INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Montpellier II

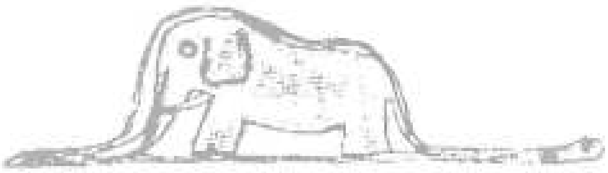
cc 040
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 02
☎ 04.67.14.33.83/84
fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
http://www.univ-montp2.fr/~irem

I. R. E. M. de Montpellier

Expérimenter et prouver

FAIRE DES MATHÉMATIQUES AU LYCÉE AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES

38 variations sur un thème imposé



Luc TROUCHE

et les élèves de la terminale 5S

M. Almairac, A. Arnoux, S. Bayle, F. Bécamel, A. Bialès, C. Bonnet, C. Bozonnat, J. Caramel, A. Charar, B. Chifolleau, O. Clua, A. de Bigault, C. Delarbre, G. Ethève, E. Franceschini, I. Fromental, V. Gerlotto, A. Guez, A.-S. Kaloghiros, S. Khalil, V. Lefèvre, S. Le Guillou, M. Leheup, A. Lewillon, M. Lieber, M. Lysowec, M. Mouls, O. Mouraille, D. Obono, X. Rivory, L. Rodriguez, P. Rouquette, P. Souteyrand, N. Téot, M. Tuszynska, D.-L. Versace, J.-F. Vincent.

Mai 1998

PRÉFACE

Dès l'apparition des premiers logiciels éducatifs (années 80), le réseau des IREM qui regroupe des enseignants du Secondaire et de l'Université a développé des recherches variées. L'objectif était dans un premier temps d'analyser ces nouvelles technologies afin d'identifier leurs potentialités et également les contraintes qu'elles présentaient pour l'enseignement des mathématiques. De nombreuses expérimentations ont été ensuite menées à partir de séquences d'enseignement intégrant ces nouveaux outils. Une mise en commun des résultats de ces recherches était assurée par la commission informatique du réseau des IREM, constamment en relation avec les concepteurs de logiciels éducatifs, puis de tuteurs intelligents et d'environnements interactifs d'apprentissage, grâce notamment à l'organisation de colloques.

Dans le cadre de cette interaction, le cahier des charges de ces environnements a pu souvent prendre en compte les remarques des utilisateurs potentiels (à savoir les enseignants) et ainsi développer des outils plus adaptés à l'enseignement des mathématiques. Au cours des quinze dernières années, le réseau des IREM a publié un grand nombre de brochures accompagnant d'une part la prise en main des logiciels et des calculatrices et présentant d'autre part des exemples de séquences d'enseignement accompagnées de commentaires pour faciliter l'appropriation et la mise en oeuvre de celles-ci par des enseignants.

Durant l'année scolaire 95/96 apparaissent les premières calculatrices graphiques, symboliques et géométriques qui intègrent deux logiciels (DERIVE et CABRI) qui avaient déjà fait l'objet de nombreuses recherches. Dès lors, la direction des nouvelles technologies (DISTN B2) du ministère de l'éducation nationale établit des contrats de recherche entre des équipes de recherche en didactique des mathématiques et des IREM afin de mener des recherches sur les conditions d'intégration de ces calculatrices dans l'enseignement des mathématiques et les modes d'appropriation de ces outils par les élèves. Des classes entières sont ainsi équipées, où chaque élève dispose d'une calculatrice pour la durée de l'année scolaire, des enseignants obtiennent des moyens horaires permettant des expérimentations dans un nouveau contexte, avec l'appui également de contrats de recherche locaux (CRDP de Montpellier).

L'université d'été de Rennes (Août 96) *"Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives dans l'enseignement des mathématiques"* organisée par la commission informatique des IREM a permis de faire une première synthèse des résultats de ces recherches, visant à développer une démarche plus expérimentale dans l'enseignement des mathématiques. Les actes de ce colloque, les rapports des recherches en didactique (DIDIREM à Paris VII, ERES à Montpellier 2, LEIBNIZ à Grenoble 1), la thèse de Luc Trouche (Montpellier 2), ainsi que plusieurs publications de l'IREM de Montpellier, nous ont apporté des résultats importants pour créer les conditions d'une intégration efficace de ces calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement. Ces recherches ont été présentées dans un colloque européen "Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques", organisé par l'IREM de Montpellier et la commission informatique des IREM, qui s'est tenu en mai 98 à la Grande Motte.

L'originalité de la présente brochure est due à la participation importante des élèves d'une classe expérimentale (malgré l'échéance très contraignante du baccalauréat) non seulement aux activités "obligatoires" organisées au sein de la classe, mais également aux sujets de recherche proposés par l'enseignant ou les élèves. Elle se manifeste dans la part importante qu'ils ont pris dans la rédaction de cette brochure, qui révèle pour la majorité d'entre eux une véritable adhésion à cette nouvelle organisation de l'enseignement, au delà de leurs réponses aux questionnaires divers (baromètres). La dynamique de recherche créée dans cette classe a non seulement induit une évolution du rôle que joue la calculatrice dans leur activité mathématique, mais a surtout été ressentie comme une ouverture sur ce que pouvaient être les "vraies mathématiques".

Même si cette classe peut difficilement être considérée comme un classe terminale standard, chaque enseignant pourra y puiser des idées de situations de recherche qu'il adaptera à sa propre classe. Les diverses expérimentations menées précédemment l'attestent, il est possible de susciter cette dynamique à des niveaux très variés.

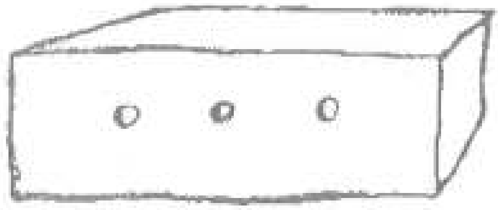
Comme l'écrit l'enseignant dans sa conclusion, *"ce que l'on perd (apparemment) en temps, on le gagne en profondeur de compréhension, c'est du temps gagné pour la suite"* !

Dominique GUIN
directrice de l'IREM de Montpellier

Introduction, côté Professeur

On ne connaît que les choses que l'on apprivoise, dit le renard.
Les hommes n'ont plus le temps de rien connaître.
Ils achètent des choses toutes faites chez les marchands.
Mais comme il n'existe point de marchands d'amis,
les hommes n'ont plus d'amis.
Si tu veux un ami, apprivoise-moi !

Antoine de Saint-Exupéry, Le petit Prince



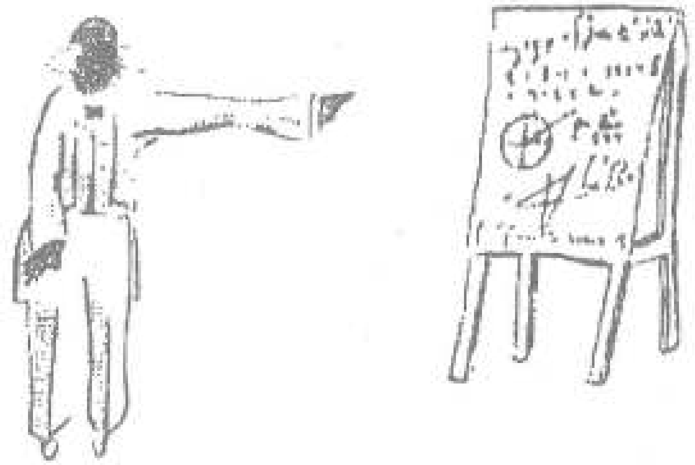
Après les "machines à calculer de bureau", les calculatrices scientifiques, les calculatrices programmables, les calculatrices graphiques, une nouvelle génération d'outils de calculs arrive dans les classes : des calculatrices dotées de logiciel de calcul symbolique et de logiciel de géométrie. Cette intrusion peut être considérée comme une concurrence déloyale qui fausserait les rapports entre le professeur de mathématiques et les élèves, ou au contraire comme une occasion de renouveler l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. C'est le deuxième point de vue qui a été choisi ici.

En quoi ces calculatrices peuvent-elles favoriser un tel renouvellement ?
- elles peuvent prendre en charge des calculs qui relevaient auparavant de la responsabilité des élèves (dérivées, limites, intégrales...) ;
- elles permettent de multiplier les points de vue sur les objets mathématiques (représentations graphiques, tableaux de valeurs, expressions symboliques, traitements statistiques...) et permettent ainsi un jeu de conjectures et de réfutations ;
- elles peuvent resituer les mathématiques comme une science expérimentale particulière où l'art de la raison est guidé par l'exigence de la preuve.

Ces potentialités sont cependant théoriques. Elles ne peuvent s'exprimer que si les outils de calcul ont été apprivoisés : *on ne connaît que les choses que l'on apprivoise* dit le renard de Saint Exupéry.

Qu'est-ce que signifie apprivoiser ? C'est une chose trop oubliée, dit le renard ; ça signifie "créer des liens".

Cet ouvrage repose sur le travail du professeur de mathématiques et des 37 élèves d'une classe de terminale S (spécialité mathématiques) du lycée Joffre de Montpellier pendant l'année scolaire 1997-1998. Tous les élèves de cette classe ont reçu, pour l'année, une calculatrice TI-92 pourvue d'un logiciel de calcul formel (Derive) et d'un logiciel de géométrie (Cabri).



Des liens sont établis :

- entre l'écran des calculatrices des élèves et un **écran témoin**, sur lequel est rétroprojeté une des calculatrices de la classe ;
- entre les élèves eux-mêmes : des binômes associant les élèves deux par deux sont constitués pour des travaux pratiques. Une heure par semaine, les élèves traitaient ainsi un sujet de recherche ;
- entre le travail clavier/écran et le travail papier/crayon : les travaux de recherche doivent déboucher sur des rapports écrits dans lesquels les différentes étapes sont détaillées ;
- entre des phases d'exploration, de conjectures, de preuve, de réfutation éventuelle. Les problèmes proposés favorisent une telle démarche de recherche ;
- entre le professeur et les élèves : cet ouvrage en porte témoignage. Certaines illustrations, certains textes sont produits par des élèves. Tout le reste repose sur le travail de l'année. Mis en forme par le professeur, il a été relu, corrigé, complété par les élèves eux-mêmes.

Il faut des rites. Qu'est-ce qu'un rite ? dit le petit prince.

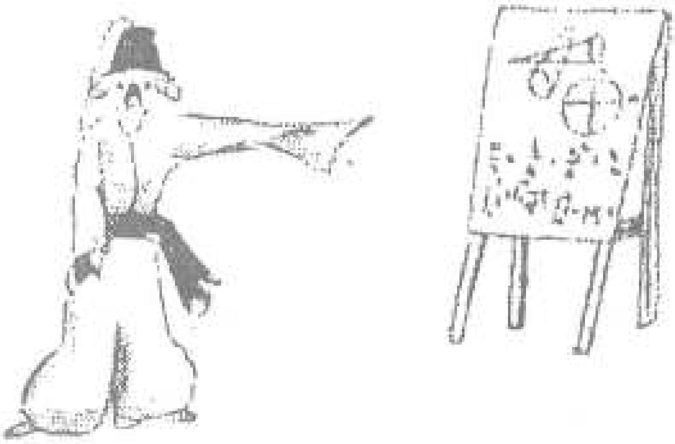
Une telle démarche, de type expérimental, est délicate à mettre en oeuvre dans une classe de terminale, sanctionnée par un examen très codifié. C'est pour cela que le travail de l'année combine des moments de natures différentes :

- chaque heure de cours repose sur une organisation particulière de la classe, un tableau, un écran, un rétroprojecteur, un **élève-sherpa**[1] utilisant la calculatrice témoin ;
- des moments différents sont distingués pendant l'heure, des moments où les calculatrices sont fermées, des moments où l'utilisation est guidée par la calculatrice témoin, des moments où l'utilisation est libre ;
- chaque semaine, un devoir-maison, choisi dans les annales du baccalauréat, permet de se familiariser avec l'épreuve de fin d'année ;

---

[1] Le mot est choisi en référence à la fois à l'homme qui porte les charges lors des expéditions himalayennes et aux diplomates qui servent de médiateurs lors des conférences internationales. Ce rôle est tenu à tour de rôle par tous les élèves de la classe.

- chaque semaine, une séance de TP permet de faire de la classe une petite communauté de recherche ;
- de temps en temps, est lancé un "défi mathématique". Il s'agit d'un travail facultatif, demandant un certain temps de réflexion. Des éléments de réponses sont communiqués, par leurs découvreurs, à la classe pour relancer la recherche ;



- des devoirs surveillés permettent, à intervalle de temps régulier, d'évaluer, pour le professeur et les élèves, les acquisitions et les lacunes. Exercices de style complexes, ils doivent porter à la fois sur des exercices "type bac" et sur des exercices liés à l'expérimentation en cours ;
- enfin des questionnaires permettent de recueillir le point de vue des élèves sur le dispositif général de travail.

Il est impossible de communiquer dans le cadre de cet ouvrage l'ensemble des documents produits cette année : il faudrait reproduire l'ensemble des cahiers de TP contenant les rapports de recherche des différents binômes, l'ensemble des éléments de solutions proposés à l'occasion des différents défis... Un choix a été fait, forcément partiel. On trouvera donc ici :

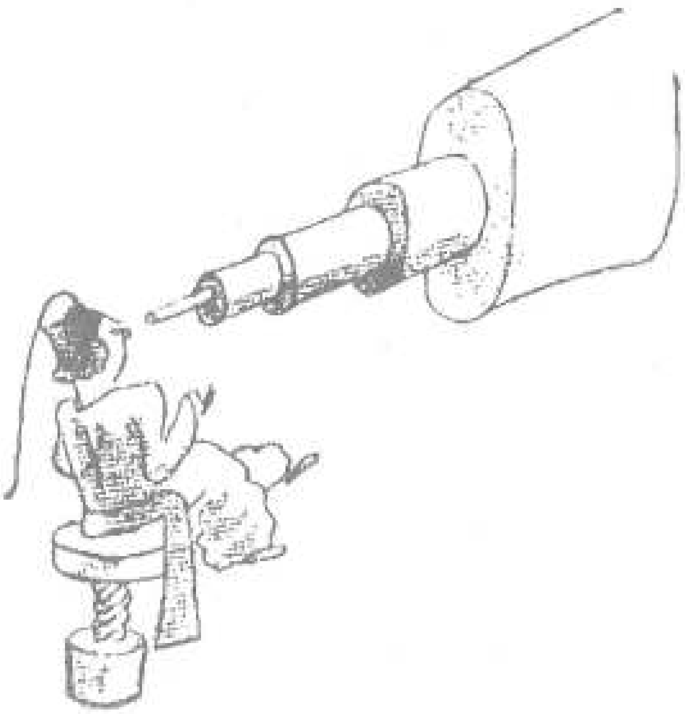
- un chapitre proposant **les énoncés des 14 premiers T.P.** de l'année, accompagnés d'éléments de réflexion ;
- un chapitre contenant **le texte des 5 défis** proposés cette année, avec des pistes de solutions proposées par le professeur ou par des élèves ;
- un chapitre intitulé **"pochette surprises"**, proposé par des élèves, correspondant à des découvertes personnelles ;
- **le texte des 6 premiers devoirs surveillés** [2], avec les problèmes posés par l'utilisation des instruments comme auxiliaires de résolution ;
- et enfin **le point de vue des acteurs,** à travers le bilan de questionnaires spécifiques à l'expérimentation en cours ou plus généraux (questionnaire ministériel sur les savoirs).

Voici mon secret. Il est très simple : on ne voit bien qu'avec le coeur. L'essentiel est invisible pour les yeux. L'essentiel est invisible pour les yeux, répéta le petit prince, afin de se souvenir.

[2] Pour pouvoir être édité avant le colloque de Montpellier de mai 1998 "Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques", cet ouvrage se limite aux documents réalisés avant la fin du mois de mars.

Dans toute entreprise, on peut distinguer un objectif prioritaire. Celui qui a présidé au travail de cet année est simple : il faut apprendre à voir au delà des apparences. Dans une civilisation - celle de la télévision- où domine l'illusion que "voir, c'est comprendre", on a voulu montrer que l'utilisation raisonnée des outils de calcul imposait :

- de ne pas multiplier les investigations au hasard, mais d'organiser un "plan de campagne" ;
- de ne pas croire que "voir de plus en plus près" (avec des zooms successifs) permettait toujours de "voir de mieux en mieux", mais de savoir prendre du recul, faire un pas de côté pour considérer différemment le même problème ;



- de ne pas considérer de façon isolée un résultat numérique, une représentation graphique, une expression symbolique, mais d'organiser une confrontation entre ceux-ci, d'organiser un aller-retour entre l'observation et les références théoriques déjà construites ;
- de ne pas considérer comme certain un résultat sur la foi de quelques observations concordantes, mais de tenter de valider chaque affirmation par une preuve solidement étayée ;
- de ne pas rester enfermé dans un face à face avec la calculatrice, mais de communiquer sous une forme compréhensible ses actions et de prendre en compte les suggestions des autres.

Que faut-il faire ? dit le petit prince. Il faut être très patient, répondit le renard (...) Le langage est source de malentendus.

Le travail engagé cette année n'a pas été facile : les sources d'inspiration, pour faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, ne sont pas nombreuses. Le résultat est donc sans doute très imparfait. Mais, ajouté aux autres travaux qui se sont menés dans cette direction, il contribuera, nous l'espérons, à un renouvellement positif de l'enseignement des mathématiques.

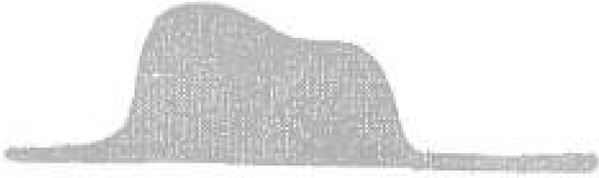
On pourra noter en particulier que plusieurs des activités proposées dans cet ouvrage (à l'occasion des TP ou des "défis") ont à voir avec l'arithmétique. Une bonne compréhension des nombres est en effet nécessaire pour distinguer les nombres eux-mêmes de leur représentation sur un écran. Or l'arithmétique revient au programme de la spécialité mathématique en terminale scientifique à la rentrée 1998. Les problèmes que l'on rencontrera dans cet ouvrage pourront ainsi être doublement utiles :

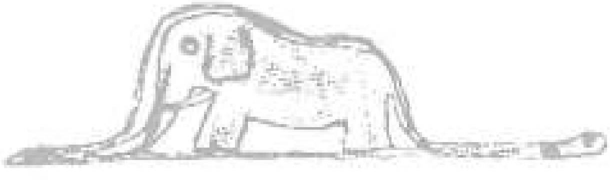
- pour illustrer le nouveau cours d'arithmétique ;
- pour prendre en compte les nouvelles calculatrices symboliques.

J'ai de sérieuses raisons de croire que la planète d'où venait le petit prince est l'astéroïde B612. Cet astéroïde n'a été aperçu qu'une fois, au télescope, en 1909, par un astronome turc.

Une introduction s'achève nécessairement pas des remerciements à ceux qui ont rendu cette expérience possible :

- E. Gaspari, directeur du CRDP de Montpellier, qui a mis à disposition de la classe 40 calculatrices TI-92 et une calculatrice rétroprojetable ;
- T. Murgier, IPR de Mathématiques, qui a mis en relation les différents protagonistes de cette histoire ;
- D. Guin, directrice de l'IREM de Montpellier, qui a édité cet ouvrage ;
- A. Hirlimann, de la DISTN B2 qui a attribué les heures permettant le suivi de l'expérience ;
- l'équipe Analyse de l'IREM (R. Bernard, C. Faure, M. Noguès, Y. Nouazé) qui a accompagné le travail mené cette année ;
- et enfin les élèves de la T5S du lycée Joffre qui ont accepté un surcroît de travail en acceptant l'idée que celui-ci serait payé d'un surcroît de connaissance. Il ont bien voulu croire que dans la caisse, il y avait bien un mouton, et dans le boa un éléphant... [3]





Quatre remarques avant de rendre sa liberté au lecteur :

- cet ouvrage peut se lire dans l'ordre ou le désordre, une combinaison harmonieuse de ces deux éléments constitutifs de la vie étant nécessaire à une bonne compréhension des choses. Le lecteur pourra se reporter à la table des matières à la fin de cet ouvrage pour choisir un itinéraire propre ;

[3] On retouvera d'ailleurs le thème de l'éléphant à d'autres endroits dans cet ouvrage. Un autre animal, l'âne, a eu aussi un certain succès. Les élèves ont en effet appris que, dans les oeuvres mathématiques de Bourbaki, les parties considérées comme faciles étaient appelées "l'âne qui trotte". Laurent Schwartz, dans son livre "Un mathématicien aux prises avec le siècle" écrit à ce propos : "(ces parties) faillirent même être indiquées par le symbole d'un âne, mais des scrupules et l'imprimeur nous retinrent". N'étant pas liés par les mêmes contraintes, nous n'avons pas hésité à intégrer l'animal dans les illustrations de cet ouvrage.

- cet ouvrage est destiné aux professeurs de mathématiques intéressés par l'enseignement dans les nouveaux environnements de "calculatrices symboliques". Il pourra être lu aussi avec profit par des élèves en fin de classe terminale en guise de synthèse de leur dernière année de lycée et de préparation aux études ultérieures. Il est conseillé de suivre les problèmes crayon en main et calculatrice à portée de main. Certains passages, simples, sont laissés à la charge du lecteur curieux. D'autres passages, plus raides, sont, pour le lecteur intrépide, précédés d'un petit cactus ;

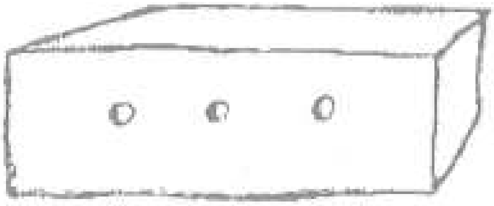
- il n'est question ici que de la calculatrice TI-92 dont disposaient tous les élèves de la classe. L'objectif de cet ouvrage n'est pas d'en donner un mode d'emploi. Pour comprendre l'ensemble des problèmes posés, il est cependant nécessaire de connaître un peu le fonctionnement de ce type de calculatrice. Cet apprivoisement pourra être réalisé avec profit par le lecteur consciencieux. Le lecteur qui possèderait une calculatrice symbolique différente devra effectuer les nécessaires adaptations ;

- cet ouvrage est en quelque sorte le prolongement des deux publications de 1996 du même auteur (cf. bibliographie). On y retrouvera quelques sujets de TP identiques, mais les éléments de réflexion qui les accompagnent diffèrent assez profondément.

Chaque jour j'apprenais quelques chose sur la planète, sur le départ, sur le voyage. Ça venait tout doucement, au hasard des réflexions...

Bon voyage !

Luc Trouche
Le 15 Avril 1998



Les citations en italique et les dessins de cette introduction sont extraits de :
Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*, Gallimard.

Répertoire des sigles

CRDP	: Centre Régional de Documentation Pédagogique ;
DISTNB	: Direction de l'Information Scientifique, des Technologies Nouvelles et des Bibliothèques (Ministère de l'Education Nationale) ;
IPR	: Inspection Pédagogique Régionale ;
IREM	: Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques ;
TI-92	: Calculatrice de Texas Instruments.

Introduction Côté Elèves

Après une introduction sérieuse « Côté Professeur », place aux élèves, ou plutôt aux « bêta testeurs » ![1]

TI, TI, TI,... Depuis quelques temps, un mot nouveau est sur la langue de tous les élèves (un nouveau virus ?). Certains en rêvaient, d'autres, récalcitrants à la technique, en font peut-être désormais des cauchemars. Une chose est sûre : les maths ont un aspect légèrement différent depuis l'arrivée de « la chose » dans la classe. Calcul symbolique, écran haut' déf', géométrie... et de nouveaux messages d'erreurs. Bref, du tout-en-un.

De l'avis des autres...

"En quelle classe tu es ?" "En TS 5" "Ah oui! la classe des calculatrices !"

Voici un échantillon de ce que nous entendons à longueur de journée. Parfois lancé avec compassion, parfois avec amertume. Toujours avec ironie. Mais si nous sommes perçus comme "la classe qui possède la TI-92", c'est bien parce qu'elle nous a hissés au rang de classe privilégiée aux yeux de nos camarades. Leurs regards en sont-ils devenus plus méfiants ? Non, plus curieux sans doute. Car si la TI-92 ne fait pas l'unanimité auprès de nos amis, elle les captive toujours par son apparente complexité et la

[1] Avis au lecteur : cette appellation n'est nullement péjorative (il n'est pas écrit « testeurs bêtas »). On désigne, en informatique, par « bêta testeur » une personne chargée de vérifier si un programme est au point et d'en trouver éventuellement les faiblesses, avant de le diffuser largement. Ainsi, gageons que notre expérience (et celles menées ailleurs) correspond à une phase d'adaptation des mathématiques à ce nouvel outil qu'est une calculatrice symbolique, avant de généraliser le phénomène, id est d'en faire profiter un plus grand nombre.

multiplicité de ses fonctions. De sorte que, sans prétendre la maîtriser jusqu'au plus profond de ses circuits, nous contribuons à lui donner sa part d'humanité.

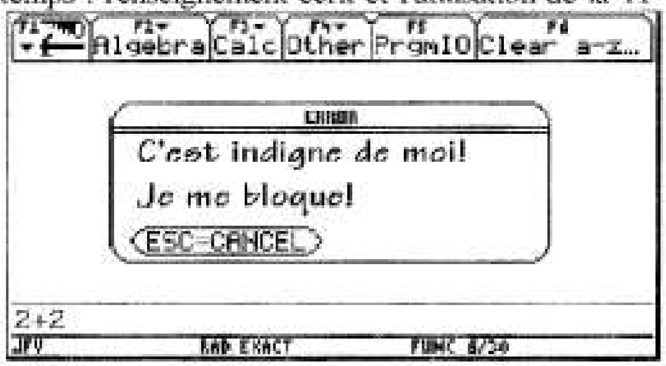
Et de l'avis de la TS5 !

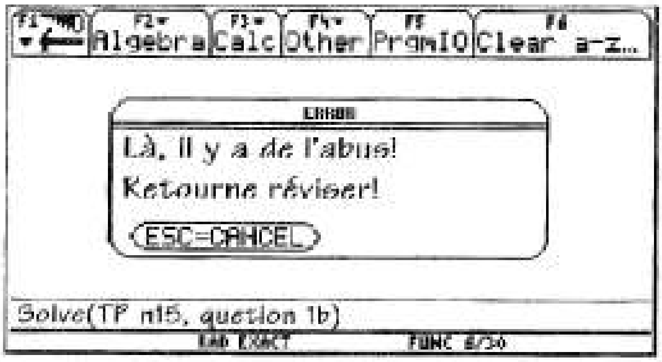
Nous avons la chance, élèves de Terminale scientifique n°5, de faire partie cette année d'un projet expérimental, grâce auquel nous avons bénéficié d'un enseignement particulier. En effet, des calculatrices TI-92 ont été prêtées à chaque élève. Si, il est vrai, certains considèrent ces calculatrices comme de "mini-ordinateurs", il ne faut pas tirer de conclusions trop hâtives.

Tout d'abord, celles-ci doivent être considérées comme un outil de travail faisant partie d'un enseignement original des mathématiques. Notre but, entendons nous bien, n'est pas de dire que cette calculatrice est "géniale", mais d'expliquer en quoi celle-ci nous a apporté quelque chose. Cette année, l'enseignement des mathématiques était organisé selon trois moments différents : les applications avec la calculatrice, le cours, et les séances de T.P.

Au début de l'année, nous avions tendance à nous servir de la calculatrice à outrance (applications graphiques ...) et donc à lui accorder trop vite notre confiance. Mais, les séances de travaux pratiques nous ont montré à nos dépens que nous avions tort. Celles-ci nécessite évidemment l'usage de la calculatrice la plupart du temps, mais il faut surtout accorder une place très importante à la réflexion, sinon nous ne pouvons arriver à rien hors de ces approfondissements du programme. C'est ainsi que d'échec en échec, de surprise en surprise, nous avons agréablement appris le véritable usage de cette calculatrice. En effet, chaque élève de notre classe sait maintenant quelle place accorder à son usage. Penser que l'on doit d'abord raisonner, réfléchir, et que la calculatrice est là pour nous donner des indices, des pistes de recherche face à certains problèmes, mais cela ne constitue en aucun cas des preuves. La calculatrice est donc un outil précieux si l'on s'en sert à bon escient. Voyons maintenant ce qu'elle nous a apporté en cours.

Les cours se font en plusieurs temps : l'enseignement écrit et l'utilisation de la TI-92. On s'en sert pour rendre plus réelle la question posée, pour avoir une première idée avant l'approche théorique. Celle-ci nous aide à mieux comprendre le cours, quitte à avoir une meilleure vision des problèmes, à les rendre "palpable". Pendant le cours, un élève tiré au hasard utilise une calculatrice associée à un rétroprojecteur. Grâce à tout ce dispositif, le cours et vraiment plus vivant : un dialogue est ouvert entre le professeur et les élèves, mais aussi entre les élève eux-mêmes. L'enseignement devient interactif et bien plus intéressant.





Enfin, n'oublions pas que nous entrons dans l'ère de l'informatique ; or dans certains lycées, les élèves ne bénéficient pas d'ordinateurs et cette calculatrice en est une approche simplifiée. Certains intéressés auront peut-être même envie, à la fin de cet apprentissage, d'aller explorer un peu plus loin, ce qui ne peut être que bénéfique. D'autre part, l'usage de telles calculatrices peut aussi être utile dans un enseignement approprié de physique par exemple.

L'avis du lecteur : expert, chercheur ou cancre ?...

Nous avons eu l'occasion, au cours de cette année, de nous confronter, à de multiples reprises, aux limites de la calculatrice (devoirs, défis, TP). Pour votre part, quelle idée avez-vous des calculatrices symboliques ?

1. *Vous vous trouvez devant un nouveau matériel scientifique, en l'occurrence une calculatrice symbolique.*
    a. Vous cherchez tout de suite des commandes/fichiers qui vous sont inconnus, quitte à chercher dans le vide...
    b. Vous essayez de trouver quelqu'un qui vous explique le fonctionnement de base, que ça aille vite !
    c. Vous vous lancez dans le mode d'emploi, cette nouvelle machine ne vous résistera pas !

2. *Vous étiez sur le sentier de la découverte de ce nouvel instrument, lorsque s'affiche un message d'erreur...*
    a. Vous consultez le mode d'emploi qui vous aide à cerner votre erreur, mais c'est fastidieux !
    b. C'est la 2ème fois, ras le bol, je verrai ça un autre jour...
    c. Entre de multiples tentatives et le mode d'emploi, vous finirez bien par y arriver. Après tout, c'est comme un jeu !

3. *On vous a demandé de trouver un encadrement à 10^{-5} près de la 1997ème solution de $\sqrt{\sqrt{x}} = 100\sin x$:*
    a. Cette calculatrice vous donnera une vision plus pratique du problème et permet un tâtonnement

b. Vive cette nouvelle calculatrice ! Vous comptez bien qu'elle vous résolve tout toute seule !
c. Cette calculatrice vous permettra de bien vérifier vos théories. De toute façon, elle ne vous aurait jamais donné de résultat précis.

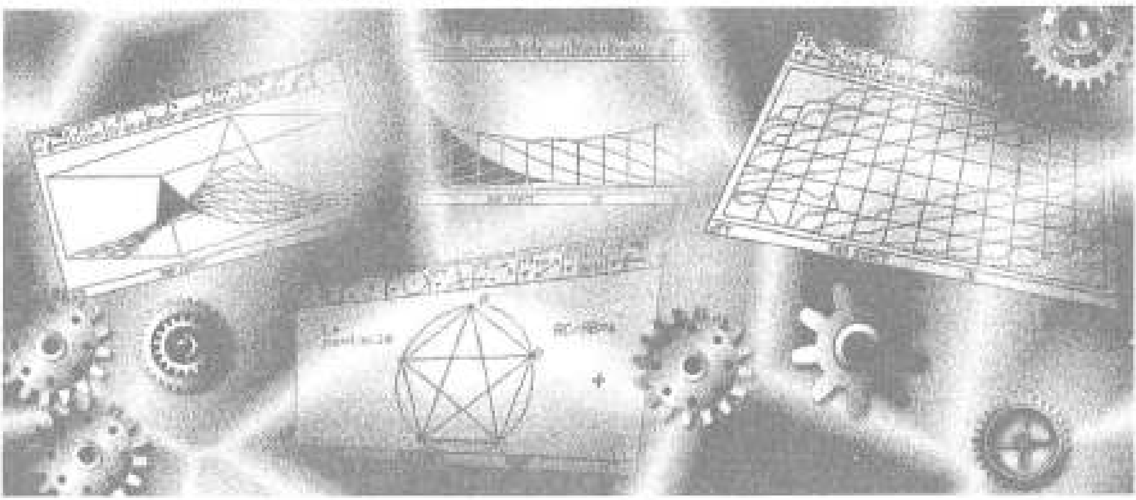
4. *Avez-vous déjà essayé de calculer* $\cos x = 100$ *?*
   a. Non, jamais ma calculatrice habituelle ne me donnerait le résultat !
   b. Oui, mais je ne sais pas pourquoi ma calculatrice est alors tombée en panne !
   c. Evident ! S=∅

Vos résultats :

- ***Une majorité de c :*** Vous serez vite un mordu de la TI-92. D'ailleurs vous avez compris que si elle offrait d'innombrables fonctions, elle avait aussi ses limites. En plus, elle n'est qu'un support, un outil pour les maths. N'oubliez pas qu'elle facilite les tâtonnement parfois très utiles pour démontrer des problèmes théoriques !

- ***Une majorité de a :*** Vous vous habitueriez vite à votre nouvelle machine. Le tout étant de l'apprivoiser, comme le renard du Petit Prince. Cela passe souvent par une lecture minimale du mode d'emploi. Après, elle deviendra un soutien non négligeable.

- ***Une majorité de b :*** Vous êtes décidément fâché avec la TI-92. Et non, elle ne fera pas le travail de réflexion à votre place, et pour vous aider, il vous faudra apprendre à vous en servir. Ca ne doit pas être dur. La preuve : on s'y est tous attachés, dans la classe, à cette « chose » !



Quel avenir pour les calculatrices ?

La pratique des mathématiques est profondément transformée avec l'arrivée de nouvelles machines, toujours plus puissantes, qui rendent concrète cette discipline. Comment se serait comporté un mathématicien, ne serait-ce qu'au début du siècle, confronté à un tel outil. On aurait pu présager une véritable révolution !

Parallèlement, de véritables portables fleurissent sur le marché (pour fortunés...), et la puissance de ces monstres devient paradoxalement plus difficile à contrôler, côté professeur (cf. interrogations écrites), et plus facile à prendre en main, côté élève, grâce à une interface de plus en plus conviviale.

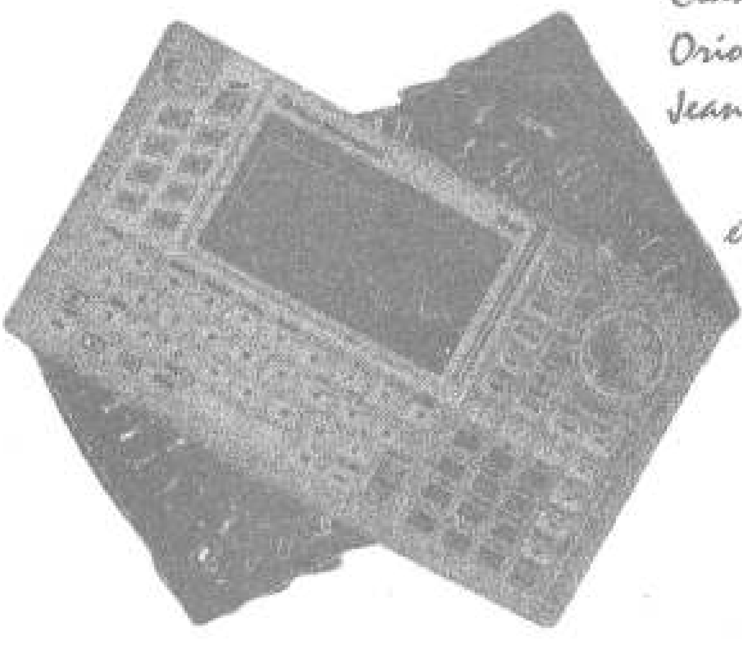
Ainsi, le travail de cette année avait pour but de montrer que le développement de cette puissance n'est pas une contrainte pour l'enseignement, mais au contraire la base de départ de nouveaux approfondissements du cours.

Quelque soit votre niveau, le contenu de cet ouvrage devrait vous intéresser, qu'il s'agisse des raisonnements pour les experts... ou des images pour les simples curieux !

Bon Voyage bis ! !

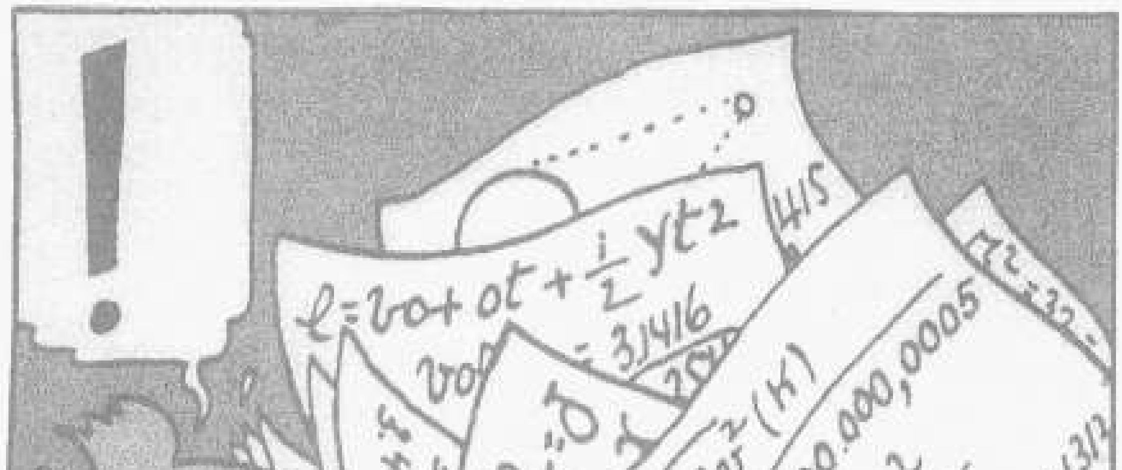
Murielle ALMAIRAC
Aurélie BIALES
Isabelle FROMENTAL
Claude BOZONNAT
Orion MOURAILLE
Jean-François VINCENT

et la TSS, suite !




tailles
modeles
coloris
raquettes éléphant
le choix
et
la garantie de ne pas
s'enliser
enfin il faut voir!
Calculs en vue !
Bon
voyage !

Travaux Pratiques



TP, MODE D'EMPLOI

Chaque semaine, pendant une heure (prise sur l'emploi du temps normal des élèves), a lieu une séance de TP. Les élèves sont regroupés par deux, ils disposent d'un "cahier de TP" sur lequel ils doivent consigner les différentes étapes de leur recherche.

L'essentiel n'est pas forcément de trouver, c'est de chercher, d'explorer différentes voies, de savoir reconnaître que l'on est dans une impasse, d'analyser les raisons de ses échecs, de savoir exploiter des résultats partiels pour formuler une conjecture... Cet esprit de recherche, que les élèves sont invités à mettre en oeuvre dès le début de l'année, est approfondi lors d'un TP particulier (le TP n°11) à propos d'une démonstration attribuée à Euler concernant le rapport entre le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre.

L'énoncé de chaque TP se compose d'une "question du jour" à aborder pendant la séance même et d'une "question du lendemain", facultative, dont le traitement est laissé à la libre initiative des élèves. Lors du TP n°1, un "mode d'emploi" est distribué aux élèves (cf. page suivante).

Les cahiers de TP sont ramassés pour être corrigés soit tout de suite après la séance, soit quelques jours après pour permettre la poursuite de la réflexion. Une "note" est attribuée (entre A et E), évaluant non pas les résultats eux-mêmes, mais l'investissement dans la recherche.

La question posée lors du TP est réabordée en classe de différentes manières : soit en présentant les différentes approches des binômes, soit en donnant des jalons pour réaborder la question sous un angle nouveau, soit en distribuant une correction intitulée "éléments de réflexion".

On trouvera dans ce chapitre les énoncés des 14 premiers TP, avec les "éléments de réflexion" qui ont suivi chacun d'entre eux. Pour la réalisation de cet ouvrage, chaque binôme a eu en charge la relecture de la correction correspondant à un de ces TP. Les noms des correcteurs sont indiqués au début de chaque TP.

Ces éléments de réflexion ne prétendent pas être exhaustifs. Il existe probablement d'autres façons d'envisager les problèmes présentés ici. Nous faisons confiance aux lecteurs imaginatifs pour nous communiquer leurs idées (et apporter d'éventuels rectificatifs, pour des erreurs ayant échappé aux correcteurs pourtant scrupuleux...). Ceci permettra d'enrichir une nouvelle édition de cet ouvrage !

Le mode d'emploi d'un TP

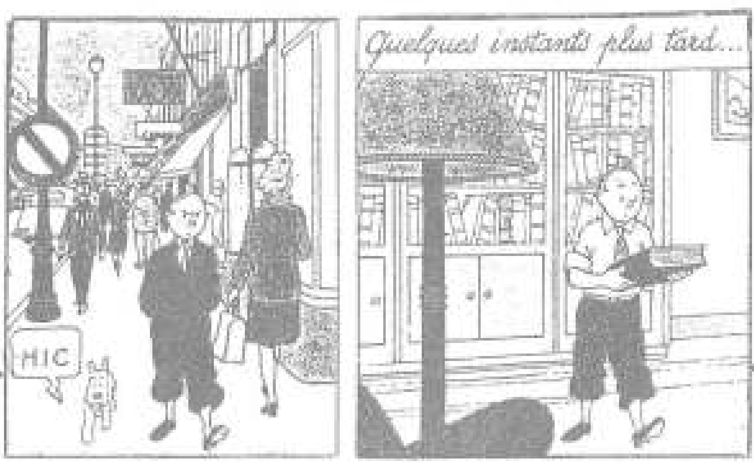
- il s'agit d'aborder la question du jour dans l'esprit d'une recherche mathématique. L'essentiel est donc ici la réalisation d'un rapport de recherche, dans lequel on notera avec soin les pistes empruntées (même celles qui s'avèrent être des impasses), les méthodes envisagées, les outils choisis (si la calculatrice est mise à contribution, on décrira les manoeuvres exécutées) ;

- si on trouve la réponse, tant mieux. Sinon, la recherche n'aura pas été pour autant inutile ! On apprend autant de ses succès que de ses échecs. Ce qui sera évalué, c'est donc plus la pertinence des méthodes mises en oeuvre que le résultat final ;

- la rédaction du rapport de recherche doit porter la trace des recherches. Il ne doit pas être conçu comme un devoir d'examen, parfaitement lisse. Cependant, ce rapport écrit doit rester lisible !

- le travail dans le binôme nécessite une collaboration, une mise en commun des idées, un partage éventuel des tâches. Bref, une entreprise d'équipe. Éviter la spécialisation à outrance (du genre : l'un bricole la calculatrice, l'autre écrit dans le cahier). Envisagez une rotation des tâches !

- la "question du lendemain" dépasse en général le cadre du TP. Bien entendu, si la "question du jour" a été traitée en 30 mn (ce qui serait assez étonnant), la "question du lendemain" peut être abordée... Sinon, elle servira à alimenter la réflexion du week end. Ce travail est facultatif : il passe après le travail obligatoire (les leçons, le devoir du lundi, etc.). C'est en quelque sorte un travail pour le plaisir...



TP N°1

Conventions :	- les menus et commandes de la TI-92 seront indiqués dans tous les documents en *italique* ; les touches de la TI-92 sollicitées seront indiquées en <u>souligné</u> ; - le symbole ◆ représentera la touche verte communément appelée "diamant".
Rappels :	- le raccourci clavier <u>2nd</u> <u>W</u> permet d'obtenir la fonction "factorielle" ; ainsi 5! s'obtient en composant <u>5</u> <u>2nd</u> <u>W</u>. En cas d'oubli de ce raccourci bien commode, on peut toujours retrouver "factorielle" dans le menu *math*, sous-menu *probability* ; - le raccourci <u>◆</u> <u>Enter</u> permet d'obtenir un calcul approché en notation scientifique.

La question du jour

Quel est le nombre de zéros qui se trouvent à la fin de l'écriture décimale des nombres suivants : 10!, 100!, 1000!, 1997! ?

La question du lendemain

Soit n un nombre entier, on peut définir (théoriquement) une suite u(n) égale au nombre de zéros qui se trouvent à la fin de l'écriture de n!. Pouvez-vous écrire pour votre calculatrice une définition de cette suite qui permette d'obtenir directement les réponses à la question du jour et plus généralement qui permette de calculer u(n) en fonction de n ?

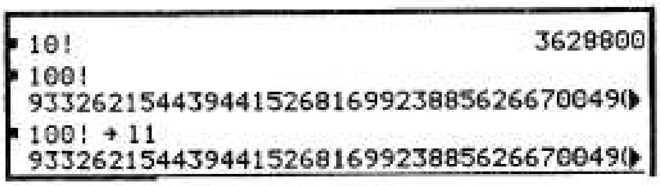
ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°1

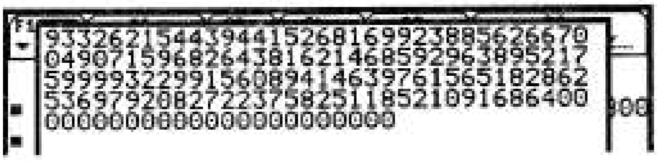
Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Audrey Arnoux et Alex Guez.

Première approche

On peut commencer naïvement par tenter de traiter les questions posées avec la seule calculatrice. Pas de problème pour 10! : ce nombre ce termine par 2 zéros (cf. écran ci-dessous). Une remarque immédiate, concernant la notation : dans tout problème de mathématique, on a intérêt à nommer ce que l'on recherche, c'est-à-dire à choisir une notation simple pour la (ou les) inconnue(s) (x pour une équation par exemple). Cette notation doit contenir en elle-même les relations de dépendance avec les éléments du problème. Voilà pourquoi la "question du lendemain" suggère d'appeler u(n) le nombre de zéros qui se trouvent à la fin de l'écriture de n!.

Cette notation permet une économie d'écriture : u(10) = 2.

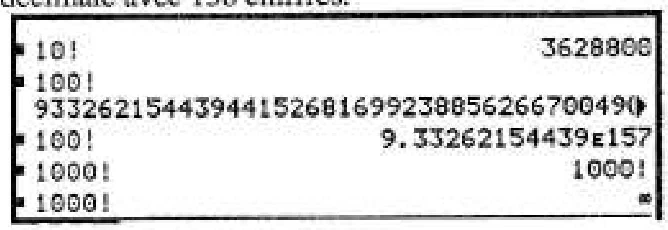




Pour u(100), la calculatrice donne aussi la réponse ; c'est un peu plus difficile à lire, il faut se déplacer avec le curseur et compter. La lecture est facilitée si on stocke le nombre 100! dans une liste (l1 par exemple). Il suffit d'aller alors récupérer le contenu de l1 dans le répertoire *Var-Link* via la commande *F6* (*Contents*, i.e. contenu). On peut voir ainsi ci-contre 100!.

Le comptage donne u(100) = 24.

Attention : l'écriture scientifique de 100!, donnée par la TI-92 si on demande un valeur approchée via le raccourcis clavier ◆Enter (cf. ci-dessous), ne donne pas d'indication sur le nombre de zéros, mais simplement sur l'ordre de grandeur de 100! c'est-à-dire, comme il s'agit d'un nombre entier, sur le nombre de chiffres qu'il comporte : 100! s'écrit en écriture décimale avec 158 chiffres.



Quant à 1000!, la calculatrice se contente de retourner la question (en mode exact) et l'assimile à ∞ en mode calcul approché (ce qui signifie simplement que cela excède ses possibilités de calcul)[1].

Répondre aux questions posées par l'énoncé du TP suppose donc une réflexion, un détour théorique. Plusieurs pistes sont possibles.

---

[1] Petit complément théorique : peut-on avoir une idée de l'ordre de grandeur de 1000! ? Un mathématicien anglais, Stirling (1750), a démontré que n! était "équivalent" à la suite $v(n)=\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{v(n)} = 1$. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de 1000!, on peut calculer le logarithme décimal de v(1000) : $\log(v(1000)) = \frac{1}{2}\log(2000\pi) + 1000\log\frac{1000}{e}$.

Une valeur approchée en est 2567. Ainsi 1000! est de l'ordre de 10^{2567} ; cela excède bien les capacités de calcul de la TI-92, qui sont de l'ordre de 10^{999}.

Pour aller plus vite

On a pu constater, dès le calcul de u(100), que le comptage des zéros finaux était assez pénible. On peut faciliter la lecture en divisant 100! par les puissances de 10 successives.

$\frac{100!}{10^{24}}$ est entier, $\frac{100!}{10^{25}}$ ne l'est pas (comme en témoigne le trait de fraction ci-contre). Donc u(100) = 24.

```
100!
────
10^24
93326215443944152681699238856266700490▸
100!
────
10^25
466631077219720763408496194281333502 4▸
```

Le nombre de zéros cherché est ainsi exactement p, la plus grande puissance de 10 telle que $\frac{100!}{10^p}$ soit entier. On peut éventuellement réaliser un programme qui permette de déterminer $u(n) = \max\{p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{100!}{10^p} \in \mathbb{N}\}$.

On pourra lire ci-dessous un exemple d'un tel programme (réalisé par Alex Guez) :

- on définit une variable locale j (locale signifie qu'elle n'existe que pour la durée d'utilisation du programme : elle ne peut donc pas entrer en conflit avec d'autres variables définies par ailleurs ; il en est de même d'ailleurs pour n, même si n n'a pas été défini ainsi) ;
- la variable est initialisée par (-1) ;
- une boucle est alors exécutée : on divise n par 10, puis le résultat par 10, etc. tant que le résultat est entier (c'est-à-dire que *fpart(n)*, égale à la différence entre le nombre et sa partie entière, est nulle) ;
- à chaque boucle, on ajoute 1 dans la variable j.

A la fin du programme, le contenu de la mémoire j est donc très exactement égal au nombre de zéros terminant l'écriture décimale de l'entier n, appelé par le programme zero(n).

On retrouve ainsi ci-contre zero(10!) et zero(100!) déjà repérés.

Un problème pour zero(1000!) et pour zero(π) : on trouve -1.

```
F1      F2▾     F3▾ F4▾ F5      F6▾
▾       Control I/O Var Find... Mode
:zero(n)
:Func
:Local j
: -1→j
:While fPart(n)=0
:n/10→n
:j+1→j
:EndWhile
:EndFunc

▪ zero(10!)        2
▪ zero(100!)      24
▪ zero(1000!)     -1
▪ zero(π)         -1
```

La raison en est assez simple :

- pour zero(π), avant même de faire la première boucle, le logiciel constate que *fpart(π)* ≠ 0. Donc le programme s'arrête là, et la calculatrice affiche le contenu initial de la variable locale j, c'est-à-dire -1 ;
- pour zero(1000!), la calculatrice doit évaluer *fpart(1000!)*. Comme elle ne connaît pas ce nombre, elle répond qu'il n'est pas égal à 0. Donc, comme pour π, le programme s'arrête, et le contenu initial de j est affiché : -1.

Il est possible de modifier cle programme pour bénéficier de réponses plus cohérentes. Le programme ci-contre permet d'évaluer une valeur approchée de n. Si celle-ci est "+∞", la réponse proposée sera alors "dépassement de capacité".

```
:nzero(n)
:Func
:Local j
: -1→j
:If approx(n)=∞ Then
:"depassement de capacite"→j
:Else
:While fPart(n)=0
:n/10→n
:j+1→j
:EndWhile
:EndIf
```

Nous pouvons ci-contre contrôler l'exécution du programme :

- réponses correctes pour 12 et 200! ;
- π n'est pas entier : on retrouve la réponse -1 du précédent programme ;

```
nzero(12)                                  0
nzero(π)                                  -1
nzero(1000!)
               "depassement de capacite"
nzero(200!)                               49
nzero(300!)                               -1
300!                       3.06057512216E614
```

- 1000! est évalué en valeur approché par la calculatrice comme "∞" ; la réponse affichée est donc "dépassement de capacité" ;
- un problème apparaît pour 300! : ce nombre est trop grand pour être évalué exactement par la calculatrice (elle l'assimile à un nombre non entier, d'où la réponse -1), et le nombre est trop petit pour être assimilé à +∞ (c'est à partir de 10^{999} que la calculatrice fait cette confusion regrettable).

<u>Bilan de cette première programmation de la suite</u> : ce programme permet d'aller plus vite dans les calculs des premières valeurs de u(n), mais il ne permet pas de dépasser le blocage du calcul des valeurs de n! pour n "grand". On peut cependant l'utiliser pour essayer de mettre en évidence une loi de formation des zéros à la fin de n!, c'est-à-dire une loi de formation de la suite u.

On utilise ci-contre ce programme dans l'application initiale (on aurait pu aussi l'utiliser dans l'éditeur de suite, en définissant u1(n) = zero(n!)).

seq(zero(n!), n, p, q) est une syntaxe qui permet d'afficher les différentes valeurs de zero(n!), pour n variant de p à q.

On peut ainsi accumuler un certain nombre de résultats et formuler quelques conjectures.

```
seq(zero(n!),n,1,10)
      {0  0  0  0  1  1  1  1  1  2}
seq(zero(n!),n,11,20)
      {2  2  2  2  3  3  3  3  3  4}
seq(zero(n!),n,21,30)
      {4  4  4  4  6  6  6  6  6  7}
seq(zero(n!),n,31,40)
      {7  7  7  7  8  8  8  8  8  9}
```

```
seq(zero(n!),n,31,40)
      {7  7  7  7  8  8  8  8  8  9}
seq(zero(n!),n,41,50)
 {9  9  9  9  10  10  10  10  10  12}
seq(zero(n!),n,51,60)
{12  12  12  12  13  13  13  13  13 ▶
seq(zero(n!),n,61,70)
{14  14  14  14  15  15  15  15  15 ▶
```

Il est toujours utile de relever les résultats dans un tableau, pour se détacher de la lecture "de surface" de l'écran :

n	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14
u(n)	0	0	0	0	**1**	1	1	1	1	**2**	2	2	2	2

On constate assez vite que, dès que l'on franchit un multiple de 5, n! s'enrichit d'un nouveau 0 et donc u(n) augmente de 1. Nous pouvons alors (par une sorte de "zoom") nous concentrer sur les multiples de 5, ce qui nous permettra d'aller plus loin etr d'affiner la première observation :

n	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	**50**	55	60	65	70
u(n)	1	2	3	4	**6**	7	8	9	10	**12**	13	14	15	16

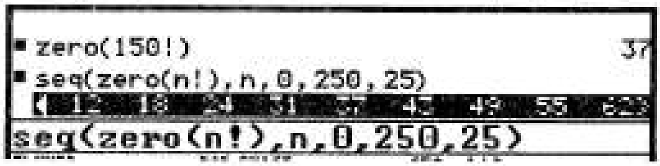
Ceci nous permet en effet de rectifier la première observation : il y a bien saut à chaque multiple de 5, mais pour certains multiples de 5 (25 et 50) il y a un "double saut" : u(n) augmente de 2.

Une conjecture est alors possible : pour chaque multiple de 5, u(n) croît d'une unité ; pour chaque multiple de 25, u(n) croît de deux unités. On aurait alors :

u(100) = 20.1 + 4.1 (puisque 100 possède 20 multiples de 5 et 4 multiples de 25). On retrouve bien ici u(100) = 24. Voyons si cette conjecture permet aussi d'anticiper d'autrs résultats : on devrait avoir u(150) = 30.1 + 6.1 = 36.

Hélas, le calcul indique clairement que 150! se termine par 37 zéros...

La conjecture, dans sa généralité, est ainsi réfutée.



Nous pouvons poursuivre l'observation ; ci-dessus on calcule u(n) de 0 à 250 en faisant des sauts de 25 : on remarque que l'on gagne à chaque fois 6 zéros, sauf entre 100 et 125 et 225 et 250, où l'on gagne 7 zéros. On peut aussi aborder une analyse, plus profonde, du phénomène.

Pour aller plus loin : la recherche d'une loi de formation

Aller plus loin suppose en effet une étude de la loi de formation des zéros à la fin de n!.

Par exemple 10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800 ; les deux zéros finaux proviennent du facteur 10 et, par exemple, de l'association 2.5. On dispose d'ailleurs, pour simplifier les choses, d'un résultat fondamental de l'arithmétique : **tout entier peut se décomposer, de façon unique, en un produit de facteurs premiers (c'est-à-dire de nombres qui ne soient divisibles que par 1 et par eux-mêmes)**. Supposons cette décomposition réalisée : pour "produire" un zéro à la fin d'un naturel, il faut pouvoir associer un facteur égal à 2 et un facteur égal à 5. Autrement dit, il y a autant de zéros à la fin d'un naturel que de couples (2, 5) dans sa décomposition en facteurs premiers. Voyons ce que cela donne pour 10! et 100!, en utilisant la commande *Factor* du menu *Algebra* de l'application initiale qui fournit la décomposition en facteurs premiers des naturels :

- 10! comporte 2 facteurs 5 et 8 facteurs 2, donc 2 paires possibles, qui donnent bien 2 zéros à la fin de ce nombre ;
- 100! comporte 24 facteurs 5 et 97 facteurs 2, donc 24 paires possibles (2, 5), donc 24 zéros à la fin de ce nombre.

Une mesure d'économie est d'ailleurs possible: dans la décomposition en facteurs premiers de n!, il y a nécessairement plus de facteurs 2 que de facteurs 5 (puisque un facteur sur 2 est multiple de 2 alors qu'un facteur sur 5 est multiple de 5...). Donc, pour compter les paires possibles (2, 5), il suffit de compter les 5...

Le problème se déplace ainsi : le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de n! est égal au nombre de facteurs 5 présents dans la décomposition de n! en facteurs premiers. Cela ne résout pas entièrement le problème : il reste à trouver une procédure de comptage de ces facteurs.

<u>Revenons à 100!</u> = 1.2.3. . 98.99.100. Parmi ses différents facteurs constitutifs :
- certains contiennent un facteur 5, ce sont les multiples de 5 (il y en a 20) ;
- certains contiennent deux facteurs 5, ce sont les multiples de 25 (il y en a 4).
- aucun ne contient plus de deux facteurs 5 : le plus petit nombre qui contienne trois facteurs 5 est $5.5.5 = 5^3 = 125$.

Pour résumer, tous les multiples de 5 produisent un zéro (cela en fait 20), tous les multiples de 25 en produisent un de plus (cela en fait 4) ; soit un total de 24.

<u>Passons à 1000! :</u>

- tous les multiples de 5 produisent un zéro ; il y en a $\frac{1000}{5} = 200$;

- tous les multiples de $5^2 = 25$ produisent deux zéros ; il y en a $\frac{1000}{25} = 40$;

- tous les multiples de $5^3 = 125$ produisent trois zéros ; il y en a $\frac{1000}{125} = 8$;

- tous les multiples de $5^4 = 625$ produisent quatre zéros ; il y en a $E(\frac{1000}{625}) = 1$ (le dernier quotient n'est pas entier, cela nous oblige à en prendre la partie entière, que nous notons $E(\frac{1000}{625})$. Bien entendu, nous nous obligeons à écrire une formule pour préparer une généralisation : nous n'avons pas besoin de diviser 1000 par 625 pour savoir que 1000! ne contient dans sa décomposition aucun facteur, à part 625, qui soit un multiple de 625...

Au total, nous venons de trouver que 1000! se termine par 249 zéros.
Du même coup, nous pouvons comprendre pourquoi, quand nous avons compté le nombre de zéros terminant n!, nous avons repéré des sauts de 1 à chaque multiple de 5, des sauts de 2 à chaque multiple de 25, des sauts de 3 à chaque multiple de 125...

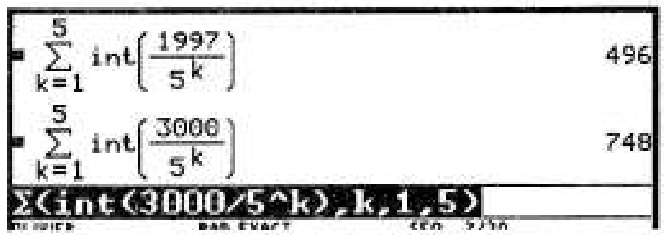
Nous pouvons désormais résoudre le problème pour 1997!. Le produit 1.2.3......1996.1997 comporte :

- $E(\frac{1997}{5}) = 399$ multiples de 5 ;
- $E(\frac{1997}{25}) = 79$ multiples de 25 ;
- $E(\frac{1997}{125}) = 15$ multiples de 125 ;
- $E(\frac{1997}{625}) = 3$ multiples de 625 ;
- $E(\frac{1997}{3125}) = 0$ multiples de 3125.

On divise 1997 par les puissances successives de 5 : $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$...
A partir d'un certain moment, le dénominateur dépasse le numérateur et donc la partie entière du quotient est égale à 0.
On trouve ainsi tous les composants de 1997! qui contiennent un facteur, deux facteurs, trois... facteurs 5, c'est-à-dire qui sont des multiples de 5, de 25, de 125...
Mais attention, les multiples de 25 ont déjà été comptés dans les multiples de 5, donc chacun d'entre eux ne rajoute qu'un 5 au dénombrement général.

Au total 1997 ! se termine donc par $\sum_{k=1}^{k=5} E(\frac{1997}{5^k}) = 399+79+15+3 = 496$ zéros. Cette formule synthétique permet l'utilisation de la calculatrice, via la commande de somme et la syntaxe *Int* pour partie entière.

On vérifie le résultat pour 1997!. La formule permet de faire éventuellement d'autres calculs, à condition de ne pas dépasser $5^6 - 1 = 15624$. En effet, à partir de 15625, on a un facteur qui contient 6 facteurs 5.



Il faudrait alors pousser la somme un rang plus loin...

On peut en fait écrire une formule mathématique générale : le nombre de zéros qui termine n! est égal à $\sum_{k=1}^{k=\infty} E(\frac{n}{5^k})$. Cette somme est faussement infinie, puisque, à partir d'une certaine valeur de k, 5^k dépassera n et donc $E(\frac{n}{5^k})$ sera égale à 0. La calculatrice saura-t-elle interpréter cette formule ?

Nous pouvons voir ci-contre que le logiciel se contente de reformuler la question (*floor* est un synonyme de *int*, partie entière).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{int}\left(\frac{3000}{5^k}\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \text{floor}(3000 \cdot 5^{-k})$$

```
Σ(int(3000/5^k),k,1,∞)
```

Il faut donc déterminer l'indice k à partir duquel on aura $E(\frac{n}{5^k}) = 0$. Ce sera vrai dès que $n < 5^k$, c'est-à-dire $k > \frac{\ln n}{\ln 5}$. Comme k est un entier, il suffit de choisir $k=E(\frac{\ln n}{\ln 5})$.

On réalise ainsi l'objectif de déterminer une expression générale de u(n) : l'expression n'est pas simple, mais elle permet de calculer désormais u(n) pour de grande valeurs de n : en effet l'expression manipule n et non n!.

On peut ainsi voir ci-contre le nombre de zéros qui termine l'écriture décimale de $10^p!$.

De quoi formuler quelques nouvelles conjectures...

$$\text{Define } u(n) = \sum_{k=1}^{\text{int}\left(\frac{\ln(n)}{\ln(5)}\right)} \text{int}\left(\frac{n}{5^k}\right) \qquad \text{Done}$$

```
u(1000)                    249
u(10000)                  2499
u(100000)                24999
u(1000000)              249998
u(10000000)            2499999
u(100000000)          24999999
u(1000000000)        249999998
u(10000000000)      2499999997
```

NB. Le devoir surveillé n°1 réalisé en classe (cf. chapitre 4) revenait sur les enseignements de ce TP. Il s'agissait de déterminer les 3 derniers chiffres de l'écriture décimale de la somme $\sum_{k=1}^{k=1997} k! = 1! + 2! + ... + 1997!$

Quelqu'un n'ayant pas mémorisé les résultats de ce TP (il y en eut...) tenterait d'obtenir le résultat directement avec sa calculatrice. Peine perdue : la calculatrice, qui ne peut pas évaluer 1000!, peut encore moins calculer une telle somme ! Résultat : après un long temps de calcul (le logiciel calcule tant qu'il le peut les factorielles qu'il connaît), la calculatrice se bloque (avec effacement de tous les fichiers : la manoeuvre est à déconseiller formellement !).

L'utilisation par contre des résultats du TP permet de noter que, à partir du rang 15, n! se termine par au moins 3 zéros. Pour connaître les trois dernières décimales, il suffit ainsi de sommer les factorielles jusqu'au rang 14 (cf. ci-contre). Ces trois décimales sont donc 313.

Un peu de réflexion épargne de longs calculs...

$$u(15) \qquad 3$$

$$\sum_{k=1}^{14} k! \qquad 93928268313$$

```
Σ(k!,k,1,14)
```

Fin (provisoire) du TP n°1. Restent quelques conjectures à étudier pour d'éventuels volontaires !

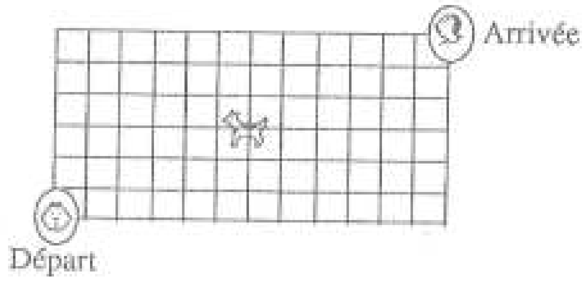
TP N°2

Après le TP n°1 dont la résolution se situait résolument dans un environnement de calculatrices, ce TP se situe dans un environnement plus classique. A priori la calculatrice n'est pas ici d'un grand secours.

La question du jour

On s'intéresse ici au nombre d'itinéraires possibles pour aller d'un point à un autre sur un quadrillage, les seules directions possibles étant Nord ou Est (cf. ci-dessous).

- combien y a-t-il de chemins différents pour aller du départ au chien (situé exactement au point de coordonnées (6, 3)) ?
- combien y a-t-il de chemins différents pour aller du départ à l'arrivée ?
- quelle est la probabilité que, si l'on emprunte un de ces chemins au hasard, on rencontre le chien ?

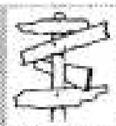


La question du lendemain

On peut reprendre la question dans l'espace, avec un réseau de cubes empilés (2m en largeur, 2n en longueur, 2p en hauteur). On part d'un coin en bas, au sud et à l'ouest du parallélépipède, et on se dirige vers le coin "opposé" (en haut, au nord et à l'est). On ne peut aller que vers le haut, vers le nord et vers l'est, en suivant les arêtes des petits cubes.

- Combien d'itinéraires possibles ?
- Quelle est la probabilité, si l'on emprunte un de ces itinéraires au hasard, que l'on passe par le centre du parallélépipède ?

ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°2



Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Mathieu Mouls et Jean-François Vincent.

Nous allons faire le tour des différentes itinéraires empruntés par des binômes pour sortir du labyrinthe... La diversité des approches illustre une idée simple : devant tout problème, il est toujours possible de ne pas rester inerte !

La recherche d'une loi générale, sur le modèle des arbres.

Ce TP survenant au moment du cours sur le dénombrement, il était assez naturel de songer à retrouver une formule générale à partir d'un arbre : à chaque embranchement, on a deux choix (aller vers le haut ou vers la droite). Mais un double problème surgit assez vite :

- à certains embranchements (cf. schéma 1 ci-dessous), on n'a plus qu'un choix (sur la ligne du haut et sur la ligne de droite) ;
- les branchages s'interpénètrent, si bien qu'il est impossible de compter les feuilles finales par un processus de multiplications successives.

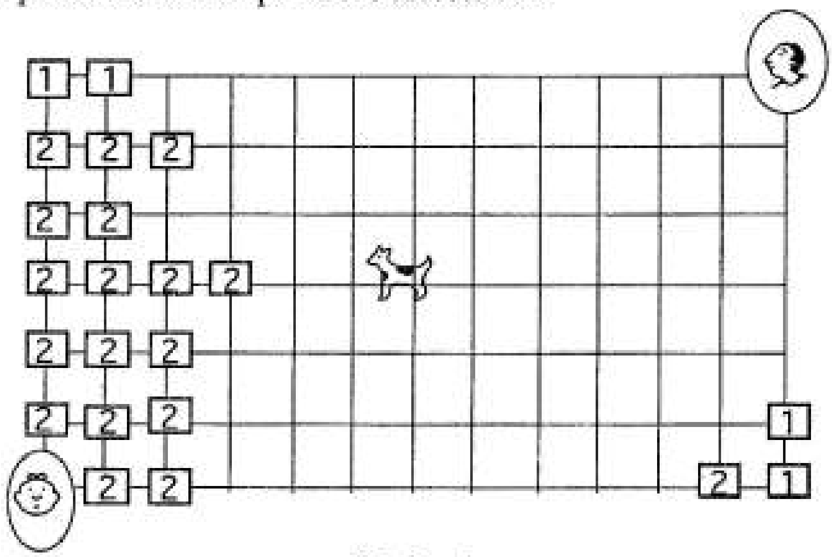
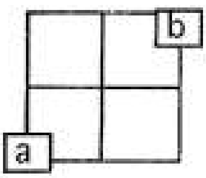


Schéma 1

Certains groupes ont réalisé assez vite que cette stratégie débouchait sur une impasse, d'autres ont conjecturé une formule générale du type $2^{18} - 18$, justifiée ainsi :

- tout trajet suppose le passage par 18 noeux sur lesquels on dispose de deux choix d'orientation (d'où 2^{18} itinéraires théoriques possibles) ;
- mais cette formule doit être corrigée par le fait que sur la ligne du haut et sur la ligne de droite (donc en 18 points) on n'a plus qu'un choix. D'où la formule $2^{18} - 18$.

La discussion entre les tenants et les adversaires de la formule est abordée parfois sous un angle général ("en retranchant 18 chemins, tu ne retranches pas assez!") ; mais elle est réglée par sa mise à l'épreuve sur une configuration simple :



L'application de la formule à cette configuration donnerait $2^4 - 4$ c'est-à-dire 12 chemins pour aller de a à b. Or il n'y a manifestement que six itinéraires possibles.

La mise en évidence du caractère erroné de la formule permet de revenir sur l'analyse qui a débouché sur cette conjecture.

La réduction de la complexité, pour obtenir de premiers résultats.

L'étude d'une configuration réduite donne aussi l'idée à certains groupes de partir d'un modèle réduit vers le modèle "en vraie grandeur" en augmentant peu à peu la complexité (cf. schéma 2 ci-dessous).

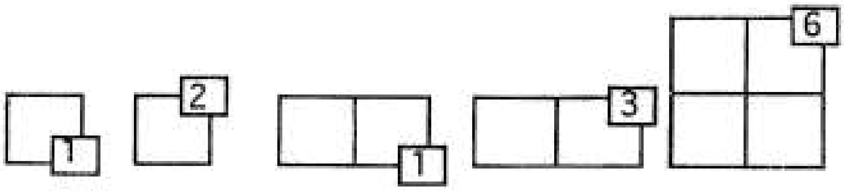


Schéma 2 (on indique à chaque fois le nombre d'itinéraires différents qui vont du point de départ au point final).

On enrichit l'information en accumulant les différents résultats sur un même graphique :

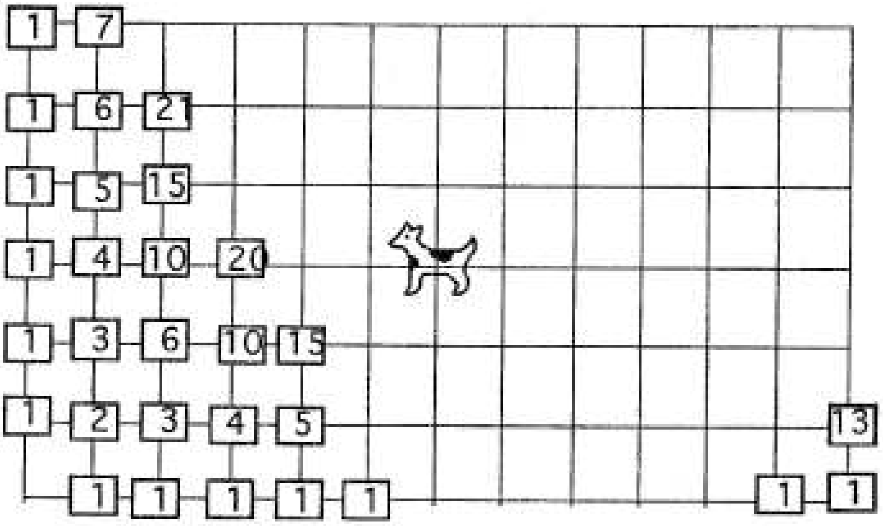
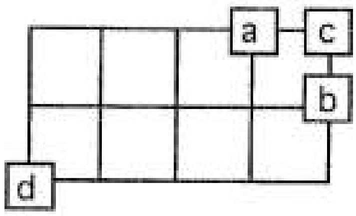
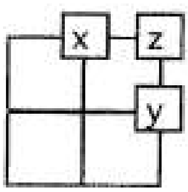


Schéma 3 : on indique sur chaque noeud n le nombre d'itinéraires différents qui mènent du point de départ à n.

Dans tout comptage, il est naturel de mettre en place des procédures d'économie : il est inutile de recompter plusieurs fois des itinéraires de même type.



Ainsi on observe que le nombre d'itinéraires qui vont du départ *d* au point *c* est égal à la somme du nombre des chemins qui vont de *d* à *c* et du nombre de chemins qui vont de *d* à *b* (puisque, pour arriver à *c*, il faut passer soit par *a* soit par *b*).



On obtient ainsi une structure additive dans ce tableau : z = x + y. Ce résultat, ajouté à la considération des premiers calculs présentés dans le schéma 3 ci-dessus, fait penser aux combinaisons : on retrouve bien le "triangle de Pascal" donnant les premières valeurs des C_n^p. On peut préciser cette conjecture ou passer à une démonstration générale.

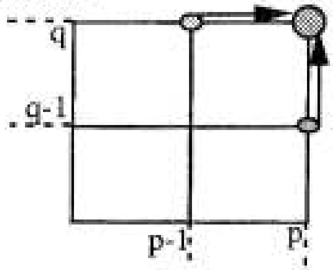
Une conjecture et une preuve par récurrence.

On appelle p le rang de la colonne et q le rang de la ligne. Quel semble être le nombre cherché au point intersection (p, q) ? On reécrit les résultats déjà trouvés, cette fois-ci sous forme de combinaison, dans le tableau ci-dessous (le fait de porter p en abscisse ou en ordonnée n'a pas d'importance, du fait de la symétrie des résultats).

4	C_4^0	C_5^1	C_6^2	C_7^3	C_7^4
3	C_3^0	C_4^1	C_5^2	C_6^3	C_7^4
2	C_2^0	C_3^1	C_4^2	C_5^3	C_6^4
1	C_1^0	C_2^1	C_3^2	C_4^3	C_5^4
0	1	C_1^1	C_2^2	C_3^3	C_4^4
	0	1	2	3	4

Construire ce tableau a consisté à reécrire le triangle de Pascal avec une forme différente (on retrouve les lignes du triangle de Pascal dans les "diagonales" du tableau (ont été grisées les combinaison correspondant au rang n = 4). La réorganisation des résultats permet alors de constater que le nombre d'itinéraires pour aller du point de départ au noeud (p, q) semble être égal à C_{p+q}^{p}. La preuve par récurrence est immédiate:

- la formule est vraie sur la ligne du bas et la colonne de gauche ;
- supposons la formule vraie au noeud (p-1, q) et au noeud (p, q-1). Le nombre cherché au rang (p, q) sera alors égal, du fait de la formule d'additivité :



$C_{p+q-1}^{p-1} + C_{p+q-1}^{p} = C_{p+q}^{p}$, ce qui traduit bien la propriété au noeud (p, q).

Une nouvelle modélisation.

Tout ce qui précède relève d'une recherche opiniatre de régularités, d'un effort de formulation des conjectures... On aurait aussi pu aller beaucoup plus vite avec un effort d'abstraction, qui consiste à reformuler le problème lui-même :

- tout itinéraire a la même longueur (18 tronçons élémentaires) ;
- il s'agit simplement de choisir, parmi ces 18 tronçons, les 12 tronçons horizontaux et les 6 tronçons verticaux.

Par exemple, le codage ci-dessous représente un itinéraire possible :

$$\uparrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$$

Encore une simplification possible. Nous avons en fait 18 cases à remplir sans répétition (on ne peut pas mettre plusieurs flèches dans la même case) et sans ordre (deux flèches horizontales par exemple sont interchangeables) :

□□□□□□□□□□□□□□□□□□

Il suffit de décider dans quelles cases on affecte les 12 flèches "vers le haut" et, par défaut, l'affectation des six flèches "vers la droite" sera imposé. Au total, on a, pour la configuration proposée par l'énoncé, C_{18}^{12} chemins possibles (et, pour p colonnes et q lignes, C_{p+q}^{p} chemins). Bien évidemment, on aurait pu distinguer les 6 déplacements vers le haut. On aurait alors obtenu C_{18}^{6} chemins possibles. L'égalité $C_n^p = C_n^{n-p}$ assure l'égalité des deux résultats.

Le résultat général permet de répondre aux questions qui suivent.

Les probabilités évoquées ne sont que prétexte à dénombrement...

Le nombre de chemins possibles du départ au chien est égal à C_9^6. Il est égal au nombre de chemins qui vont du chien à l'arrivée. Le nombre de chemins qui vont donc du départ à l'arrivée en passant par le chien est égal à $C_9^6 . C_9^6$.

La formule de Laplace (si l'on suppose que tous les chemins sont équiprobables) permet alors d'écrire que la probabilité de rencontrer le chien sur son chemin est égale à : $\dfrac{C_9^6 . C_9^6}{C_{18}^6} = \dfrac{84}{221}$

La question du lendemain

La généralisation ne pose pas trop de problèmes :

- il s'agit de choisir, parmi les (2m + 2n + 2p) tronçons élémentaires du déplacement, les 2m qui iront "vers la droite" et de choisir, parmi les (2n + 2p) restants, les 2p qui iront "vers le haut". L'itinéraire est alors complètement déterminé. Au total :

$$C_{2m+2n+2p}^{2m} . C_{2n+2p}^{2p} \text{ itinéraires.}$$

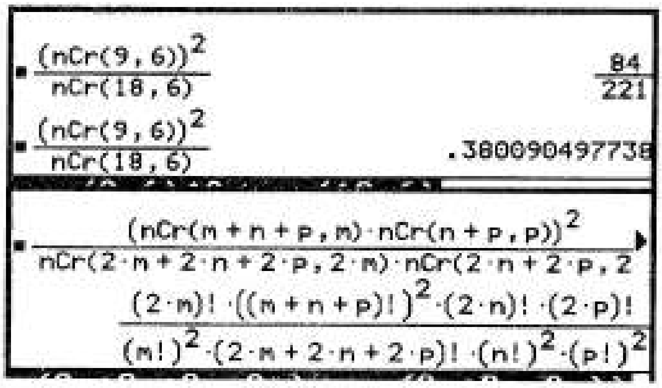
La probabilité de passer par le centre du parallélépipède est alors, en suivant le même raisonement que pour le chien,

$$p = \frac{(C_{m+n+p}^{m} . C_{n+p}^{p})^2}{C_{2m+2n+2p}^{2m} . C_{2n+2p}^{2p}}$$

Comme on l'aura remarqué, la calculatrice n'a pas beaucoup servi dans ce TP.

Elle n'a eu qu'une fonction d'auxiliaire de calcul en fin de course, pour évaluer la probabilité demandée.

Elle aura permis aussi une (relative) simplification du résultat final (cf. ci-contre).



Remarque et prolongement possible. La calculatrice aurait par contre été tout à fait utile si on avait prolongé la question du jour ainsi : quelle est la probabilité de passer par les différents points du quadrillage quand on va du point de départ au point d'arrivée ? Quels sont les points de probabilité maximale ? de probabilité minimale ?

Soit le point (n, p) situé sur la colonne n et la ligne p.

Il y a C_{n+p}^{n} chemins qui vont du point de départ à ce point et C_{18-n-p}^{12-n} chemins qui vont de ce point au point d'arrivée, soit au total $C_{18-n-p}^{12-n} . C_{n+p}^{n}$ chemins qui vont du point de départ au point d'arrivée en passant par ce point (n, p).

La probabilité de passer par le point (n, p) est alors : $\dfrac{C_{n+p}^{n} . C_{18-n-p}^{12-n}}{C_{18}^{6}}$

On peut alors définir une suite dépendant de deux variables (n et p), dans l'application initiale de la calculatrice, pour calculer les différentes probabilités :

La suite de deux variables est définie. Une vérification permet de retrouver le résultat pour n=6 et p=3 (c'est le centre du quadrillage).

```
■ Define u(n,p) = nCr(n+p,n)·nCr(18-n-▸ / nCr(18,6)
                                        Done
■ u(6,3)                               84/221
```

On peut alors calculer les différentes probabilités dans l'application initiale (en fixant p et en faisant varier n par exemple).

La syntaxe seq permet de faire varier n de 0 à 12. On trouve ainsi (en valeurs exactes puis approchées, avec 12 chiffres significatifs, puis avec deux chiffres significatifs) les différentes valeurs de u(n, 0).

```
seq(u(n,0),n,0,12)
{1  2/3  22/51  55/204  11/68  11/119  1/2▸
seq(u(n,0),n,0,12)
{1.  .666666666667  .43137254902  .26▸
seq(u(n,0),n,0,12)
{1.  .67  .43  .27  .16  .09  .05  .▸
```

Un contrôle de pertinence est toujours utile :

- la probabilité de passer par le point (0, 0) est égale à 1 (évidemment, c'est le point de départ !) ;

- les probabilités de passer par le point (n, 0) semblent décroître quand on se déplace sur la ligne du bas vers la droite.

Tout ceci semble assez raisonnable. On peut enfin tenter de récapituler les résultats en utilisant l'éditeur de suite.

En u1 on définit u(n, 0) ; on obtiendra ainsi, quand n variera de 0 à 12, les probabilités de passer par les différents points de la ligne du bas. On définit de même en u2 u(n, 1), etc...

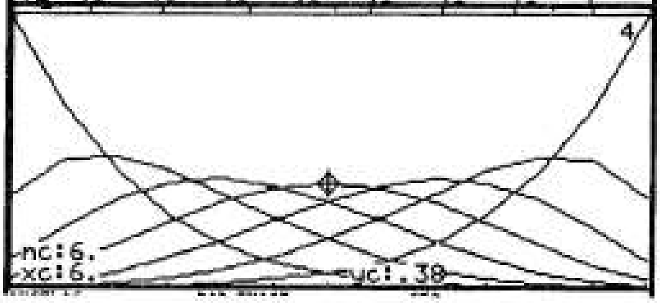
```
PLOTS
✓ u1=u(n,0)
ui1=
✓ u2=u(n,1)
ui2=
✓ u3=u(n,2)
ui3=
✓ u4=u(n,3)
ui4=
```

La table de valeurs indique les valeurs **approchées** des différentes probabilités cherchées. Attention : aucune probabilité n'est nulle (il est toujours possible en effet de passer par tel ou tel point de la grille).

0.	1.	.33	.1	.02	...	...	...
1.	.67	.47	.22	.08	.02	...	...
2.	.43	.49	.32	.15	.05	.01	...
3.	.27	.43	.39	.24	.1	.03	...
4.	.16	.35	.4	.31	.17	.06	.01
5.	.09	.26	.37	.36	.24	.11	.02
6.	.05	.17	.32	.38	.32	.17	.05
7.	.02	.11	.24	.36	.37	.26	.09
8.	.01	.06	.17	.31	.4	.35	.16
9.	...	.03	.1	.24	.39	.43	.27
10.	...	.01	.05	.15	.32	.49	.43
11.	...	...	.02	.08	.22	.47	.67
12.	...	...	...	.02	.1	.33	1.

On retrouve bien une symétrie des résultats (il suffit d'échanger point de départ et d'arrivée pour s'en convaincre).

Cette symétrie apparaît aussi dans la représentation graphique des différentes suites. Le problème intéressant à traiter n'est pas en fait la recherche des points de probabilité maximale ou minimale (ils se situent aux extrémités du quadrillage), mais plutôt celui de la variation des probabilités sur chaque ligne.



On distingue ainsi dans le graphique ci-dessus le point de probabilité maximale sur la troisième ligne du quadrillage : c'est le point (6, 3) étudié dans la "question du jour".

Et sur les autres lignes ? Tout problème bien traité débouchant sur de nouvelles questions, le contrat de ce TP est ainsi rempli.

On trouvera dans les deux pages qui suivent d'autres choix de représentations graphiques de ce phénomène proposées par Jean-François Vincent.

Suggestions sur le TP n°2, à propos du prolongement possible

Le recours à plusieurs suites que l'on étudie dans l'application graphique demande une certaine capacité d'abstraction, car toutes les lignes du quadrillage initial (6 dans le cas étudié) sont alors situées sur un même plan en vue d'étudier la probabilité de passer par les différents noeuds.

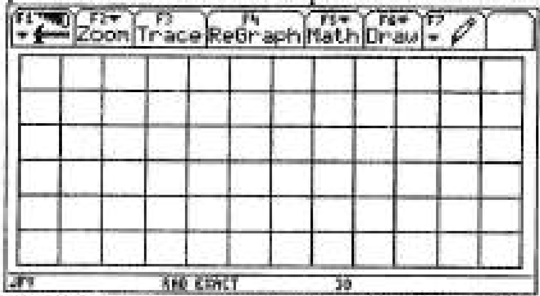
La vue que l'on obtient est certes globale, mais oblige un passage par des données numériques, ne serait-ce que pour savoir sur quelle ligne on se situe.

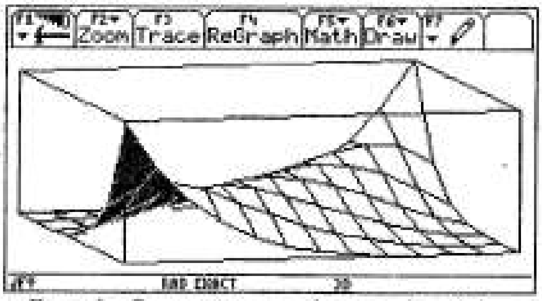
■ Un passage en trois dimensions... et au domaine du continu !

Le recours à un graphique en 3 dimensions permet de palier cet inconvénient, nous montrant immédiatement l'effet de symétrie précédemment constaté.

La fonction à étudier est simple : $z=\dfrac{C_{x+y}^{x}\cdot C_{18-x-y}^{12-x}}{C_{18}^{6}}$.

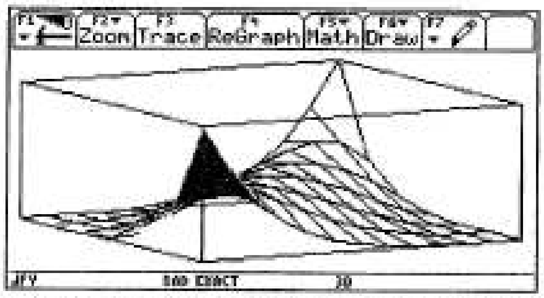
Il suffit de faire varier correctement x et y, tels que $x\in[0;12]$ et $y\in[0;6]$ pour obtenir une vue de la grille initiale en relief. Ce dernier est évidemment compris entre 0 et 1 et traduit la probabilité de passer par un point donné du quadrillage. Cependant, nous faisons par la même occasion un saut dans le domaine du continu. Il faut donc considérer les noeuds du quadrillage, où x et y sont entiers. Ces noeuds sont ensuite reliés entre eux pour donner la surface que nous observons.

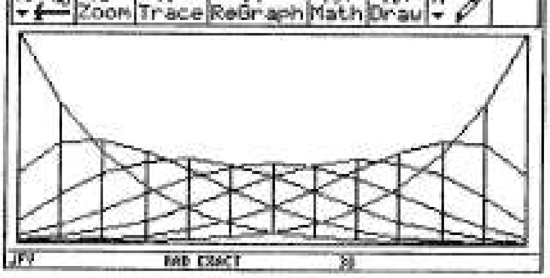




On voit ici le plan avant affectation des probabilités,... Et après. Pour cette première vue, les réglages d'angles sont : θ=75° et Φ=70°

Ci-contre : la vue fait clairement ressortir l'effet de symétrie, avec passage obligé par les deux extrémités du quadrillage. Ici, θ=60 et Φ=70°





En passant à un angle θ=Φ=90°, on observe la représentation de côté.

En mode *fil de fer (Wire Frame)*, on retrouve l'observation faite avec des suites...

Il n'y a là aussi coïncidence que pour les points à coordonnées entières. Ceux-ci sont en fait l'intersection des différentes courbes avec les segments verticaux (vue de côté et transparence).

■ ...pour en revenir à une modélisation sur 2 dimensions.

On pourrait également, en restant dans un plan, recourir à une carte « thermique », souvent utilisée en statistiques (cartes des densités...). Ainsi, la symétrie apparaîtrait de façon claire, sous forme de dégradé des couleurs.

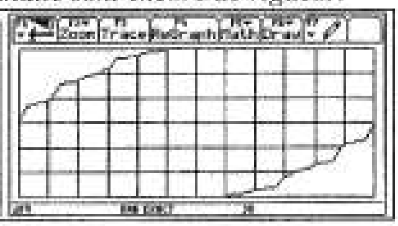
Ce type de représentation impose normalement le recours à un logiciel spécialisé en statistiques. Cependant, avec un peu de méthode, on peut reproduire le résultat avec une TI 92 et un ordinateur. Pour cela, un passage dans l'environnement 3D de la calculatrice s'impose. Là, on peut voir la grille initiale en se plaçant à la verticale ($\theta=90°$ et $\Phi=0°$). On veut ensuite tracer des « lignes de niveau » correspondant à différentes probabilités. On peut par exemple choisir de faire apparaître tous les noeuds du plan pour lesquels la probabilité de passage est supérieure ou égale à 0.3. Ceci se fait assez facilement : on prend la fonction $z=\dfrac{C_{x+y}^{x}\cdot C_{18-x-y}^{12-x}}{C_{18}^{6}}-p$ où p est la probabilité dont on veut connaître l'étendue sur le quadrillage. Si l'on choisit $z\in[0;1]$, le problème est réglé, puisque seuls les points répondant à la condition seront affichés.

En procédant ainsi, on obtient plusieurs graphiques indépendants qu'il s'agit alors de réunir en un seul. Dans l'application graphique libérée de toute fonction parasite, on doit ouvrir successivement toutes les courbes qui s'empilent alors les unes sur les autres.

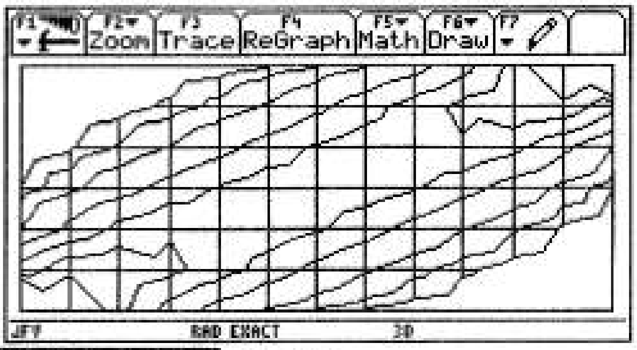
Il suffit ensuite d'appliquer les nuances de gris à l'aide d'un logiciel de dessin pour obtenir une image parlante...

N.B. Les remarques précédemment évoquées concernant la continuité sont encore de rigueur.

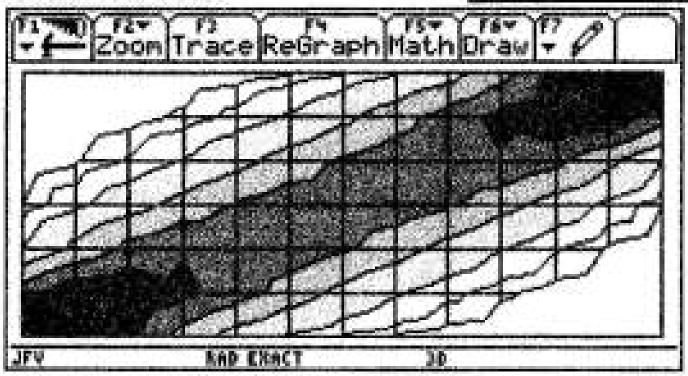
Ci-contre, les courbes obtenues pour respectivement $p\geq 0.5$ et $p\geq 0.025$



Après superposition des différentes courbes, on obtient une représentation monochrome des « lignes de niveau » traduisant les différentes probabilités.



Ci-dessous, enfin, après traitement de l'image sur ordinateur, on a le résultat recherché.



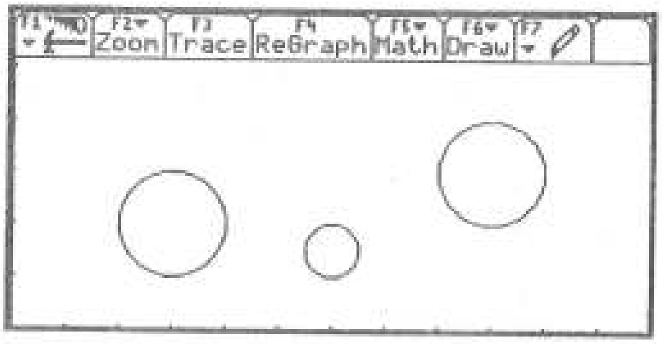
Légende :
- noir ⇔ $p\geq 0.5$
- gris très foncé ⇔ $0.5\geq p\geq 0.4$
- gris foncé ⇔ $0.4\geq p\geq 0.3$
- gris clair ⇔ $0.3\geq p\geq 0.2$
- gris très clair ⇔ $0.3\geq p\geq 0.2$
- blanc 1 ⇔ $0.2\geq p\geq 0.1$
- blanc 2 ⇔ $0.1\geq p\geq 0.025$
- pour le reste : $p\leq 0.025$

J.F. VINCENT

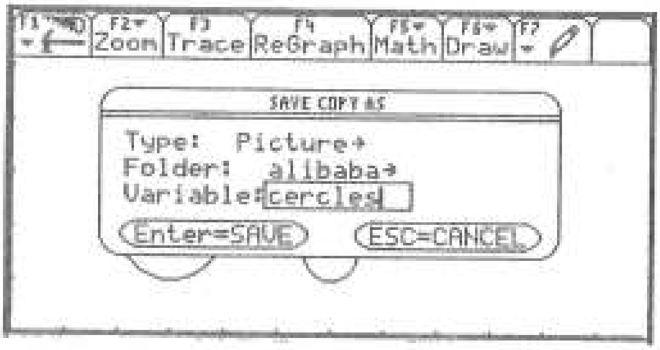
TP N°3

Préambule : on utilisera dans ce TP, entre autres applications possibles, l'application graphique. On choisira la fenêtre [0; 11,9] pour x, [0; 5,1] pour y. En déplaçant un point avec *Trace* sur l'écran, pouvez-vous dire l'intérêt du choix de cette fenêtre ?

Dans cette application graphique, le menu *F7* permet de tracer des droites, des cercles, de les effacer... On travaillera à partir de la figure ci-dessous : il s'agit des cercles C1 [centre (3; 2), rayon = 1], C2 [centre (6; 1,5), rayon = 0,5], C3 [centre (9; 3), rayon = 1].



Une fois réalisée cette figure, on prendra bien soin de la sauvegarder : menu *F1*, commande *Save copy as* (cf. ci-dessous). On enregistrera la figure comme image (*picture*), sous l'étiquette *cercles*.



On pourra avoir à définir dans ce TP des fonctions "par morceaux". La syntaxe est la suivante (sur un exemple) :*When(x<3, 2x+3, sinx)* définit la fonction qui vaut 2x+3 pour x<3, sinx sinon. On peut bien sûr réaliser des empilements de cette même commande. Si on veut définir une fonction qui vaut 2x+3 pour x<3, sinx pour 3≤x<5 et cosx pour x>5, on écrira :*When(x<3, 2x+3, When(x<5, sinx, cosx))*.

La question du jour

Déterminer une fonction en tout point dérivable dont la courbe parte du point (0; 0), passe au-dessus du premier cercle, au-dessous du second, au-dessus du troisième et dont la représentation graphique, sur l'intervalle considéré, reste dans la fenêtre choisie.

La question du lendemain

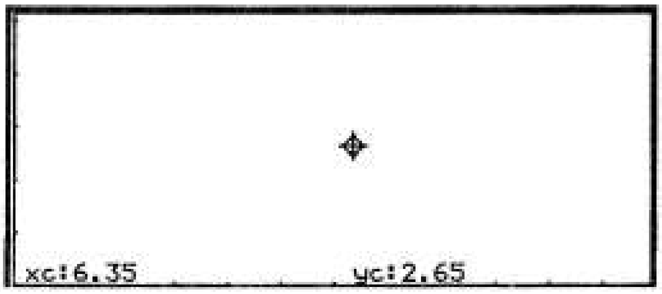
On rajoute les contraintes : passer par les points (6; 0,5) et (9; 4,5).

ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°3

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Julie Caramel et Isabelle Fromental.

Préambule. C'est le premier TP qui utilise l'application graphique. Il n'est donc pas inutile de réfléchir un peu au fonctionnement de l'écran. Si l'on choisit la fenêtre suggérée [0;11,9] pour x, [0; 5,1] pour y, on remarque un phénomène intéressant.

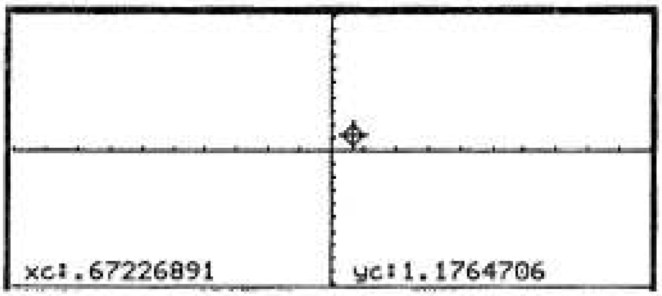
Tout point de l'écran (déplacé avec la touche de contrôle du curseur) est repéré par des coordonnées décimales simples (cf. ci-contre). Plus précisément, les valeurs successives prises par x et y diffèrent de 0,05.



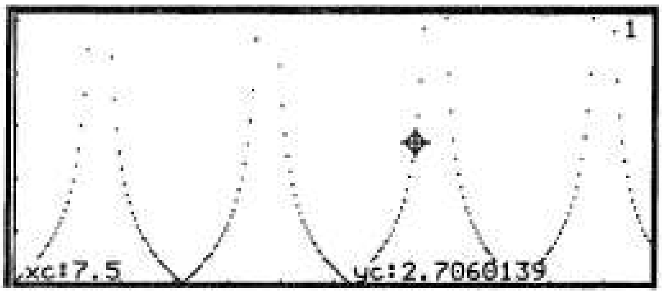
La raison : l'écran comporte 239 colonnes et 103 lignes de pixels. On le retrouve si l'on choisit dans le menu *F2* de l'application graphique la commande *ZoomInt* (cf. ci-contre) : les coordonnées des points sélectionnés sont alors entières.

La fenêtre choisie pour le TP étant 20 fois plus petite que celle de ZoomInt, il est normal que l'on se déplace de 0,05 en 0,05.

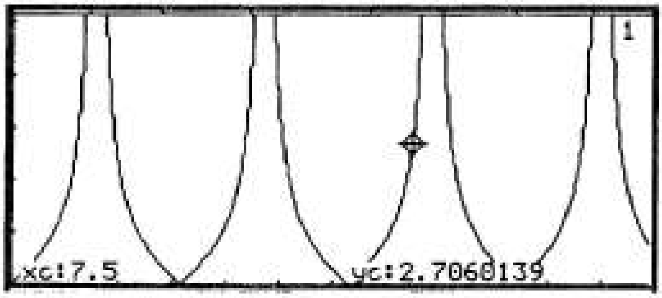
Par contre, si on choisit une fenêtre standard (*Zoomstd*), c'est-à-dire [-10, 10] pour les x et les y (cf. ci-contre) on obtiendra des coordonnées plus complexes. De façon générale, les points déplacés auront pour abscisse $\dfrac{\text{Xmax} - \text{Xmin}}{238}$.



Revenons à la fenêtre choisie pour le TP, dans laquelle on a représenté ci-contre la fonction $x \to |\tan x|$. Si l'on déplace un point (commande *Trace*), on retrouve des abscisses "simples"; par contre les ordonnées correspondent aux images (en valeur approchée) de ces abscisses. Vu la fonction en cause, il n'y a aucune raison pour obtenir des décimaux avec deux seuls chiffres après la virgule !



Pour finir, observez la différence entre les deux types de tracé :



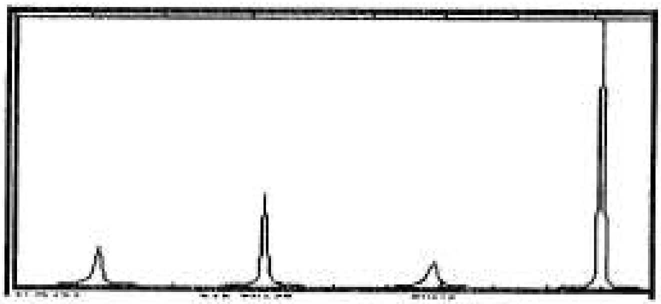
- en mode *Dot* (sélectionné dans le menu *F6 Style* de l'éditeur de fonctions), le logiciel place un point par colonne de pixels (cf. première représentation de la fonction $x \to |\tan x|$, ci-dessus) ;

- en mode *Line* (sélectionné dans le même menu), les points successifs sont reliés (c'est-à-dire que, si les points éclairés de deux colonnes successives ne sont pas contigus, les pixels qui les séparent sont aussi éclairés). Ce "prolongement" donne alors l'illusion d'une certaine continuité du tracé (cf. deuxième représentation de la fonction $x \to |\tan x|$ ci-dessus).

Attention cependant, le tracé des fonctions repose toujours sur une discrétisation de la représentation : il n'y a que 239 calculs réalisés, 239 points placés (un par colonne). L'opération qui consiste à relier deux points successifs est totalement mécanique : si un point n'appartient par au domaine de définition de la fonction et s'il ne correspond pas à un point de calcul du logiciel, le tracé ne fera apparaître aucune discontinuité en ce point.

