente, et en remplaçant I_1 par sa valeur calculée au 1°, on obtient la relation annoncée : $I_n = e - e^{1-x}.[\,1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\,]$. Si n est fixé, chacun des n +1 termes de la somme de la forme $e^{1-x}\frac{x^k}{k!} = \frac{e}{k!}\frac{x^k}{e^x}$ a pour limite 0 quand x tend vers l'infini, de sorte que I_n a pour limite e quand x tend vers l'infini.

4. a) Ceci n'est autre que la relation déjà établie pour I_n.

b) comme $J_n = I_n(1)$, on a : $J_n = e - e^{1-1}.[\,1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\,]$

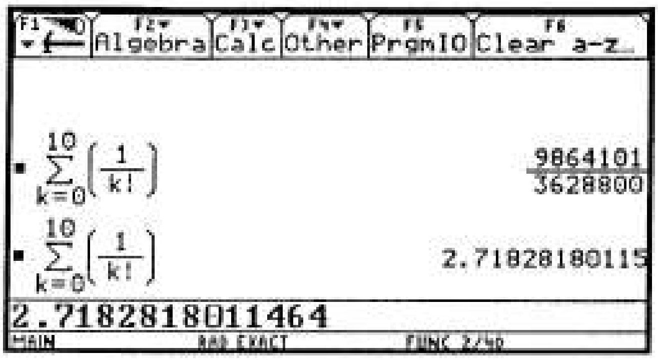
$$= e - [\,1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\,].$$

On en déduit : $0 \leq e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{n!}$, d'après a).

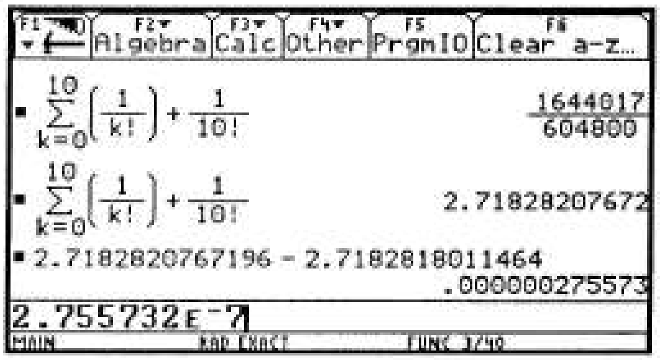
Ceci donne, en ajoutant à chacun des membres de cette double inégalité la quantité $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ la relation : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \leq e \leq (\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}) + \frac{1}{n!}$.

La suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ est une suite croissante qui est majorée (par e) ; elle est donc convergente de limite s et l'on a : **s ≤ e**. D'autre part, la quantité $(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}) + \frac{1}{n!}$ est la somme de deux termes qui sont pour le premier le terme u_n d'une suite convergente de limite s et l'autre le terme d'une suite convergente de limite nulle. On en déduit que la limite de $(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}) + \frac{1}{n!}$ est s. Comme s vérifie aussi **e ≤ s**, on en déduit que s = e.

c) Soit n = 10. La calculatrice donne la valeur exacte et une valeur approchée de $\sum_{p=0}^{10} \frac{1}{p!}$, avec 14 chiffres significatifs pour cette dernière.

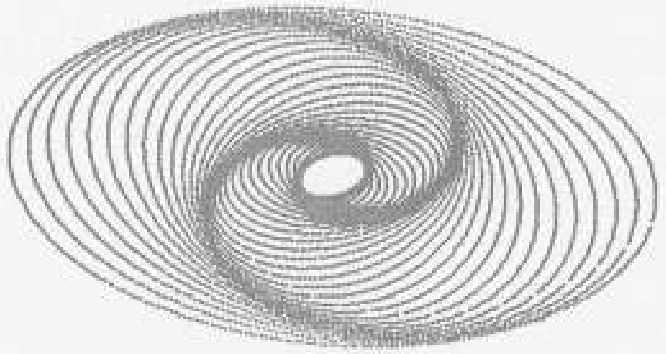


De ma même manière, on obtient un majorant de e par $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$, en valeur exacte ou approchée.



On déduit de tout cela qu'une valeur approchée par défaut de e est 2,718 281 80 avec une erreur inférieure ou égale à $2{,}8.10^{-7}$.

Partie III

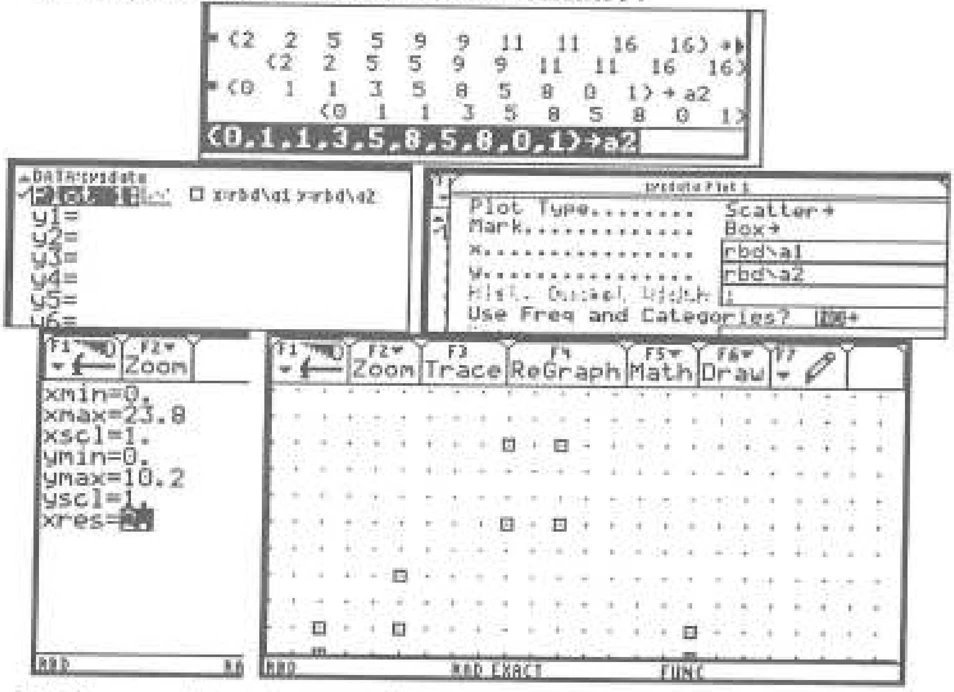


Problèmes de recherche

III.1. Le skieur de Morzine

Lorsque le professeur d'EPS vous enlève votre classe de Première pour une semaine de ski en vous demandant de leur donner du travail (pour la bonne conscience), on peut leur proposer un travail collectif de recherche[1]

Entrer les données suivantes dans la calculatrice :



Cet écran schématise une piste de slalom formée d'un couloir de départ parallèle à l'axe des abscisses à partir de O et de 5 portes P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Le skieur est tenu de passer entre les deux « piquets » formant chaque porte. Après la porte P_5, le skieur doit terminer sa course en s'approchant de la bordure sans pour autant la toucher.

Autrement dit : la trajectoire du skieur a une tangente horizontale en O. Elle passe entre les points formant les portes et possède une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$!

À vos calculatrices !

Trouver une fonction dont la représentation graphique respecte toutes ces contraintes.

Mais attention : un skieur ne peut glisser qu'en négociant ses virages, il est donc impératif que la fonction trouvée soit **dérivable** en tout point.

Quelques pistes :

Piste Rouge : Il est toujours possible de trouver une fonction définie par une formule différente sur des intervalles juxtaposés.

Piste Jaune : En définissant la fonction par des morceaux séparés, il faut bien s'assurer de sa dérivabilité aux points de jonction

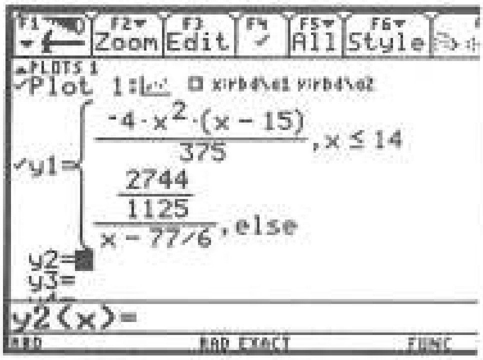
Piste Verte : Si une fonction polynôme a une dérivée qui s'annule entre les « portes », c'est là qu'elle aura ses extrema.

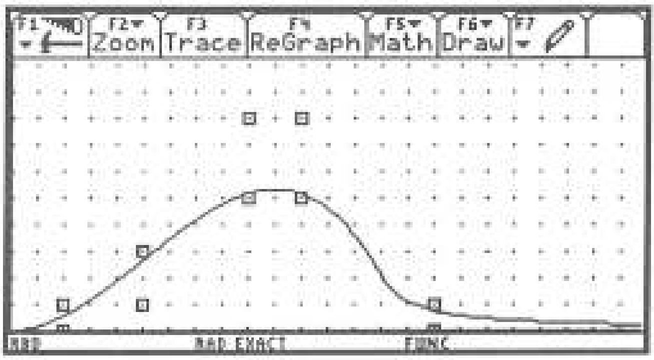
Piste Bleue : Une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur a une asymptote d'équation $y = 0$.

---

[1] *Ce travail est inspiré du "Problème long" proposé par Luc Trouche in "Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles (IREM de Montpellier, 1996) adapté au niveau Première.*

Un exemple de réponse.





• Pour $0 \le x \le 14$, on envisage un polynôme dont la dérivée s'annule en 0 (couloir de démarrage), et en 10 pour avoir le maximum entre les portes P3 et P4.

On considère pour cela une fonction h telle que $h'(x) = k.x.(10-x)$, ce qui répond à cette double contrainte.

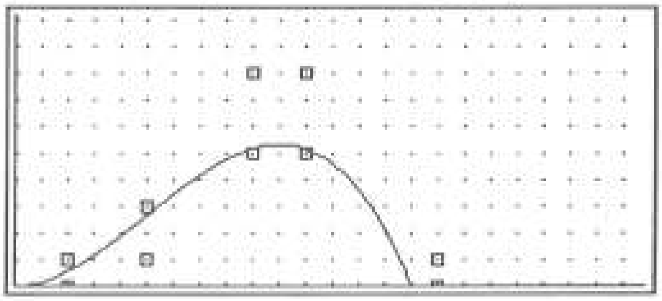
Si $h'(x) = k(10x - x^2)$, alors $\qquad h(x) = k(5x^2 - \frac{x^3}{3}) = \frac{k}{3}\, x^2(15 - x)$.

Il s'agit alors de déterminer k pour que la courbe soit correctement située :

$$5 < h(9) < 8 \;;\; 5 < h(11) < 8 \;;\; 0 < h(2) < 1 \;;\; 1 < h(5) < 3$$

Quelques tâtonnements font situer k vers des valeurs de 0,03.

On choisira $k = \frac{4}{125}$ ce qui conduit à $h(x) = \frac{4x^2(15 - x)}{375}$ et on vérifie aisément que les conditions imposées sont respectées. Voici le graphique obtenu :



• Pour $x > 14$, on envisage une fonction du type « inverse » qui admet l'axe (Ox) comme asymptote horizontale et une asymptote verticale située un peu avant 14, de façon qu'au point d'abscisse 14, il y ait une tangente dont la pente semble compatible avec celle de la fonction précédente.

Prenons donc $g(x) = \frac{a}{x - b}$ et cherchons les valeurs de a et b pour que nous ayons simultanément :

- $g(14) = h(14)$, pour obtenir la continuité en 14 ;
- $g'(14) = h'(14)$, pour obtenir une tangente commune aux deux parties.

Soit $\dfrac{a}{14-b} = \dfrac{4\times 14^2(15-14)}{375}$ et $\dfrac{-a}{(14-b)^2} = -\dfrac{4}{125}\,14\times(14-10)$.

D'où le système : $\begin{cases} a = \dfrac{784}{375}(14-b) \\ a = \dfrac{224}{125}(14-b)^2 \end{cases}$ et l'équation $\dfrac{784}{375}B = \dfrac{224}{125}B2$ en posant $14 - b = B$.

$B = 0$ n'étant pas solution, il reste $B = \dfrac{784}{375}/\dfrac{224}{125} = \dfrac{7}{6}$.

Donc $b = 14 - B = \dfrac{77}{6}$ et $a = \dfrac{784}{375}B = \dfrac{2744}{1125}$

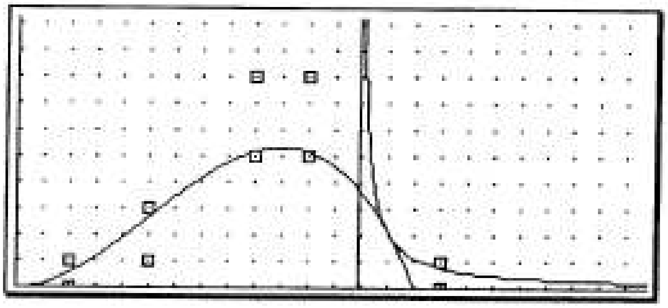
On a donc, pour $x > 14$,

$$g(x) = \frac{2744}{1125} \times \frac{1}{x - 77/6}.$$

Il reste à vérifier que $0 < g(16) < 1$ ce qui est aisé.

La fonction f est donc définie par :

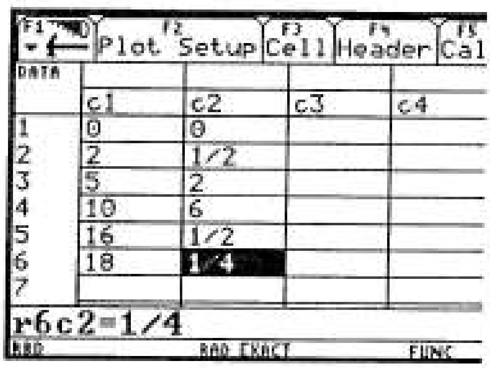
$$f : x \mapsto \begin{cases} h(x) \text{ si } 0 \le x \le 14 \\ g(x) \text{ si } x > 14 \end{cases}$$

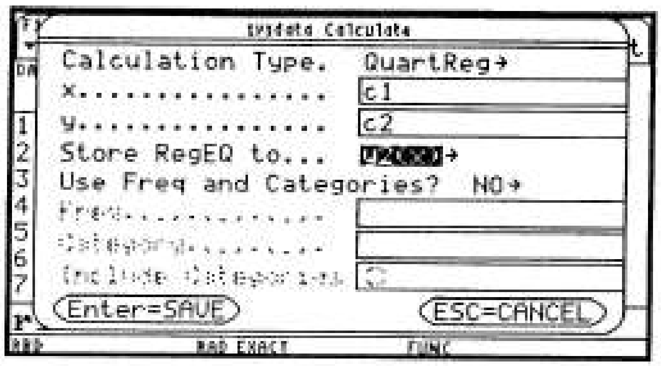


Des solutions d'élèves.

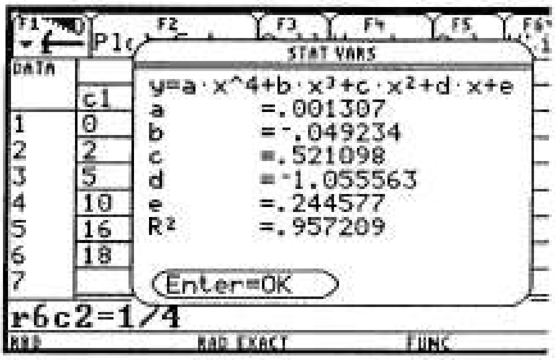
A. Un essai avec le calcul statistique

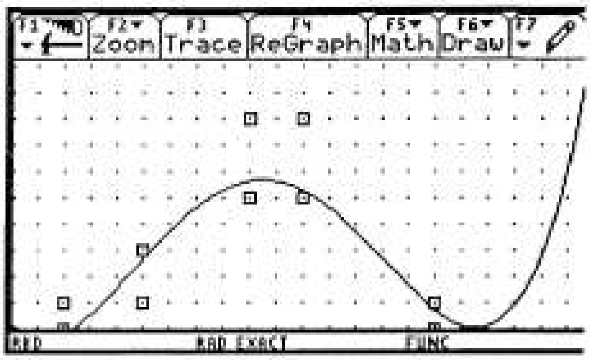
L'élève a introduit dans l'éditeur de tableaux les coordonnées (c1 ; c2) des points par lesquels il souhaitait faire passer sa courbe, puis il demande de tracer la courbe de régression du quatrième degré.





Outre que les coefficients sont lourds, il reste de nombreux ajustements à faire.





Affaire à suivre ...

Mais, piste abandonnée par la plupart des élèves pour cause de lourdeur des coefficients.

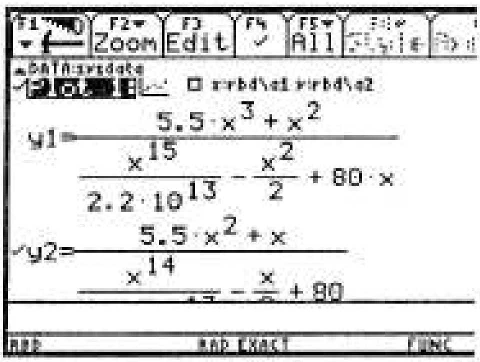
B. Faire simple avec plus de morceaux

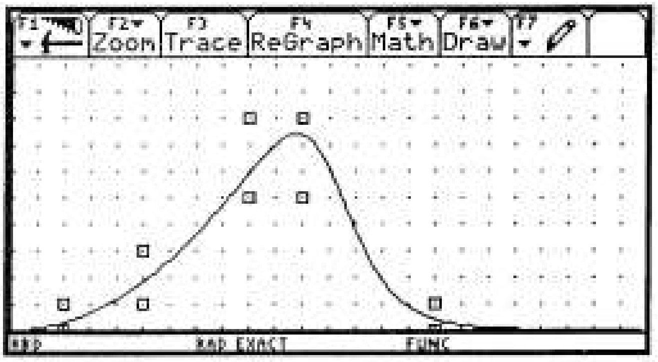
Le groupe de 5 élèves qui ne sont pas partis au ski ont réfléchi à la question. Ils ont choisi de faire trois morceaux, deux portions de parabole et une portion d'hyperbole :

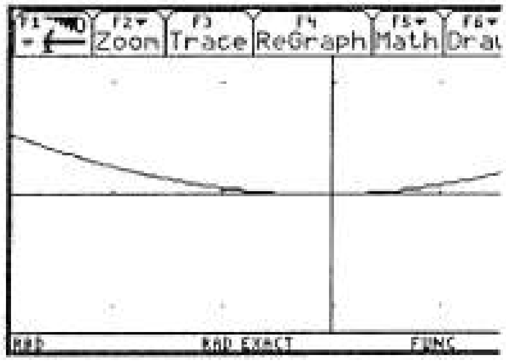
- la première parabole doit avoir une équation du type $y = ax^2$ avec a positif ;
- la deuxième parabole doit avoir une équation du type $y = -ax^2 + bx + c$ avec a positif ;
- quant à l'hyperbole, son équation est de la forme $y = \dfrac{1}{x - m}$ parce qu'il faut la décaler.

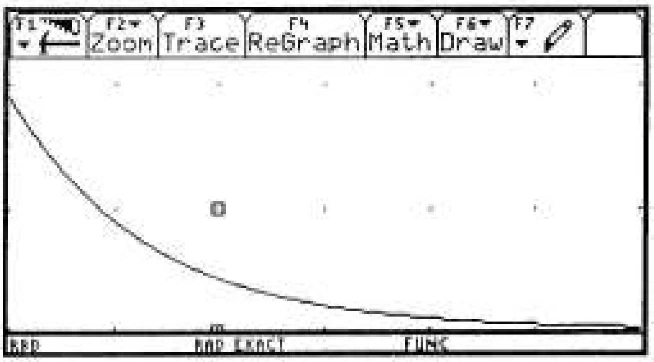
Ensuite, c'est le règne du tâtonnement pour faire coïncider les 3 parties.

C. Une quasi-solution en un seul morceau

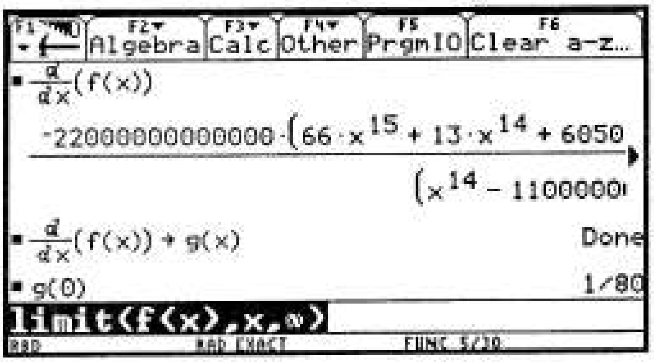








Mis à part le fait que l'élève n'a pas utilisé la possibilité de simplification de la fonction (notée f par la suite), il semble que la solution soit satisfaisante. Cependant comme le montre le zoom sur l'origine, la tangente en O ne paraît pas tout à fait convenable.



Le calcul - qui prend beaucoup de temps avec la TI-92 - de f'(0) révèle que $f'(0) = \frac{1}{80}$. Le calcul manuel entrepris par l'élève donnait 0 mais comportait une erreur.

Le degré du numérateur de la fonction rationnelle f étant inférieur (considérablement) au degré du dénominateur, la limite en $+\infty$ est évidemment nulle.