Revenons ainsi à la fonction $x \to |\tan x|$. Appliquons au graphique la commande *ZoomFit* du menu *F2* de l'application graphique : cette commande permet d'ajuster le choix de l'intervalle des ordonnées en fonction des valeurs prises par la fonction sur l'intervalle des abscisses sélectionné. Ainsi, pour x élément de [0;11,9], le logiciel réalise 239 calculs d'images (un par colonne), puis il choisit pour les ordonnées l'intervalle [fmin; fmax] (fmin et fmax étant les valeurs minimale et maximale de la fonction calculée). On obtient alors la représentation ci-dessous. Etrange tracé qui ne fait plus ressortir la π-périodicité de la fonction...

Si on déplace un point sur la "courbe" avec *Trace*, on ne décèlera aucune discontinuité (la fonction n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}+k\pi$, mais ces points ne correspondent pas à des points de calcul du logiciel).



Conclusion : la prudence la plus grande est requise dès lors que l'on utilise la repésentation, sur un écran formé de pixels, d'un phénomène continu.

Revenons au problème posé par l'énoncé du TP

Ce problème est essentiel en mathématiques et dans d'autres disciplines (sciences physiques, économie, balistique...) : comment trouver une fonction mathématique répondant à certains critères (simple continuité, dérivabilité...) et satisfaisant à un certain nombre de contraintes (passer par certains points, au dessus ou au dessous de certaines courbes...) ? L'intérêt d'une telle fonction est qu'elle permettra de modéliser le phénomène étudié c'est-à-dire :

- de faire des calculs, à partir de la fonction, permettant en retour de mieux comprendre le phénomène considéré ;
- d'émettre des hypothèses sur son évolution ;
- de traiter des phénomènes d'optimisation (trouver le plus court chemin d'un point à un autre évitant un certain nombre d'obstacles par exemple).

Il n'y a pas en général de solution idéale, mais quelques principes qui peuvent guider la résolution de ce problème. C'est sur ce point que nous voulons insister ici :

- on donnera dans une première partie l'ensemble des solutions proposées par les 18 binômes de la classe, accompagnées des critiques usuelles...
- on tentera ensuite de préciser des éléments de méthode pour traiter ce problème, en illustrant ces éléments par les différentes solutions des différents binômes (le lecteur curieux y trouvera d'ailleurs matière à inspiration nouvelle).

1. Recueil des solutions des 18 binômes de la classe

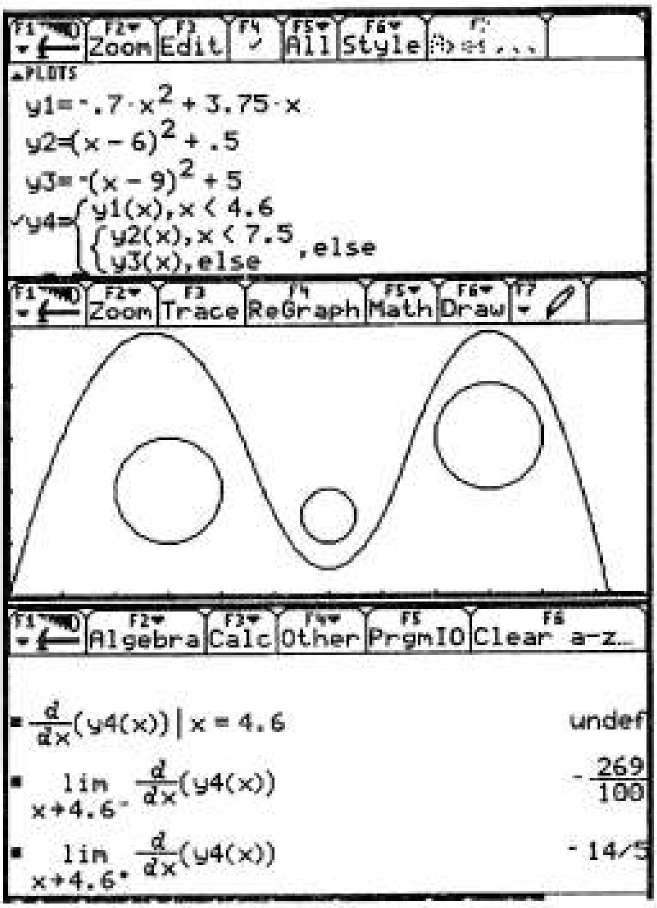
Solution du binôme 1 : Marguerite-Muriel

Elles constituent une fonction par morceaux à partir de fonctions trinômes.

Deux tactiques assez habiles :

- elles procèdent par translation à partir de la fonction x^2 pour ajuster les différents tronçons. Cela leur permet en particulier de s'assurer que f(6)=0,5 ;
- elles affectent chaque tronçon à des fonctions différentes (y1, y2, y3) et les relient dans un deuxième temps en y4. Cela allège un peu la lourdeur de la syntaxe *when*..

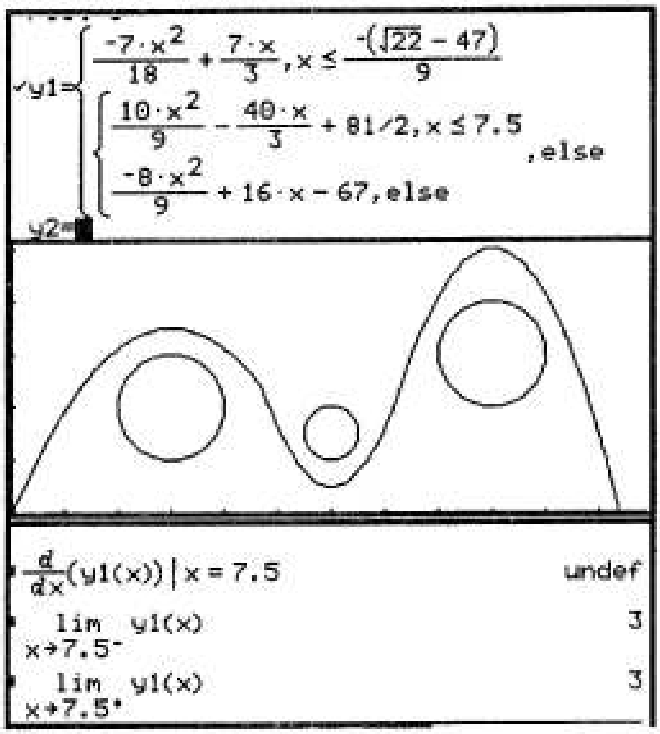
Hélas, trois fois hélas, la fonction n'est pas dérivable aux points de raccord : c'est ce qu'indiquent les calculs ci-contre, réalisés dans l'application initiale (mais les dérivées à gauche et à droite sont assez proches, ce qui assure la régularité apparente du tracé).



Solution du binôme 2 : Isabelle-Julie

Le choix est fait de constituer une fonction par morceaux à partir de fonctions trinômes. Les seules contraintes prises en considération sont les contraintes de continuité des tracés. Le tracé obtenu est donc bien continu, mais il apparaît des ruptures de pente aux points de raccord, comme en témoignent les contrôles de dérivation (cf. ci-dessous).

Au point de raccord d'abscisse 7,5, la continuité est assurée, pas la dérivabilité.



Solution du binôme 3 :
Emilie-Véronique

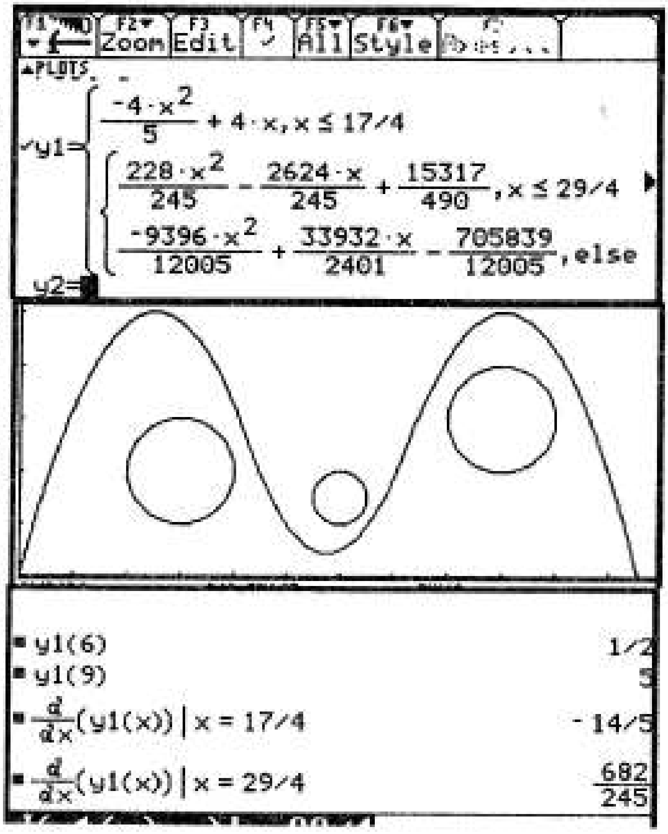
Bonne solution, par raccord de fonctions élémentaires.

Les coefficients ont été calculés pour que la fonction soit bien continue et dérivable aux points de jonction des différents morceaux. Cela a imposé de fixer ces contraintes et de résoudre les systèmes d'équations correspondants.

Voilà le travail. Il correspond bien à ce qui était demandé (sauf le dernier tronçon, qui sort du cadre un peu trop vite).

L'utilisation de l'application initiale permet de vérifier (<u>en calcul exact</u>) si les différentes contraintes sont respectées :

- la fonction vaut bien 0,5 pour x=6 ;
- elle vaut 5 (au lieu de 4,5...) pour x=9 ;
- elle est bien dérivable aux points de jonction.



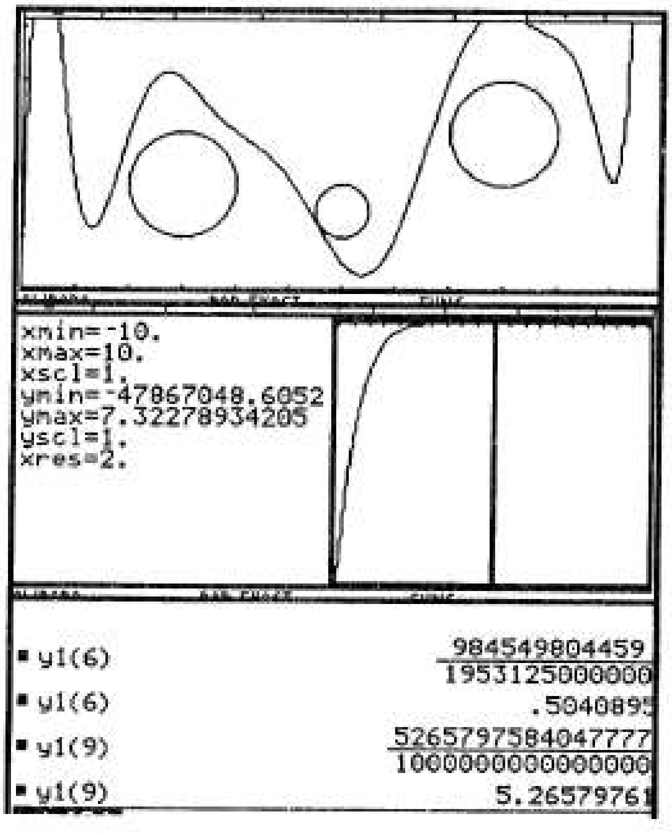
Solution du binôme 4 :
Alice-Sandrine

Elles ont utilisé un logiciel de mathématiques (Mapple) plus puissant que le logiciel résidant sur la TI-92 (Derive).

En utilisant une stratégie d'interpolation, elles aboutissent à une seule forme polynomiale : $0,419.10^{-5}x^{11}$ $-2,70510^{-4}x^{10}$ $+0,007x^9$ $-0,121x^8$ $+1,225x^7-$ $8,07x^6+34,928x^5$ $-97,333x^4+165,240x^3-$ $152,224x^2+58,347x$.

Deux remarques sur ce polynôme de degré élevé :

- dès que l'on sort de la fenêtre, il peut prendre des valeurs très grandes en valeur absolue (cf. fenêtre ci-contre) ;
- il ne répond pas aux contraintes imposées aux points d'abscisse 6 et 9 (cf. ci-contre).

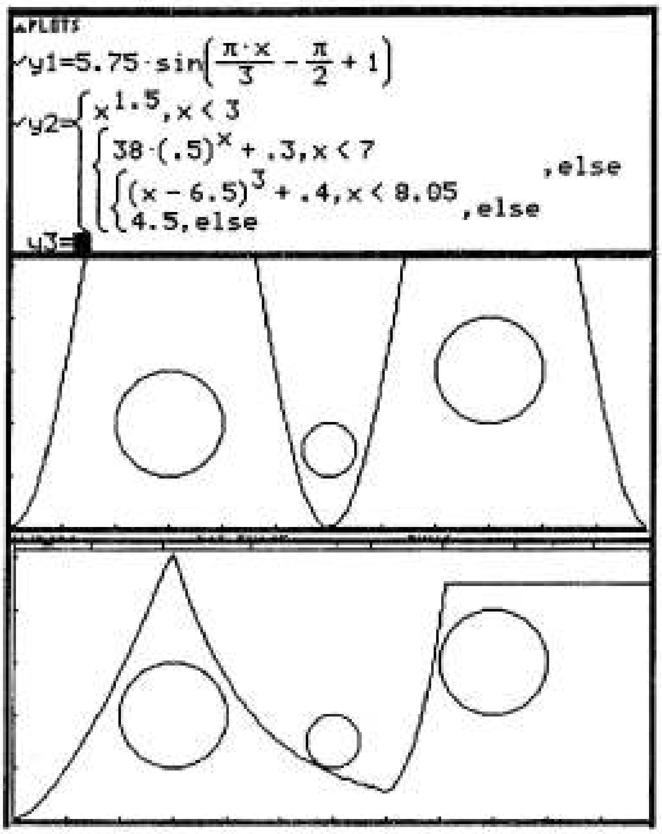


Solution du binôme 5 : Arnaud-Pierre

Deux fonctions sont proposées:

- la fonction trigonométrique ne convient pas tout à fait (elle sort de la fenêtre imposée et elle ne passe pas par les points souhaités) ;

- un raccord de fonctions puissances et de fonctions exponentielles ($0,5^x$), qui ne convient pas plus, pour cause de points anguleux.

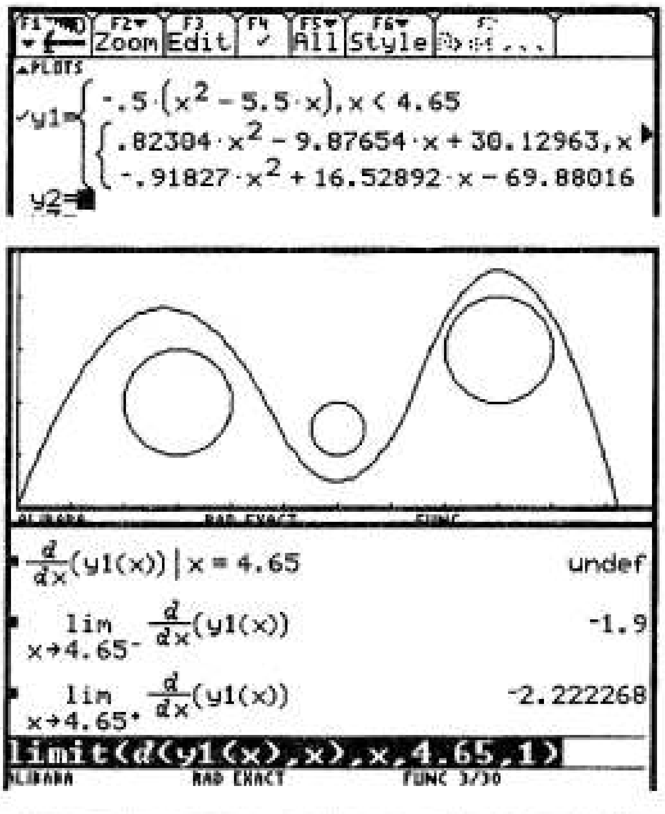


Solution du binôme 6: Orion- Sébastien

Ils fixent à chaque fois trois points et utilisent l'application *Data/Matrix* pour obtenir les paraboles passant par ces trois points.

Ils obtiennent une courbe apparemment harmonieuse, mais le contrôle de dérivabilité, réalisé à partir de l'application initiale, indique une rupture de pente. Normal, puisque les contraintes de dérivabilité n'ont pas été intégrées dans la résolution du problème !

On peut d'ailleurs contrôler la dérivée à gauche et à droite au point d'abscisse 4,65 (en valeur approchée) : on est loin du compte !



Solution du binôme 7 :
Alex-Audrey

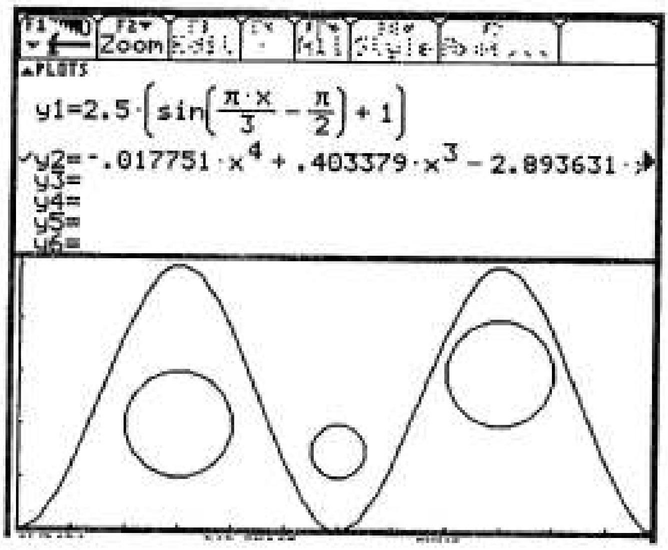
Ils proposent deux fonctions :

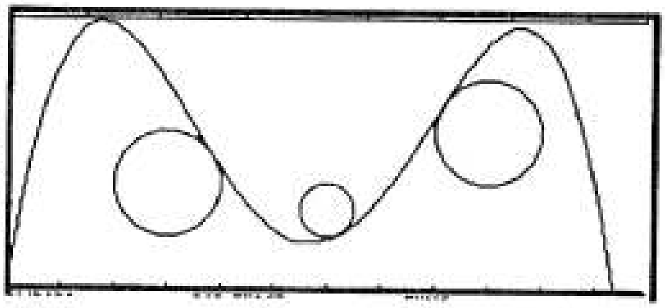
- la première est une fonction trigonométrique, obtenue par un travail sur la périodicité et les bornes des fonctions associées à la fonction sinus. La fonction obtenue est bien dérivable (pas de problème de raccord). Mais elle ne passe pas par les points imposés...

- la deuxième fonction est obtenue par tâtonnements à partir de l'application *Data/Matrix* : on approche un ensemble de points par un polynôme du quatrième degré (*QuartReg*).

La fonction obtenue est bien dérivable, mais il n'est pas tout à fait sûr qu'elle ne traverse pas les cercles (cf. vérification proposée pour le trinôme 9)...

En tous cas, elle ne passe pas par les points imposés !



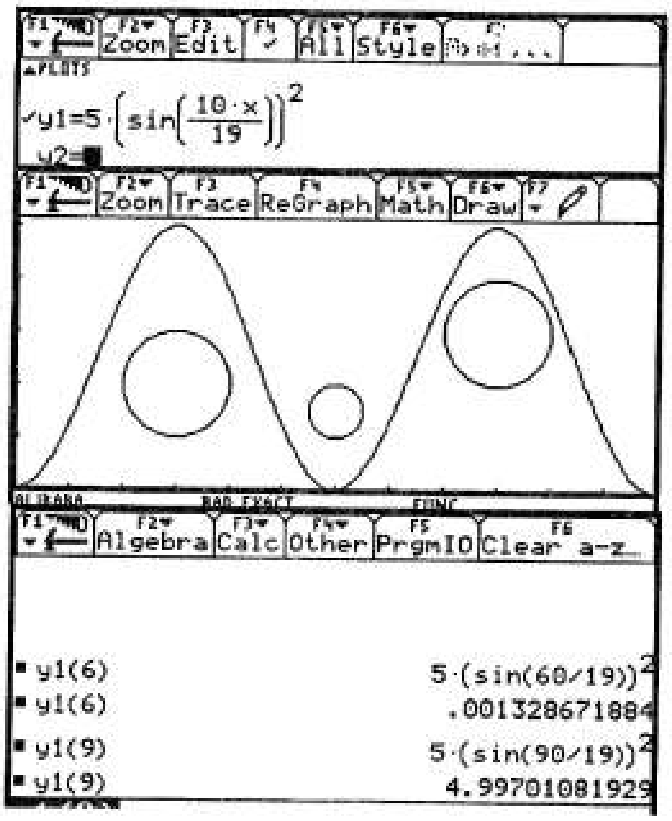


Solution du binôme 8 :
Benoît-Frédéric

Après des tentatives de raccords de fonction polynômes qui s'avèrent infructueuses (pour cause de non-dérivabilité), ils optent pour une fonction construite à partir de la fonction sinus :
- pour assurer la positivité, ils prennent $(\sin x)^2$;
- ils multiplient par 5 pour augmenter l'amplitude ;
- ils multiplient la variable x par un nombre inférieur à 1 pour augmenter la période.

D'où le joli résultat ci-contre.

Seul problème : la fonction ne passe pas par les points imposés (cf. ci-contre les valeurs exactes puis approchées que prend f en ces points critiques).



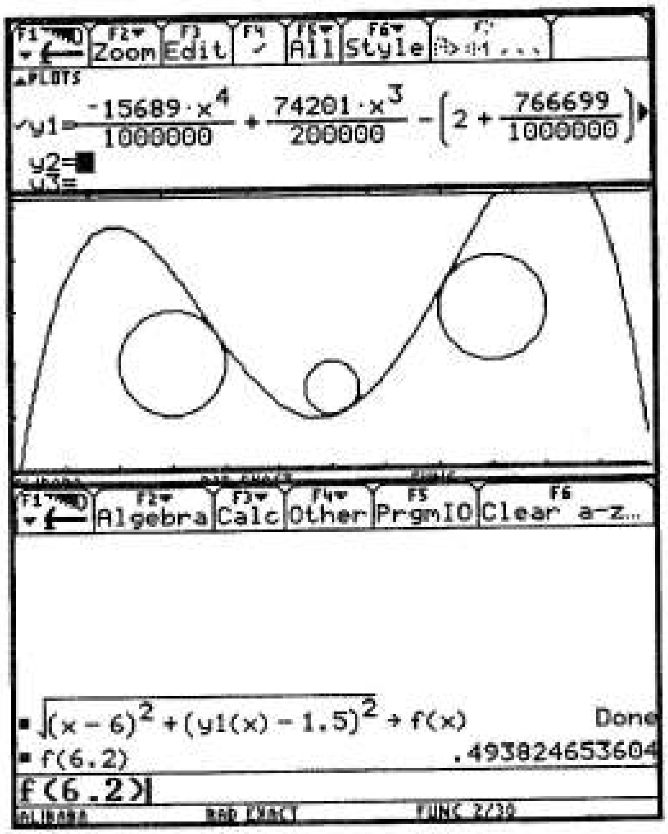
Solution du "binôme" 9 :
Cécile-Marianne-Valérie

Elles construisent un tableau de variations correspondant à une fonction convenable. Elles en déduisent qu'un polynôme du quatrième degré pourrait convenir. Elles en déterminent un grâce à l'application *Data/Matrix* (cf. binôme précédent).

On obtient bien ici une fonction dérivable, mais elle sort de la fenêtre imposée.On peut aussi se poser la question : la courbe ne rencontre-t-elle pas le cercle au voisinage du point d'abscisse 6 ?

Le contrôle est simple : on peut définir la fonction f(x) égale à la distance entre un point de la courbe et le centre du petit cercle (cf. ci-contre).

Patatras ! Pour x= 6,2, cette distance est inférieure à 0,5...



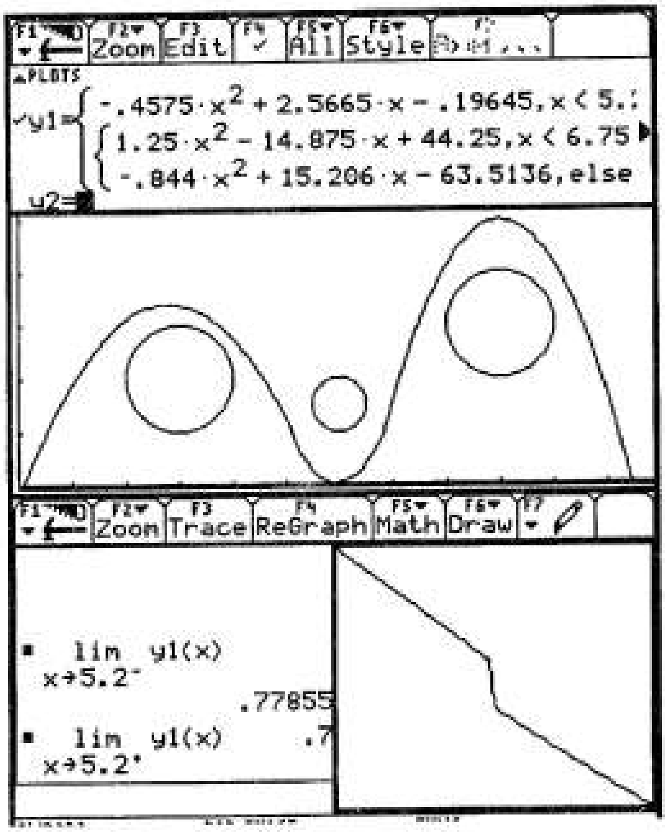
Solution du binôme 10 :
Laetitia-Sofie

Elles utilisent l'application *Data/Matrix* pour définir des bouts de parabole.La courbe obtenue est assez jolie...

Hélas, trois fois hélas, l'utilisation de l'application initiale (cf. ci-dessous) indique bien que la fonction n'est pas continue au premier point de jonction, d'abscisse 5,2.

Double confirmation de l'erreur :

- dans l'application initiale, le calcul des limites à gauche et à droite est fatal ;
- dans l'application graphique, un zoom autour du point indique clairement la "cassure" (en mode *Dot*, ce serait encore plus net).



Solution du binôme 11 :
Cédric-Davy Louis

Après quelques tâtonnements pour trouver une fonction polynôme convenable, ils se rabattent vers une fonction sinus (comme le binôme 7).

$f(x) = 2{,}5\ [\ \sin(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}) + 1]$

La fonction convient bien, sauf le passage par les points imposés.

Solution du binôme 12 :
Geneviève-Olivier

Après quelques tâtonnements avec *Data/Matrix*, ils choisissent aussi une fonction sinus très proche de la fonction précédente.

$f(x) = 2{,}5 \sin (x-1{,}5) + 2{,}5.$

Même remarque que précédemment.

Solution du binôme 13 :
Jean-François -Mathieu

Après la recherche d'un polynôme du quatrième degré, puis la recherche d'une fonction définie par morceaux de trinômes du second degré, ils se rabattent aussi vers une fonction sinus très proche de la fonction précédente.

$f(x) = 2{,}5 \sin (1{,}05x- \frac{\pi}{2}) + 2{,}5.$

Même remarque que précédemment.

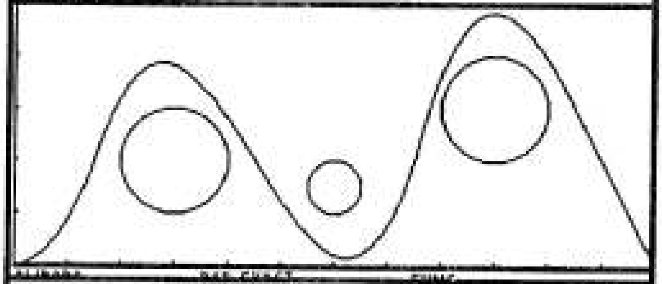
Solution du binôme 14 :
Aurélia-Xavier

Ils raccordent des polynômes du 2ième ou du 3ième degré. Pour ces derniers, une stratégie subtile est choisie : le polynôme est défini à partir de son centre se symétrie (le point (4,5 ; 2) pour le premier), les calculs sont faits en prenant pour centre du repère ce point ; le retour au repère initial est opéré grâce aux fonctions associées (cf. éléments de méthode ci-après).

Hélas, les raccords sont bien continus, mais non dérivables comme l'atteste l'écran ci-contre. Les dérivées à gauche et à droite des points de raccord sont cependant très proches (d'où l'aspect régulier du tracé qui ne fait pas apparaître les points anguleux pourtant bien réels).

$$y1 = \begin{cases} 8 \cdot x^2, & x \le 1.5 \\ \frac{8 \cdot (x-4.5)^3}{45} - \frac{8 \cdot (x-4.5)}{5} + 2, & x \le 7.5 \\ \frac{28 \cdot (x-11)^3}{165} - 343 \cdot (x-11) + 2, & \text{else} \end{cases}$$

y2=



$\frac{d}{dx}(y1(x)) \mid x = 1.5$ undef

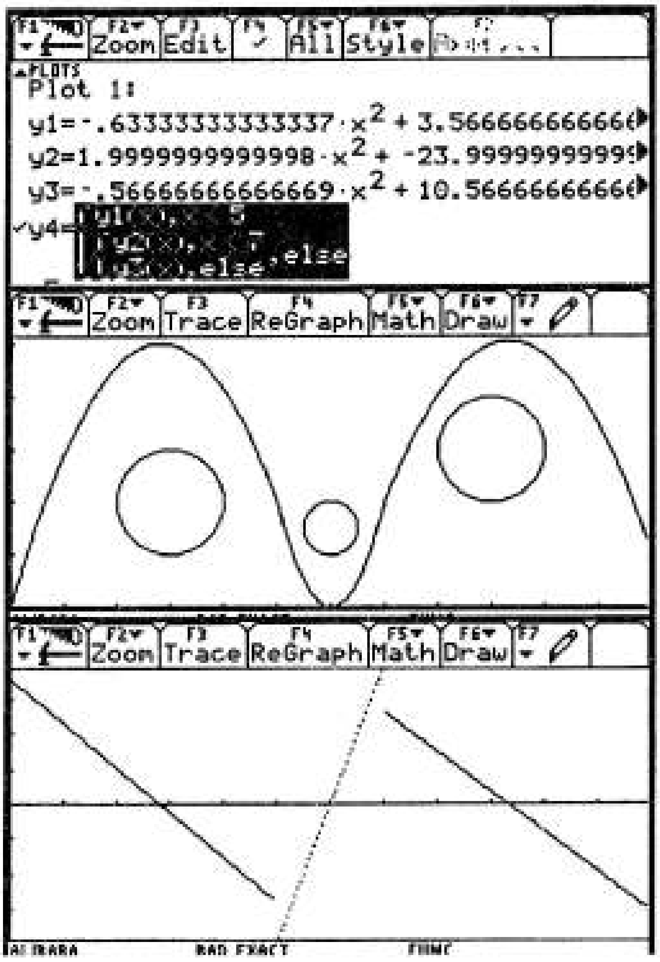
$\lim\limits_{x \to 1.5^-} \frac{d}{dx}(y1(x))$ 8/3

$\lim\limits_{x \to 1.5^+} \frac{d}{dx}(y1(x))$ 16/5

Solution du binôme 15 : Nicolas-Philippe

Après un essai infructueux à partir de raccords de fonctions affines (aboutissant nécessairement à des points anguleux!), ils raccordent des portions de paraboles : à partir du choix de 3points (dont le point de raccord), l'application *Data /matrix* leur fournit les tronçons convenables pour la continuité, mais pas pour la dérivabilité (forcément, puisque celle-ci n'a pas été intégrée comme contrainte). Pour le vérifier, on pourrait utiliser l'application initiale, ou l'application graphique :

- on a calculé dans l'application initiale la dérivée, puis on l'a stockée dans y5(x) ;
- on trace (en mode Dot) la représentation graphique de y5(x), en utilisant *Zoomfit* (menu F2) pour ajuster la fenêtre ;
- la dérivée est une fonction affine par morceaux, on distingue bien ses discontinuités aux points d'abscisse 5 et 7.

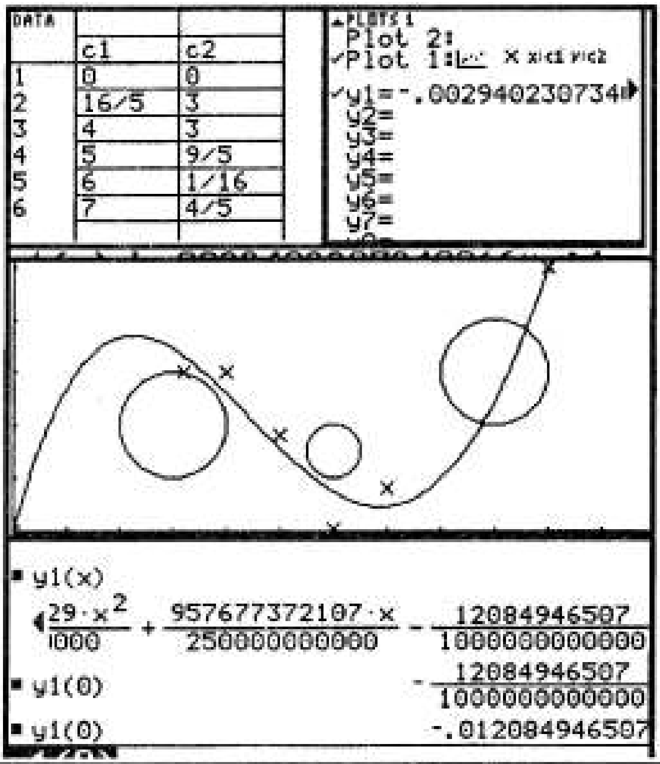


Solution du binôme 16 : Aurélie-Mélanie

Elles décident de placer des points et de les approcher par un polynôme du quatrième degré. On obtient la courbe ci-dessous.

Elles écrivent : "*on est confronté à deux problèmes : on n'est pas bien sûres que la courbe passe bien par 0 et elle frôle ou peut-être coupe des cercles. On a l'impression que la courbe passe bien par le point (0,0).*"

Que la courbe coupe un des cercles n'est pas douteux... Quant à la valeur de la fonction en 0, il suffit de poser la question à la calculatrice... ou de regarder le coefficient constant du polynôme : s'il est différent de 0, la courbe ne peut pas passer par l'origine du repère !



Solution du binôme 17 : Anne Sophie-Danielle

Elles envisagent une fonction dont la dérivée s'annulerait en 3, 6 et 9 et choisissent dans cette perspective $f'(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$

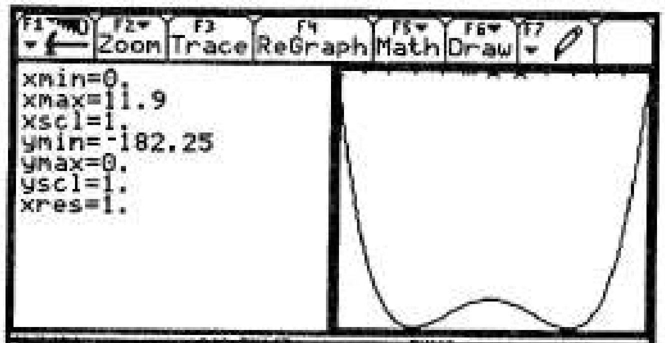
D'où :

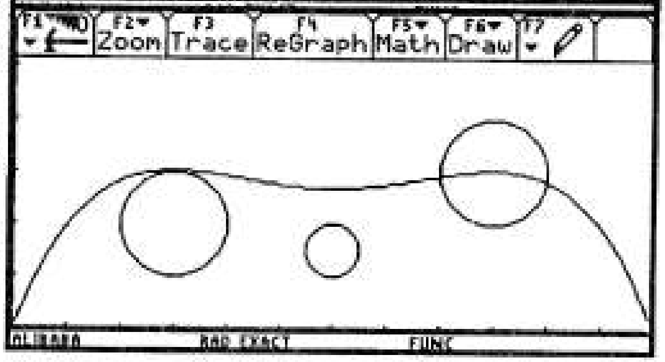
$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x^3+\frac{99}{2}x^2-162x+k$$

avec k=0 pour assurer le passage par l'origine. Elles déclarent alors : *"la calculatrice ne donne aucune courbe pour f"*.

Et pour cause : celle-ci sort de la fenêtre imposée (voir ci-dessus).

Pour obtenir une courbe plus satisfaisante, il fallait diviser f par (-60) par exemple (cf. ci-contre). Le sens de variation convient, pas les extremums !



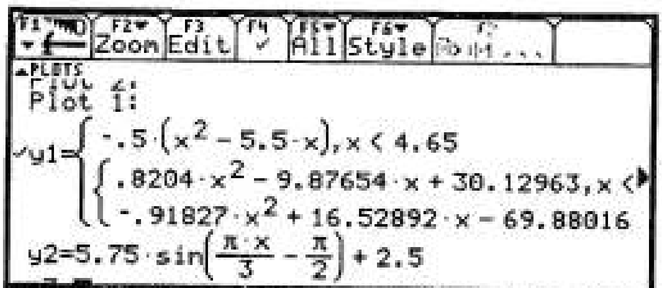


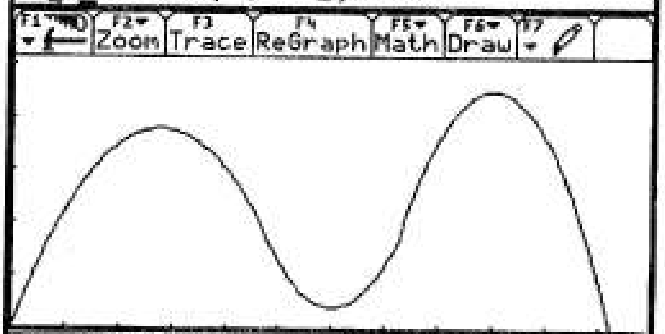
Solution du binôme 18 : Claude-Mathilde

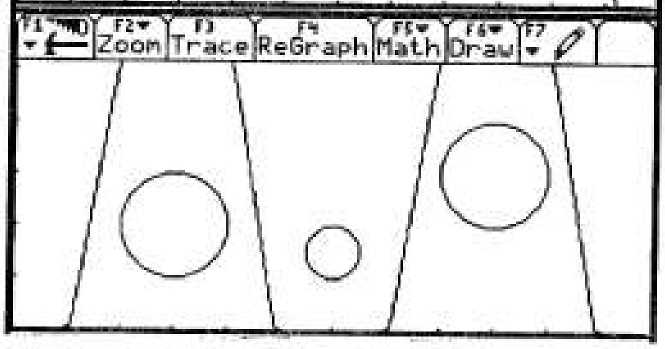
Plusieurs tentatives :

- regroupement de courbes obtenues grâce à l'application *Data/matrix* et la syntaxe *when* (cf. ci-dessous).C'est pas mal en apparence... Mais la fonction n'est pas continue aux points de "jonction" : la limite de f est égale à $\frac{1581}{800}$ à gauche de 4,65 et à $\frac{971409}{500000}$ à droite. C'est pas très différent... mais c'est différent.

- utilisation d'une fonction sinus. C'est bien dérivable... mais cela sort de la fenêtre.







2. Éléments de méthode

Nous proposerons ici quatre éléments pour une résolution.

<u>2.a. Une mathématisation des contraintes</u>

La première étape dans un problème consiste à donner une forme mathématique à un énoncé. Celui-ci contient déjà des éléments mathématiques : **il s'agit de trouver une fonction f dérivable passant par le point (0,0)**. D'autres éléments de l'énoncé n'ont pas encore une forme mathématique précise (la courbe doit passer au dessus du premier cercle, puis au dessous du second, etc... et ne pas sortir de la fenêtre choisie. Comment les modéliser ?

- <u>une première méthode</u> consiste à définir des conditions mathématiques <u>suffisantes</u> pour qu'une telle fonction vérifie les contraintes données.

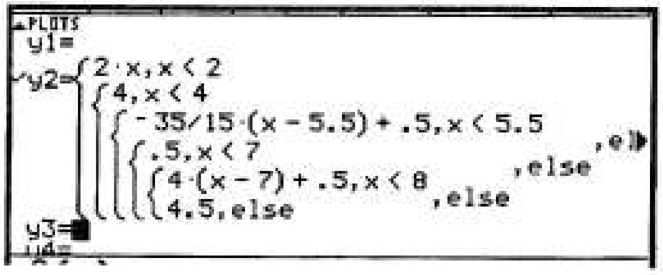
Pour cela, je définis une première fonction plus simple, c'est-à-dire non dérivable, qui satisfasse toutes les contraintes : une fonction affine par morceaux convient tout à fait.

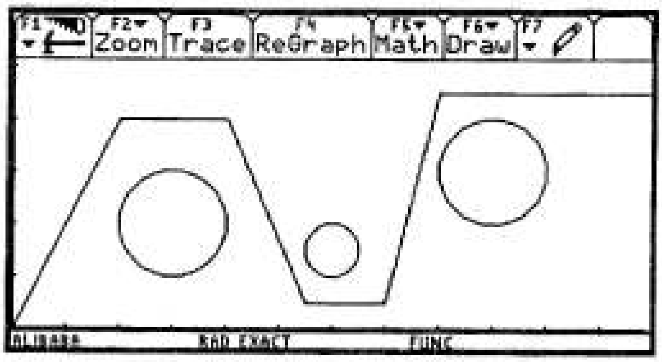
Puis je peux utiliser des théorèmes puissants (que vous verrez dans les classes post-bac) qui stipulent que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut, sur tout intervalle [a,b], toute fonction continue par une fonction dérivable.

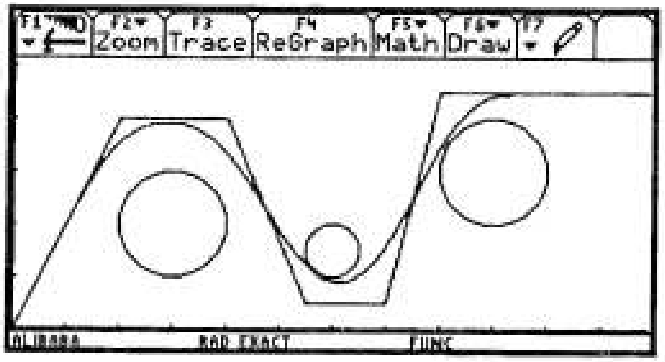
Il suffit alors d'utiliser un de ces théorèmes pour trouver une fonction dérivable qui approche la fonction affine par morceaux (déjà définie) suffisamment près : si par exemple elle ne s'en éloigne pas de plus de 0,1, je suis sûr que les contraintes de l'énoncé seront respectées (sauf au voisinage de l'origine).

Il n'est pas possible en TS de justifier davantage ce théorème : j'en montre simplement ci-contre une des applications à notre problème.

Pour approcher suffisamment la fonction affine par morceaux, il a "suffit" de choisir un polynôme de degré 60...







- <u>une deuxième méthode</u> consiste à commencer la résolution en définissant des conditions mathématiques non suffisantes. C'est ce que la plupart des binômes ont fait, avec trois stratégies possibles :

- on peut se donner des points répartis sur un itinéraire possible et chercher une fonction qui les approche (stratégie utilisée par le binôme 4 par exemple) ; mais rien n'indique qu'une fonction, si elle vérifie ces contraintes en chacun des points choisis, n'aura pas un comportement non conforme entre ces points !

- on peut considérer les variations des solutions supposées (stratégie utilisée par le binôme 17 par exemple), en indiquant que l'on recherche une fonction croissante sur [0; 3] de 0 à 4, puis décroissante, etc... Là aussi, même si une fonction a un sens de variation convenable, elle peut tout à fait traverser un cercle et n'être donc pas pertinente !

- on peut enfin rechercher, parmi les fonctions connues, des fonctions qui réalisent à peu près les contraintes imposées. C'est ce qu'ont fait par exemple les binômes 7 et 8 en recherchant des fonctions convenables à partir de la fonction sinus.

On voit bien les différences entre la méthode 1, systématique, et la méthode 2 qui procède nécessairement par tâtonnements, ajustements, rectifications.

On ne peut pas dire que telle méthode est supérieure à telle autre : c'est bien souvent une combinaison des différentes méthodes qui permettra d'aboutir.

2.b. Le choix entre une seule forme de fonction ou une fonction définie par morceaux

Comme toujours, les deux méthodes ont leurs avantages et leurs inconvénients :

- la première méthode a l'avantage de régler d'un coup les problèmes de continuité et de dérivabilité ; il suffit de prendre pour cela une fonction pour laquelle on bénéficiera de toutes les garanties (fonctions polynômes, trigonométriques). Le désavantage est que la même formule devra satisfaire toutes les contraintes (relatives aux trois cercles et à la fenêtre) ;

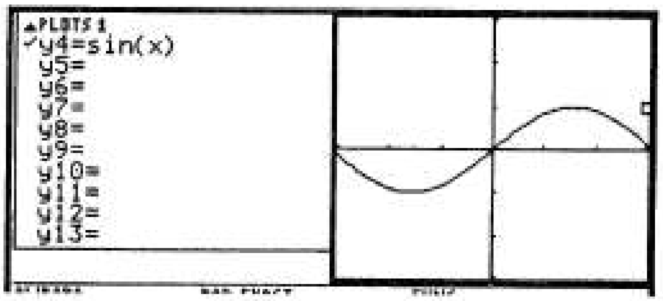
- la deuxième méthode présente l'avantage d'avoir à gérer peu de contraintes à la fois. On peut choisir une première expression pour la fonction qui permettra de "passer" le premier cercle, une deuxième expression qui permettra de passer le deuxième cercle; etc... Le désavantage est qu'il faudra s'assurer à chaque extrémité de l'intervalle de définition de la continuité et de la dérivabilité du raccord. Par exemple, si on définit une première forme y1 sur l'intervalle [0; 5], il faudra poser comme contrainte pour le deuxième "morceau" y2 sur [5; 7] : $y_1(5) = y_2(5)$ et $y'_1(5) = y'_2(5)$.

2.c. Le choix, parmi les différentes fonctions connues, des fonctions pertinentes.

Une chose est sûre : aucune recherche n'est purement aléatoire : on a toujours une petite idée de ce que l'on cherche. La recherche est d'autant plus efficace que les objets de référence (ici les fonctions) sont bien rangés dans sa tête... Deux éléments sont particulièrement importants :

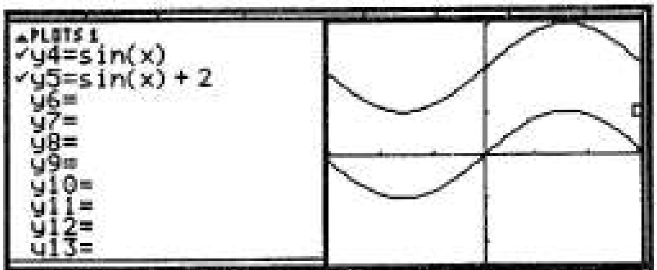
- le choix d'une forme pertinente : si on cherche une fonction croissante puis décroissante, une fonction trinôme $x \to ax^2+bx+c$ (avec $a<0$) peut convenir. Si on cherche une fonction à bosses de chameau (2 bosses !), un polynôme du quatrième degré peut convenir... ou une fonction sinus ! Plus le choix de la fonction est pertinent, plus les manoeuvres d'ajustement seront réduites !
- le choix des déformations pertinentes : une forme étant trouvée, il est très fréquent en effet qu'elle ne satisfasse pas à toutes les contraintes. Il faudra alors procéder à des ajustements. Il est important de se rappeler de ce qui a été vu en classe de seconde : les fonctions associées (cf. ci-dessous).

On considère ci-contre la fonction f : $x \to \sin x$



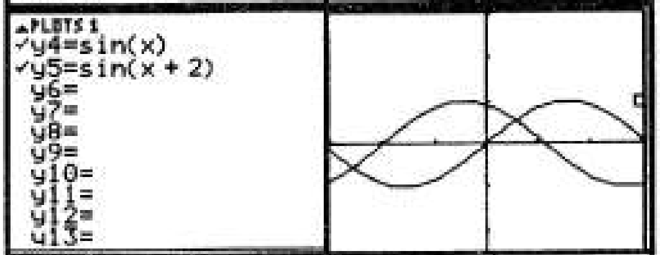
Soit la fonction g telle que $g(x) = f(x)+2$.

On passe du graphique de f à celui de g par une translation de vecteur directeur (0 ; 2).



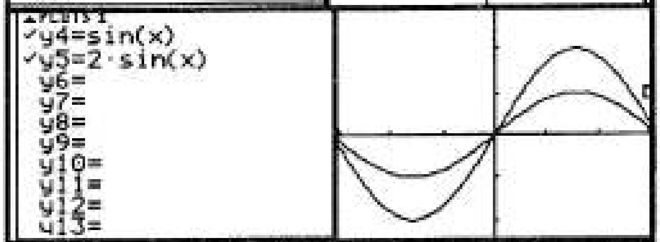
Soit la fonction h telle que $h(x) = f(x+2)$.

On passe du graphique de f à celui de i par une translation de vecteur directeur (-2 ; 0).



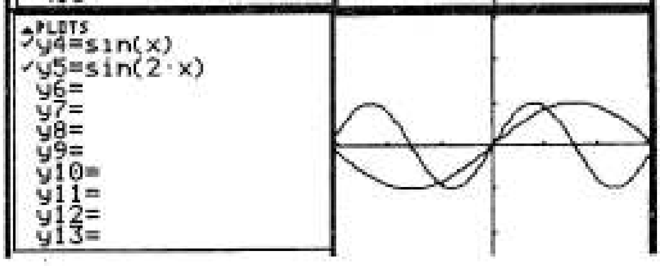
Soit alors la fonction i telle que $i(x) = 2f(x)$.

On passe du graphique de f à celui de i par une "dilatation" (on appelle cette transformation une affinité) verticale de rapport 2.



Soit alors la fonction j telle que $j(x) = f(2x)$.

On passe du graphique de f à celui de i par une affinité horizontale de rapport 0,5.



2.d. Le choix entre interpolation ou approximation.

Pour les fonctions polynômes, on dispose d'un théorème très puissant : **si on se donne, dans un repère, n points d'abscisses distinctes, il existe un polynôme et un seul, de degré inférieur ou égal à n-1, dont la courbe passe par tous ces points** :

- si l'on se donne deux points d'abscisses distinctes, il existe une fonction affine (polynôme de degré inférieur ou égal à 1) et une seule dont la courbe (une droite) passe par ces deux points ;

- si l'on se donne trois points d'abscisses distinctes, il existe un polynôme et un seul de degré inférieur ou égal à deux (une fonction affine ou un trinôme donc) dont la courbe passe par ces trois points (si les points sont alignés ce sera une droite, sinon une parabole).

Si on dispose de 11 points, on a le choix entre deux stratégies :

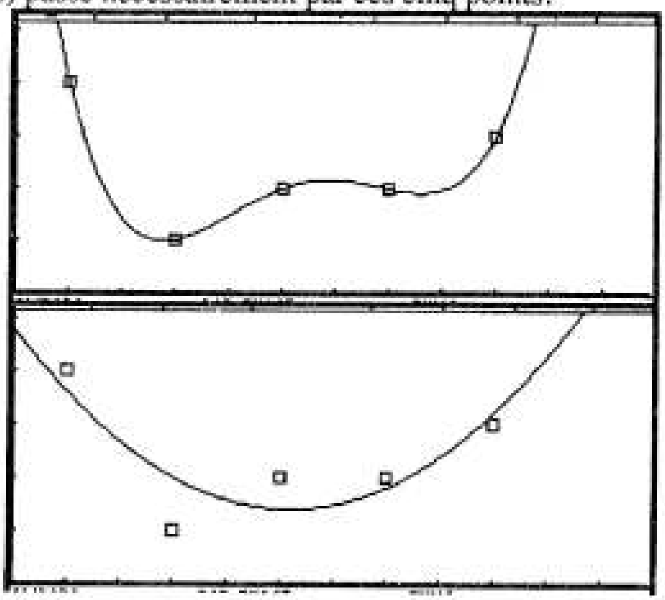
- soit on utilise le théorème ci-dessus, et l'on détermine l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 10 qui passe par ces points. C'est ce qu'on appelle une stratégie d'**interpolation**. Avantage : on réalise un travail précis, la courbe obtenue passe exactement par les points voulus. Inconvénients : cela fait beaucoup de calculs (mais si l'on dispose d'un logiciel de mathématique, cela n'est pas très grave!). Autre inconvénient beaucoup plus gênant : plus le polynôme a un degré élevé, plus ses variations peuvent être brutales ; ainsi, entre deux points par lesquels il passe effectivement, il peut se produire quelques accidents ...

- soit on détermine un polynôme de degré inférieur, qui ne passera plus nécessairement par les 11 points donnés, mais qui les approchera "au mieux" (il existe des méthodes d'optimisation qui permettent de déterminer de tels polynômes). C'est ce qu'on appelle une méthode d'**approximation**. Inconvénient : les points donnés ne sont plus atteints. Avantage : on travaille avec des polynômes de degré inférieur, davantage contrôlables.

L'application *Data/matrix* de la TI-92 peut réaliser certains de ces calculs d'approximation (on dit aussi régression). Il s'agit des commandes du menu *F5* : la commande *LinReg* permet d'approcher au mieux[2] une famille de points par une droite, la commande *QuadReg* permet de réaliser cette approche avec un trinôme, la commande *CubicReg* avec un polynôme du troisième degré, la commande *QuartReg* avec un polynôme du quatrième degré. L'intérêt est que, dans certains cas, l'approximation devient une interpolation, c'est-à-dire qu'au lieu d'approcher simplement les points, on les atteint exactement. En effet :

- si l'on dispose de deux points, la commande *LinReg* donnera l'équation de la droite qui approche au mieux deux points ; mais celle-ci (application du théorème ci-dessus) passe nécessairement par ces deux points!
- si l'on dispose de trois points, la commande *QuadReg* donnera l'équation de la parabole qui approche au mieux ces trois points ; mais celle-ci (application du théorème ci-dessus) passe nécessairement par ces trois points!
- si l'on dispose de quatre points, la commande *CubicReg* donnera l'équation de la cubique qui approche au mieux ces quatre points ; mais celle-ci (application du théorème ci-dessus) passe nécessairement par ces quatre points!
- si l'on dispose de cinq points, la commande *QuartReg* donnera l'équation de la courbe du quatrième degré qui approche au mieux ces cinq points ; mais celle-ci (application du théorème ci-dessus) passe nécessairement par ces cinq points!

Un exemple : j'ai défini 5 points dans l'application *Data/matrix*. Si j'utilise la commande *QuartReg* du menu *F5*, j'obtiens bien l'unique polynôme du quatrième degré passant par les 5 points.



Si j'utilise la commande *QuadReg* du menu *F5*, j'obtiens par contre un polynôme de degré deux qui ne passe plus par ces points, mais se contente de les approcher aux mieux (l'optimisation consiste à déterminer la courbe telle que la somme des carrés des distances des 5 points à cette courbe soit la plus petite possible).

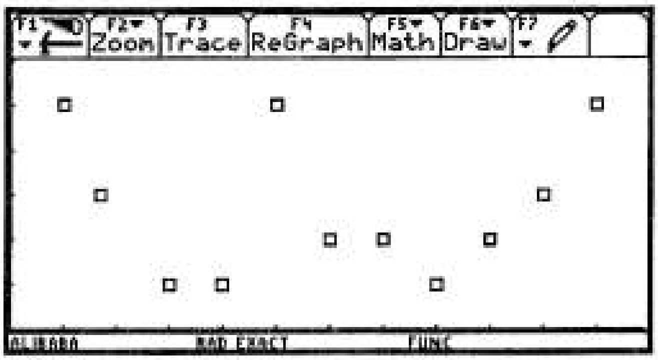
Cependant, attention : les calculs de régression du menu *F5* de l'application *Data/matrix* sont toujours réalisés en mode calcul approché (ce qui donne les longues écritures décimales qu'ont obtenu les binômes qui ont choisi cette méthode). Si l'on veut des calculs exacts, il faudra procéder autrement !

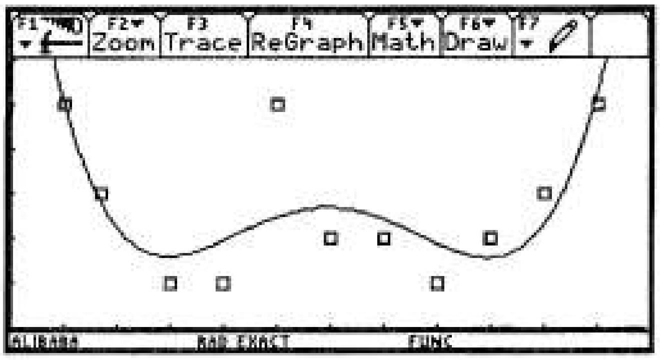
---

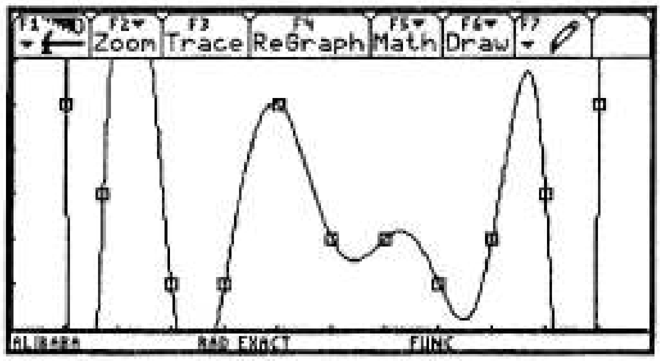
[2] L'expression "au mieux" a un sens précis. Supposons par exemple que l'on veuille approcher au mieux une famille de points (x1, y1), (x2, y2)...(xn, yn) par une droite d'équation y = ax+b. On calcule alors pour chaque point d'abscisse xi le carré de la différence entre son ordonnée et l'ordonnée correspondante de la droite, c'est-à-dire le carré de la différence (y - axi - b). On fait ensuite la somme de ces carrés et on détermine a et b (on démontre qu'ils existent et sont uniques) pour que cette somme soit minimale. C'est la méthode des "moindres carrés", dont la démonstration sort du cadre de cette étude.

D'ailleurs, si on dispose de plus de 5 points, la TI-92 ne permet plus d'obtenir directement les polynômes d'interpolation. On dispose bien sûr de méthodes systématiques théoriques (le binôme 4 a évoqué les stratégies d'interpolation de Lagrange), mais on peut aussi s'en tirer par des résolutions de systèmes d'équation. Par exemple, si on recherche l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 5 passant par 6 points, il suffit d'écrire que les coordonnées des 6 points en question vérifient $f(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$. On dispose alors d'un système de 6 équations à 6 inconnues qu'il suffit de résoudre. **On aura alors les résultats en calcul exact (si bien sûr la calculatrice est en "mode exact") !**

Pour terminer, une dernière illustration de la réflexion nécessaire dans toute activité de modélisation mathématique :







On veut modéliser un phénomène pour lequel on dispose de 11 mesures.

Première approche, avec une méthode d'approximation : du fait de l'allure du nuage de points, on peut penser plutôt à un polynôme du quatrième degré (profil chameau).

Le résultat obtenu avec la commande *QuartReg* du menu *F5* de l'application *Data/matrix* donne un résultat convenable, qui donne au point de coordonnées (5,5) un statut d'exception (peut-être était-ce le résultat d'une mesure erronée, d'une erreur d'entrée dans un tableau ou encore d'une perturbation accidentelle du phénomène).

La modélisation mathématique permet ainsi d'interroger le phénomène observé lui-même.

Deuxième approche, avec une méthode d'interpolation. On détermine l'unique polynôme de degré 10 passant par les 11 points.

On gagne en précision, on distingue moins les grandes tendances du phénomène. On peut observer en particulier les variations importantes entre deux points de mesure successifs. Deux conclusions possibles alors :

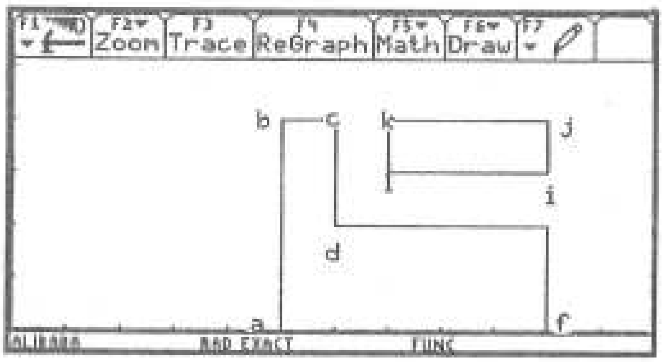
- soit le phénomène observé est par nature chaotique ; alors la modélisation mathématique est acceptable ;
- soit ce n'est pas le cas. Et alors la modélisation mathématique n'est pas la bonne.

En conclusion : disposer de théorèmes puissants et de calculatrices sophistiquées ne dispense pas de réfléchir... Tout au contraire !

TP N°4

	On utilisera dans ce TP la même fenêtre que pour le TP 3 : [0; 11,9] pour x, [0; 5,1] pour y.

On s'intéresse en effet à un problème proche de celui du TP précédent. Cette fois-ci la figure est la suivante :



Les points ont les coordonnées suivantes :
O(0, 0) ; A(5, 0) ; B(5, 4) ; C(6, 4) ; D(6, 2) ; E(10, 2) ; F(10, 0) ; I(10, 3) ; J(10, 4);K(7, 4) ; L(7, 3).

On créera cette figure sur l'écran par l'utilisation de la commande *Line* du menu *F7* (placer le curseur sur une extrémité du segment puis *Enter* et recommencer avec l'autre extrémité).

On peut bien sûr noter les points avec le menu *F7*, commande *Text*. Mais c'est inutile et même gênant (surcharge de l'écran). On sauvegardera cette figure sous l'étiquette *Avion*.

La question du jour

On veut déterminer une fonction qui satisfasse des contraintes qui pourraient être celles de la trajectoire d'un avion : il décolle en O, doit passer au dessus d'un relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau [DE], mais sous la masse nuageuse (IJKL) et enfin atterir sur une piste qui commence en F. On considèrera que le dessin ci-dessus est une modélisation qui "enveloppe" les reliefs réels : donc l'avion peut passer par B, mais pas en dessous !

A la différence du TP 3, on s'intéresse aussi au comportement de la fonction en dehors de la fenêtre : décollage oblige, la dérivée de la fonction devra être nulle en 0 et, atterrissage oblige, la limite de la fonction en $+\infty$ devra être nulle (c'est-à-dire que l'on considérera que la piste d'atterrissage a une longueur infinie).

Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes.

La question du lendemain

Il s'agit en fait d'un vol acrobatique. L'avion peut-il réaliser un looping ?

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TP N°4

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Emilie Franceschini et Véronique Gerlotto.

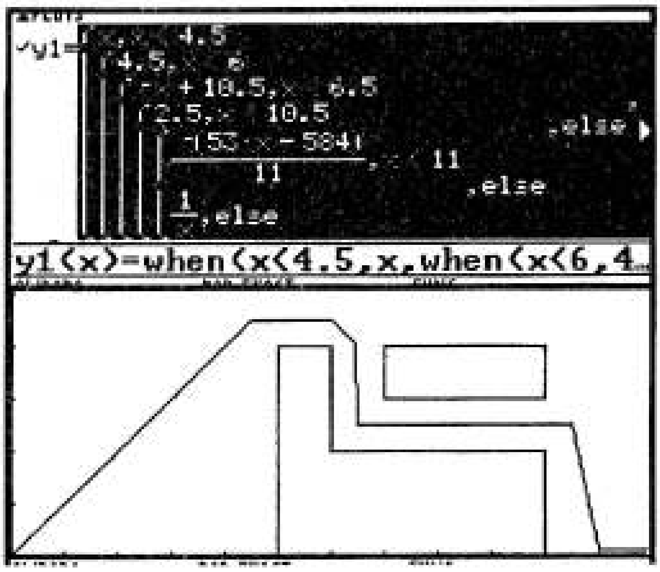
Nous présentons simplement dans ces éléments les réalisations des binômes qui ont eu le temps, dans le cadre de l'heure de TP, de proposer une solution. Certaines sont partielles, ou fausses, et ont dû être remises en chantier ultérieurement. On pourra constater à la lecture des solutions proposées, que les suggestions du TP précédent ont été mises en application avec profit. La mise en commun des solutions, ou embryons de solutions, ci-dessous donne à chacun des idées pour un enrichissement des premières solutions trouvées ou une rectification des erreurs.

Solution du binôme 1
Marguerite-Muriel

Grande audace théorique : on invente ici un aeroplane à trajectoire rectiligne. On n'a pas fait mieux depuis le révolver coudé (pour tirer dans les coins).

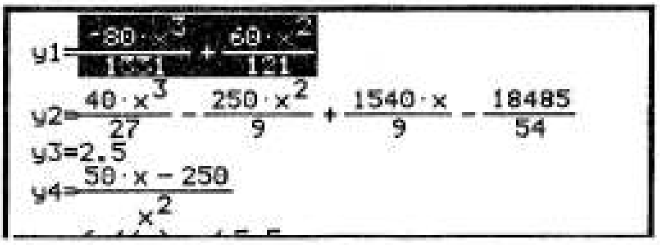
Evidemment une telle fonction n'est pas dérivable (cassure des pentes) aux points de jonction ! Il reste à "arrondir les angles", ce qui suppose d'avoir recours à d'autres fonctions que des fonctions affines...

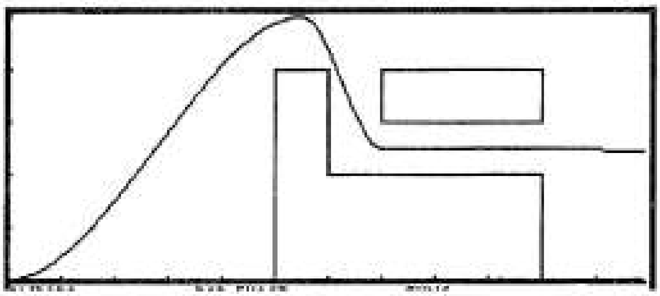
A reprendre donc.



Solution du binôme 2
Isabelle-Julie

Elles ont choisi, dans le répertoire des fonctions de référence, des polynômes du trosième degré. Les points de raccord sont choisis aux extremums communs des deux fonctions successives. Cela assure du même coup la dérivabilité en ces points.





Bonne remarque du binôme : *on ne pourra jamais trouver une seule fonction qui "fasse un looping" car cela voudrait dire qu'à un même x on pourrait associer plusieurs y. Ce ne serait plus une fonction.*

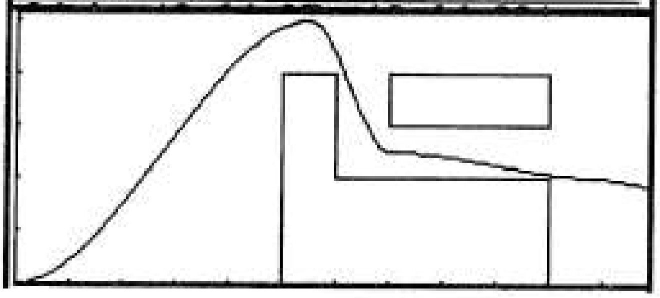
Solution du binôme 3
Emilie-Véronique

Même principe que le binôme précédent. A la place d'une fonction constante, le binôme a déterminé une autre fonction du troisième degré pour le "couloir".

Malgré son allure parfois anguleuse, la courbe est la représentation d'une fonction parfaitement continue et dérivable.

Ne pas se fier aux apparences !

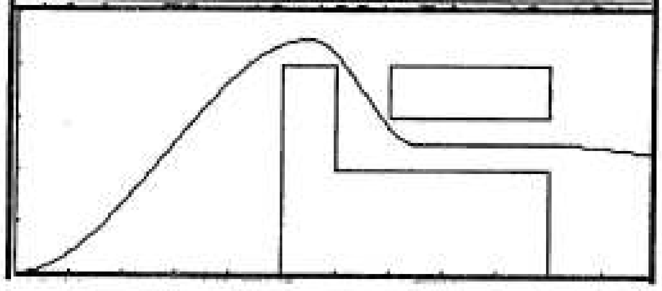
$$y1=\frac{60\cdot x}{1331}+\frac{60\cdot x}{121}$$
$$y2=\frac{40\cdot x^3}{27}-\frac{250\cdot x^2}{9}+\frac{1540\cdot x}{9}-\frac{18485}{54}$$
$$y3=\frac{x^3}{64}-\frac{27\cdot x^2}{64}+\frac{231\cdot x}{64}-\frac{477}{64}$$
$$y4=\frac{22}{x}$$



Solution du binôme 4
Alice-Sandrine

Encore le même principe de résolution. Pour ce binôme comme pour les deux précédents, la détermination des coefficients se fait par utilisation de l'application *Data/Matrix* : les points de raccord, choisis les contraintes en découlent (4 contraintes : deux points de raccord avec les dérivées nulles en ces points). Les polynômes du troisième dégré peuvent alors être déterminés.

$$y1=\frac{-72\cdot x^3}{1331}+\frac{54\cdot x^2}{121}$$
$$y2=\frac{x^3}{2}-\frac{39\cdot x^2}{4}+\frac{495\cdot x}{8}-\frac{1985}{16}$$
$$y3=2.5$$
$$y4=-1500\cdot\left(\frac{-.5}{x^2}+\frac{10}{3\cdot x^3}\right)$$

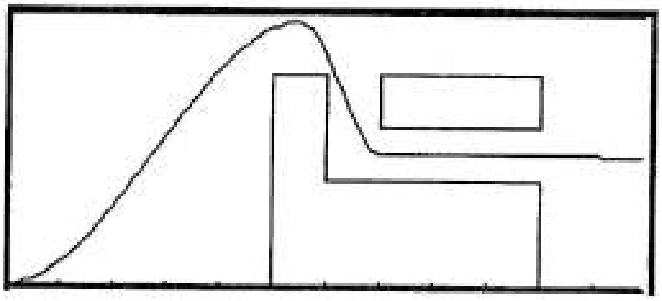


Solution du binôme 7
Alex-Audrey

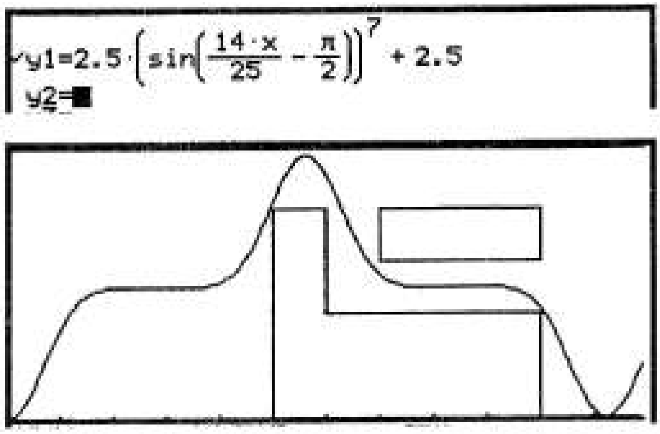
Habile : le choix est fait de déterminer les polynômes du troisième degré à partir de leurs dérivées. Ainsi le premier tronçon est déterminé par $f'(0) = f'(5,5) = 0$. Ceci fournit la dérivée, nécessairement du deuxième degré : $f'(x) = ax(x-5,5)$. f est alors déterminée par primitivation, les constantes étant alors ajustées pour que la courbe passe par les points voulus.

Même démarche pour le deuxième tronçon.

$$y1=\frac{-240\cdot x^2\cdot(4\cdot x-33)}{12\cdot 1331}$$
$$y2=\frac{40\cdot x\cdot(4\cdot x^2-75\cdot x+462)}{9\cdot 12}-\frac{18485}{54}$$
$$y3=2.5$$
$$y4=\frac{50\cdot x-250}{x^2}$$

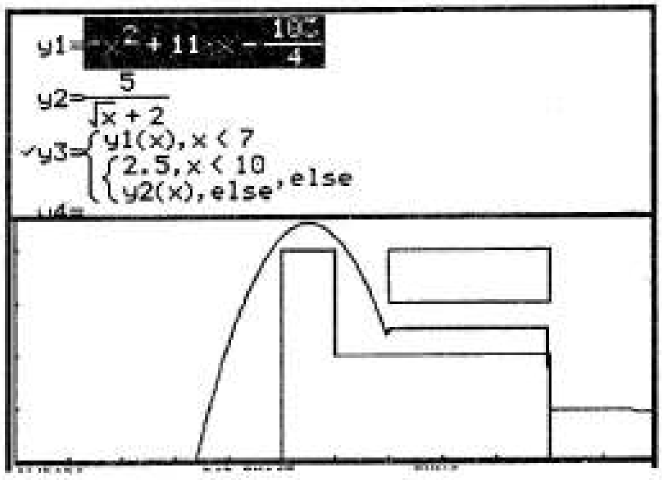


Solution du binôme 8
Benoît-Frédéric



Solution extrêmement habile : ils ont constaté qu'en élevant une fonction sinus à une puissance impaire importante, on obtenait un "applatissement" de la courbe qui permettait le passage dans un couloir donné. Il suffit alors d'ajuster les coefficients (à partir du bilan du TP précédent sur les fonctions associées) pour réaliser les translations et affinités nécessaires.

Solution du "binôme" 9
Cécile-Marianne-Valérie

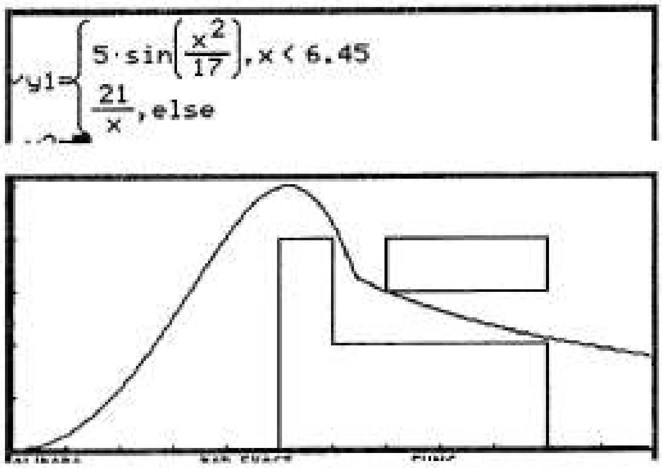


Rien ne se raccorde... Et cela dès le départ. Une seule contrainte est respectée : la limite en $+\infty$.

Nous disposons ainsi d'un avion qui ne peut pas décoller, dont le vol est parsemé d'accidents catastrophiques... mais qui atterrit dans de bonnes conditions.

Est-ce bien raisonnable ?

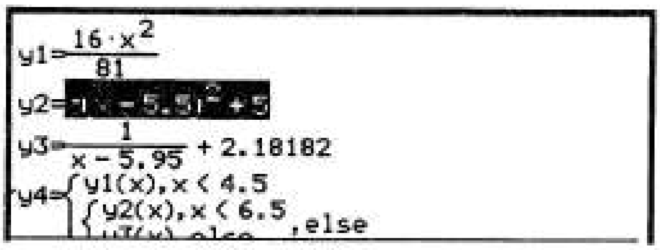
Solution du binôme 10
Laetitia-Sofie



Le binôme 10 essaie de réaliser les contraintes avec deux fonctions. Cela convient aux deux extrémités (fonction nulle à dérivée nulle en 0, limite nulle en $+\infty$). Hélas, le raccord des deux tronçons n'est ni dérivable ni continu ! Pourtant la vérification de dérivabilité avait été faite au point charnière, mais avec une syntaxe fausse : *d(y1(6,45), x)* donne bien sûr 0 (puisqu'il s'agit alors de la dérivée d'une constante!).

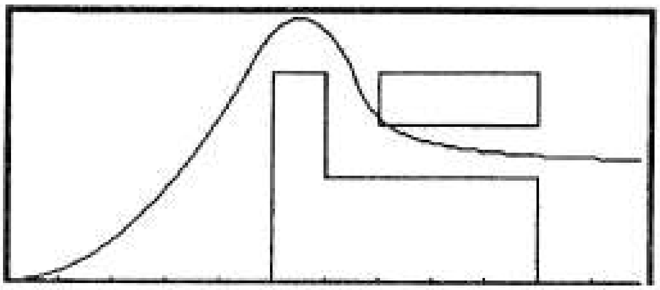
On peut voir ci-contre l'effet de cette erreur de syntaxe (d'abord la syntaxe fausse, puis la syntaxe juste) : une petite différence et une grande conséquence...

Solution du binôme 12
Geneviève-Olivier



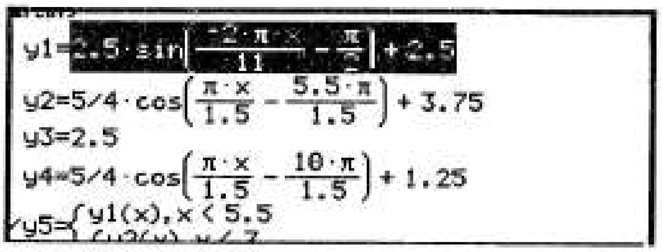
Il apparaît un petit problème : la courbe semble bien percuter le rectangle.

Mais le problème le plus important n'apparaît pas "à l'oeil nu" : malgré son aspect régulier, la courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction dérivable (ni même continue) aux points de raccord.



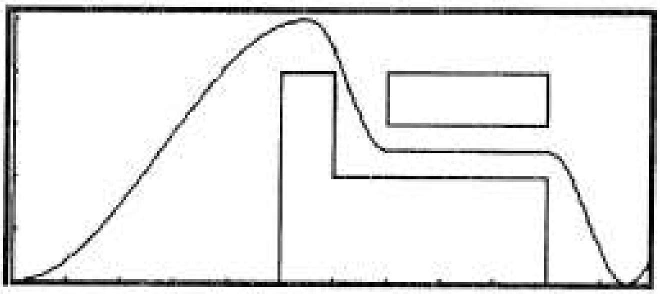
Ne pas se fier aux apparences (bis) !

Solution du binôme 13
Jean François-Mathieu



Ajustement habile de fonctions sinus ou cosinus. Pour assurer la dérivabilité, les raccords sont faits en des points où la dérivée est nulle. Le choix des coefficients des fonctions a.sin(bx+c)+d est aussi très clairement justifié :

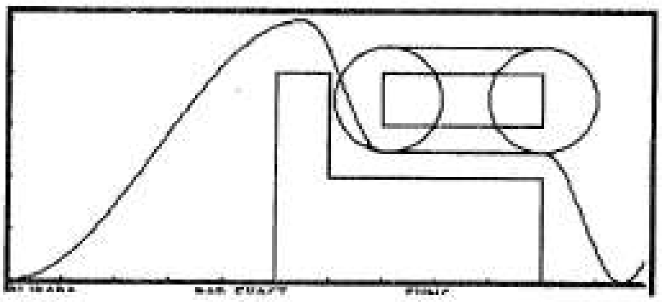
- a pour donner de l'amplitude à la fonction ;
- b pour faire varier les x plus ou moins vite en fonction de la distance à parcourir ;
- c pour décaler le sommet ;
- d pour relever la fonction.



Le binôme indique qu'il dispose ainsi d'une grande souplesse pour la détermination de la courbe : *on peut réaliser l'aterrissage aussi près que l'on veut du rectangle.*

Un petit oubli : il aurait fallu prolonger la fonction à partir de l'atterrissage par une fonction nulle (comme pour le binôme 8).

La cerise sur le gâteau : le binôme propose un petit looping à partir de la définition de cercles (ou de demi-cercles). Evidemment, on ne dispose plus alors d'une fonction, mais de plusieurs fonctions superposées, comme l'a remarqué le binôme 2.



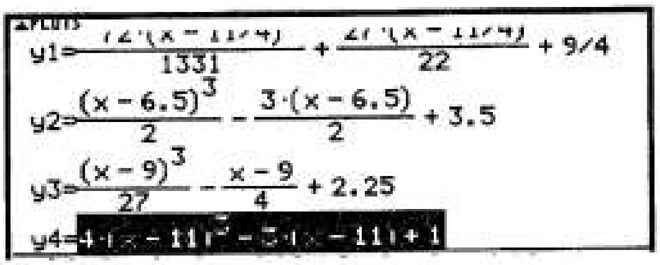
Solution du binôme 14
Aurélia-Xavier

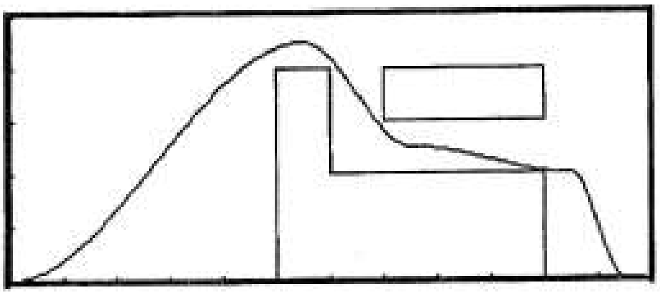
Comme pour le binôme 7, on raccorde des polynômes du troisième degré aux points où la dérivée s'annule. Mais il y a ici quatre fonctions cubiques : la dernière s'arrête pour x = 11,5, relayée par le fonction nulle.

Une stratégie de calcul subtile : on se place à chaque fois au centre de symétrie de la cubique, puis on fait un changement de repère. Ceci permet des calculs simplifiés.

Malgré l'allure accidentée de la courbe, celle-ci est la représentation d'une fonction dérivable partout.

Ne pas se fier aux apparences (ter) !

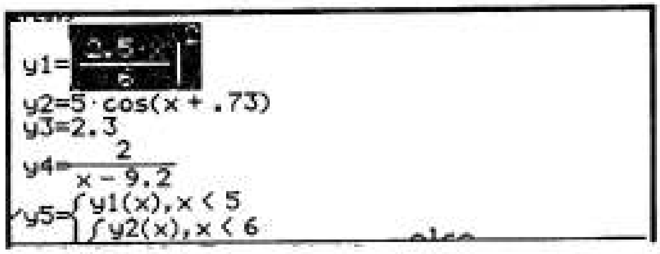


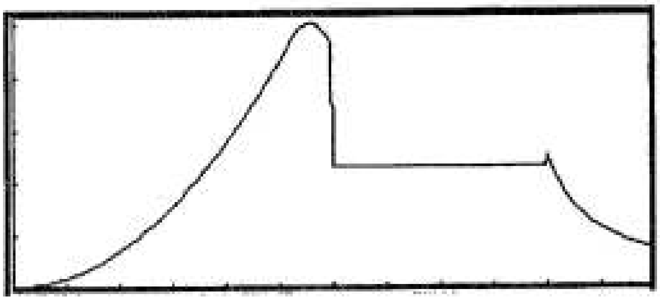


Solution du binôme 16
Aurélie-Mélanie

Tout ceci est bien approximatif... Les raccords ne sont satisfaisants ni sur le plan de la dérivabilité, ni sur le plan de la continuité.

Pour assurer le respect de ces contraintes, il aurait fallu les inscrire dès le départ dans le cahier des charges de la résolution du problème !





<u>Petit bilan</u> : pour résoudre le problème posé, les différents binômes ont dû se poser les mêmes questions :

- quelles fonctions choisir dans le répertoire connu ?
- comment ajuster une quasi-solution pour qu'elle réponde aux contraintes imposées ?
- quelles sont les méthodes de calcul les plus simples et les plus efficaces ?
- comment vérifier la justesse de la fonction proposée ?

L'intérêt de certaines solutions est qu'elles sont susceptibles d'ajustements ultérieurs, pour répondre à de nouvelles contraintes. Nous en reparlerons lors du TP n°6.

TP N°5

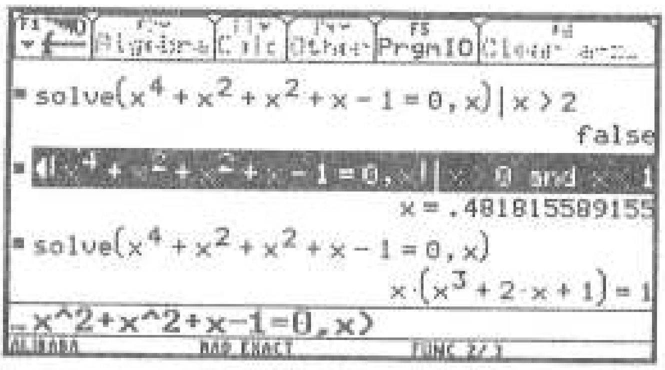
On s'intéressera dans ce TP à la résolution d'équations à une inconnue.

Celles-ci peuvent être traitées dans l'**application graphique** : menu *F5 Math*, commande *Zero* s'il s'agit d'une équation du type f(x) = 0, commande *Intersection* s'il s'agit d'une équation du type f(x) = g(x).

Mais attention : dans l'application graphique, le mode est toujours en calcul approché.

Les équations peuvent aussi être traitées dans l'**application initiale**, soit en mode exact, soit en mode approché. Attention, en mode approché, la commande *Solve* active un processus de recherche qui peut parfois déraper (certaines solutions peuvent échapper à la recherche ; on verra aussi que l'on peut obtenir des solutions parasites...). En calcul approché, la plus grande vigilance est donc de règle !

NB : on peut aussi préciser la recherche des valeurs approchées des solutions par la syntaxe *(solve f(x) = 0,x) | x<a* , ou mieux *(solve f(x) = 0,x) | x>a and x<b*. La recherche sur la zone en question est alors plus précise (ce qui ne garantit pas son infaillibilité).



Un exemple ci-contre :
- en mode approché, pour x>2, le logiciel ne détecte aucune solution ;
- en mode approché, entre 0 et 1, le logiciel détecte une solution ;
- en mode exact, le logiciel se contente de retourner la question (reformulée).

La question du jour

Soit l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 100\sin x$

A-t-elle un nombre fini ou infini de solutions ?

- si c'est un nombre fini, combien et pourquoi ?
- si c'est un nombre infini, pourquoi ?

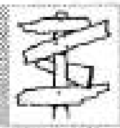
Pouvez-vous donner un encadrement à 10^{-5} près de la 10ième, 100ième, 1997ième solution ?

Les questions du lendemain

Soit l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = a.\sin x$:

- quelle(s) valeurs attribuer à a pour que cette équation ait exactement 1997 solutions ?
- quelle(s) valeurs attribuer à a pour que cette équation ait exactement 2000 solutions ?

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°5



Le texte qui suit a été revu, corrigé et complété par Philippe Souteyrand et Nicolais Téot.

Prologue

Il s'agit là de fonctions de références. La présence de la fonction racine carrée impose de traiter l'équation sur $\mathbb{R}+$ (nous pouvons constater que 0 est racine). Après ces quelques considérations générales, la plupart des binômes ont utilisé les différentes applications de leur calculatrice, en suivant des itinéraires assez variés, pour une première approche expérimentale du problème : trouver la $10^{\text{ième}}$, $100^{\text{ième}}$ ... solution.

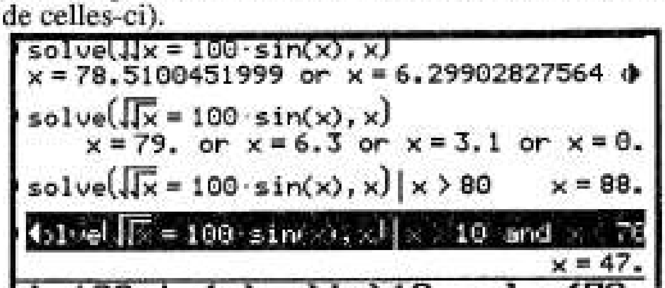
Premières observations

<u>Avec l'application initiale, les surprises du calcul approché</u>

L'application de la commande *Solve* permet d'obtenir les valeurs approchées de quelques racines. Sans restriction de domaine de recherche, la calculatrice propose les valeurs approchées de 4 racines (notons que la limitation du format d'affichage de celles-ci permet une lecture directe de celles-ci).

Il serait tout à fait naïf de croire que ces 4 racines sont les seules :

- la précision > *80* permet d'obtenir la nouvelle racine 88 ;
- la précision > *10 and* < *70* permet d'obtenir la racine intermédiaire 47.

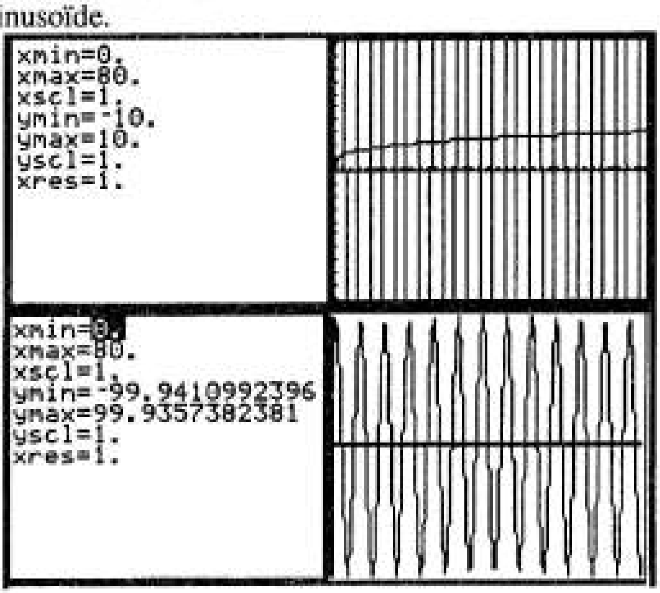


Dans ces conditions, il est assez illusoire d'espérer déterminer l'ensemble des solutions de cette équation sans prendre un peu de recul sur le problème.

<u>Avec l'application graphique, la variation des formes du même problème</u>

Nous pouvons commencer l'observation par la considération des deux fonctions sur l'intervalle [0, 80] pour lequel l'application initiale ne donnait que 4 solutions. Il est clair que les intersections entre les deux courbes sont beaucoup plus nombreuses que cela : la représentation graphique de la fonction racine rencontre "évidemment" deux fois chaque arche supérieure de la sinusoïde.

Il n'était certes pas nécessaire d'utiliser une calculatrice graphique pour découvrir cela. La seule considération de l'écran ne permet pas d'ailleurs de comprendre le comportement des fonctions en présence : les barres verticales ci-contre n'évoquent pas particulièrement une sinusoïde. La référence aux fonctions connues est indispensable pour comprendre ce qui se passe ! La commande *Zoomfit* permet l'ajustement "en hauteur" de la fenêtre, en faisant apparaître les images de tous les points de calcul sélectionnés sur l'intervalle [0, 80].

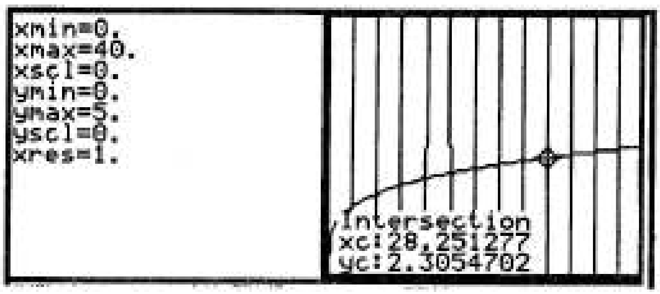


On notera au passage que :

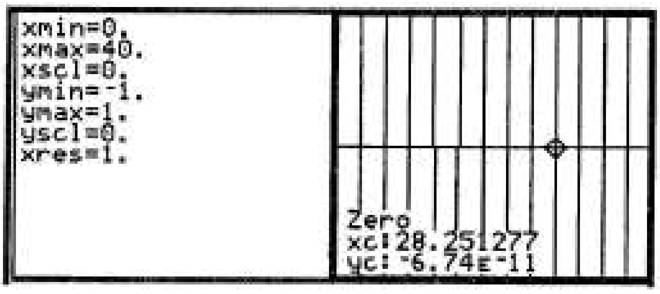
- la commande *Zoomfit* ne permet pas d'obtenir l'intervalle attendu [-100, 100] : il eut été en fait étonnant que les extremums de la fonction sinus correspondent justement à des points de calcul de l'application graphique !

- le graphique de la fonction racine ne peut plus être distingué de l'axe des abscisses ($\sqrt{\sqrt{x}}$ est petit devant 100sinx sur l'intervalle [0, 80]). Il est impossible de trouver une fenêtre qui soit ajustée à des fonctions d'ordres de grandeur différents. Le problème est justement que les ordres de grandeur sont inversés pour x grand, du fait de la limite infinie de la fonction racine en $+\infty$!

Une fois remarquée la régularité du phénomène à partir des fonctions de référence, il semble possible de repérer les solutions demandées : la $10^{\text{ième}}$ solution par exemple (sans oublier que la première solution est 0 !).



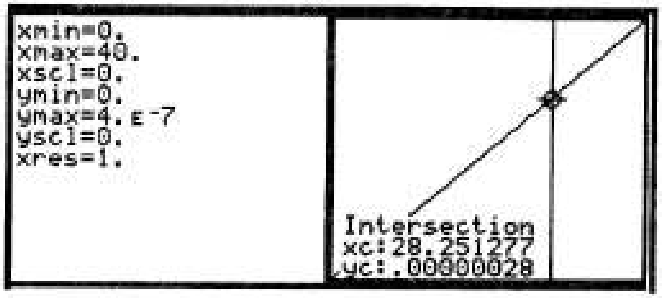
Certains binômes ont considéré la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$ - 100sinx, estimant que le cadrage des ordonnées était alors plus simple (on cherche en effet les zéros d'une fonction et non pas l'intersection de deux courbes).

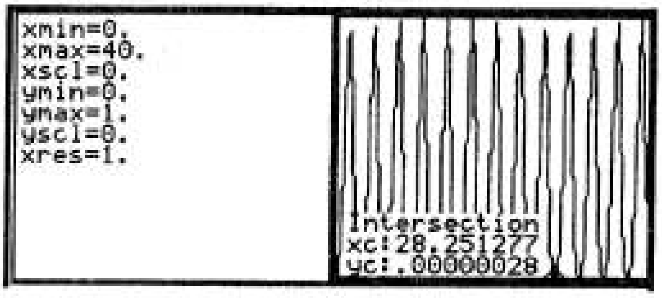


D'autres binômes se sont débarrassés de la racine carré en élevant les deux membres de l'équation à la puissance 4. La considération des graphiques des deux fonctions $\frac{x}{10^8}$ et $\sin^4 x$ sur le même intervalle [0, 40] révèle quelques surprises :

- si on adapte la fenêtre à la fonction affine, l'essentiel de la fonction sinus disparaît (cf. ci-contre) ;

- si on adapte la fenêtre à la fonction sinus, la fonction affine disparaît.





Ces phénomènes découlent des contraintes de discrétisation de l'écran (cf. TP n°3). Dans ces conditions, il est difficile de déterminer la $10^{\text{ième}}$ racine...

D'un cas particulier à l'autre.

Certains groupes ont tenté de poursuivre la recherche de racines particulières, avec des méthodes plus ou moins efficaces... et exactes. La plupart du temps, d'ailleurs, c'est une combinaison de ces méthodes qui a été mise en oeuvre. Passons en revue l'essentiel d'entre elles.

Le dénombrement acharné.

Une première démarche a consisté à utiliser la commande *Trace* pour se déplacer sur une des courbes et déterminer ainsi une première, puis une deuxième... puis une centième solution. Cette stratégie s'est révélée inpraticable pour atteindre la 1997$^{\text{ième}}$ solution...

La recherche d'une loi de formation simple des solutions.

L'observation des différents écrans, liée à la périodicité de la fonction sinus a pu donner l'impression d'un espacement régulier des solutions. L'idée de la progression arithmétique de celles-ci s'est imposée alors un temps. Soit r la raison de cette suite. La 10$^{\text{ième}}$ racine serait alors 9r (car la première racine est 0), la 100$^{\text{ième}}$ racine serait alors 99r, la 1997$^{\text{ième}}$ racine serait 1996r. En conséquence, si on note a la 10$^{\text{ième}}$ racine dont une valeur approchée a été déterminée grâce à l'application graphique :

- la 100$^{\text{ième}}$ racine serait égale à $\frac{99}{9}a = 11a$;
- la 1997$^{\text{ième}}$ racine serait égale à $\frac{1996}{9}a$.

(on a pu trouver aussi des raisonnements un peu plus rapides - c'est-à-dire plus courts- du type : pour obtenir la 100$^{\text{ième}}$ racine, je multiplie la 10$^{\text{ième}}$ racine par 10...).

Le problème est évidemment que l'on n'a ici aucune garantie ni sur la précision, ni sur l'existence effective de ces racines !

```
■ 28.251277 → a                 28.251277
■ 11·a                          310.764047
■ 1996·a / 9                    6265.50543244
```

La combinaison d'une première localisation et de la commande *Solve*

L'utilisation de cette commande permet d'affiner la première localisation grossière, avec quelques tatonnements (cf. ci-contre).

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs :

- elle se fie aux algorithmes de calcul approché de la calculatrice ;
- elle ne donne pas le recul nécessaire à l'analyse des phénomènes mathématiques sous-jacents.

```
■ solve(√x = 100·sin(x), x) | x > 254 and x <▸
                                x = 254.429055822
■ solve(√x = 100·sin(x), x) | x > 6264.5 and ▸
                                            false
■ solve(√x = 100·sin(x), x) | x > 6264 and x ▸
                                x = 6264.42483426
…(x),x)|x>6264 and x<6267
```

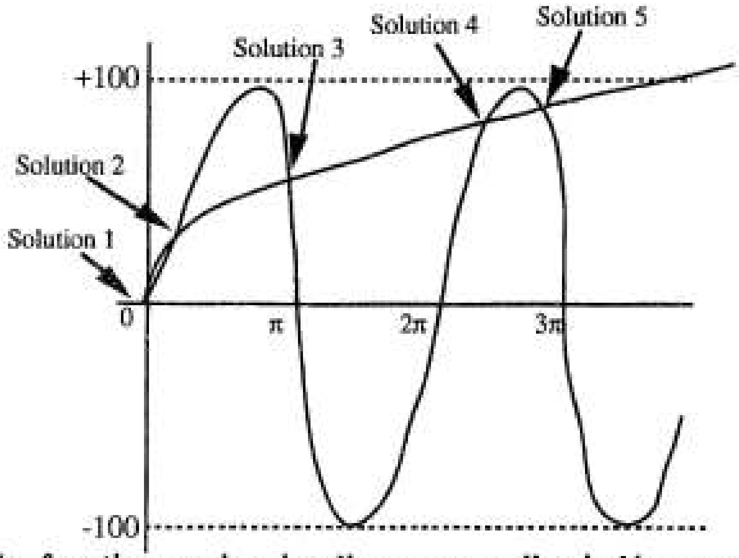
Ainsi la plupart des groupes qui en sont restés là ont conclu qu'il y avait une infinité de solutions à cette équation, du fait de la régularité de l'espacement entre deux solutions consécutives (la plupart du temps justifié par la périodicité de la fonction sinus). L'argument décisif est alors : "il y a une infinité de solutions, puisque, aussi loin que je cherche, je trouve toujours des solutions".

La mise en évidence des éléments pertinents des fonctions en présence

Ce qui est apparu comme l'évènement décisif dans la résolution du problème a souvent été la mise en évidence, sous forme de schéma (cf. ci-dessous), des éléments pertinents concernant l'équation :

- il s'agit de la confrontation entre une fonction bornée (la fonction 100.sinus) et une fonction à limite infinie (la fonction racine) ;
- la fonction 100.sinus oscille entre -100 et 100 avec une période de 2π ;
- la courbe de la fonction 100sinus a une tangente de pente 100 en zéro ;

- la courbe de la fonction racine a une tangente de pente infinie en 0.



Souvent un schéma clair vaut mieux que de longs discours ou de multiples zooms.

Les conséquences de la mise à plat de ces propriétés sont de trois ordres :

- la comparaison des pentes en zéro entraîne la <u>présence nécessaire d'une deuxième racine, proche de zéro</u> (ce qui a des conséquences pour la numérotation des racines!);

- **la limite infinie de la fonction racine implique que celle-ci dépassera définitivement 100 à partir d'une certaine valeur de x** que l'on peut calculer d'ailleurs facilement : $\sqrt{\sqrt{x}}$ dépassera 100 dès que x dépassera 10^8. Autrement dit, hors de la plage $I = [0, 10^8]$, point de solution ! ;

- sur l'intervalle $[0, \pi]$ se trouvent les solutions 1, 2 et 3, sur l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$ se trouvent les solutions 4 et 5, sur l'intervalle $[4\pi, 5\pi]$, se trouvent les solutions 6 et 7. Toutes les solutions se trouvent sur des intervalles de la forme $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ (tant que x appartient à la plage I mise en évidence ci-dessus) ; sur chacun de ces intervalles (sauf le premier et peut-être le dernier) se trouvent deux solutions.

Un tel schéma, avec les propriétés qui s'y rattachent, n'émerge pas tout de suite. Pour y arriver, il faut se poser les bonnes questions :
- quelle allure ont les fonctions en présence ?
- que se passe-t-il aux "bords" du problème (au voisinage de 0 et de $+\infty$) ?

Se poser les bonnes questions ne suffit pas : il faut aussi aller chercher les bonnes réponses par référence aux résultats théoriques connus.

Des réponses quasi-définitives

Les propriétés mises ainsi en évidence permettent :
- une numérotation et une localisation des solutions ;
- un dénombrement de celles-ci.

<u>Commençons par la numérotation des solutions et la localisation des racines</u>

Une généralisation de ce qui précède suggère que, sur l'intervalle $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, se trouvent les solutions 2n+2 et 2n+3 :

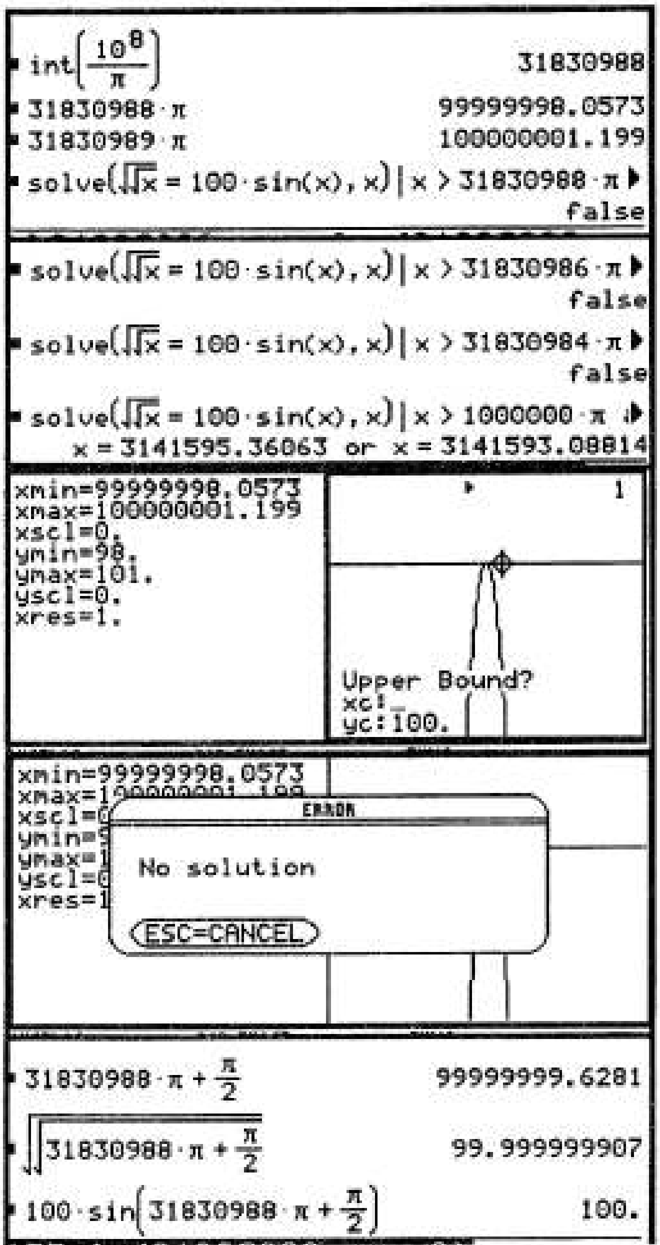
- sur $[8\pi, 9\pi]$ se trouvent les solutions 10 et 11. Une valeur approchée à 10^{-5} près de la $10^{ème}$ solution est donc 25, 15513. La simple observation du graphique (cf. ci-dessus), en ne distinguant pas la racine proche de 0, avait ainsi entraîné un décalage des numéros des différentes racines !

```
■ solve(√(√x) = 100·sin(x), x) | x > 8·π and x <▸
      x = 28.251277137 or x = 25.1551383905
■ solve(√(√x) = 100·sin(x), x) | x > 98·π and x ▸
      x = 310.975666899 or x = 307.917982159
■ solve(√(√x) = 100·sin(x), x) | x > 1994·π and ▸
      x = 6267.38825034 or x = 6264.42483426
...(x),x)|x>1994π and x<1995π
```

- on obtient de même des valeurs approchées de la 100ème racine (307, 91798) et de la 1997ème racine (6267, 38825).

<u>Reste le dénombrement des solutions.</u>

Tout dépend du nombre de solutions aux bornes de l'intervalle I. Nous pouvons déterminer d'abord le nombre d'intervalles du type $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ qui sont inclus dans I. La commande *Int* indique que la partie entière du quotient $\frac{10^8}{\pi}$ est égale à 31.830.988. Ainsi l'intervalle $[0, 10^8]$ contient exactement $\frac{31.830.986}{2} = 15.915.493$ intervalles de la forme $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ et une partie de l'intervalle $[31.830.988\pi, 31.830.989\pi]$.



Il faut savoir si dans ce dernier intervalle se trouvent aussi des solutions de notre équation. La commande *Solve* (en mode calcul approché) répond que non (cf. ci-contre). Est-elle crédible ?

Le problème est qu'elle répond qu'il n'y a pas plus de solution dans les intervalles précédents. Pourtant, sur ces intervalles, la fonction 100sinus varie de 0 à 100 et la fonction racine prend des valeurs strictement comprises entre 0 et 100 : le théorème des valeurs intermédiaires assure bien que l'équation a des solutions !

L'utilisation de l'application graphique sur le dernier intervalle litigieux donne le même résultat : il n'y aurait pas de solution sur ce dernier intervalle. Les différents zooms que l'on pourrait tester n'ont pas plus de succès.

On ne peut bien sûr en rester là : les solutions, si elles existent, sont trop proches pour que le logiciel ne puisse les détecter. Un retour à l'application initiale permet de trancher le litige, à condition de réfléchir un peu :

- la fonction 100sinus x atteint son maximum après $31.830.988\pi$ exactement au point $a = 31.830.988\ \pi + \frac{\pi}{2}$. Or ce point appartient à l'intervalle I !

- ainsi, en a, la fonction 100sinx prend la valeur 100 et la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$ prend une valeur inférieure à 100. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors que l'équation a bien au moins deux solutions sur l'intervalle $[31.830.988\pi, 31.830.989\pi]$.

Pour finir, l'équation a 3 solutions sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, puis 2 solutions sur chacun des intervalles $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, jusqu'à l'intervalle $[31.830.988\pi, 31.830.989\pi]$.

Au total donc l'équation a 3+31,830,988 = 31,830,991 solutions.

Un premier bilan

Etablir ces résultats a nécessité des aller-retours réguliers entre les résultats théoriques et l'utilisation de l'outil de calcul. La calculatrice est un auxiliaire de résolution (un "assistant de réalisation"), mais son utilisation doit toujours se faire de façon contrôlée :

- ce n'est pas parce que la commande *Solve* annonce 4 solutions que la réflexion s'achève pour autant ; elle ne fait que commencer !
- ce n'est pas parce que la même commande *Solve* annonce qu'il n'y a pas de solution sur le dernier intervalle litigieux qu'il faut la croire sur parole...

Dans ce travail, il y a un temps pour l'observation, un temps pour le dessin (on a pu voir le rôle décisif des schémas récapitulatifs), un temps pour les calculs assistés par la calculatrice (on pouvait difficilement donner les valeurs approchées des racines demandées "à la main")... tous ces moments étant des moments de vrai travail intellectuel pour lequel toutes les connaissances accumulées en cours doivent être disponibles.

Un approfondissement de la preuve

Nous sommes partis dans ce qui précède des pistes qui ont été ouvertes par les différents binômes. Les résultats de l'observation ont été confrontés aux résultats de référence concernant la fonction racine et la fonction sinus. Ceci a permis une utilisation raisonnée des outils de calcul. Le contrôle théorique a été dans ce contexte un contrôle de conformité.

S'agissant d'une résolution d'équation, nous pourrions approfondir le processus de preuve, en nous plaçant dans les conditions strictes d'application du théorème de la bijection. C'est ce que certains binômes ont tenté de faire d'emblée ; cependant les tentatives ont été vaines du fait de la complexité des calculs. Certaines précautions doivent en effet être prises pour mettre toutes les chances de son côté.

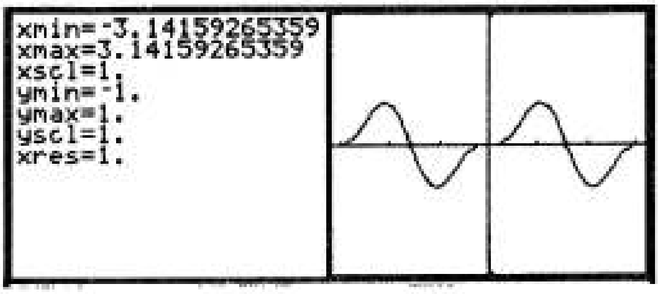
Bien choisir la fonction d'étude : pour résoudre l'équation, on dispose de la fonction $x \to f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} - 100\sin x$; la présence d'une racine carrée composée en rend son étude assez délicate. On évite cet obstacle en élevant préalablement les deux membres de l'équation à la puissance 4. La résolution de l'équation se ramène alors à l'étude de la fonction $x \to g(x) = x - 10^8\sin^4 x$. Attention cependant, toute modification de la forme d'une équation peut modifier l'ensemble de ses solutions :

- l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 100\sin x$ admet des solutions pour $x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$;
- ces conditions disparaissent dans l'étude de l'équation $x = 10^8\sin^4 x$.

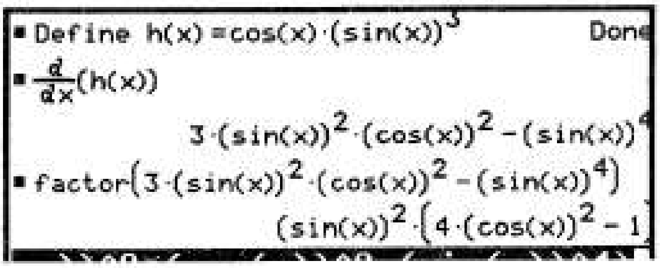
Nous devrons donc les intégrer dans l'étude de la fonction g : l'étude se fera sur $\mathbb{R}+$ et nous restreindrons l'étude aux intervalles où la fonction sinus est positive, c'est-à-dire sur tout intervalle de $\mathbb{R}+$ de la forme $[2n\pi; (2n+1)\pi]$. L'intérêt de la forme de la fonction $g : x \to g(x) = x - 10^8\sin^4 x$ est que la dérivation de g permet de se débarrasser de x (de façon générale, la dérivation itérée d'un polynôme aboutit toujours à 0). Soit donc $g'(x) = 1 - 4.\ 10^8\cos x.\sin^3 x$.

Simplifier les calculs à toutes les étapes du processus : nous allons alléger l'étude de g', en considérant la fonction $x \to h(x) = \cos x.\sin^3 x$. Cette fonction est 2π-périodique, impaire : il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$.

Enfin h(π-x) = - h(x), ce qui exprime la symétrie de la courbe par rapport à $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

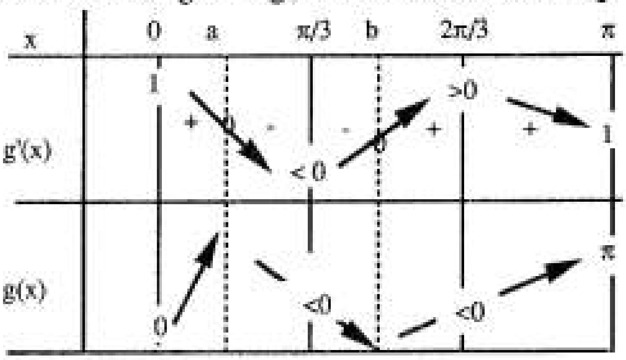


Il suffit donc d'étudier h sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, pour en connaître les variations sur $\mathbb{R}$ tout entier. Une rapide vérification de la courbe représentative de h, à l'aide de l'application graphique confirme ces premiers résultats.



L'étude de la dérivée de h, suivie de sa factorisation, indique que h' s'annule sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en $\frac{\pi}{3}$. La fonction cosinus étant décroissante sur cet intervalle, et le signe de la dérivée dépendant du signe de $4\cos^2 x-1$, h' est donc positive entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, négative entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Les variations de h en découlent.

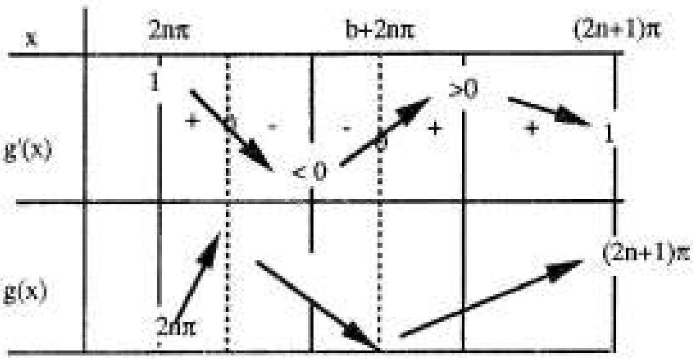
Or $g'(x) = 1 - 4.10^4 \cos x.\sin^3 x$. Les variations de g' sont donc inverses de celles de h' : g' est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Les variations de g' (cf. tableau ci-dessous) permettent d'appliquer le théorème de la bijection à la restriction de g' aux intervalles $[0, \frac{\pi}{3}]$ et $[\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}]$ et ainsi de détecter deux racines pour g', a et b ; nous connaissons ainsi le signe de g', donc les variations de g.



L'application du théorème de la bijection à la restriction de g aux intervalles adéquats permet enfin d'affirmer l'existence de 3 racines de g sur l'intervalle [0, π]: la première en 0, la deuxième sur $]a, \frac{\pi}{3}[$, la troisième sur $]b, \frac{2\pi}{3}[$.

Nous retrouvons bien le résultat issu de l'observation des fonctions de référence.

La généralisation à tout intervalle du type [2nπ, (2n+1)π] est immédiate :



Les variations de g' sont les mêmes, puisque cette fonction est 2π-périodique.

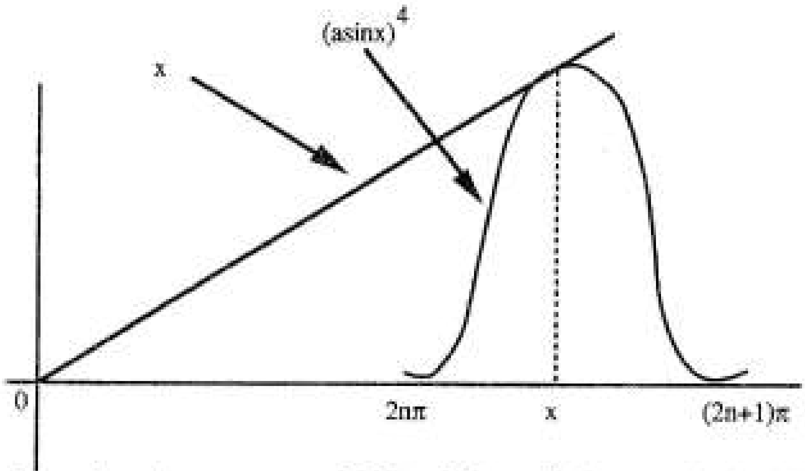
Il est clair que tout dépend du signe de g(b+2nπ) :

- si g(b+2nπ) < 0, g s'annule deux fois sur cet intervalle ;
- si g(b+2nπ) = 0, g s'annule une fois ;
- si g(b+2nπ) > 0, g ne s'annule pas.

Nous terminons par les questions du lendemain

Il s'agit maintenant d'adapter le coefficient a pour que l'équation $\sqrt{\sqrt{x}}$ = a.sinx admette un nombre donné de solutions. Nous allons reprendre la forme simplifiée de cette équation : x = $(a.\sin x)^4$, avec les précautions d'intervalle de résolution déjà signalées.

Nous avons vu que cette équation a en général un nombre impair de solutions (3 sur l'intervalle [0, π], 2 sur tous les intervalles de la forme [2nπ, (2n+1)π], tant que la fonction $x \to \sqrt{\sqrt{x}}$ ne sort pas de la bande [-a, a]. Pour qu'il existe un nombre pair de solutions, il est nécessaire qu'il n'y ait qu'une solution sur le dernier arche de sinusoïde, c'est-à-dire qu'il y ait un contact tangent (cf. schéma ci-dessous) entre la représentation de la fonction $x \to x$ et la représentation de la fonction $x \to (a.\sin x)^4$.



Si nous voulons obtenir exactement 2000 solutions, il faut que la dernière solution soit la 2000ème solution, c'est-à-dire, en fonction de la localisation des racines déjà réalisée, qu'elle se situe sur l'intervalle [1998π, 1999π]. Nous voulons donc avoir simultanément :

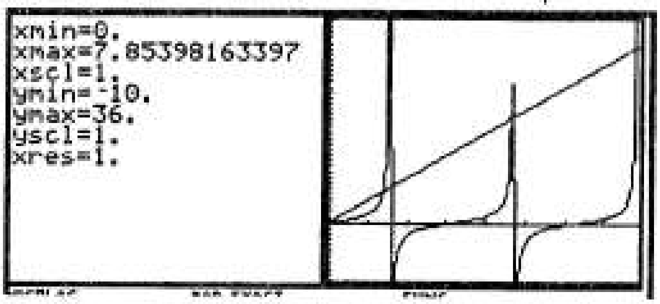
$x = (a.\sin x)^4$ (expression de l'intersection entre les deux courbes) ;

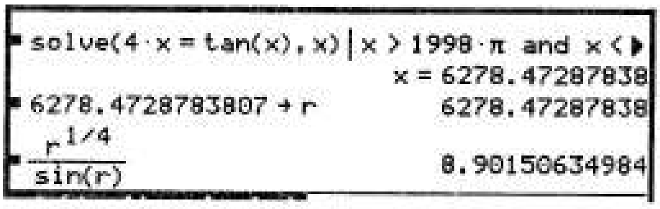
$1 = 4a^4.\cos x \sin^3 x$ (égalité des dérivées, expression du contact tangent) ;

$1998\pi < x < 1999\pi$.

La division des deux premières équations membre à membre aboutit à $x = \frac{1}{4}\tan x$.

Du fait des variations de la fonction tangente (π-périodique, strictement croissante de -∞ à +∞ sur tout intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, l'équation 4x = tanx admet une solution et une seule sur tout intervalle d'amplitude π, en particulier sur l'intervalle qui nous intéresse. Ceci nous permet d'utiliser l'application initiale pour déterminer une valeur approchée de la valeur de la solution cherchée. Par repport dans l'équation $x = (a.\sin x)^4$, ceci nous permet de déterminer une valeur approchée de a.

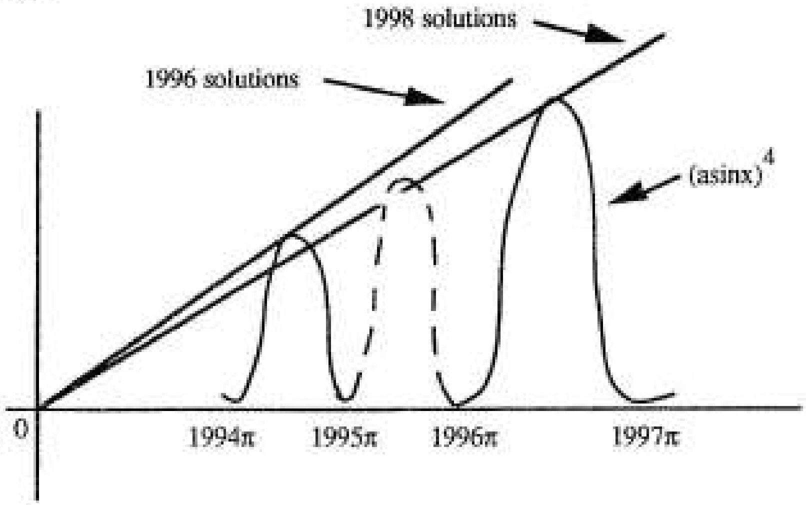




Il y a donc une valeur unique du coefficient a convenable. Par contre, si nous voulons que l'équation x= $(a.\sin x)^4$, c'est-à-dire $\frac{x}{a^4} = \sin x^4$ ait 1997 solutions, le choix est plus grand. En effet :

- d'après ce que nous venons de voir, il y a une valeur unique de a, soit a = a_1, convenable pour que l'équation ait 1996 solutions ;
- il y a une valeur unique de a convenable, soit a = a_2, pour que l'équation ait 1998 solutions.

Nous avons représenté dans le graphique ci-dessous une partie des graphes des fonctions $\frac{x}{{a_1}^4}$, $\frac{x}{{a_2}^4}$ et $\sin x^4$.



En pointillé, nous avons représenté la partie du graphique de $\sin x^4$ pour laquelle nous savons que n'existe aucune solution de l'équation initiale (en effet sur cet intervalle la fonction sinx est négative). Il est clair que toute droite se trouvant à l'interieur du faisceau déterminé par les deux droites tracées coupera 1997 fois la partie licite de la représentation graphique de $\sin x^4$.

Nous reproduisons alors les calculs qui ont été faits ci-dessus pour assurer l'existence de 2000 solutions. Nous les appliquons au cas de 1996 puis 1997 solutions.

Nous déterminons dans un premier temps les abscisses des points de contact des deux droites avec la courbe (stockées dans les mémoires r et s).

A partir de cela, nous pouvons déterminer les pentes des deux droites qui limitent le "faisceau".

```
■ solve(4·x = tan(x), x) | x > 1994·π and x <▶
                                  x = 6265.90650769
■ 6265.9065076864 → r              6265.90650769
■ solve(4·x = tan(x), x) | x > 1996·π and x <▶
                                  x = 6272.18969303
■ 6272.1896930336 → s              6272.18969303
```

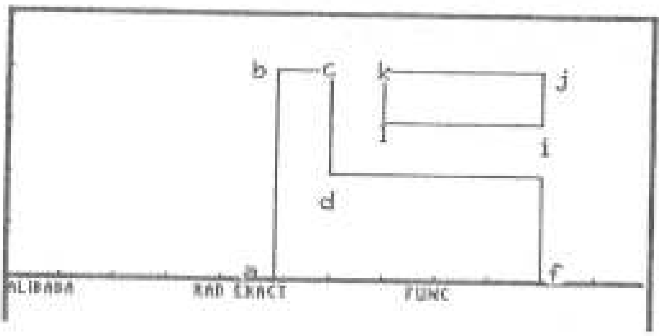
```
■ x^(1/4)/sin(x) | x = {r  s}
            {8.89704890908  8.8992784667}
x^(1/4)/sin(x)|x={r,s}
```

Pour que l'équation $\sqrt{\sqrt{x}}$ = a.sinx ait 1997 solutions, il faut et il suffit que l'on choisisse a dans l'intervalle $]a_1, a_2[$, les valeurs approchées de a_1 et a_2 étant déterminées ci-dessus. Fin du TP et de ses différents prolongements.

La morale de l'histoire : observation sans démonstration (et réciproquement !) n'est que ruine de l'âme !

TP N°6

On en revient ici à un contexte déjà envisagé. Il s'agit de déterminer une trajectoire d'avion répondant aux mêmes contraintes que lors du TP 4. On utilisera ici la même fenêtre que pour ce TP : [0; 11,9] pour x, [0; 5,1] pour y.

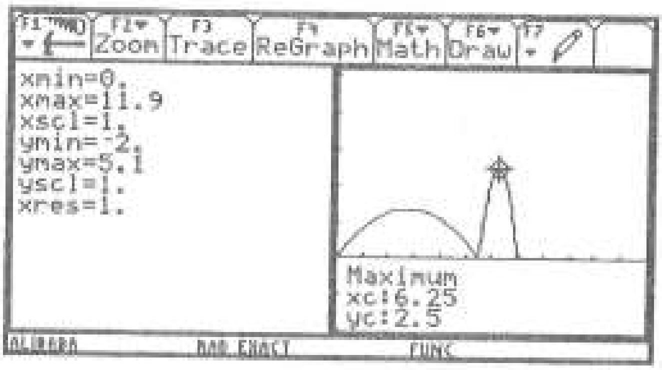


Mais aujourd'hui notre objectif n'est pas seulement de trouver une courbe convenable, mais de **trouver la "meilleure" trajectoire possible**. Pour cela, il faut se donner un critère précis. Plusieurs critères sont envisageables (et seront envisagés cette année...).

Notre critère aujourd'hui sera le suivant : obtenir pour notre trajectoire les pentes (en valeur absolue) les plus faibles possibles. Il faut donc que :

- la valeur absolue de la dérivée de f soit bornée (c'est-à-dire qu'il existe M tel que, pour tout x de $\mathbb{R}+$, $|f'(x)| \leq M$) ;
- M soit le plus petit possible.

Un exemple avec la fonction fournie par le binôme 7 (Alex-Audrey) :



On détermine la valeur absolue de la dérivée que l'on stocke par exemple en y(6). Le graphique donne l'image ci-contre. Les deux premiers tronçons étaient déterminés à partir de polynômes du troisième degré : les dérivées correspondantes sont naturellement représentées par des paraboles.

On trouve sans trop de peine que la valeur absolue de la dérivée atteint son maximum pour x=6,25 : on dispose ainsi de **M= |f ' (6,25) | = 2,5**. Attention : le résultat ci-dessus est obtenu à partir de l'application graphique, c'est-à-dire en valeur approchée. L'obtention de valeurs exactes suppose de raisonner à partir de la nature des fonctions en présence !

La question du jour

Saine émulation : parmi tous les binômes, sera déclaré vainqueur celui qui aura déterminé une fonction f telle que M sera le plus petit.

Les questions du lendemain

Y a-t-il un résultat optimal (c'est-à-dire une valeur de M en-dessous de laquelle on ne pourra plus trouver de trajectoire convenable) et pourquoi ?

Si oui, y a-t-il une, ou plusieurs, fonction(s) réalisant cette optimum ?

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°6

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Cécile Delarbre, Valérie Lefèvre et Marianne Leheup.

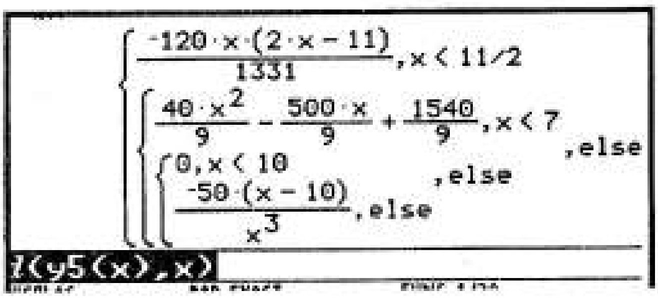
Soit f une fonction réalisant les contraintes imposées sur l'intervalle [0, +∞[. Nous noterons M le maximum, quand il existe, de la valeur absolue de la dérivée de f sur cet intervalle. Comme toujours, plusieurs stratégies sont possibles.

Stratégie 1.

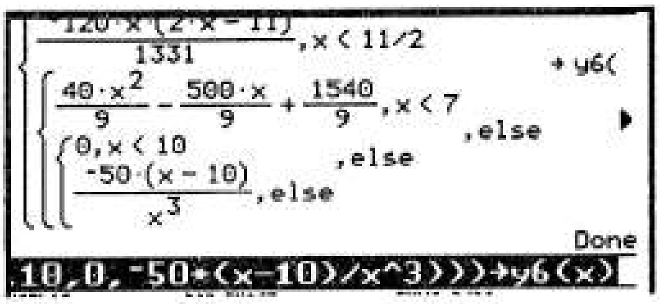
Nous pouvons partir des courbes déjà obtenues lors du TP 4, choisir celle d'entre elles qui donne le meilleur M et tenter d'améliorer la situation. Appliquons cette stratégie, comme l'a fait par exemple le binôme Marguerite/Muriel, à la fonction déterminée par Alex/Audrey (cf. le TP n°4 pour avoir l'expression de leur fonction).

Cela suppose :

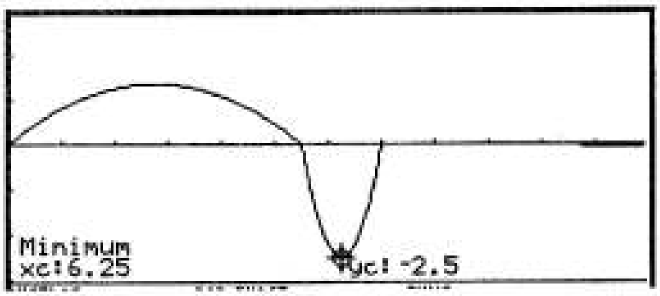
- la détermination de la dérivée de la fonction f via l'application initiale (on retrouve naturellement une fonction définie par morceaux) ;



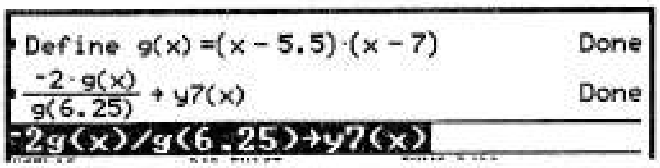
- l'analyse du graphique de la dérivée (attention, il faut stocker dans l'éditeur de fonctions la dérivée <u>calculée</u> et non pas d(y5(x), x), ce qui obligerait le logiciel, en tout point de calcul, à redéfinir la dérivée de f et prendrait un temps extrêmement long) ;

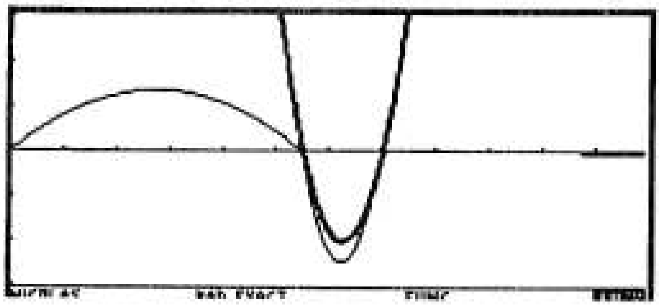


- la détection du maximum de la valeur absolue de cette fonction, ce qui suppose une réflexion sur les fonctions en présence : les deux premiers tronçons sont définis à partir de polynômes du troisième degré, les dérivées sont donc représentées par des tronçons de parabole. Nous disposons ainsi des valeurs exactes des maximas. Il faut aussi s'assurer qu'il n'y a pas de problème sur l'intervalle [12, +∞[, ce qui suppose l'étude théorique de la fonction corespondante sur cet intervalle ;



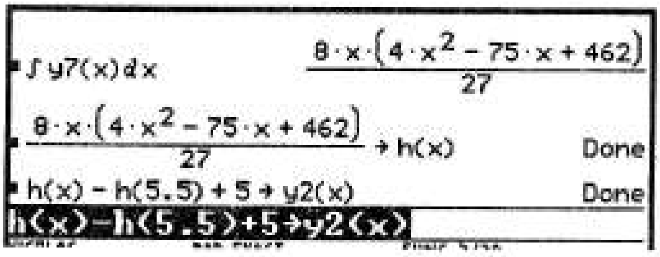
- la réduction de cet extremum (<u>le maximum de la valeur absolue</u> de la dérivée correspond ici <u>au minimum de la dérivée</u>) en prenant une fonction inférieure sur l'intervalle [5,5 ; 6] par exemple un trinôme du second degré qui s'annule aux mêmes points et ait un sommet plus bas (par exemple 2).





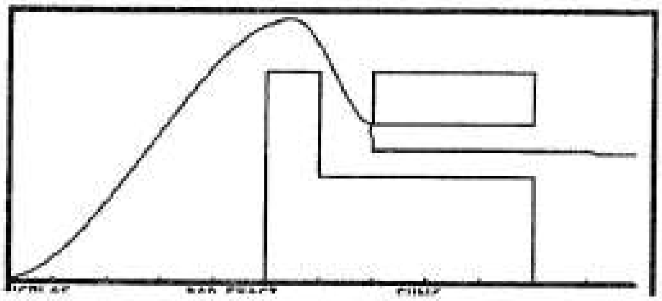
Les opérations sont faites via l'application initiale, la fonction résultat stockée dans l'éditeur de fonction en y7 (cf. ci-contre, en trait plus épais la nouvelle fonction g).

Il faut ensuite retrouver la fonction voulue à partir de sa dérivée par primitivation, puis déterminer une constante adaptée pour assurer la continuité de la fonction au point de raccord 5,5. Le résultat trouvé permet alors de définir la nouvelle expression de la fonction f sur l'intervalle [5,5 ; 7].



La vérification est immédiate:

- sur l'intervalle en question, la fonction a bien une dérivée en valeur absolue inférieure ;
- la dérivée s'annule bien en 5,5 et 7 ;
- la fonction est bien continue au point 5,5 (la constante de primitivation avait été calculée pour cela) ;
- hélas, on perd la continuité au point d'abscisse 7.



Ce problème est d'ailleurs lié à la méthode mise en oeuvre : si on conserve le même point de départ de coordonnées (5,5, 5), avec le même type de fonction mais une pente moins forte, on aura quelques difficultés à arriver au même point de coordonnées (7, 2,5). Nous pouvons constater d'ailleurs sur le graphique ci-dessus que le point d'arrivée du deuxième tronçon se situe au dessus du point voulu. La résolution même du système d'équations mis en place lors du TP n°4 le prouvait aussi : il n'y a qu'un polynôme du troisième degré dont la courbe passe par ces deux points avec une tangente horizontale en ces points !

Ceci n'invalide pas cette méthode des "petits pas", mais exige quelques adaptations : il faut raccorder le point (7, 3) auquel le deuxième tronçon aboutit sur le graphique ci-dessus (la courbe passe ainsi juste sous le rectangle) avec une autre courbe (à nouveau celle d'un polynôme du troisième degré par exemple). On peut aussi définir un sommet moins haut que le point (5,5; 5), pour limiter les pentes maximales.

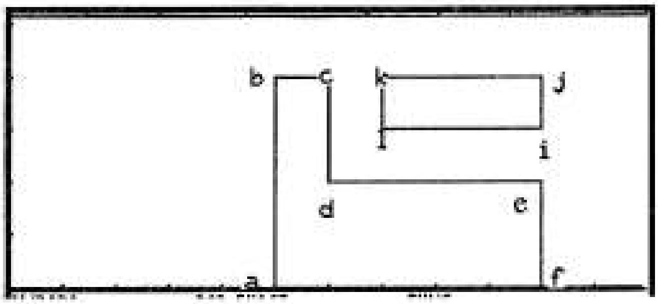
Le problème avec cette méthode d'amélioration successive est que l'on n'est jamais assuré d'avoir obtenu un résultat optimal !

Stratégie 2.

Nous pouvons aussi prendre un peu de recul sur le problème (ce n'est pas incompatible avec la première stratégie !) en nous posant trois types de questions :

2a. Du point de vue de notre trajectoire, où se trouvent les plus fortes contraintes de pente ?

Le binôme Claude-Mathilde remarque ainsi que la trajectoire optimale impose de passer par B et L. Cela signifie que, si l'on envisage une fonction affine par morceaux qui soit la plus directe possible, l'on aura une pente de $\frac{4}{5}$ entre O et B, une pente de -1 entre B et L (sur les autres tronçons, les pentes sont, en valeur absolue, clairement inférieures...).



2b. Du point de vue mathématique, y a-t-il une formalisation possible du problème ?

S'agissant du contrôle de la dérivée d'une fonction, l'inégalité des accroissements finis n'est pas loin... C'est ce qu'on perçu le binôme Alice-Sandrine et le trinôme Cécile/Marianne/Valérie. On dispose en effet de $f(6) \geq 4$ et $f(7) \leq 3$. D'où $f(7)\text{-}f(3) \leq -1$, soit, en valeur absolue : $|f(7)\text{-}f(3)| \geq 1$. Or, si l'on écrit l'inégalité des accroissements finis (sous la deuxième forme vue en cours), en notant M le maximum de la valeur absolue de la dérivée sur l'intervalle [5, 6], on obtient

$|f(7)\text{-}f(3)| \leq M(7\text{-}1)$, c'est-à-dire $|f(7)\text{-}f(3)| \leq$ **M.**

Si l'on juxtapose les deux inégalités que l'on a obtenues, on obtient :

$$\mathbf{1 \leq |f(7)\text{-}f(3)| \leq M.}$$

Le maximum de la valeur absolue de f' ne peut ainsi pas être inférieur à 1.

On notera que cette réflexion théorique (2b) est tout à fait liée à la réflexion sur les contraintes sur la trajectoire (2a) : ce n'est pas tout à fait par hasard que l'on a exploité l'IAF précisément sur l'intervalle [5, 6] !

2.c. Du point de vue des pentes, quelles sont les fonctions optimales (dans le répertoire des fonctions usuelles) ?

On l'a vu dans la correction, ceux qui ont choisi des polynômes de degré 2 (ou plus) ou des fonctions trigonométriques pour assurer le passage crucial entre B et L n'ont pas pu atteindre le maximum de 1 : les "arrondis" nécessaires entraînent des pentes plus fortes que 1 à un moment donné.

C'est relativement facile à comprendre : si vous voulez avoir la vitesse maximale la plus faible possible entre deux points (pour un temps de parcours donné), il faut que vous rouliez à une vitesse constante égale à la vitesse moyenne $v = \frac{\text{distance donnée}}{\text{temps imposé}}$. Dans le cas contraire, si vous roulez pendant un moment à une vitesse inférieure à v, vous serez obligé ensuite, pour rattraper le temps perdu, de rouler à une vitesse supérieure à v !

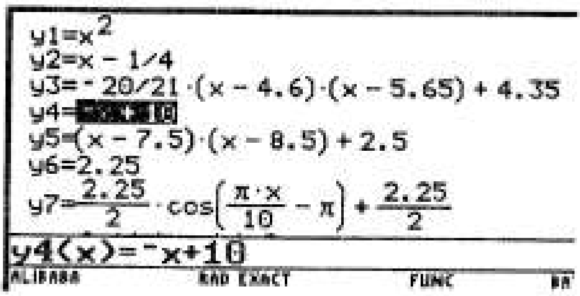
Ainsi la trajectoire optimale entre B et L impose de choisir entre ces deux points une fonction affine. Il reste ensuite à opérer les raccords pour que la fonction obtenue soit dérivable sur l'ensemble de l'intervalle considéré.

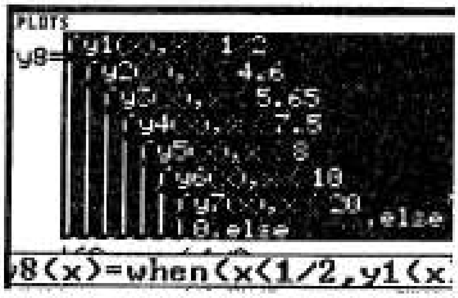
3. Les solutions.

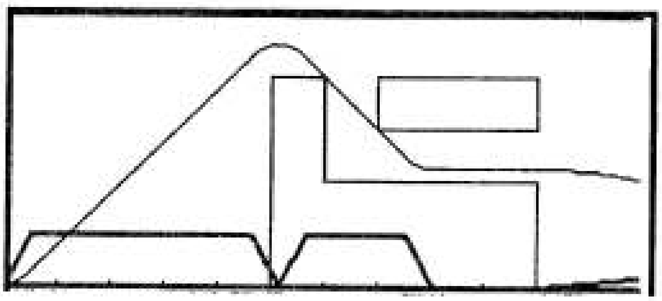
Les binômes suivants ont déterminé une fonction convenable.

Jean-François/Mathieu

On notera la fonction affine $x \to -x+10$, cruciale sur l'intervalle [4,6 ; 5,65]. Par ailleurs, le choix a été fait de prendre une fonction nulle à partir de x=20 (on pourra vérifier que le raccord en 20 est bien dérivable).







Nous avons fait figurer sur la copie d'écran ci-dessus la représentation graphique de f et de la valeur absolue de sa dérivée (en gras) : celle-ci ne dépasse par 1. Bien entendu, ce n'est qu'une vérification en calcul approché. La vérification exacte est laissé à la charge du lecteur : celle-ci n'est pas très difficile, puisque la dérivée, sur chaque tronçon (sauf sur le tronçon trigonométrique) est une fonction affine !

Laissons la parole à Jean-François qui commente ses choix :

"- la première courbe y1 est une parabole reliée à la seconde lorsque sa pente est égale à 1, c'est-à-dire pour $x = \frac{1}{2}$;

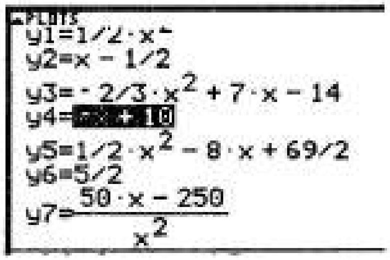
- la deuxième parabole permet le raccord entre les deux segments. On obtient son équation en posant les contraintes : on veut qu'elle soit raccordée en (4,6 ; 4,35) et en (5,65 ; 4,35). On peut alors poser y - 4,35 = a.(x-4,6).(x-5,65). On doit alors déterminer a, sachant que la pente aux points de raccord est égale à 1 et -1. On dérive , ce qui nous ramène à une équation du premier degré : a(2x-10,25)=1, d'où $a = -\frac{10}{21}$;

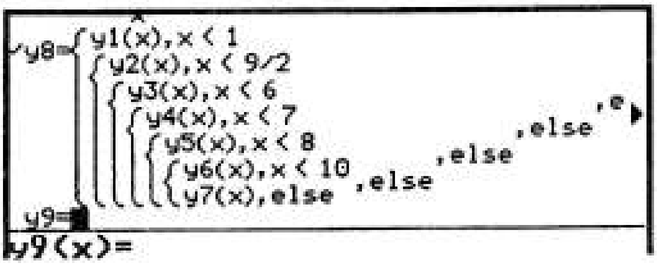
- on retrouve un peu plus loin une troisième parabole établie de la même manière ;

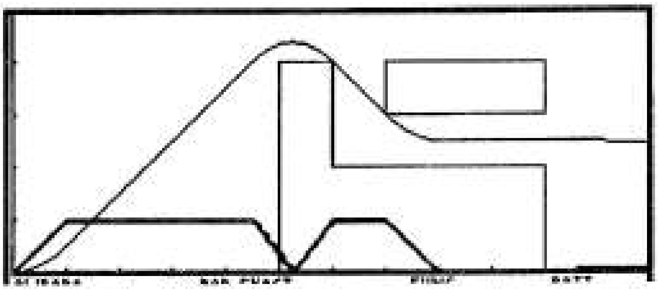
- la suite du graphique est simple : une fonction constante, une fonction cosinus remaniée de telle sorte que l'on n'ait pas besoin de s'occuper de sa pente, et enfin y=0".

Alex-Audrey

Même solution dans son principe que la solution précédente. On retrouve bien la solution cruciale -x+10 et un assortiment de polynômes de degré 1 ou 2. Une différence cependant : la fonction ne s'annule pas après 10 mais elle a bien une limite nulle en +∞.



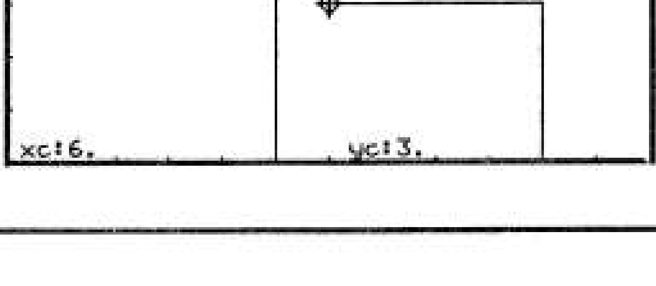




Les deux fonctions ci-dessus sont les "meilleures solutions possibles" au sens du critère défini par l'énoncé du problème : elles ont obtenu pour le maximum de la valeur absolue de la dérivée le nombre M le plus petit possible, M = 1. Cela répond du même coup à la "question du lendemain" : des fonctions différentes (deux ont été présentées ci-dessus, mais on imagine bien que l'on pourrait en trouver beaucoup d'autres) correspondent à la même valeur de M.

Nous pourrions nous poser alors une question assez délicate : la possibilité de trouver au moins une fonction réalisant l'optimum M = 1 était-elle acquise ? Avec les contraintes données ici, la réponse est oui (puisque de telles fonctions ont pu être exhibées...). Mais si l'on modifiait le relief, par exemple en relevant les points BCDE et IJKL de 1 (c'est-à-dire en ajoutant 1 à chaque ordonnée, cf. ci-dessous), y aurait-il un meilleur trajet et si oui lequel ?

On pourra vérifier que l'on a toujours M = 1, mais qu'aucune fonction ne peut réaliser une telle contrainte. On pourra cependant trouver des fonctions qui pourront s'approcher d'aussi près que l'on veut de cet optimum, mais sans jamais pouvoir l'atteindre. Pourquoi ?



TP N°7

On quitte pour un temps la trajectoire de l'aéroplane (on y reviendra !) pour traiter un problème simple de tangentes.

Quelques indications à ce propos sur les commandes de la TI-92.
On sait que, dans l'application initiale, on peut disposer de :

- l'expression symbolique de la dérivée, via la commande *d(f(x), x)* ;

- une valeur exacte ou approchée de la dérivée en un point x_0, via la commande : *d(f(x), x) | x= x_0*.

Dans l'application graphique, on peut disposer aussi, en valeur approchée (**comme toujours dans l'application graphique**), d'une équation de la tangente en un point d'une courbe : Menu *F5 Math*, commande *Tangent* (touche A) ; il faut indiquer la fonction que l'on considère (son indice apparaît dans le haut de l'écran à droite), l'abscisse du point voulu. La tangente est alors tracée et son équation apparaît au bas de l'écran à gauche).

On considère aujourd'hui les deux paraboles P_1 et P_2 représentant les trinômes :
$f_1 : x \to x^2$ et $f_2 : x \to -x^2+8x-14$.

La question du jour

On souhaite déterminer le nombre et l'équation des droites tangentes aux deux paraboles.

Les questions du lendemain

On retourne le problème. On se donne maintenant trois droites, d'équation :
$y = -7{,}3x-24{,}075$
$y = -1{,}3x-9{,}075$
$y = 7{,}7x - 9{,}075$.

On souhaite déterminer le nombre et l'équation des paraboles d'axe vertical (c'est-à-dire qui sont la représentation graphique de trinômes du second degré) qui sont tangentes à ces trois droites.

ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°7

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Mathilde Lieber et Danièle Obono.

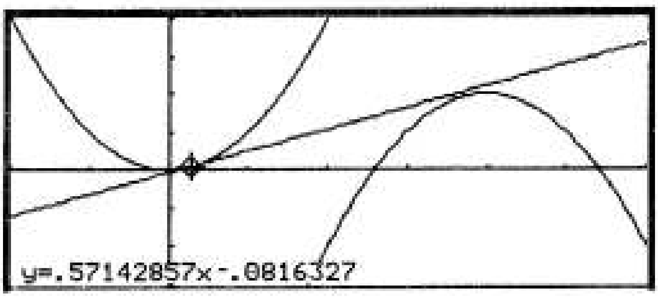
Nous présentons ici différentes pistes pour aborder un tel problème. L'ordre de celles-ci n'a rien d'obligatoire. On peut préférer commencer par une phase d'observation ou par une mise en équation du problème, ou encore par un retour théorique sur une famille de problèmes plus large qui englobe la question du jour... L'essentiel est de comprendre que ces différentes pistes sont complémentaires et qu'en aucun cas on ne doit rester inerte devant un problème de mathématique !

Une phase d'observation

Celle-ci peut se faire avec la TI-92 ou à la main. Bien souvent ces deux démarches sont toutes les deux utiles, c'est-à-dire qu'elles apportent l'une et l'autre des informations intéressantes.

L'utilisation de l'application graphique de la TI-92 permet d'avoir des valeurs approchées des coefficients des tangentes communes.

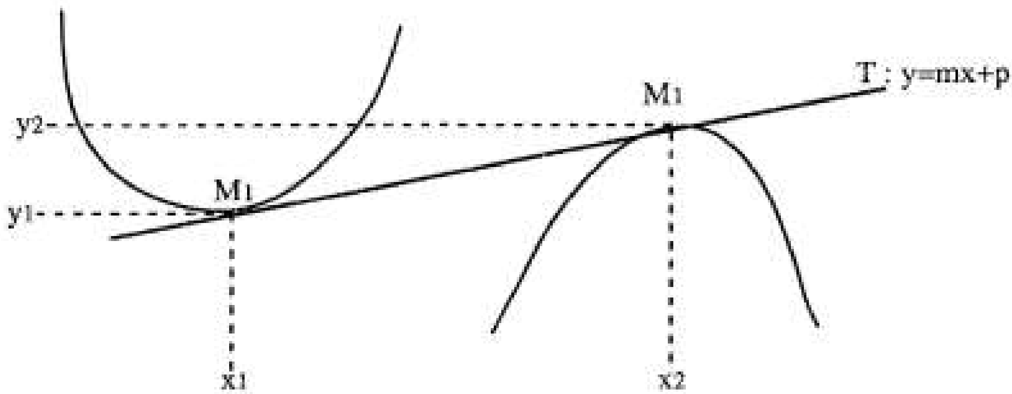
L'existence d'une première tangente commune semble relever de l'évidence. En existe-t-il d'autres ?



La résolution du problème permettra bien sûr de répondre à cette question. Mais y réfléchir a priori n'est pas inutile :

- à partir de l'application graphique de la calculatrice, on peut tenter d'ajuster une deuxième tangente ;
- on peut aussi procéder par analogie : on sait traiter la construction de tangentes communes à deux cercles extérieurs l'un à l'autre. Il y a alors deux tangentes communes extérieures et deux tangentes communes intérieures. Que peut-on transférer de cette configuration à la configuration des paraboles (cette analogie n'est pas abusive : il s'agit après tout dans les deux cas de coniques !) ?

Un schéma, même sommaire, à la main permet de préciser les inconnues, de fixer le vocabulaire qui sera utilisé ultérieurement (il permet par exemple de ne pas prendre la même lettre pour représenter les deux points de contact de la tangente avec les deux paraboles : c'est ce qu'ont fait certains binômes, qui ont vu ainsi leur recherche paralysée pour cause de confusion des notations...).



Nous cherchons donc 6 nombres : x_1 et y_1, x_2 et y_2, m et p. S'il y a deux tangentes communes la résolution du problèmes fera apparaître deux valeurs possibles pour m, deux valeurs possibles pour p, etc.

Une mise en équation tous azimuts.

Une fois fixées les inconnues, nous pouvons écrire toutes les équations qui les relient, découlant de l'énoncé (en fait il est difficile de prétendre écrire toutes les équations ; on essaie plutôt d'exprimer les différentes informations contenues dans l'énoncé, jusqu'à ce que l'on ait assez d'équations pour le nombre d'inconnues cherchées). Nous aurions ainsi :

* $y_1 = x_1^2$; $y_2 = -x_2^2 + 8x_2 - 14$, équations qui expriment l'appartenance des points M_1 et M_2 aux deux paraboles ;

* $m = 2x_1 = -2x_2 + 8$, qui expriment que la pente des tangentes est égale au nombre dérivée des fonctions à l'abscisse du point de contact ;

* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$, qui exprime que la pente de la droite (M_1M_2) est égale à la pente de la tangente T.

Nous aurions alors 5 équations à 5 inconnues, ce qui nous permettrait sans doute de résoudre le problème. Il vaut mieux cependant avant d'emprunter cette voie tenter de réfléchir un peu pour sélectionner les informations de façon un peu mieux organisée.

Une mise en équation analytique réfléchie.

Puisque l'on cherche les tangentes, il est pertinent d'écrire l'équation de T comme tangente à chacune des deux paraboles : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit, ici :

$y = 2x_1 (x-x_1) + x_1^2 = \mathbf{2x_1x - x_1^2}$;

$y = (-2x_2 + 8)(x-x_2) + -x_2^2 + 8x_2 - 14 = \mathbf{(-2x_2 + 8)x + x_2^2 - 14}$.

Nous avons mis en évidence dans chaque cas m et p.

Il suffit ensuite d'exprimer que les deux équations représentent la même droite, c'est-à-dire qu'elles ont même pente et même "ordonnée à l'origine" (ce qui revient à dire que des polynômes -ici du premier degré- sont égaux si et seulement si ils ont des coefficients égaux). Par rapport à la mise en équation tous azimuts, on gagne en simplicité (il n'y a plus ici que deux inconnues) :

$2x_1 = -2x_2 + 8$

$-x_1^2 = x_2^2 - 14$.

On résout sans difficulté. Cependant, il faut faire attention à l'interprétation des résultats ; nous trouvons bien deux valeurs pour x_1 et deux valeurs correspondantes pour x_2 :

- **deux solutions pour x_1** : $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_1 = 2 + \sqrt{3}$;
- **deux solutions pour x_2** : $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

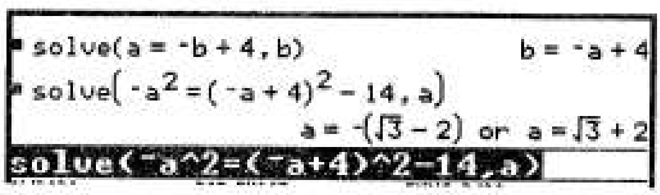
Cela fait apparaître une certaine symétrie du problème, que nous exploiterons plus tard. Deux remarques pour conclure cette méthode :

- <u>on peut utiliser la calculatrice pour résoudre le système</u>. Mais attention, il ne s'agit pas d'un système linéaire (c'est-à-dire de la forme ax+by+cz...=...), l'application *Data/Matrix* n'est pas ici pertinente. Notre système à résoudre est le suivant :

$x_1 = -x_2 + 4$ et $-x_1^2 = x_2^2 - 14$.

Pour la commodité de l'écriture machine, on notera $x_1 = a$ et $x_2 = b$.

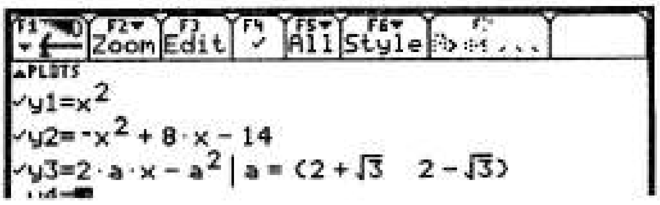
La calculatrice permet d'exprimer b en fonction de a (nous n'avions pas besoin de la TI-92 pour réaliser ce calcul, mais c'est le principe qui est intéressant ici).



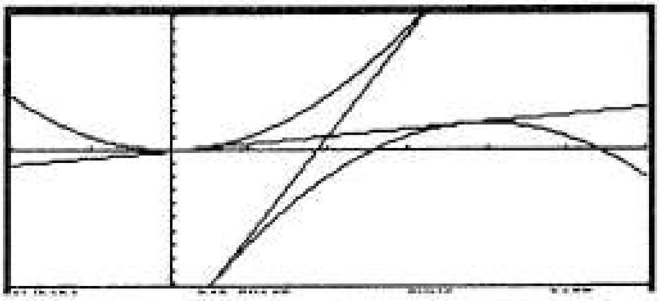
Il suffit ensuite de remplacer b par sa valeur dans la deuxième équation.

- <u>une fois trouvées les solutions, il n'est pas inutile de vérifier</u> dans l'application graphique (en valeur approchée) ou dans l'application initiale (en calcul exact) que tout ceci convient bien.

On a exprimé en y3 l'équation générale d'une tangente à la première parabole au point d'abscisse a. Dès lors, il suffit d'affecter à a les valeurs voulues pour que les tangentes soit tracées dans l'application graphique.



La concordance graphique n'est pas une preuve définitive : on rappelle qu'il s'agit ici de calcul approché.
<u>La vérification incontestable supposerait un retour au calcul exact</u>.



Une mise en équation algébrique réfléchie.

La méthode que nous venons de voir est assez générale. **Dans le cas des paraboles (et en général des coniques**, nous y reviendrons cette année : cercles, ellipses, hyperboles, paraboles), on peut utiliser une caractérisation plus simple des tangentes : **une tangente est en général une droite qui n'a qu'un point de contact avec la courbe** [3] (l'expression "en général" suggère qu'il y a quelques exceptions : l'axe de symétrie d'une parabole ne la coupe qu'en un point et n'est bien évidemment pas tangent à la parabole).

Soit $y=mx+p$ l'équation d'une tangente commune. Écrivons les équations qui permettent de déterminer l'intersection de cette droite avec les deux paraboles :

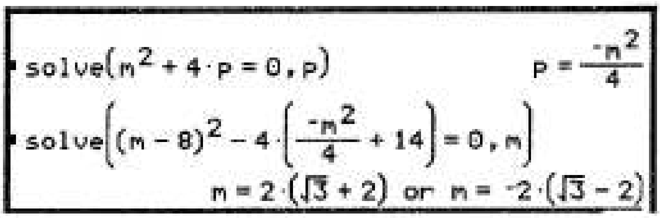
$x^2 = mx+p$ et $-x^2+8x-14 = mx+p$ (où x représente l'abscisse u point de contact tangente/parabole). Mettons ces équations sous la forme habituelle d'équation algébrique d'inconnue x :

$x^2 - mx-p = 0$ et $x^2+x(m-8)+p+14 = 0$. Ce sont des trinômes du second degré. On veut (cf. définition particulière des tangentes) que ces équations n'aient qu'une seule solution. Ce n'est possible que si leur discriminant est nul. On obtient ainsi deux équations à deux inconnues m et p :

$m^2+4p = 0$ et $(m-8)^2 - 4(p+14) = 0$.

Il suffit de résoudre (à la main ou avec l'assistance de la calculatrice) :

On retrouve, c'est heureux, les solutions déjà déterminées pour la pente des tangentes communes.



[3] La raison de cette caractérisation est assez simple à comprendre : une conique est une courbe qui s'exprime par une équation polynomiale du second degré. L'intersection d'une conique et d'une droite se ramène donc à l'étude d'un trinôme du second degré ; on peut avoir aucune solution, ou deux solutions (la droite et la conique se rencontrent alors en deux points), soit une "solution double" qui correspond alors à un contact tangent.

Une résolution qui s'adapte à la configuration particulière.

Nous venons de voir une méthode particulière aux coniques. Il est possible encore particulariser la résolution aux coniques de ce problème. En effet, il s'agit de paraboles qui se "ressemblent" beaucoup. D'ailleurs, en écrivant :

$-x^2+8x-14 = -(x^2-8x+14) = -[(x-4)^2-16+14] = -[(x-4)^2-2]$, on constate que l'on passe de la première parabole à la seconde par une translation de vecteur directeur (4, 2) et par une réflexion d'axe (x'x)[4]. Les paraboles sont donc isométriques ("superposables"). Plus simplement, elles se correspondent dans une symétrie centrale de centre le milieu des deux sommets, le point I(2, 1).

Pour des raisons de symétrie, les tangentes communes passent par ce point I. Le problème revient donc à déterminer les tangentes à la parabole P_1 qui passent par I. L'équation générale d'une tangente à cette parabole à un point d'abscisse a est :

$y = 2a(x-a)+a^2$.

Le point de coordonnées (2,1) vérifie nécessairement cette équation. Ce qui permet de déterminer a, solution de l'équation $1 = 2a(2-a)+a^2$, c'est-à-dire solution de :

$a^2 - 4a+1 = 0$. Les points de contact des tangentes communes avec la parabole P_1 ont donc pour abscisses $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. On trouve alors sans peine les équations des deux tangentes communes. C'est fini.

Les questions du lendemain

La diversité des méthodes que nous venons d'envisager permet de disposer d'un répertoire de stratégies pour traiter un problème de tangentes. Il s'agit désormais de traiter le problème inverse : au lieu de rechercher une droite tangente à plusieurs paraboles, nous allons rechercher une parabole tangente à plusieurs droites.

Soit donc trois droites, d'équations respectives :

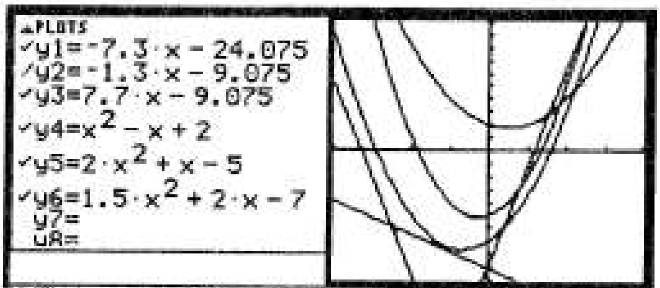
$y = -7,3x-24,075$

$y = -1,3x-9,075$

$y = 7,7x - 9,075$.

On souhaite déterminer le nombre et l'équation des paraboles d'axe vertical (c'est-à-dire qui sont la représentation graphique de trinômes du second degré) qui sont tangentes à ces trois droites.

Une première phase de tatonnement s'avère assez coûteuse en temps. Elle permet cependant de se familiariser avec la fonction des trois coefficients a, b et c définissant l'équation d'une parabole d'axe parallèle à l'axe des abscisses $y = ax^2+bx + c$:



- **a** fixe <u>la forme</u> de la parabole (deux paraboles ayant le même coefficient a dont "superposables", cf. note de bas de page). Si a est positif (resp. négatif), la courbe est tournée vers le haut (resp. vers le bas) ; la courbe est d'autant plus étroite que la valeur absolue de a est grande ;
- **c** est l'ordonnée à l'origine (ordonnée du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées) ;
- **b** est la pente de la tangente en ce point (en effet, $f'(x) = 2ax+b$, ce qui implique que $f'(0) = b$).

Ces remarques permettent le processus d'ajustements successifs (cf. écran ci-dessus).

---

[4] Cette méthode indique clairement que la forme d'une parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ ne dépend que du coefficient a. Toutes les paraboles qui ont ce même coefficient a se correspondent par une isométrie adaptée.

Dépasser cette démarche de tatonnements expérimentaux nécessite d'avoir recours à une des méthodes mises en oeuvre dans la "question du jour". Par exemple la méthode algébrique : soit P une parabole convenable, d'équation $y = ax^2+bx+c$. Son intersection avec les trois droites est nécessairement réduite à un point. Cela suppose que les trois équations ci-dessous aient une solution unique :

$ax^2+bx+c = -7{,}3x-24{,}075$, i.e. $ax^2+ x(b+7{,}3) + c + 24,075 = 0$

$ax^2+bx+c = -1{,}3x-9{,}075$, i.e. $ax^2+ x(b+1{,}3) + c + 9,075 = 0$

$ax^2+bx+c = 7{,}7x - 9{,}075$, i.e. $ax^2+ x(b -7{,}7) + c + 9,075 = 0$

Cela nécessite que les trois discriminants soient nuls :

$(b+7{,}3)^2 - 4a(c+ 24,075) = 0$

$(b+1{,}3)^2 - 4a(c+ 9,075) = 0$

$(b -7{,}7)^2 - 4a(c+ 9,075) = 0$

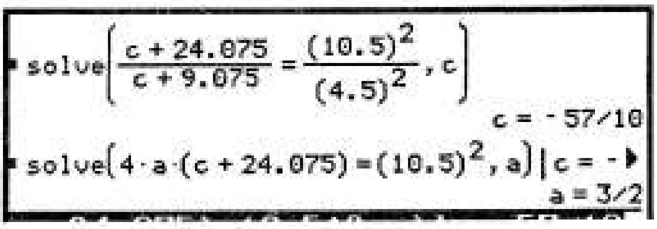
Avant de se lancer tête baissée dans la résolution d'un tel système, il n'est pas inutile de rechercher d'éventuelles singularités. La soustraction des deux dernières équations membre à membre permet de calculer b :

$(b+1{,}3)^2 = (b-7{,}7)^2$ aboutit à $b = 3{,}2$.

Il est possible de remplacer alors b par sa valeur dans les deux premières équations :

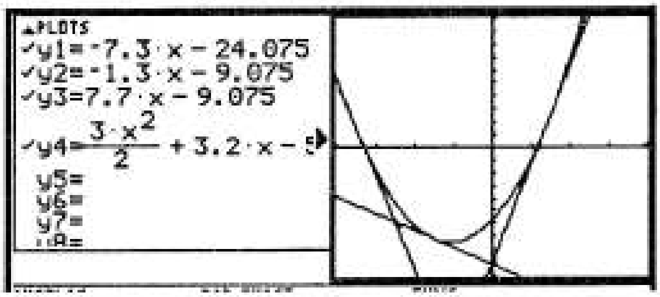
$4a(c+ 24,075) = 10{,}5^2$ et $4a(c+ 9,075) = 4{,}5^2$.

La division des deux équations membre à membre permet alors de calculer c ; il suffit alors de remplacer c par sa valeur dans la première équation (par exemple), nous obtenons alors a.



Nous pouvons alors observer la configuration obtenue. La solution semble bien convenable.

On remarquera que l'on prouve du même coup l'existence et l'unicité de la solution : il n'y a qu'une parabole d'axe vertical tangente aux trois droites données [5].



Les morales de l'histoire :

- il y a toujours, pour un problème donné, plusieurs stratégies possibles ;
- les stratégies qui s'adaptent au plus près à la configuration particulière étudiée sont souvent les plus efficaces. Mais, étant très particulières, elles sont moins transférables à d'autres problèmes que les stratégies plus générales. Ce qu'on gagne d'un côté, on le perd de l'autre !
- plus on multiplie les angles de vue sur un problème donné, plus on comprend le problème et son environnement. Envisager plusieurs stratégies n'est ainsi jamais du temps perdu !

---

5 La précision "d'axe vertical" est importante. On démontre en effet la propriété suivante, pour trois droites du plan sécantes en A, B et C :
- tout point F du cercle circonscrit au triangle ABC est le foyer d'une parabole tangente aux trois droites ;
- les projetés orthogonaux de F sur les trois côtés du triangle sont alignés ; la droite qu'ils définissent, appellée droite de Steiner de F relativement au triangle ABC, est la directrice de cette parabole.

Il y a donc une infinité de paraboles (d'axe non vertical) tangentes à trois droites données. Etonnant, non ?

TP N°8

Retour aux problèmes de tangentes communes. On considère aujourd'hui la parabole P représentant le trinôme : f : $x \to x^2$ et la sinusoïde S représentant la fonction sinus.

La question du jour

On peut d'abord comparer les tangentes aux deux courbes :

- soit une tangente D à S ; existe-t-il (et combien) de tangentes à P parallèles à D ?
- soit une tangente Δ à P ; existe-t-il (et combien) de tangentes à S parallèles à Δ ?

Déterminer ensuite le nombre de droites tangentes simultanément à S et P. Déterminer les abscisses des points de contact entre ces tangentes communes et la parabole. Déterminer pour finir l'équation de celle des tangentes communes qui a la plus grande pente.

NB : à défaut de fournir des valeurs exactes, on donnera des encadrements à 10^{-5} près des solutions proposées.

Les questions du lendemain

Peut-on trouver une paire de tangentes communes à P et S perpendiculaires l'une à l'autre (en repère orthonormal) ?

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°8

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Frédéric Bécamel et Benoît Chifolleau.

Prologue.

Le TP n°8 ressemble au TP n°7 quant au thème (recherche des tangentes communes), mais les différences apparaissent vite : nous ne disposons pas d'éléments de symétrie entre les deux courbes et, de toute évidence, une définition des tangentes convenable pour les coniques (un seul point d'iintersection avec la courbe) ne convient plus pour une sinusoïde. Il est essentiel, dans le traitement d'un problème, de rechercher des analogies avec des problèmes connus en sachant bien que toute méthode n'est pas transférable d'un problème à un problème analogue. Dans le passage du TP n°7 au TP n°8, nous perdons les méthodes algébriques ; il nous reste sans doute des méthodes de type analytique que nous allons mettre à l'épreuve.

Recherche théorique de tangentes parallèles

L'énoncé propose d'étudier d'abord les tangentes respectivement à P et S parallèles entre elles. Ni P, ni S n'admettent des tangentes parallèles à l'axe des ordonnées (cela supposerait des points où les fonctions ne seraient pas dérivables, ce n'est manifestement pas le cas pour la fonction carré ou la fonction sinus). Le parallélisme des tangentes est donc acquis à partir de l'égalité des coefficients directeurs de ces droites :

- équation de D, tangente à S au point d'abscisse a : $y = \cos a.(x-a) + \sin a$;
- équation de Δ, tangente à P au point d'abscisse b : $y = 2b.(x-b) + b^2$.

<u>Supposons D fixée</u>. Δ est parallèle à D si et seulement si $2b = \cos a$, c'est-à-dire $b = \frac{\cos a}{2}$. On en déduit que, pour a fixé, il existe un et un seul b répondant à la question. Ainsi, pour toute tangente D à la sinusoïde, il existe une tangente Δ à la parabole, et une seule, parallèle à D.

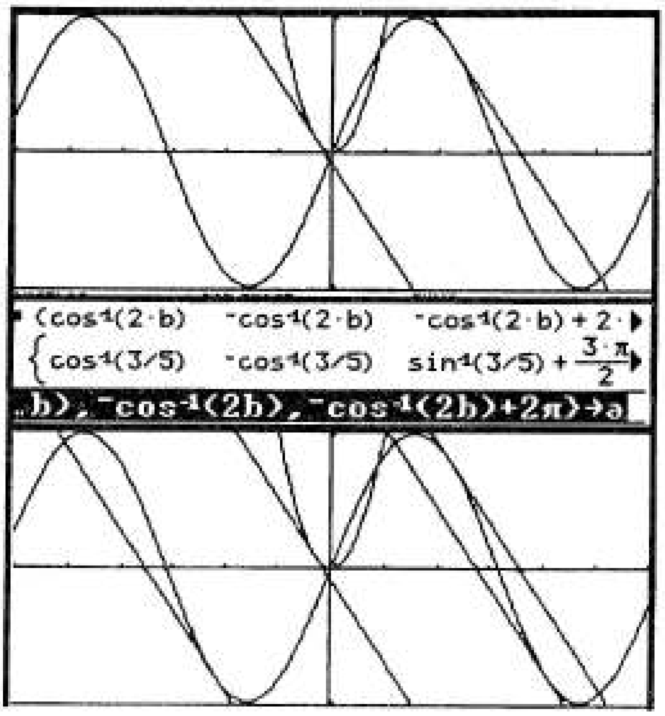
<u>Réciproquement, supposons Δ fixée</u>. D est parallèle à Δ si et seulement si $\cos a = 2b$. L'existence de solutions suppose que 2b soit compris entre -1 et +1. Il nous faut distinguer alors deux cas de figure :

- si $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$, il y a alors une infinité de a convenables du fait de la périodicité et de la parité de la fonction cosinus. Notons que l'existence d'une infinité de valeurs pour a n'implique pas ipso facto l'existence d'une infinité de tangentes : celles-ci peuvent être confondues. C'est le cas si $b = 0$: il n'y a que deux tangentes à la sinusoïde parallèles à la tangente à la parabole à son sommet, ce sont les tangentes aux sommets de la sinusoïde, correspondant aux maximumas et aux minimas de la fonction sinus ;
- si $|b| > \frac{1}{2}$, alors il n'y a aucune valeur de a convenable, la valeur absolue d'un cosinus ne pouvant pas excéder 1.

Quelques observations

L'éditeur de fonctions permet de définir les deux fonctions en question et la forme générale de l'équation des tangentes. Il est ensuite possible de choisir pour b une valeur particulière et d'ajuster le choix de a pour obtenir des tangentes parallèles.

```
√y1=sin(x)
√y2=x²
√y3=cos(a)·(x − a) + sin(a)
√y4=2·b·(x − b) + b²
■ -3/10 → b                               -3/10
■ cos⁻¹(2·b) → a                 sin⁻¹(3/5) + π/2
```



Pour une tangente à la parabole, nous n'obtenons alors qu'une tangente à la sinusoïde parallèle. Cela vient de la définition de a de façon unique.

Obtenir d'autres tangentes parallèles est possible en usant de la parité et de la périodicité du cosinus : on affecte alors à la mémoire "a" un ensemble de valeurs (cf. écran ci-contre). L'application graphique permet alors d'obtenir plusieurs tangentes à la sinusoïde, parallèles à la même tangente à P.

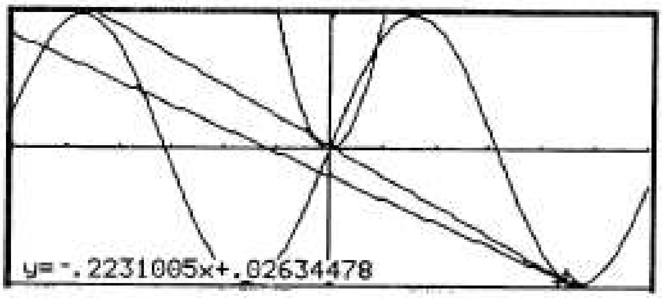
La configuration d'ensemble est plus complexe à appréhender que dans le cas des deux paraboles du TP n°7.

Il est cependant intéressant d'analyser les raisons profondes de la dissymétrie du problème :

- la dérivée de la fonction $x \to x^2$ est la fonction $x \to 2x$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Aussi, quelle que soit la pente choisie, il sera toujours possible de trouver une tangente à la parabole et une seule ayant cette pente ;
- la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. Elle est bornée et périodique. Un nombre donné ne sera la pente d'une tangente à la sinusoïde que si ce nombre est dans l'intervalle $[-1; 1]$. S'il répond à cette condition, alors il sera la pente d'une infinité de tangentes (éventuellement confondues) à la sinusoïde ;
- les droites tangentes à P et parallèles à des tangentes à S ont ainsi des pentes comprises entre -1 et 1. Les points de contact avec la parabole ont donc une abscisse comprise entre -0,5 et 0,5 : ils sont proches du sommet, ce qui explique la confusion de certains tracés.

Recherche des tangentes communes à S et P

Les conjectures sont ici assez difficiles à formuler : lors du TP, on a pu observer quelques tracés à la main, des règles pivotant autour du sommet de la parabole jusqu'à "toucher" la sinusoïde.



Certains binômes ont aussi essayer d'ajuster, par essais successifs, des tangentes communes grâce à la commande *Tangente* du menu *Math* de l'application graphique. Il est possible aussi de combiner ces démarches avec la variations de pente dans l'éditeur de fonctions.

De telles expérimentations ne sont pas inutiles : elles permettent de se représenter le problème, de formuler, sinon des conjectures, du moins des questions essentielles :

- y a-t-il un nombre fini ou infini de tangentes ?
- y a-t-il une symétrie du problème entre $\mathbb{R}+$ et $\mathbb{R}-$?

Mais il est impossible de résoudre complètement le problème sans en fixer le cadre théorique. Ceci doit se faire en relation avec les résultats déjà établis :

- nous savons à quelle condition les tangentes aux deux courbes sont parallèles (égalité des deux coefficients directeurs) ;
- nous disposons de l'équation générale des tangentes ;
- pour que celles-ci représentent les mêmes droites, en plus de l'égalité des coefficients directeurs nous devons avoir l'égalité des "ordonnées à l'origine".

Rappelons l'équation des deux familles de tangentes :

- équation de D, tangente à S au point d'abscisse a : y = cosa.(x-a) + sina ;
- équation de Δ, tangente à P au point d'abscisse b : y = 2b.(x-b) + b^2.

Développons les deux équations, pour mettre en évidence les coefficients directeurs et les ordonnées à l'origine : y = cosa.x- a.cosa+ sina et y = 2bx - b^2.

Nous devons donc avoir simultanément :

cosa = 2b et -a cosa + sina = - b^2.

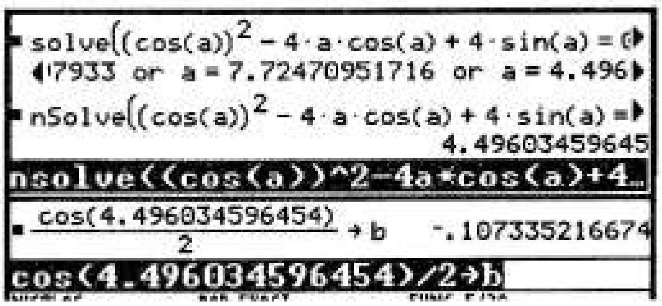
Nous pouvons facilement exprimer b en fonction de a dans la première équation :

$b = \frac{\text{cosa}}{2}$ (ce qui suppose, on l'a vu, $b \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). Par report dans la deuxième équation,

nous obtenons l'équation d'inconnue a : -a cosa + sina = - $(\frac{\text{cosa}}{2})^2$, c'est-à-dire :

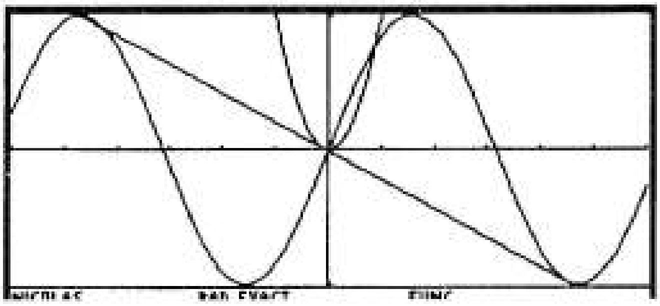
$$\mathbf{(\text{cosa})^2 - 4a.\text{cosa} + 4.\text{sina} = 0} \qquad \textbf{(équation E)}$$

La résolution de cette équation ne s'annonce pas particulièrement facile : elle comporte à la fois des fonctions trigonométriques et des fonctions polynômes. L'utilisation de l'application initiale de la calculatrice peut donner quelques informations utiles :

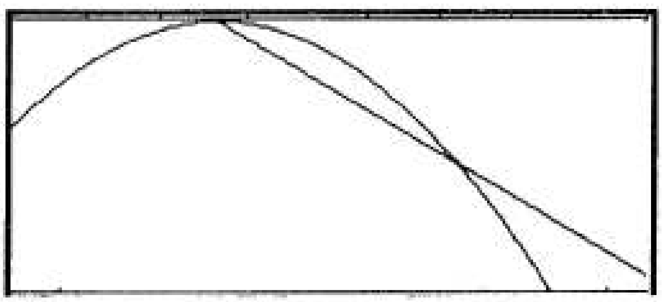


La commande *Solve*, en valeurs approchées, donne 7 solutions. Contrairement à ce qu'ont imaginé quelques binômes, il n'y a pas de raison d'imaginer que ce sont les seules solutions !

L'observation des 7 résultats semble indiquer qu'il n'y a pas de symétrie des solutions par rapport à zéro. On peut relever un des résultats grâce à la commande *nSolve* qui ne sélectionne qu'une des solutions. Après avoir stocké cette solution dans la mémoire numérique a et défini en conséquence le réel b, nous pouvons observer dans l'application graphique la superposition des deux tangentes.



Répétons le : il n'y a pas symétrie du problème : malgré les apparences, la droite est tangente à la parabole en un point et à la sinusoïde en un point (en bas à droite de l'écran). Une vérification rapide, grâce à la commande ZoomBox confirme que la droite est sécante à la sinusoïde "en haut à gauche de l'écran.



Bien évidemment ce qui précède ne constitue qu'une validation partielle des résultats que nous avons obtenus, contenus dans l'équation (E). Il faut en revenir à cette équation.

S'agissant d'une équation n'admettant pas de résolution algébrique, la méthode souvent employée consiste à se mettre dans les conditions de l'application du théorème de la bijection. On peut au préalable regrouper les fonctions de même nature pour comprendre le processus. Cela suppose de séparer la partie polynomiale et la partie trigonométrique. Pour cela, nous divisons par cos(a) (ce qui est licite, puisque la condition cos(a) = 0 ne permet pas manifestement la réalisation de l'équation).

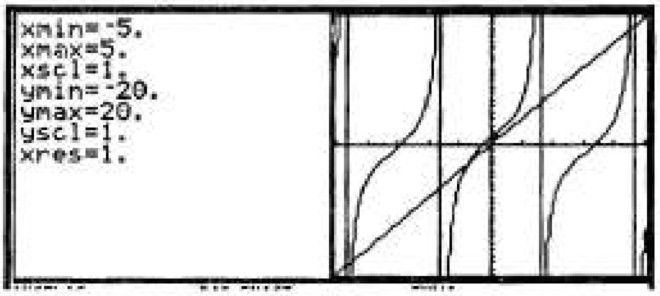
L'équation devient alors : **4a = cos(a) + 4tan(a)**

L'observation graphique permet de retrouver les caractéristiques des fonctions de référence en présence :

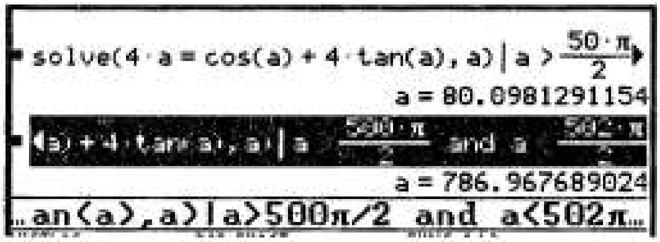
- la fonction linéaire $x \to 4x$ bien sûr ;

- la fonction trigonométrique pour laquelle les variations de la fonction tangente semblent "absorber" celles de la fonction cosinus.

Cette forme donne une première information précieuse : pour raison de limites de la fonction tangente en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, il y a nécessairement au moins une intersection sur chaque intervalle $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$.



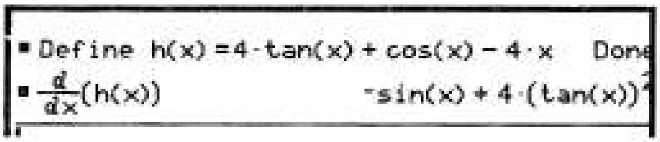
Un petit test dans l'application initiale permet de contrôler que, pour tout intervalle de ce type, on trouve bien une solution. Il y a ainsi beaucoup plus de solutions que les 7 solutions annoncées au départ par l'application intiale.



L'observation des deux courbes permet aussi de revenir à la configuration initiale : il semble bien que, plus x est grand, plus les solutions sont proches de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, c'est-à-dire que les points de contact des tangentes communes avec les sinusoïdes se rapprochent des sommets de cette courbe. C'est sans doute naturel, lié à "l'applatissement" relatif des tangentes communes aux deux courbes quand x croît.

Revenons à notre équation. Comme annoncé, nous allons nous ramener à l'étude d'une fonction pour appliquer le théorème de la bijection. Soit h la fonction qui à x associe $h(x) = 4\tan x + \cos x - 4x$, définie à partir de la différence des deux fonctions constituant l'équation étudiée.

On peut éventuellement utiliser le logiciel pour l'étude de h. La dérivée de h est périodique, nous l'étudierons donc sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

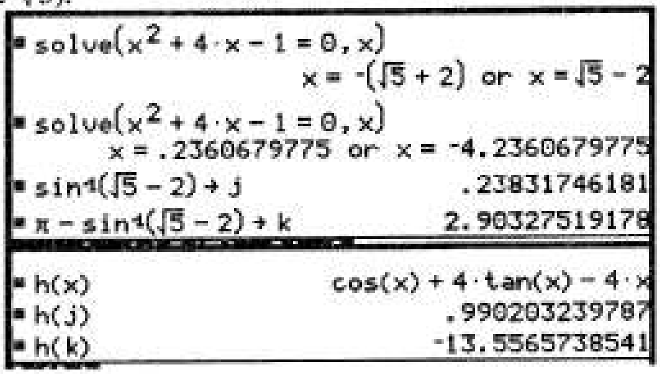


$h'(x) = \sin x\,[-1 + 4\frac{\sin x}{\cos^2 x}]$. Pour l'étude du signe de h', il est utile de n'avoir à traiter qu'une seule fonction trigonométrique ; une expression de h' en fonction de sinx est possible :

$$h'(x) = \sin x\,[-1 + 4\,\frac{\sin x}{1-\sin^2 x}] = \sin x\,\frac{\sin^2 x + 4\sin x - 1}{1-\sin^2 x}$$

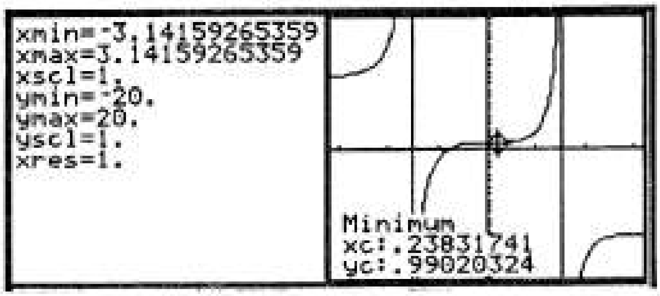
La factorisation du trinôme (cf. écran ci-dessous) permet d'écrire h'(x) sous la forme:

$h'(x) = \sin x\,\dfrac{(\sin x + 2 + \sqrt{5}).(\sin x + 2 - \sqrt{5})}{1-\sin^2 x}$. Comme $2+\sqrt{5}$ est plus grand que 1, la dérivée est du signe de $\sin x.(\sin x+2-\sqrt{5})$.



La TI-92 nous fournit une valeur approchée de $2-\sqrt{5}$. La fonction sinus prendra deux fois cette valeur sur l'intervalle $[0, \pi]$. L'application initiale de la TI-92 permet de préciser des valeurs approchées de ces racines de $(\sin x+2-\sqrt{5})$, que nous avons stockées dans les mémoires numériques j et k.

Nous pouvons alors déterminer une valeur approchée de h(j) et h(k) : $h(j) = J > 0$, $h(k) = K < 0$.



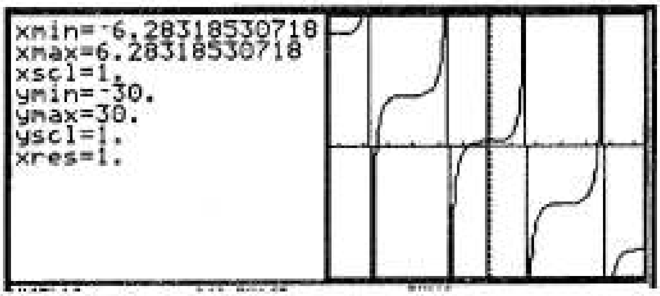
Les éléments indispensables pour la compréhension des variations de la fonction h sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont désormais disponibles. Un graphique permet de les synthétiser (cf. ci-contre) : on retrouve un minimum local, obtenu pour $x = j$.

Nous pouvons aussi, plus classiquement, synthétiser ces résultats dans un tableau de variations :

- les limites sont établies sans peine : c'est la fonction tangente qui dicte sa loi ;
- les signes de $4\pi-1$, $-4\pi-1$, h(j), h(k) sont connues ;
- la restriction de h à chaque intervalle où elle est continue et strictement monotone nous permet d'appliquer le théorème de la bijection ;
- h(x) s'annule ainsi exactement deux fois sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		j		$\pi/2$		k		$+\pi$
sinx		-	‖	-	0	+		+	‖	+		+	
$\sin x+2-\sqrt{5}$		-	‖	-		-	0	+	‖	+	0	-	
h'(x)		+	‖	+	0	-	0	+	‖	+	0	-	
h	$4\pi-1$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	h(j)	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	h(k)	↘	$-4\pi-1$

Une racine se situe sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, l'autre se situe sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, k[$.



Le problème est résolu sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Il reste à le résoudre ailleurs... L'observation de la représentation graphique de h nous rappelle que la dérivée h' est 2π-périodique. En fait f se compose d'une partie elle aussi 2π-périodique $(\cos x+4\tan x)$ et d'une partie affine $(-4x)$.

Dans ces conditions, il est assez simple de prouver, en utilisant ce qui a été fait sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, que la fonction h s'annule une fois et une seule sur tout intervalle de la forme $[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$.

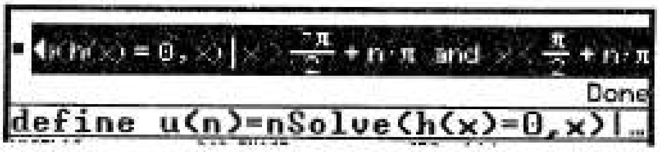
Retour au problème initial

L'étude initiale d'un problème de tangente à des courbes nous a amené à traiter un problème lié à la fonction trigonométrique tangente. Revenons à notre problème géométrique de départ. Nous avons prouvé l'existence d'une infinité de tangentes communes à la courbe représentative de la fonction sinus et à celle de la fonction carré. Les abscisses a des points de contact de ces tangentes avec la sinusoïde vérifient l'équation $\cos(a) + 4\tan(a) - 4a = 0$. Cette équation a une racine et une seule dans tout intervalle de la forme $[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$.

Ces résultats nous autorisent à définir une suite u(n) égale à l'unique solution de cette équation dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi]$, via la commande *nSolve.*

L'instruction de condition / *(sachant que)* permet de préciser dans quel intervalle le logiciel doit rechercher les racines successives. Dans l'éditeur de suite, nous avons défini :

- en u1 la suite u(n) qui donne les valeurs successives des abscisses des points de contact des tangentes communes avec la sinusoïde ;
- en u2 la suite cos(u(n)) qui donne la pente de ces tangentes communes.

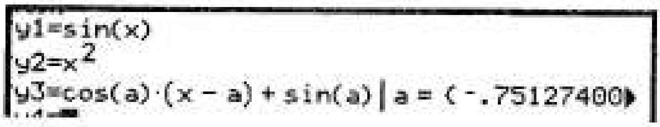


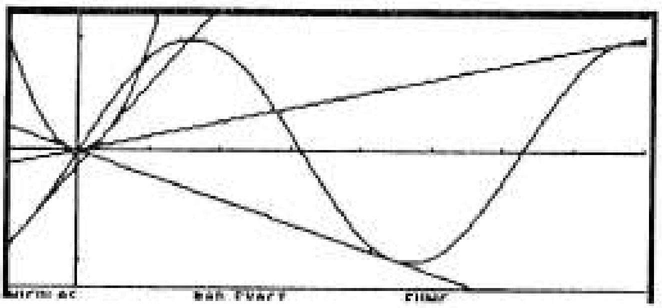
0.	-.7512740087	.73081986159
1.	4.4960345965	-.2146704333
2.	7.7247095172	.12891236712
3.	10.904312877	-.0911347823
4.	14.066104084	.07100306171
5.	17.220804061	-.0579230954
6.	20.371273387	.0490591607
7.	23.51947168	-.0424604532

L'observation de l'évolution de ces pentes indique qu'elles sont alternativement positives et négatives : cela traduit l'existence de tangentes communes alternativement à des arches supérieures et à des arches inférieures de la sinusoïde.

Attention, cette suite est définie aussi pour des valeurs de n entières et négatives : il y a bien aussi une solution et une seule sur tout intervalle de la forme $[-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi]$ avec n négatif.

Une rapide vérification graphique permet d'observer les tangentes communes correspondant aux points de contact avec la sinusoïde d'abscisses u(1), u(2) et u(3). Pour des raisons liées à la configuration (les arches de sinusoïdes "s'éloignent" donc les pentes des tangentes communes, en valeur absolue, sont décroissantes) la tangente commune qui a la plus grande pente correspond au point de contact d'abscisse u(0) : sa pente est donc cos(u(0)).





La question du lendemain

Quant à la question du lendemain, pour une fois, elle se traite sans peine, dès lors que l'on se place dans un repère orthonormal (comme l'impose d'ailleurs l'énoncé). Mais cela suppose que l'on en revienne aux conditions théoriques d'existence de tangentes communes perpendiculaires. En effet, si l'on reste fixé sur l'observation graphique, on peut avoir quelques difficultés à conjecturer un résultat quelconque à cause de la grande complexité de la configuration. Mais si l'on prend un peu de recul, le problème apparaît assez simple :

- deux droites sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 ;
- les coefficients directeurs sont ici des cosinus. Le produit de deux cosinus est égal à -1 si et seulement si l'un est égal à 1, l'autre à -1 !
- l'existence de deux tangentes communes orthogonales supposerait donc que l'une d'entre elle est une pente de 1, l'autre de -1. Il suffit de considérer les premières pentes obtenues (et la décroissance de leurs valeurs absolues) pour comprendre que cette situation est parfaitement impossible.

La question du surlendemain

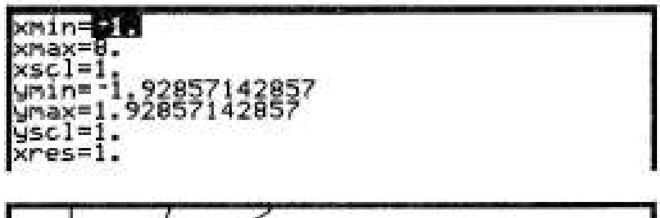
Il est possible cependant d'élargir la question : soient deux droites (non parallèles) données, dans un repère quelconque. Si, dans ce repère, les droites ne sont pas perpendiculaires, est-il possible de déterminer un nouveau repère dans lequel elles le soient ? La réponse est oui, dès lors que le produit de leurs pentes est négatif. Il suffit pour cela d'utiliser une transformation qui a un effet "d'accordéon" sur les représentations graphiques (cf. les élements de réflexion sur le TP n°3, relatifs aux fonctions associées). Il s'agit d'une affinité : elle permet de passer de la représentation graphique de $f : x \rightarrow f(x)$ à la courbe de $g : \rightarrow g(x) = f(kx)$. La marche à suivre est assez simple :

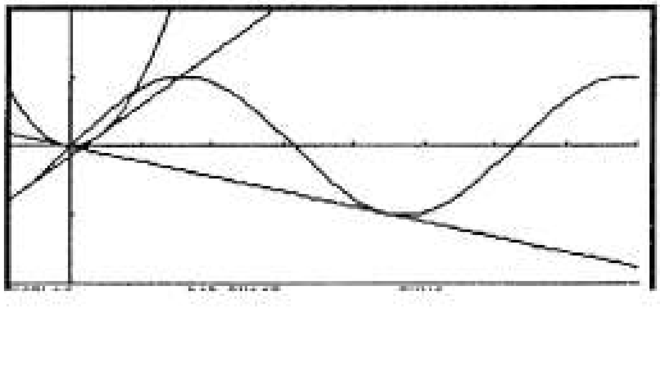
- on considère en repère orthonormé deux droites d'équation $y = ax+b$ et $y = cx + d$, non perpendiculaires, mais telles que $ac < 0$;
- on considère dans le même repère les fonctions affines associées $y = kax + b$ et $y = kcy + d$. La condition pour que ces nouvelles droites soient perpendiculaires est $ka.kb = -1$, c'est-à-dire $k = \dfrac{1}{\sqrt{-ab}}$; ce coefficient existe bien puisque $ab < 0$;
- modifier l'équation des droites revient à appliquer l'affinité à la plage [Xmin-Xmax] de la fenêtre choisie. On prendra alors [k.Xmin-k.Xmax] comme nouvelle fenêtre, k étant le coefficient que nous venons de déterminer.

Mettons à l'épreuve cette méthode sur les deux premières tangentes communes que nous avons déterminé, correspondant aux points d'abscisses u(0) et u(1).

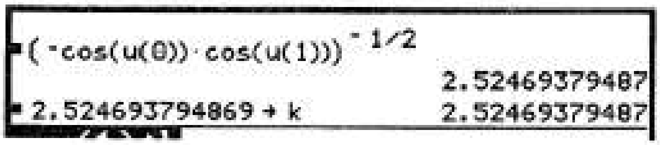
Nous commençons par choisir une plage qui permette de voir les deux tangentes en question. La plage initiale était [-1, 8] pour x.

A cette plage nous appliquons la commande *ZoomSquare* pour bénéficier d'un reprère orthonormé. Nous obtenons alors la représentation graphique ci-contre, dans laquelle les deux tangentes ne sont pas perpendiculaires (ce qui était attendu, cf. question du lendemain).

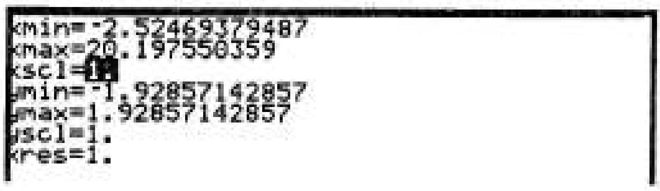




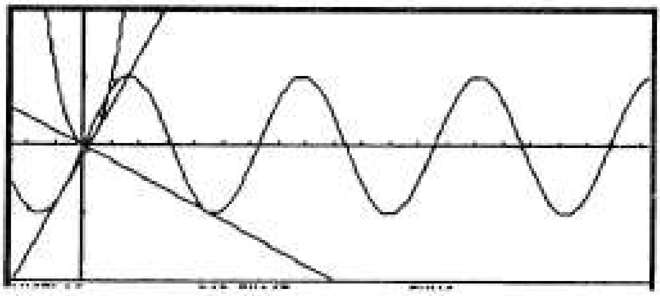
Nous calculons alors, via l'application initale, le coefficient k permettant l'effet "d'accordéon" voulu, c'est-à-dire la mise en oeuvre d'une affinité convenable.



Une nouvelle fenêtre est choisie, en multipliant *Xmin* et *Xmax* par k.

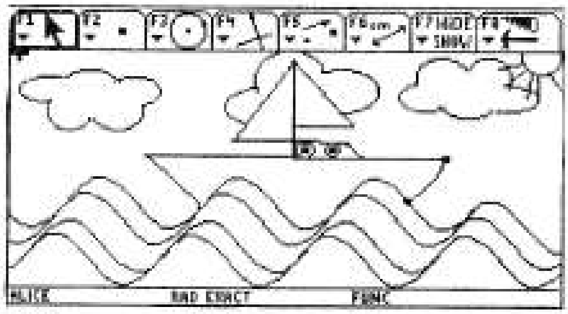


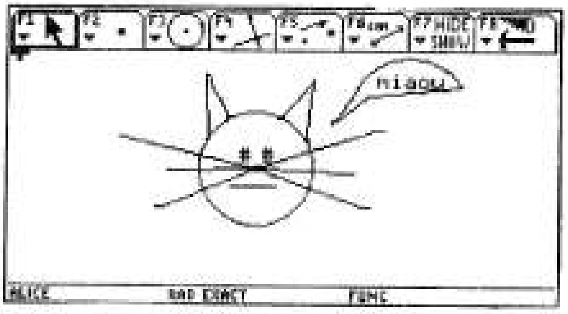
La nouvelle configuration témoigne du succès de l'entreprise : les deux tangentes apparaissent bien désormais comme perpendiculaires.

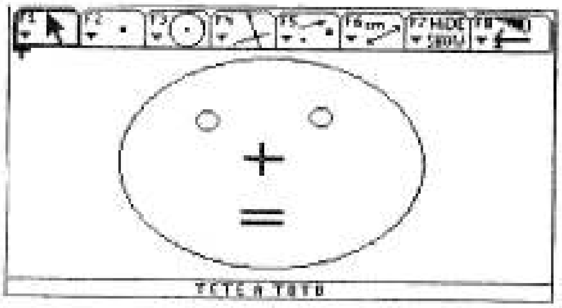


Nous pouvons pour finir poser une dernière question : si le produit des deux coefficients directeurs n'est pas négatif, n'est-il pas possible d'envisager un autre type de changement de repère pour obtenir des droites perpendiculaires ?

Cela suppose sans doute de définir autre chose qu'une simple affinité sur la fenêtre de représentation graphique. Pour obtenir des droites ayant des coefficients directeurs de signe opposé, il faut sans doute envisager une rotation du repère. Mais c'est une autre histoire, que le lecteur (très) curieux pourra envisager à tête reposée.



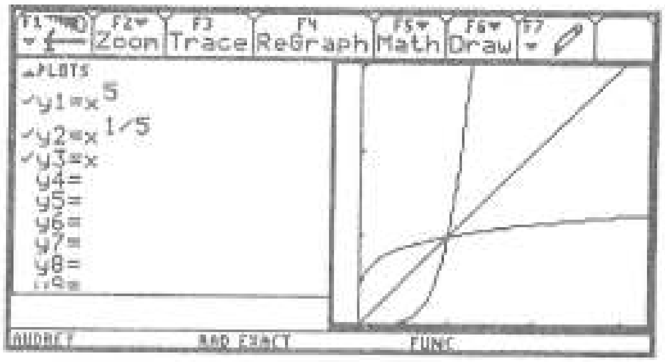




TP N°9

En plus de la fonction $x \to \ln x$, on s'intéresse aujourd'hui aux fonctions "racines $n^{\text{ièmes}}$", c'est-à-dire aux fonctions $f_n : x \to f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, n étant un élément de $\mathbb{N}$. Par définition, ces fonctions sont les fonctions réciproques, sur $\mathbb{R}+$, des fonctions "puissances $n^{\text{ièmes}}$" ($x \to x^n$).

Ainsi les représentations graphiques des deux fonctions ($x \to x^n$ et $x \to x^{1/n}$) se correspondent, en repère orthonormé, par une réflexion d'axe la droite d'équation y=x (cf. ci-contre).



Nous admettrons que la formule de dérivation démontrées pour les puissances entières s'applique aussi à ces fonctions puissances particulières d'exposant $\frac{1}{n}$: pour $f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, $f_n'(x) = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}$.

Nous noterons λ la courbe de la fonction $x \to \ln x$ et C_n les courbes des fonctions $x \to f_n(x) = x^{1/n}$.

La question du jour

Etudier, suivant la valeur de l'entier n, l'existence et le nombre de points d'intersection entre λ, représentation graphique de la fonction $\to \ln x$, et les courbes C_n, représentations graphiques des fonctions $x \to f_n(x) = x^{1/n}$.

La question du lendemain

Même question pour la courbe de la fonction $x \to \ln(\ln x)$ et les courbes C_n.

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°9

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Aurélie Bialès et Mélanie Lysowec.

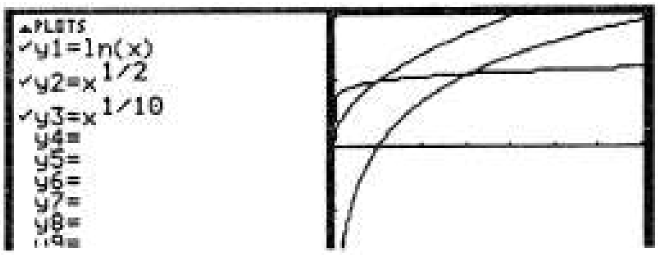
Prologue.

Même si ce n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé, il est nécessaire de prendre du recul sur les questions posées, pour récapituler les éléments d'information disponibles et les stratégies possibles :

* <u>Domaine d'étude</u>. L'intersection des domaines de définition de la fonction ln et des fonctions "racines nièmes" est $\mathbb{R}+^*$. C'est donc sur cet intervalle que l'on sera conduit à chercher des solutions. Mieux, les fonctions f_n sont positives et la fonction ln est positive à partir de x=1. Les solutions de l'équation proposées, si elles existent, appartiennent nécessairement à l'intervalle $]1, +\infty[$.

* <u>Fonctions de référence</u>. La fonction logarithme est bien connue, les fonctions f_n aussi.

Ce sont des fonctions strictement croissantes, à branches paraboliques horizontales (c'est-à-dire telles : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$;



Autrement dit, ce sont des fonctions qui tendent "lentement" vers $+\infty$. Pour l'étude conjointe des deux fonctions, on dispose du théorème fondamental $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = 0$. Cela traduit le fait que la fonction "racine nième", quel que soit n, "impose sa loi" à la fonction ln en $+\infty$.

* <u>Stratégies</u>.

Nous disposons de deux stratégies de base pour la résolution d'équation :

- une stratégie algébrique (factorisation, puis résolution d'une équation polynomiale du premier degré ou du deuxième degré - éventuellement via un changement d'inconnue-) ;
- une stratégie analytique (étude des variations d'une fonction bien choisie et utilisation du théorème de la bijection). C'est cette deuxième stratégie qui convient ici.

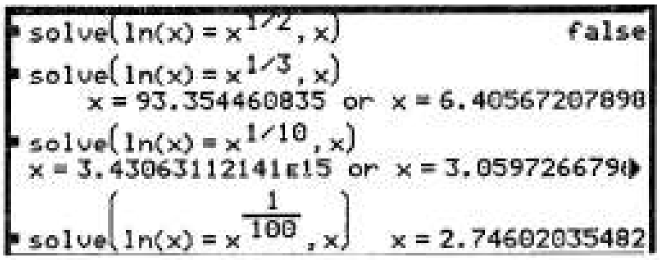
1. Observer.

Nous pouvons ensuite rechercher quelques informations sur les solutions des différentes équations $\ln x = x^{1/n}$ en utilisant la TI-92 (on peut aussi commencer par une étude théorique : en fait les phases d'observation et de calcul théorique sont relativement imbriquées).

<u>Utilisation de l'application initiale</u>

En mode calcul approché, nous pouvons observer que :

- pour n=2, pas de solutions ;
- à partir de n=3, deux solutions;
- pour des "grandes" valeurs de n, une seule solution apparente.