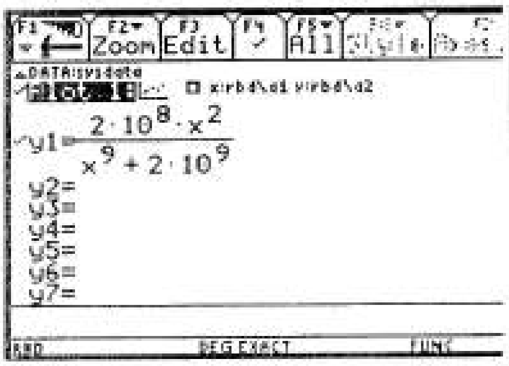
Pourtant la TI-92, après 10 minutes de fonctionnement en mode exact n'a toujours pas affiché le résultat. Le calcul en mode approché (◆ **ENTER**), lui a exigé 2 minutes et 10 secondes.

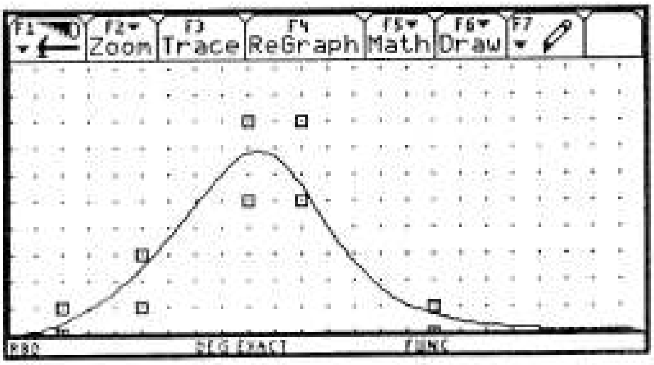
Comment l'élève en question va-t-il réagir pour régler l'imperfection de la tangente en O ? ...

D. Une solution définitive inspirée par la recherche précédente

Comme pour l'idée précédente, il s'agira d'une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur avec, en plus la volonté de rester simple (suite à l'expérience malheureuse utilisant les calculs statistiques).

De plus, par rapport à la tangente en O, la forme (u'v - v'u) doit laisser x en facteur ce qui impose à u' la forme en x et donc à u la forme en x^2. Pour le reste, il faut ajuster les coefficients et les puissances ce qui prend beaucoup de temps et d'essais.

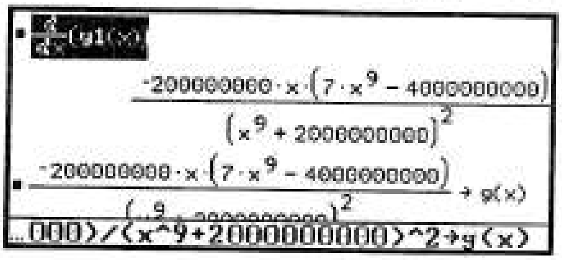


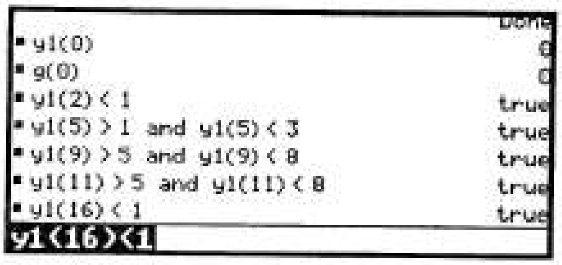


Les vérifications sont aisées :

La dérivée de cette fonction est nommée g

y1(x) est positif pour tout x positif





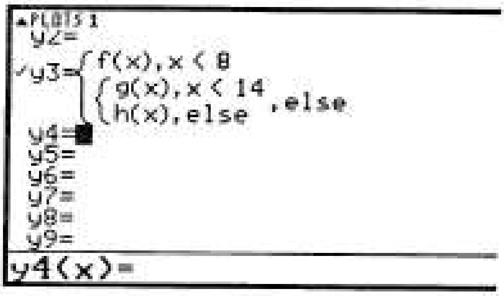
et évidemment

Ce qui met un point final au problème posé.

... Sauf si on ajoute des contraintes nouvelles (minimiser la courbure de la trajectoire par exemple) pour relancer le problème.

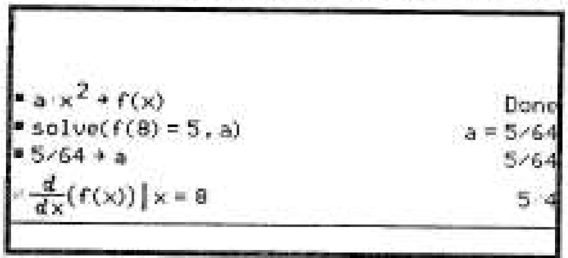
E. Un raisonnement d'expert avec trois morceaux

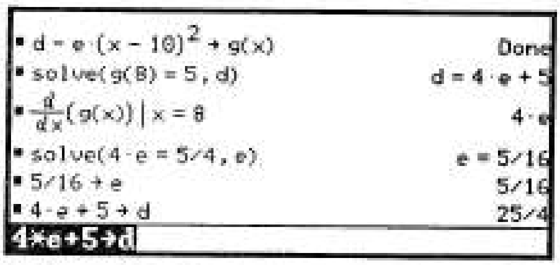
Nous savons que les contraintes signifient : continuité et dérivabilité en tous points et notamment aux 2 points de jonction des 3 parties que nous fixons arbitrairement aux valeurs x = 8 et x = 14 pour des raisons intuitives liées à la forme des courbes voulues. La fonction installée en y3 prend donc la forme ci-contre :

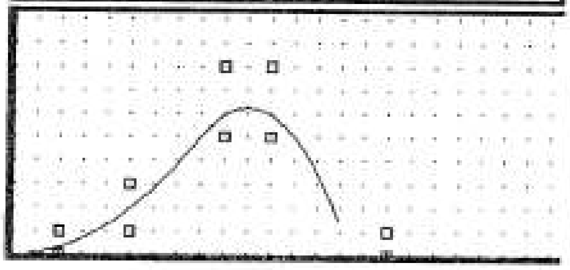


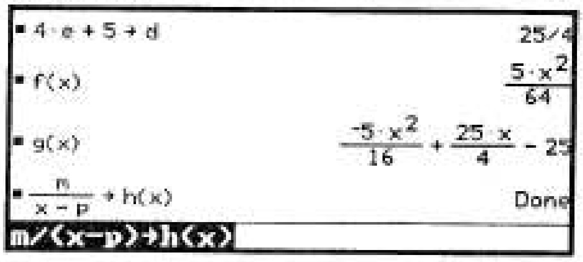
La première partie f (sur [0 ; 8[), est de la forme $y = ax^2$. La valeur de a se déduit de f(8) = 5 posé a priori par commodité. On obtient $f(x) = \frac{5x^2}{64}$. La deuxième partie g (sur [8 ; 14[) est choisie pour avoir son maximum en 10.

Le système {f(8) = g(8) ; f'(8) = g'(8)} conduit à fixer les paramètres d et e.

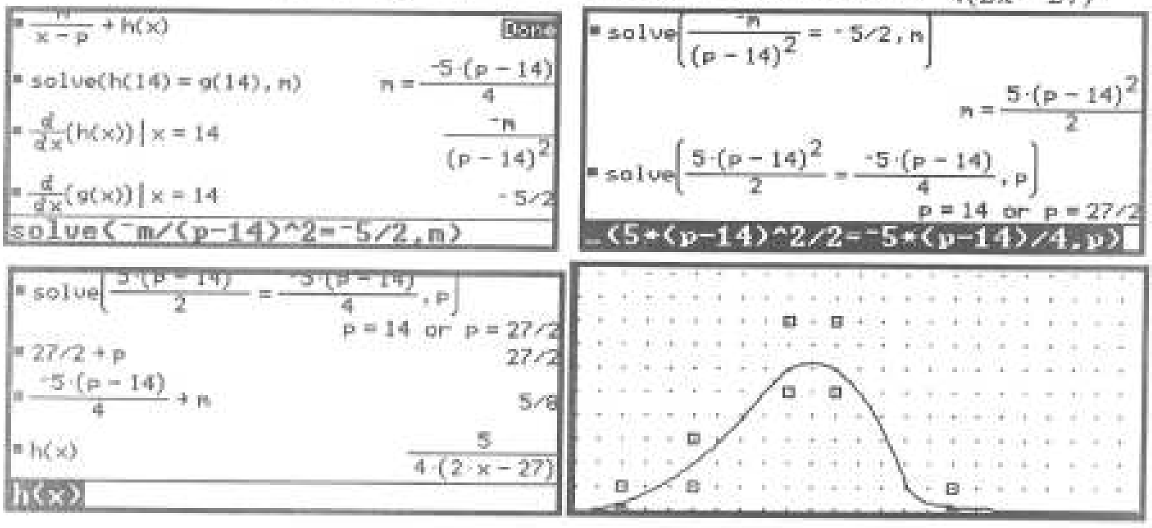




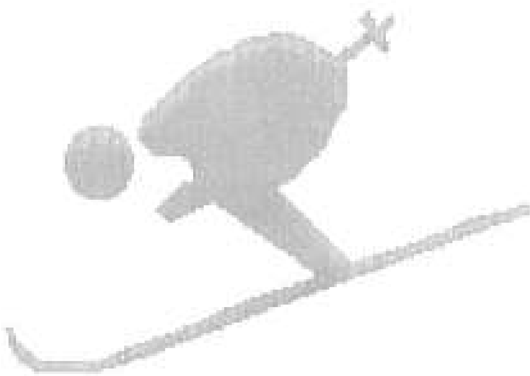




On obtient $g(x) = \dfrac{-5x^2 + 100x - 400}{16}$. La forme de la fonction h définie sur $[14\ ;\ +\infty[$ est du type « inverse » à une translation « horizontale » près. Il suffit de résoudre le système $\{h(14) = g(14)\ ;\ h'(14) = g'(14)\}$ qui conduit à $h(x) = \dfrac{5}{4(2x - 27)}$.



Il ne reste qu'à s'assurer du passage de la courbe entre les bornes souhaitées, ce qui ne présente aucune difficulté.