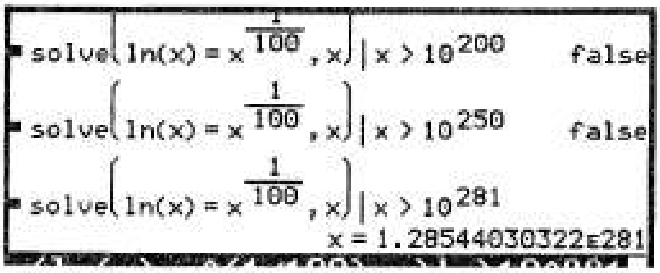
Nous savons que le mode "calcul approché" n'est pas totalement fiable. Cependant, l'observation de l'évolution des solutions est toujours utile :

- une première suite de solutions semble décroître lentement (6,4..., puis 3,0..., puis 2,7...) ;
- une deuxième suite de solutions semble croître très vite (93,... puis $3{,}4.10^{15}$, puis... disparition).

Nous pouvons essayer de forcer la résolution de la calculatrice en précisant l'intervalle sur lequel nous recherchons des solutions : mais, comme on peut le voir ci-dessous, cela n'a rien d'évident !

Pour la même équation :

-**aucune** solution supérieure à 10^{200} ;
-**aucune** solution supérieure à 10^{250} ;
-**une** solution supérieure à 10^{281} !

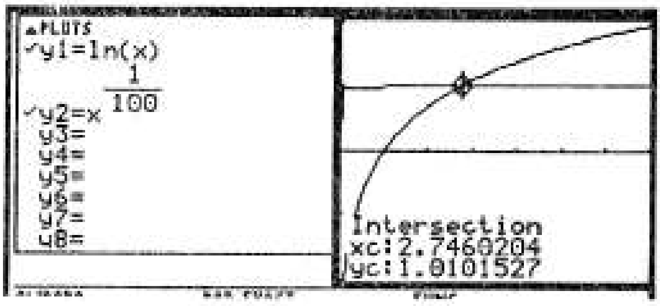


Dans ces conditions, la découverte des solutions relève plus du hasard, ou de l'acharnement, que d'une recherche méthodique.

<u>Utilisation de l'application graphique.</u>

Nous considérons à nouveau l'équation qui n'a donné qu'une solution en calcul approché dans l'application initiale.

L'utilisation de la commande *Intersection* du menu *Math* permet d'obtenir une valeur approchée de la solution déjà connue (noter que l'on dispose ici d'une précision inférieure à celle de l'application initiale).

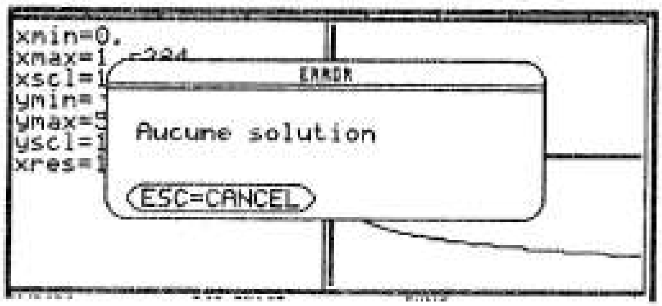


Nous pouvons essayer de voir plus loin s'il n'y a pas d'autres solutions. Pour cela, nous avons intérêt à considérer, au lieu de deux fonctions, une seule fonction :

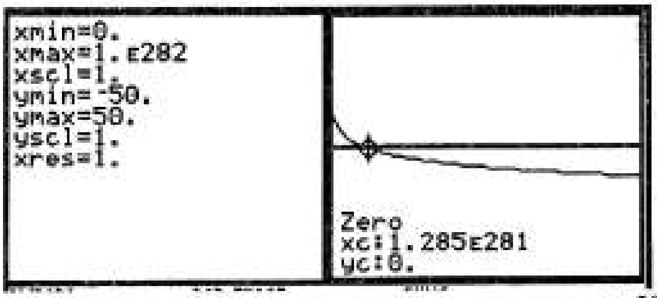
$x \to g(x) = \ln x - x^{1/100}$. En effet, le seul cadrage à choisir est alors celui des x ; pour les y (nous recherchons les valeurs de x qui annulent la fonction) nous pourrons choisir un intervalle centré autour de 0.

Comme dans l'application initiale, cette recherche peut réserver quelques surprises :

- sur l'intervalle $[0,\ 10^{284}]$, le logiciel ne détecte aucune solution ;
- sur l'intervalle $[0,\ 10^{282}]$, le logiciel détecte une solution.



Il est possible de comprendre (en réfléchissant un peu) que l'application graphique ne détecte aucune solution sur l'intervalle $[0, 10^{284}]$:



-l'écran contient 240 colonnes de pixels ;

- la fonction n'est pas définie en 0, le premier calcul réalisé l'est donc pour $x = \frac{10^{284}}{240}$ $=4.10^{281}$, c'est-à-dire un nombre supérieur à la valeur de la deuxième racine détectée par l'application initiale ($1,28.10^{281}$) et que l'on retrouve ci-dessus avec le deuxième cadrage.

Ainsi, avec le premier cadrage, à partir du premier point de calcul la fonction est strictement négative et le reste. Le logiciel ne peut donc pas détecter de solution.

On le voit, la mise en évidence de l'ensemble des solutions à partir de l'application graphique n'est pas certaine... De toutes façons, elle est souvent très coûteuse en temps. Dans ces conditions, il faut bien comprendre que l'organisation d'une recherche théorique méthodique n'est pas un détour folklorique pour satisfaire à une tradition, c'est tout au contraire une nécessité pratique pour résoudre le problème posé de façon efficace.

2. Prouver.

Il s'agit d'étudier l'équation $\ln x = x^{1/n}$. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$ [6], on étudie la fonction h qui à x associe $h(x) = \ln x - x^{1/n}$.

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} x^{(1/n)-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} x^{1/n} . \frac{1}{x} =$
$\frac{1}{nx}(n-x^{1/n})$.

x	0		n^n		$+\infty$
h'		+	0	-	
h(x)		$-\infty$ ↗	$n\ln n - n$	↘ $-\infty$	

Cette dérivée est du signe de $(n-x^{1/n})$, fonction décroissante qui s'annule pour $x^{1/n} = n$, c'est-à-dire $x=n^n$. D'où les variations de la fonction h :

* on dispose d'un maximum absolu, $h(n^n) = n\ln n - n = n(\ln n - 1)$;

* $\lim_{x \to 0} h(x) = -\infty$ (trivial) ;

* $\lim_{x \to +\infty} h(x)$: on constate ici une indétermination qui était le réel enjeu du TP. Qu'est-ce qui l'emportera, in fine, du logarithme ou des fonctions racines nièmes ? On dispose de la limite de référence rappelée dans le prologue : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = 0$.

Ainsi $h(x) = x^{1/n} (\frac{\ln x}{x^{1/n}} - 1)$. Dès lors, l'indétermination est levée : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$.

L'application du théorème de la bijection sur chacun des intervalles $]0, n^n]$ et $[n^n; +\infty[$ nous conduit à distinguer trois cas de figure, suivant le signe de $n(\ln n - 1)$, c'est-à-dire le signe de $\ln n - 1$:

---

[6] Sur cet intervalle, les deux fonctions sont positives, si bien que l'on pourrait étudier l'équation équivalente $(\ln x)^n = x$. La fonction que l'on peut étudier est alors $k(x) = (\ln x)^n - x$. Son étude nous conduirait à étudier $k'(x) = n(\ln x)^{n-1}.1$. On le voit, l'étude est très proche, dans son principe, de celle de la fonction h ci-dessus.

* $\ln n - 1 < 0$, ssi $n < e$, ssi $n \leq 2$ (rappelons que n est entier) : aucune solution (on retrouve bien le résultat de l'observation de départ ;

* $\ln n - 1 = 0$: c'est impossible si n est entier. Si par contre on accepte les fonctions puissances d'exposant réel, on aurait là une solution unique. Aurait-on alors un contact tangent entre les fonctions $x \to \ln x$ et $x \to x^{1/e}$? On y répondra un peu plus tard dans l'année (mais il est possible déjà d'observer, de conjecturer...) ;

* $\ln n - 1 > 0$, ssi $n > e$, ssi $n \geq 3$. On a alors toujours deux solutions :

- l'une dans l'intervalle $]e, n^n[$, puisque $h(e) = 1 - e^{1/n} > 0$;
- la deuxième dans l'intervalle $]n^n, +\infty[$.

Nous avions bien raison de chercher une deuxième solution pour l'équation $\ln x = x^{1/100}$ dans la première phase de l'observation. L'étude théorique nous assure l'existence de deux solutions et nous fournit un voisinage de celles-ci. Mais celui-ci est un peu vaste pour pouvoir guider efficacement la recherche du solveur de la TI-92... Ainsi, pour l'équation $\ln x = x^{1/100}$, on sait que la plus grande solution est supérieure à n^n, c'est-à-dire ici à 100^{100}, c'est-à-dire à 10^{200}.

La précision de ce voisinage n'assure pas, on le voit, que le logiciel découvre la "grande" racine... On dispose par contre d'un résultat théorique intéressant, par utilisation du théorème des gendarmes : puisque cette racine est supérieure à n^n, elle tend nécessairement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

$\text{solve}\left(\ln(x) = x^{\frac{1}{100}}, x\right) \mid x > 10^{200}$ false

$\text{solve}\left(\ln(x) = x^{\frac{1}{100}}, x\right) \mid x > 10^{280}$ false

$\text{solve}\left(\ln(x) = x^{\frac{1}{100}}, x\right) \mid x > 10^{281}$

x = 1.28544030322E281

Un petit conseil, pour trouver rapidement la solution supérieure à 10^{200} : on utilise la table de valeurs en mode Ask. On peut choisir ainsi librement les valeurs de x pour obtenir les valeurs de h(x) : si $h(x)>0$, x est trop petit, si $h(x)<0$, x est trop grand. Mais la recherche ne se fait pas en aveugle : on sait que la racine cherchée existe !

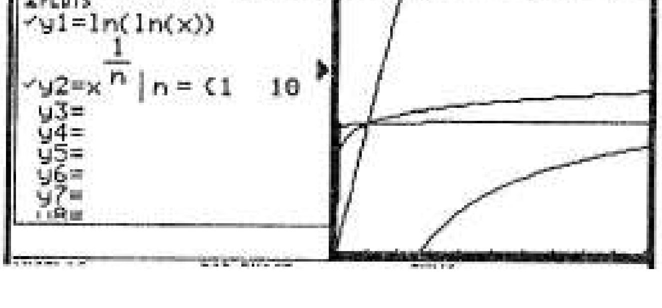
▲PLOTS
✓$y1 = \ln(x) - x^{\frac{1}{100}}$
y2=
y3=
y4=
y5=
y6=
y7=
y8=

x	y1
1.E210	357.65033
1.E250	259.41851
1.E300	-309.2245
1.E275	70.869575
1.E280	13.766482
1.E285	-51.70903
1.E282	-11.36445

La question du lendemain

Il s'agit maintenant d'étudier l'intersection de la courbe de la fonction $x \to \ln(\ln x)$ et des courbes C_n représentant les fonctions $x \to x^{1/n}$, c'est-à-dire de résoudre l'équation $\ln(\ln x) = x^{1/n}$. Cette équation existe pour $\ln x > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.

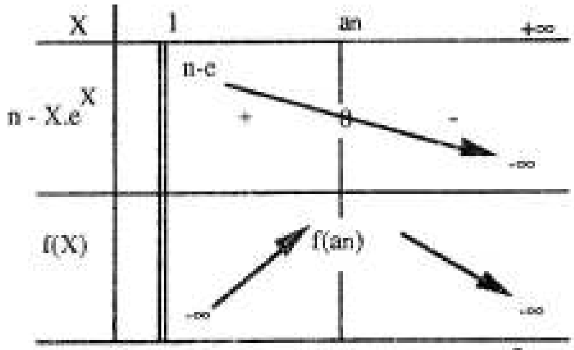
L'itération de la fonction logrithme népérien donne une fonction ln(lnx) à croissance très lente. Le problème est de savoir à partir de quelle valeur de n les fonctions puissances $x \to x^{1/n}$ seront assez "aplaties" pour rencontrer cette fonction $x \to \ln(\ln x)$.



Nous pouvons réduire la complexité des expressions grâce à un changement d'inconnue $X=x^{1/n}$, ce qui équivaut à $X^n = x$. L'équation devient alors $\ln(n\ln X) = X$, c'est-à-dire $n\ln X = e^X$.

Nous considérons naturellement la fonction $f : x \to f(x) = n\ln X - e^X$. Nous obtenons immédiatement $f'(x) = \frac{n}{X} - e^X = \frac{1}{X}(n - X.e^X)$, ce qui nous amène à considérer deux cas de figure :

- si $n < 3$, la dérivée est toujours négative : en effet (on rappelle que $X > 1$), $X.e^X > e$. La fonction f est donc strictement décroissante. Comme $f(1) = -e$, elle ne s'annule jamais. L'équation n'a donc pas de solutions ;
- si $n \geq 3$, l'expression $(n - X.e^X)$, strictement décroissante, s'annule une fois (application du théorème de la bijection), comme l'illustre le tableau de variations ci-dessous.



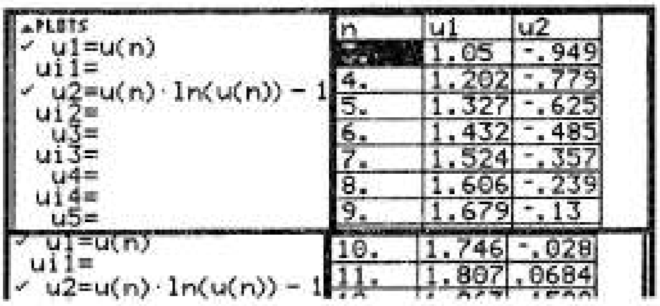
Soit a_n l'unique solution de l'équation $n\text{-}Xe^X = 0$. Tout dépend alors du signe de $f(a_n) = n\ln(a_n) - e^{a_n}$.

Par définition $a_n.e^{a_n} = n$, ce qui permet d'écrire $f(a_n) = n\ln(a_n) - \frac{n}{a_n}$, c'est-à-dire :

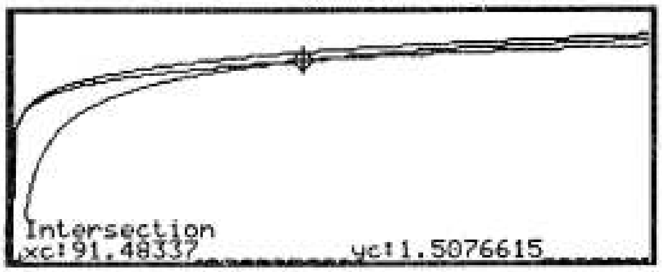
$$f(a_n) = \frac{n}{a_n}[a_n\ln(a_n) - 1].$$

Le problème s'éclaircit alors : la relation de définition de la suite implicite $a_n.e^{a_n} = n$ indique que la suite des solutions est une suite croissante qui diverge vers $+\infty$. Dès que $a_n\ln(a_n)$ dépassera 1, la fonction f aura un maximum strictement positif et s'annulera donc deux fois. Le problème devient alors purement technique. La calculatrice peut alors permettre d'aller vite, en utilisant la commande nSolve : celle-ci donne une valeur approchée de l'équation proposée.

Comme nous sommes assurés que l'équation $x.e^x = n$ a une solution unique (a_n), il n'y a pas d'ambiguïté sur le résultat obtenu. On applique alors la fonction $x.\ln x - 1$ à cette solution. Dès que le résultat dépasse 0, on est assuré que la fonction f s'annulera deux fois. Ci-contre on peut observer en u1 la suite (a_n), en u2 les valeurs prises par $a_n\ln(a_n) - 1$: à partir de n=11, cette fonction est strictement positive.



Terminons par un coup d'oeil sur les représentations graphiques des fonctions $\ln(\ln x)$, $x^{1/10}$ et $x^{1/11}$. Sans l'étude qui précède, il eut été assez difficile de remarquer que les deux premières ne se rencontraient pas et que la première et la troisième se rencontraient en deux points !



Une fois de plus il apparait que l'on voit parce que l'on sait ce que l'on va voir.

TP N°10

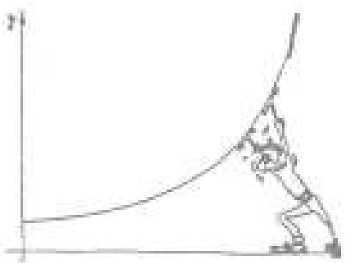
	La syntaxe *d(f(x),x,n)* permet d'obtenir la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f.
	<u>Notation</u> : on notera $f^{(n)}$ (pour éviter la confusion entre dérivée $n^{ième}$ et puissance $n^{ième}$) la dérivée $n^{ième}$ de la fonction f.

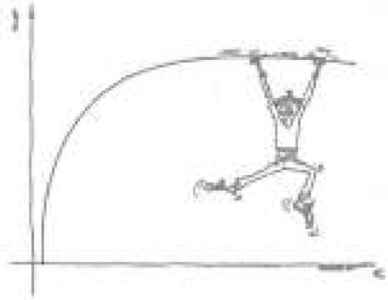
La question du jour

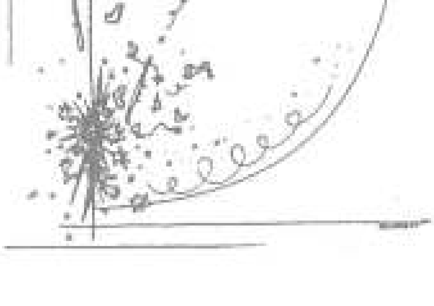
Soit $f : x \rightarrow e^x (x^2+x+1)$. Déterminer une expression générale pour $f^{(n)}$.

La question du lendemain

On considère la suite de fonctions. Observer leurs représentations graphiques. Qu'ont-elles comme éléments communs, comme singularité et pourquoi ?







ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°10

Le texte qui suit a été revu, corrigé, et complété par Arnaud Lewillon et Pierre Rouquette.

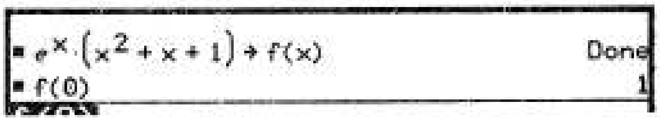
Préambule : apprendre à voir. Il s'agit à nouveau d'illustrer une idée importante : on se sait pas parce que l'on voit, mais on voit parce qu'on sait ce que l'on va voir. Autrement dit, quand on prospecte, on a toujours une petite idée de ce que l'on veut voir, on ne cherche pas (ou rarement) au hasard.

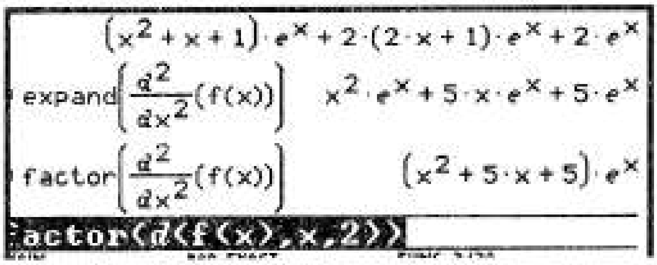
Premières observations

Nous pouvons utiliser la calculatrice pour dériver, ou alors dériver "à la main". Les deux techniques peuvent apporter des informations intéressantes : avec la machine, cela va vite et on peut accumuler à peu de frais de nombreux résultats. A la main, on va moins vite, mais on voit mieux les mécanismes qui aboutissent au résultat obtenu.

1. Avec la calculatrice.

On a d'abord intérêt à stocker la fonction étudiée dans une mémoire sous l'étiquette (par exemple) de f(x). Cela évite de reécrire plusieurs fois la même expression !





L'expression stockée dans f(x) va désormais servir dans tout le TP. Il est indispensable d'en contrôler l'écriture par une lecture attentive de l'écran, éventuellement par un test numérique (on a calculé ci-contre f(0)).

Nous pouvons alors :

- observer les résultats bruts ;
- ou observer les résultats factorisés (commande *Factor*) ;
- ou observer les résultats développés (commande *Expand*).

Les différentes formes, équivalentes, peuvent donner des informations complémentaires. Nous obtenons ainsi une série de résultats que l'on doit récapituler de façon organisée sur feuille pour pouvoir en tirer d'utiles enseignements.

n =	Résultat brut	Avec Factor	Avec Expand
1	$(x^2+x+1)e^x+(2x+1)e^x$	$(x+1)(x+2)\ e^x$	$x^2\ e^x + 3x\ e^x + 2\ e^x$
2	$(x^2+x+1)e^x+2(2x+1)e^x+2e^x$	$(x^2+5x+5)\ e^x$	$x^2\ e^x + 5x\ e^x + 5\ e^x$
3	$(x^2+x+1)e^x+3(2x+1)e^x+6e^x$	$(x+2)(x+5)\ e^x$	$x^2\ e^x + 7x\ e^x + 10\ e^x$
4	$(x^2+x+1)e^x+4(2x+1)e^x+12e^x$	$(x^2+9x+17)\ e^x$	$x^2\ e^x + 9x\ e^x + 17\ e^x$
100	$(x^2+x+1)e^x+100(2x+1)e^x+9900e^x$	$(x^2+201x+10001)\ e^x$	$x^2\ e^x + 201x\ e^x + 10001\ e^x$

Il faut ensuite observer, pour essayer de trouver une régularité :

- il est d'abord remarquable que l'on obtient "toujours" (pour tous les exemples traités) le produit de la fonction exponentielle et d'un trinôme du second degré ;
- il s'agit alors de trouver la forme générale des trois coefficients de ce trinôme. Pour le terme carré, cela semble être 1. Pour le terme en x, cela semble être ..., pour le terme constant, cela pourrait bien être...

Bref, au terme de ce premier round d'observation, on peut avoir (ou ne pas avoir...) une idée de la formule générale.

2. Quelques calculs à la main.

Même pour ceux qui ont une idée de la formule générale, il est utile de comprendre d'où elle provient. Il est peu utile de recalculer ici f' ; il est plus utile de comprendre ce qui se passe si on dérive une fonction de la forme $(x^2 + mx + p).e^x$, puisqu'il semble qu'on a toujours une fonction de ce type. Soit donc $h(x) = (x^2 + mx+ p).e^x$, nous obtenons $h'(x) = (x^2 + mx+ p).e^x + (2x+ m).e^x$, c'est à dire:
$h'(x) = [x^2 + (m + 2).x+ m + p].e^x$. Ainsi :
- le coefficient de x^2 reste 1;
- le coefficient de x a été augmenté de 2 ;
- le coefficient constant est la somme du coefficient de x et du coefficient constant précédents.

Nous pouvons éventuellement jeter un coup d'oeil au tableau établi avec l'aide de la calculatrice pour constater la pertinence des remarques que nous venons de faire. Plusieurs stratégies sont alors possibles. Ceux qui ont conjecturé la formule peuvent passer directement à la deuxième stratégie, les autres doivent passer à la stratégie suivante.

Première stratégie : où l'on trouve et prouve à la fois...

Nous venons de prouver que, si une fonction est de la forme $(x^2 + mx+ p).e^x$, alors sa dérivée est aussi de la forme $(x^2 + m' x+ p').e^x$. Comme f est précisément de cette forme, toutes ses dérivées successives ont la même forme. C'est une preuve par récurrence. On reviendra avec précision sur cette méthode de démonstration dans la partie 2.

Nous savons désormais que la dérivée nième de f, c'est à dire $f^{(n)}$, s'écrit :
$f^{(n)}(x) = (x^2 + b_nx+ c_n).e^x$, les coefficients b_n et c_n dépendant de l'ordre de la dérivation.

On sait même plus, en fonction de ce qui a été établi ci-dessus :
$b_{n+1} = b_n + 2$
$c_{n+1} = b_n + c_n$.

Pour b_n, cela prouve directement que c'est un terme d'une suite arithmétique de raison 2 et de base b_0, c'est à dire 1. Le cours sur les suites nous apprend alors que :
$b_n = b_0 + nr = 1 + 2n$. Petit coup d'oeil sur le tableau des premiers résultats : cela marche ! Pour les coefficients c_n maintenant. Petits calculs en cascade :

$c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$.
$c_{n-1} = b_{n-2} + c_{n-2}$
....
$c_4 = b_3 + c_3$.
$c_3 = b_2 + c_2$.
$c_2 = b_1 + c_1$

(Attention, b_1 et c_1 sont les coefficients de la dérivée première, c'est à dire de f ').

Nous ajoutons ces égalités membre à membre et, après élimination des termes de la suite c_n, nous obtenons sur un résultat connu : la somme des termes d'une suite arithmétique.

Ainsi $c_n = b_{n-1} + b_{n-2} + ...+ b_3+ b_2+ b_1+ c_1 = \dfrac{(b_1+b_{n-1})(n-1)}{2} + c_1$.

D'où $c_n = \dfrac{(3+1+2(n-1))\,(n-1)}{2} + 2 = n^2 + 1.$

Petit coup d'oeil sur le tableau des résultats de la page précédente : c'est bien vrai [7]!

Deuxième stratégie : où l'on prouve ce que l'on trouve...

On se place désormais dans le cas où la conjecture a été faite [8]. L'observation des premiers termes donne l'idée que la formule pourrait bien être :

$$f^{(n)}(x) = [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x .$$

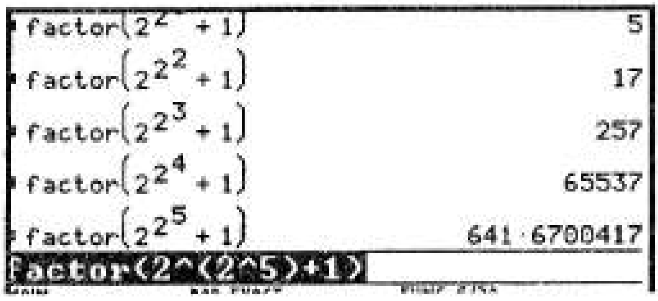
<u>Attention : avoir montré que la formule est exacte pour quelques (et même de nombreuses) valeurs de n ne prouve en aucun cas qu'elle est toujours vraie .</u>

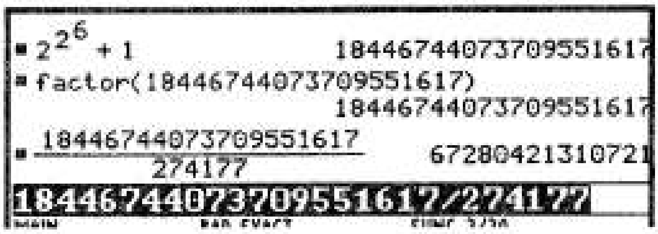
L'histoire (des mathématiques) est ainsi pleine de conjectures qui étaient tellement vraies... qu'elles étaient fausses. Un exemple : une conjecture de Fermat, qui, emporté par son tempérament de Gascon, déclara que tout les nombres de la forme $F_n = 2^{(2^n)}+1$ étaient premiers. Fermat ne disposait pas des moyens de calcul d'aujourd'hui...

Il est "simple" de voir avec une TI-92 que la conjecture de Fermat, vraie jusqu'à l'indice 4, s'écroule pour 5 :

$F_5 = 2^{(2^5)}+1 = 4\,294\,967\,297 = 641.\,6\,700\,417$. Donc F_5 n'est pas premier.

On peut d'ailleurs regarder ce que donne la calculatrice pour les nombres de Fermat suivants : elle indique que F_6 est premier (cf. ci-contre), alors qu'une simple division indique que F_6 est divisible par 274177 et n'est donc pas premier.





Faiblesse du logiciel, dont l'algorithme de recherche des nombres premiers semble assez rudimentaire : pour F_5, il indique une réponse correcte, pour F_6, non.Prudence donc. Même avec les moyens de calcul dont on dispose aujourd'hui, on ne peut encore rien dire de nombreuses conjectures. Par exemple la conjecture de Goldbach : tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. On peut le prouver sur tous les exemples que l'on voudra bien prendre, mais la multiplication des exemples n'épuisera pas la généralité de la formule. Cela doit nous inciter à beaucoup de modestie. Il faut prouver qu'une propriété est vraie toujours : l'avoir prouvé sur quelques valeurs (même si "quelques" est "beaucoup"...) ne prouve rien pour les autres valeurs, c'est-à-dire ne prouve pas la conjecture.

---

[7] Le retour aux résultats partiels ne constitue pas ici une "preuve" du résultat théorique trouvé, bien sûr. En ce sens, l'expression "c'est bien vrai!", et même le mot de vérification, sont des abus de langage. "La vérification" d'une formule générale à partir des cas particuliers déjà étudiés ne constitue qu'un test de la validité de la formule trouvée. Il peut permettre de déceler certaines erreurs (en cela, il est toujours utile). Il peut bien sûr en laisser passer d'autres. En cela une telle vérification n'est jamais <u>décisive</u> !

[8] Il semble que la première stratégie relève plutôt d'un travail sans outil de calcul formel. Cette deuxième stratégie, qui consiste à partir d'une conjecture formulée, est plus"naturelle" pour qui travaille avec une TI-92 : l'obtention -facile- d'autant de résultats que l'on veut facilite grandement la formulation de conjectures.

Comment alors prouver ici notre conjecture ? S'agissant :

- d'une propriété dont l'expression est supposée (c'est la conjecture !) ;
- d'une propriété indiciée sur un entier naturel ;
- d'une propriété vérifiée pour les premières valeurs de n...

le raisonnement par récurrence s'impose (presque !). Son principe, pour prouver une propriété P_n :

- on prouve que la propriété est vraie "au départ" (au rang 0, ou 1, ou 2... le plus tôt possible) ;
- on démontre ensuite qu'elle est récurrente, c'est-à-dire que **si elle vraie à l'ordre n, alors elle est vraie à l'ordre n+1**.
- on peut alors affirmer que, par hérédité, la propriété est vraie pour tout n supérieur à l'indice de vérification du départ (0, ou 1, ou 2...).

Ici, la première étape est déjà franchie : la propriété conjecturée est bien vraie à l'ordre 1, 2, 3... (puisque ce sont ces résultats de départ qui ont donné l'idée de la conjecture).

Il reste à prouver que cette propriété est récurrente, c'est à dire héréditaire.

Supposons donc que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est à dire que :

$f^{(n)}(x) = [\,x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x$.

Pour avoir la dérivée (n+1)ième, il faut dériver la dérivée nième.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [\,x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x \;+ [\,2x^2 + 2n+1].e^x \\ &= [\,x^2 + (2n+3)x + n^2 + 2n + 2].e^x. \\ &= [\,x^2 + (2n+3)x + (n+1)^2 + 1].e^x \end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression traduit bien la propriété à l'ordre n+1. Donc la propriété est bien récurrente.

<u>Nous pouvons affirmer désormais que la formule est vraie pour tout n.</u>

<u>Remarque</u> : cette preuve du caractère récurrent de la propriété aurait pu être accomplie avec la calculatrice (cf. ci-dessous).

Nous avons demandé au logiciel de dériver l'expression supposée de la dérivée à l'ordre n, directement, puis sous forme factorisée. Nous retrouvons bien la forme attendue pour la dérivée à l'ordre n+1, ce qui prouve son caractère récurrent.

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\cdot\left(x^2+(2\cdot n+1)\cdot x+n^2+1\right)\right)$$
$$\left(x^2+(2\cdot n+1)\cdot x+n^2+1\right)\cdot e^x+(2\cdot x+2\cdot n+\blacktriangleright$$
$$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}\left(e^x\cdot\left(x^2+(2\cdot n+1)\cdot x+n^2+1\right)\right)\right)$$
$$\left(x^2+(2\cdot n+3)\cdot x+n^2+2\cdot n+2\right)\cdot e^x$$

Peut-on considérer légitime une telle démarche qui laisse le soin de l'intégralité des calculs au logiciel (calculs initiaux et preuve de la récurrence) ? Sans doute, dès lors que l'on estime que le logiciel fonctionne correctement pour ces dérivations de fonctions élémentaires. Mais le calcul assisté par cet outil ne dispense pas d'un contrôle théorique général (de la même façon que l'on doit contrôler les ordres de grandeur des résultats d'une multiplication sur une calculette). Ici ce contrôle théorique nécessite sans doute un recours aux résultats de référence sur la dérivation de la fonction exponentielle et des polynômes et sur la dérivée d'un produit de deux fonctions. Il permet alors de comprendre l'origine de la stabilité de la forme des dérivées successives (produit exponentielle / trinôme du second degré).

Troisième stratégie : où l'on fait un large détour théorique...
pour trouver un raccourci de calcul.

Nous pouvons aussi prendre du recul sur l'exercice donné. En fait, il s'agit de dériver n fois le produit de deux fonctions, u et v, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + x + 1$.

Pourquoi ne pas tenter un traitement général de cette question ?

$(u.v)' = u'\,v + u.v'$

$(u.v)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$(u.v)^{(3)} = ... = u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u'v^{(2)} + uv^{(3)}$.

A nouveau une conjecture peut surgir : on retrouve quelque chose qui ressemble d'assez près au binôme de Newton !

Ainsi, la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit u v serait :

$(u.v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + ... + C_n^{n-1} u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^n u\, v^{(n)}$.

On démontrerait cette formule par récurrence (exactement sur le même modèle que pour le binôme de Newton). Cette formule porte de nom de Leibniz, contemporain de Newton (cette formule a été présentée cette année dans le cours sur la dérivation). Pourquoi cette formule est-elle bien utile ici ? Mais parce qu'il s'agit de la dérivée du produit de deux fonctions qui ont un comportement simple : la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même et la dérivée d'un polynôme est un polynôme de degré inférieur (de 1). Ainsi, si on calcule les dérivées successives d'un polynôme, on arrivera nécessairement à 0.

Conclusion : avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + x + 1$, les dérivées successives de u sont égales à u, et les dérivées successives de v sont nulles à partir de l'ordre 3.

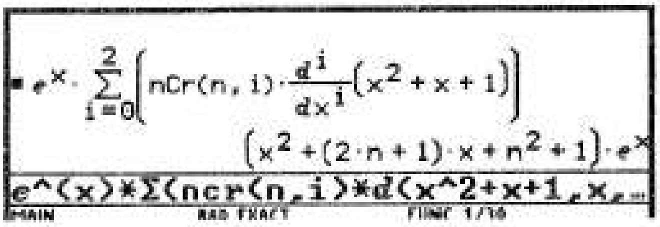
Ainsi :

$$\begin{aligned}(u.v)^{(n)} &= C_n^0\, u\, v + C_n^1\, u\, v^{(1)} + C_n^2\, u v^{(2)}\\ &= e^x\,(x^2 + x + 1) + n.e^x\,(2x + 1) + \frac{n(n-1)}{2}\, e^x\,(2)\\ &= e^x\,[x^2 + (2n + 1)x + n^2 + 1].\end{aligned}$$

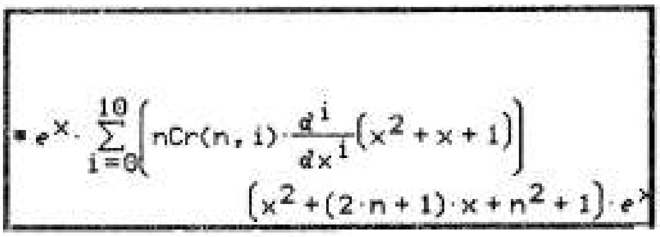
Un grand détour pour un petit calcul...

<u>Remarque</u> :

On peut utiliser aussi la TI-92 pour déterminer le résultat à partir de l'application de la formule de Leibniz (C_n^0 s'écrit nCr(n, 0)).



On le voit ci-contre : cela ne constitue pas un gain de temps, mais peut constituer un apprentissage utile de la commande "somme" et de l'empilement de commandes.



Nous pouvons vérifier aussi à peu de frais que, si on réalise la somme pour i variant de 0 à 10 (au lieu de 0 à 2), le résultat n'est pas modifié, puisque les dérivées du trinômes sont nulles à partir de l'ordre 3.

Quid de la question du lendemain ?

La détermination des dérivées successives de f donne une suite de fonctions qu'il peut être intéressant d'étudier plus en détail. Qu'ont-elles en commun ?

Quelques pistes :

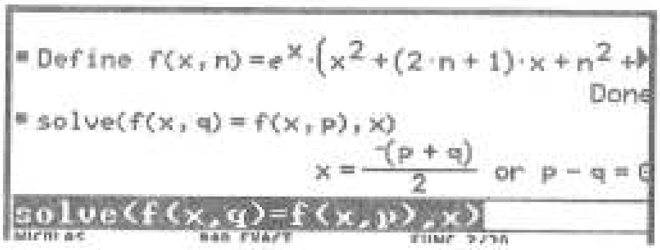
- quelles sont les limites de ces fonctions (il est aisé de démontrer que ce sont les mêmes limites en -∞ et +∞) ;
- combien ces fonctions ont-elles de zéros (il est aisé, par étude de discriminant, de prouver qu'à partir de f' toutes les dérivées ont deux racines) ;
- comment ces zéros sont-ils disposés les uns par rapport aux autres ?

- quelles sont les intersections des courbes de deux fonctions de cette famille (on démontre facilement que la dérivée d'ordre p et la dérivée d'ordre q se coupent en un point unique d'abscisse $-\frac{p+q}{2}$) ;

- plus généralement, que dire des variations de chacune de ces fonctions ?

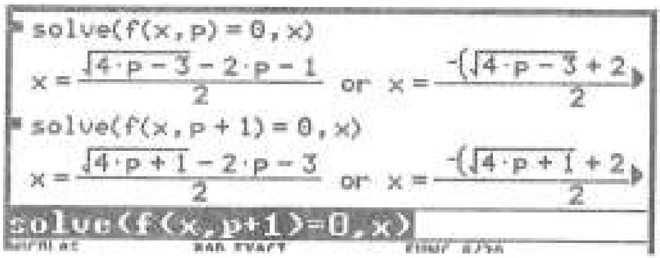
<u>Quelques indications pour l'utilisation raisonnée de la calculatrice dans le cadre de cette étude :</u>

Une première exigence : définir clairement l'objet d'étude. La syntaxe *Define f(x,n)* permet ici de définir la fonction f_n dont les valeurs dépendent à la fois de n et de x. Cette définition permet de déterminer l'intersection de deux des fonctions (à condition de préciser quelle est l'inconnue : x).



Il faut bien interpréter la réponse proposée par le logiciel (cf. ci-dessus) :
- soit p = q (ce qui signifie que les deux fonctions sont égales) ;
- soit $x = -\frac{p+q}{2}$ (c'est alors l'unique point d'intersection de deux courbes distinctes).

Nous pouvons aussi rechercher les intersections des courbes avec l'axe des abscisses et étudier les positions relatives des racines de deux fonctions "successives" (l'élément déterminant est bien évidemment que, par définition, la dérivée de f_p est égale à f_{p+1}).



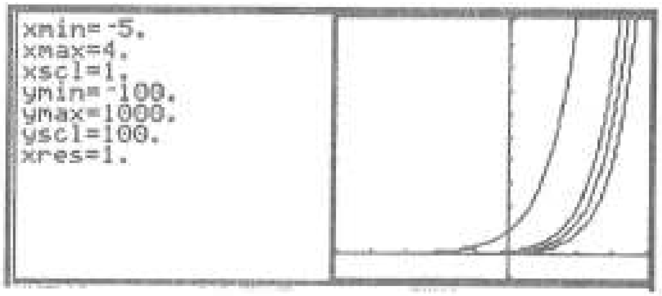
Des observations graphiques ne sont pas inutiles. La définition de f permet une écriture rapide de plusieurs fonctions dans l'éditeur de fonction. Le choix des fenêtres est ensuite essentiel. Pour en donner une petite idée, on a représenté ci-contre les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_{10} :

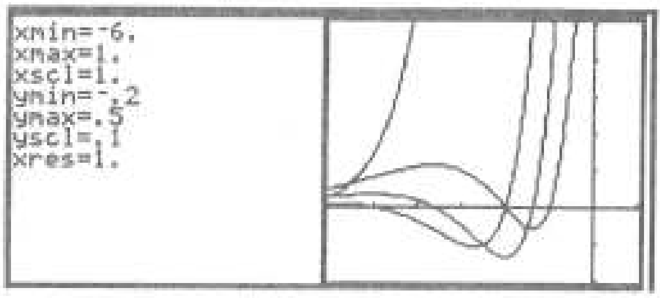
- le premier cadrage permet quelques conjectures sur les limites et la position relative des courbes sur $\mathbb{R}+$;

- le deuxième cadrage permet quelques conjectures sur la position relativedes courbes sur $\mathbb{R}$ -, et sur la localisation des zéros.

Tout ceci peut être étudié par le lecteur de bonne volonté.

(AQT).





TP N°11 ET ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION

Ce texte a été revu, corrigé, et complété par Sébastien Bayle et Orion Mouraille.

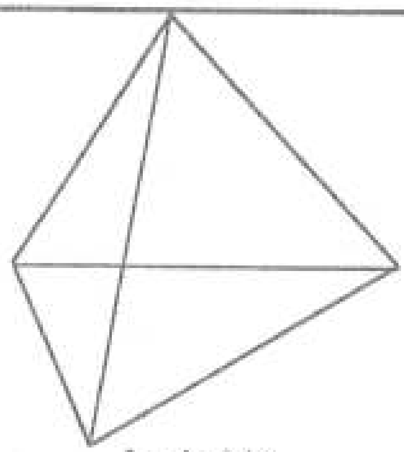
Il s'agit ici d'un TP un peu spécial : cette dernière séance du mois de décembre a été l'occasion de faire le point sur la démarche "expérimentale" engagée dans ces séances depuis le début de l'année. A partir d'une question exposée par le professeur, la discussion s'engage sur la nature de l'activité mathématique : comment articuler, dans la recherche mathématiques, une démarche de conjectures, de preuves, de réfutations ?

La question du jour

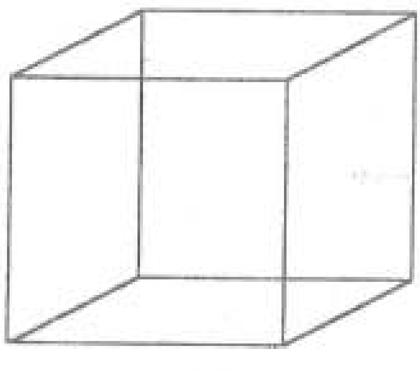
On observe dans le plan une relation simple entre le nombre S de sommets et le nombre C de cotés d'un polygone: S = C.

Passons dans l'espace. Y a-t-il une relation entre le nombre S de sommets, le nombre S de faces et le nombre A d'arêtes d'un polyèdre ?

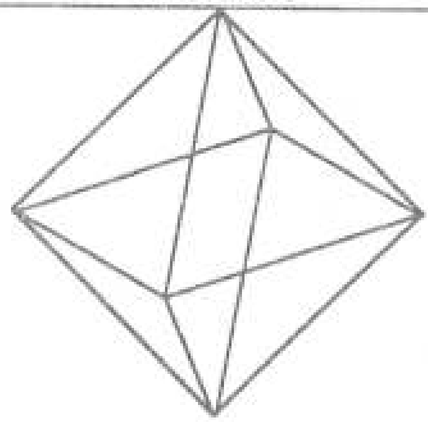
Observer, conjecturer, prouver...



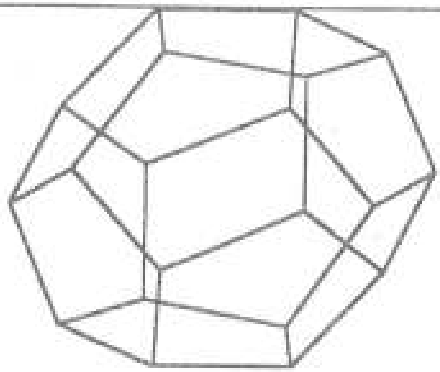
Le tétraèdre



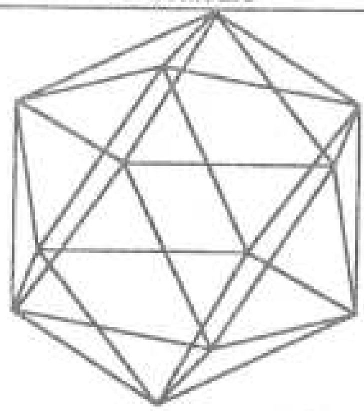
Le cube



L'octaèdre



Le dodécaèdre



L'icosaèdre

De l'observation à la mise en forme d'une conjecture

La discussion s'engage à partir de l'observation des 5 polyèdres réguliers dont des modèles circulent dans la classe. Après quelques controverses (le comptage des différents éléments de l'icosaèdre n'est pas évident!), l'accord se fait sur les résultats suivants :

	F	S	A
Tétraèdre	4	4	6
Cube	6	8	12
Octaèdre	8	6	12
Dodécaèdre	12	20	30
Icosaèdre	20	12	30

Des relations internes à la famille des polyèdres réguliers peuvent apparaître :
- pour le dodécaèdre et l'icosaèdre on observe un échange de F et S et le même A ;
- on observe les mêmes relations entre le cube et l'octaèdre.

Ces relations ont une explication simple : si l'on relie le centre des faces d'un cube, on obtient un octaèdre (et réciproquement). De même si l'on relie le centre des faces d'un icosaèdre, on obient un dodécaèdre et réciproquement. Et si l'on relie le centre des faces d'un tétraèdre, on obtient un nouveau tétraèdre.

Mais ceci n'entre pas tout à fait dans le cadre de la question posée : nous voulons établir dans le tableau ci-dessus non pas des relations "verticales", mais une relation horizontale entre F, S et A, valable pour tout polyèdre. Plusieurs méthodes possibles pour trouver une telle relation :

- il est toujours possible de faire fonctionner son imagination, en considérant les différentes lignes du tableau et en testant des relations simples entre F, S et A. Cela relève de la même démarche que la recherche des "racines évidentes" pour la résolution d'une équation. Le problème est que le caractère "d'évidence" est toujours très relatif !
- il est possible de construire une représentation graphique en dimension 3 du problème. Il faudrait placer alors les points de coordonnées (F, S, A) et rechercher une surface passant par ces points. L'équation de cette surface donnerait alors une relation reliant S, F et A. Pratiquement, une telle réalisation nous donnerait une information essentielle : les cinq points ainsi obtenus seraient situés sur le même plan, autrement dit ils vérifieraient une relation du type $ax + by + cz + d = 0$;
- il est enfin possible de résoudre ce problème par des méthodes numériques. Ainsi, si l'on cherche une relation de type affine entre A, F et S, nous allons être conduits à résoudre une équation du type $aF + bS + cA + d = 0$, dans laquelle les coefficients de liaison a, b, c, d sont inconnus. Plus simplement, il s'agit de trouver l'équation d'un plan passant par trois points ; on prouvera ensuite que ce plan passe par les deux autres points. Nous allons donc chercher une relation du type : $aF + bS + c\,A = d$, vérifiée pour les trois premiers polyèdres réguliers. Nous devons donc résoudre le système :

$4a + 4b + 6c = d$
$6a + 8b + 12c = d$
$8a + 6b + 12\,c = d$

Cette résolution peut se faire "à la main", ou assistée par la TI-92. Cela suppose, dans l'application *Data/Matrix*, en choisissant le type *Matrix*, de définir deux tableaux de coefficients :

- le premier, notée ici **e**, avec les coeffcients de a, b et c ;

le deuxième, noté ici **g**, avec les coefficients du second membre (c'est-à-dire d).

3x3	c1	c2	c3	c4	c5
1	4	4	6		
2	6	8	12		
3	8	6	12		

Le produit $e^{-1}.g$ permet alors, dans l'application initiale, de trouver une expression de a, b et c en fonction de d.

3x1	c1	c2	c3	c4	c5
1	d				
2	d				
3	d				

Nous obtenons ainsi :

$a = \frac{d}{2}$

$b = \frac{d}{2}$

$c = -\frac{d}{2}$

$$\blacksquare\; e^{-1} \cdot g \qquad \begin{bmatrix} \frac{d}{2} \\ \frac{d}{2} \\ \frac{-d}{2} \end{bmatrix}$$

(e^-1)*g

La relation de liaison entre les nombres S, F et A, vérifiée par les trois premiers polyèdres réguliers, est donc :

$\frac{d}{2}F + \frac{d}{2}S - \frac{d}{2}A = d$. Cette relation peut être allégée, via une multiplication par 2 et une division par d :

$$\mathbf{F + S - A = 2}$$

Il reste à vérifier qu'elle convient aussi pour les deux autres polyèdres, ce qui se fait sans peine[9].

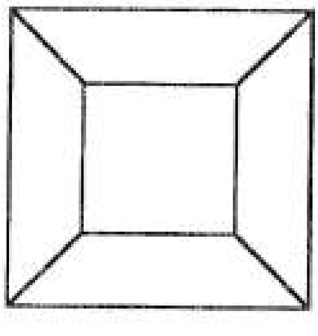
Fermons cette parenthèse numérique. Ce détour n'était pas indispensable : quand la question a été posée en classe, un élève a trouvé directement la relation deliaison entre F, S et A par la simple considération des nombres en présence. Mais il est bon de connaître des méthodes systématiques de recherche, quand l'intuition fait défaut !

Nous avons, à partir de l'observation de certains polyèdres, trouvé une relation entre S, F et A qui convient pour les polyèdres observés. Convient-elle pour tous les polyèdres ? Si l'on coinsidère d'autres polyèdres simples (des prismes par exemple), il semble bien que oui. Mais il est impossible de considérer l'ensemble des polyèdres pour acquérir une certitude sur la validité universelle de la relation trouvée. Dans ces conditions, la recherche d'une preuve générale est indispensable.

Une preuve due à Euler [10]

Il s'agit donc de prouver, pour un polyèdre quelconque, la relation F + S - A = 2. La démonstration proposée par Euler est assez simple dans son principe.

Il est toujours possible, pour un polyèdre convexe donné, de réaliser l'opération suivante : on enlève une face, puis on "étire" suffisamment les faces restantes pour pouvoir projetter l'ensemble sur un plan, sans qu'il y ait superposition de faces. Dans l'affaire, <u>on a perdu une face, mais le nombre de sommets et d'arêtes n'a pas été modifié</u>.



On voit sur la figure ci-contre ce que l'on obtient si le polyèdre de départ était un cube. La relation a prouver devient donc :

$$F + S - A = 1.$$

Nous allons alors, ce qui est toujours possible pour des faces polygonales, "trianguler" chaque face, c'est-à-dire partager chaque face en triangles en traçant suffisamment de diagonales. Chaque triangulation rajoute une face et une arête, donc ne modifie pas la quantité F + S - A (cf. schéma ci-dessous).

---

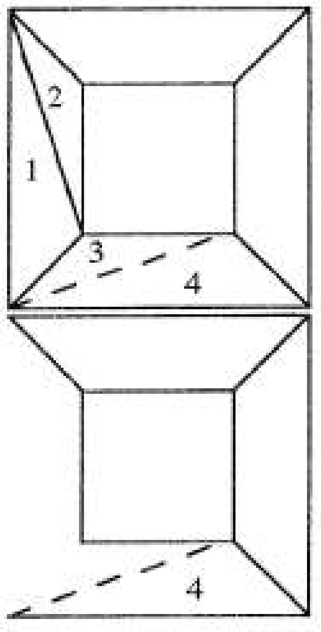
9 Le lecteur curieux pourra remarquer que, si l'on avait choisi le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre pour rechercher l'équation du plan, le calcul n'aurait pas pu aboutir. En effet, les trois points de coordonnées respectives (4, 4, 6), (6, 8, 12) et (12, 20, 30) sont alignés dans l'espace. Ils ne déterminent donc pas un plan.

10 La discussion qui suit s'inspire grandement d'un ouvrage passionnant du mathématicien hongrois Imre Lakatos : "Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique", édité en langue anglaise en 1976, traduit en français en 1985 (Editeur : Hermann).

Nous allons alors "effeuiller" la figure obtenue (c'est-à-dire enlever les triangles les uns après les autres) en commençant par les triangles de la ceinture extérieure :

- quand nous enlevons le triangle 1, nous enlevons une face, 0 sommet et une arête, donc nous ne modifions pas la quantité F + S - A ; de même, l'ablation du triangle 2 va se traduire par la suppression d'une face et d'une arête ;
- quand nous enlevons le triangle 4, nous supprimons une face, un sommet et deux arêtes ; la quantité F + S - A n'est toujours pas affectée.

Il est possible de vérifier que toute nouvelle ablation d'un triangle serait toujours du type 1 ou 4, donc ne modifie pas le nombre F + S - A.



Ainsi, par ablation successive, il ne nous restera à la dernière étape un seul triangle, qui vérifie évidemment la relation F + S - A = 1 + 3 - 3 = 1. Il nous suffit de remonter les différentes étapes de la mise en morceaux de ce polyèdre pour constater qu'à l'origine celui-ci vérifiait bien F + S - A = 2. La relation est bien prouvée.

Des contre-exemples locaux ou globaux

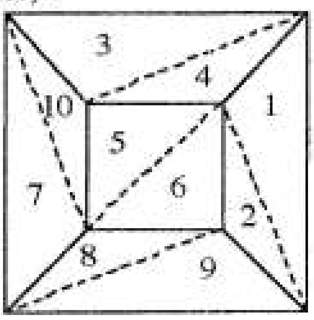
La preuve qui précède peut être critiquée de deux points de vue.

Un point de vue local, qui remet en cause un aspect de la preuve, par exemple :

- est-on certain que, si l'on enlève une face d'un polyèdre, celui-ci pourra toujours être étiré sur un plan ? Que se passe-t-il si le polyèdre n'est pas convexe ?
- est-on certain que, si on enlève les triangles du graphe résultant de la mise à plat suivie de la triangulation, on n'a que deux possibilités (enlever une seule arête et une face ou alors enlever deux arêtes, un sommet et une face) ?

Le lecteur pourra en effet constater que si l'on effeuille les triangles dans l'ordre indiqué ci-contre, l'ablation du triangle 9 enlèvera trois arêtes, deux sommets et une face (cela ne modifie pas F+S-A).

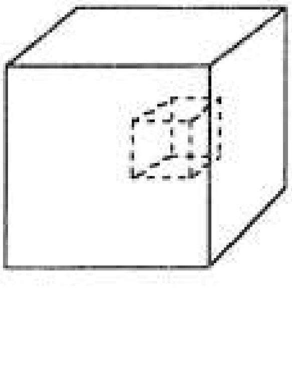
Cette critique est locale, c'est-à-dire qu'elle n'invalide pas la conjecture elle-même : elle contraint seulement à une reformulation de la preuve, dans le sens d'une plus grande rigueur.

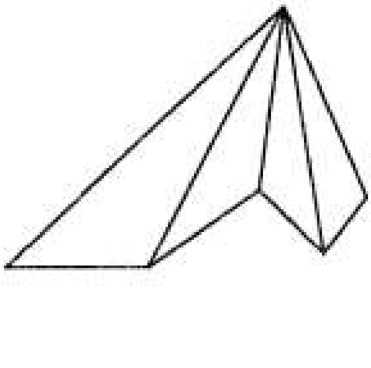


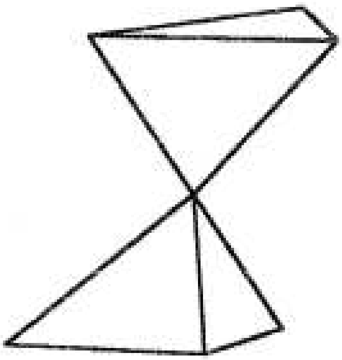
Un point de vue global , qui remet en question la conjecture elle-même.

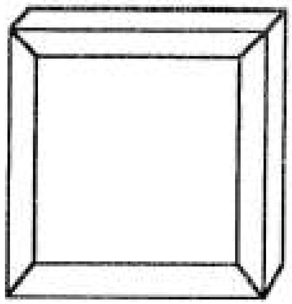
Il est en effet possible d'exhiber des polyèdres qui ne vérifient pas la relation F+S-A = 2

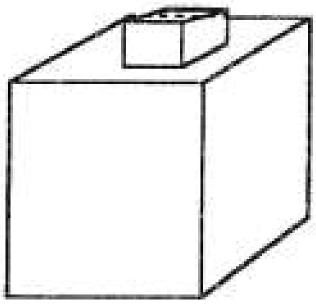
Le lecteur pourra le vérifier sur les polyèdres ci-contre et ci-dessous : combien vaut F+S-A ?











Une nouvelle formulation nécessaire.

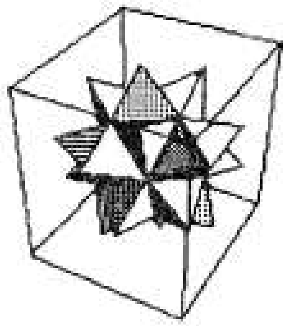
L'apparition de contre exemples ne ruine cependant pas le travail accompli. Plusieurs attitudes sont possibles.

La "relégation de monstres"

Une réponse peut consister à refuser les contre-exemples, au motif que ceux-ci ne sont pas de vrais polyèdres. Lakatos (référence déjà citée) écrit : "une femme enceinte n'est pas un contre exemple à la thèse que les êtres humains n'ont qu'une seule tête"...

La "rectification de monstres"

Une autre réponse peut consister à choisir une définition des faces, des arêtes et des sommets qui permette que soit vérifiée à nouveau la formule d'Euler. On pourra le constater pour le polyèdre ci-contre, suivant la définition prise pour les différents éléments du polyèdre la relation d'Euler sera vérifiée, ou non.



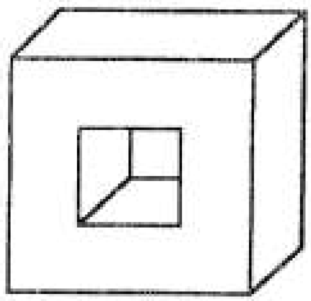
L'intérêt de ces deux réponses (le refus ou la rectification des monstres) est qu'elles contraignent à une précision plus grande de l'objet d'étude : - qu'est-ce qu'un polyèdre ?

- comment définir rigoureusement ce qu'est une face, un sommet, une arête ?

Le jeu de la sécurité, ou le repli stratégique

Une dernière attitude pourrait consister, au lieu d'écarter les exceptions une à une, de limiter d'emblée le champ d'application de la formule d'Euler, en disant : "la relation F+S-A= 2 ne s'applique qu'aux polyèdres convexes".

Cela permet d'éliminer tous les contre-exemples gênants. Hélas, cela ne permet pas de comprendre pourquoi le polyèdre ci-contre, non convexe, vérifie pourtant la formule d'Euler...



Un processus sans fin ?

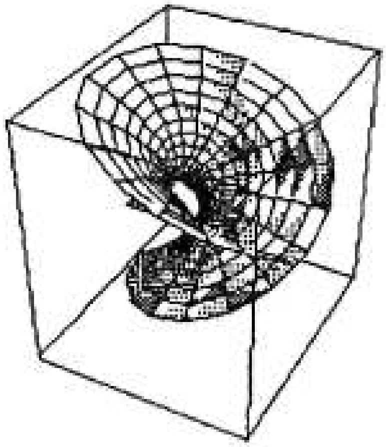
Nous pourrions poursuivre longtemps l'histoire des controverses autour de cette relation. L'essentiel était de mettre en évidence, dans le processus de recherche, les aller-retours entre observations, conjectures, preuves partielles, réfutations...

C'est exactement ce que nous faisons pour chaque TP !

Laissons la conclusion au mathématicien Lakatos déjà cité :

"La certitude n'est jamais achevée, les fondations ne sont jamais trouvées.

Mais, dans le domaine des mathématiques, "l'art de la raison" transforme chaque progrès de la rigueur en un accroissement du contenu."



La question du lendemain

Nous avons utilisé pour faire apparaître la relation d'Euler 5 polyèdres réguliers, en signalant un fait assez étonnant. Alors qu'il y a autant de polygones réguliers que l'on veut (c'est-à-dire que, pour tout $n \geq 3$, il existe un polygone régulier de n côtés), il n'existe que les 5 polyèdres convexes réguliers mentionnés [11] :

- le tétraèdre (4 faces triangulaires équilatérales) ;
- le cube (6 faces carrées) ;
- l'octaèdre (8 faces triangulaires équilatérales) ;
- le dodécaèdre (12 faces pentagonales) ;
- l'icosaèdre (20 faces triangulaires équilatérales).

Le fait était déjà connu des Grecs, qui avaient trouvé la situation suffisamment extraordinaire pour lui conférer un caractère quasiment magique : Platon associe le tétraèdre au feu, l'octaèdre et l'air, l'icosaèdre et l'eau, le cube et la terre, le dodécaèdre à l'éther, c'est à dire au domaine des dieux.

Mais au fait, pourquoi ne peut-il y avoir que 5 polyèdres convexes réguliers ?

Tout d'abord précisons notre objet d'étude.

Le travail réalisé autour de la relation d'Euler a prouvé que l'on a intérêt à préciser de quoi l'on parle (en particulier) quand on fait des mathématiques :

- un polyèdre est un solide à faces planes ;
- Euclide définit les polyèdres réguliers à partir de leurs faces : ce sont des polygones réguliers superposables ;
- Rademacher [12] propose une définition plus générale : un polyèdre est régulier si toutes ses faces ont le même nombre de côtés et si le même nombre de faces se rencontrent à chaque sommet.

C'est cette dernière définition que nous allons utiliser.

---

[11] La précision convexe est importante : Kepler et Poinsot ont découvert 4 polyèdres réguliers concaves.

[12] Rademacher, 1967, *Plaisir des mathématiques*, Dunod

Un peu de dénombrement

Soit n le nombre de sommets attenant à chaque face et p le nombre de faces aboutissant à chaque sommet :

- un polygone a au moins 3 sommets, donc $n \geq 3$;
- un sommet est défini par au moins 3 faces. Donc $p \geq 3$.

Nous noterons, comme pour la démonstration du théorème d'Euler, s, f et a le nombre de sommets, de faces et d'arêtes :

- chaque face du polyèdre régulier possède n sommets et n arêtes (puisqu'il s'agit d'un polygone régulier). Nous avons a donc $\mathbf{a = \frac{f.n}{2}}$ **(relation 1)** : n arêtes sur chacune des f faces, mais chaque arête appartient à deux faces ;
- de même il y a p faces et donc p arêtes qui aboutissent à chaque sommet. Nous avons donc $\mathbf{a = \frac{s.p}{2}}$ **(relation 2).**

Enfin nous disposons de la relation $\mathbf{s + f - a = 2}$ **(relation 3).**

Nous disposons ainsi d'un système de trois équations à cinq inconnues. A ces équations se rajoutent d'autrs contraintes, liées à la nature des nombres cherchés : ce sont des entiers naturels plus grands ou égaux à trois.

<u>Première étape : réduction de la complexité</u>, c'est-à-dire du nombre d'inconnues

Par une stratégie d'élimination (ou de substitution), il est possible de se ramener à une seule équation à trois inconnues. Nous allons choisir d'éliminer (par exemple) a et s. Dans la formule d'Euler, nous remplaçons d'abord s par $\frac{2a}{p}$ (issu de la relation 2).

Nous obtenons : $\frac{2a}{p} + f - a = 2$, c'est-à-dire (après multiplication par p) $2a + fp - ap = 2p$.

En remplaçant alors dans cette dernière égalité a par $\frac{fn}{2}$ (relation 1) : $fn + fp - \frac{fnp}{2} = 2p$, c'est-à-dire (après multiplication par 2) :

$2fn + 2fp - fnp = 4p$. La factorisation par f permet d'écrire :

$$\mathbf{f\,(2n + 2p - np) = 4p \text{ (relation 4)}}$$

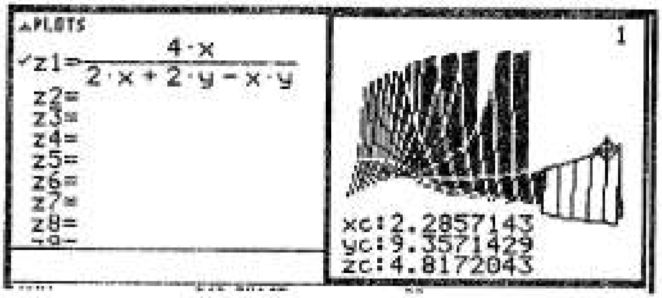
<u>Deuxième étape (éventuelle) : étude expérimentale</u>

Si nous avions obtenu une relation entre deux variables (du type $y = f(x)$ ou plus généralement $f(x, y) = 0$)), nous aurions pu tracer la courbe correspondante dans un plan et rechercher sur cette courbe les points à coordonnées entières positives. Comme il s'agit ici d'une relation entre trois variables, l'étude doit se faire dans l'espace. La relation 4 peut se mettre sous la forme :

$$f = \frac{4p}{2n+2p-np}$$

Ceci permet de définir (en mode *3D*) une fonction de deux variables (notées nécessairement x et y).

Cependant il est difficile de repérer, sur la surface obtenue, les points à coordonnées entières (même en utilisant la commande *Trace*, cf. ci-contre).



Il est impossible, en mode 3D, d'utiliser une table de valeurs (sur TI-92).

Nous pouvons contourner cette impossibilité en définissant, dans l'application initiale, une suite de deux variables.

Il suffit ensuite d'attribuer à p les valeurs entières successives. Ceci nous permet d'utiliser l'éditeur de suites, en ne faisant varier que n.

```
■ Define u(p,n) = 4·p/(2·n + 2·p − n·p)      Done
■ u(3,n) → u3(n)                              Done
■ u(4,n) → u4(n)                              Done
■ u(5,n) → u5(n)                              Done
■ u(6,n) → u6(n)                              Done
■ u(7,n) → u7(n)                              Done
■ u(8,n) → u8(n)                              Done
```

n	u3	u4	u5	u6	u7	u8
3.	4.	8.	20.	undef	⁻28.	⁻16.
4.	6.	undef	⁻10.	⁻6.	⁻4.67	⁻4.
5.	12.	⁻8.	⁻4.	⁻3.	⁻2.55	⁻2.29
6.	undef	⁻4.	⁻2.5	⁻2.	⁻1.75	⁻1.6
7.	⁻12.	⁻2.67	⁻1.82	⁻1.5	⁻1.33	⁻1.23
8.	⁻6.	⁻2.	⁻1.43	⁻1.2	⁻1.08	⁻1.
9.	⁻4.	⁻1.6	⁻1.18	⁻1.	⁻.903	⁻.842
10.	⁻3.	⁻1.33	⁻1.	⁻.857	⁻.778	⁻.727

Le tableau de valeurs donne ainsi une première indication : les couples possibles pour (p, n), c'est-à-dire telle que u(p, n) soit entier, sont :

(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)

Bien entendu, rien ne permet d'affirmer que ce sont les seuls couples possibles ! Pour cela, une étude générale s'impose. Mais ce que nous venons de voir peut donner quelques indications.

<u>Troisième étape : une étude théorique.</u>

Repartons de la relation $f = \dfrac{4p}{2n+2p-np}$

Comme f et p sont strictement positifs, nous obtenons sans peine :

$2n + 2p - np > 0$ c'est-à-dire $np - 2n - 2p < 0$

D'où, en séparant n et p par factorisation : $(n - 2)(p - 2) < 4$

Or nous savons que n et p sont supérieurs à 3. Nous retrouvons bien un nombre de solutions restreint pour les couples (n, p) : (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)

Ainsi :

- les polyèdres réguliers ne peuvent avoir pour faces que des triangles équilatéraux, des carrés ou des pentagones réguliers ;
- les sommets ne peuvent être communs qu'à 3, 4 ou 5 faces.

De plus la relation 4 nous permet de calculer f en fonction de n et p : $f = \dfrac{4p}{2n + 2p - np}$ et les relations $a = \dfrac{f.n}{2}$ et $a = \dfrac{s.p}{2}$ nous permettent alors de calculer a puis s en fonction de n et p. D'où finalement le tableau des polyèdres réguliers possibles

n	p	f	c	s	
3	3	4	6	4	**Tétraèdre**
3	4	8	12	6	**Octaèdre**
4	3	6	12	8	**Cube**
3	5	20	30	12	**Icosaèdre**
5	3	12	30	20	**Dodécaèdre**

Voilà un calcul assez rapide pour un résultat assez spectaculaire... Mais attention :

- la démonstration n' été faite que pour les polyèdres réguliers qui vérifient la relation d'Euler ; il existe aussi d'autres polyèdres réguliers, non convexes ;
- s'il prouve qu'il y a au plus 5 polyèdres réguliers convexes, il ne prouve pas pour autant leur existence ! Pour cela, on pourra se reporter à la fin du livre XII des Eléments d'Euclide...

TP N°12

On étudie aujourd'hui une suite de nombres complexes. La calculatrice doit donc être en mode *rectangular* (pour une écriture algébrique des nombres complexes) ou *polar* (pour une écriture polaire).

On peut alors étudier une telle suite dans l'application initiale :
- s'il s'agit d'une suite définie par son terme général, il suffira d'écrire

Define u(n) = ... ou bien *... STO u(n)*.

- s'il s'agit d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on pourra :
  - soit utiliser une écriture conditionnelle :

Define u(n) = When(n=0, u_0, f(u_{n-1})) ou bien *When(n=0, u_0, f(u_{n-1})) STO u(n)*

  - soit itérer la fonction f qui à u(n) associe u(n+1) :

Define f(x) =... On a alors f(u(0) = u(1), puis f(u1) = u(2), etc. On obtient ainsi les premiers termes de la suite (en calcul exact ou calcul approché, suivant le mode choisi).

On peut aussi utiliser l'éditeur de suites en mode *séquence* ; mais attention, cet éditeur fait du calcul approché sur des nombres réels. Pour utiliser cette application, il faut donc décomposer la suite complexe en deux suites :
- la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires (si on privilégie l'écriture algébrique) ;
- la suite des modules et la suite des arguments (si on privilégie l'écriture polaire).

Dans le premier cas, on peut obtenir une représentation graphique des points M_n, images des complexes u(n), de la façon suivante :
- on définit en u1 la suite x_n partie réelle de u(n) ;
- on définit en u2 la suite y_n partie réelle de u(n) ;
- dans le Menu *F7 Axes*, on choisit *CUSTOM*, et on sélectionne pour *X Axis* : *u1*, et pour *Y Axis* : *u2*.

En graphique, apparaîtront alors les points de coordonnées x_n et y_n, c'est-à-dire les points M_n. Attention, le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé, on prendra bien soin de choisir un tel repère (commande *ZoomSqr* dans le menu *F2 Zoom*. On trouvera aussi, dans la table de valeurs, les valeurs approchées des termes successifs des suites (x_n) et (y_n).

On appellera x_n et y_n les parties réelles et imaginaires de u(n), r_n et a_n le module et l'argument principal de u(n), et M_n l'image de u(n) (M_n a donc pour coordonnées x_n et y_n).

La question du jour

On considère la suite complexe définie par :

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ (où $|u_n|$ représente le module de u_n)

On prendra d'abord u_0 réel, puis $u_0 = 5 + 5i$

Etudier l'évolution de cette suite.

La question du lendemain

Etudier la suite définie par

$u_{n+1} = \alpha\, u_n + \beta\, |u_n|$ où α et β sont deux réels positifs vérifiant $\alpha + \beta = 1$.

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°12

Ce texte a été revu, corrigé, et complété par Alice De Bigault et Sandrine Le Guillou.

Prologue

L'énoncé invite à se pencher d'abord sur le cas où le terme initial de la suite est réel :
-si u_0 est un réel positif, alors $|u_0| = u_0$: la suite est stationnaire ;
-si u_0 est un réel négatif, alors $|u_0| = -u_0$: la suite est nulle dès le rang 1.

Nous nous plaçons désormais dans le cas où le terme initial de la suite a une partie imaginaire non nulle ; pour les besoins de l'utilisation de la calculatrice, on prendra, comme l'énoncé nous y invite, $u_0 = 5+5i$. Nous pouvons cependant commencer par prendre un peu de recul "géométrique", pour situer les différents éléments du problème et surtout comprendre comment se fait le passage d'un terme de la suite au suivant. On voit dans le schéma ci-dessous (en repère orthonormé) le point M_n d'affixe u_n, avec les différents attributs de ce complexe (partie réelle et imaginaire, module et argument).

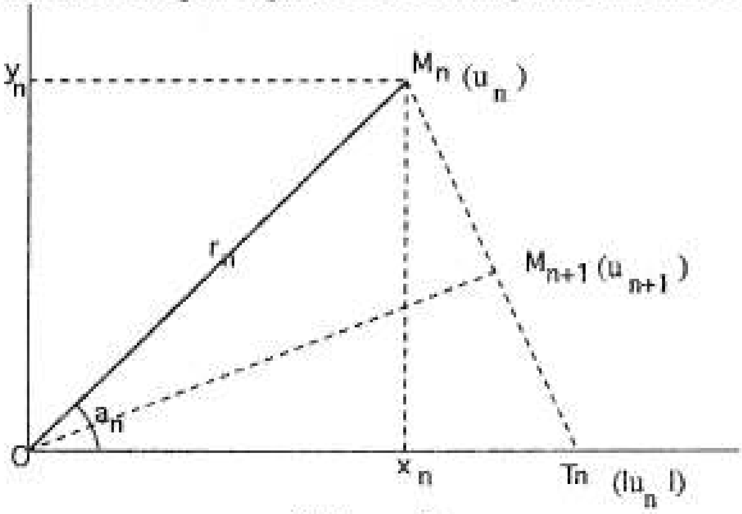


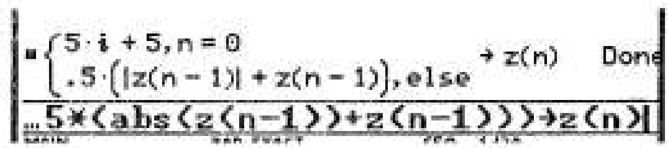
Schéma n°1

Où est M_{n+1}, l'image de u_{n+1} ? On dispose de la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$, qui traduit le fait que M_{n+1} est le milieu de M_n et du point T_n, image de $|u_n|$. Où est ce point T_n ? Il a pour affixe $|u_n|$, qui est un réel positif. Donc ce point est sur l'axe des abscisses, et son abscisse est égale au module de M_n, c'est à dire à r_n. T_n est donc sur le cercle de centre O passant par M_n. On remarquera que le triangle $0M_nT_n$ est isocèle en O. M_{n+1} étant le milieu de $[M_nT_n]$, la droite $(0M_{n+1})$, médiane, est aussi hauteur de ce triangle. On peut ne pas voir cela tout de suite, mais, comme d'habitude, il n'est pas inutile de réfléchir au cadre général du problème avant de passer à des observations partielles. C'est le procédé de passage d'un terme à l'autre qui va permettre d'ailleurs de donner un sens aux observations partielles qui vont suivre.

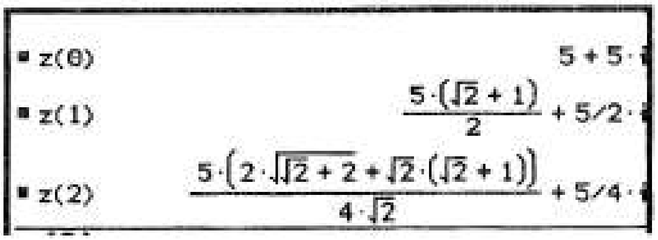
1. Observations en tous genres

1.a. <u>Nous pouvons commencer par programmer la suite dans l'application initiale</u>.

Nous avons utilisé la notation z(n) pour définir la suite. Nous aurions évidemment pu avoir recours à n'importe quelle autre lettre.



Nous allons pouvoir alors avoir les premières valeurs de la suite sous forme algébrique ou exponentielle, suivant le mode choisi. En mode *Rectangular*, nous obtenons l'écriture algébrique des termes successifs.

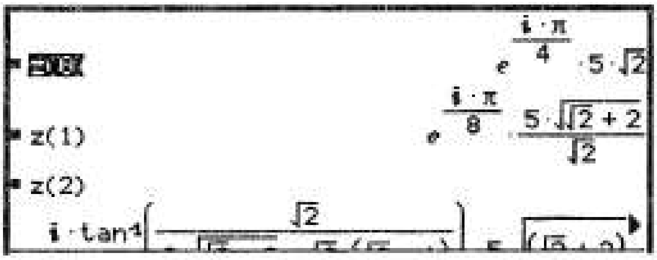


La partie imaginaire reste raisonnable ; l'expression de la partie réelle enfle vite et les calculs deviennent vite longs. Chaque observation doit être accompagnée d'une réflexion : la partie imaginaire est à chaque fois divisée par deux ; c'est l'amorce d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Est-ce normal ? Un petit coup d'oeil au schéma 1 devrait donner une réponse à cette question...

Passons au mode *Polar*, pour avoir l'expression exponentielle des termes successifs de la suite : pour z(0) et z(1), les résultats sont simples. On remarque au passage que l'argument principal de 5 + 5i est $\frac{\pi}{4}$, ce qui se conçoit assez facilement.

Cela se complique pour z(2).

Retrouve-t-on trace des conjectures formulées à partir de la forme algébrique ? L'argument de z(1) est la moitié de celui de z(0). Pour z(2), l'expression de l'argument n'est pas particulièrement transparente...

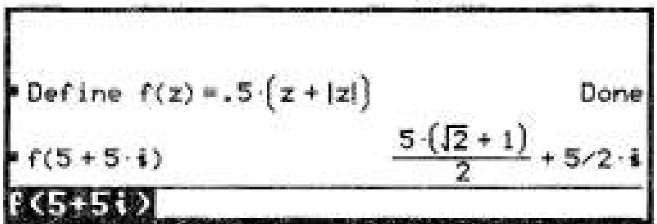


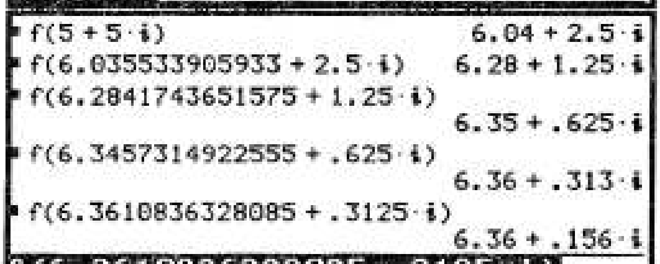
1.b. <u>Plus rapide, il est possible de calculer les termes successifs de la suite en itérant la fonction f qui définit la suite récurrente</u>.

La définition de la suite dans l'application initiale via une instruction conditionelle *When...* est commode car elle permet d'obtenir directement le terme voulu de la suite. Il suffit d'écrire z(n) pour avoir le terme de rang n. Cependant l'usage montre que le temps de calcul, à partir de n = 10, est extrêmement long. Il est plus rapide de définir dans l'application initiale la fonction f qui à u_n associe u_{n+1} : f : $z \to f(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$.

On obtient alors : $f(u_0) = u_1$, $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, etc.

On calcule d'abord les termes successifs en mode *rectangular*, en calcul exact puis approché (on a choisi ci-contre l'affichage de trois chiffres significatifs pour gagner de la place). Les calculs sont rapides (à la différence de la définition à partir de la syntaxe *"When"*). Cependant, on ne peut pas calculer directement un terme de la suite. : pour obtenir par exemple u_5, on doit calculer tous les termes qui le précèdent.





Sous cette forme, on retrouve le caractère géométrique (raison $\frac{1}{2}$) de la suite des parties imaginaires. La suite des parties réelles semble croissante et convergente (mais prudence, il s'agit de calculs approchés !).

Il est possible de reproduire la même démarche en mode *polar*, en calcul approché.

On peut constater que les arguments semblent être à chaque étape divisés par 2. La suite des modules semble être décroissante et convergente.

$\text{Define } f(x)=.5\cdot(x+\lvert x\rvert)$	Done
$f(5+5\cdot i)$	$e^{.39\cdot i}\cdot 6.5$
$f(e^{.39269908169871\cdot i}\cdot 6.5328148243821)$	$e^{.2\cdot i}\cdot 6.4$
$f(e^{.19634954084936\cdot i}\cdot 6.4072886193539)$	$e^{.1\cdot i}\cdot 6.4$

Une observation plus poussée indiquerait que la suite des modules et la suite des parties réelles semblent converger vers la même limite. Un retour au schéma permet de comprendre l'origine des phénomènes constatés :

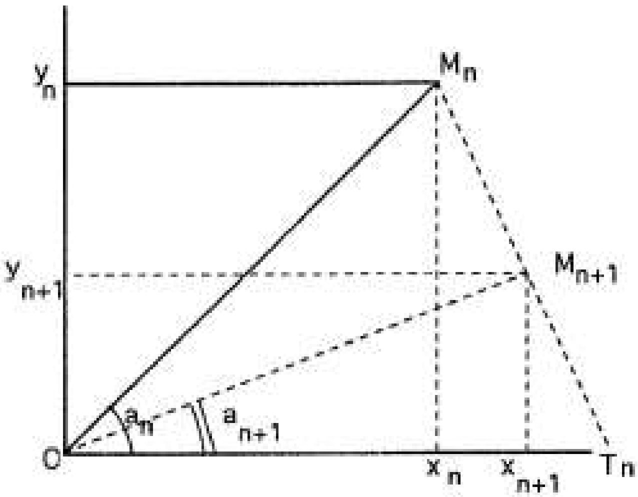


Schéma n°2

Le triangle OM_nT_n est isocèle en O et M_{n+1} est le milieu de $[M_nT_n]$.
Pour des raisons géométriques élémentaires :

* $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$ (Théorème de Thalès, sur la projection des milieux) ;

* $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ (Dans un triangle isocèle, la médiane principale est aussi bissectrice).

La suite des parties imaginaires, comme la suite des arguments principaux, est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Pour les parties imaginaires et les arguments, les résultats sont donc assez simples. Un troisième type d'observation va permettre de préciser le comportement de la suite des parties réelles et de la suite des modules.

1. c. Il est possible d'utiliser enfin l'éditeur de suites.

L'utilisation de l'éditeurr de suites nécessite de passer de l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles : la suite (x_n) des parties réelles et la suite (y_n) des parties imaginaires des termes de la suite (u_n). Les nécessités de l'observation imposent donc des premiers calculs. Nous disposons déjà de $u_0 = 5 + 5i$, c'est-à-dire $x_0 = y_0 = 5$. Puis $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$. En remplaçant u_n par $x_n + iy_n$ et en calculant son module, nous obtenons $x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + iy_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$, c'est-à-dire, en identifiant partie réelle et partie imaginaire : $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n)$.

Nous retrouvons bien le caractère géométrique de la suite (y_n). Nous disposons donc de son expression générale : $y_n = y_0 (\frac{1}{2})^n = .5.(\frac{1}{2})^n$. Par application des théorèmes du cours, on peut donc dire que la suite (y_n) est une suite décroissante, qui converge vers 0. Ce qui prouve au passage que la suite (u_n), si elle converge, converge nécessairement vers un nombre réel (puisque sa partie imaginaire serait nulle). Nous pouvons achever ces premiers calculs par une deuxième approche de la suite, à partir de son écriture polaire.

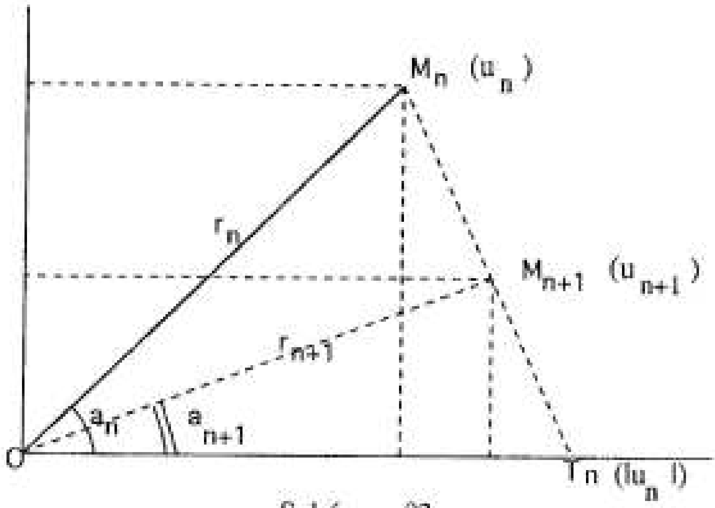


Schéma n°3

Nous avions déjà noté que $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$. La suite des arguments principaux est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Nous disposons donc de son expression générale :

$a_n = a_0 (\frac{1}{2})^n = \frac{\pi}{4}.(\frac{1}{2})^n$ (pour simplifier les écritures, on notera $\frac{\pi}{4} = a$).

Terminons par le calcul du module r_{n+1} en fonction du module r_n. On peut l'envisager de deux façons :

- par des considérations de géométrie élémentaire, dans le triangle $\{0, M_{n+1}, T_n\}$ rectangle en M_{n+1}. OT_n est égal à r_n ; on a alors $r_{n+1} = r_n \cos(a_{n+1}) = r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$;

- par un recours à la relation de définition de la suite. De $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$, nous pouvons tirer : $r_{n+1} e^{ia_{n+1}} = \frac{1}{2}(r_n e^{ia_n} + r_n) = \frac{1}{2} r_n (e^{ia_n} + 1)$. Nous savons que l'argument est divisé par deux : une factorisation par $e^{ia_n/2}$ est donc naturelle :

$r_{n+1} e^{ia_{n+1}} = \frac{1}{2} r_n e^{ia_n/2} (e^{ia_n/2} + e^{-ia_n/2})$. L'utilisation des formules d'Euler permet de conclure : $r_{n+1} e^{ia_{n+1}} = r_n e^{ia_n/2} \cos\frac{a_n}{2} = r_n \cos \frac{a}{2^{n+1}} e^{i a_n/2}$. L'identification module/argument permet de conclure(attention, à condition que $r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$ soit positif, ce qui est bien le cas ici). Récapitulons une dernière fois :

Ecriture algébrique	**Ecriture exponentielle**
$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$ $y_n = \frac{5}{2^n}$	$a_n = \frac{a}{2^n}$ $r_{n+1} = r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$

Nous pouvons désormais utiliser l'éditeur de suites pour bénéficier de sa structure de calcul approché (le tableau de valeurs) et de représentation graphique.

Observation numérique : les suites des parties réelles, des parties imaginaires et des modules sont définies en u1, u2 et u3.

On retrouve bien les monotonies des trois suites (cf. ci-contre).

Les suites des parties réelles et des modules semblent bien converger vers la même limite "en sens contraire" : la première croît, la deuxième décroît. On dit que ces deux suites sont adjacentes.

✓ $u1 = .5\cdot\left(u1(n-1)+\sqrt{(u1(n-1))^2+(u2(n-1)\right.$

$ui1=5$

✓ $u2=.5\cdot u2(n-1)$

$ui2=5$

✓ $u3=u3(n-1)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)$

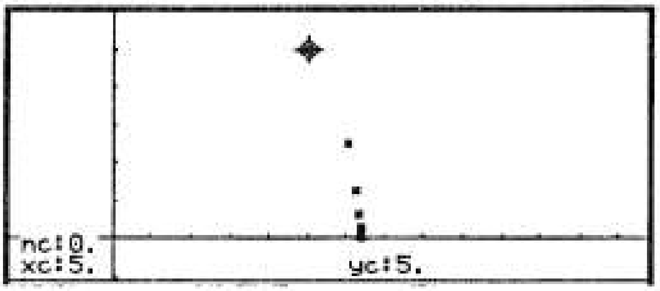
$ui3=5\cdot\sqrt{2}$

u1(n)=_(n−1))^2+(u2(n−1))^2))

0.	5.	5.	7.0710678
1.	6.0355339	2.5	6.5328148
2.	6.2841744	1.25	6.4072886
3.	6.3457315	.625	6.3764358
4.	6.3610836	.3125	6.3687551
5.	6.3649194	.15625	6.3668369
6.	6.3658781	.078125	6.3663575
7.	6.3661178	.0390625	6.3662377

Un point de vue graphique maintenant : pour représenter la suite des points de coordonnées (x_n, y_n), il faut choisir le mode *custom* dans l'éditeur de suites (menu *F7*), en sélectionnant la suite des parties réelles (u1) et des parties imaginaires (u2). Attention : un repère orthonormé s'impose.

On retrouve bien la disposition mise en évidence dans les schémas 1, 2 et 3.



Fin de la phase d'observations. Bien entendu, il ne s'agit pas, pour tout problème, de procéder à toutes les observations possibles et imaginables. Mais il est tout à fait utile de connaître les ressources d'un outil de calcul et, au delà, de savoir considérer un même objet sous différents aspects. C'est encore plus vrai pour un nombre complexe, pour lequel on dispose de deux types d'écriture fondamentale et d'une association naturelle domaine géométrique/domaine numérique, via le plan complexe. Il reste à achever l'étude théorique de la suite, que les nécessités de l'observation ont déjà bien entamée.

3. Une première étude théorique qualitative

* Pour la suite des parties imaginaires (y_n) et la suite des modules (a_n) l'étude est achevée : il s'agit de deux suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et de base positive. Ces suites sont donc décroissantes et convergent vers 0 (théorème fondamental sur la convergence des suites géométriques).

* La suite des modules est définie par récurrence $r_{n+1} = r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$

D'où $r_{n+1} - r_n = r_n\left(\cos\frac{a}{2^{n+1}} - 1\right) \leq 0$. Cette suite est décroissante et minorée par 0 (tout module est positif !). Un autre théorème fondamental ("les suites réelles décroissantes et minorées convergent") permet de conclure : <u>la suite des modules converge</u>.

* La suite des modules et la suite des parties imaginaires convergent toutes deux. On en déduit que la suite des parties réelles converge aussi. En effet : $r_n^2 = x_n^2 + y_n^2$, d'où $x_n = \sqrt{r_n^2 - y_n^2}$. La suite (y_n) converge vers 0, nous pouvons en déduire que la suite (r_n) et la suite (x_n) convergent vers la même limite. Nous disposons aussi du sens de variation de cette dernière suite : l'écriture $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$ implique, par une récurrence simple, que x_n est toujours positif. L'inégalité triviale $x_n^2 + y_n^2 \geq x_n^2$ implique $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq x_n$, puis $x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq 2x_n$, puis $\frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \geq x_n$.

Nous avons bien établi que $x_{n+1} \geq x_n$, c'est-à-dire que la suite des parties réelles est croissante.

<u>Bilan</u> : nous disposons désormais de tous les renseignements d'ordre qualitatif (sens de variation et convergence) des quatre suites en présence. Il reste à envisager une dernière étude quantitative : quelle est la limite commune des suites des parties réelles et des modules ? De ce point de vue, les différentes observations menées ne nous donnent pas beaucoup d'indications. L'expression récurrente des modules apparaîssant plus simple que l'expression récurrente des partiels réelles, c'est par l'étude de la suite (r_n) que nous allons tenter de déterminer la limite manquante.

4. Une recherche de limite où l'on découvre les vertus simplificatrices des formules trigonométriques.

En itérant la relation de récurrence $r_{n+1} = r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$, nous obtenons successivement:

$r_1 = r_0 \cos\frac{a}{2}$

$r_2 = r_1 \cos\frac{a}{2^2}$

$r_3 = r_2 \cos\frac{a}{2^3}$

....

$r_{n-1} = r_{n-2} \cos\frac{a}{2^{n-1}}$

$r_n = r_{n-1} \cos\frac{a}{2^n}$

En multipliant toutes les égalités membre à membre, la plupart des modules se simplifient (ils sont tous non nuls). Il reste :

$r_n = r_0 \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2^2} \cos\frac{a}{2^3} \cos\frac{a}{2^4} \dots \cos\frac{a}{2^{n-1}} \cos\frac{a}{2^n}$

Petit problème : quand n augmente, le nombre de facteurs augmente, et ceux-ci sont de plus en plus proches de 1. La tendance du processus n'est pas évidente à deviner... Pour se débarrasser de cette suite de cosinus, nous allons utiliser la formule trigonométrique : $\sin(2a) = 2\sin a.\cos a$ c'est-à-dire, pour $\sin a \neq 0$, $\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$. L'intérêt de cette substitution dans la relation définisant r_n apparaît "assez" clairement : comme les arguments sont à chaque étape divisés par deux, les sinus vont se simplifier "en cascade". Un exemple pour illustrer ce phénomène :

$r_3 = r_0 \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2^2} \cos\frac{a}{2^3}$. Nous utilisons $\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$. D'où :

$$r_3 = r_0 \frac{\sin a}{2\sin\frac{a}{2}} \frac{\sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{4}} \frac{\sin\frac{a}{4}}{2\sin\frac{a}{8}} = r_0 \frac{\sin a}{2^3 \sin\frac{a}{8}}.$$

Nous pouvons imaginer une généralisation de cette formule : $r_n = r_0 \dfrac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$

Une récurrence s'impose :
- la formule est vraie pour n = 0 (on trouve $r_0 = r_0$).
- supposons-la vraie au rang n et prouvons alors qu'elle est vraie au rang n+1 :

$r_n = r_0 \dfrac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$ et $r_{n+1} = r_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}$ $r_{n+1} = r_0 \dfrac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}} \cos\frac{a}{2^{n+1}}$.

Or $\cos\dfrac{a}{2^{n+1}} = \dfrac{\sin\frac{a}{2^n}}{2\sin\frac{a}{2^{n+1}}}$. D'où $r_{n+1} = r_0 \dfrac{\sin a}{2^{n+1} \sin\frac{a}{2^{n+1}}}$ ce qui traduit bien la formule à l'ordre n+1;

- la formule, vraie en 0 et récurrente, est donc vraie pour tout n : $r_n = r_0 \dfrac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$.

Peut-on alors déterminer la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$? Nous allons nous intéresser à la partie variable de r_n, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}$

La calculatrice donne bien une limite. Mais d'où vient ce résultat ?

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2^n}\cdot 1}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right) \qquad \frac{1}{a}$$

Ce résultat peut donner l'idée de faire apparaître a dans l'expression de r_n :

$r_n = \dfrac{r_0 \sin a}{a} \dfrac{a}{2^n} \dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$. Nous devons ensuite, nécessairement, utiliser les résultats de référence concernant les limites de la fonction sinus. On en connaît un, qui vient de la dérivation de la fonction sinus en zéro : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Or, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{a}{2^n}$ tend vers 0. Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{2^n} \dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^n}} = 1$.Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{r_0 \sin a}{a} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Avec $r_0 = 5\sqrt{2}$ et $a = \dfrac{\pi}{4}$, on trouve $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \dfrac{20}{\pi}$

<u>Vérifications :</u>

- la valeur approchée de cette limite à 10^{-5} par défaut est 6, 366 19. On retrouve bien les résultats issus de l'observation de l'évolution des suites (x_n) et (y_n) ;

- si le premier terme de la suite est un réel positif (a=0), on retrouve bien (par passage à la limite que : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$ (dans ce cas la suite est d'ailleurs stationnaire) ;
- si le premier terme de la suite est un réel négatif ($a = \pi$), on retrouve : $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ (dans ce cas, la suite est d'ailleurs nulle à partir du terme de rang 1).

NB : en fin de course, de telles vérifications sont bien utiles (une erreur de calcul est vite arrivée...). Elles ne constituent pas bien sûr la preuve que ce qui précède est juste, mais elles constituent une sorte de filtre des erreurs : une certaine vérification permet parfois de déceler une certaine erreur de calcul (et parfois laissera passer une autre erreur...).

5. Un pas de côté...

Nous pouvons étudier maintenant l'effet de certaines modifications dans l'expression du phénomène récurrent. Deux types de modification peuvent être envisagées (entre autres!) :
- la modification du premier terme ;
- la modification de la relation de récurrence elle-même.

5.a. La modification de u_0.

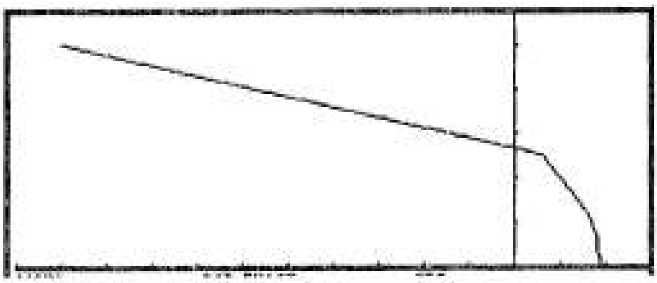
* Nous avons étudié la suite pour $Re(u_0) > 0$ et $Im(u_0) > 0$.

* Il est clair que pour pour $Re(u_0) > 0$ et $Im(u_0) < 0$, on obtient une suite de points symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'étude est donc exactement du même type.

* Si $Re(u_0) < 0$ et $Im(u_0) > 0$, l'argument du terme initial u_0 appartient à l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Mais alors l'argument de u_1 est dans l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}[$ et on est ramené à l'étude déjà faite.

Ci-contre la représentation graphique des premiers termes de la suite obtenue en choisissant la partie réelle de u_0 négative.

Dès le rang 1, nous retrouvons une configuration familière.



5.b. La modification de la relation de récurrence.

L'énoncé du TP, dans sa question du lendemain, invitait à considérer la suite définie par $u_{n+1} = \alpha\, u_n + \beta\, |u_n|$, avec α et β deux réels positifs vérifiant $\alpha + \beta = 1$. Cette relation exprime (cf. schéma n°4 ci-dessous) que le point M_{n+1} est barycentre des points M_n et T_n affectés de coefficients positifs. Ce point appartient donc au segment $[M_nT_n]$. Quels sont les résultats qui peuvent être transférés de l'étude précédente ?

* Les relations barycentriques classiques nous permettent d'écrire (en conservant les mêmes notations que dans l'étude précédente) : $y_{n+1} = \alpha\, y_n$. Deux cas de figure :

- soit $\alpha = 1$ (on a alors $\beta = 0$). La suite (u_n) est alors stationnaire ;
- soit $\alpha \in [0, 1[$; la suite (y_n) est alors une suite géométrique décroissante et qui converge vers 0.

* La suite des modules est une suite décroissante minorée : elle converge donc.

* La suite des parties imaginaires et des modules convergent ; cela implique que la suite des parties réelles converge. On a alors : $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Là s'arrêtent les ressemblances entre les deux suites :

- la suite des arguments (si $\alpha \neq 1$) est une suite décroissante qui converge vers 0 (du fait de l'évolution des parties imaginaires). Mais ce n'est plus une suite géométrique ;
- on ne bénéficie plus de triangles rectangles permettant d'établir une relation simple entre r_{n+1} et r_n. D'où une certaine difficulté pour déterminer la limite de la suite u.

Nous ne bénéficions pas ici d'une formule de simplification trigonométrique comme dans le cas où $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$... Une petite observation permet de mieux cerner le problème, avec le cas particulier $u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2|u_n|)$.

Ci-contre les premières valeurs des parties réelles et imaginaires de cette suite :

- la suite des parties imaginaires (en u2) apparaît bien géométrique de raison $\frac{1}{3}$;

- la suite des parties réelles semble converger vers un nombre supérieur à la limite de la première suite u étudiée.

n	u1	u2	
0.	5.	5.	
1.	6.3807119	1.6666667	
2.	6.523431	.55555556	
3.	6.5391734	.18518519	
4.	6.5409212	.0617284	
5.	6.5411153	.02057613	
6.	6.5411369	.00685871	
7.	6.5411393	.00228624	

Ce dernier résultat paraît assez naturel : les coefficients barycentriques ($\frac{1}{3}$ pour le point M_n, $\frac{2}{3}$ pour T_n) font que le point M_{n+1} est deux fois plus près de T_n que de M_n (cf. schéma n°4 ci-dessous).

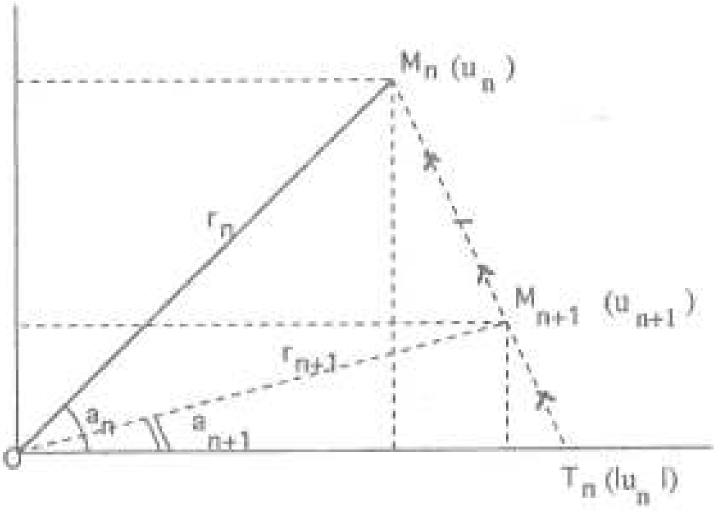


Schéma n°4

Peut-on obtenir une expression explicite pour la limite de la suite (u_n) ?
La question reste ouverte. Avis aux amateurs !

TP N° 13

On aborde un sujet déjà présenté en cours : les racines complexes $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Rappels

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'ensemble des solutions de l'équation, dans $\mathbb{C}$, $z^n = 1$.
Ainsi :

$R_1 = \{1\}$ (c'est l'unique solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z = 1$)

$R_2 = \{1, -1\}$ (ce sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = 1$)

$R_3 = \{1, j, j^2\}$ (ce sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = 1$)

Plus généralement :

$$R_n = \{1, e^{2i\pi/n}, e^{4i\pi/n}, e^{6i\pi/n}, e^{8i\pi/n}, \ldots\ldots, e^{(n-1)2i\pi/n}\}$$

On peut aussi écrire plus synthétiquement :

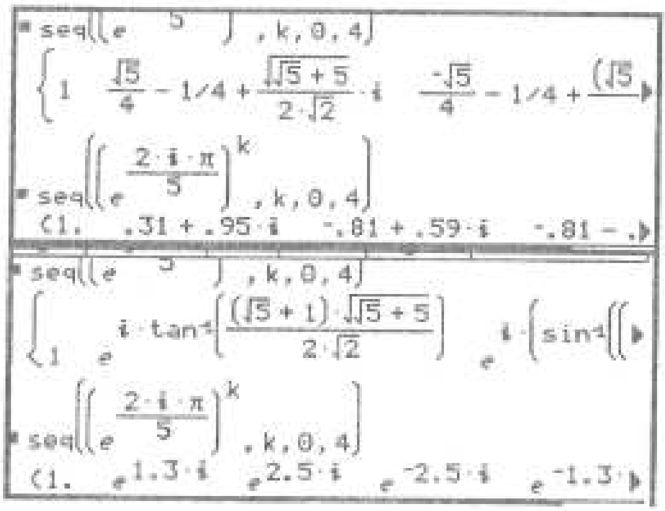
$$R_n = \{e^{k2i\pi/n}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\} \text{ ou encore } \{e^{(2i\pi/n)k}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\}$$

On dispose de différentes possibilités pour obtenir (par exemple) R_5 avec une calculatrice TI-92 :

<u>Dans l'application initiale</u>, la syntaxe *seq(*$e^{(2i\pi/5)k}$*, k, 0, 5)* permet d'obtenir les 5 éléments de R_5 sous différentes formes :

- le mode *Rectangular* fournit les écritures algébriques (ci-contre les valeurs exactes puis approchées) ;
- le mode *Polar* fournit les écritures exponentielles (ci-contre les valeurs exactes puis approchées).