III.2. Suites de Feigenbaum

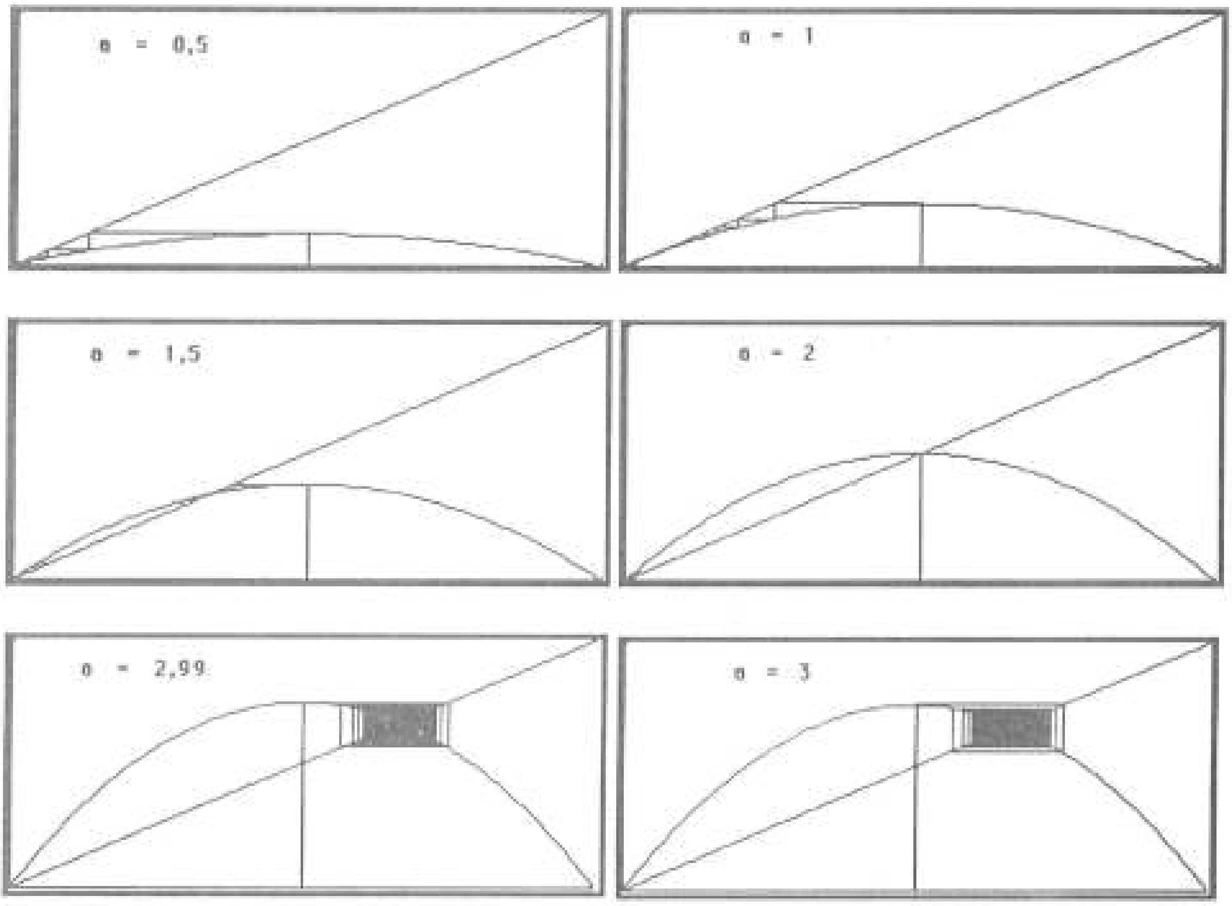
Ce problème a été présenté dans le chapitre consacré aux suites. Une étude plus complète des différents cas est abordée dans les pages qui suivent, le souci majeur étant celui de la convergence de ces suites et, accessoirement, de leur sens de variation.

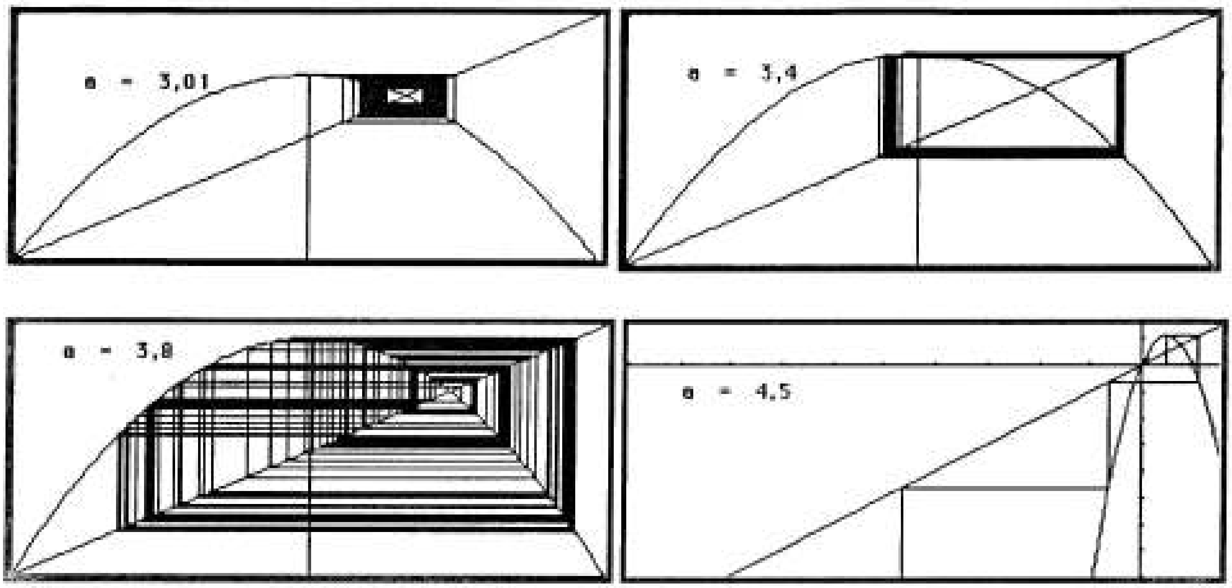
L'intérêt de ce problème réside dans l'utilisation permanente des résultats concernant les fonctions et dans la variété des situations rencontrées. Il ne peut être raisonnablement envisagé de faire cette étude qu'en utilisant une calculatrice symbolique, compte tenu de la lourdeur des calculs. Certaines parties sont simples et peuvent être traitées par tous les élèves de Terminale. D'autres nécessitent des raisonnements délicats. Le problème, ici, n'est pas posé de manière directement utilisable par les élèves. Le professeur pourra tailler l'ensemble à la mesure qui lui plaira.

Les suites sont définies par la relation de récurrence : $u_{n+1} = a.u_n(1 - u_n)$ où $a > 0$. Le premier terme u_0 sera, dans l'étude qui suit, fixé à $\frac{1}{2}$ afin d'éviter l'introduction d'un second paramètre.

Etude graphique.

Une première exploration des valeurs de a donne les résultats suivants :





Au vu des premiers termes, il semble qu'il y ait convergence pour $a \leq 3$. La convergence n'est pas évidente pour $a = 3{,}01$. En effet, il semble qu'il suffirait d'explorer plus loin les termes de la suite pour « refermer le rectangle ». On voit peut-être apparaître deux points d'accumulation pour $a = 3{,}4$ mais pour $a = 3{,}8$ le comportement de la suite est indéchiffrable. Pour $a > 4$, il semble qu'il y ait une limite infinie.

Des preuves ou des réfutations.

Si l'on étudie la fonction « support », $f(x) = a\,x\,(1 - x)$ de la suite u, l'étude de ses variations permet d'obtenir le tableau suivant :

x	0	0,5	1
f	0 ↗	a/4	↘ 0

et f possède comme points fixes : 0 et $\frac{a-1}{a} = c$, avec $f(x) - x = -a\,x\,(x - c)$.

De plus, si $u_0 = \frac{1}{2}$, on a $u_1 = \frac{a}{4}$.

```
■ Define u(n) = { 1/2, n = 0
                { a·u(n − 1)·(1 − u(n − 1)), else
                                              Done
■ Define f(x) = a·x·(1 − x)                   Done
■ zeros(f(x) − x, x)                  { 0  (a − 1)/a }
■ (a − 1)/a → c                           (a − 1)/a
(a-1)/a→c
```

Cas 1 : a < 1 → *suite décroissante, convergente vers 0*

Dans ce cas $c < 0$ et si $x \in [0 ; 0{,}5]$, $f(x) \in [0 ; 0{,}5]$ puisque $\frac{a}{4} < 0{,}25$ et donc $\frac{a}{4} < 0{,}5$.

Si $u_n > 0$, u_{n+1} aussi. Par suite, sachant que $u_0 > 0$, la suite est à termes positifs, majorée par 0,5.

Par ailleurs $f(x) - x < 0$ car $x - c > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite est décroissante, minorée par 0. Elle converge vers un point fixe de f, donc vers 0, puisque c est strictement négatif.

Cas 2 : $1 \leq a < 2 \rightarrow$ *suite décroissante convergente vers c*

Dans ce cas, $0 \leq c < 0{,}5$ et si $x \in [c\ ;\ 0{,}5]$, $f(x) \in [c\ ;\ 0{,}5]$ puisque $\frac{a}{4} < 0{,}5$. Le raisonnement précédent reste valide et la suite u est décroissante minorée par c.

x	0	c	0,5	1
f	0	c ↗	a/4 ↘	0

Donc la suite u converge vers un point fixe de f qui ne peut être que c.

<u>Remarques :</u> si a = 1 → la suite est décroissante convergente vers 0 (= c).
si a = 2 → la suite est constante et $u_n = 0{,}5$ (= c) pour tout n.

Cas 3 : $2 < a < 3 \rightarrow$ *suite non monotone convergente vers c*

Dans ce cas, $\frac{1}{2} \leq c < \frac{2}{3}$, comme $\frac{a}{4} > \frac{2}{3}$ et que $f(\frac{a}{4}) > \frac{1}{2}$, on obtient le tableau de variation ci-contre pour f.

x	0,5	c	a/4		1
f	a/4 ↘	c	f(a/4)	0,5	0

Notons que pour établir $f(\frac{a}{4}) > \frac{1}{2}$, si $2 < a < 3$, on pourra étudier la fonction de degré trois en a, $f(\frac{a}{4})$ ainsi que les racines positives de $f(\frac{a}{4}) = \frac{1}{2}$, a = 2 ou a = $1 + \sqrt{5}$ ($\approx 3{,}236$).

```
■ f(.5)                                        a/4
■ f(a/4)                            -a^2·(a - 4)/16
■ solve(-a^2·(a - 4)/16 = .5, a)
            a = -(√5 - 1) or a = √5 + 1 or a = 2
solve(-a^2*(a-4)/16=.5,a)
```

Le tableau de variations de f permet de conclure que si x < c alors f(x) > c et si x > c alors f(x) < c. Il s'ensuit que u_n est alternativement supérieur à c et inférieur à c. On posera alors $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

On a : $v_0 = \frac{1}{2}$ et $w_0 = \frac{a}{4}$.

On pose $g = f \circ f$ et donc $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.

Notons que $[\frac{1}{2}\ ;\ c[\xrightarrow{f}]c\ ;\ \frac{a}{4}] \xrightarrow{f} [f(\frac{a}{4})\ ;\ c[\subset [\frac{1}{2}\ ;\ c[$,

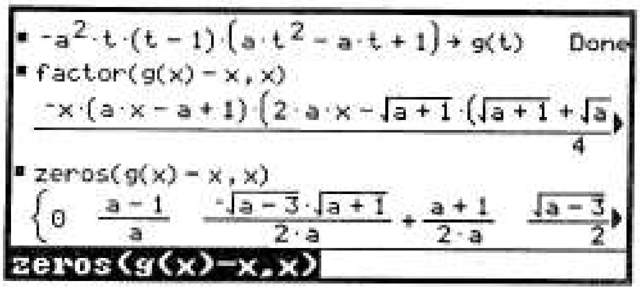
par conséquent $g([\frac{1}{2}\ ;\ c[) \subset [\frac{1}{2}\ ;\ c[$.

Puisque $v_0 \in [\frac{1}{2}\ ;\ c[$, par récurrence, il est clair que $v_n \in [\frac{1}{2}\ ;\ c[$ et v est bornée.

On étudie maintenant g(x) - x.
Quelques difficultés de gestion des variables et une expression factorisée difficile à lire imposent de chercher les zéros de g(x) - x

```
■ Define g(t)=f(f(t))                          Done
■ g(t)            -a^2·t·(t - 1)·(a·t^2 - a·t + 1)
■ -a^2·t·(t - 1)·(a·t^2 - a·t + 1) → g(t)      Done
■ factor(g(x) - x, x)
  -x·(a·x - a + 1)·(2·a·x - √(a+1)·(√(a+1) + √a▸
  ──────────────────────────────────────────────
                        4
factor(g(x)-x,x)
```

Il y a 4 zéros, dont deux complexes conjugués lorsque $a < 3$.[1]
Les 2 zéros réels sont, bien entendu, 0 et c.



On en déduit que :
$g(x) - x = - k(x).x.(x\text{-}c)$ où $k(x)$ est un polynôme du second degré à racines complexes positif sur $\mathbb{R}$ (on a exactement : $k(x) = a^2 x^2 - a(a+1)x + a + 1$).

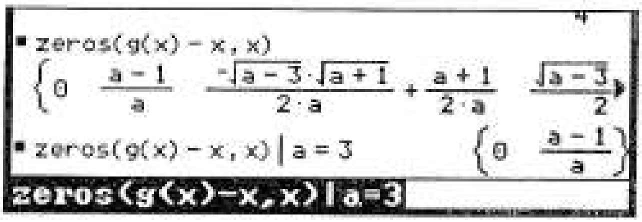
Ainsi, sur l'intervalle $[\frac{1}{2} ; c[$: $g(x) - x > 0$. D'où, $v_{n+1} - v_n > 0$.
La suite v est croissante, majorée, elle converge vers un point fixe de g donc vers c.

De façon analogue, $g(]c ; \frac{a}{4}]) \subset]c ; \frac{a}{4}]$ et $w1 \in]c ; \frac{a}{4}]$, donc w est bornée, décroissante et converge également vers c.

On en conclut que la suite u est une suite non monotone convergente vers $c = \frac{a-1}{a}$.

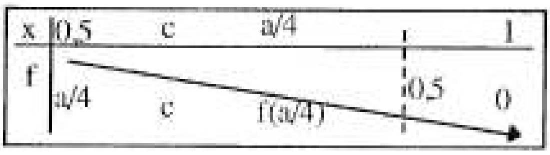
<u>Remarque</u> : si $a = 3$ $\to$ suite non monotone, convergente vers $\frac{2}{3}$ (= c).

Les zéros « supplémentaires » de $g(x) - x$ sont alors réels et égaux à $c = \frac{2}{3}$. On a $g(x) - x = -k.x.(x - c)^3$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$. Le raisonnement précédent et conduit au même résultat.



Cas 4 : $3 < a < 1 + \sqrt{5}$ $\to$ *suite non monotone à deux points d'accumulation*

Les résultats $g([\frac{1}{2} ; c[ ) \subset [\frac{1}{2} ; c[$ et $g(]c ; \frac{a}{4}]) \subset]c ; \frac{a}{4}]$ restent valables, le tableau de variations du cas n°3 étant le même pour $a < 1 + \sqrt{5}$. On le rappelle ici :



[1] *La calculatrice indique les solutions en fonction de a sans se soucier de la validité de l'écriture, c'est seulement si l'on se souvient que a - 3 < 0, que l'on peut intépréter deux des solutions comme complexes.*

Les résultats diffèrent des précédents seulement par la nature des 4 zéros de g qui sont maintenant tous réels.
Ici, $g(x) - x = -k.x.(x-c).(x-b_1).(x-b_2)$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{-\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}}{2\cdot a}+\frac{a+1}{2\cdot a}\to b1 \qquad \frac{-\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}}{2\cdot a}+\frac{1}{2\cdot a}+1/2$$

$$\frac{\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}}{2\cdot a}+\frac{a+1}{2\cdot a}\to b2 \qquad \frac{\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}}{2\cdot a}+\frac{1}{2\cdot a}+1/2$$

```
..*√(a+1)/(2*a)+(a+1)/(2*a)→b2
```

L'étude des variations de g, puis la recherche des positions relatives des réels b_1, c, b_2 et des extrema de g nous permettront de vérifier le caractère borné des suites v et w.

Les trois zéros simples de la dérivée de g donnent les abscisses de ses extrema.

$$\frac{d}{dx}(g(x)) \qquad -a^2\cdot(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot a\cdot x^2-2\cdot a\cdot x+1)$$

$$\text{zeros}(-a^2\cdot(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot a\cdot x^2-2\cdot a\cdot x+1), \blacktriangleright \qquad \left\{1/2 \quad \frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}} \quad \frac{-(\sqrt{a-2}-\sqrt{a})}{2\cdot\sqrt{a}}\right\}$$

```
..(2*x-1)*(2*a*x^2-2*a*x+1),x)
```

Dans la suite, on nommera d1 et d2 les zéros différents en général de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{-(\sqrt{a-2}-\sqrt{a})}{2\cdot\sqrt{a}}\to d1 \qquad \frac{-(\sqrt{a-2}-\sqrt{a})}{2\cdot\sqrt{a}}$$

$$\frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}}\to d2 \qquad \frac{\sqrt{a-2}+\sqrt{a}}{2\cdot\sqrt{a}}$$

On observe : $d1 < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < d2 < 1$

x	0		d1		0,5		d2		1
g(x)			a/4				a/4		
		↗		↘		↗		↘	
	0				g(0,5				0

Il s'agit de placer maintenant dans ce tableau les réels b_1, c et b_2.

Comparons d'abord d_2 et b_2 et pour cela cherchons les solutions de l'équation $d_2 = b_2$. La TI-92 ne les donne pas.
Nous élevons alors les deux membres au carré après leur avoir ajouté le nombre $\sqrt{a}.\sqrt{a-2}$.
L'expression est ensuite développée et après addition aux deux membres de $a^2 - 2a - 2$, on élève encore au carré.
Il apparaît deux éventuelles solutions : $1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$.

$$\text{solve}(d2 = b2, a) \qquad \sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-2}+1=0$$

$$(\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-2}+1=0)+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-2}\blacktriangleright \qquad (\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}+1)^2=a\cdot(a-2)$$

$$\text{expand}((\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}+1)^2=a\cdot(a-2))$$

$$2\cdot\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}+a^2-2\cdot a-2=a^2-2\cdot a$$

$$((2\cdot\sqrt{a-3}\cdot\sqrt{a+1}+a^2-2\cdot a-2=a^2-2\cdot a)-\blacktriangleright \qquad 4\cdot(a-3)\cdot(a+1)=4$$

$$\text{solve}(4\cdot(a-3)\cdot(a+1)=4, a) \qquad a=-(\sqrt{5}-1) \text{ or } a=\sqrt{5}+1$$

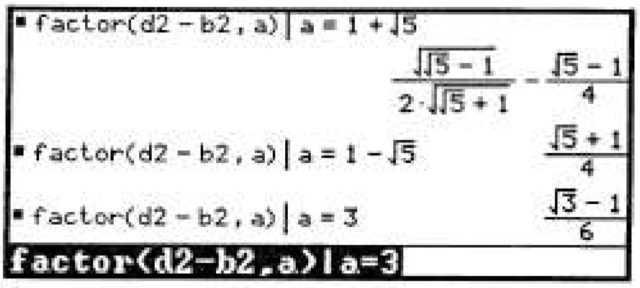
```
solve(ans(1),a)
```

On peut vérifier[1] que $d_2 = b_2$ lorsque : $a = 1 + \sqrt{5}$.

On observe que pour a = 3, $d_2 > b_2$.

La valeur $1 - \sqrt{5}$ est une solution parasite introduite par les élévations au carré.

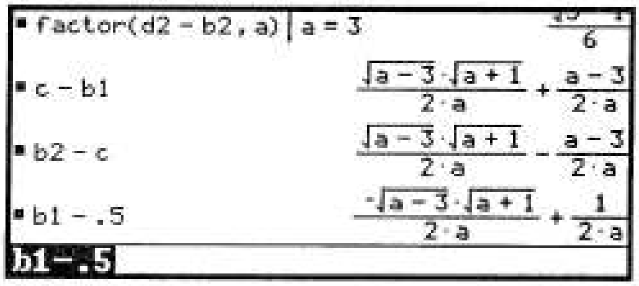
Pour des raisons de continuité, on en déduit que $\mathbf{d_2 > b_2}$ pour $3 < a < 1 + \sqrt{5}$



- c > b1 : le calcul ci-contre prouve que $c - b_1 > 0$.
- b2 > c : ce qui est moins évident et peut se prouver à partir du résultat de la TI-92 grâce à l'écriture :

$$b2 - c = \frac{\sqrt{a - 3}}{2a}\left(\sqrt{a + 1} - \sqrt{a - 3}\right)$$

qui est manifestement positif.



- $b_1 - 0{,}5 = \dfrac{1 - (a - 3)(a + 1)}{2a(1 + \sqrt{a - 3}\sqrt{a + 1})}$. Le numérateur (du second degré) ayant pour racines $1 + \sqrt{5}$ et $1 - \sqrt{5}$ est donc positif entre ces deux réels donc entre 3 et $1 + \sqrt{5}$.

Par conséquent $\mathbf{b_1 > 0{,}5}$.

On obtient donc les inégalités suivantes : $\mathbf{0{,}5 < b_1 < c < b_2 < d_2}$ qui nous suffisent pour préciser les variations de g.

Dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ d2]$, voici donc les variations de g.

x	1/2	b1	c	b2	d2
g	g(1/2) ↗	b1	c	b2	g(d2)

On sait que $v_0 = \frac{1}{2}$ donc $v_0 < b_1$. Le tableau précédent montre que $0{,}5 < x < b_1$ implique[2] $0{,}5 < g(x) < b_1$ ce qui prouve que la suite v est majorée par b_1.

De plus $g(x) - x = -k.x.(x - c).(x - b_1).(x - b_2)$. Sachant que $k > 0$, $x - c < 0$, $x - b_1 < 0$, $x - b_2 < 0$, il en résulte que $g(x) > x$ et donc, par récurrence, que la suite v est croissante.

La suite v est donc convergente vers l'un des points fixes de g qui ne peut être que b_1

[1] *L'expression de d2 - b2 donnée par la TI92 est bien nulle mais le logiciel ne reconnait pas l'égalité des deux formes.*

[2] *On se souvient que $g([0{,}5\ ;\ c]) \subset [0{,}5\ ;\ c]$*

Par ailleurs, $w_0 = \frac{a}{4} = f(\frac{1}{2})$. Sachant que $b_1 > \frac{1}{2}$ et que f est décroissante sur $[\frac{1}{2} ; 1]$, alors $f(\frac{1}{2}) > f(b_1)$ donc $w_0 > b_2$.

Egalement $g(w_0) > b_2$ puisque g est croissante sur $[\frac{1}{2} ; d_2]$ et que b_2 est un point fixe. On prouve ainsi que **la suite w est minorée par b_2, décroissante et donc convergente vers un point fixe de g qui ne peut être que b_2.**
Par conséquent, la suite u est non monotone, divergente, mais possède deux points d'accumulation b_1 et b_2.

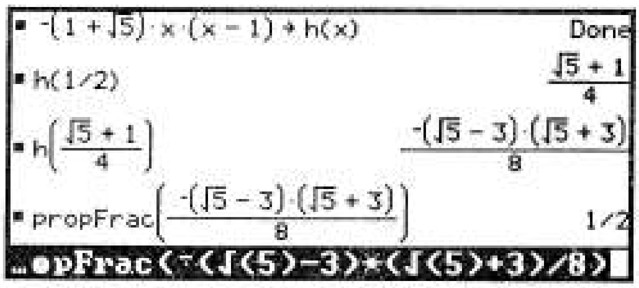
$$b_1 = \frac{a + 1 - \sqrt{a - 3}\,\sqrt{a + 1}}{2a} \quad \text{et } b_2 = \frac{a + 1 + \sqrt{a - 3}\,\sqrt{a + 1}}{2a}$$

<u>Remarque :</u> si $a = 1 + \sqrt{5} \rightarrow$ suite dont les termes sont alternativement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

On a appelé h la fonction f lorsque $a = 1 + \sqrt{5}$.

On vérifie que $f(\frac{1}{2}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ et $f(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}) = \frac{1}{2}$.

Les suites v et w sont constantes et les termes de la suite u valent alternativement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.



Cas 5 : $1 + \sqrt{5} < a < 4 \rightarrow$ *suite dont le comportement semble erratique*

Les positions relatives des nombres d_1, b_1, c, b_2, d_2 ne sont plus les mêmes. Les calculs effectués dans le cas n°4 peuvent être repris en partie. On s'y reportera.

- $d_2 < b_2$ pour $a > 1 + \sqrt{5}$
- $b_1 < c < b_2$ ici encore et $c > \frac{1}{2}$
- $b_1 - 0{,}5 = \frac{1 - (a - 3)(a + 1)}{2a(1 + \sqrt{a - 3}\,\sqrt{a + 1})} < 0$, le numérateur (du second degré) étant négatif pour $a > 1 + \sqrt{5}$.

- Les expressions $d_2 - c$ et $c - d_1$ sont positives, ce qui est visible après avoir factorisé $\sqrt{a-2}$. Donc c est compris entre d_1 et d_2.
- $g(d_1) - 0{,}5 = g(d_2) + 0{,}5 = \frac{a}{4} - \frac{1}{2}$
- $g(d_1) - 1 = g(d_2) - 1 = \frac{a}{4} - 1$
- $g(0{,}5) - 0{,}5 < 0$ car $x > 1 + \sqrt{5}$.

■ d2 − c $\qquad \dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-2} - a + 2}{2\cdot a}$

■ c − d1 $\qquad \dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-2} + a - 2}{2\cdot a}$

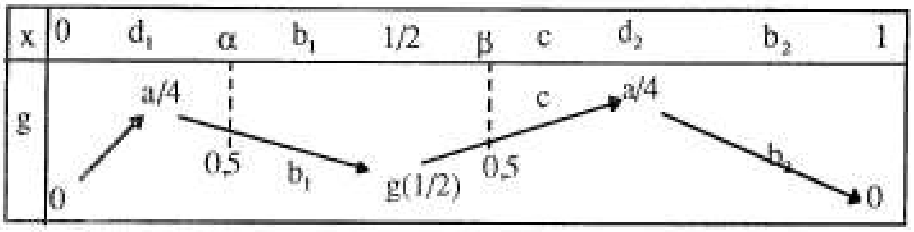
■ propFrac(g(d1)) $\qquad \dfrac{a}{4}$

propFrac(g(d1))

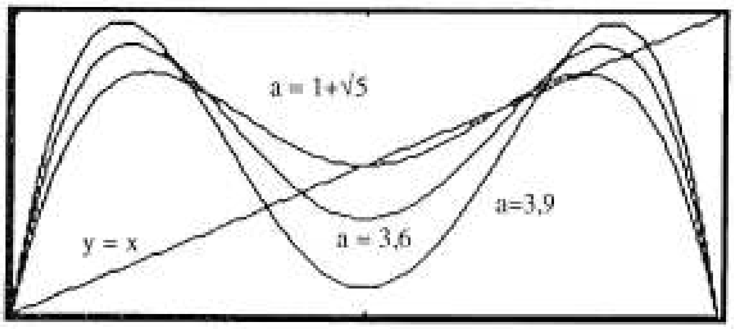
■ factor(g(.5) − .5, a)

$$\frac{^-(a-2)\cdot(a+\sqrt{5}-1)\cdot(a-\sqrt{5}-1)}{16}$$

Le tableau des variations de g est alors :



Les courbes représentatives de g sont les suivantes pour trois cas particuliers :

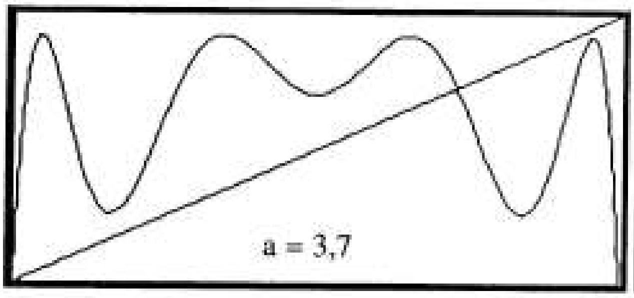


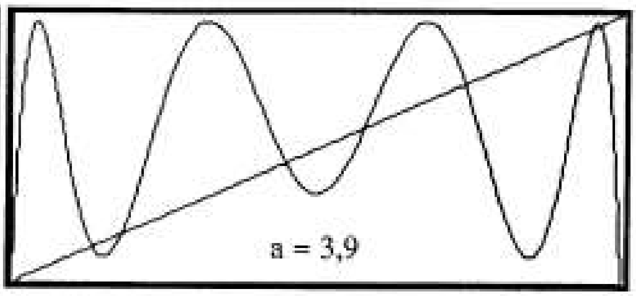
Le réel $\frac{1}{2}$ possède deux antécédents α et β dans $[d_1 ; d_2]$. Ces antécédents gênent considérablement la stabilité des intervalles : c'est-à-dire qu'il est difficile de trouver un intervalle I inclus dans [0 ; 1] sur lequel g soit monotone et tel que $g(I) \subset I$.

Peut-on faire apparaître un ordre général dans le désordre apparent de ce cas ? La tâche est énorme mais on peut cependant rechercher quelques situations particulières.

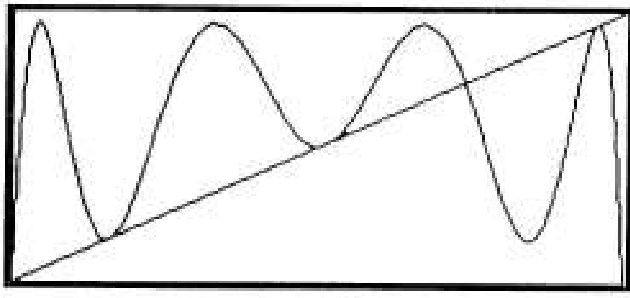
En voici une, à titre d'exemple, présentant une singularité.

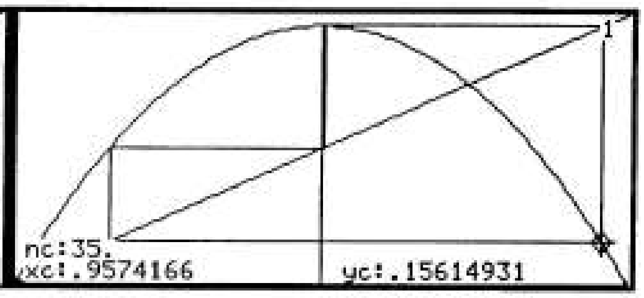
Envisageons la fonction $h = f \circ f \circ f$. Elle présente 7 extrema et coupe la droite d'équation $y = x$ en un point au moins et 8 au plus.





On peut alors penser qu'il existe une valeur de a telle que la courbe de h soit tangente à la droite d'équation y = x en plusieurs points. Après quelques tâtonnements, on parvient à a = 3,83 (on peut se poser la question d'une éventuelle valeur exacte réalisant ce cas) qui semble approximativement tangente en trois points. On peut alors s'attendre à une suite présentant trois points d'accumulation : l'un au voisinage de 0,5, un autre au voisinage de 0,16 et le troisième au voisinage de 0,96 correspondant aux coordonnées des trois points de « contact ».





La représentation en mode WEB de la suite u montre effectivement ces trois points très rapidement approchés. Il n'est d'ailleurs pas sûr que ce soient des points d'accumulation : il peut ne s'agir que de points déterminant des intervalles de stabilité !

Comme on peut le voir, les zones d'ombre sont très nombreuses pour : $a \in \left] 1 + \sqrt{5} \,;\, 4 \right[$. Le problème est encore largement ouvert !

<u>Remarque :</u> si a = 4 → suite nulle à partir du troisième terme.
Il est clair que $u_1 = 1$ puis que $u_2 = 0$ et sachant que $f(0) = 0$, on en déduit que la suite u est nulle à partir de u_2.

Cas 6 : a > 4 → *suite décroissante de limite* $-\infty$

Sachant que $u_1 = \frac{a}{4} > 1$, on déduit que $u_2 = f(u_1) < 0$.