On notera que le logiciel ne donne pas des expressions simples pour les éléments de R_5.

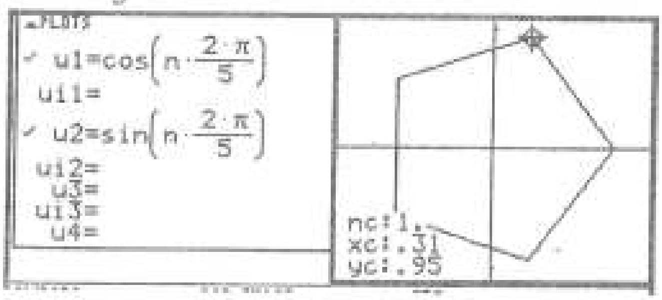


Les valeurs approchées sont plus simples à lire ; elles donnent quelques informations utiles (on distingue bien que si z est élément de R_5, son conjugué l'est aussi). Mais il ne s'agit que de valeurs approchées ! Ainsi l'argument de la troisième racine (valeur approchée : 2,5) est le double de l'argument de la deuxième racine (valeur approchée : 1,3).

<u>Dans l'application graphique</u>, on doit distinguer partie réelle et partie imaginaire des éléments de R_5 : $e^{(2i\pi/5)n} = \cos\frac{n2\pi}{5} + i\sin\frac{n2\pi}{5}$

En mode *Séquence*, on définit la partie réelle en u1, la partie imaginaire en u2.

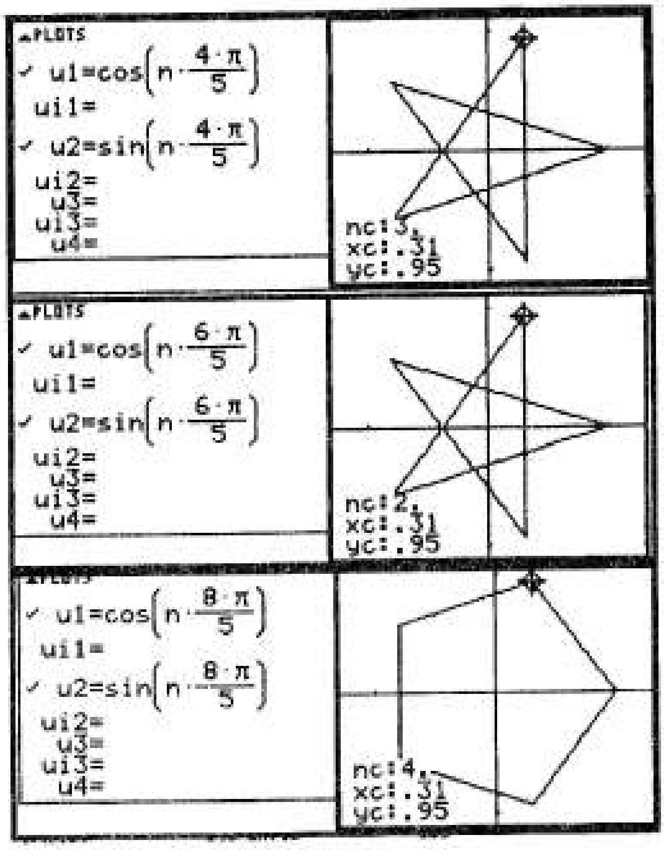
Attention : dans l'éditeur de suites, on doit choisir en *F7* le mode *custom* et en *F6* le mode *Line* pour relier les différentes images (cf. TP 12).



Attention : il faut impérativement choisir un repère orthonormé (*Zoomsqr*, menu *F2* de l'éditeur de suites).

Chose curieuse, si on définit les éléments de R_5 à partir des puissances successives de $e^{(4i\pi/5)}$, on retrouve (mais dans un autre ordre), tous les éléments de R_5 cf. ci-contre).

On le constate en utilisant la commande *Trace* de l'application graphique : même si la forme du polygone (qui relie les points successifs de la suite) est la même, ses sommets ne sont pas parcourus dans le même ordre par les termes successifs des différentes suites.



Finalement, on peut observer que, si l'on prend les puissances successives de n'importe quel élément de R_5 (sauf 1), on retrouve tous les éléments de R_5.

Ainsi $R_5 = \{e^{(2i\pi/5)k}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\} = \{e^{(4i\pi/5)k}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\} =$
$\{e^{(6i\pi/5)k}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\} = \{e^{(8i\pi/5)k}, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1\}$.

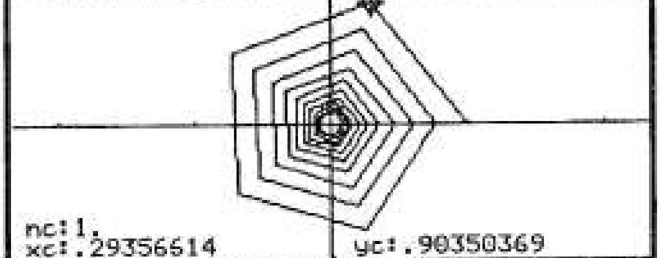
On dit que, dans R_5, $e^{(2i\pi/5)k}$, $e^{(4i\pi/5)k}$, $e^{(6i\pi/5)k}$, $e^{(8i\pi/5)k}$ sont des racines primitives de 1.

Les questions du jour

Un peu d'explorations.
Recherchez les racines primitives dans R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_8, R_9 et R_{10}.
Une généralisation
* Quelles sont les racines de R_n qui semblent être des racines primitives ?
* Pour quelles valeurs de n toutes les racines (sauf 1) semblent être des racines primitives ?
* Prouvez les conjectures avancées...

La question du lendemain

Voici la représentation graphique (en mode *Custom* et *Line*) des 50 premiers termes d'une suite dans $\mathbb{C}$.
Pouvez-vous retrouver son expression ?



ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°13

Ce texte a été revu, corrigé, et complété par Murielle Almairac et Laetitia Rodriguez.

Prologue

Nous disposons dans ce TP de nombreuses possibilités d'étude des racines $n^{\text{ièmes}}$ (dans l'application initiale ou l'application graphique, en écriture algébrique ou polaire, en calcul exact ou approché...). Il faut essayer de ne pas trop disperser son attention, d'autant que certaines représentations par la calculatrice de ces racines ne sont pas particulièrement simples. Nous noterons R_n l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de un, P_n l'ensemble des racines primitives de R_n.

Quelques remarques avant d'entreprendre les premières observations :

- si z appartient à R_n, le conjugué de z, $\bar{z}$, appartient aussi à R_n (en effet si $z^n = 1$, alors $\bar{z}^n = \overline{z^n} = 1$, ce qui traduit le fait que $\bar{z}$ est aussi une racine $n^{\text{ième}}$ de 1) ;

- ceci entraîne que, si z est une racine primitive de R_n, alors $\bar{z}$ est aussi une racine primitive de R_n (en effet, si en prenant les puissances successives de z on retrouve tous les éléments de R_n, alors en prenant les puissances successives de $\bar{z}$ on trouvera les conjugués de tous les éléments de R_n... c'est-à-dire tous les éléments de R_n) ;

- la "première" racine $n^{\text{ième}}$ de 1 (celle qui a l'argument principal strictement positif le plus petit, autrement dit la première que l'on rencontre sur le cercle trigonométrique) est nécessairement une racine primitive de R_n : en effet, elle est égale à $e^{2i\pi/n}$; si on en prend les puissances successives, on retrouve bien tous les éléments de R_n. C'est précisément cela qui nous a permis de calculer la somme des racines $n^{\text{ième}}$ de 1 comme somme des premiers termes d'une suite géométrique et qui nous a permis d'établir que cette somme était égale à 0.

<u>Remarque sur ces premières remarques</u> : il est bien sûr possible de commencer un TP par observer quelques situations élémentaires. Mais l'on a en général intérêt à prendre un peu de recul, en se remémorant les éléments correspondants du cours, avant de se lancer tête baissée dans des observations tous azimuts !

Premières explorations

<u>Pour n = 1</u>, l'affaire est assez simple : une seule racine, égale à 1. C'est nécessairement une racine primitive !

<u>Pour n = 2</u>, deux racines, -1 et 1. Il est clair que 1 n'est plus une racine primitive de R_2 (en effet, si on élève 1 à une puissance quelconque, on trouvera toujours 1). Par contre -1 est une racine primitive de R_2 : $(-1)^2 = 1$.

<u>Pour n = 3</u>, trois racines, 1, j et j^2. Ecrivons les puissances successives de j et j^2:
- pour j : j, j^2, $j^3 = 1$;
- pour j^2 : j^2, $j^4 = j$, $j^6 = 1$.

Ainsi j et j^2 sont-elles deux racines primitives de R_3 : leurs puissances successives permettent de retrouver tous les éléments de R_3. En fait deux remarques du prologue aurait permis de conclure : j est la première racine que l'on rencontre sur le cercle trigonométrique, c'est donc nécessairement une racine primitive. Et comme j^2 est égale au conjugué de j, c'est aussi une racine primitive !

<u>Pour n = 4</u>, ces mêmes remarques permettent de conclure : $R_2 = \{1, i, -1, -i\}$. i est nécessairement une racine primitive, son conjugué -i aussi. Quant à 1 et -1, ils n'en sont pas, trivialement.

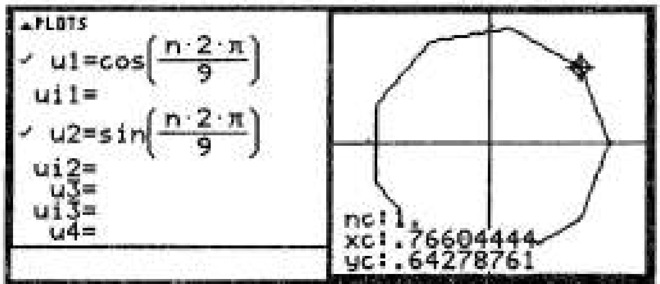
- <u>pour n=5</u>, l'énoncé du TP montrait que toutes les racines, sauf 1, étaient primitives.

Une conjecture a été faite alors par quelques binômes : dès que n est impair, toutes les racines de l'unité (sauf 1) seraient des racines primitives, dès que n est pair ce ne serait plus le cas. Cette conjecture était vérifiée pour n = 6, n = 7, n = 8. Elle s'écroule pour n=9...

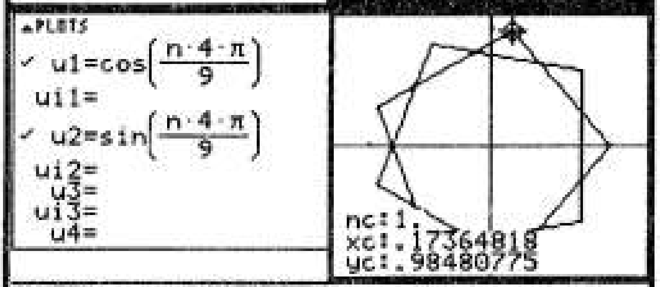
<u>Pour n = 9</u> :

$R_9 = \{e^{n2i\pi/9}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 8\}$

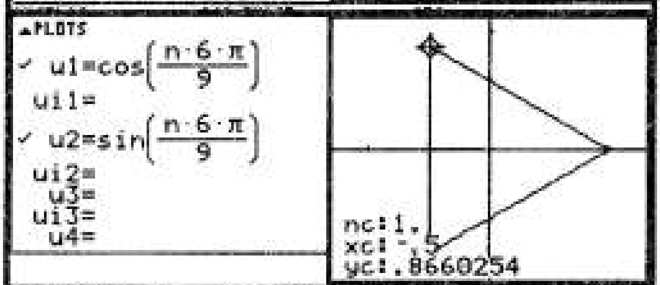
1 n'est évidemment pas racine primitive, $e^{2i\pi/9}$ est évidemment racine primitive (comme on le vérifie ci-contre).



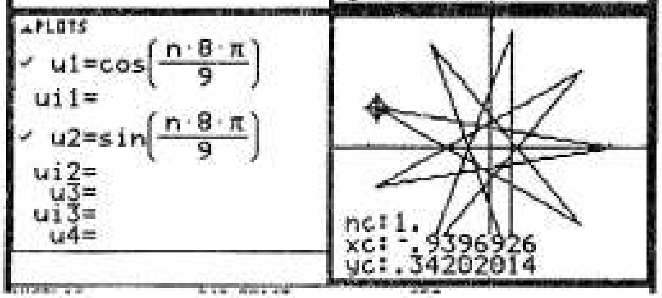
$e^{n4i\pi/9}$ est aussi racine primitive: on voit ci-contre que les puissances successives de cette racine permettent de retrouver (dans un ordre différent) tous les éléments de R_9.



$e^{6i\pi/9}$ n'est pas une racine primitive : on voit ci-contre que les puissances successives de cette racine ne permettent de retrouver que trois éléments de R_9.



$e^{8i\pi/9}$ est aussi racine primitive: on voit ci-contre que les puissances successives de cette racine permettent de retrouver (dans un ordre différent) tous les éléments de R_9.



Le passage aux conjugués permet alors d'avoir l'ensemble des réponses pour R_9 : les racines primitives sont $e^{2i\pi/9}$, $e^{8i\pi/9}$, $e^{-2i\pi/9}$, et $e^{-8i\pi/9}$. Alors que 9 est impair, toutes les racines (sauf 1) ne sont donc pas nécessairement des racines primitives, ce qui invalide la conjecture formulée sur la base des premières informations. Il est possible de rectifier cette première conjecture : certains binômes ont constaté que 9 était le premier nombre impair qui n'était pas premier, c'est-à-dire qui avait d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 9 est divisible par 3. C'est précisément $(e^{2i\pi/9})^3 = e^{6i\pi/9}$ qui pose problème, comme on l'a vu ci-dessus. En effet une simplification permet d'écrire cette racine sous la forme $e^{2i\pi/3} = j$. C'est une racine primitive de $\mathbf{R_3}$; donc ses puissances successives donnent tous les éléments de R_3 (on retrouve bien graphiquement, cf. ci-dessus, le triangle équilatéral, image des trois racines cubiques de l'unité) et ne peuvent évidemment pas permettre de retrouver tous les éléments de R_9 !

Avant d'aller plus loin, nous pouvons récapituler tous les résultats demandés pour les premières valeurs de n, en distinguant l'ensemble des racines et les racines primitives.

n	R_n	P_n
1	1	1
2	-1, 1	-1
3	1, j, j^2	j, j^2
4	1, i, -1, -i	i, -i
5	1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{-4i\pi/5}$, $e^{-2i\pi/5}$.	$e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{-4i\pi/5}$, $e^{-2i\pi/5}$
6	1, $e^{2i\pi/6}$, $e^{4i\pi/6}$, $e^{i\pi}$, $e^{-4i\pi/6}$, $e^{-2i\pi/6}$	$e^{2i\pi/6}$, $e^{-2i\pi/6}$
7	1, $e^{2i\pi/7}$, $e^{4i\pi/7}$, $e^{6i\pi/7}$, $e^{-6i\pi/7}$, $e^{-4i\pi/7}$, $e^{-2i\pi/7}$.	$e^{2i\pi/7}$, $e^{4i\pi/7}$, $e^{6i\pi/7}$, $e^{-6i\pi/7}$, $e^{-4i\pi/7}$, $e^{-2i\pi/7}$.
8	1, $e^{2i\pi/8}$, $e^{4i\pi/8}$, $e^{6i\pi/8}$, $e^{i\pi}$, $e^{-6i\pi/8}$, $e^{-4i\pi/8}$, $e^{-2i\pi/8}$.	$e^{2i\pi/8}$, $e^{6i\pi/8}$, $e^{-6i\pi/8}$, $e^{-2i\pi/8}$.
9	1, $e^{2i\pi/9}$, $e^{4i\pi/9}$, $e^{6i\pi/9}$, $e^{8i\pi/9}$, $e^{-8i\pi/9}$, $e^{-6i\pi/9}$, $e^{-4i\pi/9}$, $e^{-2i\pi/9}$	$e^{2i\pi/9}$, $e^{4i\pi/9}$, $e^{8i\pi/9}$, $e^{-8i\pi/9}$, $e^{-4i\pi/9}$, $e^{-2i\pi/9}$
10	1, $e^{2i\pi/10}$, $e^{4i\pi/10}$, $e^{6i\pi/10}$, $e^{8i\pi/10}$, $e^{i\pi}$, $e^{-8i\pi/10}$, $e^{-6i\pi/10}$, $e^{-4i\pi/10}$, $e^{-2i\pi/10}$	$e^{2i\pi/10}$, $e^{6i\pi/10}$, $e^{-6i\pi/10}$, $e^{-2i\pi/10}$

Pour simplifier l'expression des solutions, nous pouvons relever seulement les arguments, puisque tous les modules sont égaux à 1. Les fractions seront simplifiées à chaque fois que faire se peut et les solutions seront données dans l'ordre de leurs images sur le cercle trigonométrique.

n	Arguments principaux des éléments de R_n	Arguments principaux des éléments de P_n
1	0	0
2	0, π	π
3	0, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$
4	0, $\frac{\pi}{2}$, π, $-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$
5	0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{5}$
6	0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$
7	0, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, $-\frac{6\pi}{7}$, $-\frac{4\pi}{7}$, $-\frac{2\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, $-\frac{6\pi}{7}$, $-\frac{4\pi}{7}$, $-\frac{2\pi}{7}$
8	0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$
9	0, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{9}$, $-\frac{8\pi}{9}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$, $-\frac{8\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{2\pi}{9}$
10	0, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, π, $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{3\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$

Une autre écriture des résultats

Murielle Almairac, relectrice de ces "éléments de réflexion", propose une autre "mise en ordre" des observations. Elle constate en effet qu'il est possible d'obtenir les racines primitives P_n à partir de l'ensemble des racines R_n de la façon suivante :

* 1 n'est jamais une racine primitive (sauf pour R_1) ;

* si la décomposition en facteurs de n s'écrit n = a.b, les éléments de R_n contiennent les éléments de R_a et R_b (par exemple 6 = 2.3, les solutions de l'équation $z^2 = 1$ et de l'équation $z^3 = 1$ sont aussi solutions de l'équation $z^6 = 1$; cela signifie que R_6 contient les éléments de R_2 et R_3). Mais les racines primitives de R_a et R_b ne peuvent pas être des racines primitives de R_n : en effet, elles ne peuvent engendrer que R_a et R_b !

Il est alors possible d'obtenir les résultats suivants :

* 2 est un nombre premier, divisible par 1 et par lui-même, d'où $P_2 = R_2 - P_1$;
* 3 est un nombre premier, divisible par 1 et par lui-même, d'où $P_3 = R_3 - P_1$;
* 4 = 2.2, d'où $P_4 = R_4 - P_1 - P_2$;
* 5 est un nombre premier, divisible par 1 et par lui-même, d'où $P_5 = R_5 - P_1$;
* 6 = 2.3, d'où $P_6 = R_6 - P_1 - P_2 - P_3$;
* 7 est un nombre premier, divisible par 1 et par lui-même, d'où $P_7 = R_7 - P_1$;
* 8 = 2.4, d'où $P_8 = R_8 - P_1 - P_2 - P_4$;
* 9 = 3.3, d'où $P_9 = R_9 - P_1 - P_3$;
* 10 = 2.5, d'où $P_{10} = R_{10} - P_1 - P_2 - P_5$.

...

Les conjectures qui découlent de cette recherche peuvent être les suivantes :

- si n est un nombre premier, toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$, sauf 1, sont des racines primitives de R_n ;

- si n n'est pas un nombre premier, $e^{k(2i\pi/n)}$ est une racine primitive de R_n si et seulement si la fraction $\frac{k}{n}$ ne peut pas se simplifier (c'est-à-dire si n et k n'ont pas de diviseur commun).

Quelques éléments de preuve

La preuve de ces conjectures relève de l'arithmétique, qui n'est pas au programme des classes de lycée (mais qui sera de nouveau étudiée à compter de la rentrée 1998). Cependant, les raisonnements nécessaires sont assez élémentaires.

<u>Première conjecture, relative à n premier.</u>

Soit n un nombre premier.

Tout élément de R_n différent de 1 s'écrit sous la forme $r = e^{k(2i\pi/n)}$ (avec k compris entre 1 et n-1). Si on considère l'ensemble $R = \{r, r^2, r^3, ...r^{n-1}, r^n\}$ obtenu en considérant les puissances successives de r, retrouve-t-on tous les éléments de R_n ?

- tous les éléments de R sont des éléments de R_n, c'est-à-dire des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. En effet $(r^p)^n = (r^n)^p = 1^p = 1$;

- tous les éléments de R sont distincts. Supposons en effet que deux éléments de R soient égaux : $r^p = r^q$ pour $p \neq q$. Cela voudrait dire que la différence de leurs arguments serait un multiple de 2π, c'est-à-dire que $\frac{k2\pi}{n} p - \frac{k2\pi}{n} q$ serait un multiple de 2π. Cela signifierait que $\frac{k(p-q)}{n}$ serait un nombre entier. Or k et p-q sont deux nombres plus petits que n et n est premier. Donc cette fraction n'est pas simplifiable et par conséquent ne peut pas être un nombre entier.

Ainsi tous les éléments de R sont distincts. Donc R possède n éléments distincts ; comme ce sont tous des éléments de R_n (qui a aussi n éléments) on peut en conclure que $R = R_n$.

<u>Deuxième conjecture, relative à n non premier.</u>

Soit n un nombre non premier. On peut alors décomposer n en facteurs premiers (cf. sur ce point le TP n°1). Par exemple n = pq (dans le cas où n se décompose en 2 facteurs premiers, comme 6 ou 10). Tous les éléments de R_n s'écrivent alors sous la forme $e^{k(2i\pi/pq)}$. Considérons alors la racine qui s'écrit $r = e^{p(2i\pi/pq)}$. Une simplification élémentaire permet d'écrire $r = e^{2i\pi/q}$. D'après la preuve qui précède, c'est une racine primitive de R_q (puisque q est premier), donc ses puissances successives ne permettront de retrouver que q racines de R_n. La preuve s'achève là.

On comprend alors pourquoi :

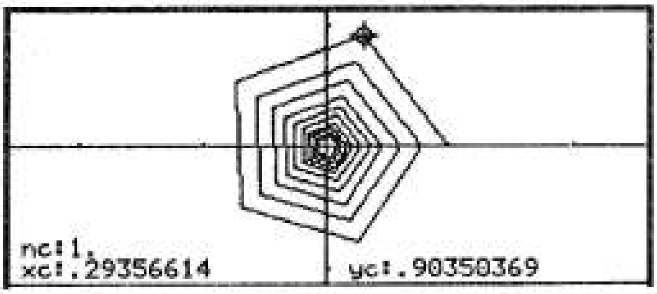
- les puissances successives de la deuxième racine de R_{10}, $e^{2i\pi/5}$, ne permettent de retrouver que 5 racines de R_{10} ;

- les puissances successives de la cinquième racine de R_{10}, e^{π}, ne permettent de retrouver que 2 racines de R_{10} ;

- les puissances successives de la troisième racine de R_9, $e^{2i\pi/3}$, ne permettent de retrouver que 3 racines de R_9, etc.

Ceci clôt le traitement de la question du jour.

Un premier prolongement, anecdotique, lié à la "question du lendemain"



La question posée est bien sûr ambiguë :
- la donnée des premiers termes d'une suite ne permet pas la détermination unique de la suite elle-même ;
- de plus les données sont ici communiquées en valeur approchée...

Il s'agit donc, non pas de retrouver l'expression de la suite, mais d'en retrouver une expression, compatible avec les éléments disponibles.

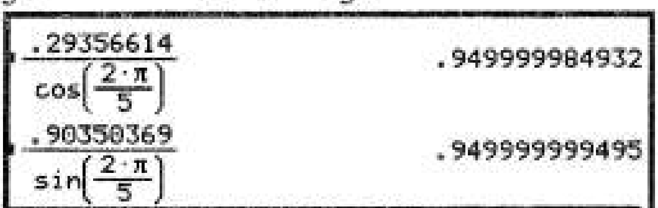
Il s'agit d'une suite de nombres complexes, elle peut donc être définie directement (z_n =) ou en considérant les suites des parties réelles et des parties imaginaires, ou encore les suites des modules et des arguments (cf. sur ce point le TP n°13). Le TP que nous venons de traiter, comme la forme de la représentation graphique de la suite, nous incite à nous intéresser plutôt à l'évolution des modules et des arguments :

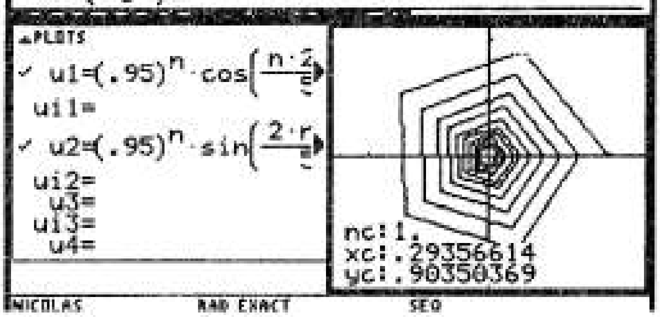
- les arguments semblent être en progression arithmétique, de raison $\frac{2\pi}{5}$ (on retrouve ainsi une suite périodique, de période 5, pour les arguments, qui rappelle la localisation des racines cinquièmes de 1 sur les sommets d'un pentagone régulier) ;
- à la différence des racines cinquièmes de l'unité, la suite des modules semble décroître vers 0. Par analogie avec ce qui se passe pour les arguments, on peut alors penser à une suite géométrique dont la raison q serait dans l'intervalle]0, 1[.

On aurait ainsi une suite complexe de la forme $z_n = (q.e^{i2\pi/5})^n = q^n.e^{ni2\pi/5}$. Sa décomposition en partie réelle/partie imaginaire permettrait une définition de cette suite pour l'éditeur de suite de la TI-92 : $x_n = q^n.\cos(\frac{2n\pi}{5})$ et $y_n = q^n.\sin(\frac{2n\pi}{5})$.

Il reste à étudier l'adéquation de ce modèle avec la suite proposée, en ajustant la valeur de q. Il nous faut pour cela prendre en compte les valeurs approchées données pour la partie réelle et la partie imaginaire du premier terme de la suite complexe (cf. copie d'écran ci-dessus). On est ainsi conduit à étudier la compatibilité du système :

$$* \; x_1 = q.\cos(\frac{2\pi}{5}) \qquad * \; y_1 = q.\sin(\frac{2\pi}{5})$$





x_1 et y_1 étant connus (en valeur approchée), on peut alors calculer q. L'application initiale donne (en mode calcul approché) deux valeurs pour q distinctes : l'écart est inférieur à 10^{-8}.

La précision de l'application graphique étant de cet ordre, on peut prendre comme valeur pour q 0,95 (ou 0,94999999 !).

Le contrôle, via l'application graphique, est concluant. La suite que nous avons trouvé est bien une des suites solutions.

Un deuxième prolongement, fondamental, lié aux propriétés algébriques de $\mathbb{C}$.

L'étude a été faite en classe de première dans le cadre des trinômes du second degré : $P(\alpha) = 0$ équivaut à $P(x) = (x-\alpha).\ Q(x)$, Q étant une fonction affine. La factorisation des polynômes est liée ainsi à la recherche de leurs racines. En généralisant ce résultat à l'ensemble des nombres complexes, on en déduit que la factorisation des polynômes de la forme $x^n - 1$ est liée à la recherche des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous allons l'illustrer pour n=5, laissant au lecteur curieux la possibilité de le vérifier pour d'autres valeurs de n.

Nous obtenons à partir de l'application initiale de la TI-92 quatre types de factorisation possibles (cf. copies d'écran ci-dessous :

- une factorisation rationnelle, via la commande *Factor()* ; la factorisation repose sur des coefficients entiers ou rationnels (c'est-à-dire quotients de deux entiers) ;
- une factorisation complexe à coefficient rationnels, via la commande *cFactor()* ; elle coïncide ici avec la commande précédente ;
- une factorisation réelle, via la commande *Factor(, x)* : la factorisation repose sur des polynômes à coefficients réels (quand le logiciel sait les reconnaître, ce qui n'est pas toujours le cas dès que l'on dépasse le degré 2) ;
- une factorisation complexe à coefficients quelconques, via la commande cFactor(, x) ; quand le logiciel sait les reconnaître, il factorise alors le polynôme en polynômes du premier degré[13].

$$\text{factor}(x^5-1) \qquad (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$\text{cFactor}(x^5-1) \qquad (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$\text{factor}(x^5-1,x) \qquad (x-1)\cdot\left(x^2-\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot x}{2}+1\right)\cdot\left(x^2+\frac{(\sqrt{5}+1)\cdot x}{2}\right.\blacktriangleright$$

$$\text{cFactor}(x^5-1,x) \qquad (x-1)\cdot\left(x+\frac{-(\sqrt{5}-1)}{4}-\frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot i\right)\cdot\left(x+\frac{-(\sqrt{5}}{4}\right.\blacktriangleright$$

Ce que nous avons vu dans le cadre du TP nous permet de comprendre comment l'on peut passer de la factorisation complexe à la factorisation réelle. En effet nous connaissons les 5 racines complexes, donc la factorisation du polynôme $x^5 - 1$:

$$x^5 - 1 = (x-1).(x-e^{2i\pi/5}).(x-e^{4i\pi/5}).(x-e^{-4i\pi/5}).(x-e^{-2i\pi/5})$$

Il suffit alors de regrouper les polynômes qui ont des racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} x^5 - 1 &= (x-1).[(x-e^{2i\pi/5}).(x-e^{-2i\pi/5})].[(x-e^{4i\pi/5}).(x-e^{-4i\pi/5})] \\ &= (x-1).[x^2 - x(e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5})+1].[x^2 - x(e^{4i\pi/5}+e^{-4i\pi/5})+1]. \end{aligned}$$

L'utilisation des formules d'Euler permet de conclure :

$$x^5 - 1 = (x-1).[x^2 - 2x\cos(\tfrac{2\pi}{5})+1].[x^2-2x\cos(\tfrac{4\pi}{5}) +1].$$

L'application de ceci à tout polynôme de la forme $x^n - 1$ est immédiate.

---

13 Il faut distinguer r ces factorisations trois niveaux de possibilités :
- la possibilité théorique de factoriser un polynôme : on dispose pour celà d'un théorème fondamental (dit de Gauss-D'Alembert) : tout polynôme dans $\mathbb{C}$ peut être factorisé en un produit de facteurs du premier degré (ceci n'est évidemment pas le cas dans R, il suffit pour cela de considérer les trinômes du second degré à discriminant strictement négatif) ;
- la possibilité pratique de déterminer la factorisation d'un polynôme, c'est-à-dire de déterminer ses racines réelles ou complexes. Un mathématicien français, Evariste Galois, a démontré qu'il existait des "formules de résolution" uniquement pour les polynômes de degré 2, 3 et 4 (les formules du deuxième degré sont connues...) ;
- la possibilité de trouver ces formules de résolution implantées dans un logiciel de mathématiques. Cela dépend du choix du constructeur. Le concepteur de la TI-92 a choisi de ne pas intégrer la résolution des équations du troisième et du quatrième degré (à cause de la lurdeur des formules). Il est donc tout à fait possible que la calculatrice refuse de résoudre en calcul exact de telles équations... alors que la possibilité théorique et pratique d'une telle résolution existe !

TP N°14

Plusieurs TP ont été cette année le cadre de résolutions d'équation :

- le TP 5 pour l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 100\sin x$;
- le TP 9 pour l'équation $x^{1/n} = \ln x$.

Il s'agissait dans chaque cas d'étudier <u>le nombre de solutions</u> de l'équation en question.

Aujourd'hui il s'agira encore de résoudre un ensemble d'équations (dépendant d'un paramètre n). Mais cette fois-ci, en plus du dénombrement des solutions, on s'intéressera aussi à <u>l'évolution</u> de ces solutions quand n varie.

Les questions du jour

On considère l'équation $e^x = x^{10n}$, n étant un entier naturel strictement positif.

<u>Convention</u> : on appellera "première équation" l'équation obtenue pour $n = 1$, "deuxième équation" l'équation obtenue pour $n = 2$, etc.

<u>Notation</u> : on appellera a_1, b_1, c_1... les solutions ordonnées de la première équation, a_2, b_2, c_2... les solutions ordonnées de la deuxième équation.

On traitera les questions ci-dessous dans l'ordre que l'on voudra.

* Résoudre la première, la deuxième, la troisième et la dixième équation ; donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut des différentes solutions.

* Résoudre la $n^{\text{ième}}$ équation $e^x = x^{10n}$.

* Les solutions a_1, a_2, ..., a_n... forment une suite. De même pour la deuxième solution (b_n) des équations successives, etc. Observer les suites des solutions (a_n), (b_n), (c_n)... Quelles conjectures pouvez-vous formuler sur leur évolution ?

La question du lendemain

Après les conjectures, les preuves des conjectures.

La séparation des questions du jour et de la question du lendemain est ici un peu artificielle : il ne sert à rien d'accumuler des conjectures sans autre fondement que celui de l'observation. Les processus de conjectures, de preuve (même partielle), de retour à l'observation, sont toujours entremêlés, comme on l'aura constaté au fil des TP et plus précisément lors du TP n°11.

Bref, à chaque binôme la responsabilité d'organiser au mieux son travail !

ELÉMENTS DE RÉFLEXION SUR LE TPN°14

Ce texte a été revu, corrigé, et complété par Aurélia Charar et Xavier Rivory.

Prologue

Quelques questions qu'il faut se poser en début de TP, pour fixer le cadre dans lequel la résolution de cette équation va intervenir :

- le domaine d'étude. Les deux fonctions en présence sont définies sur $\mathbb{R}$. L'équation doit donc être étudiée sur tout cet intervalle. Notons que 0 ne vérifie pas l'équation, donc 0 n'est pas solution : on pourra éventuellement résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$;
- les fonctions en présence. La fonction exponentielle est bien connue. La fonction qui à x associe x^{10n} est une fonction puissance d'exposant entier et pair. Cette fonction est donc paire. La fonction exponentielle et les fonctions puissances ont des rapports, au voisinage de $+\infty$, qui sont régis par un théorème fondamental :

$$\text{pour tout réel a, } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty.$$

- les stratégies possibles. On ne peut pas résoudre cette équation par factorisation ou par d'autres procédés algébriques. On doit donc étudier des fonctions et, pour cela, on dispose de plusieurs choix (voir TP 9) : transformer les fonctions en présence, les soustraire pour n'en avoir qu'une seule, étudier les circonstances où celle-ci s'annule...

Après avoir fait le point, c'est à dire situé ce TP dans son contexte, on peut rentrer dans le vif du sujet.

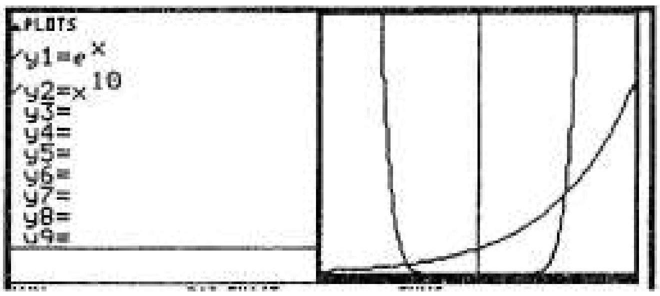
1. Voir

On peut bien sûr ne pas commencer par une démarche d'observation. Celle-ci peut être utile, à condition de ne pas y passer trop de temps et de ne pas perdre son indispensable sens critique, pour croiser les informations obtenues avec les souvenirs et les références évoquées ci-dessus. Nous allons donc étudier les premières équations dans l'application initiale et dans l'application graphique.

Première équation : $e^x = x^{10}$

On retrouve sans surprise les courbes de référence de la fonction exponentielle et de la fonction puissance.

Deux solutions de l'équation apparaissent à l'évidence.

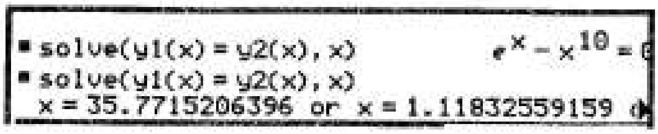


Malgré les apparences, **on sait,** pour des raisons de limite, que la fonction exponentielle va "repasser au dessus de la fonction puissance", ce qui donnera nécessairement une troisième solution (cela relève de "l'évidence mathématique", mais va à l'encontre de "l'évidence de l'image". Les deux évidences ne sont pas de même nature : l'image nous donne une information partielle sur un intervalle donné, l'étude théorique nous donne une information globale sur $]-\infty, +\infty[$).

La troisième solution attendue peut être obtenue ici :
- par retour à l'application initiale ;
- par modification du point de vue graphique.

<u>Commençons par le recours à l'application initiale</u> :

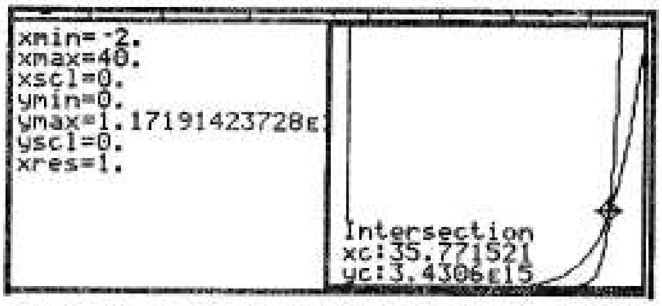
Evidemment, si nous demandons une résolution exacte, la machine avoue son impuissance et retourne l'équation elle-même.



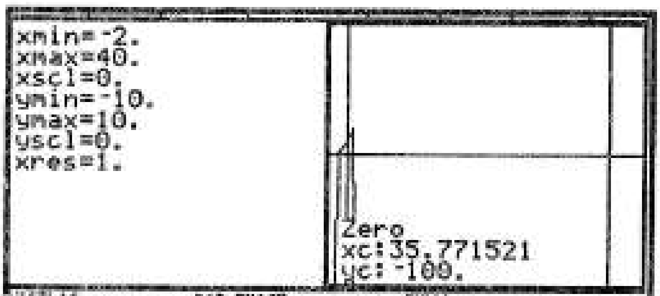
Si nous demandons des valeurs approchées des solutions, la machine en renvoie bien trois (la flèche en bout de ligne indique la troisième solution, qui est la solution négative).

<u>Nous pouvons aussi modifier soit la fenêtre, soit les fonctions, soit l'équation, pour faire apparaître la troisième solution</u> :

Nous avons gardé les mêmes fonctions en y1 et y2. **Mais la fenêtre a été changée** (à partir des résultats donnés par l'application initiale). La troisième solution apparaît bien, mais les deux autres, pourtant présentes sur l'écran, sont indiscernables.



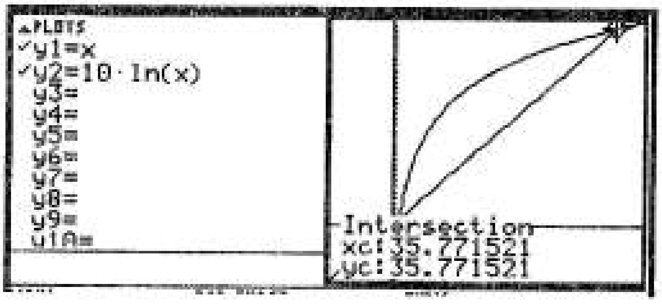
Nous gardons la même fenêtre (pour les x) et **changeons la fonction** : en y1 est définie la différence entre la fonction exponentielle et la fonction puissance. Les solutions se trouvent alors à l'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses (d'où le choix de ymin et ymax).



Les pentes sont très brutales, avec des conséquences sur la précision des calculs : l'application graphique donne une valeur approchée de la troisème solution avec comme image 100 !

Nous pouvons modifier enfin l'équation elle-même, par "passage au logarithme". L'équation $e^x = x^{10}$ est équivalente **sur]0, + ∞[** à x = 10lnx : attention, on perd là les solutions négatives !

On retrouve là les deux solutions strictement positives, avec une fenêtre plus modeste, et des fonctions à "croissances raisonnables". On perd bien la solution négative...



<u>Une remarque</u> : lors du TP, des binômes ont été surpris d'observer que l'étude d'une même équation pouvait déboucher sur l'étude de fonctions très différentes. **En effet, traiter une étude de fonction pour résoudre une équation revient à se placer dans le cadre d'un problème plus vaste**, et des problèmes différents peuvent contenir des questions semblables ! Un exemple simple pour illustrer cette idée : si on veut résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$, on peut :

- étudier le trinôme $x \rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$: la courbe est une parabole et on repère les points où celle-ci coupe l'axe des abscisses. On se place ainsi dans le cadre d'un problème plus vaste (étude des variations d'un polynôme du deuxième degré) pour en tirer une information limitée (où cette fonction s'annule-t-elle ?) ;

- constater que $x^2 + 2x - 3 = (x-1).(x+3)$; on étudie alors les deux fonctions affines $x \rightarrow g(x) = x-1$ et $x \rightarrow h(x) = x+3$ et on repère les points où les droites coupent l'axe des abscisses ;

- traiter l'équation sous la forme $x^2 = -2x+3$; on est alors conduit à étudier l'intersection de la parabole représentant la fonction $x \rightarrow x^2$ et de la droite représentant la fonction $x \rightarrow -2x+3$.

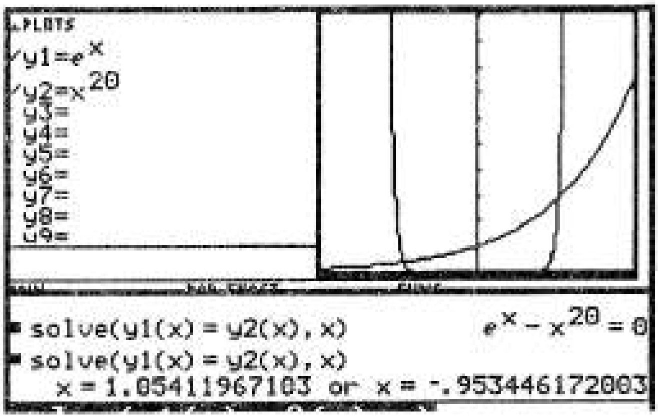
Ces trois problèmes différents contiennent bien une même question, appelant la même réponse : ce sont les mêmes valeurs des solutions que l'on trouvera pour chaque équation. Ainsi, si nous revenons à notre problème, on pourra remarquer sur les trois copies d'écran ci-dessus, que les courbes sont différentes, mais que la valeur de x sélectionnée comme intersection de deux courbes ou intersection avec l'axe des abscisses est la même (35,.771521). <u>Fin de la remarque</u>.

Tous ces points de vue, dans un TP, n'ont pas à être systématiquement exploités. Cela prendrait trop de temps. Mais il est bon de les avoir en tête, pour pouvoir choisir celui qui est le plus commode, ou le plus pertinent. On va voir dans ce qui suit que la sélection du point de vue pertinent est souvent décisive.

Deuxième équation : $e^x = x^{20}$

La panorama n'a pas changé. On note que la fonction puissance "s'applatit" davantage sur l'axe des abscisses au voisinage de zéro. Mais il n'y a pas de raison pour que le nombre de solutions change !

Surprise ! Le logiciel ne donne plus que les deux solutions "évidentes" en valeur approchée. N'y aurait-il plus de troisième solution ?



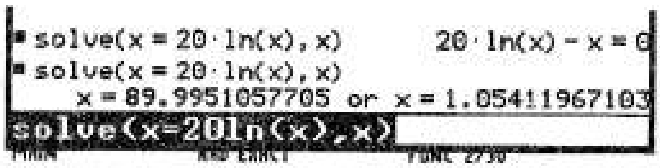
On est là à un moment tout à fait crucial de l'utilisation d'un outil de calcul. **C'est là que le croisement avec les résultats de référence est décisif.** Il y a nécessairement une troisième solution, pour cause de théorème de comparaison des fonctions exponentielles et des fonctions puissances. La calculatrice ne donne pas la valeur approchée de cette solution, probablement pour cause de dépassement de capacité de calcul. Dans cette situation, nous avons trois possibilités :

- on peut reformuler la question, pour la calculatrice, dans le même cadre ;
- on peut formuler la même question, pour la calculatrice, dans un autre cadre ;
- on peut laisser la machine et faire un calcul "à la main".

En fait, la coupure entre ces trois stratégies n'est pas nette : reformuler la question implique bien de réfléchir, c'est à dire de faire un détour théorique... Passons cependant en revue ces diverses stratégies :

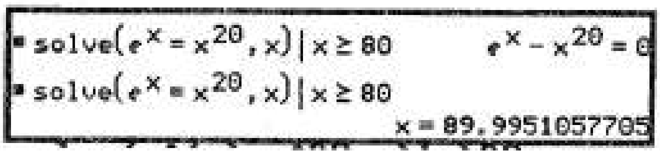
- <u>nous pouvons reformuler la question</u>, en restant dans l'application initiale. Il nous manque une solution strictement positive, on peut donc utiliser les logarithmes (ce qui "adoucira" l'équation : la calculatrice manipulera des nombres moins grand, ce qui facilitera la recherche des valeurs approchées des solutions).

L'équation devient alors x = 20 lnx. En valeur approchée, on retrouve la "petite" solution positive déjà trouvée et la "grande" qui nous manquait....



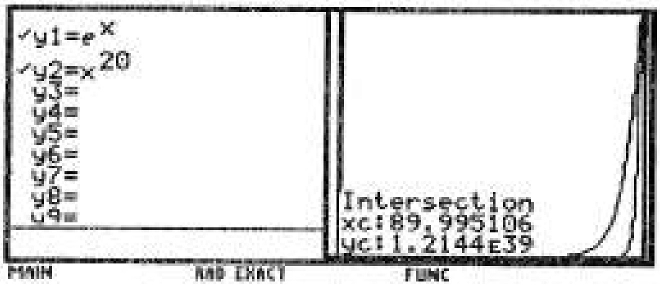
Cette valeur approchée de la troisième solution nous permet alors de reformuler la recherche des solutions avec l'équation initiale.

En localisant grossièrement la racine cherchée, nous permettons un travail plus efficace de l'algorithme de recherche activé par la calculatrice : la solution recherchée est trouvée.



- <u>deuxième stratégie : poser la même question à la calculatrice, mais dans un autre cadre</u>, par exemple le cadre graphique.

La calculatrice donne dans le cadre graphique la troisième solution. Mais, ne rêvons pas : si elle le fait, c'est parce que la bonne fenêtre a été sélectionnée, et cela a été fait parce que on avait déjà une petite idée de l'intervalle dans lequel se trouvait la solution manquante...



Ainsi, ce qui permet d'obtenir les bonnes réponses de la machine, c'est la faculté de poser les bonnes questions. Et cette faculté découle de la maîtrise du cadre théorique. On en arrive donc tout naturellement à la troisième stratégie, de contrôle théorique des opérations.

2. Prouver

L'étude peut être décomposée sur $\mathbb{R}-$ et sur $\mathbb{R}+$.

En effet sur $\mathbb{R}-$ il s'agit d'étudier l'intersection des courbes d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante : ce qui semble relever de l'évidence se démontre sans doute facilement. Mais attention : le fait qu'un résultat semble relever de l'évidence ne constitue pas une preuve de ce résultat ! Il faut utiliser encore là une méthode classique, reposant sur le théorème de la bijection. <u>Pour cela, on doit se ramener à létude d'une fonction, par différence des deux fonctions en présence</u>.

Soit donc la fonction $f_n(x) = e^x - x^{10n}$.

Les variations peuvent s'étudier

- à partir de la dérivation $f_n'(x) = e^x - 10nx^{10n-1}$. Sur $\mathbb{R}-$, cette dérivée est strictement positive (somme d'un réel strictement positif et d'un réel positif). La fonction f_n est donc croissante strictement sur cet intervalle ;

- par recours direct aux variations des fonctions en présence. Sur $\mathbb{R}-$ la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante, la fonction $x \to x^{10n}$ strictement décroissante (donc la fonction $x \to -x^{10n}$ est strictement croissante). Donc la fonction f_n est donc croissante strictement sur cet intervalle.

Comme elle est aussi continue, la restriction de f_n à $\mathbb{R}-$ réalise une bijection de $\mathbb{R}-$ sur $f_n(\mathbb{R}-) =]-\infty, 1]$. La fonction s'annule donc une fois et une seule en un point que l'on va appeler a_n. On peut même localiser plus précisément ce nombre :

$f_n(-1) = e - 1$, qui est strictement négatif ; $f_n(0) = 1$, qui est strictement positif. Donc la fonction s'annule en un point a_n compris strictement entre -1 et 0.

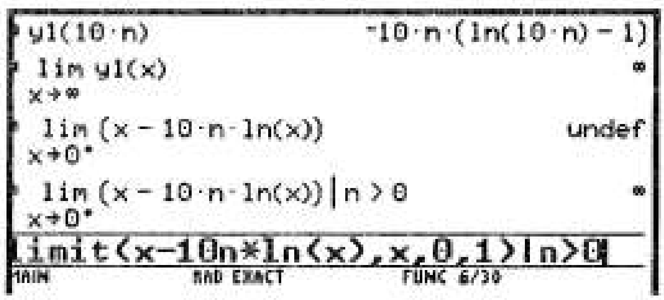
Sur $\mathbb{R}+$, c'est un peu plus compliqué, parce que la dérivée de f_n n'a pas un signe constant et qu'il est assez délicat d'étudier ce signe. Qu'à cela ne tienne, puisque on est sur $\mathbb{R}+$ (et même sur $\mathbb{R}+^*$: 0 n'est pas racine...), on peut user du logarithme. L'équation $e^x = x^{10n}$ devient sur cet intervalle $x = 10n.\ln x$. Il s'agit alors d'étudier la fonction g_n qui à x associe $g_n(x) = x - 10n.\ln x$. On a sans peine : $g_n'(x) = 1 - 10\frac{n}{x} = \frac{x - 10n}{x}$. Cette dérivée est du signe de x - 10n. Elle s'annule pour x = 10n. La dérivée (fonction affine croissante) est donc strictement négative sur] 0, 10n [, et strictement positive sur]10n, +∞[. La fonction admet donc un minimum global égal à $g_n(10n) = 10n.(1 - \ln 10n)$. Ce minimum global est strictement négatif (on rappelle que n est un entier supérieur à 1).

La limite de la fonction en 0 est +∞ (aucune indétermination). La limite en +∞ pose un petit problème. Pour le résoudre, il suffit de mettre x en facteur. On a alors $g_n(x) = x\left(1 - 10n\frac{\ln x}{x}\right)$. Quand x tend vers +∞, la fonction tend vers +∞ (chacun connaît la limite de $\frac{\ln x}{x}$ quand x tend vers +∞).

<u>Remarque 1</u> : tout ceci pouvait être obtenu sans peine, comme l'ont constaté certains binômes, à partir des résultats du TP 9. Nous avions démontré en effet que l'équation $\ln x = x^{1/n}$ avait deux racines dès lors que n était supérieur ou égal à 3. N'est-ce pas la même équation à laquelle nous sommes confrontés ici ? L'identification peut se faire via un changement d'inconnu, en posant $X = x^n$. L'équation $\ln x = x^{1/n}$ devient alors : $n.\ln X = X$. Elle a deux racines pour $n \geq 3$. **Nous sommes donc assurés que l'équation 10n.lnx = x a toujours deux racines.** Cette remarque est importante : il faut certes aborder un problème de mathématique avec un oeil neuf pour repérer certaines singularités, mais en même temps il faut savoir établir des passerelles avec des problèmes proches ou qui présentent certaines ressemblances (quant au contexte, aux méthodes de résolution...).

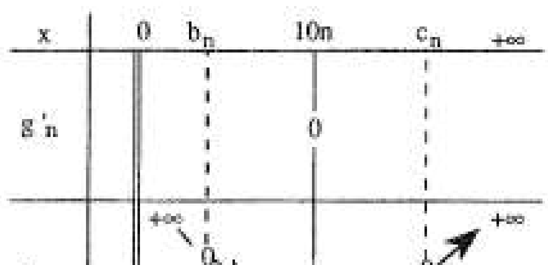
<u>Remarque 2</u> : tout ceci a été fait sans faire appel à la calculatrice. Les calculs sont en fait suffisamment simple pour pouvoir être faits directement. Nous pouvons simplement jeter un coup d'oeil sur la machine pour contrôler les résultats. Mais, comme on le verra ci-dessous, les choses ne sont pas toujours aussi simples qu'on l'imaginerait...

Tous ces résultats, assez élémentaires, sont donnés par la calculatrice sans peine... sauf la limite en 0. Pourquoi ? Il faut préciser en effet à la machine que n est strictement positif (si n était négatif, la limite serait - ∞). Le logiciel est impitoyable : il exige une précision de tous les instants. !



Le tableau de variations ci-contre récapitule les résultats établis. En appliquant le théorème de la bijection à la restriction de la fonction aux intervalles]0, 10n[et]10n, +∞[, on retrouve bien les deux autres racines de l'équation b_n et c_n.

- **$g_n(1) = 1$, donc b_n est compris entre 1 et 10n ;**
- **c_n est plus grand que 10n.**



3. (Re) voir.

On demande dans l'énoncé d'étudier l'évolution des solutions des équations successives. On dispose avec la calculatrice de valeurs approchées que l'on va relever, comme demandé par l'énoncé, avec une précision de 10^{-5} près par défaut (attention au sens de l'arrondi, suivant qu'il s'agit d'un nombre négatif, ou positif...)

La calculatrice ne donne les valeurs approchées des trois solutions que pour la première équation. Pour les suivantes, comme on l'a déjà vu, la calculatrice ne donne que les valeurs approchées des deux plus petites solutions..

La tranformation de l'équation, via les logarithmes, permet d'obtenir la plus grande des solutions. Cela nous permet au passage de croiser les résultats pour la valeur approchée de la racine b_n, obtenue par les deux méthodes.

```
  x = 35.7715206396 or x = 1.11832559159
■ solve(e^x = x^20, x)
    x = 1.05411967103 or x = ⁻.953446172003
■ solve(e^x = x^30, x)
    x = 1.03510567451 or x = ⁻.968240583308
■ solve(e^x = x^100, x)
    x = 1.01015271985 or x = ⁻.99014738436
```

```
■ solve(x - 10·ln(x) = 0, x)
    x = 35.7715206396 or x = 1.11832559159
■ solve(x - 20·ln(x) = 0, x)
    x = 89.9951057705 or x = 1.05411967103
■ solve(x - 30·ln(x) = 0, x)
    x = 150.398691301 or x = 1.03510567451
■ solve(x - 100·ln(x) = 0, x)
    x = 647.277512439 or x = 1.01015271985
```

Cela pose d'ailleurs un petit problème : peut-on se fier aux valeurs approchées données par la calculatrice ? Le problème est complexe, en l'absence de connaissance de l'algorithme de calcul implanté dans la machine. Disons que, quand il y a concordance entre l'étude théorique (on sait qu'il y a trois racines et on les a localisées) et les données de la machine, on peut estimer que les valeurs approchées sont convenables, avec deux réserves :

- prudence sur la dernière décimale, qui résulte nécessairement d'un arrondi ou d'une troncature ;
- prudence si l'on fait des calculs successifs à partir d'une valeur approchée ; le calcul approché peut avoir un effet boule de neige : ce n'est plus alors la dernière décimale qui est la seule suspecte, mais toutes les décimales !

Equation	Valeur appr. de a_n	Valeur appr. de b_n	Valeur appr. de c_n
$e^x = x^{10}$	- 0, 912 77	1, 118 32	35, 771 52
$e^x = x^{20}$	- 0, 953 45	1, 054 11	89, 995 10
$e^x = x^{30}$	- 0, 968 25	1, 035 10	150, 398 69
$e^x = x^{100}$	- 0, 990 12	1, 010 15	647, 277 51

<u>Valeurs approchées des solutions</u> à 10^{-5} près par défaut.

<u>Remarque 1</u> : ce n'est pas parce que ce sont des valeurs approchées qu'elles doivent être relevées... approximativement ! Il faut les noter en donnant le degré de précision, c'est à dire en fait un encadrement de chacune des solutions ;

<u>Remarque 2</u> : si on veut pouvoir formuler des conjectures, il faut présenter les résultats sous forme <u>claire</u> et <u>ordonnée</u> (rappelez-vous le TP n°10 sur le calcul des dérivées successives d'une fonction !) ;

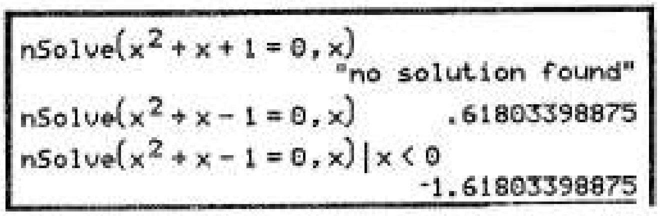
<u>Remarque 3</u> : certains binômes ont essayé lors du TP d'utiliser l'éditeur de suites pour l'étude des trois suites a, b et c. Avec quelques difficultés : nous ne disposons ici ni d'une expression du terme général de ces suites, ni d'une expression récurrente. Il s'agit

en fait d'une suite implicite. Ainsi a_n est parfaitement défini par la propriété caractéristique qu'il est le seul à posséder : c'est la plus petite solution de l'équation $e^x = 10^x$.

L'éditeur de suites de la TI-92 peut être utilisé pour obtenir des valeurs approchées des éléments de la suite, à partir de la commande *nSolve* qui fonctionne ainsi :

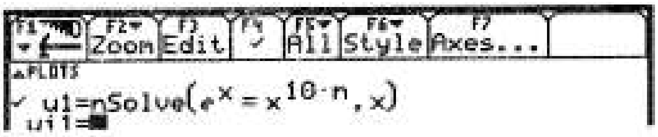
- elle donne une valeur approchée d'une solution réelle de l'équation proposée (même quand la calculatrice est en mode *calcul exact*, même si elle est en mode *rectangular*)) ;
- elle ne donne qu'une solution (la première que l'algorithme de recherche rencontre);
- elle donne cette solution sous forme numérique directe (et non pas sous la forme x=), ce qui permet de l'intégrer dans un programme de calcul ou un éditeur de suites.

Ci-contre on peut observer les résultats de cette commande appliquée à une équation numérique simple.On peut préciser l'intervalle de recherche des solutions à l'aide de la commande *sachant que (|).*



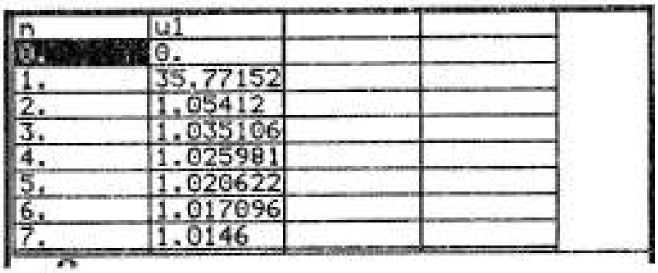
Essayons d'utiliser cette commande pour la définition des suites du problème :

La première organisation du calcul suggérée est assez naïve : elle consiste à définir une suite u1(n) égale à une des solutions de l'équation $e^x = x^{10n}$.



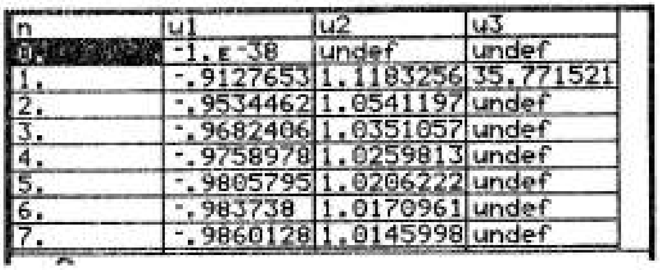
La table des valeurs révèle alors un certain désordre :

- pour n=0, l'équation est $e^x = 1$. Une seule solution, x=0 ;
- pour n = 1, la calculatrice détecte c_1 ;
- à partir de n = 2, la calculatrice relève les solutions comprises entre 1 et 2, c'est-à-dire la suite (b_n).



n	u1
0.	0.
1.	35.77152
2.	1.05412
3.	1.035106
4.	1.025981
5.	1.020622
6.	1.017096
7.	1.0146

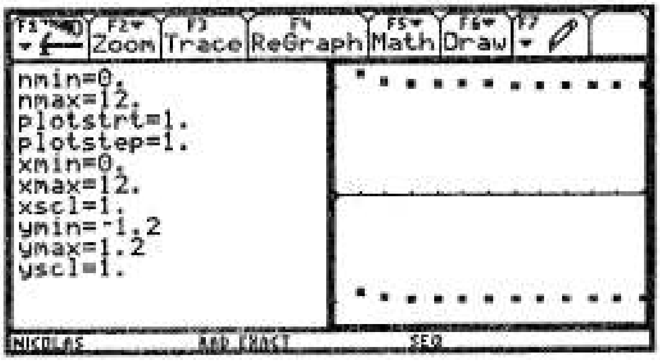
Une deuxième organisation, qui s'appuie sur l'étude théorique réalisée, consiste à définir les trois suites de solutions, en précisant les intervalles sur lesquels celles-ci se trouvent nécessairement.



n	u1	u2	u3
0.	-1.E-38	undef	undef
1.	-.9127653	1.1183256	35.771521
2.	-.9534462	1.0541197	undef
3.	-.9682406	1.0351057	undef
4.	-.9758978	1.0259813	undef
5.	-.9805795	1.0206222	undef
6.	-.983738	1.0170961	undef
7.	-.9860128	1.0145998	undef

Les résultats attendus apparaissent bien, avec cependant deux problèmes :

- une racine strictement négative qui ne devrait pas apparaître pour a_0 (c'est-à-dire dans l'éditeur u1(0);
- la suite (cn) n'apparaît pas à partir du rang 2 : les nombres, trop grands, échappent à l'algorithme de recherche de la commande *nSolve*.



La représentation graphique (en mode Time) ne donne pas d'informations supplémentaires sur les deux premières suites.

4. Conjecturer.

Il n'est pas facile, de conjecturer un résultat général à partir de l'observation... C'est plus simple de répondre à la question "montrer que...". Pourtant, l'activité mathématique (et scientifique en général) exige souvent cela : trouver des régularités, une loi générale, repérer un ordre dans le désordre. Ce n'est pas facile, mais un principe constitue une aide appréciable :

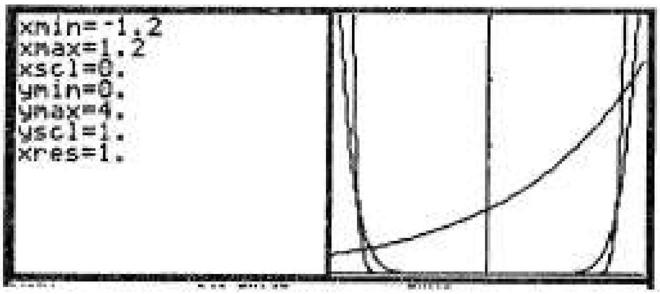
Il faut considérer tout résultat dans son contexte, c'est-à-dire :

1. "enveloppé" de toutes les propriétés qui ont été déjà établies

- pour a_n: $-1 \leq a_n \leq 0$
- pour b_n : $1 \leq b_n \leq 10n$
- pour c_n : $10n \leq c_n$.

2. enrichi si possible de plusieurs points de vue

Le tableau ci-dessus donne un point de vue numérique (succession de valeurs approchées). Mais nous disposons aussi d'un point de vue graphique : ci-contre apparaissent la courbe de la fonction exponentielle et les courbes des fonctions puissances x^{10} et x^{30}. On "voit" a_1 et b_1, a_3 et b_3.



Il faut alors synthétiser les différentes informations. La confrontation du tableau numérique, des encadrements et du graphique indiquent (après réflexion, bien sûr...) :

- la suite a_n semble décroître et converger vers -1 ;
- la suite b_n semble décroître et converger vers 1 ;
- la suite c_n semble croître et diverger vers $+\infty$.

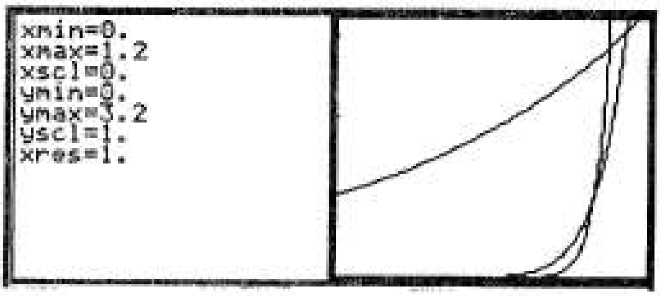
Ces résultats ne sont pour le moment que simples conjectures. En fait, bien souvent, nous sommes persuadés qu'ils sont vrais parce que nous savons pourquoi ils sont vrais : la conjecture est parfois très proche de la preuve.

Ainsi, pourquoi annonce-t-on que la suite c_n semble diverger vers $+\infty$? Parce que les valeurs prises deviennent de plus en plus grandes ? Ce serait une mauvaise raison : une suite peut être strictement croissante, sans avoir pour limite $+\infty$! La raison qui emporte la conviction est que c_n est minorée par 10n. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (10n) = +\infty$. Par application du théorème de minoration, on peut affirmer que (c_n) diverge vers $+\infty$. La preuve est faite. Il reste à prouver le reste.

5. Une étude qualitative.

Commençons par le sens de variation des trois suites.

- Pour la suite (b_n) :
on a représenté ci-contre la fonction exponentielle et les fonctions puissances x^{10} et x^{20}, sur un intervalle qui permette de visualiser b_1 et b_2.



Observons ce qui se passe sur le graphique ci-dessus, à la lumière de nos connaissances générales. Les deux courbes des fonctions puissances se croisent au point (1, 1). Après ce point, c'est la fonction puissance d'exposant le plus grand qui prend le dessus. C'est donc elle qui rencontrera la première la courbe de la fonction exponentielle. Donc $b_2 < b_1$.

Est-ce une démonstration rigoureuse ? Presque... Tout y est, il suffit de mettre en forme:

- b_2 vérifie $e^{b_2} = (b_2)^{20}$;
- pour tout x de l'intervalle $]1, b_2[$, $e^x > x^{20}$ (cf. l'étude de la fonction $x \mapsto e^x - x^{20}$) ;
- pour tout x de l'intervalle $]1, b_2[$, $x^{20} > x^{10}$(comparaison des fonctions puissances) ;
- ainsi pour tout x de l'intervalle $]1, b_2[$, $e^x > x^{20} > x^{10}$.

On ne peut donc pas avoir sur cet intervalle $e^x = x^{10}$. Donc b_1 n'appartient pas à cet intervalle. Donc b_1 est strictement supérieur à b_2. Ce qui a été fait pour b_1 et b_2 pourrait tout aussi bien être fait pour deux termes successifs b_n et b_{n+1} de cette suite. La suite (b_n) est donc décroissante.

- pour les suites (a_n) et (c_n).

On démontrerait par des méthodes analogues que la première suite est décroissante et la deuxième croissante. Démonstration laissée au lecteur.

Il reste à étudier le comportement de ces suites à l'infini.

Nous avons déjà démontré que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$. Quid des deux autres suites ?

La conjecture est assez naturelle (quand l'exposant augmente, la courbe de la fonction puissance ressemble de plus en plus à la lettre U ; à la limite, les intersections avec la courbe de la fonction exponentielle vont se faire à "la verticale" de -1 et 1). La première partie de la preuve est immédiate, par application d'un théorème fondamental du cours d'analyse, le théorème des suites monotones et bornées : **si une suite est décroissante et minorée par A, alors elle converge vers un réel supérieur ou égal à A** (de même, si une suite est croissante, et majorée par A, elle converge vers un réel inférieur ou égal à A).

On sait que la suite (b_n) est décroissante et minorée par 1. Donc la suite converge vers un réel b, supérieur ou égal à 1. Démontrons que b est égal à 1. Que se passerait-il en effet si b était strictement supérieur à 1 ?

* par définition, pour tout n, $e^{b_n} = {b_n}^{10n}$;
* $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{b_n} = e^b$;
* comme la suite est décroissante, $b_n \geq b > 1$. Donc ${b_n}^{10n} \geq b^{10n}$. Mais (b^{10n}) est une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1. Donc elle diverge vers $+\infty$ et par conséquent $({b_n}^{10n})$ diverge aussi vers $+\infty$.

Ainsi: si $b > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{b_n} = e^b$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} {b_n}^{10n} = +\infty$. Or ces deux suites sont égales ! C'est donc parfaitement impossible.

Ainsi b ne peut pas être strictement supérieur à 1. Comme b est supérieur à 1, la seule possibilité est que b soit égal à 1. On démontrerait de la même façon que la suite (a_n) converge vers -1.

6. Une étude quantitative

Nous connaissons désormais le comportement global (sens de variation) et local (convergence ou divergence) des trois suites. Nous pouvons nous intéresser à leur évolution "quantitative" : à quelle allure les suites convergent, ou divergent ? On parle pour décrire cela de l'étude des vitesses de convergence ou de divergence des suites.

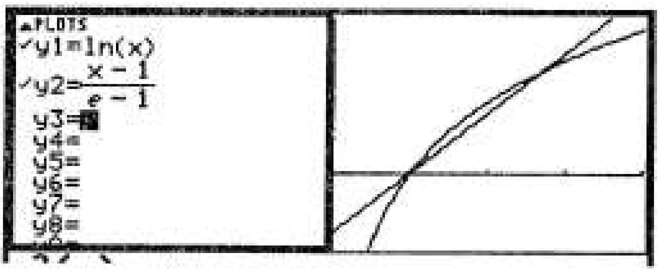
Commençons par la suite (b_n).

L'étude de la vitesse de convergence d'une suite repose souvent sur l'encadrement des termes de cette suite par des suites simples (par exemples des suites du type n^a). Il est clair que b_n est dans l'intervalle $]1, e[$. Nous voulons un encadrement plus précis. Nous disposons de la relation de définition de b_n : $e^{b_n} = {b_n}^{10n}$, qui peut s'écrire $b_n = 10n.\ln b_n$.

S'agissant d'encadrement, nous disposons de la majoration classique du logarithme népérien $\ln x < x-1$ (qui manifeste que la courbe de la fonction ln est sous la tangente au point d'abscisse 1, comme sous les tangentes en tout autre point : on dit que la fonction logarithme est concave). Si nous remplaçons dans cette inégalité $\ln b_n$ par $\frac{b_n}{10n}$, nous obtenons $\frac{b_n}{10n} < b_n - 1$. On en déduit $b_n < 10n.(b_n - 1)$ et enfin $b_n > \frac{10n}{10n-1}$.

Il nous faut maintenant une majoration de b_n. Pour cela, nous allons chercher une minoration de la fonction logarithme entre 1 et e.

Pour cela, nous allons minorer la fonction logarithme par la fonction affine dont le graphe est la corde passant par les points (1, 0) et (1, e). Nous laissons le soin à nos lecteurs de prouver que l'équation de cette droite est $y = \frac{x-1}{e-1}$.



Nous disposons alors, sur l'intervalle $]1, e[$, de l'inégalité $\ln x > \frac{x-1}{e-1}$. On l'applique à b_n, en remplaçant à nouveau $\ln b_n$ par $\frac{b_n}{10n}$. Nous obtenons alors $\frac{b_n}{10n} > \frac{b_n - 1}{e-1}$.

Nous en tirons sans peine $b_n < \frac{10n}{10n - e - 1}$. Nous disposons donc de la double inégalité

$$\frac{10n}{10n-1} < b_n < \frac{10n}{10n - e - 1}.$$

L'application du théorème des gendarmes confirme bien que la suite (b_n) converge vers 1. Cette inégalité nous donne plus : elle permet d'encadrer les termes successifs de la suite.

En u1 a été définie la suite $\frac{10n}{10n-1}$, en u2 la suite (b_n), en u3 la suite $\frac{10n}{10n - e - 1}$. On observe bien l'encadrement de la suite (b_n) par les deux suites. On remarquera cependant que (b_n) est beaucoup plus proche de la première que de la seconde suite.

n	u1	u2	u3
0.	0.	undef	0.
1.	1.1111111	1.1183256	1.5919211
2.	1.0526316	1.0541197	1.2283716
3.	1.0344828	1.0351057	1.1414779
4.	1.025641	1.0259813	1.1024836
5.	1.0204082	1.0206222	1.0803402
6.	1.0169492	1.0170961	1.0660655
7.	1.0144928	1.0145998	1.0560982

Ceci peut se comprendre : l'inégalité que nous avons utilisée pour obtenir la première suite ($\ln x < x-1$) permet une approche beaucoup plus fine de la fonction logarithme au voisinage de 1 que la deuxième inégalité (la première fonction représente la tangente, la deuxième une corde). Et comme la suite converge vers 1, c'est bien "la meilleure approximation affine" en ce point qui est supérieure à toute autre !

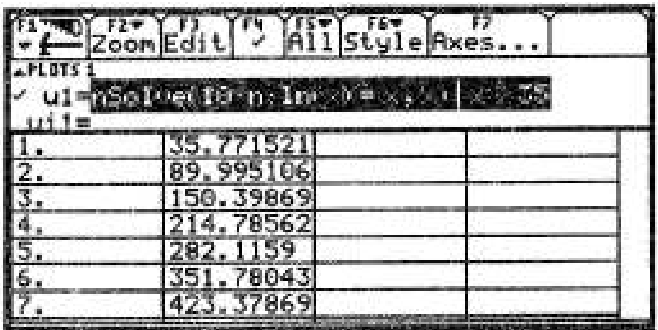
On encadrerait de la même façon la suite (a_n). Nous en laissons le soin au lecteur courageux. Plus intéressant est le contrôle de la suite (c_n). En effet, la localisation des termes de cette suite est indispensable pour permettre au logiciel d'en donner des valeurs approchées, comme nous l'avons remarqué plus haut.

Etudions donc la vitesse de divergence de la suite (c_n).

Une phase d'observation préalable du comportement de cette suite est utile. On utilise à nouveau la commande *nSolve*, en reformulant la question pour faciliter les calculs du logiciel.

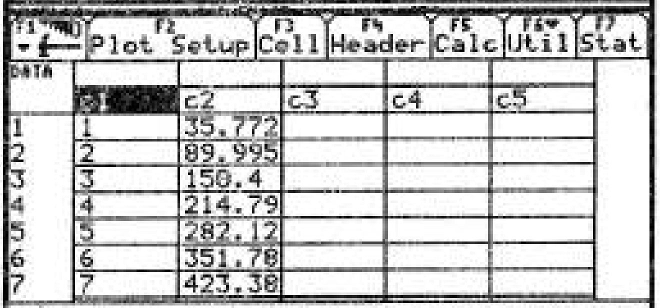
L'utilisation du logarithme permet de manipuler des nombres moins grands. Nous obtenons ainsi les premières valeurs de la suite (c_n) sous forme de tableau ou sous forme de graphique.

Nous pouvons observer un quasi-alignement des points apparents sur le graphique. Cette situation peut être analysée de plus près à l'aide des commandes d'ajustement linéaire de la calculatrice.

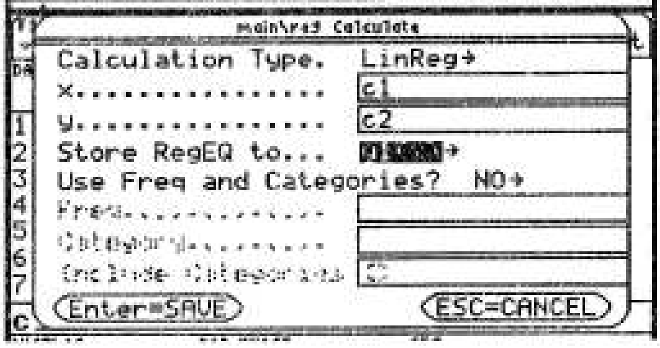


Cela suppose d'utiliser l'application *Data/matrix*, de reporter les points (n, c_n) dans un tableau et de faire un ajustement linéaire via le menu *F5Calc*, en choisissant la commande de régression linéaire (*LinReg*), avec en abscisse les valeurs de c1 et en ordonnée les valeurs de c2. Ne pas oublier de stocker l'équation de la droite de régression en y1 par exemple pour le tracé ultérieur.

Il reste à définir le nuage de points par le menu *F2 Plot Setup* (la colonne c1 en abscisse, c2 en ordonnée).

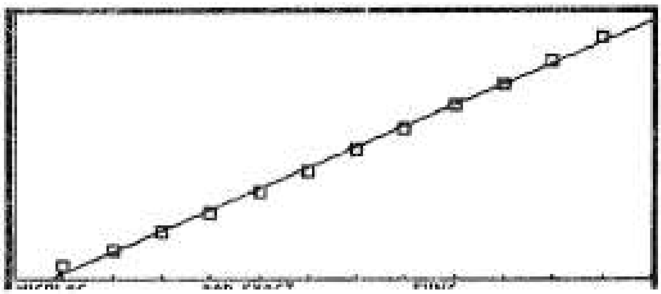


Après avoir choisi le mode *Fonction* dans le menu principal de la calculatrice et choisi une fenêtre adaptée aux valeurs de n et de la suite figurant dans les colonnes c1 et c2, il ne nous reste plus qu'à observer l'adéquation entre les points représentants la suite et la droite qui les ajuste (dernière copie d'écran ci-contre à droite).



L'ajustement est assez bon !

La pente de la droite est (en valeur approchée) 70, donnant ainsi une indication sur le rapport $\frac{c_n}{n}$ pour les premiers termes de la suite.



Peut-on en trouver une confirmation théorique ?

Il s'agit donc de trouver une suite (v_n) équivalente à (c_n), c'est-à-dire telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_n}{v_n} = 1$. Comme $\ln c_n = \frac{c_n}{10n}$, c'est-à-dire $\frac{c_n}{10n\ln c_n} = 1$, cela suppose que $\frac{v_n}{10n\ln v_n}$ converge vers 1. Nous pouvons commencer par tester la conjecture issue de l'observation : pourrait-on avoir équivalence entre c_n et $v_n = k.n$?

Cela supposerait que $\frac{v_n}{10n\ln v_n} = \frac{kn}{10n.\ln(kn)} = \frac{k}{10\ln(kn)}$ converge vers 1. Or, manifestement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{10\ln(kn)} = 0$. Donc il n'existe pas d'équivalent du type k.n pour la suite (c_n). L'étude graphique de la page précédente permet un ajustement des premiers termes de la suite par la fonction affine 70n, elle ne peut donc pas être prolongée au voisinage de l'infini : un équivalent de type affine est trop faible.

Essayons alors une suite du type kn^2 : $\frac{v_n}{10n\ln v_n} = \frac{kn^2}{10n.\ln(kn^2)} = \frac{kn}{10\ln(kn^2)}$.

Pour cause de domination des fonctions puissances sur les fonctions logarithmes au voisinage de l'infini, nous avons alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{kn}{10\ln(kn^2)} = +\infty$. Une suite du type kn^2 est donc un équivalent trop fort. On obtiendrait le même résultat avec toute suite du type n^a, avec $a > 1$.

Il faut donc trouver une suite supérieure aux suites kn et inférieure au suites n^a, avec $a > 1$. Une suite du type 10n.lnn peut-elle faire l'affaire ? Nous aurions alors :
$\frac{v_n}{10n\ln v_n} = \frac{10n.\ln n}{10n\ln(10n.\ln n)} = \frac{\ln n}{\ln 10 + \ln n + \ln\ln n}$; nous avons bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{10n\ln v_n} = 1$.

La suite 10n.lnn semble ainsi être un équivalent convenable pour la suite (c_n).

Le contrôle de ce résultat suppose d'observer l'évolution du rapport entre la suite et la suite (10n.lnn), ce que nous faisons ci-contre. Bien sûr il ne s'agit que d'une vérification : ce que l'on observe à distance finie (surtout pour la fonction logarithme) ne préjuge pas de ce qui se passe au voisinage de l'infini ! Le rapport des deux suites devrait converger vers 1. Disons avec une grande prudence que ce que nous observons ci-contre ne contredit pas le résultat théorique proposé...

```
✓ u1= nSolve(x = 10·n·ln(x), x) | x > 10
      ---------------------------------
               10·n·ln(n)
  ui1=
```

10.	2.8110905		
20.	2.431459		
30.	2.2791073		
40.	2.190632		
50.	2.130632		
60.	2.0862716		
70.	2.0516139		
1000.	1.6889878		
1100.	1.6808805		
2000.	1.6344165		
2100.	1.6309272		

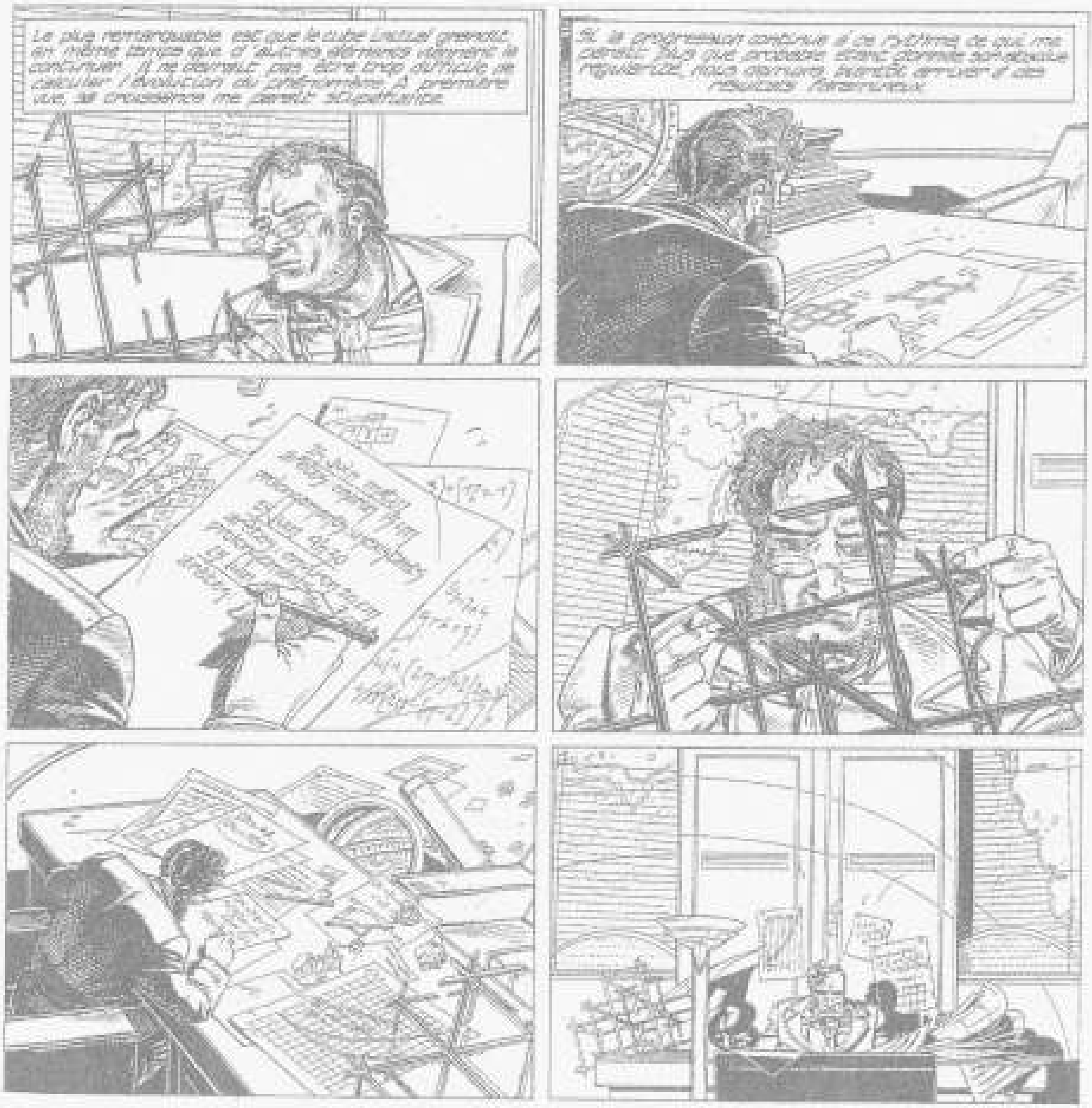
En guise de conclusion

On pourrait se poser la question : pourquoi avoir choisi d'étudier l'équation $e^x = x^{10n}$, et pas l'équation plus simple $e^x = x^n$, avec un exposant entier positif ?

- pour un exposant impair, il n'y aurait pas eu de racine négative à l'équation (en effet, sur $]-\infty, 0[$ la fonction puissance aurait été strictement négative) ;
- pour un exposant inférieur à 3, il n'y aurait eu qu'une racine positive à l'équation (voir le TP 9) ;

Le fait de prendre des exposants multiples de 10 supprime ces cas particuliers. Il existe ainsi toujours 3 solutions. De plus, prendre des exposants qui vont de 10 en 10 fait apparaître rapidement un conflit avec la calculatrice : dès l'exposant 20, elle ne "voit" plus la racine la plus grande, ce qui oblige à un effort de réflexion supplémentaire. Bref, aucun énoncé ne relève du hasard, en TP, comme au bac !

DÉFIS MATHÉMATIQUES



DÉFIS MATHÉMATIQUES...

"Comme on le voit, les mathématiques, contrairement à ce que tout le monde pense, ne sont pas une science de la rigueur, opposée aux sciences expérimentales qui seraient des sciences de l'intuition. Il y a autant d'intuition et de rigueur en mathématiques qu'en physique. Mais cette rigueur n'est pas le même.

En mathématiques, la rigueur est la démonstration formelle par les règles du raisonnement, alors que la rigueur pour un physicien est la vérification par l'expérience. Un physicien qui veut vérifier une théorie ne la démontre pas, il la vérifie expérimentalement.

Nous aussi d'ailleurs faisons des expériences, car, pour trouver une propriété, on fait de nombreux efforts sur des modèles approchés jusqu'à découvrir finalement le bon résultat. Ainsi, en classe de terminale, pour trouver la courbe décrite par un point, on cherche une situation particulière et les points particuliers de la courbe, ce qui aide beaucoup expérimentalement à trouver le résultat final.

L'intuition est chez nous fondamentale. On contrôle par la rigueur, mais on trouve par l'intuition. C'est l'intuition qui me pousse en avant, et j'ai tendance à aller très vite et de plus en plus loin, sans beaucoup assurer mes arrières. A un moment donné, je m'embrouille ; l'intuition n'est plus suffisante.

Je reviens alors en arrière, utilise la démonstration rigoureuse, et l'écris même. A partir de ce moment-là, tout est bien établi ; les conséquences décrites un peu vite à l'origine n'étaient pas forcément vraies, mais je sais maintenant que je peux continuer, me reposant sur des bases solides."

Laurent Schwartz, 1997. *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Éditions Odile Jacob.

Cette citation de l'un des mathématiciens les plus marquants du siècle est une bonne entrée dans ce nouveau chapitre. Alors que les TP constituent une institution dans la classe (une heure hebdomadaire, des binômes formés pour l'année, des rapports de recherche systématiques), les "défis mathématiques" correspondent à un travail beaucoup plus flou : l'espace laissé à l'initiative, à l'intuition, au rythme propre de chacun est plus grand.

Une question est lancée dans la classe, les élèves qui le souhaitent s'en emparent. Le temps de traitement n'est pas fixé à l'avance. Des élèves trouvent des réponses partielles : ils vont "beaucoup plus vite", "beaucoup plus loin", "s'embrouillent parfois", comme le décrit Laurent Schwartz. Ces éléments de solution, pour être communiqués à la classe, doivent être formulés clairement. Cela permet de relancer la recherche, "en se reposant sur des bases solides". Certaines démarches débouchent in fine sur une solution globale, d'autres non. Quand le travail est jugé assez avancé, les productions des uns et des autres, accompagnées du point de vue du professeur, sont distribuées à la classe, qui peut reprendre la recherche, corrigés et crayon en main.

On trouvera ci-après l'énoncé des 5 défis lancés à la classe, accompagné des solutions communiquées (les solutions rédigées par le professeur sont intitulées "éléments de réflexion sur le défi n°...). Cela ne constitue que la partie émergée de l'iceberg : des embryons de solutions, des pistes de recherche, ont été avancés au cours de l'année par tel ou tel élève. Il était très difficile dans le cadre de cette publication "à chaud" d'en faire l'inventaire ou l'historique.

On considérera donc les auteurs des pages qui suivent comme les porte paroles, ou plutôt les "porte recherche" d'une classe en mouvement. Cela ne veut pas dire bien sûr que tous les élèves se sont investis dans le processus de recherche de la même façon. Mais on peut supposer (espérer ?) que l'esprit de recherche n'a laissé personne indifférent et que toute la classe a profité de cette dynamique favorisée par les "défis".

Défi n°1
De la limitation nécessaire de l'expansion des reines sur un territoire donné

Les questions...

On veut placer des reines sur un échiquier ordinaire, formé de 64 cases, de telle sorte que chacune d'entre elles soit hors de portée de toute autre. En d'autres termes, il s'agit de disposer des reines de telle façon que deux d'entre elles ne soient jamais situées sur une même ligne parallèle à l'un des bords ou à l'une des diagonales de l'échiquier.

Déterminer toutes les manières de disposer ainsi le plus grand nombre de reines.

Un peu d'histoire...

Ce problème a été posé pour la première fois à K.F. Gauss (mathématicien allemand du siècle dernier). Cet illustre mathématicien avait proposé deux réponses successives (fausses toutes deux) avant de trouver la solution convenable (l'erreur est humaine...). La question rebondit quelques dizaines d'années plus tard et fit l'objet d'une communication au congrès de "l'Association Française pour l'Avancement des Sciences" ... à Montpellier en Août 1879.

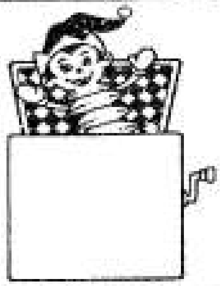
Et les réponses...

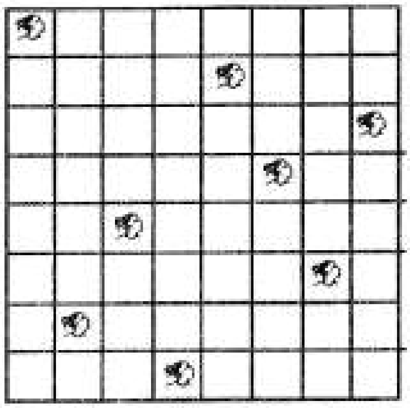
On trouvera dans les pages qui suivent des éléments de réponse à ce défi, proposés par :

- M. de La Noë, capitaine du Génie ;
- Jean-François Vincent.

Eléments de réflexion sur le défi n°1

Ce texte a été revu, corrigé et complété par Cédric Bonnet et Davy-Louis Versace





Une première réponse :
le nombre maximal de reines sur un échiquier

Le schéma ci-contre le prouve, on peut placer 8 reines hors de portée les unes des autres. C'est bien le nombre maximal, puisque l'on ne peut pas placer plus d'une reine par ligne (ou par colonne).

Le problème se ramène donc à un dénombrement des dispositions possibles de huit reines hors de portée les unes des autres sur un échiquier

Une simplification nécessaire : le codage des solutions

On notera la solution ci-dessus 15863724 (le premier chiffre indique la localisation de la reine sur la première ligne, le deuxième chiffre indique la localisation de la reine sur la deuxième ligne, etc.

Une solution informatique

Il s'agit finalement de réaliser une permutation des chiffres 12345678 (on est ainsi sûr qu'il n'y aura pas de répétition de reines ni sur une ligne, ni sur une colonne).

Soit f(1)-f(2)-f(3)-f(4)-f(5)-f(6)-f(7)-f(8) un tel arrangement. Pour éviter les rencontres diagonales, on remarquera qu'il suffira d'imposer la condition :

$|i-j| \neq |f(i) - f(j)|$ (pour i, j nombres entiers distincts entre 1 et 8).

La question devient alors : parmi les 8! arrangements possibles, combien respectent une telle condition ? C'est la voie suivie par la solution de Jean-François Vincent (voir plus loin), nous n'insistons donc pas davantage sur ce point.

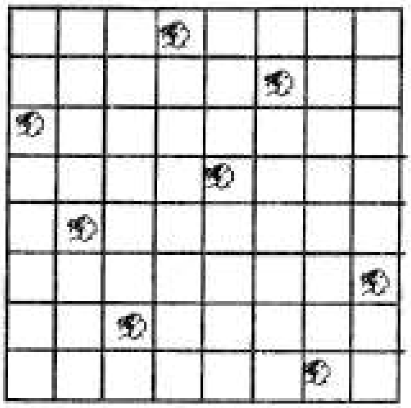
Un dénombrement astucieux

Le lecteur curieux pourra trouver dans les récréations mathématiques d'Édouard Lucas[1] plusieurs méthodes pour traiter ce problème. Nous reproduisons ci-dessous, dans sa forme même, la solution due à un capitaine du Génie, Monsieur de La Noë, présentée au congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Montpellier en 1879.

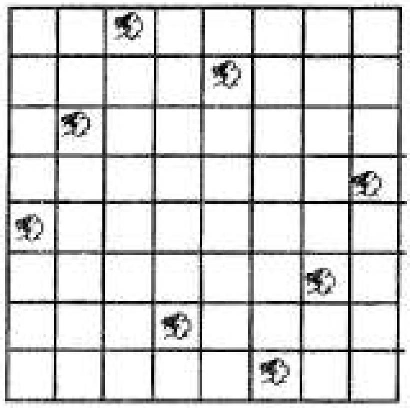
Une première remarque simplificatrice

Certaines solutions en engendrent naturellement d'autres : par rotation (trois rotations possibles) ou symétrie axiale : il existe 8 isométries qui laissent un carré globalement invariant (cf. le cours sur les isométries). On observera que certaines solutions permettent ainsi d'obtenir 7 autres solutions adjointes (nous dirons qu'il s'agit de solutions irrégulières), d'autres solutions n'admettent que 3 solutions adjointes (nous dirons qu'il s'agit de solutions semi-régulières).

[1] *Récréations mathématiques*, par Edouard Lucas, Librairie Scentifique et Technique Albert Blanchard, réédité en 1960).



Une solution irrégulière



Une solution semi-régulière

Le lecteur pourra vérifier que la solution irrégulière engendre bien, à partir des rotations ou symétries, 7 autres solutions, alors que la solution semi-régulière n'en engendre que 3.

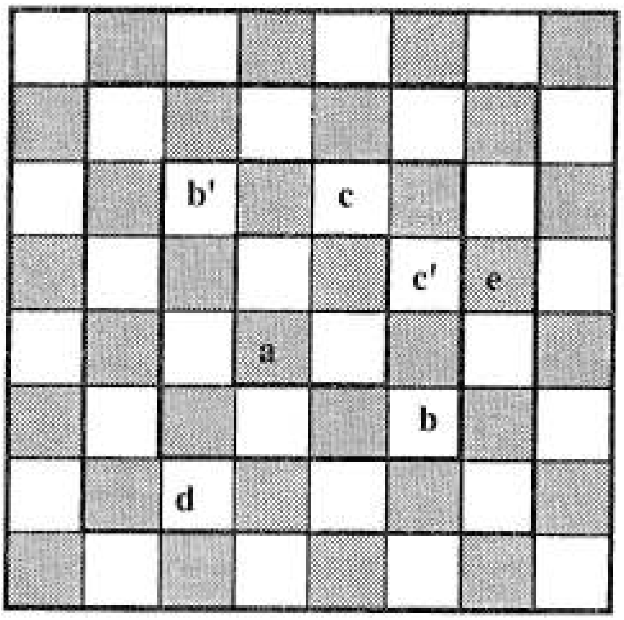
On pourra noter aussi que :

- la solution semi-régulière est codée 35281746 ;
- le nombre renversé s'écrit 64718253 code une autre solution adjointe ;
- la somme des deux nombres est égale à 99999999 ;
- seules les solutions semi-régulières possèdent cette propriétés.

Ce qui précède permet une économie de comptage : nous ne compterons que les solutions élémentaires. Pour obtenir le nombre total de solutions, nous multiplierons le nombre de solutions irrégulières par 8 et le nombre de solutions semi-régulières par 4.

La stratégie des bandes

Cette méthode consiste dans la décomposition de l'échiquier en carrés concentriques (cf. schéma ci-dessous) ; le premier forme un carré intérieur ou *première bande* de 4 cases, dont l'une est a ; nous désignerons sous le nom de *deuxième bande* l'espace formé par les 12 cases qui entourent le premier carré ; par *troisième bande*, l'espace formé par les 20 cases qui entourent la deuxième bande ; par *quatrième bande*, l'espace formé par les 28 cases qui entourent la troisième bande.



Partons de la première bande, et plaçons une reine en a ; on observera que cette reine peut occuper, après un seul déplacement, 28 cases de l'échiquier, nombre toujours égal au nombre de cases de la bande extérieure de l'échiquier ; dans la deuxième bande, une reine commande 26 cases ; dans la troisième 24 et dans la quatrième 22. Maintenant, cherchons à placer le plus grand nombre de reines sur la seconde bande, de toutes les manières possibles. On voit que l'on peut placer deux reines sur la deuxième bande en b et c, ou bien en b' et c' ; il est inutile de conserver, pour l'instant, cette deuxième disposition symétrique de la première.

En partant de (abc), on placera le plus de reines possibles sur la troisième bande, en d et e par exemple ; il restera donc à placer trois reines sur la bande extérieure, et l'on constatera facilement que cela est impossible ; donc, en plaçant les cinq reines (abcde), on n'arrive à aucune solution. On essayera donc de n'en conserver qu'une seule sur la troisième bande, soit en d, soit en e, et l'on verra qu'aucune de ces dispositions ne conduit à une solution ; d'ailleurs, on ne peut placer 5 reines sur une seule bande ; par conséquent, le commencement (abc) ne peut conduire à aucune solution.

En conservant la reine a, on essayera successivement, tout en maintenant b ou c, de placer les 6 autres reines sur les deux dernières bandes ; mais on ne trouve aucune autre solution ; d'où l'on tire cette conclusion que les deux premières bandes ne peuvent être simultanément occupées par les reines.

On conserve encore la reine a, et l'on cherche à placer le plus de reines sur la troisième bande ; on peut en placer trois de diverses manières ; puis en excluant les solutions adjointes, on place les quatre reines sur la quatrième bande ; on trouve ainsi les quatre solutions simples irrégulières :

35481726 **46152837** **48157623** **42751863**

Nous dirons que ces solutions correspondent au type 1034 (c'est-à-dire 1 reine sur la première bande, 0 reine sur la deuxième bande, 3 reines sur la troisième bande, 4 reines sur la quatrième bande).

En supprimant la reine a et en plaçant trois reines, puis deux, puis une seule sur la seconde bande, on trouve les solutions simples irrégulières :

72631485	pour le type 0314
57263148 et 16837425	pour le type 0233
61528374, 57263184 et 51468273	pour le type 0224
58417263	pour le type 0134

Enfin, si l'on ne place aucune reine sur les deux premières bandes, on trouve la solution semi-régulière que nous avons déjà présenté ci-dessus **35281746**, qui appartient au type 0044. Ainsi le problème des huit reines comporte 12 solutions simples dont 11 irrégulières et 1 semi-régulière. Au total donc : 11.8 + 4 = **92 solutions.**

<u>Remarque 1. Errare humanum est</u>

Le mathématicien Gauss, a qui le problème avait été soumis, avait trouvé d'abord 76, puis 72, avant d'aboutir à 96 solutions. Même les plus grands peuvent se tromper !

<u>Remarque 2. Pour les mémoires défaillantes</u>

Édouard Lucas indique un procédé mnémotechnique pour retrouver une des solutions : les premières lettres de la phrase donnent (presque) le code.

C'est	*difficile*	*si*	*tu*	*veux*	*que*	*huit*	*cadrent.*
Sept	*deux*	*six*	*trois*	*un*	*quatre*	*huit*	*cinq*

<u>Remarque 3. Sur la méthode</u>

La méthode mise en oeuvre par De la Noë repose simplement sur l'organisation rigoureuse du comptage des solutions. Une telle méthode est précieuse : si on voulait passer en revue toutes les permutations possibles des huit premiers chiffres, on aurait 8! = 40320 cas de figures à examiner ! Un tel examen est possible informatiquement (cf. l'étude de J.-F. Vincent qui suit). A la main, l'organisation du dénombrement exige :

- la mise en place de procédures d'économies (toute solution en engendre d'autres qu'il est inutile de compter) ;
- la mise en place de procédures de classification (les solutions irrégulières et semi-régulières, le découpage de l'échiquier en bandes).

Tout compter et ne rien compter deux fois, c'est la base du dénombrement !

Echec et Maths

Contribution de:
Jean-François VINCENT

Défi n°1
samedi 25 octobre 1997

Il s'agissait de déterminer toutes les manières de placer 8 dames sur un échiquier de telle façon qu'elles soient hors de portée les unes des autres. On a donc recours à un codage: on attribue à chaque dame un numéro compris entre 1 et 8 qui correspond à sa position sur la ligne. Chaque chiffre n'étant utilisable qu'une seule fois, on a donc 8!= 40320 possibilités à examiner.

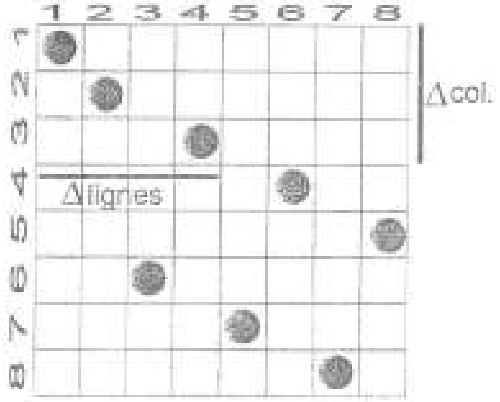
exemple de configuration: 1 2 4 6 8 3 5 7

...

1° ligne, colonne 1

2° ligne, colonne 2

3° ligne, colonne 4



Pour vérifier si une configuration est bonne, on doit effectuer un calcul simple qui montre si les deux dames considérées sont sur la même diagonale:

$|i-j|=|f(i)-f(j)|$ montre que les deux dames sont sur la même diagonale. i et j représentent le numéro des lignes tandis que f(i) et f(j), celui des colonnes.

Finalement, on cherche les configurations où $|\Delta colonnes| \neq |\Delta lignes|$.

Plusieurs solutions de programmation sont dès lors envisageables...

☞ cf page suivante...

3 programmes à l'essai...

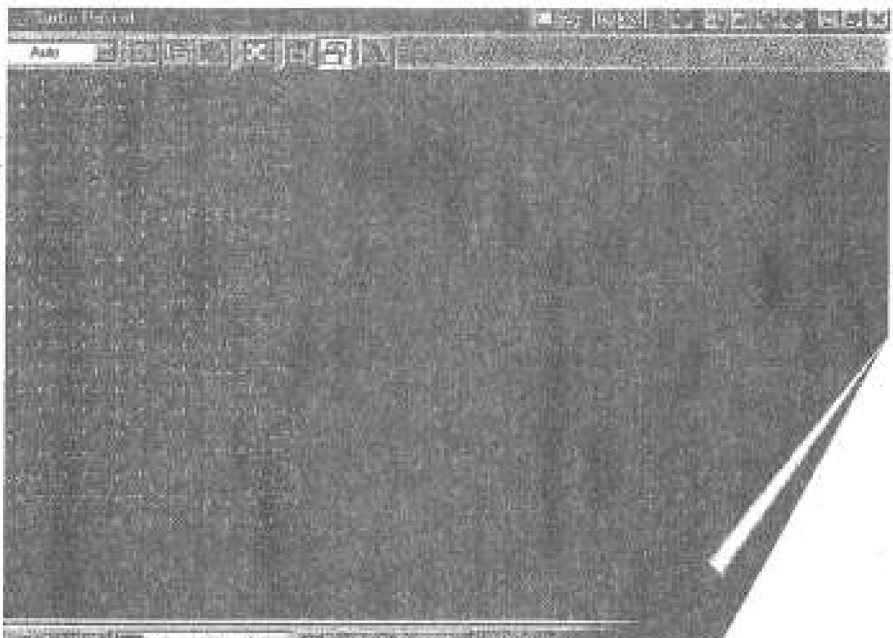
- un premier programme est réalisé sur une calculatrice SHARP EL-9300 (dont la vitesse du processeur n'est pas connue). Le langage utilisé est proche du Basic, mais très rudimentaire: il ne possède pas par exemple de boucles de répétition, et les structures conditionnelles nécessitent le renvoi à des "Label".

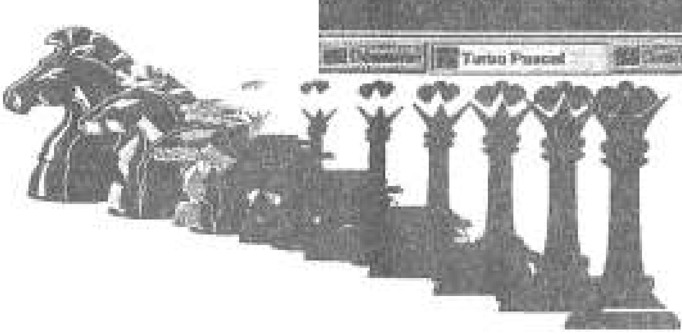
Bilan: on peut estimer qu'il lui faudrait 2.3 ans au minimum pour traiter les 87654321-12345678 cas possibles! (on ne peut pas ici faire appel à un arrangement des nombres).

- les deux programmes suivants sont traités en Turbo Pascal 7. Leur conception différente détermine grandement le temps d'attente des résultats.

Voici donc une ébauche du premier, accompagnée de son explication.

Une photo d'écran de l'exécution du programme utilisé pour résoudre l'exercice.





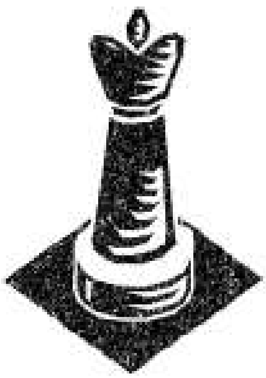
voir programme en page 154

```
program chess;

[...]

BEGIN
    clrscr;
    writeln('entrez le nombre de cas à examiner');
    readln(nb);
    for x:=1 to nb do begin
       a:=int(nb/10000000);
       b:=int((nb-a*10000000)/1000000);
       c:=int((nb-a*10000000-b*1000000)/100000);
       d:=int((nb-a*10000000-b*1000000-c*100000)/10000);
       e:=int((nb-a*10000000-b*1000000-c*100000-d*10000)/1000);
       f:=int((nb-a*10000000-b*1000000-c*100000-d*10000-e*1000)/100);
       g:=int((nb-a*10000000-b*1000000-c*100000-d*10000-e*1000-f*100)/10);
       h:=int(nb-a*10000000-b*1000000-c*100000-d*10000-e*1000-f*100-g*10);
       if a=b then else
       if a=c then else
       if a=d then else
       if a=e then else
       if a=f then else
       if a=g then else
       if a=h then else

       [...]

       if d=h then else
       if e=f then else
       if e=g then else
       if e=h then else
       if f=g then else
       if f=h then else
       if g=h then else begin
       if lignes=20 then begin writeln('tapez une touche');
                         keypressed;
                         clrscr;
                    end;

       [...]

       end;
       end;

       [...]

end.
```

Le recours à des calculs pour déterminer les différentes parties du nombre à analyser par la suite est la source d'une grosse perte de temps.

L'exécution d'un tel programme nécessiterait au moins 9 heures de calcul sur un PC à base de Cyrix 6x86 PR166+.

Il faut donc optimiser ce programme...



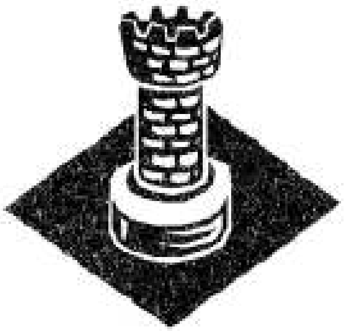
FAST CHESS...

```
program fastchess;
uses crt;
var
 a,b,c,d,e,f,g,h,lignes,attente: shortint;

begin
   clrscr;
   lignes:=0;
   for a:=1 to 8 do begin
      for b:=1 to 8 do begin
         if b=a then else begin
           for c:=1 to 8 do begin
              if c=a then else
              if c=b then else begin
                for d:=1 to 8 do begin
                   if d=a then else
                   if d=b then else
                   if d=c then else begin
                     for e:=1 to 8 do begin
                        if e=a then else
                        if e=b then else
                        if e=c then else
                        if e=d then else begin
                          for f:=1 to 8 do begin
                             if f=a then else
                             if f=b then else
                             if f=c then else
                             if f=d then else
                             if f=e then else begin
                               for g:=1 to 8 do begin
                                  if g=a then else
                                  if g=b then else
                                  if g=c then else
                                  if g=d then else
                                  if g=e then else
                                  if g=f then else begin
                                    for h:=1 to 8 do begin
                                       if h=a then else
                                       if h=b then else
                                       if h=c then else
                                       if h=d then else
                                       if h=e then else
                                       if h=f then else
                                       if h=g then else begin
{*************************************************************}
   if abs(b-a)=1 then else
   if abs(c-a)=2 then else
   if abs(d-a)=3 then else
   if abs(e-a)=4 then else
   if abs(f-a)=5 then else
   if abs(g-a)=6 then else
   if abs(h-a)=7 then else

   if abs(c-b)=1 then else
   if abs(d-b)=2 then else
   if abs(e-b)=3 then else
   if abs(f-b)=4 then else
   if abs(g-b)=5 then else
   if abs(h-b)=6 then else
```

Le programme est ici présenté dans son intégralité. Malgré son apparente lourdeur, il est extrêmement rapide, puisque l'analyse de tous les cas prend moins d'une seconde!

La structure du programme permet de passer à l'étape suivante dès qu'une condition n'est pas remplie. D'autre part, on n'a pas recours ici à des calculs gourmands mais simplement à une série de nombres de 1 à 10.

Exemple: si a=5 et d=5
Le programme ne va pas s'intéresser au lettres e, f, g et h et va passer directement au cas où d=6...



Si les 8 chiffres sont différents, on peut passer à l'examen des positions respectives des pièces. Une fois de plus, dès que deux pièces sont sur la même diagonale, on quitte la structure pour passer à un autre nombre.

```
if abs(d-c)=1 then else
if abs(e-c)=2 then else
if abs(f-c)=3 then else
if abs(g-c)=4 then else
if abs(h-c)=5 then else

if abs(e-d)=1 then else
if abs(f-d)=2 then else
if abs(g-d)=3 then else
if abs(h-d)=4 then else

if abs(f-e)=1 then else
if abs(g-e)=2 then else
if abs(h-e)=3 then else

if abs(g-f)=1 then else
if abs(h-f)=2 then else

if abs(h-g)=1 then else begin
  writeln('le nombre est bon:',a,b,c,d,e,f,g,h);
  lignes:=lignes+1;
  if lignes=20 then begin
    writeln('appuyer touche puis enter');
    lignes:=0;
    readln(attente);
    clrscr;
    end;
end;
```

Mes connaissances tout de même un peu limitées du Turbo Pascal ne m'ont pas permis de stocker directement les résultats dans un tableau.
J'ai donc utilisé des copies d'écrans pour ensuite recopier les bonnes réponses.

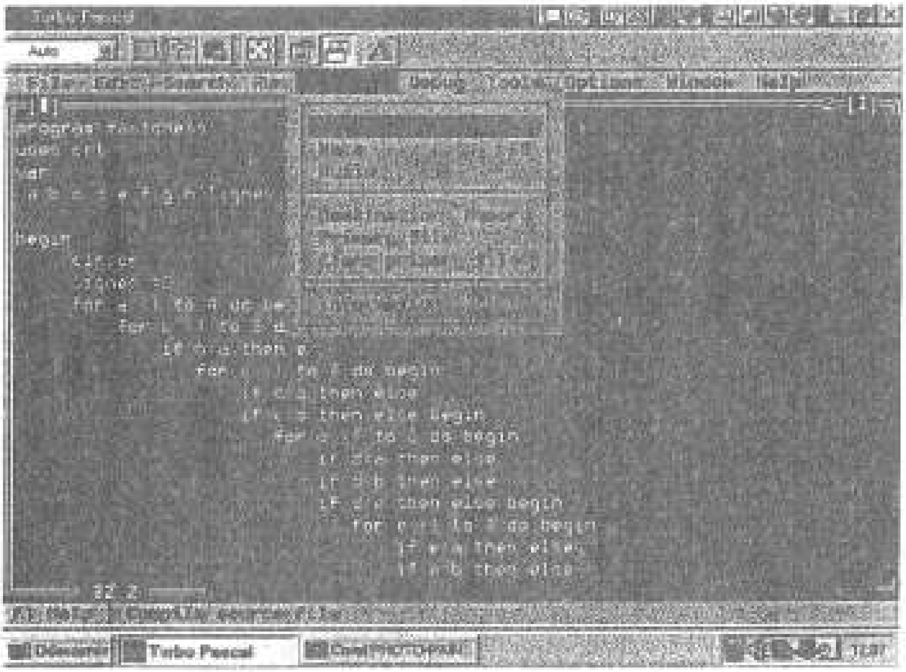
```
{**************************************************************}

                                        end;
                                      end;
                                    end;
                                  end;
                                end;
                              end;
                            end;
                          end;
                        end;
                      end;
                    end;
                  end;
              end;
            end;
  end;
  writeln('appuyer touche');
  readln(attente);
  clrscr;
  writeln('le programme est terminé et il reste à vérifier...');
  delay(10000);

end.
```

LISTE DES DISPOSITIONS POSSIBLES

Le programme FastChess recense 92 configurations possibles:

15863724	36275184	46831752	57142863	
16837425	36418572	47185263	57248136	64285713
17468253	36428571	47382516	57263148	64713528
17582463	36814752	47526138	57263184	64718253
24683175	36815724	47531682	57413862	68241753
25713864	36824175	48136275	58413627	71386425
25741863	37285146	48157263	58417263	72418536
26174835	37286415	48531726	61528374	72631485
26831475	38471625	51468273	62713584	73168524
27368514	41582736	51842736	62714853	73825164
27581463	41586372	51863724	63175824	74258136
28613574	42586137	52468317	63184275	74286135
31758246	42736815	52473861	63185247	75316824
35281746	42736851	52617483	63571428	82417536
35286471	42751863	52814736	63581427	82531746
35714286	42857136	53168247	63724815	83162574
35841726	42861357	53172864	63728514	84136275
36258174	46152837	53847162	63741825	
36271485	46827135	57138642	64158273	

Le programme n'a pas été abordé du côté de la TI 92, mais devrait l'être prochainement.



Une photo d'écran de Turbo Pascal 7

Du côté de la TI-92

Jean-François
VINCENT

Le langage de programmation TI Basic est à la fois très proche et différent du Pascal: les structures générales y sont les mêmes, mais pas la saisie des arguments...

Ainsi, il a fallu se plonger un peu dans le mode d'emploi pour découvrir ce langage finalement simple à maîtriser.

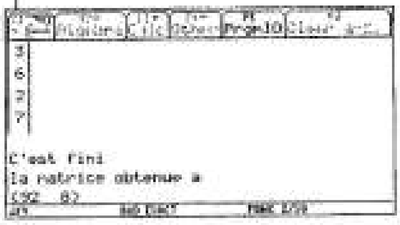
Résultats

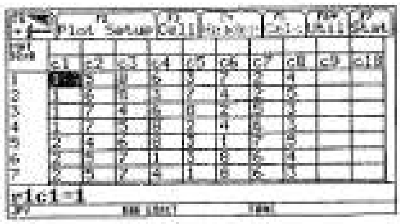
Un premier programme directement issu de la version Turbo Pascal est adapté à la calculatrice. Cependant, il s'avère excessivement long. Il faut donc l'adapter à la vitesse (ou plutôt "lenteur"?) de la machine...

Voici donc le meilleur programme: tout a été optimisé pour gagner en rapidité, et le résultat ne se fait plus trop attendre !

```
Fchess2()
Prgm
Local a,b,c,d,e,f,g,h,m,reps,pp
ClrIO
Disp "Programme en cours"
newMat(8,1)→reps
For a,1,8

For b,1,8
If b≠a Then
If abs(b-a)≠1 Then

For c,1,8
If c≠a Then
If c≠b Then
If abs(c-a)≠2 Then
If abs(c-b)≠1 Then

For d,1,8
If d≠a Then
If d≠b Then
If d≠c Then
If abs(d-a)≠3 Then
If abs(d-b)≠2 Then
If abs(d-c)≠1 Then

For e,1,8
If e≠a Then
If e≠b Then
If e≠c Then
If e≠d Then
If abs(e-a)≠4 Then
If abs(e-b)≠3 Then
If abs(e-c)≠2 Then
If abs(e-d)≠1 Then

For f,1,8
If f≠a Then
If f≠b Then
If f≠c Then
If f≠d Then
If f≠e Then
If abs(f-a)≠5 Then
If abs(f-b)≠4 Then
If abs(f-c)≠3 Then
If abs(f-d)≠2 Then
If abs(f-e)≠1 Then

For g,1,8
If g≠a Then
If g≠b Then
If g≠c Then
If g≠d Then
If g≠e Then
If g≠f Then
If abs(g-a)≠6 Then
If abs(g-b)≠5 Then
If abs(g-c)≠4 Then
If abs(g-d)≠3 Then
If abs(g-e)≠2 Then
If abs(g-f)≠1 Then

For h,1,8

If h≠a Then
If h≠b Then
If h≠c Then
If h≠d Then
If h≠e Then
If h≠f Then
If h≠g Then
If abs(h-a)≠7 Then
If abs(h-b)≠6 Then
If abs(h-c)≠5 Then
If abs(h-d)≠4 Then
If abs(h-e)≠3 Then
If abs(h-f)≠2 Then
If abs(h-g)≠1 Then

newMat(8,1)→m
a→m[1,1]
```

```
b→m[2,1]
c→m[3,1]
d→m[4,1]
e→m[5,1]
f→m[6,1]
g→m[7,1]
h→m[8,1]
augment(reps,m)→reps
Disp m

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndIf
EndIf
EndFor

EndIf
EndIf
EndFor

EndFor

reps^T→reps
rowDim(reps)→pp
subMat(reps,2,1,pp,8)→result1
Disp "C'est fini","la matrice obtenue a",dim(result1)
EndPrgm
```





Quelques mots :

- le programme met **<u>20 minutes</u>** pour s'exécuter entièrement. C'est donc un temps raisonnable pour ce problème.
- le résultat est stocké dans une matrice (*résult1*) qui peut être facilement consultée à l'aide de l'éditeur de matrices.
- le programme renvoie à la fin la dimension de la matrice, donc le nombre de solutions du problème (92).

Comparaison avec un PC

Pour comparer efficacement la vitesse du processeur de la TI-92 dans l'exécution de structures conditionnelles et de boucles, on a enlevé toutes les lignes où interviennent des matrices.

On obtient alors un temps d'exécution de **<u>17 minutes 54" 60 sur TI-92.</u>**

Le même programme est lancé sur PC, d'abord en Turbo Pascal 7 puis compilé en fichier *exe*. Devant la rapidité d'exécution, il a fallu le lancer 1 million de fois pour obtenir une mesure fiable. Résultat : sur un PC à base de Pentium 200, il ne faut que **<u>0.1178ms</u>** pour exécuter une fois le programme ! !

La TI-92 est donc **9 millions de fois plus lente** que le PC, avec son processeur à 10MHz. Moralité : mieux vaut ne pas s'engager dans des programmes trop évolués... On voit également que le processeur n'est pas géré au mieux, et que le langage TI Basic pénalise les performances de la machine pour les programmes. Mais c'est là un vaste sujet !

Défi n°2
De l'importance
de l'inspiration des grands Anciens

La question

La légende veut qu'Archimède (≈ -250), au moment où il découvrit la poussée qui depuis porte son nom, se soit écrié : "Eurêka !". En prononçant ce mot, il expira un certain nombre de molécules de gaz ; nous les appellerons les molécules A. Depuis lors, l'atmosphère est ainsi composée de molécules A et de molécules $\bar{A}$.

Lors d'une de vos inspirations, posez-vous la question suivante : quelle est la probabilité que vous ayez inspiré au moins une molécule A ?

Quelques éléments matériels pour la résolution

- on admettra que l'air contient 3.10^{22} molécules par litre ;
- on admettra que l'on inspire et expire un litre d'air à chaque respiration ;
- on admettra que la couche atmosphérique est homogène, d'une épaisseur de 10km et que la Terre a un rayon de 6000km ;
- on admettra que les molécules A, expirées le fameux jour par Archimède, sont également réparties dans l'atmosphère ; cette hypothèse n'est nullement déraisonnable après deux millénaires : on peut considérer que la diffusion moléculaire, les grands mouvements convectifs de l'atmosphère, le brassage dû à la turbulence assurent une telle répartition (tout ceci ne relève pas de la fantaisie pure : cf., pour toute assurance théorique, Brezin E, 1994, Cours de physique statistique, Ecole Polytechnique).

Et les réponses...

On trouvera dans les pages qui suivent des éléments de réponse à ce défi, proposés par :

- Jean-François Vincent ;
- Luc Trouche.

Défi n°2

Mardi 2 décembre 1997

Contribution de :

Jean-François VINCENT

Archimède a eu l'audace en ≈-250 de s'écrier « Euréka ! » en découvrant la célèbre poussée dans les liquides et les gaz qui depuis porte son nom. Cette célèbre phrase a engendré ≈2347 ans plus tard un problème qui ne l'est pas moins :

En considérant que notre regretté personnage à rejeté un litre d'air contenant lui-même 3.10^{22} molécules, quelle est la probabilité d'en ingérer une aujourd'hui, sachant que l'on estime qu'au bout de 2000 ans, elles se sont également réparties dans l'atmosphère ?

Ce problème semble d'un premier abord évident. Cependant, on se rappelle alors vite que le silence est d'or...

▪ Première étape : savoir combien l'atmosphère renferme de molécules.

On fait tout simplement appel à la formule du volume de la boule, sachant que l'on a un nombre entier de molécules. La formule ayant recours au nombre π, on utilise la commande *Int()* qui va arrondir le résultat à l'entier le plus proche.

On a donc : $Int\left(\frac{4}{3}\pi\left(6010.10^{4^3}-6000.10^{4^3}\right).3.10^{22}\right) \rightarrow v$

La puissance 4 permet de convertir le volume en litres.

Il faut alors mettre le problème en équation :

Il y a équiprobabilité dans le choix des molécules, puisque celles-ci sont également réparties dans l'atmosphère.

Un première tentative malheureuse consistait à utiliser les C_n^p : la formule $\frac{C_{v-3.10^{22}}^{3.10^{22}}}{C_v^{3.10^{22}}}$ pour obtenir la probabilité de l'événement contraire est beaucoup trop complexe, car elle fait intervenir des factorielles immenses.

Il faut donc considérer une loi binomiale, id est supposer que l'on inspire les molécules les unes après les autres. On utilise donc une loi binomiale de paramètres $(3.10^{22},p)$ pour obtenir la probabilité de l'événement contraire : on cherche à obtenir 0 succès dans la répétition de 3.10^{22} épreuves à deux issues, avec $p(S) = p = \frac{3.10^{22}}{v}$.

On obtient ainsi la formule : $C_{3.10^{22}}^{0} p^0 (1-p)^{3.10^{22}} = (1-p)^{3.10^{22}}$

On sait que 1-p est très proche de 1, mais l'élévation à une telle puissance est incalculable par une Ti-92. Il faut donc recourir aux propriété des logarithmes pour résoudre l'équation :

$$3.10^{22} \ln(1-p) = \ln(x)$$

Comme on est au voisinage de 1, on a : $\ln(x) \leq x-1$. En posant (1-p)=x, on obtient successivement :

$$\ln(1-p) \leq -p$$
$$\ln(1-p) \leq -p.\ln(e)$$
$$3.10^{22} \ln(1-p) \leq -p.\ln(e).3.10^{22}$$
$$\ln\left((1-p)^{3.10^{22}}\right) \leq \ln\left(e^{-p.3.10^{22}}\right)$$
$$(1-p)^{3.10^{22}} \leq e^{-p.3.10^{22}},$$

car la fonction logarithme est strictement croissante

Or on trouve $-p.3.10^{22} \approx -6.6204158$

Pour trouver $p(A)=1-(1-p)^{3.10^{22}}$, on utilise :

$$-(1-p)^{3.10^{22}} \geq -e^{-p.3.10^{22}}$$
$$1-(1-p)^{3.10^{22}} \geq 1-e^{-p.3.10^{22}}$$

Soit : $p(A) \geq 1-e^{-p.3.10^{22}}$ donc $p(A) \geq 0.998667123387$ *(on utilise le mode approx)*

En fait, on est ici tellement proche de 1 que l'on peut poser : $p(A)=0.998667123387$

Goûtez donc cette cuvée -250 d'air Archimède !

Chercher des indices... pour résoudre le mystère : les mathématiques !

P.S. On sait aujourd'hui que les atomes meurent au bout d'un certain nombre d'années. On aurait donc pu prendre en compte ces tragiques disparitions dans le problème.

Eléments de réflexion sur le défi n°2

Ce texte a été revu, corrigé et complété par Olivier Clua et Geneviève Ethève

Prologue

<u>Où, sur la route d'Archimède, l'on rencontre Bernouilli</u>

Le volume de l'atmosphère est $\frac{4}{3}\pi(6010^3\text{-}6000^3) = 4{,}5.10^9$ km^3 = $4{,}5.10^{21}$ litres

(on rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$ et que la correspondance entre le système métrique et le litre est donnée par : 1 litre = 1dm^3).

Il y a donc, environ, puisque tout le gaz expiré par Archimède a été brassé dans l'atmosphère, $\frac{3.10^{22}}{4{,}5.10^{21}} = 6$ molécules A par litre d'atmosphère. Lors d'une inspiration, nous allons ingérer un litre d'air, c'est-à-dire successivement (si l'on peut dire) 3.10^{22} molécules. On peut considérer, vu l'importance du réservoir d'air disponible, les évènements successifs comme indépendants[2].

Nous nous intéressons à l'évènement E : "ingérer au moins une molécule A". Cet évènement est en fait assez complexe : il est réalisé si l'on ingère soit une, soit deux, soit... molécules A. Il est donc raisonnable de s'intéresser à l'évènement contraire $\overline{E}$: "n'ingérer aucune molécule A". Cet évènement contraire est réalisé si la première molécule ingérée n'est pas une molécule A et si la deuxième molécule ingérée n'est pas une molécule A et si la troisième molécule ingérée, etc.

La probabilité que la première molécule ingérée soit une molécule A est $\frac{6}{3.10^{22}}$ c'est-à-dire 2.10^{-22}. La probabilité que ce ne soit pas une molécule A est donc $[1\text{-}\ 2.10^{-22}]$. Idem pour la deuxième molécule ingérée. Pour cause d'indépendance des évènements successifs, on dispose ainsi de $p(\overline{E}) = [1\text{-}2.10^{-22}]^{3.10^{22}}$.

Théoriquement, le problème est fini :

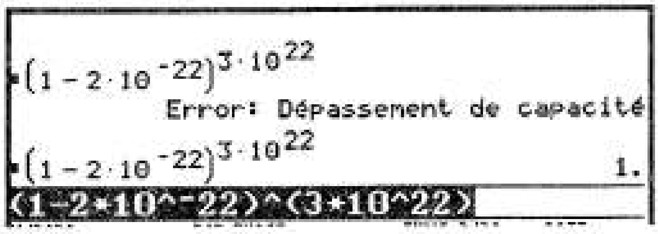
$$p(E) = 1 - [1\text{-}2.10^{-22}]^{3.10^{22}}.$$

Pratiquement, le problème se complique un peu : si l'on souhaite avoir une valeur approchée de p(E) (ce qui est bien le but du problème), on se heurte à quelques difficultés que nous allons examiner désormais.

---

2 Ne pas considérer ces évènements comme indépendants nous aurait contraints à utiliser des combinaisons. Il aurait fallu ainsi prendre en compte toutes les façons de "choisir" 3.10^{22} molécules parmi toutes les molécules de l'atmosphère. Les calculs auraient été inextricables. Il a été vu en cours que,dans le cadre de ces tirages dans de "grands réservoirs" sans remise, la loi de Bernouilli constituait une approximation raisonnable de la probabilité. D'où le choix fait ici.

Où l'on rencontre quelques difficultés inopinées



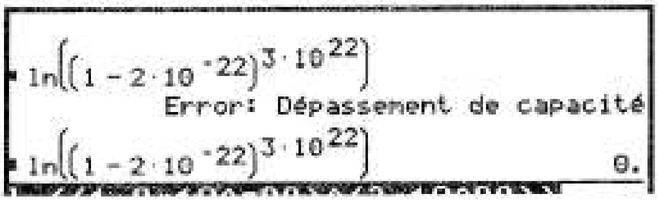
Les grands nombres que l'on manipule ici font que la calculatrice manifeste quelques réticences pour le calcul de $p(\bar{E})$

- elle refuse de donner une réponse en calcul exact ;
- en calcul approché, elle propose comme réponse 1.

Ainsi la probabilité de E serait égale à 0. Cependant on sait que la fiabilité de la calculatrice, en calcul approché et pour d'aussi grands nombres, n'est pas certaine. Si on analyse de plus près le nombre $[1-2.10^{-22}]^{3.10^{22}}$, on peut remarquer que l'on élève à une puissance très grande un nombre très proche de 1. Si l'on songe à la forme indéterminée 1^{∞}, on peut estimer que le résultat proposé par la calculatrice doit être considéré avec circonspection.

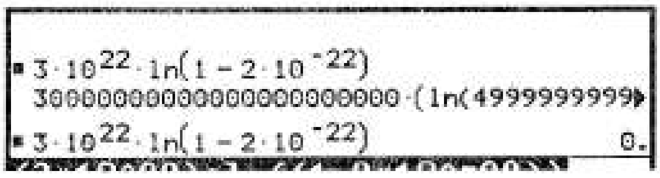
Peut-on reformuler la question pour "aider" la calculatrice ? Nous pouvons songer à utiliser les logarithmes pour "adoucir" les grands nombres :

- en calcul exact, même dépassement de capacité ;
- en calcul approché, on trouve $\ln(p(\bar{E})) = 0$, ce qui semble confirmer le résultat approché déjà trouvé : $p(\bar{E}) = 1$.



Si on simplifie le calcul avant de le proposer à la TI-92, en utilisant $\ln(a)^p = p\ln(a)$, on obtient (cf. ci-contre) :

- en valeur exacte la reécriture de la question posée (qui prend beaucoup de temps) ;



- en valeur approchée, à nouveau $\ln(p(\bar{E})) = 0$.

Tous les résultats approchés semblent aller dans le même sens. Peut-on dire cependant qu'un résultat approché est la preuve certaine d'un autre résultat approché ?

Nous allons voir que non, pas le biais d'un petit détour théorique...

Où l'on prouve à nouveau qu'un détour théorique entraîne souvent un gain pratique

Nous nous intéressons ici au logarithme d'un nombre proche de 1, $\ln[1-2.10^{-22}]$. Pour cause d'approximation affine (la dérivée de la fonction logarithme pour x=1 est égale à 1), on dispose de $\ln(1+h) = \ln 1+h.1+h.\varepsilon(h) = h+h.\varepsilon(h)$ (avec $\lim\limits_{h\to0} \varepsilon(h) = 0$).

Pour aller vite, on pourrait dire que $\ln(1+h)$ est proche de h pour h petit. On aurait donc $\ln[1-2.10^{-22}]$ proche de -2.10^{-22} et par conséquent :

$\ln(p(\bar{E}))$ proche de $3.10^{22}.2.10^{-22} = -6$. Ainsi $p(\bar{E})$ serait proche de $e^{-6} \approx 0{,}002$. **Pour finir, la probabilité p(E) d'ingérer au moins une molécule A serait de 0,998.**

Etonnant, non ? En effet :

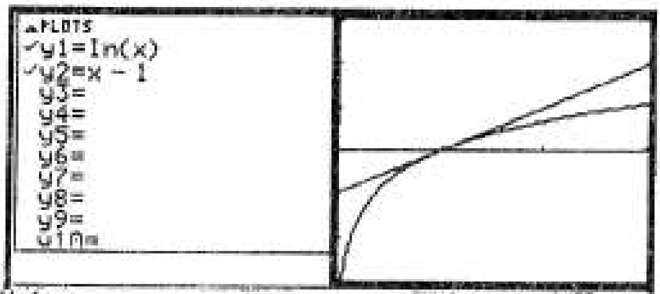
- ce serait contraire aux résultats approchés donnés par la TI-92 ;
- ce serait contraire au bon sens élémentaire : à chaque inspiration, on serait quasiment certain d'inspirer une des molécules expirées par Archimède lorsque celui-ci s'écria "Euréka !"...

Ce qui précède peut cependant légitimement provoquer une certaine gêne : il suffit de considérer le nombre de conditionnels utilisés dans la "démonstration" ci-dessus pour le réaliser. En effet, s'il est exact que $\ln[1-2.10^{-22}]$ est proche de -2.10^{-22} (puisque -2.10^{-22} est "petit"), comment être sûr que cette proximité est conservée quand on multiplie cette estimation par 3.10^{22} qui est un "grand" nombre ?

Pour s'assurer de la pertinence de ces approximations, il est possible d'user de l'arme préférée de l'analyse : les encadrements.

Nous savons en effet que $\ln(x)$ est inférieur à $x-1$ (cf. démonstration vue en cours, via l'étude de $g(x) = \ln(x) -(x-1)$).

L'interprétation graphique de cette inégalité est importante : la courbe de la fonction logarithme est sous sa tangente au point d'abscisse 1. D'ailleurs, cette courbe est au-dessous de toutes ses tangentes (on dit que cette fonction est concave).



Nous disposons donc de l'inégalité :
$\ln[1-2.10^{-22}] \leq -2.10^{-22}$, ce qui entraîne $3.10^{22} \ln(1 -2.10^{-22}) \leq -6$.

Ainsi $\ln(p(\overline{E})) \leq -6$. D'où $p(\overline{E}) \leq e^{-6} \leq 0{,}002$ c'est-à-dire $p(E) \geq 0{,}998$.

Conclusion (certaine désormais) :

- la TI-92, en mode calcul approché, nous a induit en erreur ;

- la probabilité d'inspirer une molécule A est supérieure à 0,998 ; nous sommes donc "quasiment certains" d'inspirer des molécules A lors de toute respiration...

<u>Pour aller plus loin.</u>

Dans deux directions :

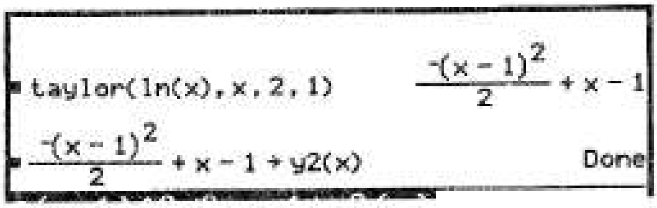
- si nous définissons la variable aléatoire X égale au nombre de molécules A ingérées lors d'une inspiration, on obtient une distribution binomiale de paramètre $n = 3.10^{22}$ (nombre de molécules inspirées) et $p = 2.10^{-22}$ (probabilité qu'une molécule inspirée soit une molécule A). En appliquant les résultats du cours, on obtient l'espérance de X, c'est-à-dire le nombre moyen de molécules A inspirées :

$$\mathbf{E(X) = np = 6.}$$

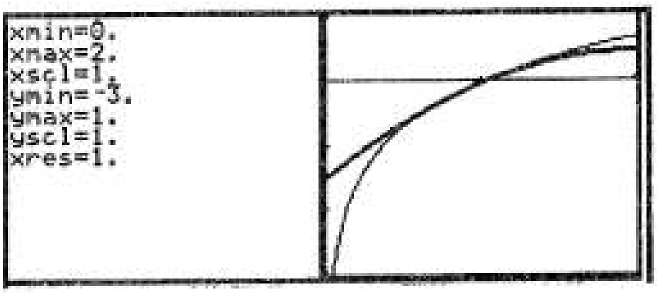
- nous avons parlé d'encadrements. Or nous n'avons fait que majorer $p(\overline{E})$, en majorant $\ln x$ par $x-1$. Pour minorer $\ln x$, nous pouvons chercher un polynôme convenable. La minoration par une fonction affine est impossible, pour cause de concavité de la fonction logarithme. On peut penser alors à un polynôme du second degré à coefficient dominant négatif (une parabole "tournée vers le bas").

Nous pouvons essayer les polynômes de Taylor d'approximation de la fonction logarithme que nous avons déjà rencontrés :

Ces polynômes sont accessibles dans le Menu *Calc*, commande *Taylor*. La syntaxe impose d'indiquer la fonction, la variable, le degré du polynôme d'approximation et enfin le point au voisinage duquel on se place.



L'application graphique va nous permettre de considérer les positions relatives de la fonction logarithme et de ce polynôme (la représentation du polynôme est en trait plus épais). Hélas, ce polynôme, s'il semble bien être inférieur à la fonction ln au delà de 1, ne semble pas minorer ln avant 1.



Le polynôme de Taylor de degré 2 ne convient pas. Nous allons donc changer de stratégie, en construisant de toute pièce un polynôme P convenable. Notre objectif : déterminer un trinôme qui soit inférieur à la fonction logarithme au voisinage de 1, par exemple sur l'intervalle I = [0,5; 1,5]. Fixons les contraintes pour P :

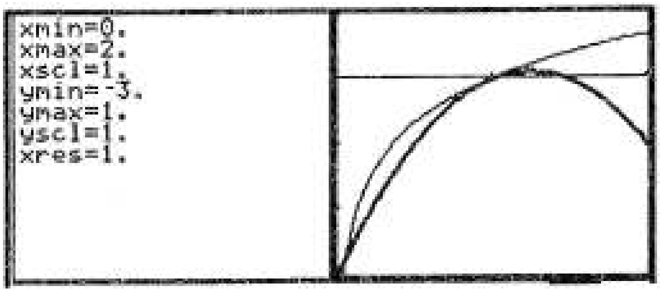
- pour ne pas avoir de problème en 1, nous allons choisir P(1) = 0 et P'(1) = 1 (pour ajuster au plus près la fonction logarithme au voisinage de 1) ;
- pour s'assurer que P(x) reste en dessous de la fonction logarithme sur I, comme ln(0,5)>-0,7, nous allons imposer P(0,5) = -1.

On a ainsi, pour $P(x) = ax^2+bx+c$, trois conditions à vérifier : P(1) = 0, P'(1) = 1 et P(0,5)=-1. On obtient ainsi un système que l'on résout aisément, qui aboutit à :

$$\mathbf{P(x) = -2x^2+5x-3.}$$

Il reste à contrôler que ce polynôme convient bien.

Une vérification graphique (en calcul approché donc) : en trait fin, la fonction ln, en trait épais la fonction P dont la représentation graphique semble bien être en-dessous, sur l'intervalle I, de celle de la fonction ln.



La preuve de ceci suppose l'étude de la fonction f qui à x associe ln(x) - P(x). Le lecteur curieux vérifiera que la dérivée de f s'annule pour $\frac{1}{4}$ et 1, que f est croissante sur $]0, \frac{1}{4}]$, décroissante sur $[\frac{1}{4}; 1]$ et à nouveau croissante sur $[1, +\infty]$. Comme nous nous intéressons au signe de f sur l'intervalle I = [0,5; 1,5], on retiendra seulement que f est décroissante sur [0,5; 1] et croissante après. Comme f(1) = 0, f est donc positive sur I et ainsi $\ln(x) \geq P(x)$.

Ainsi, **pour tout x de I**, nous bénéficions de l'encadrement : $-2x^2+5x-3 \leq \ln(x) \leq x-1$

En factorisant P (sans surprise, puisque P s'annule pour x=1), nous obtenons :

$$\mathbf{(x-1).(-2x+3) \leq \ln(x) \leq x-1.}$$

On utilise cette inégalité pour encadrer $\ln[1- 2.10^{-22}]$ (il est clair en effet que le nombre $1- 2.10^{-22}$ est bien dans l'intervalle I) :

$$- 2.10^{-22} (1+ 4.10^{-22}) \leq \ln[1- 2.10^{-22}] \leq - 2.10^{-22}$$

En multipliant chaque membre de cette double inégalité par 3.10^{22}, nous obtenons :

$-6.(1+ 4.10^{-22}) \leq \ln(p(\bar{E})) \leq -6$. D'où $e^{-6.(1+4.10^{-22})} \leq p(\bar{E}) \leq e^{-6}$, c'est-à-dire :

$$e^{-6}.e^{-24.10^{-22}} \leq p(\bar{E}) \leq e^{-6}$$

Pour apprécier la qualité de cet encadrement, il nous faut évaluer $a = e^{-24.10^{-22}}$:

- en valeur exacte, la calculatrice reformule la question ;
- en valeur approché, la calculatrice donne 1.

Ce résultat est facilement contrôlable : l'exponentielle d'un nombre proche de 0 est bien proche de 1.

Nous pouvons évaluer l'écart entre a et 1 en usant de l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0 : $e^x = x+1$. Nous aurons donc ici $e^{-24.10^{-22}} = -24.10^{-22}+1$, ce qui est très proche de 1

Mieux, nous bénéficions de la majoration $e^x \geq x+1$, qui découle de la convexité de la fonction exponentielle (sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes). Ainsi :

$$e^{-6}.(-24.10^{-22}+1) \leq e^{-6}.e^{-24.10^{-22}} \leq p(\bar{E}) \leq e^{-6}$$

Pour finir : $\mathbf{e^{-6} - 6.10^{-24} \leq p(\bar{E}) \leq e^{-6}}$

En prenant e^{-6} pour valeur approchée de $p\bar{E})$, on est donc conduit à faire une erreur inférieure à 6.10^{-24}. C'est acceptable.

Fin de ce défi. Parti de l'inspiration d'Archimède, nous avons eu recours pour notre étude à des instruments de calcul puissants. Cependant une utilisation directe de ceux-ci donnait l'exact contraire de la réponse exacte : un évènement très probable (de probabilité très proche de 1) apparaissait en première lecture de la calculatrice très improbable (de probabilité proche de 0). Obtenir le bon résultat supposait de combiner une étude théorique et une utilisation pertinente des outils de calcul.

<u>La morale de l'histoire</u>

Ce n'est pas tout à fait par hasard qu'Archimède a été choisi comme prétexte de cette étude :

- précurseur génial de l'analyse, il établit la première méthode systématique de calcul de π, à l'aide de polygones réguliers, le conduisant à l'encadrement :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

- mathématicien et ingénieur, il combina toujours la résolution de problèmes pratiques, la construction d'instruments et les spéculations abstraites. A propos de l'étude des leviers, on lui prête la phrase : "Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai le monde !".

Bref, l'inspiration d'Archimède est bonne pour tout apprenti mathématicien !

Défi n°3
De l'importance de la recherche des régularités et des irrégularités

Les questions

On définit la fonction Prox ("plus proche entier de"). Ainsi Prox (π) = 3, Prox (-π) = -3.

* Ceci permet-il de définir la suite u telle que $u(n) = \mathrm{Prox}\,(n+\sqrt{n})$?
* Existe-t-il une commande permettant d'écrire cette suite sur une TI-92 ?

*** Qu'est-ce que l'observation raisonnée des premiers termes de cette suite permet de conjecturer ?**
*** Peut-on le prouver et comment ?**

Pour la petite histoire

Ce problème a été communiqué lors de la rencontre "Teachers teaching with technology" de Colombus (Ohio), en Juillet 1997, par un enseignant anglais, Warwick Evans. La suite initiale s'appelait donc Nit (pour Nearest Integer To). C'est sous cette forme initiale qu'elle a été présentée aux élèves de la classe. Dans les rédactions qui suivent, on trouvera les deux intitulés, Nit ou ***Prox****, qui correspondent au même objet mathématique.*

Et les réponses...

On trouvera dans les pages qui suivent des éléments de réponse à ce défi, proposés par :

- **Alice de Bigault ;**
- **Sandrine Le Guillou ;**
- **Xavier Rivory ;**
- **Jean-François Vincent ;**
- **Luc Trouche.**

la réponse vient peut être d'ailleurs.

[ndlr] ceci n'est pas la réponse du problème mais une simple hypothèse!

<u>*contribution de*</u>: Alice de Bigault de Casanove

Défi n°3

Regularité, où es-tu?

Le problème consiste donc à chercher les régularités de la suite:
u(n)=Nit (n+ $\sqrt{n}$). En ce qui concerne le domaine de définition, il pourrait y avoir un problème lorsque l'on a k+0.5 or cela n'est pas le cas puisque $n \in N$.

Tout d'abord il faut trouver une ligne de commande sur la T.I. 92 afin d'avoir un tableau de valeur rapidement. La suite peut être rentrée ainsi dans la T.I 92:

u(n)=Round(n+ $\sqrt{n}$,0)

mais on peut aussi la décomposer et l'écrire ainsi:

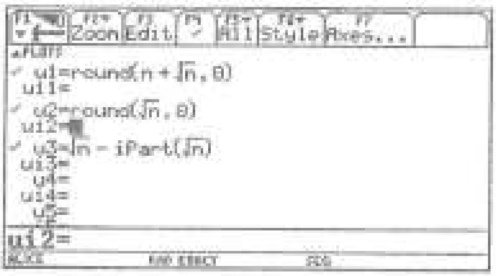
$$U(n) = when(n + \sqrt{n} - Ipart(n + \sqrt{n})\langle 0.5, Ipart(n + \sqrt{n}), ipart(n + 1 + \sqrt{n}))$$

On voit ainsi la proximité des suites nit et ipart cependant avec la première, on arrondit alors qu'avec la seconde on tronque.☺

Avant d'observer le tableau de valeur. Observons l'expression de la suite. En effet $n \in N$ donc nit(n)=n. On peut écrire que u(n)=n+nit($\sqrt{n}$).
nit($\sqrt{n}$) joue donc un rôle important, il faudrait l'intégrer dans le tableau de valeurs afin de la comparer avec u(n).
Ainsi pourrait-on prendre modèle sur u(n) pour entrer cette suite-là très voisine de u(n) avec u(n)=round($\sqrt{n}$,0) ou encore en décomposant:

$$U(n) = when(\sqrt{n} - Ipart(\sqrt{n})\langle 0.5, Ipart(\sqrt{n}), ipart(1 + \sqrt{n}))$$

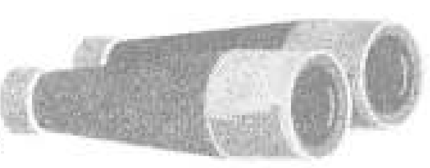
on voit que($\sqrt{n}$ -ipart $\sqrt{n}$) joue un rôle central.



Entrons les 3 suites suivantes dans la TI 92:

et l'on obtient le tableau suivant:

Observons-le!



n	u1	u2	u3
1.	2.	1.	0.
2.	3.	1.	.41421
3.	5.	2.	.73205
4.	6.	2.	0.
5.	7.	2.	.23607
6.	8.	2.	.44949
7.	10.	3.	.64575
8.	11.	3.	.82843
9.	12.	3.	0.
10.	13.	3.	.16228
11.	14.	3.	.31662
12.	15.	3.	.4641
13.	17.	4.	.60555
14.	18.	4.	.74166
15.	19.	4.	.87298
16.	20.	4.	0.
17.	21.	4.	.12311
18.	22.	4.	.24264
19.	23.	4.	.3589
20.	24.	4.	.47214
21.	26.	5.	.58258
22.	27.	5.	.69042
23.	28.	5.	.79583
24.	29.	5.	.89898

n=17.

Le fait le plus frappant est l'absence des carrés parfaits pour U1(la suite étudiée).
Donc on passe à ces endroits là de Un à Un+1 par un saut de +2
alors qu'autrement on fait un saut de +1.
On voit ceci clairement avec la suite U2 qui est (nit($\sqrt{n}$)) puisque U1(n) est en fait n+U2(n).

Ces « +2 » se situent quand U_3 est proche de 0,5. Mais il existe un autre fait, le nombre de termes en 2 « +2 » augmente de manière régulière, et cela augmente de 2 aussi, en effet les +2 ont lieu entre 2, 4,6,8 puis 10 termes et ainsi de suite... On peut le voir très facilement avec U_2, cela correspond avec la constance du terme.
La T.I. 92 nous permet donc de calculer un assez grand nombre de termes en employant un nombre de manipulations assez faibles. Ce gain de temps nous permet de voir le comportement de suites annexes et ainsi d'avoir plus de points de vue sur un même problème intéressant, non?
Observons la suite U_3, là il est intéressant de voir que entre les carrés parfaits ($U_3(n)$ est alors nulle) et le passage au +2 (quand $U_3(n)$ va franchir le pas de 0.5) le nombre termes augmente: on a 1,2,3,4... termes entre chaque passage.

Après l'observation, vient le temps de la preuve. Nous allons dans un premier temps voir quelques moyens de preuves qui seront abandonnées car menant à une impasse ou en raison de leur longueur. Enfin nous verrons une preuve esthétiquement agréable car plus rapide que celles mentionnées.

La preuve est beaucoup moins évidente à trouver.
Pour cela on pourrait essayer de redéfinir la suite en plusieurs morceaux c'est à dire quelque chose du type:

$$\begin{cases} U(n) = U(n-1) + 1 \text{ si } n \setminus [k^2 + k] \\ Un = U(n-1) + 2 \text{ si } n \in [k^2 + k) \end{cases}$$

mais cette définition est très insuffisante et complètement fausse. ☹ Il est très difficile de trouver donc un autre moyen de définir cette suite. Si l'on trouve cette définition, elle sera assez complexe et donc difficilement utilisable.
On peut alors essayer de se tourner vers les fonctions annexes U_2 et U_3. Mais le passage de l'une à l'autre est assez délicat.

<u>semi-conclusion :</u> la régularité est plus facile à voir qu'à prouver!

mais il ne faut jamais désespérer...

On pourrait s'intéresser à $V(n)=n^2$ en effet $V(n+1)=n^2+2n+1=V(n)+2n+1$.
Or on remarque alors qu'entre 2 carrés parfaits il y a $2\sqrt{n}+1$ intervalles: un exemple est nécessaire: par exemple $3^2=9$ et $4^2=16$ et bien il y a $2\sqrt{9}+1=7$ intervalles entre 9 et 16 ou encore $2\sqrt{9}=6$ termes.

Posons alors $n=M^2+M$, $\sqrt{n} = \sqrt{(M^2 + M)} = \sqrt{(M(M+1))}$
Développons $\sqrt{(M+1)} = (M+1)^{1/2} = 1^{1/2} + 1/2\ M - 1/8\ M^2 - 1/48\ M^3 - \ldots$
comme il n'y a que des termes négatifs, il semble raisonnable de penser que l'expression tend vers 0.5 par valeur inférieure donc la partie entière n'évolue pas.
Comparons n et n+1, $n+1=M^2+M+1$; de même l'expression tend vers 0.5 par valeur superieure donc la partie entière évolue.

⇨Ce sont les termes qui peuvent s'exprimer sous la forme «n^2+n+1» qui sont à la place stratégique du « +2 » dans Un. C'est à ces termes là que l'on voit la suite faire des petits bonds comme un lapin... ☺

<u>Conclusion:</u> Même quand on tente de prouver, il faut toujours conjecturer

Défi n° 3, Contribution de Sandrine LE GUILLOU

RECHERCHE DE REGULARITE
RECHERCHE DE PREUVES

Définition de la suite U(n) = Nit (n+√n)

La fonction Nit permet bien de définir la suite : $U(n) = Nit\ (n+\sqrt{n})$ avec $n \in N$.
Soit : $n+\sqrt{n} = N$. Pour tout $N \in R$, il existe bien un entier le plus proche. Cependant, on pourrait soulever un problème. En effet, il existe des nombres qui sont aussi proches de 2 entiers : par exemple :3,5 est aussi proche de 3 que de 4. Le problème se pose donc pour les nombres x tels que $x=\frac{1}{2}\ p$ avec $\begin{cases} p \in N^* \text{ et étant impair} \\ x \in D^* \end{cases}$

Un décimal dont le chiffre des dixièmes est le 5 est aussi proche de l'entier le suivant que de l'entier le précédant. Nous pouvons nous demander si ce cas peut se produire dans la suite étudiée :

- nous savons que $n \in N$
- pour $\sqrt{n}$, il nous faut étudier deux cas :
  - ⇒ si $\sqrt{n} \in N$, alors $n+\sqrt{n}$ est un entier (car c'est la somme de 2 entiers)
  - ⇒ si $\sqrt{n} \in R$, on sait qu'une racine a un nombre de décimales infini puisqu'on ne peut jamais la mettre sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $\begin{cases} a \in N \\ b \in N^* \end{cases}$

    Dans ce dernier cas $n+\sqrt{n} \in R$ (car c'est la somme d'un entier et d'un réel).

Dans les deux cas précédents, on n'est jamais confronté à un nombre x tel que $x=n+\sqrt{n} = \frac{1}{2}\ p$

Par conséquent, la suite $U(n)=Nit(n+\sqrt{n})$ existe pour tout $n \in N$.

Ecriture de la suite sur une TI.92

Sur une TI.92, on peut définir la suite U(n) telle que $U(n)=Nit\ (n+\sqrt{n})$. En effet, la commande Nit rappelle la commande « partie entière ». Cependant, cette dernière commande pose un problème pour les nombres dont le chiffre des dixièmes est supérieur ou égal à 5.

En effet : iPart (3,52) = 3, or le plus proche entier de 3,52 est 4.

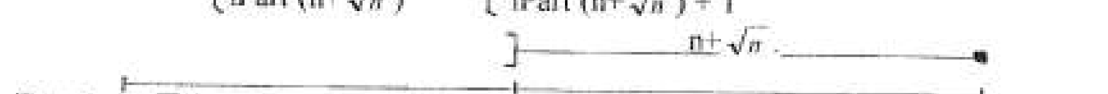
Il est donc bien nécessaire de distinguer deux cas :

⇒ Si $n+\sqrt{n}$ >iPart $(n+\sqrt{n}) + 0{,}5$, alors $U(n) =$ iPart $(n+\sqrt{n})+1$.

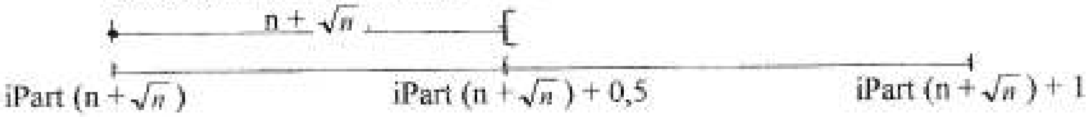
En effet, par définition, iPart $(n+\sqrt{n})$ est un nombre entier.

On pose N' = iPart $(n+\sqrt{n})$. N'+ 0,5 va donc être un nombre décimal dont le chiffre des dixièmes est 5.

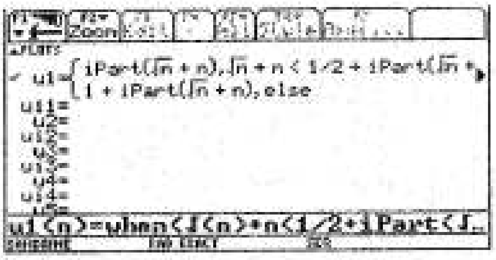
Si $n+\sqrt{n}$ > N'+ 0,5, l'entier le plus proche de $n+\sqrt{n}$ n'est pas : $\begin{cases} N' \\ \text{iPart } (n+\sqrt{n}) \end{cases}$ mais $\begin{cases} N' + 1 \\ \text{iPart } (n+\sqrt{n}) + 1 \end{cases}$



⇒ Si $n + \sqrt{n} < \text{iPart}(n + \sqrt{n}) + 0{,}5$, alors $U(n) = \text{iPart}(n + \sqrt{n})$. En effet, ceci s'explique avec le schéma suivant :

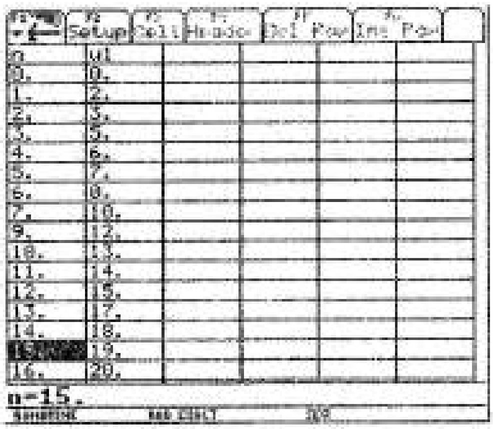


On peut donc définir la suite suivante et l'entrer dans la TI.92 avec la commande WHEN : $\begin{cases} \text{Si } n + \sqrt{n} < \text{iPart}(n + \sqrt{n}) + 0{,}5,\ U(n) = \text{iPart}(n + \sqrt{n}) \\ \text{Si } n + \sqrt{n} > \text{iPart}(n + \sqrt{n}) + 0{,}5,\ U(n) = \text{iPart}(n + \sqrt{n}) + 1 \end{cases}$



Observation des premiers termes de la suite

On étudie ensuite le tableau de valeurs donné par la calculatrice :



n	u1
0.	0.
1.	2.
2.	3.
3.	5.
4.	6.
5.	7.
6.	8.
7.	10.
9.	12.
10.	13.
11.	14.
12.	15.
13.	17.
14.	18.
15.	19.
16.	20.

n=15.

Ce tableau de valeurs nous permet de conjecturer plusieurs choses :
- Si n est impair, $U(n+1) = U(n)+1$
- Si n est pair, apparemment il n'y a aucune régularité.

En effet : ⇒ $U(0) = 0$ et $U(1) = 2$
donc $U(1) = U(0)+2$
$U(n+1) = U(n)+2$
⇒ $U(4) = 6$ et $U(5) = 7$
donc $U(5) = U(4)+1$
$U(n+1) = U(n)+1$

Cependant, il est intéressant d'étudier les nombres pairs tels que : $U(n+1) = U(n)+2$
Les premiers nombres pairs vérifiant cette conjecture sont : 0 ; 2 ; 6 ; 12 ; 20...
On remarque que 0 est le 1° nombre pair
$+(2 \times 1) \downarrow$ $\downarrow +1$
2 est le 2° nombre pair
$+(2 \times 2) \downarrow$ $\downarrow +2$
6 est le 4° nombre pair
$+(2 \times 3) \downarrow$ $\downarrow +3$
12 est le 7° nombre pair
$+(2 \times 4) \downarrow$ $\downarrow +4$
20 est le 11° nombre pair

Donc, on observe une certaine régularité dans le choix des nombres pairs vérifiant la relation $U(n+1) = U(n)+2$.

Il reste alors à prouver toutes ces conjectures.

Défi n°3 : Recherche de régularité, Recherche de preuves.

Contribution de Xavier RIVORY

Soit $U(n) = \text{nit}\,(n + \sqrt{n}\,)$

Sur la TI-92, on trouve la commande nit( ) sous le nom de round(*expresson* , *k*): arrondi à 10^{-k} près.

I. Observations de la suite : recherche de régularité

⇒ U(n) est la suite de tous les entiers naturels successifs, privée des carrés parfaits (ex: 2^2, 3^2, 4^2...).

⇒ "Structure" :

n	U(n)	
1	2	
2	3	
	$2^2=4$	→ Le "saut" s'effectue au rang $n = p^2 - p + 1$.
3	5	
$2^2=4$	6	→ Nombre qui ne nécessite pas d'arrondis pour $p \in N$:
5	7	$U(p^2) = \text{nit}(\,p^2 + p) = p^2 + p$
6	8	
	$3^2=9$	
7	10	
8	11	→ 2 nombres dont la partie fractionnaire est supérieure à 0.5
$3^2=9$	12	
10	13	
11	14	→ 3 nombres dont la partie fractionnaire est inférieure à 0.5
12	15	
	$4^2=16$	
13	17	

⇒ $\text{nit}\,(n + \sqrt{n}\,) = n + \text{nit}\,(\sqrt{n}\,)$

II. Etude théorique

L'image d'un carré parfait est un nombre entier. Mais alors :*Quels seraient les antécédents de ces carrés?* Existe-t-il un entier (non nul) tel que : $\text{nit}\,(n + \sqrt{n}\,) = p^2$?

$\text{nit}\,(n + \sqrt{n}\,) = p^2 \Leftrightarrow p^2 + \frac{1}{2} < n + \sqrt{n} < p^2 + \frac{1}{2}$

1.Etude de: $\underline{n + \sqrt{n} < p^2 + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow n + \sqrt{n} - p^2 + \frac{1}{2} < 0$

Soit X=$\sqrt{n}$ ($n \in N^*$), $X^2+X-p^2-\frac{1}{2}$ (0. Le discriminant est $3+4p^2>0$

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{4p^2+3}}{2}\text{, donc } n_1=\frac{(-1+\sqrt{4p^2+3}\,)^2}{4}\text{ ou } n_2=\frac{(\sqrt{4p^2+3}+1)^2}{4}\text{ avec } n_1<n_2$$

On a donc n1<n<n2:

0		n1		n2		+∞
	+	o	−	o	+	

2. *Etude de:* $p^2+\frac{1}{2}<n+\sqrt{n}\Leftrightarrow n+\sqrt{n}-p^2+\frac{1}{2}>0$

Il existe deux racines réelles:

$$n'_1=\frac{(-1+\sqrt{4p^2-1}\,)^2}{4}\text{ ou } n'_2=\frac{(\sqrt{4p^2-1}+1)^2}{4}\text{ avec } n'_1<n'_2.$$

D'où le tableau

0		n'1		n'2		+∞
	+	o	−	o	+	

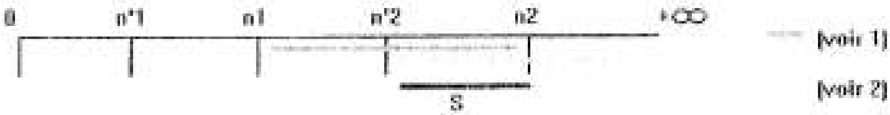
. On en déduit que n<n'1 et n>n'2.

En résumé, on a:

- $\frac{(1-\sqrt{4p^2+3}\,)^2}{4}<n<\frac{(\sqrt{4p^2+3}+1)^2}{4}$
- $n<\frac{(\sqrt{4p^2-1}-1)^2}{4}$
- $\frac{(\sqrt{4p^2-1}+1)^2}{4}<n$

Finalement, l'ensemble S possible contenant n serait: $\frac{(\sqrt{4p^2-1}+1)^2}{4}<n<\frac{(\sqrt{4p^2+3}+1)^2}{4}$

car



c'est-à-dire $n'_2<n<n_2$. Pour éviter de confondre ces nombres, on pose $n'_2=a$ et $n_2=b$ (a<n<b). Or,on veut montrer qu' il n'existe pas d'entier n (non nul) qui vérifie cette expression, pour que la fonction nit( ) n'ait pas de carré parfait comme image.Calculons E=b-a: est-ce que E<1?

$$E=\frac{(\sqrt{4p^2+3}+1)^2}{4}-\frac{(\sqrt{4p^2-1}+1)^2}{4}$$

$$E=\frac{\sqrt{4p^2+3}}{2}+p^2+1-\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}+p^2$$

$$E=\frac{\sqrt{4p^2+3}-\sqrt{4p^2+1}}{2}+1$$

or $4p^2+3>4p^2+1$, donc $\dfrac{\sqrt{4p^2+3}-\sqrt{4p^2-1}}{2}>0$

et $\dfrac{\sqrt{4p^2+3}-\sqrt{4p^2-1}}{2}+1>1 \Leftrightarrow E>1$

Du reste,même si on avait prouvé que E<1, cela n'aurait pas prouvé qu'il n'y avait d'entier entre a et b!! En effet,on peut être confronté à cette situation:

Pour que a et b soient dans l'intervalle [k;k+1], il est necessaire que ces nombres puissent s'écrire sous la forme suivante:

a = k + {partie fractionnaire de a}   avec k entier
et b = même k + {partie fractionnaire de b}

Sur la TI-92, on peut utiliser la commande *propFrac( )* permettant les divisions euclidiennes:

$$a=p^2+\frac{\sqrt{4p^2-1}}{2}$$

$$\text{et } b=p^2+1+\frac{\sqrt{4p^2+3}}{2}$$

⇒Problème: $p^2+1>p^2$; hélas,il existe bien un entier entre a et b...

Mais quelles valeurs attribuer à a et b vérifiant:

$$\begin{cases} * \ 0<b-a<1 \\ * \ a=k+fpart(a)\ ,\ b=k+fpart(b) \\ * \ a^2-\dfrac{1}{2}<n+\sqrt{n}<b^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> :
Même si on ne parvient pas à expliquer toutes les observations , la recherche n'est jamais inutile puisqu'elle entraine de nouvelles réflexions sur le problème .

Du côté de chez Nit

Contribution de :
Jean-François VINCENT

Défi n°3

Petit rappel : on définit une nouvelle fonction, Nit (« Near Integer To ») qui permet un arrondi à l'entier le plus proche. Ainsi, Nit(5.45)=5 mais Nit(5.55)=6.

- On peut donc tout à fait définir la suite $u(n) = Nit\left(n + \sqrt{n}\right)$. En effet à tout entier positif n, on peut associer sa racine et utiliser par la suite la fonction d'arrondi.

- La TI-92, forte de ses 10000 fonctions intégrées, inclut une commande permettant de rentrer cette suite. On utilisera

  round(n,α)

  où α est le nombre de chiffres après la virgule désiré

- L'observation « raisonnée » de cette suite donne lieu à plusieurs conjectures intéressantes. Voici donc les 21 premiers termes de cette suite :

	n	u(n)
	0	0
1^2	*1*	2
	2	3
	3	5
2^2	*4*	6
	5	7
	6	8
	7	10
	8	11
3^2	*9*	12
	10	13
	11	14
	12	15
	13	17
	14	18
	15	19
4^2	*16*	20
	17	21
	18	22
	19	23
	20	24

On peut dans un premier temps constater que cette suite est la succession des entiers naturels auxquels manquent les carrés : $4^2=16$ n'y figure pas, de même que $3^2=9$, $5^2=25$...

Nous allons nous intéresser à une autre propriété de cette suite qui semble encore plus remarquable : on a vu que u(n) est formé d'entiers naturels qui se suivent. On constate qu'au début, 2 entiers, 2 et 3, se suivent. Il y en a ensuite 4, puis 6, puis 8... A chaque nouveau groupe, il y a n+2 nombres qui se suivent, où n est le nombres de termes consécutifs du groupe précédent.

La fonction $u(n)=Nit\left(n+\sqrt{n}\right)$ est équivalente à $u(n)=Nit(n)+Nit\left(\sqrt{n}\right)$. Comme Nit(n)=n, on se penche sur le reste de l'équation. On constate que dans chaque groupe précédemment défini, en se focalisant sur la colonne de gauche du tableau, qu'il figure un entier n dont la racine est un autre entier que l'on appellera α. Ainsi on peut écrire $n=\alpha^2$. On constate également que cet entier n'est pas placé n'importe où dans le groupe.

Il y a α-1 termes avant ce nombre dont la partie décimale de la racine est supérieure à 0.5, et α termes après dont la partie entière est inférieure strictement à 0.5.

On dénombre 2α termes par groupe. Ceci expliquerait donc que le nombre de termes consécutifs u(n) dans chaque groupe soit supérieur de 2 au précédent. En effet, dans le groupe $\alpha+1$, on a $2(\alpha+1)=2\alpha+2$ termes. $2\alpha+2-2\alpha=2$...

Un petit exemple permettra certainement de clarifier cette observation peut-être dévoilée de manière brutale. On va s'intéresser à :

	7	10
	8	11
$\alpha=3^2$	*9*	12
	10	13
	11	14
	12	15

Ici, $\alpha=3$. On a bien $\alpha-1=2$ termes avant dont la partie entière de la racine carrée est supérieure à 0.5. Il figurent donc bien dans ce groupe. De même, on a α nombres après cette racine entière. On peut compter : α-1+1(pour la racine)+$\alpha=2\alpha$.

■ Il ne reste plus qu'à démontrer la conjecture. Si l'on enlève Nit(n)=n à u(n) on doit avoir α termes égaux par groupe de α termes (l'arrondi des racines est le même).

En clair, il faut démontrer que si α est solution de $\sqrt{\alpha^2}$, alors $Nit\left(\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right)=\alpha$ et $Nit\left(\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)=\alpha$. Ou encore que la partie entière est respectivement supérieure puis inférieure strictement à 0.5.

- **démonstration de** $Nit\left(\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}\right)=\alpha$

  Si l'on prend α-0.5, il faut montrer que $\sqrt{\alpha^2-\alpha+1} > \sqrt{(\alpha-0.5)^2}$.

  $(\alpha-0.5)^2 = \alpha^2-\alpha+0.25 < \alpha^2-\alpha+1$

  L'inégalité est vérifiée, et l'on se rappellera pour cela que la fonction $x \to \sqrt{x}$ est strictement croissante.

- **Démonstration de** $Nit\left(\sqrt{\alpha^2+\alpha}\right)=\alpha$

  On prendra α+0.5 pour montrer que $\sqrt{\alpha^2+\alpha} < \sqrt{(\alpha+0.5)^2}$

  $(\alpha+0.5)^2 = \alpha^2+\alpha+0.25 > \alpha^2+\alpha$

  L'inégalité est de nouveau vérifiée.

Il est donc désormais prouvé que dans chaque « groupe » dont les termes se suivent, il existe un nombre donc la racine est un entier noté α. On trouve dans ce groupe α-1 termes avant le nombre « magique » et α termes après. On montre ainsi par la même occasion qu'il y a à chaque fois n+2 termes qui se suivent.

Petit supplément Week-end

On vient de constater qu'aux termes de la suite u(n) manquaient les carrés, comme 4, 9, 16... (cf. tableau) L'étude précédente va nous servir de base pour démontrer leur absence de la suite.

Le fait d'avoir mis *n* dans la suite, associé à une fonction d'arrondi, fait que l'on a des « pans » de nombre consécutifs. On a ainsi vu que l'on eut limiter chaque groupe, en partant du fait qu'il y a toujours un nombre dont la racine carrée est entière (démontré). On a :

- <u>limite inférieure du groupe</u> : $\alpha+\alpha^2-\alpha+1$

  Il y a α-1 nombre avant

  L'arrondi de la racine est constant à l'intérieur du groupe

- <u>limite supérieure du groupe</u> : $\alpha+\alpha^2+\alpha$

  On trouve α termes après

Comme α^2 est toujours présent, on cherche le développement d'un carré dans l'intervalle : $\left[\alpha^2+1;\alpha^2+2\alpha\right]$.

Id est : on recherche le développement de $(\alpha+b)^2$ où b est la variable à trouver. On peut poser $\alpha \in \mathbb{N}$ (évident) et $b \in \mathbb{N}$. En effet, $(\alpha+b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha b + b^2$. Si $b \in D$, on a toujours une décimale qui reste. Si de plus on prend $\alpha \in D$, on a le double de décimales. Or, avec *Nit*, on doit avoir $(\alpha+b)^2 \in \mathbb{N}$.

$$(\alpha+b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha b + b^2$$

b peut avoir différentes valeurs. Pour b=0, on a α^2.

On a toujours $\underbrace{\alpha^2}_{\boxed{\text{Pour la racine}}} + \underbrace{\alpha + cste}_{\boxed{\text{Pour le nombre}}}$, la constante étant limitée par $(-\alpha+1)$ et α.

A la limite inférieure, on tend donc vers α^2 sans pouvoir l'atteindre puisque l'on a $\alpha+1$.

- **<u>pour b=1 :</u>**
  On trouve $(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$. Or la limite supérieure du groupe est $(\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha$. On n'a pas ce carré...

- Il est inutile d'aller au-delà, car on dépasse déjà les limites fixées du groupe.

On peut alors se demander si le carré n'appartient pas au groupe suivant. Il n'en est rien. En effet, le groupe précédent a pour limite supérieure :

$$\alpha - 1 + (\alpha-1)^2 + \alpha - 1 = 2\alpha - 2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 1$$

On a fait entre ces deux groupes un saut de deux unités, passant de $\alpha^2 - 1$ à $\alpha^2 + 1$ et évitant ainsi le carré.

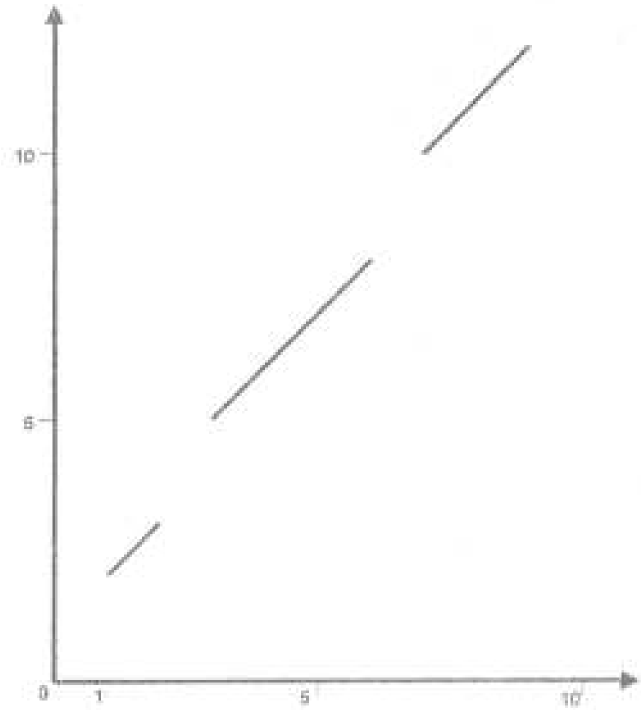
De même, le groupe suivant a pour limite inférieure :

$$\alpha + 1 + (\alpha+1)^2 - (\alpha+1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 2$$

Même remarque : le saut de deux unités évite le carré.

<u>Récapitulatif :</u>

u(n) ne contient aucun carré comme 9, 16,... Ceux-ci sont évités à cause du saut de deux unités qui intervient entre deux groupes successifs (1 pour les « n » et 1 pour l'arrondi de la racine carré, dont la partie décimale dépasse 0.5).

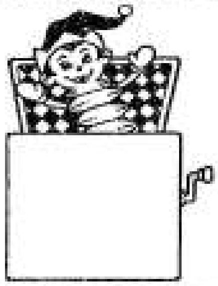


Une ébauche de la courbe représentative de la suite croissante étudiée.

CQFD ou plutôt AQT

Allégorie : AQT qui fatigué, ne court plus...

Eléments de réflexion sur le défi n°3



0. Une phase existencielle : la suite u existe-t-elle ?

La suite u existe si et seulement si, pour tout n entier naturel, il existe (et de façon unique) une image u(n).

Il est toujours possible de calculer, pour n entier naturel, $\sqrt{n}$, puis $n+\sqrt{n}$. Peut-on ensuite calculer Prox $(n+\sqrt{n})$, c'est à dire l'entier le plus proche de $n+\sqrt{n}$? Oui, à condition que l'on ait un seul résultat possible ! Il y aurait en effet une sérieuse difficulté pour le calcul de Prox (1,5) : le nombre 1,5 est équidistant des entiers 1 et 2.

Mais peut-on avoir $n+\sqrt{n} = p+0{,}5$ (p entier), c'est-à-dire $\sqrt{n} = q+0{,}5$ (q entier) ? Cela voudrait dire que $n = q^2 + q + 0{,}25$, c'est-à-dire que 0,25 serait un entier... Impossible. Conclusion : la suite est partout définie, i.e. pour tout n, il existe un et un seul u(n).

Dans cette première phase de précision des objets étudiés, on peut aussi s'attacher à simplifier les expressions en jeu. Peut-on écrire plus simplement u(n) ?

- de façon générale, on ne peut pas dire que Prox(a+b) = Prox(a) + Prox(b) ; par exemple, pour a = 0,4 et b = 0,3, on a Prox(a+b) = 1 alors que Prox(a) + Prox(b)=0 ;
- cependant, comme n est entier, on peut écrire $\text{Prox}(n + \sqrt{n}) = n + \text{Prox}(\sqrt{n})$.

1. Une phase d'observations et de conjectures.

Plusieurs possibilités pour la définition de la suite sur la TI-92 :

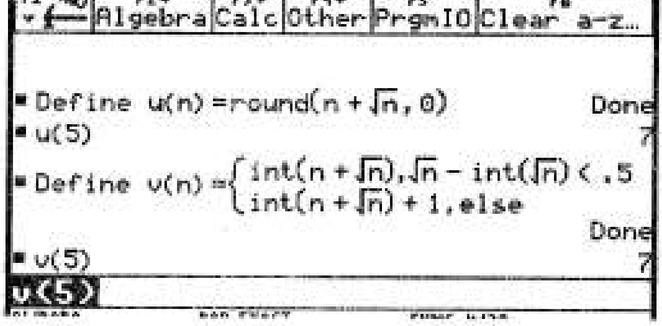
- on peut utiliser la commande *Round (N, p)*, qui donne le nombre décimal, avec p chiffres après la virgule, qui est le plus près de N. Ainsi *Round(n+*$\sqrt{n}$*, 0)* est bien égal à u(n) (on peut aussi écrire u(n) = n + *Round(*$\sqrt{n}$*, 0)*) ;

- on peut définir la suite via la syntaxe *when(condition, si oui, sinon)* ; on utilise pour cela *int(N)* qui donne le plus grand entier inférieur ou égal à N. Si l'écart entre N et int(N) est inférieur à 0,5, Prox(N) est égal à int(N) ; sinon, Prox(N) = int(N) + 1.

Les suites u(n) et v(n) définies à partir des deux syntaxes sont évidemment égales.

On notera que, pour définir v(n), on a utilisé :

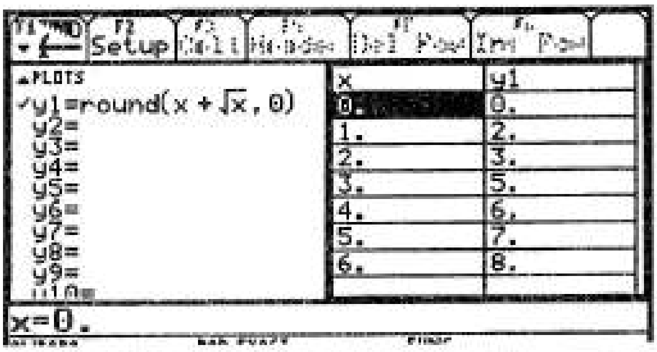
$\text{int}(n+\sqrt{n}) = n+ \text{int}(\sqrt{n})$, donc l'écart entre $n+\sqrt{n}$ et $\text{int}(n+\sqrt{n})$ est égal à l'écart entre $\sqrt{n}$ et $\text{int}(\sqrt{n})$.



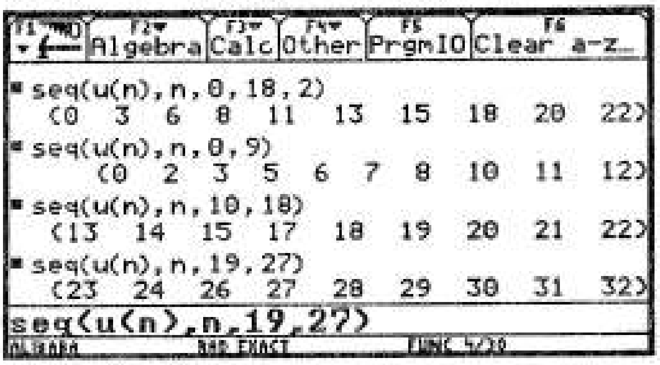
Plusieurs possibilités pour l'observation de son comportement :

- on peut utiliser le fichier de fonctions :

- l'application *Table* avec la première valeur de la variable égale à 0 et un pas de 1 ; la restriction de la fonction y1 aux entiers naturels coïncide avec la suite étudiée. Attention cependant : le tableau de valeurs fonctionne en valeurs approchées !



- l'application initiale donne les valeurs exactes (si la TI-92 a été mise en mode exact bien sûr !). La syntaxe (u(n), n, i, j, k) donne les valeurs de u(n) pour n variant de i à j avec un pas de k. Si on ne précise pas k, on obtiendra les valeurs successives de u(n), n prenant toutes les valeurs entre i et j.



Sur le dernier écran ci-dessus, on peut noter les valeurs successives que prend la suite u(n) :

{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32...}

Des conjectures sont possibles (sinon l'on peut poursuivre la recherche d'informations sur le comportement de u(n)). Il faut bien sûr pour cela un certain "sens de l'observation" et quelques points de repère théoriques sur les études habituelles des suites (sens de variation, valeurs particulières prises, ou non, par u(n), etc.).

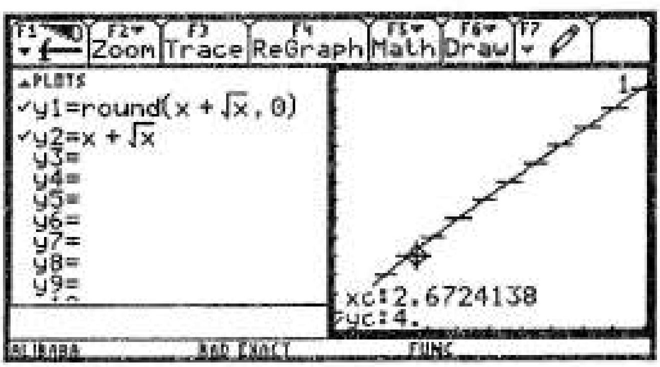
La suite semble être strictement croissante et prendre toutes les valeurs entières successives, avec un certain nombre de "trous" : {1, 4, 9, 16, 25...}. Ce sont les "carrés parfaits" (sauf 0) qui semblent manquer à l'appel.

On peut, pour compléter cette phase d'observations, considérer les représentations graphiques :

- <u>du point de vue de la fonction</u>

La fonction qui à x associe $x+\sqrt{x}$ est continue strictement croissante de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}+$.

La fonction $x \to \text{Round}(x+\sqrt{x})$ est ainsi une fonction en escalier croissante, à valeurs entières, qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

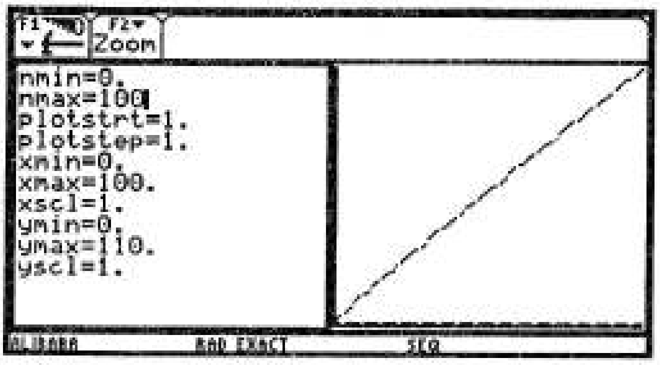


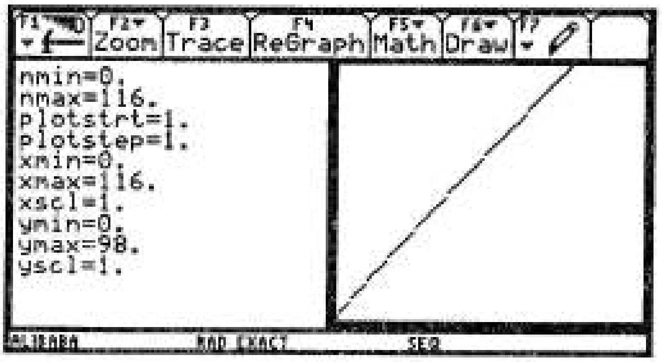
- <u>du point de vue de la suite</u>

On considère ci-contre une représentation graphique des 100 premiers termes de la suite u(n).

Il est difficile en l'état de distinguer une régularité quelconque (mise à part la croissance, bien naturelle...).

<u>Un phénomène discret, comme une suite, ne s'adapte pas nécessairement à un système discret (les pixels de l'écran) de représentation graphique</u>...





Par contre, si on prend une fenêtre adaptée au nombre exact de pixels du demi-écran (116 en largeur, 98 en hauteur), chaque point de coordonnées (n, u(n)) sera exactement placés puisque n et u(n) sont deux entiers.

On obtient alors (dernier écran ci-dessus) une représentation graphique dont l'interprétation correspond à notre première conjecture :

la suite prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$, sauf un certain nombre ; l'utilisation de la commande *Trace* indique alors qu'il s'agit des naturels carrés. On peut poursuivre l'observation pour de grandes valeurs de n, mais l'observation jusqu'à N (même très grand !) ne nous dira pas ce qui se passe pour N+1. D'où la nécessité d'une étude théorique.

2. Une première étude très générale.

Il est bon de commencer par appliquer à la suite u(n) les méthodes générales d'étude de suite.

$$\mathbf{u(n) = Prox\ (\ n + \sqrt{n}) = n + Prox\ (\sqrt{n}).}$$

Comportement global : quel est le sens de variation de la suite ?

Classiquement on calcule $u(n+1) - u(n) = n+1 + \text{Prox}\ (\sqrt{n+1}) - n - \text{Prox}\ (\sqrt{n}) =$ $1+\text{Prox}\ (\sqrt{n+1}) - \text{Prox}\ (\sqrt{n})$. Or :

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (car la fonction racine carrée est <u>strictement</u> croissante) ;

$\text{Prox}\ (\sqrt{n+1}) \geq \text{Prox}(\sqrt{n}\ )$ (car la fonction Prox est <u>simplement</u> croissante) ;

donc $\text{Prox}\ (\sqrt{n+1}) \geq \text{Prox}(\sqrt{n}\ ) \geq 0$, d'où $1+\text{Prox}\ (\sqrt{n+1}) - \text{Prox}\ (\sqrt{n}) > 0$.

La suite u est donc strictement croissante.

Comportement local : quelle est la limite de la suite u (quand n tend vers $+\infty$ bien sûr) ?

La minoration triviale u(n) > n implique bien sûr que u(n) tend vers $+\infty$ (*)

On peut être plus précis en s'intéressant au comportement asymptotique de cette suite. Pour cela un encadrement est nécessaire :

(*) NB : ceci est vrai d'ailleurs de toute suite à valeur dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire telle que, pour tout n, u(n) est un entier naturel) et strictement croissante ; elle tend nécessairement vers $+\infty$. En effet, on dispose alors de l'inégalité u(n) > u(0) + n. Le théorème de minoration permet alors de conclure.

$\sqrt{n}-1 \leq \text{Prox}\sqrt{n} \leq \sqrt{n}+1$. Donc $n+\sqrt{n}-1 \leq u(n) \leq n+\sqrt{n}+1$.

La division par n, licite pour $n > 0$, aboutit à :

$1+\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{1}{n} \leq \frac{u(n)}{n} \leq 1+\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{1}{n}$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u(n)}{n} = 1$. On dit que la suite u(n) est <u>équivalente</u> à n.

Attention, cela ne veut pas dire que les deux suites sont asymptotes, ce qui supposerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u(n)-n) = 0$. Ici, on a en effet $u(n) - n = \text{Prox}\sqrt{n}$, qui tend bien sûr vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Fin de l'étude générale de la suite u. En faisant cette étude, on ne prouve pas l'ensemble des conjectures que l'observation a suscitées, mais on délimite le terrain des études qui vont suivre (la métaphore du champ opératoire pour le chirurgien correspond tout à fait à cette étape indispensable).

3. Une première stratégie, par disjonction de cas.

(Méthode communiquée par Maryse Noguès, de l'équipe Analyse de l'IREM)

<u>On part de l'étude de Prox $(\sqrt{n})$</u>

Un premier cas est simple : si n est un carré de naturel, $n = p^2$, alors $(\sqrt{n}) = p$. On a alors Prox $(\sqrt{n}) = p$ et $u(n) = p^2 + p$.

Sinon, on peut toujours écrire $\sqrt{n} = p+\varepsilon$ avec p entier naturel et $\varepsilon\in[0 ; 0,5[$ ou $\varepsilon\in]0,5, 1[$; on a démontré en effet plus haut que ε ne pouvait pas être égal à 0,5.

* si $\sqrt{n} = p+\varepsilon$ avec p entier naturel $\varepsilon\in[0 ; 0,5[$, on a alors Prox $(\sqrt{n}) = p$ et :

$p \leq \sqrt{n} < p + 0,5$, c'est-à-dire $p^2 \leq n < p^2 + p + 0,25$. Comme n est entier, on en tire :

$p^2 \leq n \leq p^2 + p$ (attention à la gestion des inégalités larges ou strictes).

* si $\sqrt{n} = p+\varepsilon$ avec p entier naturel $\varepsilon\in]0,5 ; 1[$, on a alors Prox $(\sqrt{n}) = p+1$ et :

$p + 0,5 < \sqrt{n} < p + 1$, c'est-à-dire $p^2 + p + 0,25 < n < p^2 + 2p + 1$. A fortiori :

$p^2 + p < n < p^2 + 2p + 1$.

Cela permet de situer Prox $(\sqrt{n})$ en fonction de la position de n par rapport aux carrés d'entiers successifs :

$p^2 \leq n \leq p^2 + p$ ssi Prox $(\sqrt{n}) = p$

$p^2 + p < n < p^2 + 2p + 1$ ssi Prox $(\sqrt{n}) = p+1$

<u>u(n) peut-il alors être un carré parfait ?</u> Nous avons vu que $u(0) = 0$. Et sinon ?

Examinons les deux cas mis en évidence :

* $p^2 \leq n \leq p^2 + p$ ssi Prox $(\sqrt{n}) = p$

On a alors $u(n) = n + \text{Prox}(\sqrt{n}) = n + p$. Ainsi $p^2 + p \leq u(n) \leq p^2 + 2p$.

D'où $p^2 < u(n) < p^2 + 2p + 1$ (attention, on dispose désormais d'inégalités strictes, puisque $p\neq0$) c'est-à-dire $p^2 < u(n) < (p+1)^2$. u(n), compris strictement entre deux carrés d'entiers consécutifs, ne peut donc pas lui-même être un carré.

* $p^2 + p < n < p^2 + 2p + 1$ ssi Prox $(\sqrt{n}) = p+1$

On a alors $u(n) = n + \text{Prox}(\sqrt{n}) = n + p + 1$. Ainsi $p^2+2p+1 < u(n) < (p+1)^2 + p+1$.

D'où $(p+1)^2 < u(n) < (p+1)^2.(p+1)$ et à fortiori $(p+1)^2 < u(n) < (p+2)^2$. u(n), compris strictement entre deux carrés d'entiers consécutifs, ne peut pas lui-même être un carré.

Les deux cas étudiés permettent désormais de l'affirmer :

u(n), à part le premier terme 0, n'est jamais un carré de nombre entier.

u(n) prend-elle toutes les valeurs entières qui ne sont pas des carrés ?

Examinons à nouveau les deux cas possibles :

* $p^2 \leq n \leq p^2 + p$. Il y a ici p+1 valeurs possibles pour n. Or nous avons démontré ci-dessus que : $p^2 + p \leq u(n) \leq p^2 + 2p$. Il y a donc aussi p+1 valeurs possibles pour u(n). Or la suite est strictement croissante. u(n) doit donc prendre toutes les valeurs entre p^2+p et p^2+2p.

* $p^2+p < n < (p+1)^2$. Il y a ici valeurs possibles pour n de p^2+p+1 inclus jusqu'à p^2+2p inclus. Or nous avons démontré que : $(p+1)^2 < u(n) < (p+1)^2 + p+1$, c'est-à-dire $(p+1)^2 - 1 \leq u(n) \leq (p+1)^2 + p$. Il y a aussi p valeurs possibles pour u(n). Or la suite est strictement croissante. u(n) doit donc prendre toutes les valeurs entre $(p+1)^2+1$ et $(p+1)^2 + p$.

On rassemble des deux cas : si $n \in [p^2; (p+1)^2[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre p^2+p et p^2+2p puis entre $(p+1)^2+1$ et $(p+1)^2 + p$, c'est-à-dire que u(n) prend toutes les valeurs entre p^2+p et $(p+1)^2 + p$ sauf $(p+1)^2$.

Pour bien voir ce qui se passe, on peut donner à p les valeurs entières successives :

* p=0 : si $n \in [0; 1[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre 0 et 0 ;

* p=1 : si $n \in [1; 4[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre 2 et 5 sauf 4 ;

* p=2 : si $n \in [4; 9[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre 6 et 11 sauf 9 ;

...

* p=k : si $n \in [k^2; (k+1)^2[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre k^2+k et $(k+1)^2 + k$ sauf $(k+1)^2$.

* p=k+1 : si $n \in [(k+1)^2; (k+2)^2[$, alors u(n) prend toutes les valeurs possibles entre $(k+1)^2+k+1$ et $(k+2)^2 + k+1$ sauf $(k+2)^2$.

Conclusion : toutes les valeurs entières, sauf les carrés d'entier à partir de 1, sont bien prises par la suite u(n).

4. Une deuxième stratégie, par étude des écarts entre u(n) et u(n+1).

Ces écarts semblent être parfois de 1, parfois de 2 (pour sauter un carré). L'étude systématique de ces écarts semble donc naturelle.

Les écarts ne peuvent être que de 1 ou 2

On essaie d'abord de contrôler Prox $(\sqrt{n})$: $\sqrt{n} - 0{,}5 < \text{Prox}(\sqrt{n}) < \sqrt{n} + 0{,}5$ (inégalités strictes, nous l'avons vu). D'où : $n + \sqrt{n} - 0{,}5 < u(n) < n + \sqrt{n} + 0{,}5$

De la même façon : $n+1 + \sqrt{n+1} - 0{,}5 < u(n+1) < n+1 + \sqrt{n+1} + 0{,}5$.

D'où, par soustraction des deux inégalités (attention à l'inversion du sens de la première inégalité, lors de la multiplication par le nombre négatif -1) :

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < u(n+1) - u(n) < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + 2$ (inégalité 1)

Examinons de plus près la différence $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Elle est bien sûr strictement positive. De plus, par multiplication classique par la "quantité conjuguée", on obtient :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1.$$

Le report de ce résultat dans l'inégalité 1 donne: $0 < u(n+1) - u(n) < 3$.

Conclusion : l'écart entre deux termes consécutifs ne peut être que 1 ou 2.

Quand l'écart u(n+1) - u(n) est-il égal à 2 ?

On peut en revenir à une phase d'observation, pour repérer l'endroit où se produisent des sauts de 2 :

n	2	3	6	7	12	13	20	21	30	31
u(n)	3	5	8	10	15	17	24	26	35	36

On remarque qu'après n=2 on saute le carré de 2, après n=6, on saute le carré de 3, après n=12 on saute le carré de 4, après n=20 on saute le carré de 5, après n=30 on saute le carré de 5, etc. Essayons de mettre un peu d'ordre dans le désordre (apparent) pour localiser les sauts de 2 :

* après n=1.2, on saute le carré de 2 ; * après n=2.3, on saute le carré de 3 ;
* après n=3.4, on saute le carré de 4 ; * après n=4.5, on saute le carré de 5 ;
* après n=5.6, on saute le carré de 6, etc...

Cette nouvelle forme du même résultat permet de conjecturer un résultat général :

* après n=p.(p+1), on saute le carré de p, c'est-à-dire :

$$u[(p.(p+1)] < (p+1)^2 < u[p.(p+1)+1]$$

On veut donc établir que :

$$p^2+p+\text{prox}\sqrt{p^2+p} < (p+1)^2 < p^2+p+1+ \text{prox}\sqrt{p^2+p+1} \text{ (double inégalité 2)}$$

* On sait que $p^2+p+ \text{prox}\sqrt{p^2+p} < p^2+p+\sqrt{p^2+p} + 0{,}5$.

Si on établit que $p^2+p+\sqrt{p^2+p} +0{,}5 < (p+1)^2$, la première inégalité de (2) sera assurée. On a $p^2+p+\sqrt{p^2+p} +0{,}5 < (p+1)^2$ si et seulement si (après simplification) :

$\sqrt{p^2+p} < p+0{,}5$ si et seulement si $p^2+p < p^2+p+0{,}25$. C'est bon.

* On sait que $p^2+p+1+ \sqrt{p^2+p+1} - 0{,}5 < p^2+p+1+ \text{prox}\sqrt{p^2+p+1}$.

Si on établit que $(p+1)^2 < p^2+p+1+\sqrt{p^2+p+1} - 0{,}5$, la deuxième inégalité de (2) sera assurée. On a $(p+1)^2 < p^2+p+1+ \sqrt{p^2+p+1} - 0{,}5$ si et seulement si (après simplification):

$p+0{,}5 < \sqrt{p^2+p+1}$ si et seulement si $0{,}25 < 1$. C'est bon.

On a donc prouvé qu'on a toujours :

$$\mathbf{u(p^2+p) < (p+1)^2 < u(p^2+p+1)}$$

Autrement dit : tout carré d'entier est strictement compris entre les images de deux entiers consécutifs. Comme la suite est strictement croissante, un carré d'entier ne sera jamais égal à u(n). Nous avons ainsi prouvé que l'écart entre $u(p^2+p)$ et $u(p^2+p+1)$ était égal à 2, et que le nombre sauté était alors un carré de naturel (le carré de (p+1)). Il nous reste à prouver que c'est le seul cas de figure où l'écart entre u(n) et u(n+1) est égal à 2. On peut achever la démonstration avec une stratégie de dénombrement qui rejoint la stratégie développée dans le paragraphe précédent :

$u(p^2) =p^2 + p$

$u[(p+1)^2] =(p+1)^2 + p+1 = p^2 + 3p + 2.$

La suite étant strictement croissante, si $p^2< n < (p+1)^2$ alors $u[p^2] < u(n) < u[(p+1)^2]$, c'est-à-dire $p^2 + p < u(n) < p^2 + 3p + 2$. Entre p^2 et $(p+1)^2$ (strictement), il y a 2p nombres. Entre $p^2 + p$ et $p^2 + 3p + 2$ (strictement), il y a 2p+1 nombres.

Or la suite est strictement croissante : toutes les images sont donc distinctes. Il y a au départ 2p nombres, à l'arrivée 2p+1 nombres. Il ne peut donc y avoir qu'un saut de 2. Or dans l'intervalle d'arrivée, il n'y a qu'un carré d'entier, c'est $(p+1)^2$. Conclusion : il n'y a que ce nombre qui n'est pas atteint. Ce qui achève la démonstration.

Rêvons un peu. Est-il possible de trouver une suite u(n) qui prenne toutes les valeurs entières successives, sauf les cubes d'entiers ?

Défi n°4
Pour une décomposition optimale de la nouvelle année (1998)

La question

On écrit 1998 de toutes les façons possibles comme $a_1 + a_2 + ... + a_n$ ($n \geq 1$; $a_1, a_2, ..., a_n$ entiers naturels).

Quelle est la (ou quelles sont les) décomposition(s) $a_1, a_2, ..., a_n$ qui donne(nt) le plus grand produit $a_1.a_2...a_n$?

Souvenirs...

Ce problème rappelle des problèmes déjà traités, par exemple : pour un périmètre donné, quel est le rectangle d'aire maximale ?
Simplement, ici, le cadre est un peu plus général...

Et les réponses...

On trouvera dans les pages qui suivent des éléments de réponse à ce défi, proposés par :

- **Jean-François Vincent ;**
- **Luc Trouche.**

Défi n°4
De la décomposition optimale de 1998!

Contribution de :
Jean-François VINCENT

Il s'agit de décomposer 1998 (en attendant 1999 pour l'année prochaine) en une somme de n terme de telle sorte que leur produit soit maximal pour un nombre de facteurs donné.

I. Première compréhension du sujet :

A. Le plus petit nombre possible : question stupide

On peut trouver $1 = 1^{1998}$ voire même 0 si l'on se permet de décomposer avec ce nombre.

B. Le plus grand (!)

On cherche la décomposition optimale qui puisse donner par la suite le plus grand nombre possible, sans se soucier du nombre de facteurs. On peut alors écarter tout de suite les nombres supérieurs à 10, puisqu'il existe toujours une décomposition de ce nombre qui donne un produit plus grand.

Exemple : 13 peut être remplacé par $5*8 = 40$, voire autre chose.

La question commence donc à se poser à partir de 9. On peut donc examiner chaque nombre.

Nb.	meilleure décomposition éventuelle	
9	$= 3+3+3$ or $3^3 = 27 > 9$	ne convient pas
8	$= 4+4$ et $4^2=16$	ne convient pas
7	$= 4+3$ et $4*3=12$	ne convient pas
6	$= 3+3$ et $3^2=9$	ne convient pas
5	$= 2+3$ et $2*3=6$	ne convient pas
4	$= 2+2$	convient donc si l'on a un nombre pair de facteurs 2
3		convient
2		convient

Il faut donc choisir entre 2 et 3. Or 2+2+2=6=3+3 et $2^3 = 8 < 3^2 = 9$. Il faut donc prendre dans la mesure du possible 3 et compléter éventuellement par 2.

Par chance, 1998 est divisible par 3 : $\frac{1998}{3} = 666$

Le plus grand nombre possible est donc $3^{666} \approx 5.79*10^{317}$. Pas si mal !

II. De la bonne compréhension du problème :

Il fallait comprendre que l'on cherchait, pour n termes, la décomposition optimale.

Comme la première décomposition obtenue portait sur des puissances, mes soupçons se portent sur ce genre de décompositions. Ainsi, pour n=2, on aurait 1998/2=999. Le plus grand produit serait alors 999^2.

Deux petits programmes écrits en Turbo Pascal 7 permettent de vérifier le résultat du I.B. et pour n=2.

```
program multi1998;

{ l'objet du programme est de trouver le plus grand produit à
partir de la décomposition en une somme de n termes (ici 3) de 1998.}

{remarque fondamentale: ne pas oublier de passer en mode SN+ pour
utiliser le coprocesseur mathématique lors des calculs}
uses crt;
var
a,b,c,val1:longint;
aa,bb,cc,maxi,abc:longint{extended};


Begin
    clrscr;
    maxi:=0;
    aa:=0;
    bb:=0;
    cc:=0;
    val1:=0;
    writeln('le programme va d,marrer, -touche-');
    readln(a);
    for a:=1 to 1998 do begin
                val1:=1998-a;
                for b:=1 to val1 do begin
                    c:=1998-a-b;
                    abc:=a*b*c;
                    if abc>maxi then begin
                            maxi:=abc;
                            aa:=a;
```

```
                              bb:=b;
                              cc:=c;
                              end;
                        if abc=maxi then writeln(a,' - ',b,' - ',c,' - ',abc);
                              end;
                end;
    writeln('finalement, le meilleur score est: ',maxi);
    writeln('il a ,t, obtenu avec :',aa,' - ',bb,' - ',cc);
    readln(a);
end.
```

Ces deux programmes confirment les résultats supposés. Cependant, ils ne sont pas optimisés et certaines configurations sont analysées à plusieurs reprises. C'est l'une des raisons pour lesquelles l'analyse informatique des configurations a été abandonnée à partir du rang 4.

```
program multi1998;

{ l'objet de programme est de trouver le plus grand produit à
partir de la décomposition en une somme de n termes (ici 2) de 1998.}

uses crt;
var
a,b,aa,bb,maxi,ab:longint;


Begin
    clrscr;
    maxi:=0;
    aa:=0;
    bb:=0;
    writeln('le programme va d,marrer, -touche-');
    keypressed;
    for a:=1 to 1998 do begin
                b:=1998-a;
                ab:=a*b;
                if ab>maxi then begin
                        maxi:=ab;
                        aa:=a;
                        bb:=b;
                        end;
                if ab=maxi then writeln(a,b,ab);
                end;
    writeln('finalement, le meilleur score est: ',maxi);
    writeln('il a ,t, obtenu avec :',aa,' et ',bb);
    readln(a);
end.
```

Enthousiasmé par ces deux résultats, je me lance à la conquête de n=4.
$\frac{1998}{4} = 499.5$. Ici, pas trop de problèmes, il suffit de prendre : $499^2 * 500^2$.

Cependant, qu'en est-il d'un cas plus complexe ? Prenons $\frac{1998}{55} \approx 36.327272$... On suppose qu'il y a plus de facteurs du côté de 36 que de celui de 37.

D'où une formule magique qui conviendrait pour tout n≤1998 (ou autre...) :

$$iPart\left(\frac{1998}{n}\right) = a$$

$$1998 \bmod n = b$$

On a alors : $a^{n-b} * (a+1)^b$

Pour rendre la formule plus concrète, appliquons la à 1998/55 : on a ici iPart(1998/55)=36. Ensuite, 1998mod 55=18 (reste de la division). En appliquant la formule, on trouve : $36^{55-18} * (36+1)^{18}$. Comme prévu, on a plus de facteurs du côté de 36.

Pour ceux qui resteraient sceptiques, la somme est bien égale à 1998 :
$a*(n-b)+(a+1)*b = a*n+b$

Reste alors à démontrer la formule...

Eléments de réflexion sur le défi n°4

La question peut être comprise de deux façons : soit n est fixé et on cherche alors le partage de 1998 en n termes entiers tels que le produit P_n de ces n nombres soit maximal ; soit n n'est pas fixé et on cherche à partager 1998 en une somme de termes entiers telle que le produit obtenu soit maximal.