De plus $f(x) - x = -a.x.(x - c) < 0$ pour tout $x < 0$.
Donc la suite u est décroissante à partir de u_2. Et elle est ainsi à termes négatifs à partir de u_2.
Posons, pour $n \geq 2$, $z_n = \frac{1}{4} a^{n-1}(a - 4)$. Cette suite a, une limite infinie pour a > 4.

Supposons que $\frac{-u_n}{z_n} > 1$ et exprimons $\frac{-u_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{-au_n(1-u_n)}{z_{n+1}} = \frac{-u_n}{z_n}(1 - u_n) > 1$ car c'est le produit de deux réels supérieurs à 1 pour $n \geq 2$. Donc, s'il existe un k pour lequel $-u_k > z_k$, on pourra en déduire que la suite (-u) a pour limite $+\infty$.

Exprimons $\frac{-u_2}{z_2} = \frac{a^2(a-4)}{16} \times \frac{4}{a(a-4)} = \frac{a}{4} > 1$. Par conséquent et par récurrence, on obtient que pour tout n entier supérieur à 2, $-u_n > z_n$ et donc que $-u_n$ a pour limite $+\infty$. D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

En conclusion.

Ce problème est loin d'être terminé, de nombreuses questions peuvent être posées. Par exemple :

Quels sont les comportements possibles de la suite pour $a \in]1+\sqrt{5}, 4[$?

Que se passe-t-il si le premier terme de la suite est un autre réel que 0,5 ?

Les valeurs séparant les différents cas restent-elles les mêmes ?

Il reste encore beaucoup à faire pour mettre un point final au problème !

III.3. Recherche de points fixes

On considère la suite d, de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, qui vérifie :
$d(1) = 0$;
$d(p) = 1$ pour tout nombre p premier ;
$d(p.q) = d(p).q + p.d(q)$.
Quels sont les points fixes de cette suite, c'est-à-dire les entiers qui vérifient $d(n) = n$?

On notera certaines ressemblances avec la dérivation des fonctions :
- ressemblance pour la dérivation d'un produit bien sûr ;
- ressemblance aussi pour l'image des objets élémentaires :

- la dérivée d'une constante est nulle, pour la suite d c'est l'image de 1 qui est nulle (l'ajout d'une constante de modifie pas les variations d'une fonction, la multiplication par 1 ne modifie pas la valeur d'un nombre) ;

- la dérivée de l'application élémentaire $x \to x$ est égale à 1, pour la suite c'est l'image de tout nombre premier qui est égale à 1 (la fonction identité permet par addition, multiplication, de retrouver tous les polynômes, de même tout naturel s'obtient comme produit de facteurs premiers).

Observer, analyser, accumuler des informations.

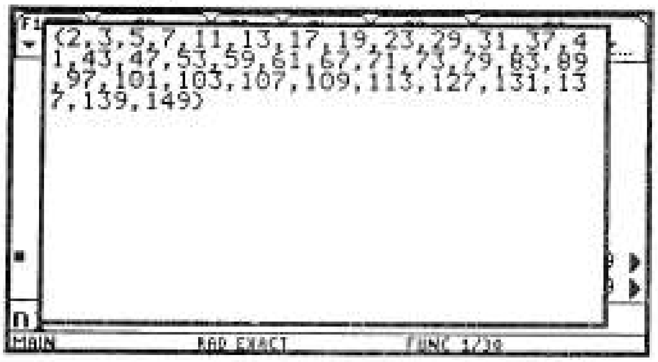
<u>On peut bien sûr calculer les premiers termes de la suite « à la main ».</u> On trouve, pour les premiers termes :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
d(n)	0	1	1	4	1	5	1	12	6	7	1	16	1	9	8	32	1	21	1

On trouve au passage un point fixe (4). Il est aussi assez simple d'établir :
- pour $n > 1$, $d(n) > 0$;
- $d(n) = 1$ implique n premier.

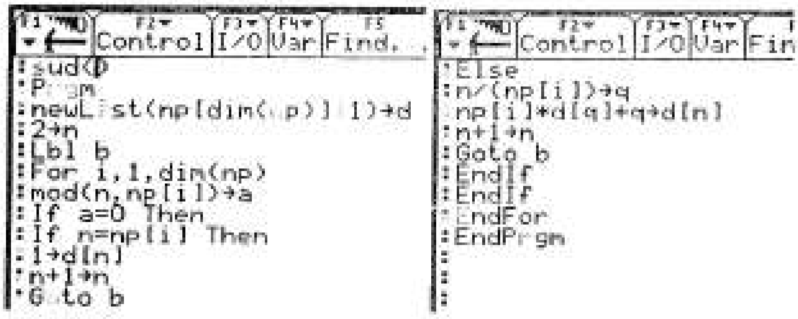
On ne peut pas encore affirmer l'existence de la suite pour tout n. Nous y reviendrons plus tard.

On peut aussi essayer de <u>calculer les d(n) de façon automatique</u> à l'aide d'un programme. Le programme pour la TI-92 qui est présenté, demande au préalable d'établir une liste des nombres premiers. On a appelé **np** la liste des 35 premiers d'entre eux (on aurait bien sûr pu en prendre plus).



Le programme figure ci-dessous : pour chaque entier n, on vérifie s'il existe un élément de la liste **np** qui est diviseur premier de n. Si n est premier, et donc égal à l'un des np[i], d(n) vaut 1. Sinon, si k ∈ **np** est un diviseur de n, l'écriture de n sous la forme k. n/k permet de déterminer d(n) par application de la formule.

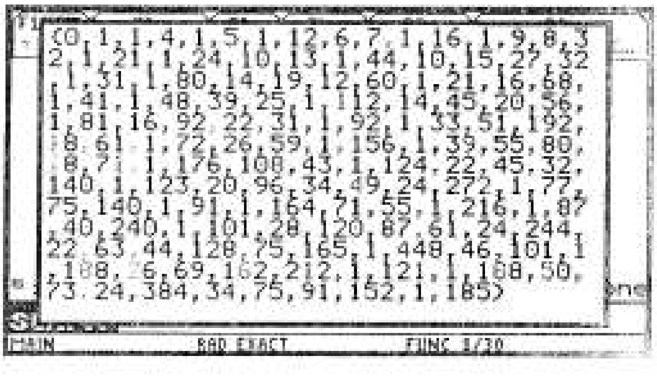
Cette construction de la suite fait appel à ses propres valeurs qui sont déjà calculées et stockées dans la liste d, ce qui évite de saturer la mémoire par un procédé plus directement récursif.



Il est important pour que le programme fonctionne normalement de prévoir la dimension (nombre de termes) de la suite d selon la liste **np** qui a été choisie. Dans le cas présent, où **np** comporte 35 termes, la liste d ne peut comporter que 150 termes. Le programme s'arrête ainsi avec le calcul de d(150) car 150 = 2 * 75 et d(75) étant déjà dans la liste d, le calcul de d(150) est possible. Mais 151 est un nombre premier lui aussi, alors le programme ne peut calculer d(151), l'instruction « If a = 0 » pour n'importe lequel des np[i] sera toujours sans réponse et le 151[ème] élément de la suite d serait par défaut pris égal à 0. C'est la même raison, valeur par défaut, qui fait attribuer 0 (mais c'est heureusement la bonne valeur) à d(1) puisque en initialisant n à 2, le premier terme calculé est d(2).

C'est l'instruction **newList(np[dim(np)]+1) → d** qui permet de fixer la dimension de la liste, on a np[dim(np)]+1 = np(35)+1 = 149 + 1 = 150.

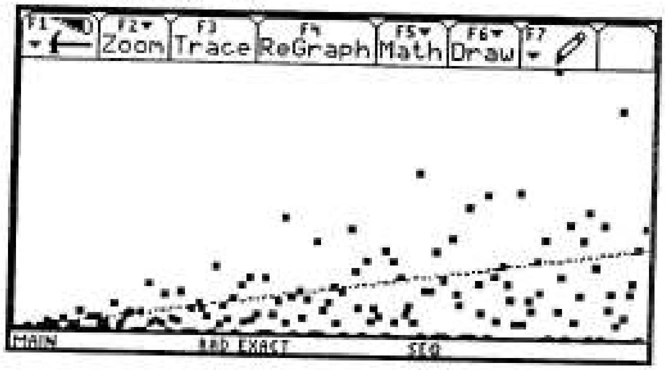
On obtient les valeurs ci contre pour la suite.

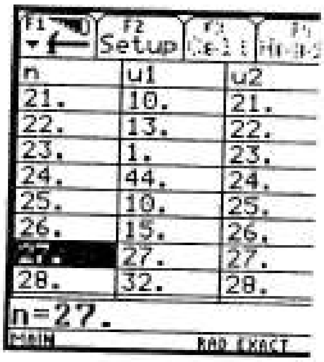


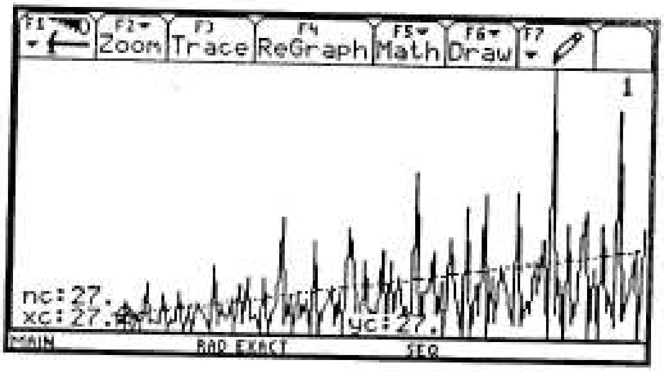
On peut obtenir une représentation graphique des termes de cette suite en utilisant alors le répertoire suite de la calculatrice, ainsi si u1(n) = d[n] et u2(n) = n, on peut observer la dispersion des termes de la suite autour de la droite y = x.

Il suffit de régler correctement la fenêtre.

Les points fixes de d sont situés sur la droite y = x.







On peut, soit observer la table de valeurs, soit utiliser trace (ci-dessus alors que les points sont reliés) pour déterminer les points fixes de d, on trouve deux points fixes de 1 à 150 qui sont 4 et 27. On peut observer que $4 = 2^2$ et $27 = 3^3$, mais cela donne-t-il une piste...

Preuves.

1. Une idée naturelle : décomposer un nombre en facteurs premiers.

<u>Premier pas</u> : si n est un nombre premier, il ne peut pas être un point fixe (en effet, on a alors $n > 1$ et $d(n) = 1$).

<u>Deuxième pas</u> : si n est le produit de deux nombres premiers p et q, on a alors :

$$d(n) = d(pq) = p+q.$$

et n est un point fixe de d si et seulement si on a $pq = p+q$ (*). Plusieurs possibilités alors.

- On peut procéder de façon **analytique**, en étudiant la fonction $x \to \dfrac{x}{x-1}$ pour $x \geq 2$ (puisque $p(q-1) = q$). Elle est strictement décroissante. D'où, pour $x > 2$, $f(x) < 2$. Comme on veut avoir simultanément x et f(x) entiers premiers, cela impose $x = f(x) = 2$.

- On peut procéder de façon **algébrique**, en divisant les deux membres de l'égalité (*) par pq. On obtient alors $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soit les deux fractions sont égales à $\dfrac{1}{2}$, soit l'une, par exemple $\frac{1}{p}$, est strictement inférieure à $\frac{1}{2}$. Mais alors $\frac{1}{q}$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $q < 2$, ce qui est impossible. D'où $p = q = 2$.

- On peut procéder de façon **arithmétique**, en écrivant l'égalité (*) sous la forme : $p(q-1) = q$. q premier et premier avec q-1 doit diviser p premier, d'où $q = p$, et $q-1 = 1$, c'est-à-dire $q = p = 2$.

Conclusion : le seul point fixe de d produit de deux facteurs premiers est $2.2 = 2^2$.

Troisième pas : si n est le produit de trois nombres premiers p, q et r, on a alors :

$$d(n) = d(pqr) = pq + pr + qr.$$

n est un point fixe de d si et seulement si on a $pqr = pq + pr + qr$ (**). L'étude de fonctions de deux variables étant plus délicate, tentons une généralisation des deux autres méthodes.

- La méthode **algébrique**. On ordonne $p \leq q \leq r$ (c'est-à-dire $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{r}$). De l'égalité (**), on tire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. De deux choses l'une : soit les trois quotients sont égaux à $\frac{1}{3}$, et le compte est bon ; soit $p < 3$ (i.e. $p = 2$). On doit avoir alors $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$; donc $\frac{1}{q} > \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $q = 2$ ou $q = 3$. Aucun r ne convient alors.

- La méthode **arithmétique**. On écrit (**) sous la forme $p(qr-q-r) = qr$; q et r étant premiers, on en déduit que $p = q$ ou $p = r$. Prenons par exemple $p = q$. Une autre transformation de (**) aboutirait à $r = p$ ou $r = q$. Pour finir, on a nécessairement $r = p = q$. Le seul point fixe de d produit de trois facteurs premiers est donc $3.3.3 = 3^3$.

Conclusion : le seul point fixe de d produit de trois facteurs premiers est $3.3.3 = 3^3$.

Et l'existence des points fixes 2^2 et 3^3 suggère une première généralisation...

2. Une première généralisation : tous les p^p, p premier, sont des points fixes.

En fait, on démontre un résultat plus général, par récurrence, sur n :

$$\text{pour tout p premier, } d(p^n) = n.p^{n-1}$$

(on retrouve une certaine parenté avec la dérivation...).

- c'est vrai pour $n = 1$: $d(p) = 1$.
- supposons la propriété vraie à un ordre n, i.e. $d(p^n) = n.p^{n-1}$.

On aura alors $d(p^{n+1}) = d(p.p^n) = p^n + pd(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1).p^n$, ce qui exprime bien la propriété à l'ordre n+1.

La proprié é est bien établie pour tout p premier et tout n entier non nul.

A quelle condition p^n est-il un point fixe de d ? Il faut et il suffit que $p^n = np^{n-1}$, c'est-à-dire que $p = n$.

On a ainsi prouvé que tous les entiers égaux à p^p (p premier) sont des points fixes de u. Mieux, on a prouvé que les seuls points fixes de d qui s'écrivent comme puissance d'un seul nombre premier sont les p^p.

Remarque : la ressemblance avec la dérivation doit être précisée ici ; bien entendu la dérivée de x^x n'est pas égale à x^x... Par contre x^n et sa dérivée nx^{n-1} coïncident bien pour x = n.

3. Une réciproque.

Il reste bien sûr à prouver qu'il n'y a pas d'autres points fixes s'écrivant avec deux ou plus de deux facteurs premiers distincts...
Soit n un point fixe de u, $n = p^a.Q$, p premier, p et Q premiers entre eux.
On a alors $d(n) = ap^{a-1}.Q + p^a.d(Q)$. Comme n est point fixe, on peut écrire :
$ap^{a-1}.Q + p^a.d(Q) = p^aQ$, d'où, après simplification : $aQ + p.d(Q) = pQ$.
On a ainsi $p.[Q-d(Q)] = aQ$. Comme p est premier avec Q, il divise a : a = bp. On a donc après simplification $Q-d(Q) = bQ$, c'est-à-dire $Q(1-b) = d(Q)$. Mais d(Q) est positif ! Donc b = 1 (c'est-à-dire a = p). D'où d(Q) = 0 et Q = 1. Pour finir :

Les seuls points fixes de d sont les p^p où p est premier.

4. Où l'on finit par où on aurait du commencer : les problèmes d'existence de la suite d.

Cette existence part naturellement de l'unicité de la décomposition d'un naturel en facteurs premiers :

$n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.....p_j^{a_j}$. En utilisant les résultats déjà obtenus, on peut écrire :

$$d(n) = p_1^{a_1}d(p_2^{a_2}.....p_j^{a_j}) + d(p_1^{a_1})p_2^{a_2}.....p_j^{a_j} =$$
$$p_1^{a_1}d(p_2^{a_2}.....p_j^{a_j}) + a_1.p_1^{a_1-1}.p_2^{a_2}.....p_j^{a_j}.$$

En reproduisant ce que l'on vient de faire, on obtient :

$$d(n) = a_1.p_1^{a_1-1}.p_2^{a_2}.....p_j^{a_j} + a_2.p_2^{a_2-1}.p_1^{a_1}.....p_j^{a_j} + ... + a_j.p_1^{a_1-1}.p_2^{a_2}.....p_j^{a_j-1}$$

Plus simplement écrit :

$$\frac{d(n)}{n} = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + ... + \frac{a_j}{p_j}$$

On peut imaginer alors une démonstration par récurrence, portant sur le nombre k de facteurs premiers entrant dans la décomposition d'un naturel :
- pour k = 1, la suite existe (l'image de tout nombre premier est unique, égale à 1) ;
- supposons que d(n) existe pour tous les nombres dont la décomposition comporte k (ou moins de k) facteurs premiers. Alors si n possède k+1 facteurs premiers, la définition d(uv) = ud(v) + vd(u) permet de se ramener à des produits de k facteurs premiers, et la

formule que nous venons d'établir nous permet d'affirmer que, quelle que soit les k facteurs premiers choisis dans la décomposition de n, on trouvera toujours la même valeur pour d(n).

Mais cette même formule nous permet une autre démonstration pour la recherche des points fixes de d. En effet n est un point fixe si et seulement si sa décomposition en facteurs premiers vérifie :

$$1 = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_j}{p_j}.$$

Cela impose d'abord $a_i \leq p_i$. On veut démontrer qu'en fait il n'y a qu'un nombre premier qui entre dans la décomposition de n. Cela nous conduit à donner un statut particulier au « premier » d'entre eux :

$\frac{a_1}{p_1} = 1 - \frac{a_2}{p_2} - \dots - \frac{a_j}{p_j}$ c'est-à-dire $\frac{a_1}{p_1} = \frac{m}{p_2 p_3 \cdots p_j}$ (après réduction au même dénominateur). On peut écrire cette dernière égalité sous la forme : $a_1 p_2 p_3 \dots p_j = m p_1$.

Comme p_1 est premier avec le produit $p_2 p_3 \dots p_j$, il divise nécessairement (lemme de Gauss oblige) l'entier a_1. Du fait de l'inégalité $a_i \leq p_i$, on peut en déduire nécessairement que $a_1 = p_1$. Mais alors $\frac{a_1}{p_1} = 1$; l'égalité $1 = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_j}{p_j}$ implique alors que $a_2 = a_3 = \dots a_j = 0$. Le point fixe n s'écrit nécessairement $p_1^{\,p_1}$, ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

Balacheff Nicolas. 1994. « La transposition informatique. Notes sur un nouveau problème pour la didactique ». Vingt ans de didactique des Mathématiques en France. La pensée sauvage Edition.

Bernard René, Faure Christian, Nogues Maryse, Nouazé Yvon, Trouche Luc. 1994. « Des activités mathématiques en classes scientifiques (1S et TS) ». IREM de Montpellier.

Bernard René, Faure Christian, Nogues Maryse, Nouazé Yvon, Trouche Luc. 1995. « Des fonctions et des graphes ». IREM de Montpellier.

Cornu Bernard. 1992. « L'ordinateur pour enseigner les mathématiques ». Puf.

Dahan-Dalmedico Amy, Peiffer Jeanne. 1986. « Une histoire des mathématiques, Routes et Dédales ». Editions du Seuil, Paris.

Faure Christian & Al. 1997. « Liaison Lycée-Université ». IREM de Montpellier.

Faure Christian, Nogues Maryse, Nouazé Yvon, Trouche Luc. 1993. « Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée ». IREM de Montpellier.

Johsua Samuel, Dupin Jean Jacques. 1993. « Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques », PUF.

Muller Jean Michel. 1995. « Ordinateurs en quête d'arithmétique ». La Recherche (spécial nombres), n°278.

Trouche Luc. 1996. « Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles - Côté cours, Côté jardin ». IREM Montpellier.

Trouche Luc. 1996. « Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation ». Thèse. Universite de Montpellier II.

Trouche Luc. 1997. « Calculatrices "symboliques", un défi mathématique ». CRDP Languedoc-Roussillon.

Trouche Luc. 1998. « Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques. 38 variations sur un thème imposé ». IREM de Montpellier.

TITRE
POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN ANALYSE AU LYCEE

AUTEURS
R. BERNARD - C. FAURE - M. NOGUES - Y. NOUAZE - L. TROUCHE

DATE
DECEMBRE 1998

EDITEUR
IREM DE MONTPELLIER

MOTS CLES
ANALYSE - CALCULATRICES GRAPHIQUES ET SYMBOLIQUES - LIMITES - CALCUL DIFFERENTIEL - CALCUL INTEGRAL - SUITES - FONCTIONS.

RESUME
Pour permettre une intégration raisonnée des calculatrices graphiques et symboliques dans le cours de mathématiques, il est nécessaire de repenser celui-ci aussi bien en terme de contenu que de pratique. D'autre part, la juxtaposition dans ces outils de différentes applications, de différents modes de calcul, peut induire des effets qu'il faut apprendre à mesurer.
Une étude des différentes notions du programme d'analyse au lycée avec cet outil (limites, calcul différentiel, calcul intégral, suites, fonctions) est proposée.

NOMBRE DE PAGES
203 pages

ISBN : 2-909916-32-4