Qui peut le plus peut le moins. Nous allons donc choisir la première interprétation, chercher la décomposition optimale pour toutes les valeurs possibles de n. En comparant tous les maxima P_n obtenus, nous pourrons alors déterminer pour quelle valeur de n ce produit est maximal et répondre ainsi à la deuxième question. L'intérêt de la première interprétation est qu'elle se prête à un abord du problème par étapes, en le traitant pour des valeurs particulières de n.

Quelques partages particuliers

Premier partage : n = 2

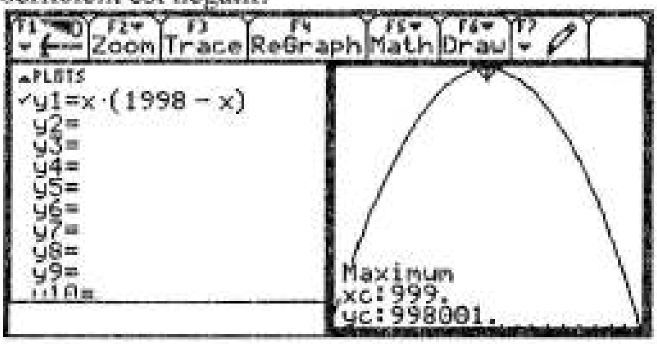
Si on partage 1998 en une partie, le résultat vite obtenu : un terme dans la somme donne un facteur dans le produit. En conséquence $P_1 = 1998$.

Le premier calcul sérieux commence avec n = 2. On écrit 1998 = x+y. Il s'agit de déterminer x et y tels que le produit xy soit maximal. Nous pouvons réduire la complexité du problème, puisque y, par définition, est égal à 1998 - x. Le problème se ramène ainsi à calculer x pour que xy = x.(1998-x) soit maximal.

Une première méthode, analytique

C'est celle qui est la plus habituelle au lycée. Elle consiste à étudier les variations de la fonction f : $x \to f(x) = x.(1998-x)$. Cela ne présente pas de difficulté : il s'agit d'un trinôme du second degré dont le coefficient est négatif.

L'utilisation de la calculatrice n'est pas indispensable ici... La fonction s'annule pour x=0 et x=1998. Le maximum est atteint pour x= 999 (par étude de dérivée ou application des résultats relatifs aux paraboles, représentations graphiques des trinômes : le sommet a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$).



Le produit maximal P_2 est alors égal à 998001 (on remarquera ci-dessus que l'application graphique, qui calcule en valeurs approchées, donne ici les valeurs exactes cherchées).

Remarque importante : en traitant la question dans un cadre analytique, on étudie une fonction réelle de variable réelle. On aurait ainsi pu trouver que le maximum de la fonction f était atteint pour une valeur non entière de la variable x. Il aurait fallu alors rechercher pour quelle valeur entière de la variable x la fonction était maximale. Cet effort nous est évité, puisque le sommet de la parabole a une abscisse entière, donc une ordonnée (puisque les coefficients du trinôme sont entiers) entière.

Une deuxième méthode, algébrique.

Elle passe par la transformation de l'expression $f(x) = x.(1998-x)$. L'idée est de contrôler la variable x (cf. TP n°7), via l'utilisation de la "forme canonique" :

$f(x) = -x^2+1998x = -(x^2 - 1998x) = -(x-999)^2+ 999^2$.

Il est alors clair sous cette forme que $f(x) \leq 999^2$ et que l'égalité $f(x)=999^2$ est obtenue si et seulement si $(x-999)=0$, c'est-à-dire $x=999$.

Une troisième méthode, encore algébrique.

Elle découle de l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout couple de réels positifs, on dispose de l'inégalité $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (la moyenne géométrique de x et y est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique). Cette inégalité découle de l'inégalité :

$2\sqrt{xy} \leq x+y$, c'est-à-dire $x-2\sqrt{xy} +y \geq 0$, c'est-à-dire enfin $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. Cette preuve montre d'ailleurs que l'inégalité est une égalité si et seulement si $x=y$.

Ainsi donc, pour revenir à notre problème, $xy \leq (\frac{x+y}{2})^2$ c'est-à-dire $xy \leq 999^2$. De plus, d'après ce que nous venons de voir, l'égalité $xy = 999^2$ ne sera réalisée que si $x=y=999$.

Une quatrième méthode, informatique.

Nous voulons que x(1998-x) soit maximal. Il n'y a que 1998 valeurs entières possibles pour x (même moins si on rationalise les recherches, c'est-à-dire si l'on pose $x \leq y$). Il suffit de les tester toutes et de retenir celle(s?) qui assurera le produit xy le plus grand. Cela peut être réglé assez facilement avec n'importe quelle calculatrice programmable. Cette méthode est évidemment plus lourde que les méthodes précédentes. Elle présente cependant un petit avantage : le problème ici se situe d'emblée dans les nombres entiers (puisque ce sont les seuls partages que l'on teste).

Bilan : les différentes méthodes aboutissent dans le cas n=2 à la détermination d'un partage optimal de 1998. Il suppose un partage en deux parties égales. Le produit maximal est alors $P_2 = (\frac{1998}{2})^2 = 999^2$.

Deuxième partage, pour n = 3.

Nous allons tenter de transférer pour n = 3 les méthodes utilisées dans le cas précédent. Il s'agit de déterminer x, y et z entiers naturels tels que $1998 = x+y+z$ et que le produit xyz soit maximal. Nous recherchons donc x et y tels que le produit x.y.(1998-x-y) soit maximal.

Une méthode informatique est toujours possible (mais les temps de calcul sont plus longs). On recherche $x \leq y$ tels que x.y.(1998-x-y) soit maximal. On peut là aussi réaliser un programme qui passe en revue tous les couples possibles et retienne celui qui donnera le produit maximal.

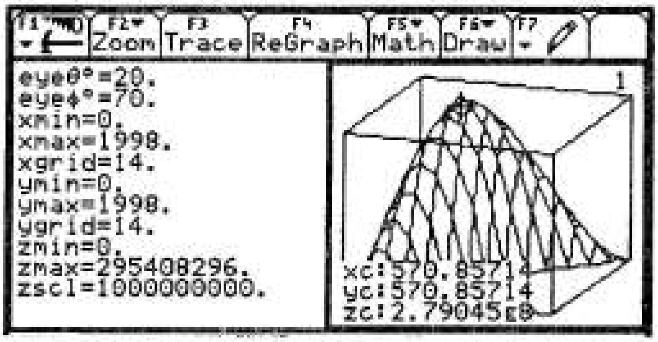
La méthode analytique devient plus complexe : il s'agit d'étudier une fonction de deux variables $f(x, y) = x.y.(1998-x-y)$. Cette étude n'est pas au programme de la classe de terminale. On peut cependant l'aborder par deux biais :

- en se ramenant à l'étude d'une fonction à une variable. Pour cela, on fixe y. Il s'agit alors de déterminer x tel que $g(x) = x.y.(1998-x-y) = y\,[-x^2 + (1998-y)x]$ soit maximal. Ce trinôme du deuxième degré sera maximal pour $x=\frac{1998 - y}{2}$, c'est-à-dire $2x+y=1998$. On démontrerait en échangeant le rôle de x et de y que le produit est maximal pour $2y+x=1998$. La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues aboutit à $x=y=\frac{1998}{3} = 666$ (chance : encore un nombre entier!).

On en déduit aussitôt que z =666. Ainsi, s'il existe un produit maximal, celui-ci ne peut être atteint que par un partage de 1998 en trois parties égales.

- l'étude de cette fonction de deux variables peut aussi être envisagée graphiquement, en mode *3D* ; la représentation graphique d'une fonction de deux variables est alors une surface (la côte z d'un point M est fonction de son abscisse x et de son ordonnée y).

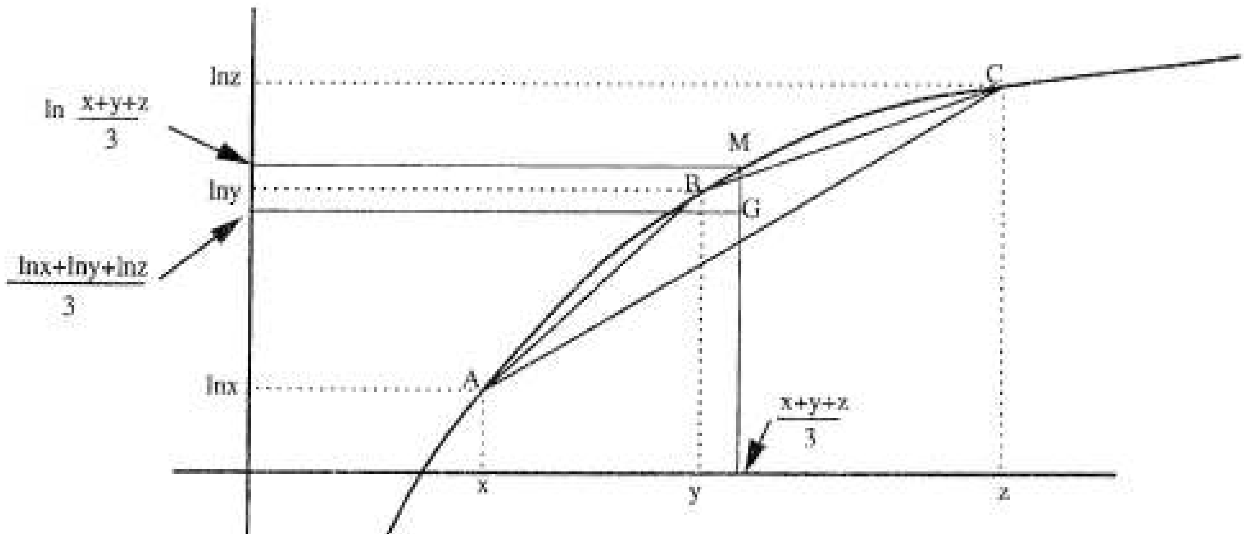
La forme de la surface semble accréditer l'existence d'un maximum. La commande *Trace* permet de localiser grossièrement le maximum éventuel. Il faudrait faire un *zoom* pour vérifier la concordance avec le résultat précédent qui suggérait un partage nécessaire de 1998 en trois parties égales.



Une méthode algébrique supposerait la généralisation de l'inégalité arithmético-géométrique établie plus haut dans le cas de deux nombres positifs. Il s'agirait ici de prouver que $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$. Cette inégalité est triviale si x, y ou z est nul. Nous nous restreindrons désormais au cas où x, y et z sont strictement positifs, ce qui nous permet d'utiliser la fonction logarithme. L'inégalité à établir est équivalente à :

$\ln \sqrt[3]{xyz} \leq \ln \frac{x+y+z}{3}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}[\ln x + \ln y + \ln z] \leq \ln \frac{x+y+z}{3}$.

La preuve de cette dernière inégalité repose sur un raisonnement barycentrique et sur la concavité de la fonction logarithme (sa courbe est sous toutes ses tangentes et au dessus de ses cordes).



On considère ci-dessus la représentation graphique de la fonction logarithme et les trois points A, B et C, de coordonnées respectives (x, lnx), (y, lny), (z, lnz). Pour des raisons de concavité de la fonction logarithme, le triangle ABC, donc son centre de gravité G, sont situés sous la courbe.

Le point G a pour abscisse $\frac{x+y+z}{3}$ et pour ordonnée $\frac{\ln x + \ln y + \ln z}{3}$. Le point M, "à la verticale" de G, sur la courbe de la fonction logarithme, a pour abscisse $\frac{x+y+z}{3}$ et pour ordonnée $\ln \frac{x+y+z}{3}$.

Pour les raisons de concavité déjà évoquées, M est au-dessus de G, ce qui prouve l'inégalité recherchée : $\frac{\ln x+\ln y+\ln z}{3} \leq \ln \frac{x+y+z}{3}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$

De plus, il est clair que l'égalité suppose que le point G soit sur la courbe, donc que le triangle soit réduit à un point, donc que x=y=z.

Notre problème est ainsi résolu pour le partage de 1998 en trois parties x, y et z :

$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1998}{3}$ c'est-à-dire enfin $xyz \leq 666^3$. Le produit sera maximal si et seulement si $xyz = 666^3$, nous avons vu que cela suppose $x = y = z$.

Bilan : les différentes méthodes aboutissent dans le cas n=3 à la détermination d'un partage optimal de 1998. Il suppose un partage en trois parties égales. Le produit maximal est alors $P_3 = (\frac{1998}{3})^2 = 666^2$.

Résolution complète dans le cadre de $\mathbb{R}$

Nous pourrions poursuivre ce qui a été fait ci-dessus pour d'autres valeurs de n :

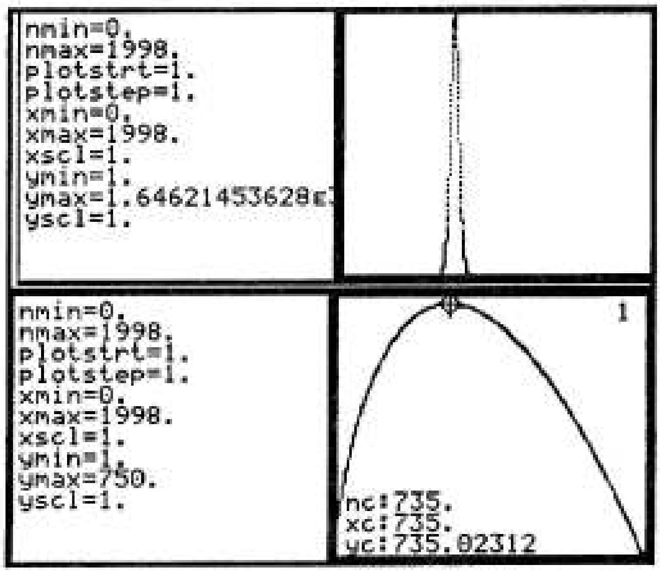
- les méthodes informatiques sont toujours possibles, avec un coût en terme de temps de plus en plus grand ;
- les méthodes analytiques nécessitent l'étude de fonctions dépendant d'un nombre de plus en plus grand de variables (les représentations graphiques exigent alors de se situer dans un espace de dimension n) ;
- la méthode algébrique, reposant sur l'inégalité arithmético-géométrique, se généralise sans peine. Nous ne reprendrons pas la démonstration, qui repose sur le même principe que pour n=3 (au lieu de considérer le centre de gravité d'un triangle sous la courbe, nous envisagerions le centre de gravité d'un quadrilatère, d'un pentagone et plus généralement d'un "n-gone"). Cette démonstration aboutirait au même résultat : **il existe un partage optimal de 1998 en n termes <u>réels</u>. Celui-ci suppose un partage en n parties égales. Ce produit maximal, que nous noterons $\prod_n$, est égal à $(\frac{1998}{n})^n$.**

Il s'agit a priori d'un partage réel et non pas en entiers naturels : il n'y a aucune raison que le quotient $\frac{1998}{n}$ soit entier ! La décomposition optimale en <u>entiers naturels</u> donnant le plus grand produit P_n reste à trouver. Nous aurons bien sûr $P_n \leq \prod_n$, puisque l'ensemble des entiers est inclus dans l'ensemble des réels : dans les cas n=2 et n=3, nous avons d'ailleurs l'égalité.

En restant dans le cadre réel, il est alors possible de déterminer la valeur de n pour laquelle le produit est maximal.

Cela suppose l'étude de la suite $u(n) = (\frac{1998}{n})^n$. Une première observation graphique de la suite indique un pic très pointu qu'il est difficile de localiser avec la commande *Trace*.

Il est alors commode "d'adoucir" la représentation graphique en considérant la suite $\ln(u(n))$. La deuxième courbe ci-contre permet alors la localisation du maximum de la suite : le produit maximal semble être atteint si l'on partage 1998 en 735 morceaux égaux.



On aurait alors le produit maximal égal à $(\frac{1998}{735})^{735}$. Tout ceci doit être étayé par une démonstration qui justifie les variations et le maximum de la suite u(n). On peut envisager pour cela l'étude du phénomène continu correspondant $f(x) = (\frac{1998}{x})^x = e^{x\ln(1998/x)}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, le sens de variation de f est le même que celui de $g : x \to g(x) = x.\ln\frac{1998}{x}$.

La dérivée de g est une fonction décroissante (cf. ci-dessous).

Elle s'annule pour $x = \frac{1998}{e}$ (on retrouve encore e!).

La fonction g est ainsi croissante sur $]0, \frac{1998}{e}]$, décroissante sur $[\frac{1998}{e}, +\infty[$.

La fonction g admet donc un maximum pour $x = \frac{1998}{e}$. Mais ce nombre n'est pas entier.

$\blacksquare$ Define $g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1998}{x}\right)$	Done
$\blacksquare\ \frac{d}{dx}(g(x))$	$\ln\left(\frac{74}{x}\right) + 3 \cdot \ln(3) - 1$
$\blacksquare$ solve$\left(\ln\left(\frac{74}{x}\right) + 3 \cdot \ln(3) - 1 = 0, x\right)$	$x = 1998 \cdot e^{-1}$
$\blacksquare\ \frac{1998}{e}$	735.023123461
$\blacksquare$ g(735)	735.023123097
$\blacksquare$ g(736)	735.022474593

Pour déterminer le maximum de la <u>suite</u>, il faut calculer les valeurs qu'elle prend pour les valeurs entières de la variable qui entourent $\frac{1998}{e}$, c'est-à-dire 735 et 736. Les résultats ci-dessus confirment l'observation de la représentation graphique : la suite admet un maximum pour n = 735.

Bilan : si n n'est pas imposé, le partage de 1998 en une somme de termes dont le produit est maximal existe. Il suppose le partage de 1998 en 735 termes égaux.

Le produit maximal est alors $\prod_{735} = (\frac{1998}{735})^{735}$.

Le problème est que $\frac{1998}{735}$ n'est pas entier... Il reste donc à réaliser un partage de 1998 en termes <u>entiers</u> de produit maximal.

Eléments pour une résolution dans $\mathbb{N}$

Nous ne donnerons pas dans ce qui suit une réponse complète, mais quelques éléments de réflexion susceptibles d'alimenter une recherche personnelle.

Traitement du problème dans le cas où n=4.

C'est un cas intéressant, puisque 1998 n'est pas divisible par 4. L'inégalité arithmético-géométrique nous assure que la décomposition optimale est un partage en quatre parties égales de 1998. Le produit $\prod_4 = (\frac{1998}{4})^4$ est alors maximal. Mais $\frac{1998}{4}$ n'est pas entier. Il faut envisager une autre décomposition de 1998 en une somme de 4 entiers : 1998 = x+y+z+t. On utilisera une propriété fort utile pour cela : **l'écart entre deux nombres de la décomposition (x, y, z, t) est soit 0, soit 1.** Supposons en effet qu'il y ait entre x et y un écart supérieur strictement à 1 (c'est-à-dire y-x>1). On pourrait alors remplacer la décomposition x+y+z+t par (x+1)+(y-1)+z+t sans modification de la somme, mais avec un gain sur le produit : en effet (x+1)(y-1) -xy = y-x-1 > 0, donc (x+1)(y-1) > xy.

Comme $\frac{1998}{4}$ est égal à 499,5 et que l'écart entre deux des quatre nombres x, y z et t est égal à 0 ou à 1, ces quatre nombres ne peuvent prendre que la valeur 499 ou 500.

La décomposition en nombres entiers optimale est ainsi :

1998 = 499+499+500+500, donnant le produit maximal $P_4 = 499^2.500^2$.

On peut comparer ci-contre (en valeur approchée pour le premier) le produit maximal $\prod_4$ obtenu avec un partage non entier et le produit maximal P_4 obtenu en respectant la contrainte d'un partage en nombres entiers.

On constate bien que $P_4 \leq \prod_4$.

Ceci permet de traiter le problème pour un partage de 1998 en n parties.

* Si $\frac{1998}{n}$ est un entier, l'inégalité arithmético-géométrique impose un partage en n nombres égaux à $\frac{1998}{n}$. Le problème est alors réglé.

* Sinon, ce que nous venons de voir indique que nous devons utiliser pour le partage les deux nombres entiers qui encadrent $\frac{1998}{n}$, c'est-à-dire $E(\frac{1998}{n})$ et $E(\frac{1998}{n})+1$ (E représentant la partie entière).

Combien devons-nous prendre de chacun de ces deux nombres ?

Utilisons pour trouver cela la division euclidienne de 1998 par n :

1998=np+r, p et r entiers naturels, $0 \leq r < n$, avec $p = E(\frac{1998}{n})$. Usons d'un jeu d'écriture pour faire apparaître $E(\frac{1998}{n})+1$: $1998 = np - rp + rp - r = (n-r)p + r(p+1) = (n-r).E(\frac{1998}{n}) + r\,[E(\frac{1998}{n})+1]$. Nous avons bien partagé 1998 en une somme de n termes tous égaux à $E(\frac{1998}{n})$ ou à $E(\frac{1998}{n})+1$. Cela revient d'ailleurs à dire que $\frac{1998}{n}$ est barycentre de $E(\frac{1998}{n})$ et de $E(\frac{1998}{n})+1$ affectés respectivement des coefficients $\frac{n-r}{n}$ et $\frac{r}{n}$.

Le produit maximal, pour n quelconque (en généralisant ce qui a été fait pour n=4), est alors : $[E(\frac{1998}{n})]^{n-r}.[E(\frac{1998}{n})+1]^r$

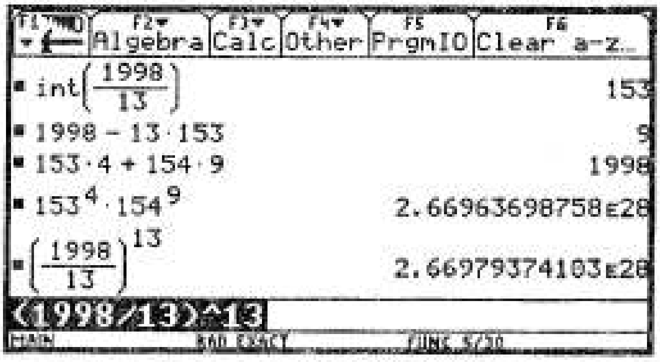
Un exemple, pour appliquer cette formule lumineuse au cas n=13 (par hasard) :

On trouve $E(\frac{1998}{13})=153$, r =9 et n-r = 4.

D'où le partage optimal de 1998 : 153.4 + 154.9, qui donne le produit maximal :

$P_{13} = 153^4 \cdot 154^9$

Ce nombre est bien inférieur au produit $\prod_{13}$ issu du partage en 13 parties égales de 1998.



Nous pouvons désormais définir une nouvelle suite u(n) permettant de calculer le produit maximal pour un partage de 1998 en n termes <u>entiers</u> :

$$\mathbf{u(n) = [E(\frac{1998}{n})]^{n-r}.[E(\frac{1998}{n})+1]^{r}.}$$

Les commandes de la TI-92 permettent de définir cette suite :

- $Int(\frac{1998}{n})$ permet d'obtenir la partie entière de $\frac{1998}{n}$;

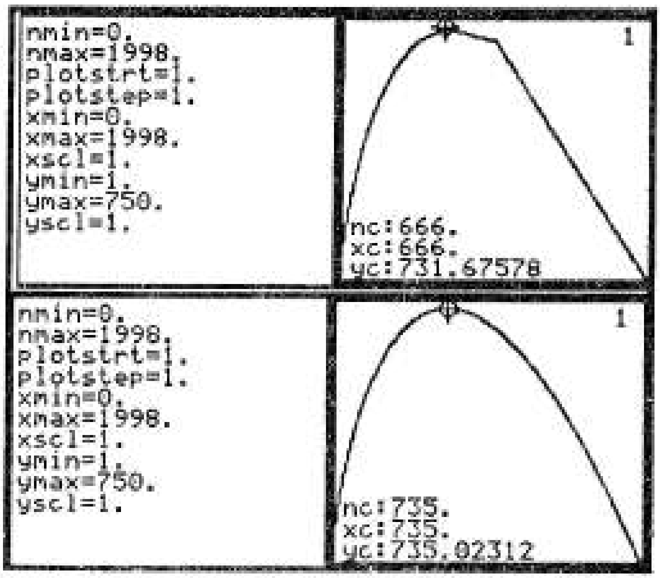
- r est le reste de la division euclidienne de 1998 par n, donc $r=1998-n.E(\frac{1998}{n})$.

L'écriture de la suite dans l'application initiale (ou l'éditeur de suites) est longue mais ne pose pas de problème théorique particulier. Comme pour la suite déjà étudiée, donnant le produit pour un partage en n parties égales, on écrira en fait pour la calculatrice le logarithme de la suite, pour réduire le pic de la représentation graphique.

Il semble ici (cf. ci-contre) que le produit soit maximal pour un partage de 1998 en 666 morceaux (donc tous égaux à 3). On aurait ainsi le produit maximal égal à $P_{666} = 3^{666}$.

Nous avons reproduit ci-contre plus bas la représentation graphique de la suite donnant le produit Π_n pour un partage en n parties égales.

La comparaison des deux graphiques peut donner lieu à quelques observations, quelques conjectures, quelques études complémentaires... dont nous laissons le soin à nos lecteurs attentifs.



Nous avions trouvé un produit maximal (en partage en termes égaux, non nécessairement entiers) pour n=735 : $\Pi_{735} = (\frac{1998}{735})^{735}$. Bien entendu $P_{666} \leq \Pi_{735}$.

Où l'on finit par quelques éléments de preuve.

Supposons trouvé le produit $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$ maximal avec $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1998$. <u>Supposons q'un a_i soit supérieur ou égal à 5</u>. Mais alors on pourrait le couper en deux de la façon suivante :

- si a_i est pair (donc $a_i \geq 6$), on aurait $\frac{a_i}{2}\frac{a_i}{2} = \frac{a_i^2}{4} > \frac{6a_i}{4} > a_i$;

- si a_i est impair (donc $a_i \geq 5$), on aurait $\frac{a_i-1}{2}.\frac{a_i+1}{2} = \frac{a_i^2-1}{4} > \frac{5a_i-1}{4} = a_i + \frac{a_i-1}{4} > a_i$.

Conclusion : le partage optimal (si le nombre de parts n'est pas imposé) ne contient que des 2, des 3 ou des 4. En fait il ne contient que des 2 et des 3, puisque 4 peut être remplacé, sans changement de produit ni de somme, par 2.2.

Le problème n'est pas résolu pour autant : combien de 2 et combien de 3 ? Observons le partage optimal sur les premiers naturels :

- pour 5 : un seul choix possible, 5 = 2+3, produit maximal 2.3 = 6 ;
- pour 6 : deux choix possibles (6 = 3+3 et 6=2+2+2) ; le produit maximal est assuré par 3.3=9 ;

- pour 7 : un seul choix possible, 7= 2+2+3 ; le produit maximal est 2.2.3 = 12 ;

- pour 8 : deux choix possibles (2+2+2+2, ou 3+3+2) ; c'est le deuxième choix qui est optimal et donne le produit 18 (en fait, on retrouve le choix fait pour 6, il vaut mieux prendre 2 termes égaux à 3 que 3 termes égaux à 2).

Finalement, si nous voulons partager un nombre N en une somme de termes positifs de produit maximal, il nous faut effectuer la division euclidienne du nombre N par 3 :

- soit N = 3p ; le partage optimal de N est alors N=3+3+...+3 *(p termes)* ; le produit maximal est 3^p ;

- soit N = 3p+1 ; le partage optimal de N est alors 3+3...+3*(p-1 termes)*+2+2 ; le produit maximal est $3^{p-1}.2.2=3^{p-1}.4$;

- soit N = 3p+2 ; le partage optimal de N est alors 3+3...+3*(p termes)*+2 ; le produit maximal est $3^p.2$.

Comme 1998 est un multiple de 3, son partage en une somme d'entiers de produit maximal est bien 3^{666}.

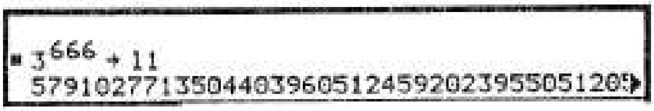
La TI-92 offre d'ailleurs la possibilité de voir ce nombre "en entier" : il suffit pour cela de :

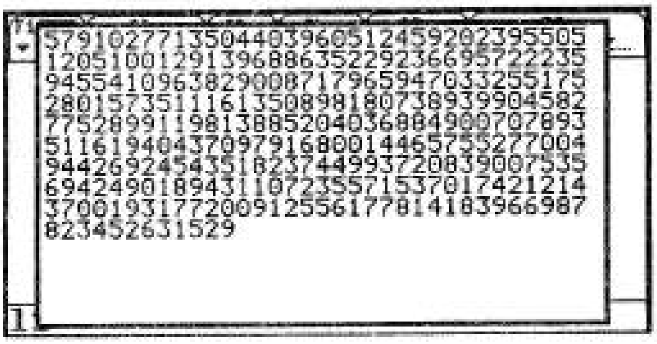
- le stocker dans une liste (l1 par exemple) ;

- aller chercher la liste l1 dans le répertoire *Var-Link* ;

- en demander le contenu via le menu F6 *Contents* (contenu), cf. sur ce point le TP n°1.

On obtient ci-contre le nombre qui a été le but d'un aussi long détour...





<u>Remarque, morale et critique de la morale.</u>

Ce problème est une version complexe d'un problème bien connu : on dispose, pour clôturer un champ rectangulaire, d'une certaine longueur de fil L. Comment choisir la largeur et la longueur du champ pour que l'aire soit maximale ? Cela revient à partager $\frac{L}{2}$ (le demi-périmètre) en deux nombres positifs x et y de produit maximal. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, nous savons que **la forme optimale est la forme carrée** (x=y).

Certains philosophes ou/et mathématiciens, comme Kepler (dans *L'harmonie du monde*) ou Leibniz (dans les *Essais de Théodicée sur la bonté de Dieu...*), considéraient que de telles "coïncidences" étaient une preuve manifeste de la perfection du monde, preuve manifeste d'une volonté divine.

A cette foi naïve répondit Voltaire, qui écrit en 1758 *Candide, ou l'optimisme* :

Il est démontré(...) que les choses ne peuvent pas être autrement : car tout étant fait pour une fin, tout est nécessairement pour la meilleure fin. Remarquez bien que les nez ont été faits pour porter des lunettes, aussi avons-nous des lunettes. Les jambes sont visiblement faites pour être chaussées et nous avons des chausses. Les pierres ont été formées pour être taillées et pour en faire des châteaux ; aussi monseigneur a un très beau château...

Petite digression philosophique après une décomposition optimale et laborieuse de 1998, année d'examen (pour les élèves de Terminale). On concluera en accolant l'adjectif "optimal" au mot "année", plutôt qu'au mot "décomposition", afin que tout aille pour le mieux dans la meilleure des années... possibles !

Défi n°5
Où l'on évoque la probabilité
du désordre maximal.

Les questions

*** Quelle est la probabilité qu'une permutation de 35 élèves (pour 35 places) aboutisse à une disposition où personne ne retrouve sa place ?**

* Généralisons un peu : soient n élèves, dont chacun dispose d'un parapluie. Chacun le dépose à l'entrée de la salle et récupère un parapluie au hasard en sortant. Quelle est la probabilité que personne ne retrouve le sien ?

*** Question subsidiaire : est-ce-que cette question a un rapport avec le calcul de e ?**

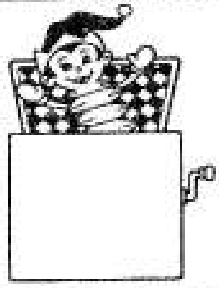
Pour la petite histoire...

Lors du devoir surveillé n°6 (consacré justement au calcul approché de e, cf. chapitre n°4), les places des 35 élèves présents ont été tirées au sort. L'on constata alors que personne n'avait retrouvé sa place habituelle. La question se posa alors : était-ce un évènement très surprenant ? Cette question naïve devait déboucher sur ce dernier défi.

Et une réponse...

Pour cause de délai d'impression de cet ouvrage, une seule réponse est proposée, celle du professeur.

Eléments de réflexion sur le défi n°5



1. Une première recherche "artisanale".

Nous savons combien il y a de dispositions possibles pour 35 élèves et 35 places (chaque élève n'utilisant qu'une seule place et une place étant occupée par un seul élève) : 35 ! dispositions possibles. C'est exactement le nombre de bijections existant entre deux ensembles de 35 éléments. On appelle ces bijections entre un ensemble fini et lui-même des permutations.

Résoudre le problème posé suppose de déterminer combien il y a, parmi toutes ces permutations, de permutations pour lesquelles aucun élément n'a pour image lui-même. De telles permutations sans point fixe sont appelées des dérangements.

Par exemple, pour les 3 objets ... il existe 2 dérangements :

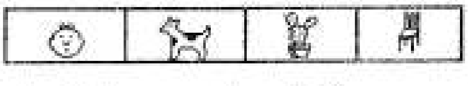
- un dérangement
- et l'autre

Le problème se complique bien sûr si l'on recherche le nombre de dérangements pour 35 élèves...

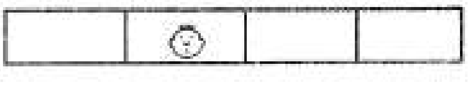
Commençons par fixer les notations que nous utiliserons : nous appellerons d(n) le nombre de dérangements de n objets. Pour n petit, il est facile de compter :
- d(1) = 0 (c'est assez évident) ;
- d(2) = 1 ;
- d(3) = 2 (nous l'avons compté ci-dessus).

Comment poursuivre ? Nous avons au moins deux pistes possibles :
- nous pouvons ôter de 35! le nombre de permutations qui ont exactement un point fixe, le nombre de permutations qui ont exactement deux points fixes, etc. ; la réalisation d'un tel calcul est assez délicate. Nous y reviendrons à la fin de ce défi ;
- nous pouvons essayer de trouver une relation de récurrence en réfléchissant aux mécanismes de passage d'un rang au rang suivant. Voyons ce qui se passe par exemple pour le calcul de d(4) :

Nous allons réaliser ce dénombrement en essayant de privilégier les procédures d'économie de comptage, pour tenter de trouver des mécanismes généraux de passage d'un terme de la suite à son suivant.



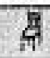
Le bonhomme peut être placé à la seconde, troisième ou quatrième place. Ces trois positions sont équivalentes pour la suite des calculs. Aussi il nous suffit de compter les dérangements avec le bonhomme à la seconde place et nous multiplierons le nombre trouvé par 3 pour obtenir d(4) : première économie de comptage.



Une fois casé le bonhomme, où peut-on placer le chien ?
- soit à la première place :

Il nous restera alors à réaliser un dérangement pour le cactus et le fauteuil , qui sont isolés à la troisième et quatrième place : <u>$d(2)$ possibilités</u> ;

- soit à la troisième ou la quatrième place : la position du bonhomme étant arrêtée, nous avons trois objets à ranger dans trois places (cf. ci-dessous). Mais pour chacun d'entre eux, il y a une place interdite (celle que nous avons grisée ci-dessous).

Position initiale				
Position finale				

Nous avons donc un dérangement à réaliser pour 3 objets c'est-à-dire <u>$d(3)$ possibilités</u>.

Conclusion : $d(4) = 3[d(2)+d(3)] = 9$.

L'organisation de ce calcul nous a permis d'aller vite. Mais elle nous donne surtout un procédé de généralisation. Nous établirions de la même façon que $d(5) = 4[d(3)+d(4)]$.

Plus généralement encore, en considérant n éléments et en reproduisant exactement le même raisonnement que celui suivi pour 4 éléments (c'est-à-dire plaçant d'abord le premier élément à la deuxième place, puis en plaçant le deuxième élément soit à la première place, soit à une autre des places possibles), nous obtiendrons la formule de récurrence :

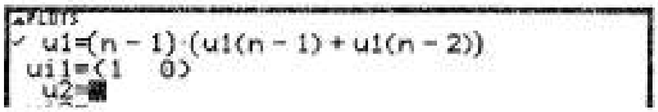
$$\mathbf{d(n) = (n-1)\,[d(n-1) + d(n-2)]}$$

2. La résolution du premier problème.

Le problème de probabilité posé peut alors être traité. La suite $d(n)$ peut être obtenue, soit en valeur approchée, via l'éditeur de suites, soit en calcul exact, via l'application initiale.

Pour un calcul de probabilité, et pour un indice de la suite raisonnable, le calcul approché est acceptable. La suite $d(n)$ est définie en u1 dans l'éditeur de suites.

Puisque la récurrence est double, nous devons indiquer les deux premières valeurs prises par la suite (dans l'ordre inverse, exigence étrange du logiciel).



Un tableau de valeurs permet d'obtenir les valeurs successives de la suite $d(n)$. Attention, il est nécessaire de préciser en Window que la suite commence pour n=1 (c'est-à-dire que les deux termes initiaux donnés correspondent aux rangs 1 et 2).

1.	0.	
2.	1.	
3.	2.	
4.	9.	
5.	44.	
6.	265.	
7.	1854.	
8.	14833.	

Il est alors possible de calculer <u>une valeur approchée</u> de $d(35)$ et de répondre à la question posée : la probabilité de l'événement "aucun élève ne se retrouve à sa place" est égale au rapport entre le nombre de permutations sans points fixes, $d(35)$, et le nombre total de permutations, 35!.

Deux remarques sur ce résultat :

- le fait qu'aucun élève ne se retrouve à sa place d'origine était donc moins probable que l'événement contraire. Cependant, il ne s'agit pas pour autant d'un événement exceptionnel : la probabilité reste assez raisonnable ;

- la question subsidiaire concernait un rapport éventuel de la probabilité trouvée avec e. Cette probabilité (nécessairement comprise entre 0 et 1) pouvait difficilement être égale à e... Elle ne peut avoir un rapport qu'avec une fonction f de e telle que f(e) soit entre 0 et 1. On peut penser à la fonction inverse pour au moins deux raisons :

- la probabilité trouvée est de l'ordre de $\frac{1}{3}$, et e est de l'ordre de 3 ;

- la fonction $x \to \frac{1}{x}$ envoie tous les nombres supérieurs à 1 dans l'intervalle]0, 1[(et réciproquement). Essayons donc :

Miracle ! La probabilité trouvée semble bien être égale à $\frac{1}{e}$... La différence entre les deux nombres <u>en valeur approchée</u> semble être de l'ordre de 10^{-14}.

$\frac{u1(35)}{35!}$	.367879441171
$\frac{1}{e}$	.367879441171
$\frac{u1(35)}{35!} - \frac{1}{e}$	-1.E-14

Cette différence cependant n'est pas fiable : avec cet ordre de grandeur, nous sommes aux limites de la précision de la calculatrice en calcul approché. Alors, serait-il possible que la probabilité trouvée soit égale à e ? La réponse se trouve dans le devoir surveillé n°6 (cf. chapitre 4) :

- e n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire n'est pas le quotient de deux entiers naturels, donc $\frac{1}{e}$ n'est pas un nombre rationnel non plus ;

- or la probabilité calculée, égale à $\frac{d(35)}{35!}$ est bien le quotient de deux nombres entiers.

Ainsi il y a seulement un rapport de proximité, et non pas d'égalité, entre la probabilité trouvée et $\frac{1}{e}$. Mais ce résultat relance le problème :

- pourquoi cette proximité ?
- si le nombre d'élèves avait été plus important (ou moins important), aurait-on eu le même résultat (ou un résultat meilleur) ?

Répondre à ces questions suppose de traiter le problème dans un cadre plus général. D'où le remplacements des élèves par les parapluies et le remplacement du nombre 35 par le nombre n.

3. Étude du problème général

Commençons cette étude par une question : aurait-on pu trouver une proximité avec e si l'indication n'avait pas été donnée ? Cela pose une question plus générale : que peut-on faire pour étudier une suite dont l'expression récurrente est seule connue :

$d(n) = (n-1)[d(n-1) + d(n-2)]$? Il existe des méthodes systématiques qui ne sont pas du niveau d'une Terminale S. Sans ces méthodes, nous ne sommes pas pour autant démunis. Nous pouvons d'abord comparer cette nouvelle suite aux suites connues.

Une comparaison "interne" consiste à rechercher des régularités dans le déroulement de la suite : est-elle arithmétique, géométrique ou quasi-géométrique... Ceci peut nous amener à faire les quotients des termes successifs :

Une telle observation débouche assez facilement sur le fait que le rapport de d(n) et de d(n-1) ressemble à n (attention, dans l'éditeur de suites de la TI-92 fonctionne toujours en calcul approché).

$\frac{u1(11)}{u1(10)}$	10.9999992509
$\frac{u1(20)}{u1(19)}$	20.
$\frac{u1(49)}{u1(48)}$	49.

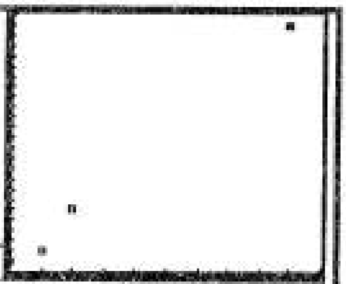
Ainsi $\frac{d(n)}{d(n-1)}$ ressemble à n, $\frac{d(n-1)}{d(n-2)}$ ressemble à (n-1). Par produit, on peut conjecturer un rapport entre d(n) et la suite n!. Du reste, on sait bien que $\frac{n!}{(n-1)!}$ est égal à n.

On peut aussi procéder à **une comparaison "externe"**, en confrontant d(n) à une suite "naturellement proche". Les dérangements sont liés aux permutations (puisque tout dérangement est une permutation particulière, sans point fixe). On peut donc comparer le nombre de dérangements de n objets, c'est-à-dire d(n) au nombre de permutations de n objets, c'est-à-dire n!. On retrouve encore par cette comparaison externe la suite n!. Nous disposons de plusieurs méthodes pour cette comparaison.

Une méthode de comparaison graphique.

La suite u1 représente la suite d(n), la suite u2 représente la suite n!. Le mode graphique *custom* (dans le menu *F7* de l'éditeur de suites) permet de représenter quelques points de coordonnées (u1(n), u2(n)), c'est-à-dire (d(n), n!).

n	u1	u2
1.	0.	1.
2.	1.	2.
3.	2.	6.
4.	9.	24.
5.	44.	120.
6.	265.	720.
7.	1854.	5040.



Du fait de la croissance très rapide des deux suites, il n'est pas possible de distinguer assez de points de la représentation graphique sur l'écran (cf. ci-dessus) pour avancer une conjecture très assurée sur le rapport des deux suites. Les points obtenus semblent vaguement alignés avec l'origine du repère (ce qui traduirait une relation de proportionnalité entre les deux suites).

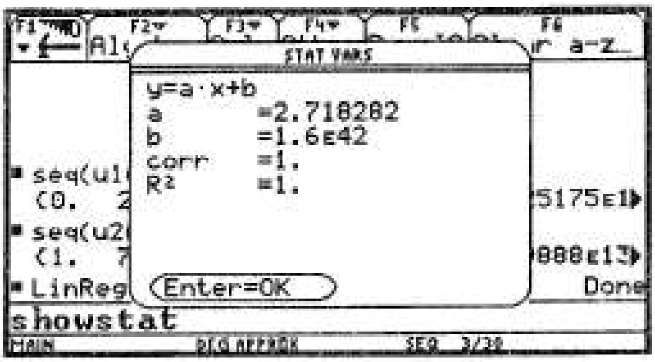
Une méthode de comparaison statistique

Les méthodes d'étude statistique permettent de dépasser les contraintes graphiques et de prendre en compte beaucoup plus de points de coordonnées (d(n), n!). Il s'agit, pour ces points, de déterminer l'équation de la droite qui les ajuste "au mieux", au sens des "moindres carrés" (cf. TP n°3). Pour cela, il est commode de stocker dans deux listes un nombre suffisant de termes correspondants des deux suites d(n) et n!, grâce à la commande *seq(u(n), n, i, j, k)* qui permet le calcul des termes de la suite u(n), n variant de i à j par saut de k.

Une fois définies les deux listes, l'application de la commande *LinReg* permet le calcul des coefficients de la droite de régression (cf. résultats ci-dessous).

```
■seq(u1(n),n,1,50,5) → l1
 {0.   265.   14684570.   7.69706425175E1▶
■seq(u2(n),n,1,50,5) → l2
 {1.   720.   39916800.   2.09227898888E13▶
■LinReg l1,l2                          Done
linreg l1,l2
```

La commande *ShowStat* permet d'obtenir l'équation de la droite de régression. On peut, ou non, observer une ressemblance entre le coefficient directeur de cette droite et un nombre réel particulier, e (cette observation suppose d'avoir dans ce processus de recherche, une attitude comparative permanente : ce résultat ne rappelle-t-il pas un résultat connu ?

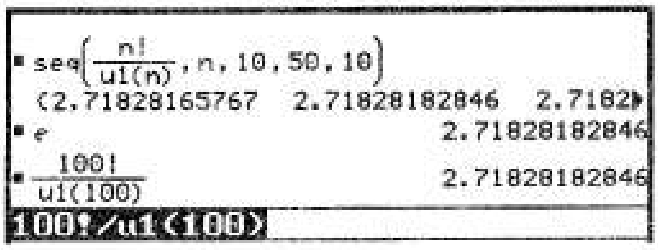


Une méthode de comparaison via l'application initiale

Cela nous conduit (comme nous auraient conduit aussi les procédures de comparaison interne de la suite) à considérer la suite $\frac{n!}{d(n)}$.

Cette observation numérique fait apparaître une grande proximité entre la suite $\frac{n!}{d(n)}$ et e.

La calculatrice, pour la précision qui est la sienne, identifie d'ailleurs les deux valeurs pour n=100.



4. Une conjecture et sa validation.

Formulons précisément la conjecture issue de l'observation :

- le rapport entre n! et d(n) semble être non pas égal à e (impossible, nous l'avons déjà remarqué : e n'est pas un nombre rationnel), mais proche de e ;

- plus précisément, en formalisant mathématiquement cette conjecture, la suite $\frac{n!}{d(n)}$ semble converger vers e. Notons u(n) cette suite.

Connaît-on des suites qui convergent vers e ? Il y en a une infinité, bien sûr. En effet, si la suite u(n) converge vers e, alors la suite $u(n) + \frac{1}{n}$, la suite $u(n) + \frac{\sin n}{n}$... convergent aussi vers e. Cependant, la suite u(n) en question est nécessairement une suite de nombres rationnels, ce qui limite un peu le choix.

Première tentative

La réponse à une question d'un problème dépendant du contexte de ce problème, il est (relativement) naturel de penser à utiliser la suite du devoir surveillé n°6 à l'occasion duquel ce défi avait été lancé : la suite $u(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers e. A-t-on alors $\frac{n!}{d(n)} = u(n)$? Autrement dit, a-t-on :

$$d(n) = \frac{n!}{u(n)} = \frac{n!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} ?$$

Avant de tenter une démonstration générale, il n'est pas inutile d'observer la justesse de cette conjecture sur quelques termes de la suite. Nous allons confronter les premiers termes de la suite d(n) et de la suite $\frac{n!}{u(n)}$ grâce à l'éditeur de suites :

En u2, a été définie la suite $\frac{n!}{d(n)}$.

L'observation de la table indique bien une proximité des deux suites, mais pas une identité...

Cependant, une certaine prudence est nécessaire : du fait des calculs approchés réalisés par les tables de valeurs, il convient de vérifier en calcul exact grâce à l'application initiale.

✓ $u1 = (n-1)\cdot(u1(n-1) + u1(n-2))$
ui1={1 0}
✓ $u2 = \dfrac{n!}{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right)}$

1.	0.	.5
2.	1.	.8
3.	2.	2.25
4.	9.	8.8615384615
5.	44.	44.171779141
6.	265.	264.89524783
7.	1854.	1854.1313869
8.	14833.	14832.915758

La suite $v(n) = \frac{n!}{u(n)}$ est définie dans l'application initiale. Les premiers calculs confirment qu'elle ne coïncide pas avec la suite d(n) : les premières valeurs prises par la suite u(n) ne sont mêmes pas entières !

▪ Define $v(n) = \dfrac{n!}{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right)}$ Done
▪ seq(v(n), n, 1, 5)
$\left\{1/2 \quad 4/5 \quad 9/4 \quad \frac{576}{65} \quad \frac{7200}{163}\right\}$

Deuxième tentative

Faisons le point : nous recherchons une suite u(n) qui converge vers e, telle que $v(n) = \frac{n!}{u(n)}$ soit, pour tout n, un nombre entier. Plusieurs indices peuvent orienter la recherche :

- pour obtenir des nombres entiers, il vaut peut-être mieux faire des multiplications que des divisions ;
- on utilise pratiquement non pas la suite u(n) mais plutôt $\frac{1}{u(n)}$.

Ainsi il serait peut-être plus intéressant de disposer d'une suite qui converge vers $\frac{1}{e}$, c'est-à-dire vers e^{-1} (on retrouve la probabilité rencontrée au début de cette étude). Cela exige d'élargir le champ de la recherche. Nous avons prouvé, dans le cours de calcul intégral, que la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x. Ainsi la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

La suite $v(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ convient-elle ?

- tous ses éléments sont bien des nombres entiers (pour raison de simplification de factorielles) ;
- la suite $\frac{v(n)}{n!}$ converge bien vers $\frac{1}{e}$, c'est-à-dire que la suite $\frac{n!}{v(n)}$ converge bien vers e.

Il reste à prouver l'égalité de la suite v(n) et de la suite d(n). Nous pouvons commencer par observer les premières valeurs prises par les deux suites.

L'éditeur de suites et la table de valeurs semblent indiquer qu'il y a coïncidence (en valeur approchée) entre les premiers termes des deux suites.

✓ $u1 = (n-1)\cdot(u1(n-2$
ui1={1. 0.}
✓ $u2 = n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)$
ui2=
u3=
ui3=

n	u1	u2
1.	0.	0.
2.	1.	1.
3.	2.	2.
4.	9.	9.
5.	44.	44.
6.	265.	265.
7.	1854.	1854.

Petit problème : si l'on calcule les deux suites au rang 50, l'application initiale indique une différence non nulle .entre les deux nombres.

```
■ u1(50)                          1.11887196108E64
■ u2(50)                          1.11887196108E64
■ 1.1188719610782E64 - 1.1188719610781E64
                                              1.E51
■ u1(50) = u2(50)                             false
```

Cette différence est petite : elle porte sur le dernier chiffre significatif de la différence (en effet les deux nombres sont de l'ordre de 10^{64}, il y a 13 chiffres significatifs, le dernier chiffre est donc de l'ordre de $\frac{10^{64}}{13} = 10^{51}$; c'est précisément l'ordre de grandeur de l'écart entre u1(50) et u2(50). Nous ne pouvons donc pas savoir si la différence entre ces deux nombres est due aux approximations liée au calcul approché, ou si elle est due à la non égalité effective des deux nombres.

Une vérification à ce rang impose donc une définition en valeur exacte des deux suites. Cette définition est immédiate pour la suite $v(n) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, grâce à la commande "somme".

La définition de la suite v(n) dans l'application initiale permet le calcul de la valeur exacte de v(50). Nous pouvons contrôler au passage que la valeur approchée trouvée par ce biais coïncide avec la valeur approchée obtenue à partir de l'éditeur de suites.

$$\blacksquare\ \text{Define } v(n) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{k!} \right) \qquad \text{Done}$$

```
■ v(50)
  11188719610782480504630258070757734324▸
■ v(50)                           1.11887196108E64
```

Pour la suite d(n), nous avons deux possibilités :

- soit l'utilisation directe de l'application initiale : les termes successifs de la suite peuvent être obtenus en utilisant la relation de récurrence et les possibilités de rappel de lignes de l'écran.

L'utilisation de la commande *ans(1)* et *ans(2)* permet de récupérer les deux réponses précédentes sur l'écran.

Il suffit alors de modifier le coefficient multiplicateur sur la ligne de commande pour faire apparaître les termes successifs de la suite en valeur exacte.

Évidement, c'est un peu long...

```
F1▾  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6
▾⟵  Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z…
■ 0                                      0
■ 1                                      1
■ (1 + 0)·2                              2
■ (2 + 1)·3                              9
■ (9 + 2)·4                             44
■ (44 + 9)·5                           265
■ (265 + 44)·6                        1854
(ans(1)+ans(2))*6
MAIN         RAD EXACT       SEQ 7/30
```

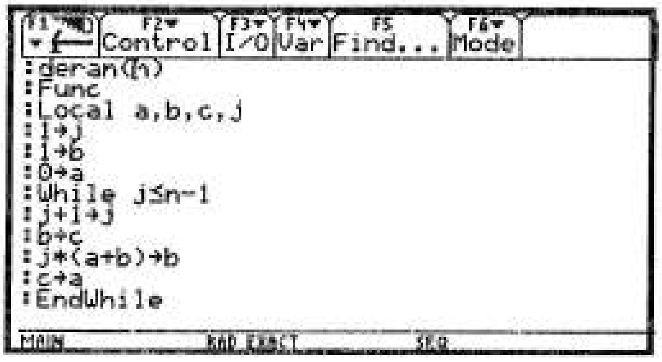
Mais la commande *ans* évite de réécrire les termes successifs qui sont automatiquement rappelés. C'est une aide considérable, étant donnée la longueur des nombres en question.

Nous arrivons ainsi à d(50) (dernière ligne de l'écran ci-contre).

```
F1▾  F2▾     F3▾  F4▾   F5     F6
▾⟵  Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z…
■ (20243015651292662658543671426323878860
  95142173561075514495155255703722230644▸
■ (9514217356107551449515525570372222306▸
  45668243309316246957674522737786670710▸
■ (4566824330931624695767452273778667071▸
  22377439221564961009260516141515468640▸
■ (2237743922156496100926051614151546864▸
  11188719610782480504630258070757734324▸
(ans(1)+ans(2))*49
MAIN         RAD EXACT       SEQ 30/30
```

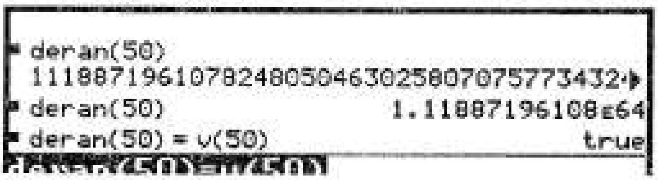
- soit l'écriture d'un programme, en choisissant, dans l'application *Program Editor* le type *Function*. En effet, nous voulons définir une suite, c'est-à-dire une fonction particulière.

Le programme a été nommé deran(n). L'intérêt d'un tel programme est qu'il réalise automatiquement (et donc beaucoup plus rapidement) les itérations faites manuellement dans l'application initiale.

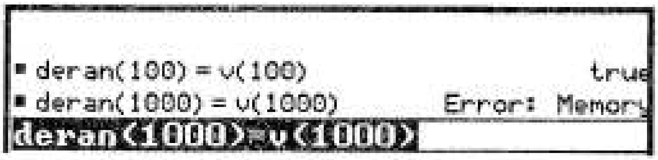


On vérifiera, mode d'emploi en main, que le programme ci-contre permet bien de calculer les termes de la suite d(n).

Nous pouvons ainsi obtenir la valeur exacte de d(50) et vérifier, en calcul exact, que d(50) = v(50) (alors qu'en calcul approché, nous avions eu la réponse *false*).



Cette vérification peut se poursuivre aussi loin que faire se peut, c'est-à-dire tant que les capacités de calcul du logiciel le permettent. On peut voir ci-contre qu'au rang 1000 le logiciel renonce.



Conclusion provisoire : en calcul exact, nous obtenons bien l'égalité des termes des suites d(n) et v(n), tant que l'on ne dépasse pas les capacités de calcul du logiciel. La validation définitive de notre conjecture, c'est-à-dire la preuve que l'on a bien, **pour tout n**, d(n) = v(n) implique une preuve générale qui peut prendre la forme d'un raisonnement par récurrence. La relation définissant d(n) étant du deuxième ordre (d(n) est définie en effet en fonction de d(n-1) et d(n-2)), nous devrons faire une récurrence reposant aussi sur deux rangs successifs.

L'égalité est vraie au rang 1 et au rang 2

En effet :

- $d(1) = 0$ et $v(1) = 1!.(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}) = 0$;
- $d(2) = 1$ et $v(2) = 2!.(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}) = 1$.

Prouvons que la propriété est récurrente, c'est-à-dire que, si elle est vraie à la fois à l'ordre (n-1) et à l'ordre (n-2) elle est aussi vraie à l'ordre n.

Supposons donc que $d(n-2) = (n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}$ et $d(n-1) = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}$. Nous savons calculer alors $d(n) = (n-1)[d(n-1) + d(n-2)]$, soit, en remplaçant d(n-1) et d(n-2) par leurs valeurs :

$d(n) = (n-1)\left[\,(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\,\right]$. Il est naturel de mettre (n-2)! en facteur hors du crochet, ce qui donne :

$$d(n) = (n-1).(n-2)!\ [\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}] = (n-1)!\ [\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}].$$

En développant le facteur (n-1) à l'intérieur du crochet, nous obtenons :

$d(n) = (n-1)!\ [\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}]$. La simplification des deux premières sommes ne laisse qu'un terme, d'où le résultat :

$d(n) = (n-1)!\ [-\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}] = (n-1)!\ [n\frac{(-1)^{n-1}}{n!} + n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}]$. Et enfin :

$d(n) = (n-1)!\ n[\frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}] = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, ce que nous voulions prouver.

Ainsi cette expression générale de d(n) convient pour les deux premiers termes et elle est récurrente : elle est donc vraie pour tout n.

Nous pouvons bien conclure maintenant que le nombre de dérangements de n objets est :

$$\mathbf{d(n) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}.$$

Ce dernier calcul est un peu laborieux, pour établir de façon générale une formule[3] dont l'observation prouvait qu'elle était vérifiée à tous les rangs où la vérification pouvait être faite. Mais, chacun le comprendra, une preuve générale et définitive a une portée infiniment supérieure à un nombre, même très très important de vérifications...

Conclusion : nous posions la question au début de ce défi. Est-il étonnant que le nombre e intervienne dans ce calcul de probabilité ? On peut envisager plusieurs niveaux de réponse.

<u>Premier niveau</u> : il est naturel que le nombre e intervienne, puisque le calcul qui vient d'être fait prouve que le nombre de dérangements est égal précisément au produit de n! par une suite qui converge vers $\frac{1}{e}$.

On pourrait objecter à cette réponse qu'il est tout de même curieux que certains nombres fondamentaux des mathématiques, comme e ou π, interviennent régulièrement au détour d'un calcul. Ainsi nous avons prouvé ici que la probabilité qu'une permutation de n objets soit un dérangement (c'est-à-dire qu'aucun objet ne se retrouve à sa place) converge vers $\frac{1}{e}$; Buffon avait aussi prouvé, si on lance une aiguille de longueur L sur un plancher dont les lattes ont une largeur L, alors la probabilité que l'aiguille rencontre une rainure est de $\frac{2}{\pi}$. Cela relève-t-il du hasard ?

<u>Deuxième niveau de réponse</u> : les objets rencontrés lors d'une étude mathématique dépendent évidemment du contexte de celle-ci :

- l'étude des permutations repose sur des factorielles, comme la définition de e. Il n'est pas étonnant que l'étude des unes nous fasse rencontrer l'autre ;
- l'étude de l'aiguille a un rapport avec la surface couverte par celle-ci (un disque) quand elle tourne. Ceci a évidemment un rapport avec π !

<u>Troisième niveau de réponse</u> : la formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ rappelle en fin de compte qu'en mathématique tout à un rapport avec tout !

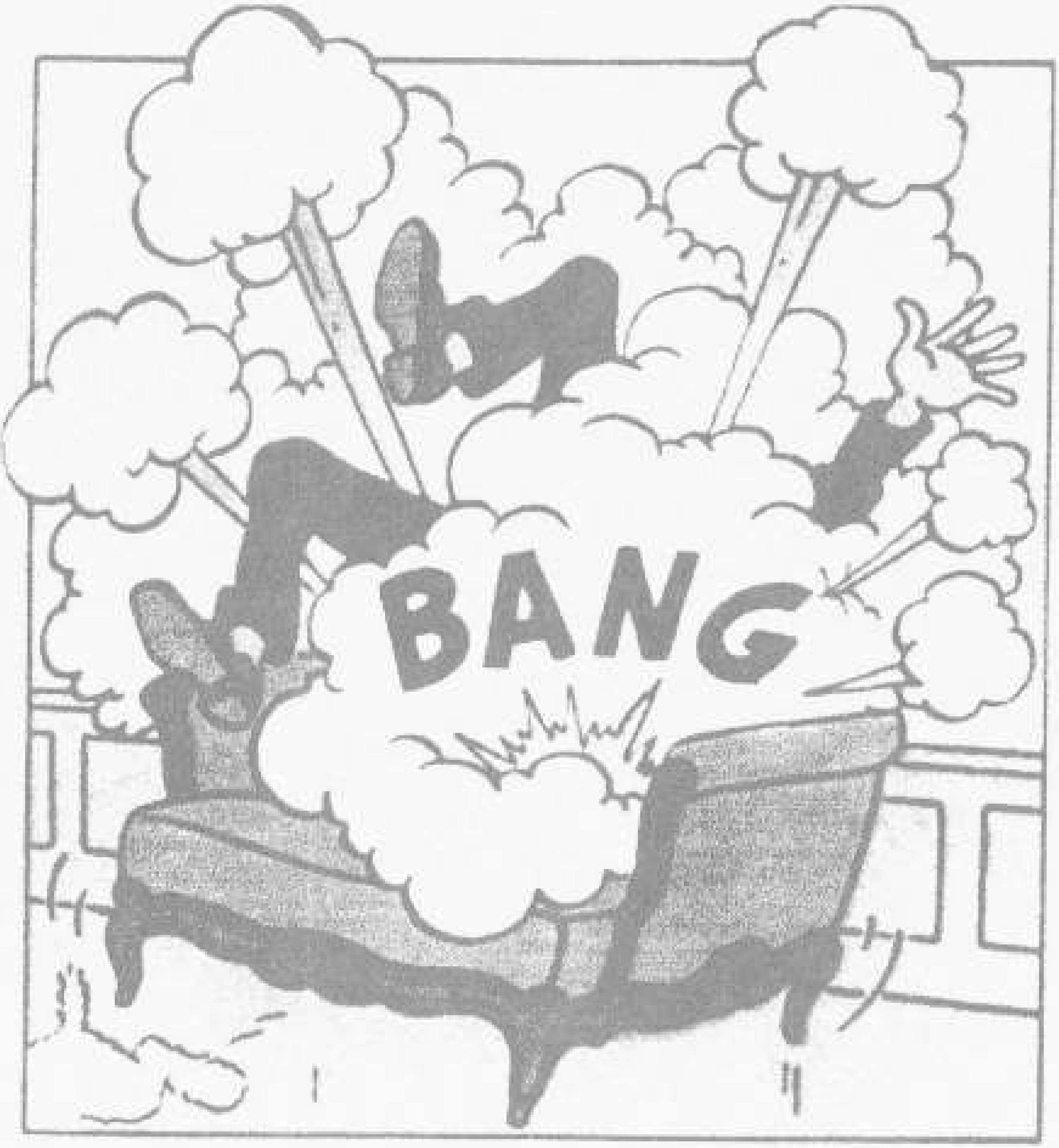
---

[3] <u>Remarque</u> : le lecteur curieux pourra constater que l'expression trouvée peut aussi se mettre, après développement et simplification, sous la forme :

$$d(n) = n! - C_n^1\,(n-1)! + C_n^2(n-2)! + ... + (-1)^p\,C_n^p\,(n-p)! + ... + (-1)^n.$$

Cette expression est tout simplement le résultat du calcul envisagé au début de cette étude, consistant à retrancher du nombre total de permutations les permutations à points fixes. Cette identification, reposant sur les résultats fondamentaux du dénombrement [3], est laissée aussi au soin du lecteur.

Pochette Surprises



DE L'INTÉRÊT DES CHEMINS DE TRAVERSE

C'était un sol montueux, assez accidenté, très propre aux embûches,
et sur lequel on ne se hasarda qu'avec une extrême précaution.
Top et Jup marchaient en éclaireurs, et, se jetant de droite et de gauche
dans les épais taillis, ils rivalisaient d'intelligence et d'adresse.
Mais rien n'indiquait que les rives du cours d'eau eussent été récemment fréquentées,
rien n'annonçait ni la présence ni la proximité des convicts.
Jules Verne, L'Île mystérieuse.

Après les TP, sujets imposés chaque semaine à toute la classe, après les défis, sujets proposés de temps en temps à toute la classe et relevés par les volontaires, les sujets que l'on trouvera ici relèvent de la seule initiative des élèves.

Pour autant, ils ne relèvent pas du hasard et ne sont pas tout à fait étrangers aux problèmes soulevés dans la classe :

- ils naissent parfois de la rencontre entre une question mathématique (les suites récurrentes) et une curiosité historique ou culturelle (*Les mystères du nombre d'or*) ;

- ils naissent parfois de l'intérêt pour une potentialité de la calculatrice (la programmation) insuffisamment traitée en cours (*Fractales sur TI-92*) ;
- ils peuvent aussi naître de la surprise créée par une réponse étrange ou paradoxale de la calculatrice (*Variations autour de l'astroïde*) ;

- ils peuvent aussi être suscités par l'observation numérique des processus plus ou moins rapides de convergence des suites (*Prendre le chemin des écoliers pour atteindre* π) ;

- ils peuvent enfin provenir d'un prolongement théorique d'une question traitée en cours, d'une recherche de généralisation d'une méthode partielle de calcul (*Sur le chemin des combinaisons*).

Le sujet est d'abord proposé à la classe par un élève motivé, les élèves intéressés se regroupent pour le traiter. Le professeur propose des références bibliographiques pour approfondir la question. De petits exposés à la classe par chaque équipe permettent de suivre l'avancée des travaux. Enfin l'écriture d'un article permet à l'équipe de fixer ses idées et à la classe d'avoir connaissance du travail réalisé.

Le chemin de traverse emprunté par quelques uns leur a ainsi permis de découvrir quelques nouveaux paysages mathématiques. La relation de leurs travaux a aussi permis à l'ensemble de la classe d'avoir un aperçu du voyage.

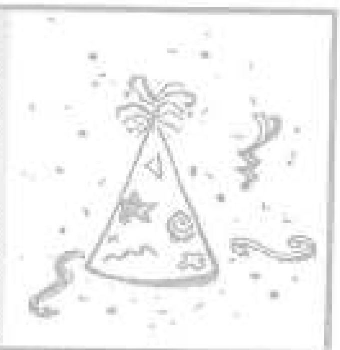
C'est en quelque sorte l'aboutissement du travail de l'année : la manifestation d'une curiosité, la mise en oeuvre d'une méthode de recherche, l'aptitude à travailler en groupe, la réalisation d'un rapport final, tout ceci a été facilité par le cadre de travail mis en place (TP, défis, discussions dans la classe).

C'est en même temps une préparation aux travaux de recherche (TIPE en classes préparatoires par exemple) que les élèves rencontreront dans leurs études ultérieures.

Place aux éclaireurs donc !

A la pour"suite" du nombre d'or

Φ



Contribution de Audrey Arnoux, Mathilde Lieber et Mathieu Mouls
(avec l'aide du professeur)

I. Quid ?

C'est en 1932 que Matila Guyda - prince roumain, diplomate, ingénieur - aurait inventé le terme de "nombre d'or", qui correspondrait à la valeur d'une proportion particulièrement esthétique. Cette "divine proportion" aurait soi-disant été utilisée depuis l'antiquité par architectes et peintres dans la création de leurs chefs-d'oeuvre. En effet, on retrouverait ce rapport "doré" dans la construction du Parthénon, du temple de Louksor, de la pyramide de Chéops, de cathédrales... et dans de très nombreux tableaux, comme ceux de Poussin, Seurat, Cézanne ou encore Matisse.

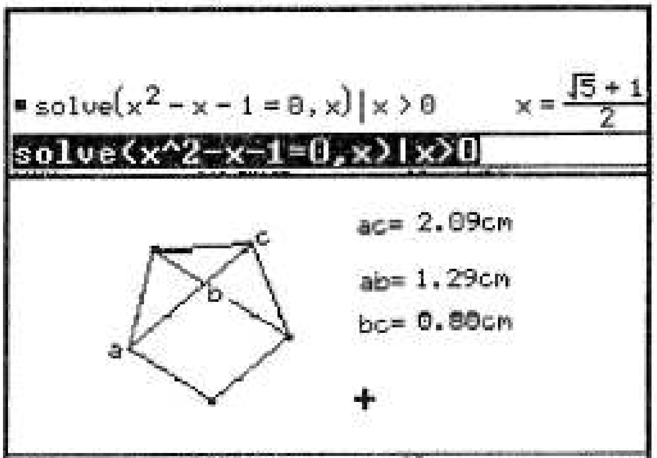
La naissance de Vénus, de Boticelli
Les spécialistes ont traqué dans les proportions de ce chef d'oeuvre le nombre d'or.

L'architecte Le Corbusier est allé jusqu'à élaborer ~~un~~ système de mesures qui met en relation les proportions humaines et le nombre d'or pour bâtir les "maisons du bonheur".

Le nombre d'or est en fait un nombre irrationnel dont la valeur exacte est égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit environ 1.618, et dont le symbole est la lettre grecque Φ (phi), par allusion au sculpteur Phidias.

Φ est ainsi la racine positive de l'équation $x^2-x-1=0$.

On retrouve aussi le nombre d'or dans le pentagone régulier (cf. ci-contre), dont les diagonales se coupent en un partage en extrême et moyenne raison, c'est-à-dire que $\frac{ac}{ab} = \frac{ab}{bc} = \Phi$. Les grecs accordaient d'ailleurs au pentagone étoilé, le pentacle, une valeur symbolique et même mystique...



Le nombre d'or serait l'explication mathématique, incontestable, de la beauté dans l'art et l'univers. Nous serions même "mystérieusement accordés à ce nombre... qui agit sur nos sens et par eux sur notre cortex cérébral", si l'on en croit le médecin Lucien Israël. Mais le pouvoir de ce nombre n'est-il pas un mythe ? Peut-il exister une loi mathématique de la beauté ? D'après certains, il existerait en fait une confusion entre $\frac{8}{5}$, qui est une proportion triviale très utilisée en peinture, et Φ. D'ailleurs, est-ce que la science peut tout expliquer à l'aide d'un seul nombre ?

2. Où l'on retrouve les suites

En partant de l'équation de définition du nombre d'or, $x^2-x-1=0$, on peut écrire ce nombre sous de nombreuses formes, par exemple :

* $\Phi^2-\Phi-1=0$ équivaut à $\Phi^2 = 1+\Phi$, c'est-à-dire $\Phi=\sqrt{1+\Phi}$. En itérant le procédé, on peut alors définir le nombre d'or par $\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$;

* $\Phi^2-\Phi-1=0$ équivaut à $\Phi^2 = \Phi+1$, c'est-à-dire $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$. En itérant le procédé, on peut alors définir le nombre d'or comme $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{...}}}$.

Ces relations nous conduisent à rechercher des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, telles que Φ soit solution de l'équation $x=f(x)$.

<u>Première suite</u> : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

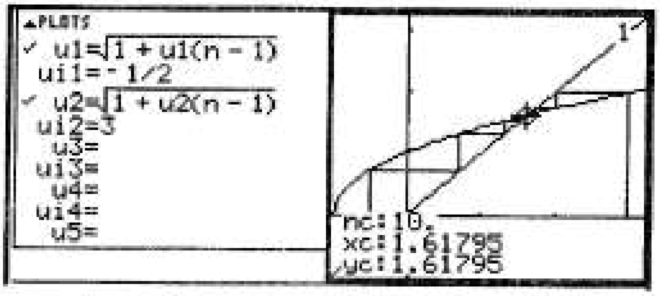
La définition de la suite impose de choisir $u_0 \geq -1$. Il est immédiat alors que tous les termes successifs sont alors positifs, ce qui assure la définition de la suite. La fonction qui à x associe $\sqrt{1+x}$ est croissante, on en déduit que la suite u est monotone. Son sens de variation dépend alors de la relation entre ses deux premiers termes :

* $u_0 \leq u_1$ équivaut à $u_0 \leq \sqrt{1+u_0}$ équivaut à $u_0^2 - u_0 - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $u_0 \leq \Phi$;

* on démontrerait de même que $u_0 \geq u_1$ équivaut à $u_0 \geq \Phi$.

Ainsi, si $u_0 \leq \Phi$, la suite est croissante ; on démontre par récurrence qu'elle est majorée par Φ. Elle converge donc vers l'unique racine positive de l'équation $x=\sqrt{1+x}$, c'est-à-dire Φ. Si au contraire $u_0 \geq \Phi$, la suite est décroissante ; on démontre par récurrence qu'elle est minorée par Φ.

Elle converge donc aussi vers l'unique racine positive de l'équation $x=\sqrt{1+x}$, c'est-à-dire Φ. Ci-contre un point de vue graphique sur les deux types de suites, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent toutes deux vers le nombre d'or.



<u>Deuxième suite</u> : $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{u_n}$

Il est évident que, si l'on choisit pour u_0 une des solutions de l'équation $x^2\text{-}x\text{-}1=0$ (c'est-à-dire $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$), celle-ci vérifiera alors $x = 1+\dfrac{1}{x}$ et la suite sera constante. Il est évident aussi que l'on ne peut pas choisir $u_0 = 0$.

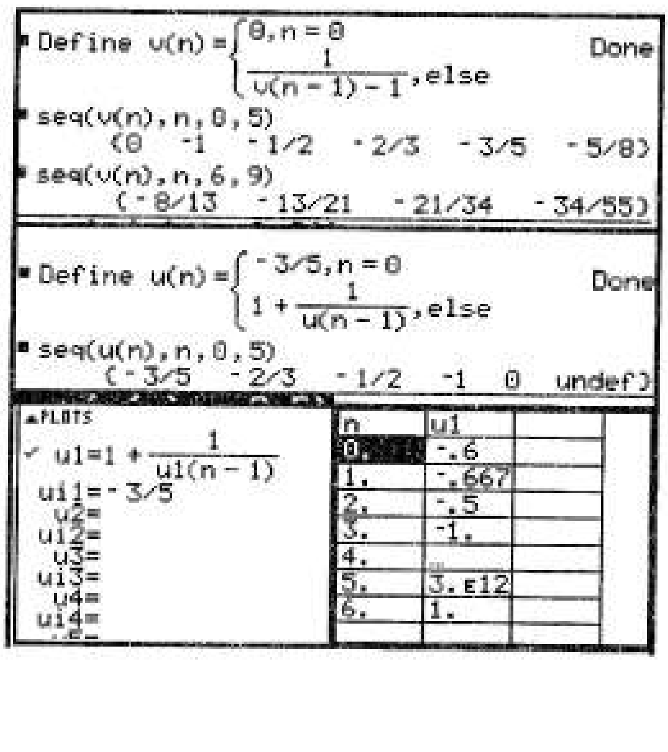
Si u_0 est strictement positif, on prouve facilement par récurrence que tous les termes de la suite sont alors strictement positifs. Si u_0 est strictement inférieur à -1, alors $\dfrac{1}{u_0}$ sera strictement supérieur à -1 et u_1 sera ainsi strictement positif, ce qui assurera la définition de la suite.

Un problème se pose si le premier terme de la suite est compris entre -1 et 0. Par exemple, si u_0 est égal à -1, alors u_1 est égal à 0 et la suite n'est plus définie à partir du rang 2. Pour quelles valeurs initiales de la suite "tombera-t-on" ainsi sur 0 ? Il faut pour cela redescendre la suite "à l'envers" : $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{u_n}$ équivaut à $u_n = \dfrac{1}{u_{n+1}-1}$. On aura ainsi $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $u_n = -1$, si et seulement si $u_{n-1} = -\dfrac{1}{2}$... Pour découvrir la suite des valeurs initiales interdites, nous pouvons définir une nouvelle suite v :

$v_0 = 0$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n - 1}$.

Voici la suite des premières valeurs initiales interdites pour la suite u : si par exemple nous choisissons $u_0 = -\dfrac{3}{5}$ la suite u ne sera plus définie dès le 5ième terme, comme on peut le vérifier ci-contre.

C'est l'occasion de vérifier l'importance du mode de calcul : dans l'application initiale, le calcul est <u>exact</u>. Par contre, si l'on utilise l'éditeur de suites qui fonctionne en mode <u>approché</u> (cf. ci-contre), le 5ième terme de la suite est bien "défini" (on obtient une "grande valeur", 3.10^{12}).



<u>Remarque</u> : si l'on considère la suite des valeurs "interdites" pour le premier terme de la suite u_n $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, -\frac{8}{13}, -\frac{13}{21}...)$, on remarque que l'on retrouve les termes successifs de la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... : chaque terme est égal à la somme des deux termes qui le précèdent. Or l'on a démontré en cours que le rapport de deux termes successifs de cette suite convergeait vers le nombre d'or. Ainsi la suite des valeurs interdites pour le terme initial de la suite u converge vers l'opposé de l'inverse du nombre d'or !

Revenons à notre suite u. Si l'on choisit pour terme initial de la suite u un nombre n'appartenant pas à la suite des valeurs interdites que nous venons de mettre en évidence, il semble que les termes sont tous positifs à partir d'un certain rang :

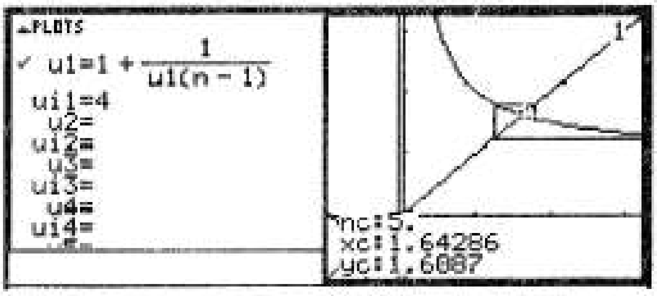
- c'est facile à prouver si $\frac{1}{2} < u_0 < 0$. En effet, on a alors $\frac{1}{u_0} < -2$, d'où $u_1 < -1$, ce qui implique $\frac{1}{u_1} > -1$, ce qui implique enfin $u_2 > 0$;

- c'est plus difficile à prouver si $-1 < u_0 < \frac{-1}{2}$ (peut-être parce que c'est dans cet intervalle que se trouvent les valeurs interdites que nous avons mises en évidence...).

Nous allons nous limiter désormais au cas où u_0 est strictement positif.

Une simple observation graphique semble indiquer que la suite n'est pas monotone.

C'est naturel, puisque la fonction $f(x)=1+\frac{1}{x}$ est décroissante. Ainsi, si $u_n < \Phi$, alors $f(u_n) > f(\Phi)$, c'est-à-dire $u_{n+1} > \Phi$.



Cela implique de choisir une autre méthode d'étude que celle des suites monotones bornées. Nous savons déjà que, si u converge, elle ne peut converger que vers l'unique racine positive de l'équation $x = 1+\frac{1}{x}$, c'est-à-dire vers le nombre d'or. Ceci peut nous conduire à examiner la différence entre Φ et les termes de la suite u, plus exactement, la valeur absolue de la différence :

$|u_{n+1} - \Phi| = |1+\frac{1}{u_n} - \Phi|$; or $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$. Ainsi $|u_{n+1} - \Phi| = |1+\frac{1}{u_n} - 1 - \frac{1}{\Phi}| = |\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\Phi}|$.

D'où $|u_{n+1} - \Phi| = \frac{|u_n - \Phi|}{u_n \Phi}$. Or si u_0 est positif, $u_1 = 1+\frac{1}{u_0}$ est nécessairement plus grand que 1, ainsi que tous les termes suivants de la suite u. Nous pouvons donc considérer que tous les termes de la suite (en tronquant éventuellement celle-ci à partir du terme de rang 1) vérifient $\frac{1}{u_n} \leq 1$. D'où $|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{|u_n - \Phi|}{\Phi}$. Par le jeu de dominos habituel, on obtient : $|u_n - \Phi| \leq \frac{1}{\Phi^n}|u_0 - \Phi|$. La suite géométrique de raison $\frac{1}{\Phi}$ converge vers 0, donc (par application du théorème des gendarmes), $|u_n - \Phi|$ converge vers 0 et donc la suite u converge vers Φ.

Fin du détour mathématique... Si on peut émettre quelque doute sur le caractère universel de l'intervention du nombre d'or dans l'univers, il n'en reste pas moins qu'il reste une assez jolie curiosité mathématique !

Les fractales sur TI-92

Contribution d'Alex Guez

Des définitions :

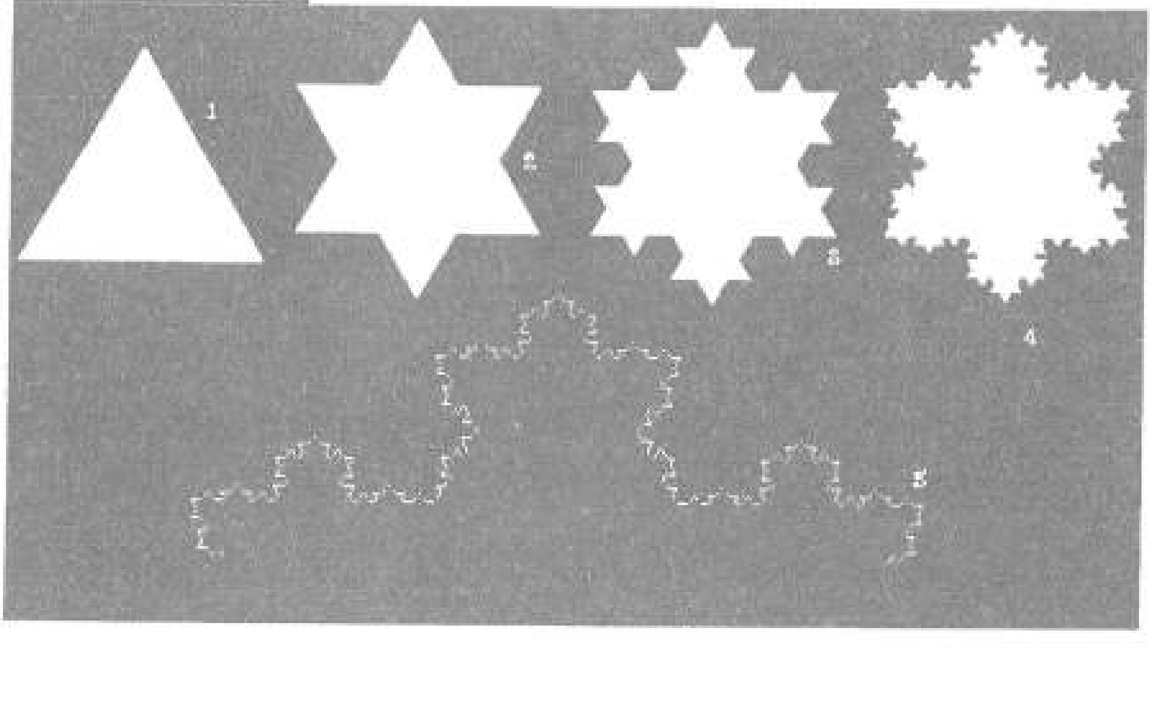
De la définition de *l'encyclopédie Encarta 97*

Fractale : en mathématiques, forme géométrique de structure complexe qui se construit selon des règles utilisant le fractionnement. Les fractales sont souvent à *homothétie interne* : chaque petite portion d'une fractale peut être considérée comme une réduction de la totalité de la figure.

De la définition de *l'encyclopédia Universalis*

Certaines structures très irrégulières, souvent construites par itération, possèdent des symétries de dilatation caractéristiques: l'agrandissement d'une partie est semblable au tout. Le concept de *fractalité* unifie la description de nombreux objets mathématiques ou physiques et quantifie leur degré d'irrégularité. Il a été introduit en 1975 par Benoît Mandelbrot, mathématicien français qui a poursuivi ses recherches aux États-Unis, dans les laboratoires d'I.B.M. Le terme *fractal* , forgé à partir du latin *fractus* (du verbe *frangere* , qui signifie «briser»), souligne le caractère fractionné à l'infini de ces ensembles présentant des irrégularités à toutes les échelles.

De l'exemple :



La figure 2 s'obtient en traçant, au centre de chaque côté du premier triangle équilatéral, un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur réduite à 1/3 par rapport au triangle initial, et ainsi de suite.

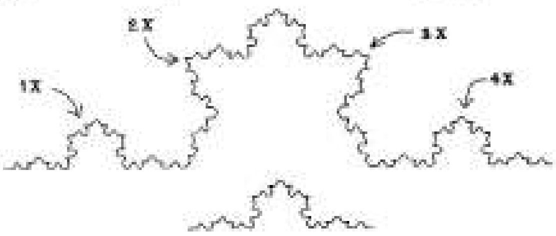
La courbe 5 est une fractale de niveau d'itération 5 nommée «flocon de neige», ou courbe de Helge von Koch.

De l'histoire:

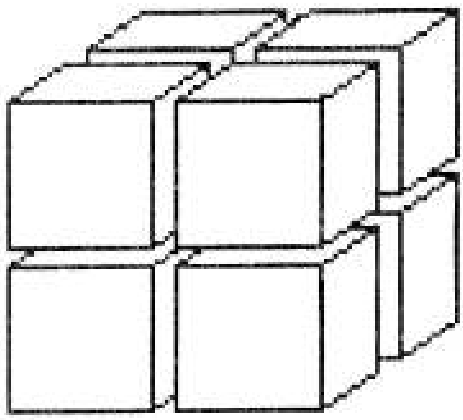
Les mathématiciens du début du 20ème siècle (Georg Cantor, Félix Hausdorff ou Helge von Koch) s'interrogent sur la notion de dérivabilité et construisent toutes sortes de contre-exemples aux règles habituelles du calcul infinitésimal* : des courbes continues mais possédant des tangentes en aucun point, des surfaces et des volumes très irréguliers. On a associé à ces objets une dimension dite de Hausdorff-Besicovitch - définition complexe au demeurant qu'il serait inutile de citer ici. Il en sort une dimension identique à la topologie ordinaire pour une figure régulière (1 pour une ligne, 2 pour une surface, etc...) mais cela n'est pas vrai en général.

Mandelbrot, généralisant les travaux des mathématiciens français Gaston Julia et Pierre Fatou sur les itérations des fonctions complexes, montra l'intérêt de l'introduction d'une telle dimension éventuellement non entière pour caractériser des figures géométriques « *ayant la propriété de pouvoir être décomposées en parties de telle façon que chaque partie soit une image réduite du tout* » c'est à dire une fractale.

Prenons l'exemple de la courbe de Helge von Koch (i.e. le flocon de neige) présenté plus tôt. Si on place côte à côte (voir figure ci contre) une partie de la figure 5 et son image par une homothétie dont la valeur absolue du rapport est 1/3, on s'aperçoit que l'on retrouve 4 fois l'une dans l'autre. C'est à partir de cette caractéristique des fractales (à laquelle Mandelbrot fait allusion dans la citation donnée précédemment) : <u>l'homothétie interne</u> qui définit la dimension fractale homothétique d'un objet.



Prenons par exemple huit cubes identiques, ils forment, assemblés, un gros cube homothétique dont tous les côtés sont deux fois plus grands. Mais, avec des carrés, il suffit d'assembler quatre petits carrés pour faire un carré dont le côté est deux fois plus grand.



Pour *doubler* un cube à 3 dimensions, il faut $8=2^3$ cubes. Pour *doubler* un carré à deux dimensions, il faut $4=2^2$ carrés. On obtient ainsi une relation vérifiée par tout objet à homothétie interne : le nombre de morceaux est égal au

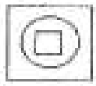
* branche des mathématiques qui traite de la notion de limite, de dérivée, de primitive des fonctions qui permet d'étudier les fonctions et de déterminer les aires et les volumes des solides.

rapport d'homothétie élevé à une puissance égale au nombre de dimensions de l'objet.
Soit $n=s^d$ où n est le nombre de morceaux, s le rapport d'homothétie** et d la dimension.
Pour obtenir d il suffit de faire intervenir les logarithmes : $n=s^d \Rightarrow \log(n) = d \log(s)$

$$\Rightarrow \quad d=\frac{\log(n)}{\log(s)}$$

Dans cette formule de calcul de la dimension, on ne tient pas compte de l'utilisation des logarithmes décimaux ou naturels car le résultat est identique.
Ainsi par cette méthode de calcul, la dimension du flocon de neige est 1.262 en effet il faut 4 morceaux pour obtenir un morceau 3 fois plus grand. $d=\frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.262$

Mais il y a, on le voit bien, un problème pour les disques. En effet il est difficile de faire apparaître une homothétie interne dans un disque. C'est pourquoi nous utiliserons pour trouver la dimension d'un disque une dimension plus générale que celle utilisée précédemment (dimension homothétique) : la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Seule l'une des propriétés nous intéresse (le tout serait trop compliqué à expliquer en détail) : les espaces plus petits ont une dimension inférieure ou égale à l'espace qui les contient. Un disque contient un carré de dimension 2 donc la dimension du disque est supérieure ou égale à 2. Or un carré contient un disque, de ce fait le disque a une dimension inférieure ou égale à 2. On en déduit que la dimension du disque est éxactement 2. Cqfd !



De l'origine :

Tout cet exposé précédent est le fruit d'une réflexion dont l'origine est un livre dont nous tairons le nom : pas de pub. Nous nous proposons donc de narrer l'événement qui fut le point de départ de cette recherche approfondie sur les fractales.

« Un jour, au hasard d'une lecture (un livre très bien mais dont l'adaptation cinématographique laisse un peu à désirer) je vis une représentation géométrique assez simple : , dans un contexte qui laissait à supposer que ce fut l'un des premiers niveaux de complexité d'une fractale.

« Au fur et à mesure que j'avançais dans le récit, je revis des constructions semblables de plus en plus complexes, des lignes enchevêtrées, des carrés de partout, bref quelque chose d'assez compliqué. Ayant par chance dans ma bibliothèque personnelle un livre traitant de fractales, je décidai de le consulter et reconnus sur l'une des pages la figure déjà présentée plus tôt. L'auteur indiquait que le niveau de complexité ou degré d'itération de celle-ci fut trois. Il indiquait aussi que le niveau un est : . Je remarquais aussitôt l'évidence et la trivialité de la construction me permettant d'obtenir le niveau3 à partir du niveau1.

« Si l'on effectue à la figure de niveau1 une rotation de 90° dans le sens positif comme suit :  et si on y ajoute la figure de niveau1 on obtient le niveau2 : 

.Si l'on

** nous parlons de l'homothétie permettant de passer du plus petit morceau au plus gros morceau considérés.

réitère la même construction,mais cette fois à partir du niveau2, on obtient le niveau3 :

« Je me repris vite de l'éblouissement de cette découverte et décidais de mettre en forme un programme permettant de construire cette fractale connue sous le nom de <u>The Harter-Heightway Dragon Curve</u>. L'éditeur de programme que je choisis fut évidemment celui que j'ai sous la main où que je sois et où que j'aille c'est à dire celui de ma TI-92 bien sûr. »

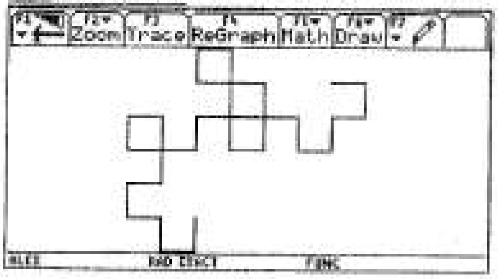
Voici pour ce qui est du lien avec l'utilisation de la TI-92. Le rapport avec les études de mathématiques de l'année est simple : le fait que la mise en forme de ce programme n'eut pas lieu pendant les heures réservées à l'étude des mathématiques. En effet je profitais des rares heures de la semaine où je n'étudiais pas les maths pour me livrer à la rédaction puis à l'écriture du programme dont la simplicité sautera aux yeux du lecteur. Le voici :

```
Prgm
 FnOff
 ClrIO
 ClrDraw
 setMode("Graph","FUNCTION")
 setMode("Exponential Format","NORMAL")
 setMode("Vector Format","RECTANGULAR")
 setMode("Split Screen","FULL")
 setGraph("Axes","Off")
 setGraph("Grid","Off")

 Local a,b,c,i,j,e,f,n,ni,ni1,grp
 {0,1,1}→a          On travaille d'abord dans un repère virtuel, puis nous effectuerons
 {0,0,1}→b          une homothétie de rapport à déterminer ultérieurement, cela afin d'être
3→n                 sûr que la totalité de la figure soit bien dans l'écran (on travaille en pixel
                    et l'écran fait : 0-238,0-102)

 Input "Niveau d'itération? (0 ≤ n ≤ 9)",ni
  For i,1,ni
   For j,n+1,2*n-1
    b[2*n-j]+a[n]-b[n] →a[j]       Détermination des coordonnées des sommets de la courbe
    a[n]-a[2*n-j]+b[n] →b[j]       fractale de niveau i à partir de celles du niveau i+1
   EndFor
   2*n-1→n
 EndFor

 min(102/(max(a)-min(a)),238/(max(b)-min(b))) →c       Calcul du rapport d'homothétie
 Lbl grp

 51-(min(a)+max(a)) * c/2→e         Données qui permettront de centrer la figure
 119-(min(b)+max(b)) *c/2→f
 For i,1,n
   iPart(a[i] *c+e) →x[i]           Centrage et redimensionnement
   iPart(b[i] *c+f) →y[i]
   If i□1
     PxlLine x[i-1],y[i-1],x[i],y[i]        Traçage de la courbe
 EndFor
EndPrgm
```

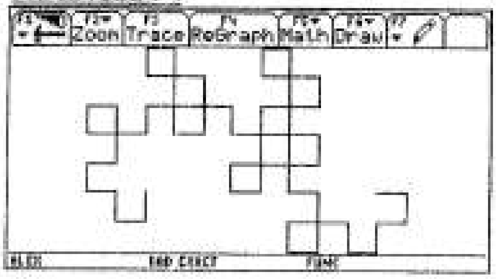
Courbes :

Voici ce que l'on peut obtenir par exemple.

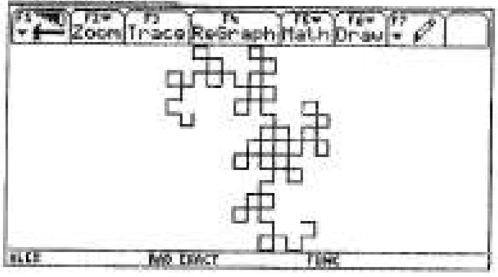
Au niveau 4 :



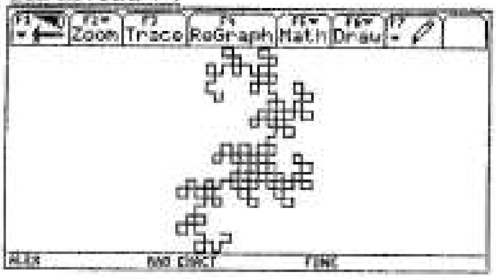
Au niveau 5 :



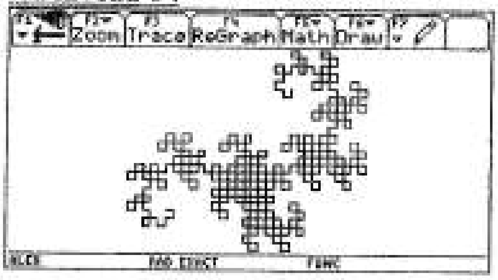
Au niveau 6 :



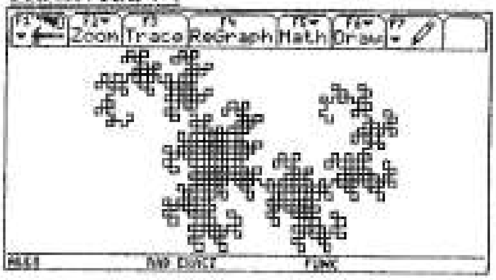
Au niveau 7 :



Au niveau 8 :

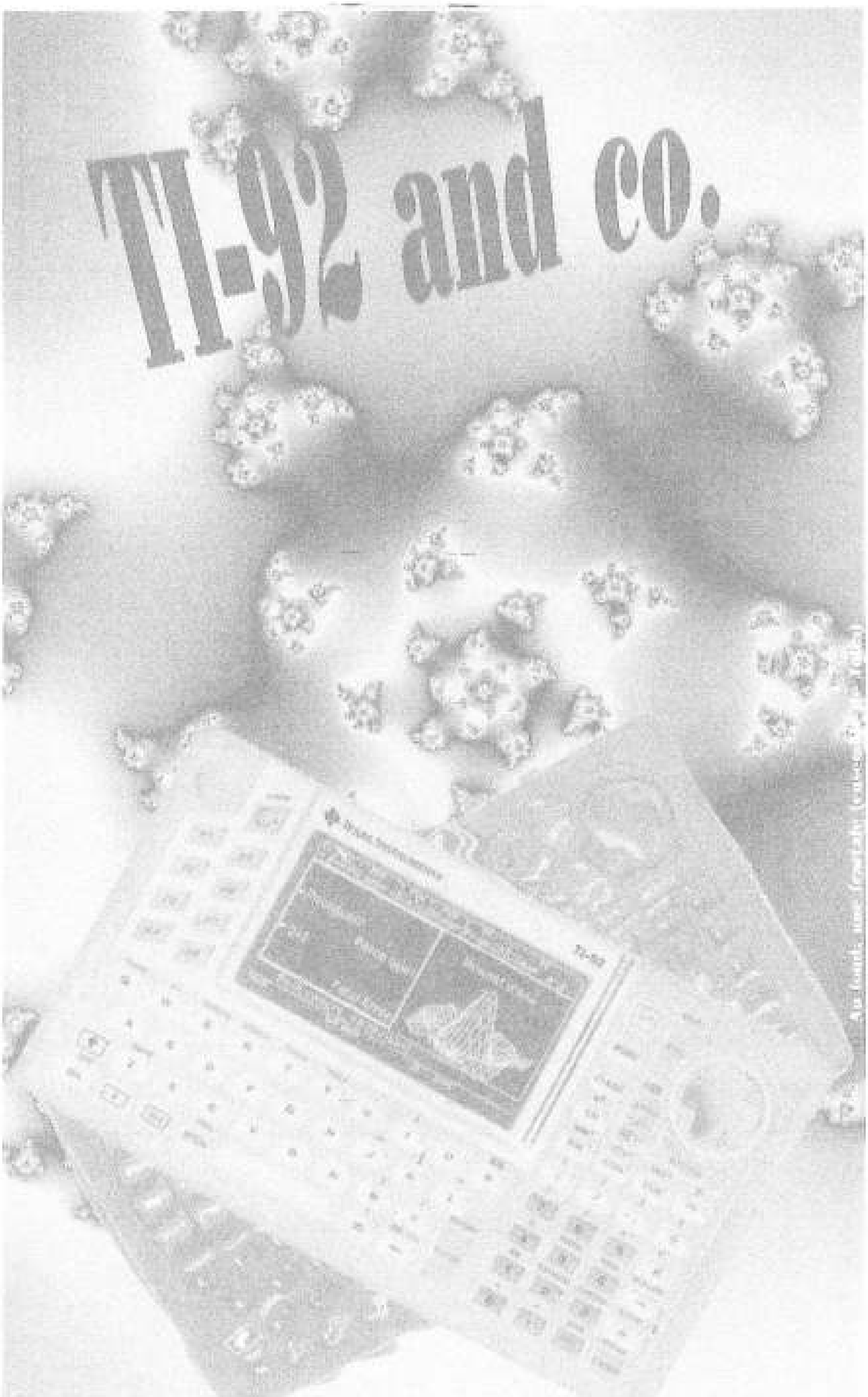


Au niveau 9 :



Et ainsi apparaît le dragon...

Allégorie finale : TI-92 et bonnet d'âne sur fond de fractale (ensemble de Julia)



Variations autour de l'astroïde

Contribution de Alex Guez, Orion Mouraille, Danielle Obono

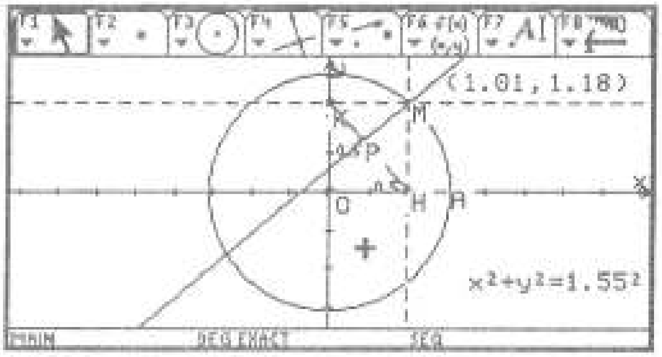
Définition de l'*encyclopaedia Universalis :*

Astroïde : disposé en forme d'étoile.

On comprendra aisément que cette définition est légèrement insuffisante pour bien cerner ce qu'est une astroïde. Mais pourquoi parler d'astroïde ? Quelle est la démarche, quel est le raisonnement qui nous mena (nous : les rédacteurs de cet article) à la rencontre de ce mot ? C'est ce que nous nous proposons de vous présenter (à vous : lecteur) dans un premier temps.

De l'histoire :

A l'origine était le TP n°16 et la figure ci-contre. Le but de ce TP était de trouver l'équation de la courbe sur laquelle se déplace le point P lorsque le point M varie sur le cercle de rayon R (la droite (MP) étant perpendiculaire au segment (KH]). Cette équation, nous la trouvâmes sous forme paramétrée, elle était :

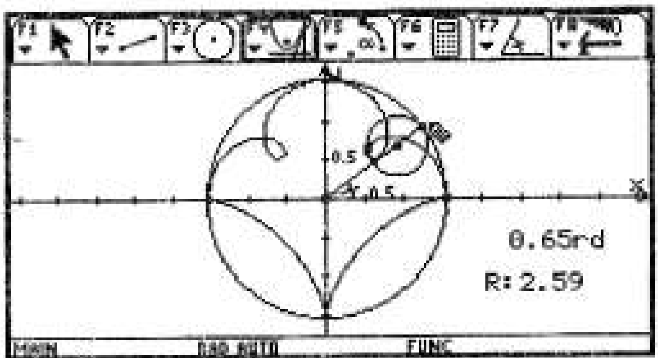


$x(t) = R.\cos^3(t)$, $y(t) = R.\sin^3(t)$
(t étant égal à l'angle des vecteurs OA, OM).

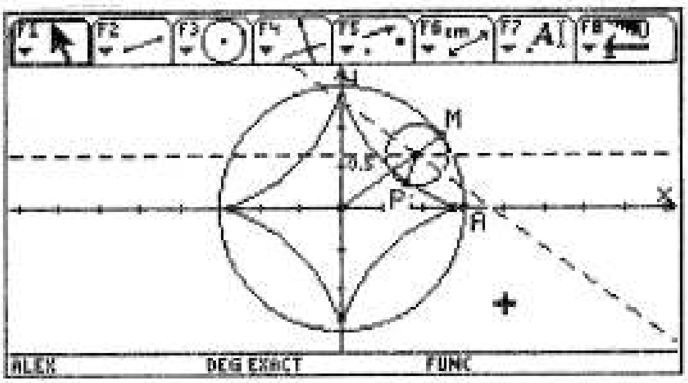
Nous remarquâmes sur la figure un fait particulier : soit N l'intersection des segments [KH] et [MO], MPN est toujours un triangle rectangle en P et ceci quelque soit M. On en déduit que P se trouve toujours sur le cercle de diamètre [MN], N étant le milieu de [MO], ce cercle est donc de rayon R/4.
Considérons maintenant la courbe décrite par P, si, par un effort d'imagination, nous prenions le cercle et le sectionnant au niveau de A, nous l'aplatissions sur l'axe des abscisses, nous obtiendrions une courbe déjà vue en cours : une cycloïde. Une cycloïde, pour ceux qui ne le savent point, est la trajectoire d'un point d'un cercle lorsque celui-ci "roule" sur une droite. Ces deux indices nous firent penser que la courbe décrite par P serait la trajectoire d'un point situé sur un cercle de rayon r lorsque celui-ci "roule" à l'intérieur d'un cercle de rayon 4r.
Plus tard, lors de la correction du TP, notre professeur de mathématiques nous apprit qu'il s'agissait d'une astroïde. Après quelques recherches, nous comprîmes que les cycloïdes se partagent en deux branches :
- les hypocycloïdes, lorsque le petit cercle roule à l'intérieur (hypo) du grand ;
- les épicycloïdes lorsque le petit cercle roule à l'extérieur (épi) du grand.

L'astroïde est donc une hypocycloïde particulière.

Lorsque nous essayons de modéliser la figure du « petit cercle roulant sur la paroi intérieure du grand cercle » dans l'application géométrie de notre TI-92, nous rencontrons un léger problème. En effet, si la calculatrice sait déplacer un objet sur un autre, en faisant varier le point d'intersection sur cet autre, elle est en revanche incapable de le faire tourner. Nous sommes donc obligés de trouver une astuce. Celle que nous proposa notre professeur était : soit P le point du petit cercle tel que lorsque son centre se trouve sur l'axe des abscisses, P est le point d'intersection des deux cercles et soit A et M les point respectifs d'intersection du grand cercle avec l'axe des abscisse et avec le petit cercle . Lorsque le petit cercle « roule » à l'intérieur du grand, l'arc AM a même longueur que l'arc PM. Or la longueur de l'arc AM est $4r.(\widehat{AOM})$ (avec r étant le rayon du petit cercle et O' son centre) et celle de l'arc PM, $r.(\widehat{PO'M})$ (O étant le centre du grand cercle, son rayon est 4r comme nous l'avons déjà précisé). On en déduit que $4r.(\widehat{AOM}) = r.(\widehat{PO'M})$ donc $4.(\widehat{AOM}) = (\widehat{PO'M})$. En théorie, il suffirait de tracer un cercle, de placer le point M sur le cercle, de tracer le rayon [OM], de placer N son centre, de construire le cercle de diamètre [NM], de centre O' milieu de [NM], de mesurer l'angle $(\widehat{AOM})$, en radians évidemment, de définir le point P, sur le petit cercle, tel que $(\widehat{PO'M})$ soit égal à quatre fois l'angle $(\widehat{AOM})$ et enfin de placer ce point P (ouf !)



Eh bien, non ! Si l'on construit la figure de cette façon, en faisant varier M sur le grand cercle, le petit cercle "roule" bien au début (sur la partie inférieure de la figure ci-contre), puis, tout d'un coup, il change de sens de rotation, ce qui donne les deux loopings de la partie supérieure de la figure. Ce qui se passe est très simple. Pour l'application géométrie de notre chère calculatrice, un angle en radian n'est jamais supérieur à π ni inférieur à $-\pi$, en effet, $3\pi/2$ n'existe pas, c'est $-\pi/2$. Lorsque l'angle (AOM) dépasse la valeur π, il devient négatif, d'où le changement de sens remarqué.



La deuxième façon de procéder à laquelle nous aboutîmes, à la sueur de notre front, est la suivante. Si l'on reprend ce que nous avons écrit plus tôt, on s'aperçoit que la seule défaillance est la construction de la figure, la question est donc :comment exprimer sur la figure le fait que $4.(\widehat{AOM}) = (\widehat{PO'M})$ sans qu'il y ait de problème ? La réponse est par symétrie. Supposons que l'on a construit les deux cercles, O, O', M, N, A et considérons la droite (d) parallèle à l'axe des abscisses passant par O', on a $(\widehat{dO'M}) = (\widehat{AOM})$ car ce sont des angles correspondant, soit l'image A1 de M par la réflexion d'axe (d) , $(\widehat{A_1O'M}) = (\widehat{AOM})$, soit P l'image de M par la réflexion d'axe $(O'A_1)$, P appartient bien au petit cercle car du fait que son centre O' appartient a la droite $(O'A_1)$ il est invariant par ladite réflexion et on a bien $(\widehat{PO'M}) = 4.(\widehat{AOM})$. Pour construire P, il faut tracer l'image de (O'M) par la réflexion d'axe la droite parallèle à (Ox) passant par O', P est l'image de M par la symétrie axiale par rapport à la droite obtenue précédemment. C'est tout et ça marche bien cette fois. Astucieux non ?

Du premier essai :

Nous allons maintenant tenter de trouver un équation générale des hypocycloïdes. Si l'on traite le problème classiquement, voici ce que l'on obtient :
Soit k le rapport des rayons du grand cercle et du petit, les arcs MP et MA ont même longueur, l'un est égal à $(\widehat{PO'M}).r$ (r étant le rayon du petit cercle) l'autre à $(\widehat{AOM}).R$ = $(\widehat{AOM}).k.r$ (R étant le rayon du grand cercle vous l'aurez deviné). Le rapport des angles $(\widehat{PO'M})$ et $(\widehat{AOM})$ est donc k.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

En projettant sur les axes on obtient (t étant la mesure de l'angle (AOM), (d) étant la parallèle à (Ox) passant par O') :

$$\begin{aligned} x &= OO'.\cos(t) + O'P.\cos(\widehat{(PO'M)} - \widehat{(dOM)}) \\ &= (R - r).\cos(t) + r.\cos(k.t - t) \\ &= (R - r).\cos(t) + r.\cos((R/r).t - t) \\ &= (R - r).\cos(t) + r.\cos(t.(R-r)/r) \end{aligned}$$

de même,

$$y = (R - r).\sin(t) - r.\sin(t.(R-r)/r)$$

Mais on vois bien qu'il y a un problème lorsque k est un rationnel. C'est pourquoi nous avons imaginé une autre méthode.

Du second essai :

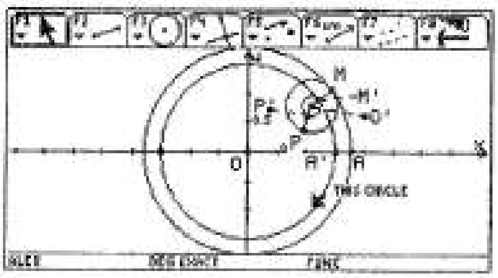
En fait à l'issue du premier essai, las de fatigue intellectuelle, nous nous demandâmes s'il était possible de, à partir du cas où le rayon du petit cercle r est égal au quart de celui du grand, se ramener à un cas plus général .Reprenons donc la figure de l'astroide Supposons que l'on fait subir au petit cercle une homothétie de centre O' et de rapport légèrement inférieur à 1 (0.7 par exemple) soit M' l'intersection de OM' avec le second petit cercle que nous considèrerons à l'avenir comme le petit cercle. Considérons le cercle de centre O passant par M' ce cercle que nous désigneront à l'avenir comme le grand cercle.

$$OM' = R$$
$$O'M' = r$$

$$\overrightarrow{O'M} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{O'M'} + \overrightarrow{M'M} = \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{OM'} - \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{M'M}$$
$$\Rightarrow \tfrac{3}{4}\,\overrightarrow{M'M} = \tfrac{1}{4}\,\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{O'M'}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{M'M} = 1/3\,\overrightarrow{OM'} - 4/3\,\overrightarrow{O'M'}$$

soit $1/3\,R - 4/3\,r > 0$ soit $1/3\,R - 4/3\,r < 0$
i.e. $R > 4.r$ $R < 4.r$

Si $R > 4.r$
$M'M = 1/3\,R - 4/3\,r$ (O,O',M,M' sont alignés)
$\Rightarrow OM = OM' + MM'$
$= R + 1/3\,R - 4/3\,r$
$OM = 4/3\,R - 4/3\,r$
$\Rightarrow$ les coordonnées de P sont :



$\underline{x = (4/3\ R - 4/3\ r).(\cos(t))^3}$ *
$\underline{y = (4/3\ R - 4/3\ r).(\sin(t))\text{^}3}$

$\underline{k}$ = O'M'/O'M = r / (O'M'+M'M) = r / (r+1/3R-4/3r) = r / (1/3R-1/3r) = $\underline{3\ r/(R-r)}$
P'(a , b)
O' appartient au cercle de centre o et de rayon OO'=R-r $\Rightarrow$ $\underline{O'((R-r).\cos(t)\ ;\ (R-r).\sin(t))}$
O'P'(a - x , b - y)

$\Rightarrow \overrightarrow{O'P'}(a - (R - r).\cos(t)\ ;\ b - (R - r)\sin(t)$

$\overrightarrow{O'P}(OM\ .\ (\cos(t))^3 - (R - r)\cos(t)\ ;\ OM\ .\ (\sin(t))^3 - (R - r).\sin(t))$
$\overrightarrow{O'P'} = k\ \overrightarrow{O'P}$ or $k = 3\ r/(R - r)$
$\Rightarrow a - (R - r).\cos(t) = 3\ r/(R - r)\ [\ 4/3\ (R - r).(\cos(t))^3 - (R - r).\cos(t)]$
$\Rightarrow a - (R - r).\cos(t) = 4\ r.(\cos(t))^3 - 3\ r.\cos(t)$
$\Rightarrow a = 4\ r.(\cos(t))^3 - (4r - R)\cos(t)$
de même, $b = 4\ r.(\sin(t))^3 - (4r - R)\sin(t)$
$\Rightarrow P'(4r\,(\cos(t))^3 - (4\ r - R).\cos(t)\ ;\ 4r\,(\sin(t))^3 - (4\ r - R).\sin(t))$

<u>Si R < 4.r</u>
M'M = 4/3 r- 1/3 R
$\Rightarrow$ OM = OM' - MM'
= R - 4/3 r + 1/3 R
<u>OM= 4/3 R – 4 /3 r</u>
$\Rightarrow$ les coordonnées de P sont :
$\underline{x = (4/3\ R - 4/3\ r).(\cos(t))^3}$ *
$\underline{y = (4/3\ R - 4/3\ r).(\sin(t))^3}$

$\underline{k}$ = O'M'/O'M = r / (O'M'-M'M) = r / (r-4/3r+1/3R) = r / (-1/3r+1/3R) = $\underline{3\ r / (R - r)}$
P'(a , b)
O' appartient au cercle de centre o et de rayon OO'=R-r $\Rightarrow$ $\underline{O'((R-r).\cos(t)\ ;\ (R-r).\sin(t))}$
O'P'(a - x , b - y)

$\Rightarrow \overrightarrow{O'P'}(a - (R - r).\cos(t)\ ;\ b - (R - r)\sin(t))$

$\overrightarrow{O'P}(OM\ .\ (\cos(t))^3 - (R - r)\cos(t)\ ;\ OM\ .\ (\sin(t))^3 - (R - r).\sin(t))$
$\overrightarrow{O'P'} = k\ \overrightarrow{O'P}$ or $k = 3\ r/(R - r)$
$\Rightarrow a - (R - r).\cos(t) = k\ [OM\ .\ (\cos(t))^3 - (R - r)\cos(t)]$
$= 3\ r/(R - r)\ [\ 4/3\ (R - r).(\cos(t))^3 - (R - r).\cos(t)]$
$\Rightarrow a - (R - r).\cos(t) = 4\ r.(\cos(t))^3 - 3\ r.\cos(t)$
$\Rightarrow a = 4\ r.(\cos(t))^3 - (4r - R)\cos(t)$
de même, $b = 4\ r.(\sin(t))^3 - (4r - R)\sin(t)$
$\Rightarrow P'(4r\,(\cos(t))^3 - (4\ r - R).\cos(t)\ ;\ 4r\,(\sin(t))^3 - (4\ r - R).\sin(t))$

---

* on réutilise le résultat obtenu en TP : $x(t) = R.(\cos(t))^3$, $y(t) = R.(\sin(t))^3$ que l'on retrouver avec le premier essai en remplaçant r par R/4 et en simplifiant car OM=4.O'M

* on réutilise le résultat obtenu en TP : $x(t) = R.(\cos(t))^3$, $y(t) = R.(\sin(t))^3$ que l'on retrouver avec le premier essai en remplaçant r par R/4 et en simplifiant.

L'équation générale d'une hypocycloïde est donc:

Si $R > 4r$

$$x(t) = 4\,r.(\cos(t))^3 - (4r - R)\cos(t)$$
$$y(t) = 4\,r.(\sin(t))^3 - (4r - R)\sin(t)$$

Si $R < 4r$

$$x(t) = 4r\,(\cos(t))^3 - (4\,r - R).\cos(t)$$
$$y(t) = 4r\,(\sin(t))^3 - (4\,r - R).\sin(t)$$

Histoire et applications de l'astroïde:

La surface de glissement d'un glissement de terrain n'est pas éxactement cylindrique comme on pourrait le croire. Sa section à la forme d'une cycloïde.

1643: Toricelli ne publie pas les résultats de ses travaux et études sur l'influence de la pression atmosphérique sur le mercure: il est trop occupé par ses études de mathématique pure en particulier par des calculs sur la cycloïde.

1630: Mersenne lance Roberval sur le problème de la cycloïde dont il est le premier à mentionner la notion en marge de l'harmonie universelle.

Posons nous le problème suivant: on considère dans le champ de la pesanteur deux points A et B et un point matériel M se déplaçant sans frottements sur une courbe d'extrémité A et B. Déterminez la courbe appelée brachistrone pour laquelle le temps de parcours est minimal lorsque le point M par du point A avec une vitesse nulle.
Facile? La solution est en général une cycloïde.

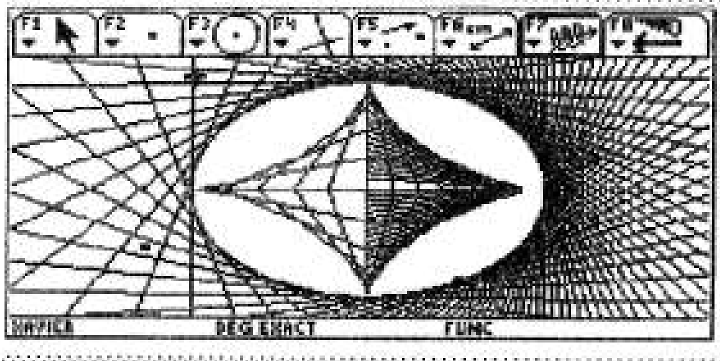
Chez les Téléostéens et Holostéens[**] on parle d'écailles cycloïdes.

Le chronomètre n'est pas le fait des horlogiers mais bel et bien celui du géomètre qui assujettira l'isochronisme[*] à la cycloïde

Pascal appliqua l'une des nombreuses propriétés qu'il déduisit de l'analyse infinitésimal, sur laquelle il travailla pendant dix ans, au problème de la roulette (la cycloïde)

En conjuguant l'expérience et l'imagination, Huygens étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes, en ce qui concerne ce dernier, il parvint à démontrer que les lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations(1660).

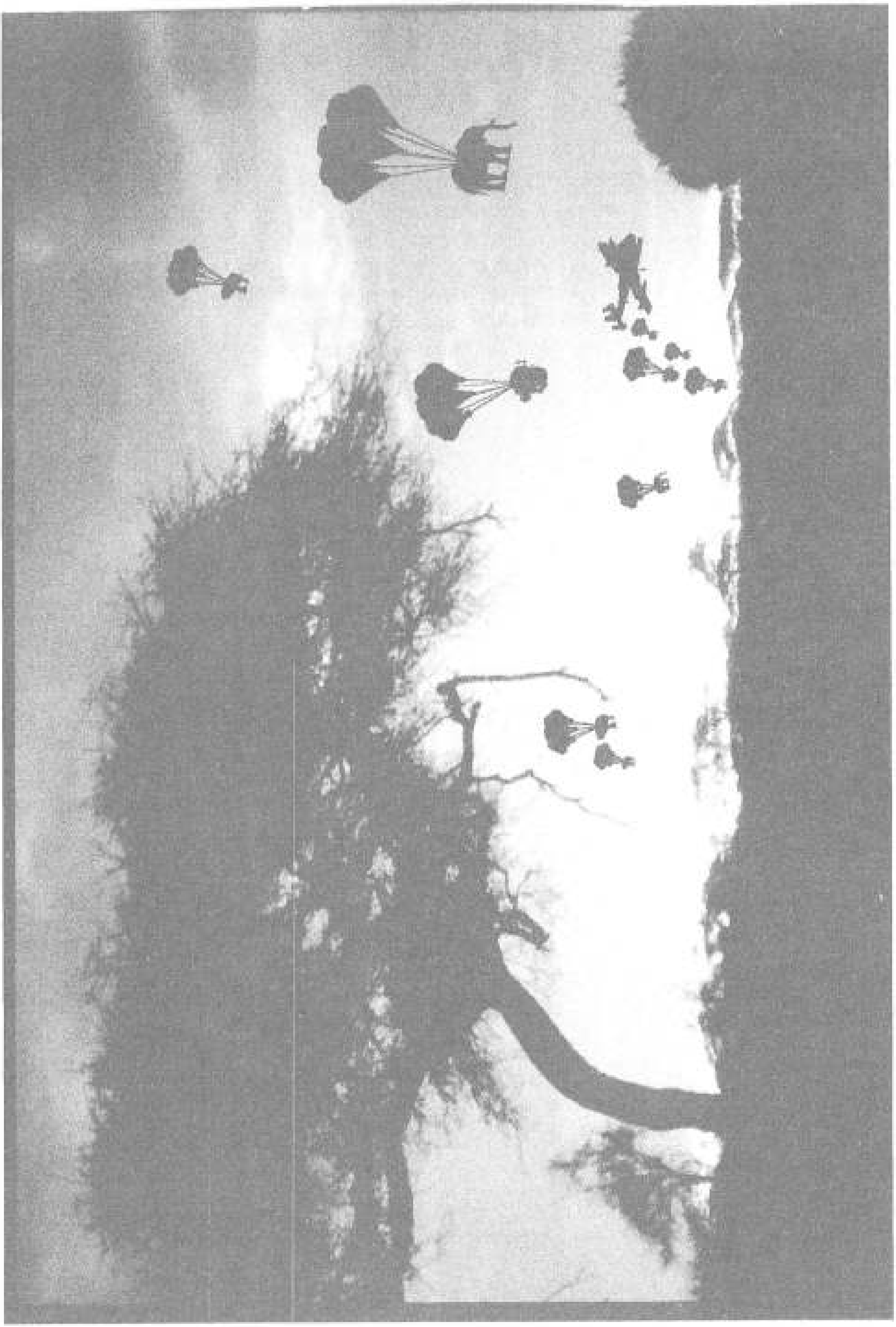
Un dernier point de vue sur l'astroïde et l'ellipse, comme enveloppes d'une famille de droites...



* même période, même durée.

** pour néophytes, téléostéen est un super ordre (25000 espèces, à peu près autant que chez tous les autres vertébrés réunis) de poissons osseux qui comprend la plapart des poissons actuels. Holostéens : classe de poissons d'eau douce.

Autre allégorie : après les téléostéens et les holostéens, un parachutage de pachydermes
(ils atterrissent page 259)



Quelques possibilités de calcul du nombre π

Contribution de Anne-Sophie Kaloghiros, Philippe Souteyrand, Jean-François Vincent

Les hommes, dès l'Antiquité, définissent le nombre π comme étant **le rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle** (Cf. formule $P = 2\pi R$). Historiquement, une fois reconnue l'existence de ce rapport constant, la première approche a consisté à déterminer le nombre π par des mesures physiques (le plus souvent, on obtient des encadrements).

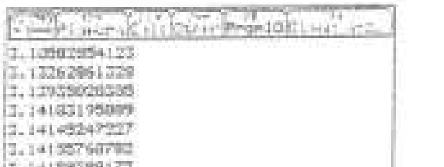
Nous allons essayer ici d'aborder ce nombre « mythique », d'abord en observant quelques méthodes d'illustres mathématiciens, puis avec des pistes plus personnelles... mais bien moins efficaces.

▪ Quelques aspects de cette traque du nombre π :

- L'utilisation des algorithmes par **Archimède (287 - 212 av. JC)** permet de calculer π : soit p_n le périmètre d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\frac{1}{2}$. Alors $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ (voir la formule du périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R$).

On peut d'ailleurs programmer cet algorithme sur la TI-92. On n'étudiera pas ici les formules mises en jeu : $u_n = \frac{1}{n} p_n$ avec $u_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-u_n^2}\right)}$... dont on peut cependant regarder le résultat (en mode approché) :

```
Archimed(m)
Prgm
Local n,u,p,i
ClrIO
6→n
0.5→u
For i,1,m
2*n→n
√(0.5*(1-√(1-u^2)))→u
n*u→p
Disp p
EndFor
EndPrgm
```



- L'arrivée des ordinateurs (et de la TI-92 !) permet d'avoir des résultats très rapidement et beaucoup plus approfondis que les mathématiciens de l'époque.

  En effet, **<u>Viète (XVI^ème^ siècle)</u>** n'obtient que 7 décimales exactes du nombre π à partir de la quantité conjuguée dans les expressions de l'algorithme d'Archimède :

$$u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-u_n^2}}}$$

  Voici le programme et les premiers résultats obtenus avec la calculatrice :

```
viette(m)
Prgm
Local n,u,p,i
ClrIo
6→n
0.5→u
For i,1,m
2*n→n
1/(√(2))*(u/(√(1.+√(1-u^2))))→u
n*u→p
Disp p
EndFor
EndPrgm
```

- L'utilisation de ces programmes prend beaucoup de temps de calcul. La mise au point de nouveaux algorithmes de calcul plus puissants permet de déterminer le nombre π avec une précision plus grande et plus rapidement.

  Il faut d'abord définir la fonction « Arctan » :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots$$

```
Arctg(a,n)
Func
sum(seq(iPart(10^n*(-1)^k*a^(2*k+1)/(2*k+1)),k,0,n))
EndFunc
```

<u>John Machin (1680-1752)</u> établit alors la formule :

$$\pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

```
Machin(n)
Func
16*arctg(1/5,n)-4*arctg(1/239,n)
EndFunc
```

On remarque que la TI-92 ne garantit pas les dernières décimales lorsqu'on utilise la formule de Machin : en effet, comme il est impossible de faire une somme jusqu'à l'infini, on utilise la fonction $\arctan_m$, où m est la valeur limite de k dans la somme, ce qui entraîne une imprécision pour les dernières décimales.

Grâce à cette méthode, on peut trouver facilement des décimales de π (sur TI-92, on ne peut en trouver guère plus de 200)

De nombreuses formules apparaissent depuis le début des années 90 : certaines permettent d'obtenir directement la n^ème^ racine sans calculer les précédentes...

Approche analytique du nombre π :

Nous allons nous intéresser ici plus particulièrement à l'utilisation de séries.

- **Formule de Leibniz (quadrature arithmétique) :**

Leibniz définit π comme la somme d'une série :

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots$$

On peut dans ce cas écrire $\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=s(n)\right)$

On ne peut rien conclure quand au sens de variation général de la suite étudiée. En effet, pour n pair, on a $s(n)\geq s(n-1)$ et pour n impair, $s(n)\leq s(n-1)$.

Une petite observation : $\frac{\pi}{4}-s(50)\approx -0.0049014898$

La convergence de cette suite est donc plutôt lente, puisqu'elle n'offre pour 50 termes qu'une précision inférieure à 10^{-3}.

- **Formules d'Euler :**

Euler, à partir de la formule mise en évidence par Leibniz, à savoir $\arctan(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\cdots$, obtient :

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$$

c'est à dire : $\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}(-1)^n+3^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)\cdot 6^{2n+1}}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot\left(2^{2n+1}+3^{2n+1}\right)}{(2n+1)\cdot 6^{2n+1}}$

On pose : $u(n)=\sum_{0}^{n}\frac{2^{2k+1}(-1)^k+3^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)\cdot 6^{2k+1}}$.

$u(n)$ est visiblement décroissante. Comme pour la suite précédente, $\frac{\pi}{4}$ est la limite de cette suite, donc une somme infinie qui s'explique par le fait que π est un nombre irrationnel transcendant.

On a ici : $\frac{\pi}{4}-u(50)\approx -2\cdot 10^{-14}$. Il est évident que la convergence de la suite est ici bien plus rapide.

- **D'autres séries** ont été mises en évidence, par exemple :

- $\lim_{n\to+\infty}\left(v(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

- $\lim_{n\to+\infty}\left(w(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\right)=\frac{\pi^4}{90}$

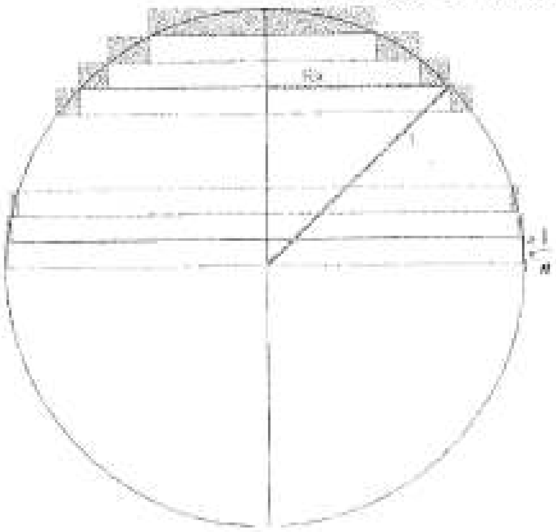
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(q(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(y(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right)=\frac{\pi^3}{32}$

Une approche géométrique :

On part d'un cercle trigonométrique (R=1) pour déterminer π. Cette méthode s'avère très peu performante...

A l'aide de la surface d'un disque :



Le principe de la suite considérée est simple.

- On divise le quart de cercle en n segments égaux (sur l'axe). Comme R=1, chaque rectangle a une largeur égale à : $\frac{1}{n}$
- On prend ensuite n-1 rectangles intérieurs et n extérieurs au cercle. Le cercle étant trigonométrique, on a : $A=\pi R^2=\pi$

Pour les rectangles intérieurs :

Il s'agit ensuite de connaître la largeur d'un rectangle, notée R_k. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :

$$R_k^{\,2}=1-\frac{k^2}{n^2}\text{ soit }R_k=\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}.$$

L'aire d'un rectangle est alors égale à : $a_k=\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$

L'aire intérieure vaut : $A=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$

Par passage à la limite, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\right)=\frac{\pi}{4}}$

Pour les rectangles extérieurs :

On procède de même : la largeur notée R'_k est ici égale à $R'_k=\sqrt{1-\frac{(k-1)^2}{n^2}}$, toujours grâce à Pythagore (il suffit de regarder la figure pour s'en convaincre). L'aire extérieure vaut donc : $A'=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{(k-1)^2}{n^2}}$.

Puis par passage à la limite : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{(k-1)^2}{n^2}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

On crée ainsi deux suites qui convergent vers $\pi/4$. On a la double inégalité : $A \leq \frac{\pi}{4} \leq A'$, soit $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}} \leq \frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{(k-1)^2}{n^2}}$.

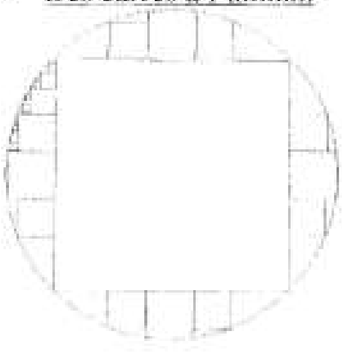
Reste à connaître la rapidité de la convergence. Un programme sur ordinateur (en Turbo Pascal) permet d'apprécier ou non la suite. Ainsi, pour n=40 000 000, on trouve $\pi \approx 3.1415926$, le tout en 40 secondes de calculs, en utilisant la formule pour les aires intérieures. Le résultat est donc « un peu » insuffisant, comparé aux méthodes des « grands » comme Machin... qui n'ont pas attendu l'arrivée de l'ordinateur pour connaître plusieurs dizaines de décimales du chiffre mythique.

☞ Autres méthodes à envisager :

- Le volume de la sphère :

Le problème se complique, car si l'on passe par des cylindres, on fait automatiquement intervenir π pour le calcul du volume : $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$

- Des carrés à l'infini...



L'approche de l'aire par des carrés est-elle plus rapide, moins ? Encore une autre voie. Cependant, les approches géométriques du nombre π semblent moins efficaces que les méthodes analytiques...

Ce nombre fascinant n'a pas fini d'occuper les mathématiciens. Une multitude de méthodes s'offrent à eux, et l'arrivée d'ordinateurs de plus en plus puissant a lancé une véritable course aux décimales.

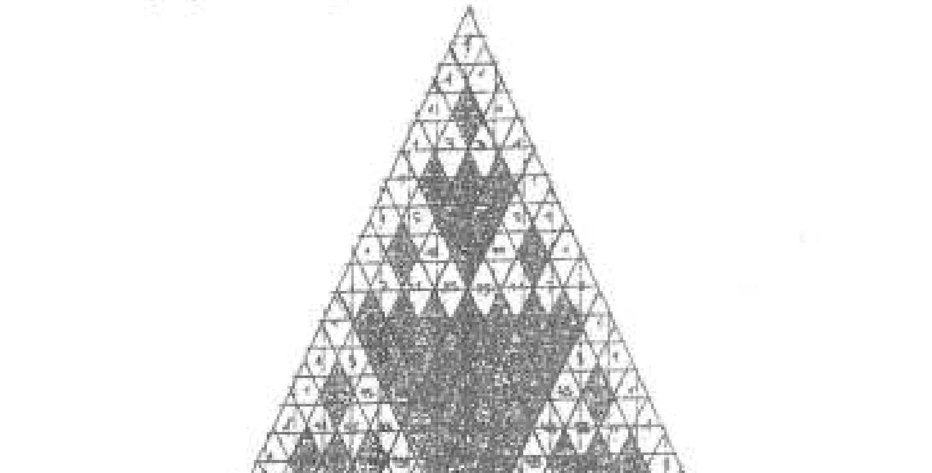
Connaître la $n^{ième}$ décimale de π ne présente pas en soi un grand intérêt (les 40 premières décimales suffisent à calculer la distance Terre - Voie Lactée avec une précision d'un proton), mais le nombre garde toute sa magie.

Ainsi, nous n'avons pas eu la prétention de découvrir des méthodes miraculeuses, mais, comme de nombreuses générations qui nous ont précédé, nous nous somme penchés sur ce nombre qui éveille notre curiosité !

Sur le chemin des combinaisons

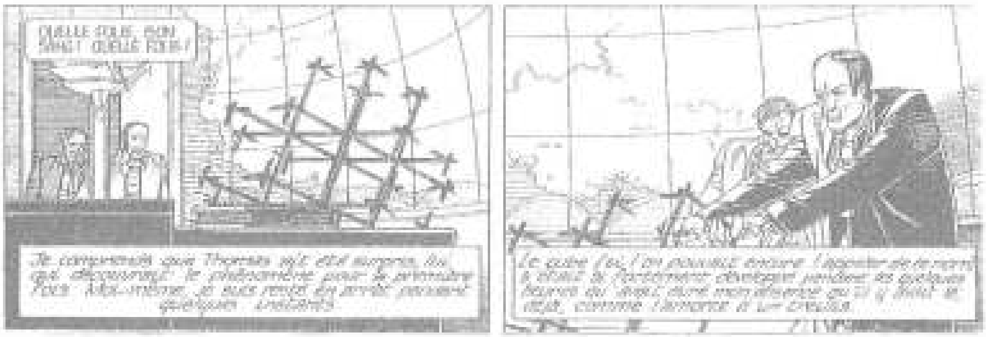
Contribution de Xavier Rivory

Un des mérites de PASCAL fut de savoir organiser ingénieusement dans un triangle sa découverte que nous écrivons de nos jours $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Plus tard, ce triangle poussa de nombreux chercheurs à démontrer certaines régularités comme le fit SIERPINSKI en expliquant la disposition en triangle des nombres pairs.



Le triangle de Pascal

(dans la triangle ci-dessus ont été hachurées toutes les cases contenant des nombres pairs. La configuration obtenue est assez singulière : une fractale ?)



I. …où l' on rencontre les racines $n^{\text{ièmes}}$.

Problème : *Calculer les sommes:*

$$S_0 = \sum_{0 \le 3p \le n} C_n^{3p},\ S_1 = \sum_{0 \le 3p+1 \le n} C_n^{3p+1},\ S_0 = \sum_{0 \le 3p+2 \le n} C_n^{3p+2}$$

Le rappel du binôme de newton s' impose: $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, x^k$.

Pour a=1, on obtient: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$.

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ \dots\ + C_n^p x^p + \ \dots\ + C_n^n x^n$$
$$(1+x)^n = \sum_{0 \le 3p \le n} C_n^{3p} x^{3p} + \sum_{0 \le 3p+1 \le n} C_n^{3p+1} x^{3p+1} + \sum_{0 \le 3p+2 \le n} C_n^{3p+2} x^{3p+2}$$
$$(1+x)^n = \sum_{0 \le 3p \le n} C_n^{3p} x^{3p} + x \sum_{0 \le 3p+1 \le n} C_n^{3p+1} x^{3p} + x^2 \sum_{0 \le 3p+2 \le n} C_n^{3p+2} x^{3p}$$

Pour faire apparaître S_0, S_1, S_2, il faut que x^{3p} soit égale à 1. On est donc amené à utiliser les nombres complexes 1, j, j^2, avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (ou plus généralement les racines de l' unité).

On sait que $j^{3p} = 1$, $(j^2)^{3p} = j^{6p} = (j^3)^{2p} = 1$, $j^4 = j$.

Ainsi, on remplace successivement x par 1, j, j^2:

$$\begin{cases} (1+1)^n = 2^n = S_0 + S_1 + S_2 & \text{(a)} \\ (1+j)^n = S_0 + j\,S_1 + j^2\,S_2 & \text{(b)} \\ (1+j^2)^n = S_0 + j^2\,S_1 + j\,S_2 & \text{(c)} \end{cases}$$

➢Calcul de S_0:

On additionne les équations du système précédent.

$$2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n = 3S_0 + (1+j+j^2)S_1 + (1+j^2+j)S_2$$

Comme $+j+j^2 = 0$, $1+j = -j^2$, et $1+j^2 = -j$, on en déduit S_0:

$$S_0 = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3}$$

$$S_0 = \frac{2^n + (-j^2)^n + (-j)^n}{3}$$

Soit encore $S_0 = \frac{1}{3}(2^n + (e^{i\frac{\pi}{3}})^n + (e^{-i\frac{\pi}{3}})^n\ ) = \frac{1}{3}(2^n + (e^{i\,n\frac{\pi}{3}}) + (e^{-i\,n\frac{\pi}{3}}))$. Il suffit d'

appliquer la formule d' Euler: $(e^{i\,n\frac{\pi}{3}}) + (e^{-i\,n\frac{\pi}{3}}) = 2\cos(\frac{n\pi}{3})$. On en conclut:

$$\sum_{0 \le 3p \le n} C_n^{3p} = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos(\frac{n\pi}{3}))\ .$$

➢Calcul de S_1:

On multiplie (b) par j^2, (c) par j.

$$\begin{cases} (1+1)^n = 2^n = S_0 + S_1 + S_2 \\ j^2(1+j)^n = j^2\,S_0 + S_1 + j\,S_2 \\ j(1+j^2)^n = j\,S_0 + j\,S_1 + j^2\,S_2 \end{cases}$$

En additionnant le tout, on obtient: $S_1 = \dfrac{2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n}{3}$

c'est-à-dire:

$$S_1 = \frac{1}{3}(2^n + e^{-i\frac{2\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}})^n + e^{i\frac{2\pi}{3}}(e^{-i\frac{\pi}{3}})^n\ ) = \frac{1}{3}(2^n + e^{i\,(n\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3})} + e^{i\,(\frac{2\pi}{3} - n\frac{\pi}{3})})$$

On applique de nouveau la formule d' Euler, et on a finalement:

$$\sum_{0 \le 3p+1 \le n} C_n^{3p+1} = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos(\frac{(n-2)\pi}{3}))\ .$$

➢Calcul de S_2: (toujours la même méthode !)

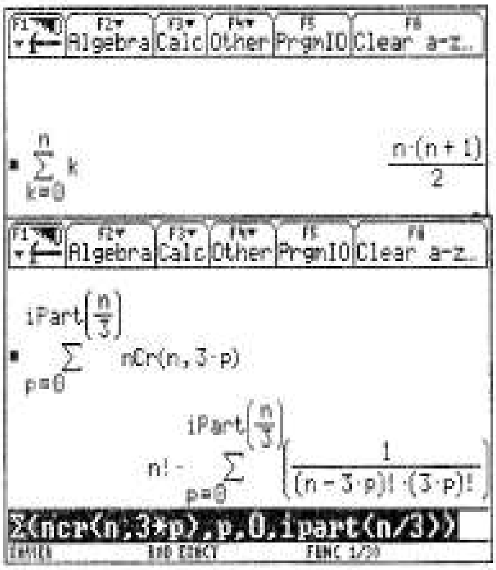
En multipliant (b) par j, (c) par j^2 et en additionnant le tout avec (a) on obtient S_2:

$$S_2 = \frac{2^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n}{3} = \frac{1}{3}(2^n + e^{i\,(-n\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3})} + e^{i\,(\frac{2\pi}{3} + n\frac{\pi}{3})})$$

Et par conséquent : $\displaystyle\sum_{0 \le 3p+2 \le n} C_n^{3p+2} = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos(\frac{(n+2)\pi}{3}))$.

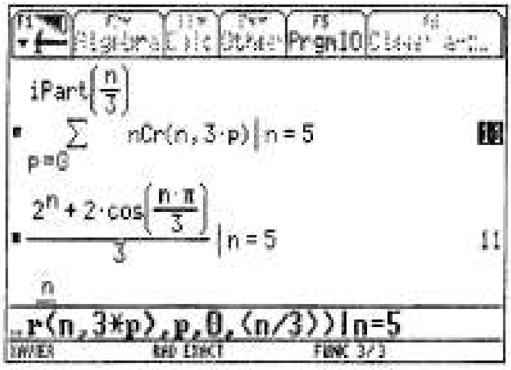
Remarques :

On peut généraliser le procédé et obtenir les sommes des coefficients du binôme pris de quatre en quatre ou de cinq en cinq ou de q en q, en faisant intervenir les racines $q^{\text{ièmes}}$ de l' unité.



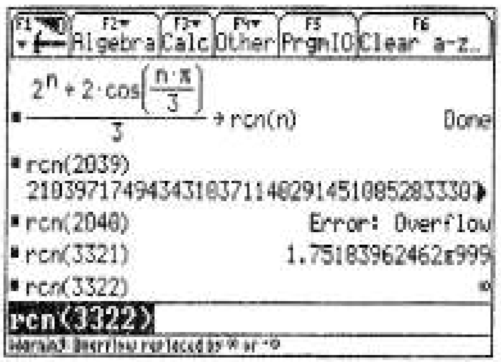
Comme elle le fait pour $\sum_{k=0}^{n} k$, on peut espérer que la TI-92 donne une formule générale pour le calcul S_0, S_1, S_2. Avant tout, on doit modifier la syntaxe; en effet, pour S_0, on veut que $0 \le 3p \le n$ c'est-à-dire $0 \le p \le \frac{n}{3}$ (de même pour S_1 et S_2).En théorie on doit utiliser la partie entière de $\frac{n}{3}$ car p est un entier.

Ainsi, $S_0=\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} C_n^{3p}$, $S_1=\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_n^{3p+1}$, $S_2=\sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} C_n^{3p+2}$. Hélas, la TI-92 renvoie l' expression en ayant remplacé la combinaison par sa définition: $C_n^{3p}=\dfrac{n!}{(n-3p)!\;3p!}$



Pour vérifier nos calculs, comparons les résultats de l' expression initiale et de celle finale pour une valeur de n fixée, soit en les mémorisant dans deux fonctions différentes, soit en utilisant la touche *sachant que* " | " (2nd k). On a bien des résultats identiques.

N.B.: Il n'est pas nécessaire de prendre la partie entière de $\dfrac{n}{3}$ car la TI-92 considère que p est un entier dans son calcul de somme. On peut aussi dire que: $S_0=\sum_{p=0}^{n} C_n^{3p}$ car, lorsque p dépasse la valeur de $\dfrac{n}{3}$, les combinaisons C_n^{3p} sont nulles.



Quelles sont les limites de la TI-92? En calcul exact, on peut calculer S_0 pour n=2039, ce qui correspond à 614 chiffres, mais pour n=2040, la calculatrice sature...En calcul approché, la valeur maximale fournie par la TI-92 est de 10.10^{999}. Ici, au-delà de $n=3321$, la calculatrice donne l'infini comme solution. Il faut alors faire attention au message situé sous la barre de calcul: *Warning...*

II. Un autre exemple.

Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} C_p^k\, C_q^{n-k} = C_{p+q}^{n}$

➢*Première méthode:*

On compare les termes en x^n dans $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$.

$$(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^k \,.\, \sum_{k=0}^{q} C_p^k x^k = \sum_{k=0}^{p+q} C_{p+q}^k x^k$$

$$\Leftrightarrow (1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \ldots + C_p^k x^k + \ldots + C_p^p x^p)\,(1 + C_q^1 x + C_q^2 x^2 + \ldots + C_q^k x^k + \ldots + C_q^q x^q)$$

$$= (1 + C_{p+q}^1 x + C_{p+q}^2 x^2 + \ldots + C_{p+q}^k x^k + \ldots + C_{p+q}^{p+q} x^{p+q})$$

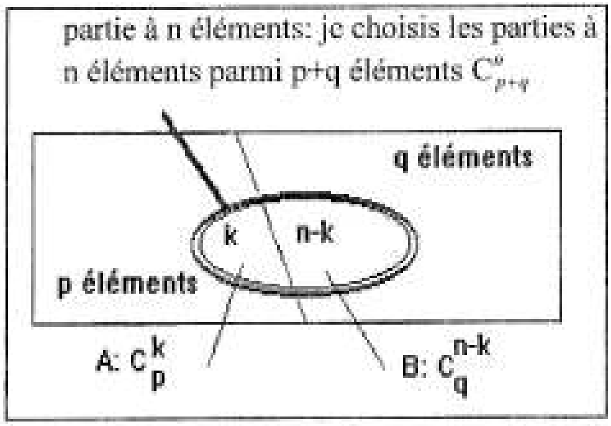
$$\Leftrightarrow 1 + (C_p^0C_q^1 + C_p^1C_q^0)x + (C_p^0C_q^2 + C_p^1C_q^1 + C_p^2C_q^0)x^2 + (C_p^0C_q^3 + C_p^1C_q^2 + C_p^2C_q^1 + C_p^3C_q^0)x^3$$

$$+ \ldots + (C_p^0C_q^n + C_p^1C_q^{n-1} + \ldots + C_p^kC_q^{n-k} + \ldots + C_p^nC_q^0)x^n + \ldots + C_p^pC_q^q x^{p+q}$$

$$= 1 + C_{p+q}^1 x + C_{p+q}^2 x^2 + C_{p+q}^3 x^3 + \ldots + C_{p+q}^n x^n + \ldots + C_{p+q}^{p+q} x^{p+q}$$

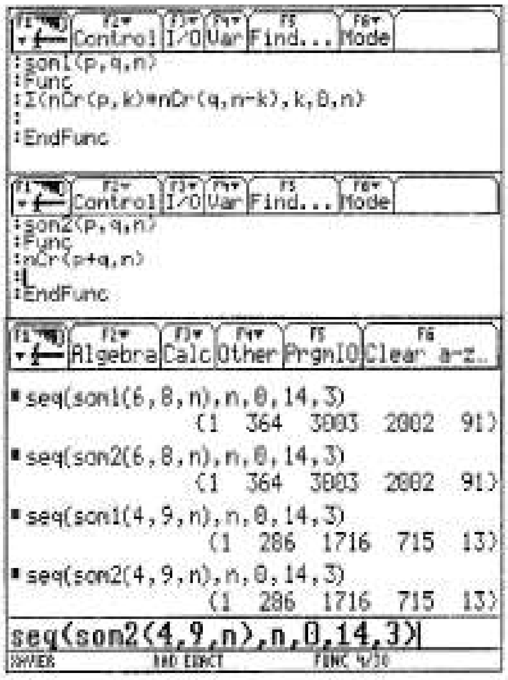
Par identification des termes en x^n (avec $x \neq 0$), on trouve bien: $\sum_{k=0}^{n} C_p^k\, C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$.

➢*Deuxième méthode:* avec les ensembles.



Comme k varie de 0 à n, l' union de A et de B équivaut à $\sum_{k=0}^{n} C_p^k\, C_q^{n-k}$. Par conséquent, on obtient le même résultat qu' avec la première méthode.

Quelle syntaxe peut-on employer sur la TI-92? On peut utiliser l'éditeur de programme (type *Fonction*).



Ensuite, on compare ce que nous donne la calculatrice pour des valeurs de p et q fixées (ici, p=6 et q=8) et n allant de 0 à p+q grâce à la commande "séquence":
seq(*expression,var,déb,fin[,pas]*) évalue les valeurs de *expression* lorsque *var* varie de *déb* jusqu'à *fin* avec un pas de *pas* puis retourne la liste des résultats obtenus.
Heureusement, les résultats sont identiques.

💣💣 Attention aux apparences. La calculatrice est un bon outil de vérification mais ne possède pas la vérité absolue...

Devoirs Surveillés

DEVOIRS SURVEILLÉS

Le débat sur les calculatrices, aide ou obstacle pour l'apprentissage des mathématiques, devient brûlant dès qu'il s'agit des examens. La réglementation en ce qui concerne le baccalauréat n'a pourtant pas changé depuis 15 ans en France (elle n'impose qu'une limitation du format des calculatrices et une autonomie fonctionnelle).

Mais la crainte, pour de nombreux professeurs, est que la puissance de plus en plus grande des outils de calcul enlève toute difficulté à la plupart des problèmes de mathématiques et vide donc l'épreuve de son sens.

Cet argument avait déjà été évoqué lors de l'apparition des calculatrices graphiques. Mais on a pu observer une certaine adaptation des énoncés. Obtenir la courbe automatiquement sur l'écran de sa calculatrice ne constituait plus dès lors une aide cruciale pour l'étude de tels problèmes.

Depuis trois ans, les expérimentations conduites avec des calculatrices symboliques en TS ont permis de comparer, lors d'épreuves communes à des classes "avec" ou "sans" de tels outils, les réalisations des élèves. Il a été observé que les classes équipées de TI-92 n'avaient pas globalement de meilleurs résultats que les autres. En rentrant dans le détail des compositions, on a pu remarquer que la construction des devoirs n'est pas tout à fait la même :

- l'obtention automatique de résultats concernant les limites, les dérivées, les intégrales rend moins nécessaire, pour les élèves équipés en calculatrices symboliques, d'exécuter ou de fournir le détail des calculs ou des théorèmes utilisés ;

- les erreurs accidentelles (fréquentes pour certains élèves) de syntaxe dans l'écriture des commandes imposent une conciliation entre les résultats de la machine et ceux issus des calculs à la main ; d'où pour ces élèves, une perte de temps.

On observe en fait, chez les élèves composant avec calculatrices symboliques, des phénomènes contradictoires : pour certains un enfouissement dans les calculs, l'écriture des commandes, l'analyse des réponses, pour d'autres un recul favorisé par les possibilités d'investigation, par l'assistance technique de l'outil.

C'est dire qu'une calculatrice symbolique ne constitue pas la baguette magique que certains imaginent. Son utilisation, comme celle de tout outil, est problématique. De deux choses l'une : soit l'on estime que l'utilisation de tels instruments est utile pour l'enseignement des mathématiques (ce que l'on a tenté de "prouver" dans les premiers chapitres de cet ouvrage), et on inscrit leur apprentissage comme nécessaire dans le cadre de la classe (ceci implique alors de penser l'utilisation de ces outils à tous les niveaux de l'activité : en cours, en TP, en "devoirs maison", en "devoirs surveillés"...) ; soit l'on pense le contraire et, en conséquence, on se situe dans une logique de restriction, voire d'interdiction pure et simple de ces outils.

Dans le cadre de la classe expérimentale, nous nous sommes situés évidemment dans la première perspective. Le fait que la classe de terminale soit une classe d'examen crée une difficulté : il faut en même temps évaluer le travail spécifique réalisé dans un "environnement TI-92" et préparer à un examen ne se situant pas dans ce cadre. Pour surmonter cette difficulté, le dispositif suivant a été mis en place :

- chaque semaine, un devoir maison porte sur des épreuves "standard" de baccalauréat, issues des annales de cet examen ;

- les devoirs surveillés incluent des questions de natures différentes :

  - pour certains exercices, la calculatrice n'apporte aucune information ;

  - pour certains exercices, la calculatrice apporte une aide, mais celle-ci n'est pas indispensable ;

  - pour certains exercices, la calculatrice seule peut donner le renseignement cherché ;

  - pour certains exercices, la réponse ne peut venir que d'une combinaison entre un travail théorique et l'utilisation de l'instrument (le travail théorique "abstrait" ne suffit pas, l'utilisation "directe" de la calculatrice ne suffit pas plus, voire induit en erreur).

Il s'agit en effet de situer chaque élève non seulement dans le processus d'acquisition des connaissances mathématiques, mais aussi dans le processus d'appropriation d'un outil de calcul et d'intégration de cet outil dans une démarche générale de pensée. Comme on pourra le vérifier dans les six devoirs surveillés qui suivent, l'équilibre des différents niveaux est précaire. Ne disposant pas de beaucoup de sources d'inspiration, l'auteur des énoncés a du défricher quelques pistes. Ce n'est qu'un début, la recherche continue !

Nous avons fait le choix de ne donner, après les énoncés, que les éléments de correction relatifs à une utilisation raisonnée (ou déraisonnable) de la calculatrice. Les solutions des exercices posés sont à la portée du lecteur consciencieux.

Ce chapitre a été relu et corrigé par Claude Bozonnat, Anne-Sophie Kaloghiros, Sofie Khalil et Marguerite Tuszinska.

Devoir surveillé n°1

On précisera à chaque fois les méthodes de résolution utilisées. En ce qui concerne l'utilisation de la TI-92, on indiquera avec précision les commandes utilisées.

On répondra, à la fin du contrôle, à ces trois questions :
- la calculatrice m'a-t-elle aidé, et en quoi ?
- la calculatrice m'a-t-elle surpris, et en quoi ?
- la calculatrice m'a-t-elle gêné, et en quoi ?

Exercice n°1 *(5 points)*

Prouver par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on dispose de l'égalité : $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$.

Exercice n°2 *(4 points)*

Résoudre l'équation $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

Exercice n°3 *(3 points)*

Déterminer les trois derniers chiffres de l'écriture décimale de la somme :
$\sum_{k=1}^{1997} k! = 1! + 2! + ... + 1997!$

Exercice n°4 *(4 points)*

Nous avons calculé en classe la probabilité de l'évènement : "il y a, dans une classe de 37 élèves, au moins une coïncidence d'anniversaire". Généralisons un peu la chose : on appelle p_n la probabilité que, dans une population de n individus, il y ait au moins une coïncidence d'anniversaire.
- pour quelle (s) valeur (s) de n aura-t-on $p_n = 1$?
- pour quelle (s) valeur (s) de n aura-t-on $p_n \geq 0,5$?
- pour quelle (s) valeur (s) de n aura-t-on $p_n \geq 0,999$?

Exercice 5 *(4 points)*

Démontrer la relation $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$:
- en calculant de deux manières le nombre d'échantillons de *n* boules que l'on peut former à partir d'une population de *2n* boules constituée de *n* boules blanches et *n* boules rouges ;
- en déterminant le coefficient de x dans les deux expressions égales $(1+x)^n.(1+x)^n$ et $(1+x)^{2n}$.

Petit bilan du devoir surveillé n°1

1. L'apport possible de la calculatrice

Il ne s'agit pas de dire ici comment il était souhaitable que les élèves traitent les exercices proposés, mais d'indiquer simplement :

- quelle pouvait être, théoriquement, la contribution de la calculatrice à la résolution de l'exercice ;
- si les élèves ont utilisé la calculatrice dans ce sens.

Exercice 1

La calculatrice pouvait se prononcer sur l'égalité proposée pour des valeurs particulières de n (à condition de maîtriser la commande *somme*). Pour un n quelconque, le logiciel retourne la question.

Le logiciel pouvait apporter une aide au moment de la preuve de la récurrence, à condition d'appliquer deux fois la commande *factor*.

Aucun élève ne semble avoir utilisé la calculatrice pour cet exercice.

$$\blacksquare\ \sum_{k=1}^{10}(k\cdot k!) = 11! - 1 \qquad \text{true}$$

$$\blacksquare\ \sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!) = (n+1)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!) = (n+1)\cdot n! - 1$$

$$\blacksquare\ \text{factor}((n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)!) \qquad (n^2+3\cdot n+2)\cdot n! - 1$$

$$\blacksquare\ \text{factor}(n^2+3\cdot n+2) \qquad (n+1)\cdot(n+2)$$

Exercice 2

Le logiciel pouvait fournir ici des formes simplifiées des combinaisons (ou la formule générale). La résolution de l'équation pouvait être traitée :

- soit par recollement des différentes combinaisons calculées et application de la commande *Solve* ;
- soit par application de la commande *Solve* à l'équation sous la forme où elle était donnée;
- soit par empilement de commande (*Solve* et *Somme*).

$$\blacksquare\ \text{nCr}(2\cdot n, 1) \qquad 2\cdot n$$

$$\blacksquare\ \text{nCr}(2\cdot n, 2) \qquad n\cdot(2\cdot n-1)$$

$$\blacksquare\ \text{nCr}(2\cdot n, 3) \qquad \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(2\cdot n-1)}{3}$$

$$\blacksquare\ \text{nCr}(n, p) \qquad \frac{n!}{(n-p)!\cdot p!}$$

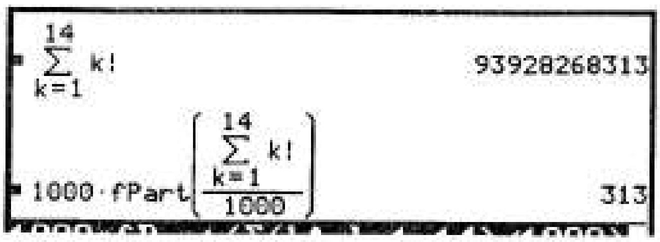
$$\blacksquare\ \text{solve}(\text{nCr}(2\cdot n,1)+\text{nCr}(2\cdot n,2)+\text{nCr}(2\cdot n,\blacktriangleright$$
$$n=17 \text{ or } n=0 \text{ or } n=-17$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(\sum_{k=1}^{3}\text{nCr}(2\cdot n,k)=387\cdot n, n\right)$$
$$n=17 \text{ or } n=0 \text{ or } n=-17$$

Pour ce deuxième exercice, un élève sur deux a utilisé la commande *Solve*. Parmi ceux-ci, un sur deux a trié les solutions parasites. On peut estimer que deux attitudes témoignent d'une maîtrise plus avancée du logiciel :

- l'aptitude à empiler les commandes (deux élèves ont empilé les commandes Solve et Somme, ce qui témoigne d'une bonne maîtrise de la syntaxe ;
- l'aptitude à utiliser la calculatrice pour des calculs partiels (par exemple la vérification de la simplification d'une combinaison) ; la calculatrice apparaît alors comme un auxiliaire de résolution et non pas un substitut à la réflexion.

Exercice 3

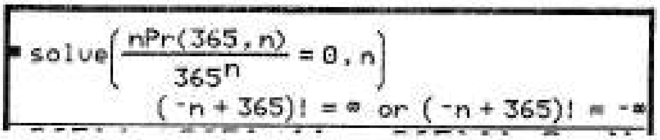


L'utilisation directe du logiciel ne donne rien : le calcul dépasse ses capacités. Il fallait comprendre que, pour $n \geq 50$, $n!$ se termine par au moins trois zéros. Il suffit donc de faire la somme des 14 premières factorielles et de repérer les trois dernières décimales.

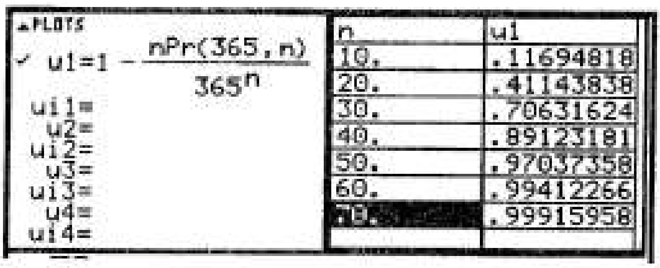
Il est aussi possible d'obtenir directement celles-ci par l'application de la commande *fPart*. L'exercice est une application directe du TP n°1. Seuls 2 élèves arrivent à transférer cette connaissance acquise du TP au devoir surveillé. Pour 10 autres élèves, l'utilisation sans précaution du logiciel (en demandant la somme des 1997 premières factorielles) a un effet désastreux : la calculatrice se bloque, avec effacement de toutes les mémoires...

Remarque : cet échec a servi de leçon pour la suite. Les TP sont des travaux spécifiques de recherche, l'apprentissage qui en résulte est à "longue portée", il n'est pas immédiatement transférable dans des travaux de nature différente comme les devoirs surveillés. Pour les contrôles suivants, il n'y aura plus de questions liées à des sujets qui n'auraient été traités que lors des TP.

Exercice 4



Le logiciel donne une réponse difficilement interprétable pour la première question, alors que le bon sens permet une réponse immédiate : dès qu'il y a plus de 365 personnes, une coïncidence d'anniversaire est certaine !



Pour la deuxième question au contraire, ni le "bon sens", ni le calcul "à la main" ne permettent de conclure. Il est nécessaire d'utiliser la calculatrice pour déterminer quand la probabilité cherchée dépasse 0,5 ou 0,999. Cette utilisation peut être plus ou moins rapide :

- elle est rapide si on définit une suite et si on utilise la table de valeurs pour une localisation d'abord grossière, puis plus fine du rang n convenable (cf. copie d'écran ci-dessus) ;
- elle est plus lente si on procède de façon artisanale, de proche en proche.

La moitié de la classe a su trouver la réponse à la première question, la moitié aussi pour la deuxième question, avec une approche artisanale. Les deux moitiés ne se recouvrent pas tout à fait : savoir quand l'utilisation de la calculatrice est pertinente et quand elle ne l'est pas relève d'une compétence qui nécessite un apprentissage assez long !

Exercice 4

La calculatrice était là de peu d'utilité. Personne ne déclare y avoir eu recours (et personne ne semble y avoir eu recours effectivement).

2. L'effet estimé de la calculatrice ?

Pour le premier devoir surveillé de l'année, il est intéressant de noter le point de vue des élèves relatif au rôle de la calculatrice.

La calculatrice m'a...	Oui	Un peu	Non	Non réponse
Aidé	81%	4%	4%	11%
Surpris	32%	0%	11%	57%
Gêné	20%	4%	14%	62%

Deux élèves indiquent qu'ils ne se sont pas servi de leur calculatrice. Pour les autres, les pourcentages ci-dessus mettent en évidence qu'une forte majorité d'élèves estiment avoir été aidé par la calculatrice ; le rapport entre les oui et les non s'inverse quant il s'agit de relever la gêne ou la surprise occasionnées par cet outil : la majorité des élèves a été probablement surpris ou gêné, au moins ponctuellement, pendant cette épreuve par la prise en compte d'un instrument de calcul de cet type.

Dans la rubrique "la calculatrice m'a aidé" :

La plupart des élèves évoquent les commandes de calcul numérique élémentaire (pour les combinaisons, les arrangements, la vérification générale des calculs), la transformation des expressions et la résolution des équations.

Quelques appréciations significatives :

"elle m'aide en me donnant un ordre d'idées", "elle a conforté mes résultats ou résolu les équations à ma place quand le temps me manquait" ; "la calculatrice m'a aidé pour la facilité et la rapidité des calculs" ; "elle m'a aidé à vérifier mes idées" ; "elle m'a aidé à vérifier mes calculs et à les anticiper" ; "elle m'a aidé surtout pour l'exercice 3, pour le tâtonnement ainsi que pour la résolution de l'exercice 2" ; "pour les calculs de base et pour les vérifications" ; "pour les factorisations et les résolutions d'équation" ; "aide : oui, pour aller plus vite" ; "elle m'a permis d'avoir des approximations" ; "elle m'a aidé à trouver pour le premier exercice une autre écriture pour (n+1)!(n+2) qui m'a permis de le résoudre" ; "elle permet une simplification des calculs".

Dans la rubrique "la calculatrice m'a surpris" :

La surprise semble avoir pour origine les problèmes de syntaxe (aussi bien pour la formulation des questions que pour l'interprétation des réponses) et les refus de la calculatrice de résoudre certains problèmes. L'illusion qu'une calculatrice "puissante" peut tout faire est encore vivace en début d'année... Quelques commentaires :

- "impossibilité de traiter certaines informations" (somme des factorielles de l'ex 3) ; "elle m'a surprise pour les réponses aux questions de l'ex 4" ; "peut-être que je ne maîtrisais pas le langage de la calculatrice mais elle m'a gêné par exemple pour l'ex 4" ; "la forme symbolique qu'elle renvoie est parfois déroutante" ; "certains résultats n'étaient pas attendus" ; "oui, pour l'inéquation de l'exercice 4" ; "la TI-92 m'a surpris en donnant à l'ex 2 un résultat négatif possible ; le résultat m'a gêné dans la mesure où je ne connais pas cette forme" ; "surprise, car elle n'aide pas à grand chose" ; "elle m'a surprise car elle n'a pas pu résoudre certains exercices (ex 4)".

Dans la rubrique "la calculatrice m'a gêné" :

En plus des arguments évoqués ci-dessus, on trouve le sentiment d'une perte de temps. Gérer un outil complexe constitue une tâche supplémentaire à prendre en compte dans un devoir surveillé qui se fait, par nature, en temps limité :

"pour l'exercice 4 (*too few arguments* un certain nombre de fois)" ;"elle m'a gêné car on perd beaucoup de temps à écrire ce que l'on cherche" ; "elle s'est bloquée à l'ex 3" ; "elle m'a fait perdre un peu de temps" ; "il est vrai que si elle était un peu plus rapide dans certains calculs, le temps serait plus facilement gérable".

Devoir surveillé n°2

On précisera à chaque fois les méthodes de résolution utilisées. En ce qui concerne l'utilisation de la TI-92, on indiquera avec précision les commandes utilisées.

On répondra, à la fin du contrôle, à ces trois questions :

- la calculatrice m'a-t-elle aidé, et en quoi ?
- la calculatrice m'a-t-elle surpris, et en quoi ?
- la calculatrice m'a-t-elle géné, et en quoi ?

Exercice n°1 *(4 points)*

Prouver par récurrence que, pour tout naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice n°2 *(4 points)*

Les deux questions suivantes peuvent être traitées indépendamment :

- résoudre $\sum_{p=0}^{n} p.(p-1).C_n^p = 233\ 538\ 846\ 720$;

- calculer (c'est à dire donner une expression synthétique pour) $\sum_{p=0}^{n} p.(p-1).C_n^p$.

Exercice n°3 *(5 points)*

Une urne contient 1000 jetons (950 rouges et 50 bleus). On tire un jeton. Quelle est la probabilité que ce soit un jeton bleu ? On procède désormais à des tirages selon deux modalités :

- modalité 1, on remet à chaque fois le jeton tiré dans l'urne ;
- modalité 2, on ne remet pas le jeton tiré dans l'urne.

On répondra à chacune des questions suivantes en se plaçant du point de vue de chacune des deux modalités (on attend donc à chaque fois deux réponses).

a) Combien faut-il tirer de jetons pour être sûr d'avoir un jeton bleu ?

b) On tire 10 jetons. Quelle est la probabilité d'avoir :
- exactement un jeton bleu ?
- exactement 3 jetons bleus ?
- au moins un jeton bleu ?

c) Combien de jetons doit-on tirer pour que la probabilité d'obtenir au moins un jeton bleu soit supérieure à 0,999 ? La comparaison des réponses des questions a et c vous inspire-t-elle un commentaire particulier ?

Exercice n°4 *(5 points)*

Déterminer les limites suivantes, en justifiant précisément les résultats, et en indiquant les conséquences pour la représentation graphique de la fonction :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{x}+\cos x} \qquad \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+6x} + x + 3)$$

Exercice n°5 *(5 points)*

On considère la fonction f, qui à x associe $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2}$

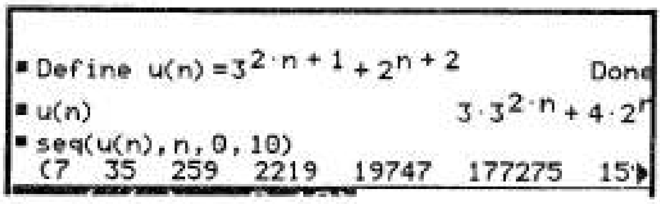
a) Etudier ses variations, ses limites aux bornes du domaine de définition ; en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes. Préciser la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

b) Résoudre, sur l'intervalle [0;2], l'équation $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ (on justifiera la réponse avec la plus extrême précision).

Petit bilan du devoir surveillé n°2

I. L'apport possible de la calculatrice

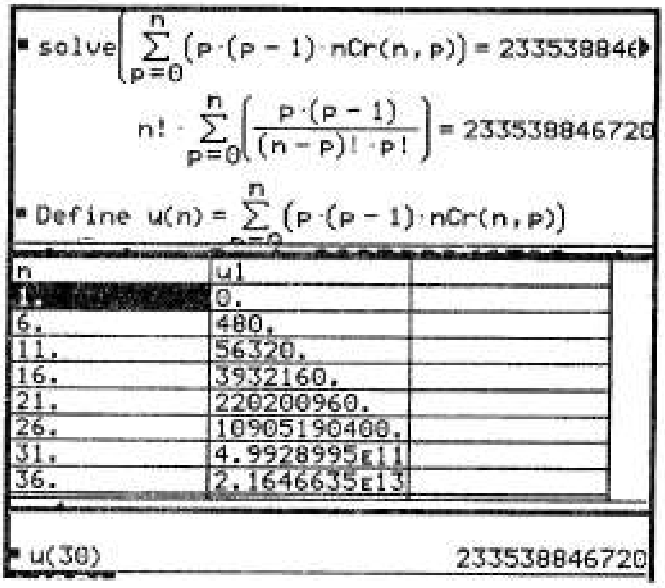
Exercice 1



La calculatrice permettait d'observer les premiers termes de la suite. Elle donnait aussi une nouvelle forme de l'expression générale, mettant en évidence 3 et 4.

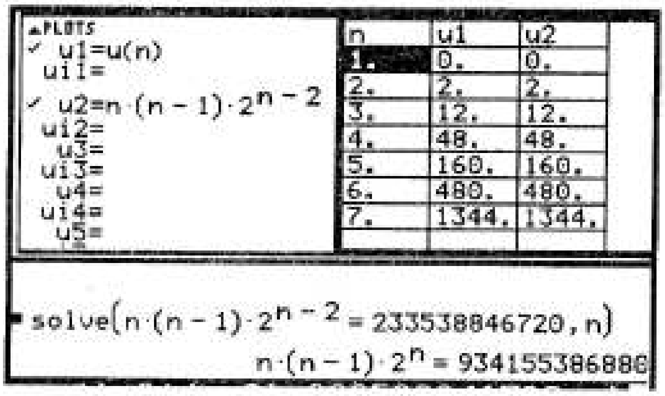
Aucune élève ne l'a semble-t-il utilisé ici.

Exercice 2



La combinaison des commandes *Solve* et *Somme* rendait l'écriture ici très complexe : il fallait différencier dans la somme le statut de p, variable, et le statut n de, nombre fixé puis dans l'équation le statut de n, inconnue.

Après tous ces efforts, on constatait que le logiciel ne savait pas résoudre l'équation. Pour obtenir une réponse, il fallait observer les valeurs successives prises par la suite : ci-contre par une première localisation grossière, puis par une détermination exacte dans l'application initiale. Prouver qu'il n'y avait qu'une solution nécessitait de prouver que la suite était croissante.



Une fois trouvée une expression synthétique pour cette suite, l'éditeur de suite permettait de vérifier l'égalité des valeurs prises pour les premiers rangs.

Quant à la résolution de l'équation, le logiciel ne donne pas plus de réponses. Il faut là aussi passer par une recherche reposant sur la croissance de la suite.

Un élève sur deux a trouvé une expression synthétique de u.

Seulement 4 élèves ont pu résoudre l'équation. L'impossibilité de la résoudre théoriquement avec les outils habituels et le refus direct de réponse du logiciel ont découragé la plupart des élèves. La recherche de procédures de contournement des premier refus est sans doute assez (trop?) difficile dans le contexte d'un devoir surveillé.

Exercice 3

La première question a été traitée par un élève sur trois (malgré sa simplicité, elle exigeait de prendre un peu de recul) ; la deuxième question, classique, a été traitée par toute la classe. La troisième question n'a été traitée que par quatre élèves : ce n'est pas son traitement avec la calculatrice qui a posé problème (cf. ci-contre), mais la formalisation mathématique de la question.

$$\text{Define } u(n) = 1 - \frac{nCr(950, n)}{nCr(1000, n)} \qquad \text{Done}$$

n	u1
70.	.97586333171
80.	.98614928675
90.	.99210127793
100.	.99552420902
110.	.99748030895
120.	.99859095986
130.	.99921741824
140.	.9995683859

Exercice 4

Le logiciel ne connaît pas la première limite. Cela a sans doute des conséquences pour les élèves :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + \sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)} \right) \qquad \text{undef}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6 \cdot x} + x + 3 \right) \qquad 0$$

- la quasi-totalité de la classe traite la deuxième limite ;
- un tiers de la classe seulement traite la première limite (un tiers affirme qu'il n'y a pas de limite, un autre tiers ne se prononce pas).

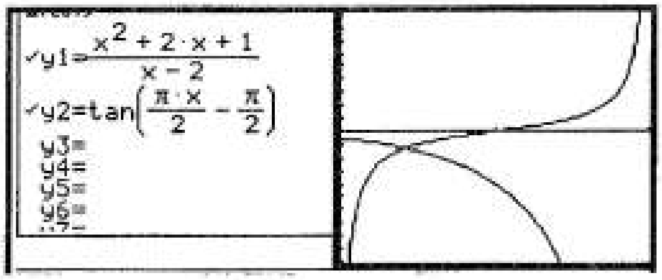
Exercice 5

Avec cet exercice, le logiciel ne réserve pas de surprise. Toute la classe étudie convenablement la fonction f. L'asymptote oblique est mise en évidence par une grande diversité de méthodes (5 élèves utilisent la commande de division euclidienne (cf. ci-contre), d'autres divisent "à la main", d'autres encore utilisent la représentation graphique...

$$\text{Define } f(x) = \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{x - 2} \qquad \text{Done}$$

$$\text{propFrac}(f(x), x) \qquad \frac{9}{x - 2} + x + 4$$

Quant à la comparaison de la fonction f et de la fonction tangente, elle est abordée par un tiers de la classe. Tous, à partir d'observations graphiques (cf. ci-contre), essaient de se mettre en situation d'utiliser le théorème de la bijection sur l'intervalle [0, 2].



2. Le point de vue des élèves

Seulement 20% des élèves répondent aux questions relatives à l'aide apportée par la calculatrice : le temps a manqué pour donner un point de vue réfléchi sur cette question (la répartition des réponses est de même nature que lors du précédent contrôle).

Il semble difficile d'ailleurs de mêler dans le même temps des questions mathématiques (le devoir surveillé) et "métamathématiques" (une réflexion sur le travail réalisé). Ces deux études seront distinguées à l'avenir.

Devoir surveillé n°3 ☎☎

Exercice n°1 *(1+2+1 points)*

On veut déterminer une fonction f dérivable sur [0, 10] telle que : $f(0) = 0$, $f(4) = 10$ et $f(10) = 3$; on notera M le maximum de $|f'|$.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pouvez-vous dire de M ?

b. Déterminez une fonction convenable en indiquant la valeur de M correspondante.

c. Déterminer pour finir une fonction f telle que M soit le plus petit possible (un bonus de 1 point pour le meilleur résultat).

Exercice n°2 *(1+1,5+1,5 points)*

Isabelle l'a noté dans le "cahier de doléances" : relever les devoirs-maison de mathématiques de façon aléatoire évite certes l'arbitraire, mais n'empêche pas les inégalités. Certains élèves auront sans doute plus de notes de devoirs que d'autres...

On se propose d'étudier plus précisément cette situation pendant un trimestre. Supposons qu'il y ait 10 devoirs dans ce trimestre et que, pour chacun d'entre eux, cinq cahiers (sur les 37 cahiers de la classe) soient relevés de façon aléatoire.

a. On s'intéresse d'abord au cahier d'Isabelle :

- quelle est la probabilité qu'il ne soit jamais ramassé ?
- on définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où le cahier d'Isabelle est ramassé. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

b. On s'intéresse désormais au sort comparé des cahiers de Julie et d'Isabelle. Quelle est la probabilité que le cahier de Julie soit deux fois plus souvent ramassé que le cahier d'Isabelle ?

PROBLÈME *(12 points : 2+3+1+2+1+2+1)*

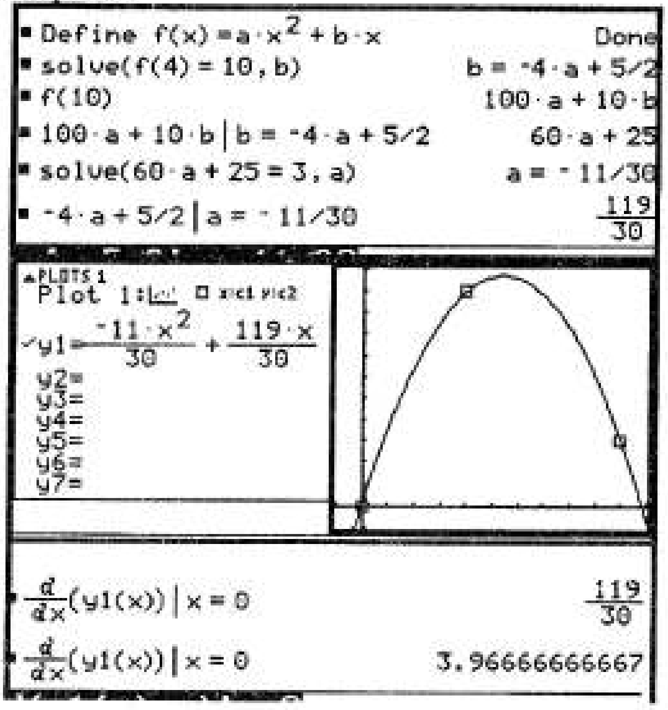
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul. On se propose d'étudier les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}+$ par : $f_n(0) = 0$ et, pour $x>0$, $f_n(x) = x.(\ln x)^n$. On notera C_n la représentation graphique de la fonction f_n.

1. Etudiez la continuité et la dérivabilité de ces fonctions en 0.
2. Etudiez les limites et les variations des fonctions f_2 et f_3. Les dérivées de ces deux fonctions sont-elles majorées, minorées sur $\mathbb{R}+$ (et par quoi) ?
3. Représentez graphiquement, avec précision, dans un même repère adapté, les courbes C_2 et C_3 des fonctions f_2 et f_3.
4. Etudiez plus généralement les variations des fonctions f_n, en distinguant les cas où n est pair et où n est impair. Quelle est la position relative des courbes C_n ?
5. Soit un point M(a, b) appartenant à une courbe C_n. Pouvez-vous déterminer n en fonction de a et b ?
6. Déterminer l'équation de la tangente D_n à C_n au point d'abscisse e. Soit x_n l'abscisse du point d'intersection de D_n avec l'axe des abscisses. Calculer x_n et déterminez sa limite quand n tend vers $+\infty$.
7. On considère n fixé. Discutez, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = k$.

Petit bilan du devoir surveillé n°3

Exercice 1

Cet exercice fait suite aux TP 3, 4 et 6. Il avait été décidé après le devoir n°1 de ne plus aborder en contrôle des questions liées aux seuls TP. Mais le cadre de cet exercice est l'inégalité des accroissements finis, largement abordée dans le cours d'analyse proprement dit. Le contrat est donc respecté.



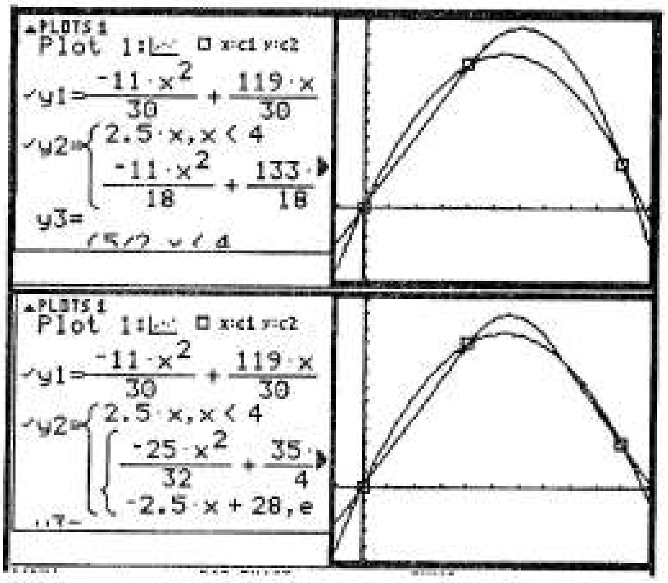
Cette inégalité permet d'affirmer que $M \geq 2{,}5$.

Une moitié de la classe détermine la parabole passant par les trois points. Seuls cinq élèves utilisent la calculatrice pour déterminer ses coefficients à l'aide de l'application *Data/Matrix* (les calculs pouvaient aussi être faits à l'aide de l'application initiale, cf. ci-contre).

L'application graphique est utilisée en général pour vérifier la conformité du tracé.

L'application initiale permet de déterminer le maximum de la valeur absolue de la dérivée, égal à sa valeur en 0 : $f'(0) = \dfrac{119}{30}$. On est loin de la valeur "plancher" $M = 2{,}5$.

Pour déterminer une fonction meilleure de ce point de vue, il fallait nécessairement utiliser une fonction affine sur l'intervalle [0, 4] et prolonger avec une fonction convenable du point de vue de la qualité du raccord. Trois élèves ont indiqué la démarche à suivre, mais ne l'ont pas engagée, faute de temps. Cette question relevait d'ailleurs plus d'un problème de recherche que d'un devoir surveillé.



Le lecteur curieux observera que, si l'on construit une fonction qui soit affine sur [0,4], raccordée avec un trinôme sur [4, 10], on obtient en 10 une dérivée plus forte en valeur absolue que la dérivée de la fonction initiale.

Obtenir un maximum de $|f'|$ le plus petit possible pouvait être réalisé en choisissant une fonction affine sur [0, 4] (c'est nécessaire), en choisissant une fonction affine de pente opposée sur [7,2, 10] (de telle façon que f(4) = f(7,2)), et en reliant sur [4, 7,2]par un trinôme du second degré (cf. ci-contre).

Exercice 2

La calculatrice permettait, une fois identifiée une loi binomiale de paramètre $(10, \frac{5}{37})$, de calculer espérance et variance. Cependant, il était beaucoup plus simple de réaliser ces calculs en utilisant les résultats vus en classe $E(X) = np$, $(X) = np(1-p)$.

$$\sum_{k=0}^{10}\left(k\cdot \mathrm{nCr}(10,k)\cdot(5/37)^k\cdot(32/37)^{10-k}\right) \qquad 50/37$$

$$\sum_{k=0}^{10}\left(k^2\cdot \mathrm{nCr}(10,k)\cdot(5/37)^k\cdot(32/37)^{10-k}\right) \qquad \frac{1600}{1369}$$

C'est ce qu'ont fait les élèves (2 sur 3 environ) qui ont traité cet exercice.

La question b relève d'une erreur de conception : l'auteur de l'énoncé (le professeur), voulant modéliser une situation issue de la réalité de la classe, a imaginé, à tort, que les deux évènements ("le cahier de Julie est ramassé" et "le cahier d'Isabelle est ramassé") étaient indépendants, ce qui n'est bien sûr pas le cas : deux élèves l'ont relevé dans leur devoir, si le cahier de l'une est ramassé, cela réduit bien sûr la probabilité que le cahier de l'autre le soit. Cette différence a des conséquences importantes pour le traitement de l'exercice. On peut en effet décomposer l'évènement ainsi : (0, 0), c'est-à-dire le cahier de Julie est ramassé 0 fois, le cahier d'Isabelle est ramassé 0 fois, (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5). Considérons l'évènement (0, 0) :

- si les évènements avaient été indépendants, on aurait eu $p(0,0) = p(0).p(0) = (\frac{32}{37})^{20}$;

- les évènements n'étant pas indépendants, on a en fait $p(0, 0) = (\frac{C_{35}^5}{C_{37}^5})^{10}$.

Nous pouvons observer ci-contre la différence entre les deux résultats, assez petite.

$$(32/37)^{20} \qquad .054823288817$$

$$\left(\frac{\mathrm{nCr}(35,5)}{\mathrm{nCr}(37,5)}\right)^{10} \qquad .052489746241$$

Les choses se compliquent quand on aborde le calcul de $p(2, 1)$:

- si les évènements avaient été indépendants, on aurait eu $p(2,1) = p(2).p(1)$, ces deux nombres se calculant sans peine grâce à la loi binomiale (cf. ci-contre) ;

$$\mathrm{nCr}(10,2)\cdot(5/37)^2\cdot(32/37)^8\cdot 10\cdot 5/37\cdot(32/\blacktriangleright \qquad .094110412475$$

- les évènements n'étant pas indépendants, nous devons distinguer deux cas de figure: soit le cahier d'Isabelle est ramassé en même temps que le cahier de Julie, soit ils sont ramassés à des moments différents.

Le premier évènement suppose que : un jour (10 possibilités) les deux cahiers soient ramassés (il reste donc 3 cahiers à choisir sur 35), un autre jour (il reste 9 possibilités) le cahier de Julie soit ramassé et pas celui d'Isabelle (il reste donc 4 cahiers à choisir sur 36) et les huit autres jours aucun des deux cahiers ne soient ramassés. La probabilité de cet évènement est donc $10.(\frac{C_{35}^3}{C_{37}^5}).9.(\frac{C_{35}^4}{C_{37}^5}).(\frac{C_{35}^5}{C_{37}^5})^8$.

Le deuxième évènement suppose que, à deux moments différents, le cahier de Julie soit ramassé et pas celui d'Isabelle, et à un autre moment le cahier d'Isabelle soit ramassé et pas celui de Julie (ce qui suppose que 4 cahiers soient choisis parmi 35). Il restera à choisir, pour les 7 autres jours, cinq cahiers parmi 35 (ni Julie, ni Isabelle). La probabilité de cet évènement est donc $C_{10}^2(\frac{C_{35}^4}{C_{37}^5}).8.(\frac{C_{35}^4}{C_{37}^5})^2.(\frac{C_{35}^5}{C_{37}^5})^7$.

Nous pouvons encore constater la faiblesse de l'écart entre cette probabilité et la probabilité calculée avec l'hypothèse de l'indépendance des évènements.

```
■ 90·nCr(35,3)·nCr(35,4)·(nCr(35,5))^8 + n▸
  ─────────────────────────────────────────
                                 (nCr(37,
                            .094648838773
```

La complexité croissante du phénomène fait qu'il n'était guère raisonnable d'envisager les évènements (4, 2) et les suivants... Errare humanum est, la question n'avait pas sa place dans ce devoir surveillé.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse, fausse, de l'indépendance des évènements permettait de traiter assez vite la question b, comme on peut le constater ci-dessous

On définit grâce à la loi binomiale la probabilité u(k) qu'un cahier soit ramassé k fois. Ceci permet alors de calculer la probabilité que le cahier de Julie soit ramassé deux fois plus souvent que le cahier d'Isabelle.

```
■ Define u(k)=nCr(10,k)·(5/37)^k·(32/37)^1(▸
                                         Done
    5
■   Σ (u(n)·u(2·n))           .156549559664
   n=0
```

Le lecteur intrépide pourra reprendre cette question en considérant les évènements dans leur dépendance. Il pourra alors constater que la probabilité ci-dessus une une bonne approximation du résultat exact.

PROBLEME : très classique

La fonction f peut-être définie pour la TI-92. Cependant le logiciel ne donne pas de réponse, ni pour la continuité, ni pour la dérivabilité de f en 0 ; il semble que ce soit la syntaxe des fonctions définies par morceaux qui perturbe le calcul de limite.

```
■ Define f(x) ={0,x = 0                    Done
               {x·(ln(x))^n,else
■ lim f(x)                            lim f(x)
  x→0+                                x→0+
■ d/dx(f(x))                        d/dx(f(x))
```

En effet, si l'on définit f uniquement pour x > 0 (cf. ci-contre), alors les limites sont bien données par le logiciel.

```
■ Define f(x)=x·(ln(x))^2                  Done
■ lim f(x)                                    0
  x→0
■ lim f(x)                                    ∞
  x→∞
```

Ailleurs qu'en 0, le logiciel calcule la dérivée, détermine les valeurs de x pour lesquelles celle-ci s'annule (on notera que la valeur 0 n'est pas donnée, puisque le logiciel n'a pas pu déterminer la dérivabilité de la fonction en ce point).

```
■ Define f(x) ={0,x = 0                    Done
               {x·(ln(x))^2,else
■ d/dx(f(x))      when(x ≠ 0,(ln(x))^2 + 2·ln(x))
■ solve((ln(x))^2 + 2·ln(x) = 0, x)
                               x = e^-2 or x = 1
```

Notons que, pour n quelconque, la dérivée est exprimée sous forme non simplifiée (cf. ci-contre), ce qui entraîne que le logiciel ne détermine plus qu'une racine pour la dérivée.

```
■ d/dx(f(x))
                 when(x ≠ 0, n·(ln(x))^n/ln(x) + (ln(x))^n)
■ solve(n·(ln(x))^n/ln(x) + (ln(x))^n = 0, x)
                                          x = e^-n
```

Le logiciel peut aussi déterminer la valeur de n convenable pour que la courbe passe par le point (a, b).

Il peut enfin déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse e, son intersection avec l'axe des abscisses, soit x_n, et enfin la limite de x_n quand n tend vers l'infini.

$$\text{solve}(b = a\cdot(\ln(a))^n, n) \qquad n = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln(\ln(a))} \text{ and } \frac{b}{a} \geq 0$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \mid x = e \qquad n+1$$

$$\text{solve}(0 = (n+1)\cdot(x-e) + f(e), x) \qquad x = \frac{n\cdot e}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot e}{n+1}\right) \qquad e$$

Cependant, **il faut nettement distinguer les potentialités théoriques du logiciel et ce qu'un élève, avec une connaissance forcément limitée de celui-ci, peut en faire**.

Pratiquement, pour la résolution de ce problème :
- les élèves ont tous utilisé les potentialités de l'application graphique de la TI-92 (comme une calculatrice graphique ordinaire) ;
- ils ont utilisé les potentialités du calcul symbolique pour vérifier les calculs de dérivée, les calculs de limite, les valeurs prises ponctuellement par la dérivée.

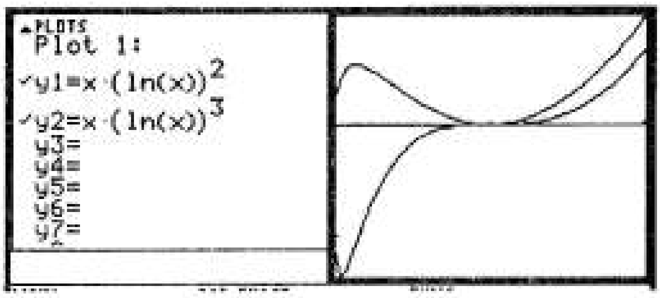
Il est beaucoup plus difficile de reformuler une question pour un traitement de celle-ci par le logiciel : seuls deux élèves ont utiliser la calculatrice pour déterminer la valeur de n telle que la courbe passe par le point (a, b) ; ils n'ont pas pu d'ailleurs retrouver cette valeur par un calcul "à la main".
Il est beaucoup plus difficile aussi "d'empiler" des commandes ; par exemple, pour l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses, très peu d'élèves utilisent la calculatrice.

On pourrait résumer cette situation en disant que, pour ce problème de fonction (et à ce stade de l'année), l'application "résidente" pour les élèves reste l'application graphique. Ils ne font que des incursions ponctuelles dans l'application initiale ; le calcul symbolique est un calcul d'appoint. Cela se comprend dans la mesure où les calculatrices graphiques sont un outil usuel, pour l'étude des fonctions, depuis au moins le début de la classe de première. Le processus d'instrumentation est donc beaucoup plus avancé avec les calculatrices graphiques qu'avec les calculatrices symboliques.

Une dernière illustration de ce fait pour conclure. Alors que l'étude de la dérivée a été convenablement réalisée, deux élèves estiment que la fonction f3 est croissante sur [0, 1].

C'est en effet ce que donne à voir une considération rapide de la représentation graphique de cette fonction.

Celle-ci garde une fonction de concrétisation très forte, qui dépasse la simple illustration.



Devoir surveillé n°4

Premier devoir type bac. Quelques conseils:

planifier son temps de travail (1/2 heure pour chaque exercice, 2 heures pour le problème, 1/2 heure pour tout relire...) ;

rédiger avec soin (on pourra utilement méditer la pensée de Confucius : "le sage donne aux choses le nom qui leur convient") ;

ne pas se laisser surprendre par la forme des exercices : il y a toujours, derrière des énoncés même étranges ou ésotériques, des questions mathématiques très classiques.

Par ailleurs, on trouvera, en guise de cadeau de Noël, deux questions facultatives à la fin de l'énoncé. Ne pas trop perdre de temps sur celles-ci, les traiter s'il reste du temps en fin de matinée, ou en guise de récréation (puisque, si je me souviens bien, il y a une récréation le Lundi matin...).
Bon travail à tous !

Exercice n°1 *(1+1+2 points)*

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+\sqrt{2})\,z + \sqrt{2} = 0$;
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z+\dfrac{1}{z} = 1$ et $z+\dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$;
c) Soit P(z) le polynôme $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})\,z^3 + (2+\sqrt{2})\,z^2 - (1+\sqrt{2})\,z + 1$;
- exprimez $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z+\dfrac{1}{z}$;
- résoudre alors l'équation $P(z) = 0$.

Exercice n°2 *(1+1+ 2 points)*

Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser. Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis, pour les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes. La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact avec le sol est notée α.

1. Un éléphant saute avec quatre raquettes à petit tamis. Quelle est la probabilité p qu'il ait moins (strictement) de deux raquettes encore aux pattes à l'atterissage (calcul en fonction de α évidemment) ?

2. Un éléphant saute avec deux raquettes à grand tamis. Quelle est la probabilité q qu'il n'ait aucune raquette aux pattes à l'atterrissage ?

3. Un éléphant s'enlise s'il a perdu strictement plus de la moitié de son équipement. Vous seriez un éléphant, avec quel type de raquettes décideriez-vous de sauter en parachute ?

PROBLÈME *(12 points : 5+4+3)*

ln désigne la fonction logarithme népérien. On considère la fonction numérique de la variable réelle f: $x \to f(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j).

A Etude des variations de f

a) Pour quelles valeurs de x la fonction f est-elle définie ? Sur quels intervalles est-elle définie ? Dérivable ?

b) Etudiez le sens de variation de f sur chacun des intervalles où elle est définie ;

c) Etudiez les limites de f aux bornes de ces intervalles ; prouvez que les droites d'équation x = 0, y = 0 et y = - x sont asymptotes à la courbe (C) (on précisera la position de la courbe par rapport à ces asymptotes) ;

d) Tracez la courbe (C), avec soin et précision, dans un repère orthonormé.

B Etude de la restriction g de f à l'intervalle I =]0, +∞ [

a. Montrez que g est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle que l'on précisera.

b. Résolvez l'équation g(x) = 0.

c. On désigne par Φ l'application réciproque de g et par (Γ) sa courbe représentative. Explicitez Φ(x) en fonction de x et tracez (Γ) en justifiant sa construction.

C. Etude d'une famille de fonctions

On considère les fonctions numériques f_a définies, pour a > 0 par :

$x \to f_a(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - a} \right|$ et on désigne par (C_a) la courbe représentative de f_a. On remarquera que f_1 n'est rien d'autre que la fonction f étudiée dans la partie A du problème.

a. Résolvez l'équation $f_a(x) = 0$;

b. Qu'ont de commun les différentes fonctions f_a ? les différentes courbes C_a ?

c. Par quelle transformation passe-t-on de la courbe (C_a) à la courbe (C_b) a et b > 0 ?

(En prenant des valeurs particulières pour a et b, on pourra observer les courbes, faire des conjectures, puis démontrer)

Deux questions indépendantes facultatives pour finir:

Question 1 *(1 point) :*

Si A et B sont deux évènements indépendants, A et $\overline{B}$ le sont-ils et pourquoi ?

Question 2 *(1 point) :-*

Que pensez-vous du raisonnement suivant :

pour tout x strictement positif, $x^x = x.x.x...x$ *(x facteurs)* ;
d'où par "passage au logarithme", $x\ln x = \ln x + \ln x + \ln x + ... + \ln x$ *(x termes)*;
d'où, par dérivation, $1 + \ln x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + ... \frac{1}{x}$ *(x termes)*;;
d'où $1 + \ln x = 1$;
d'où, pour tout x strictement positif, $\ln x = 0$.

Petit bilan du devoir surveillé n°4

Exercice 1

L'équation n'avait pas été choisie au hasard : le logiciel ne simplifie pas l'expression des deux racines réelles. Les solutions proposées <u>en mode calcul exact</u> n'indiquent pas que 1 (manifestement) et $\sqrt{2}$ sont racines. <u>En mode calcul approché</u>, le logiciel propose des valeurs qui peuvent faire penser à ces deux nombres.

▪ Define $f(z)=z^2-(1+\sqrt{2})\cdot z+\sqrt{2}$ Done
▪ solve(f(z) = 0, z)
$z=\dfrac{-\left(\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}-\sqrt{2}-1\right)}{2}$ or $z=\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-$ ▸
▪ solve(f(z) = 0, z)
z = 1.41421356237 or z = 1.

▪ $\dfrac{\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}+\sqrt{2}+1}{2}=1$ false
▪ $\dfrac{-\left(\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}-\sqrt{2}-1\right)}{2}=1$ false

Lors du devoir surveillé, une dizaine d'élève ont conservé cette expression non simplifiée des racines, ce qui les a empêché de traiter la fin de l'exercice.

<u>Remarque</u> : si l'on teste l'égalité des deux racines proposées avec 1 (cf. ci-dessus), la réponse du logiciel est *false* : puisqu'il ne sait pas simplifier ces expressions, il ne peut pas identifier l'une d'entre elles avec 1... Cette insuffisance du logiciel est évidemment problématique !

Une dizaine d'élèves ont utilisé le logiciel pour un calcul partiel : la simplification de l'expression du discriminant, ce qui leur a permis de résoudre ensuite sans peine l'équation. Quelques élèves ont utilisé leur calculatrice pour vérifier que 1 et $\sqrt{2}$ étaient bien solutions.

▪ $\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}-1$
▪ f(1) 0
▪ $f(\sqrt{2})$ 0

Les autres élèves ont tenté de résoudre "à la main" l'équation.

Pas de problème pour les deux équations simples de la question b : le logiciel fournit des réponses facilement exploitables, aussi bien sous forme algébrique que sous forme polaire.

cSolve$\left(z+\dfrac{1}{z}=1, z\right)$
$z=1/2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ or $z=1/2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
cSolve$\left(z+\dfrac{1}{z}=1, z\right)$
$z=e^{\frac{i\cdot\pi}{3}}$ or $z=e^{\frac{-i\cdot\pi}{3}}$

Quant à l'équation finale, le logiciel founit bien 4 solutions, mais dont la forme, aussi bien sous forme polaire que sous forme algébrique, est assez compliquée. Trois élèves recopient in extenso ces 4 expressions.

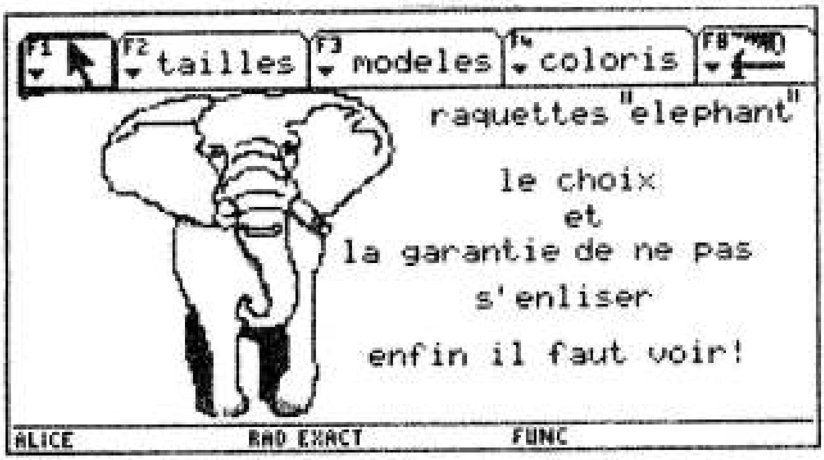
▪ Define $g(z)=z^4-(1+\sqrt{2})\cdot z^3+(2+\sqrt{2})\cdot z^2$ ▸ Done
▪ cSolve(g(z) = 0, z)
$z=e^{-i\cdot\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left((\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}+5\right)}}{\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}-\sqrt{2}-1}\right)}$ ▸

▪ cSolve(g(z) = 0, z)
◂ $\dfrac{)-\sqrt{2}-1)}{}+\dfrac{\sqrt{2\cdot\left((\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{-(2\cdot\sqrt{2}-3)}+5\right)}}{4}\cdot i$ ▸

Les quinze élèves qui ont traité convenablement l'exercice ont su contrôler une démarche générale de calcul "à la main" et des calculs ponctuels avec TI-92.

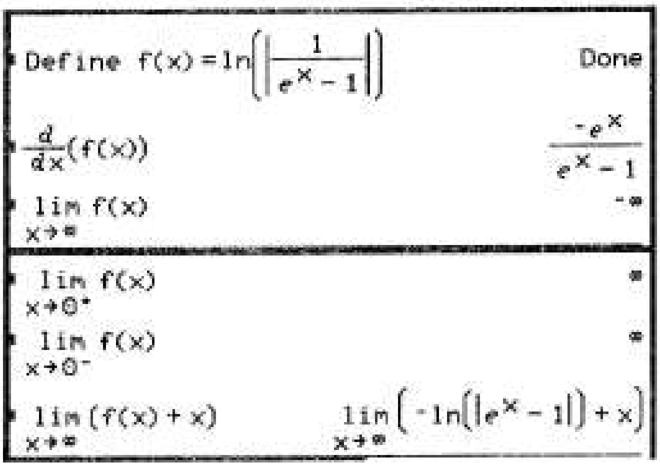
Exercice 2

La calculatrice n'apportait aucune aide spécifique pour le traitement de cet exercice. L'idée des éléphants sautant en parachute (énoncé inspiré d'un exercice du manuel de mathématiques de TS (collection Terracher, Edition Hachette) a beaucoup stimulé l'imagination des élèves (cf. dessins tirés du *Petit Prince* de Saint Exupéry dans l'introduction de cet ouvrage et illustration ci-dessous).



Exercice 3

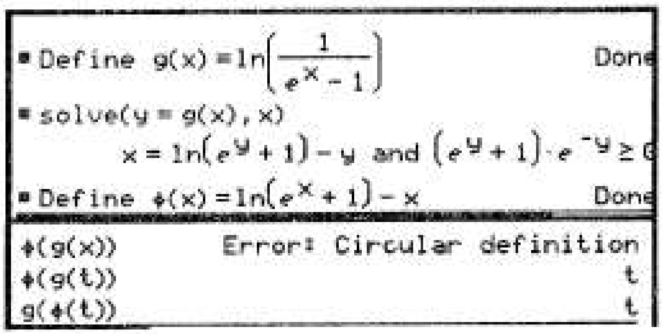
Le logiciel permet d'obtenir à peu de frais la dérivée de la fonction et les limites aux bornes du domaine. Un élève sur deux se contente de reprendre ces résultats sans les justifier (ce qui ne correspond pas à la règle précisée par le professeur!).



Par contre le logiciel ne connaît pas la limite en $+\infty$ de la différence f(x) - (-x) :

- 25% des élèves arrivent à surmonter l'obstacle par une tranformation convenable de l'expression ;
- 25% des élèves déforment la définition d'une asymptote ("puisque f(x) et (-x) ont même limite en $+\infty$, leur différence tend vers 0...") ;
- 50% des élèves renoncent.

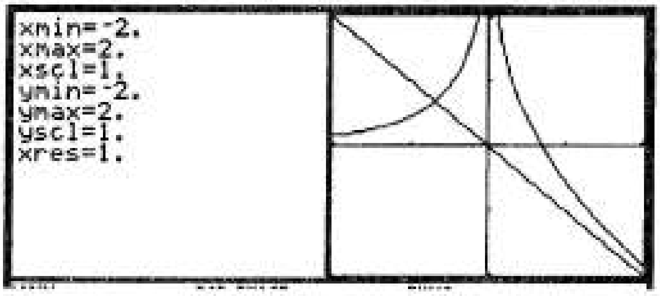
Aucun élève n'utilise la calculatrice pour déterminer l'application réciproque ; le logiciel le permettait pourtant, cf. ci-contre, mais une telle utilisation nécessitait une reformulation de la question, et cette reformulation nécessitait une très bonne compréhension de ce qu'est la détermination explicite d'une bijection réciproque. On pouvait aussi vérifier que la composée de g et Φ était égale à x :



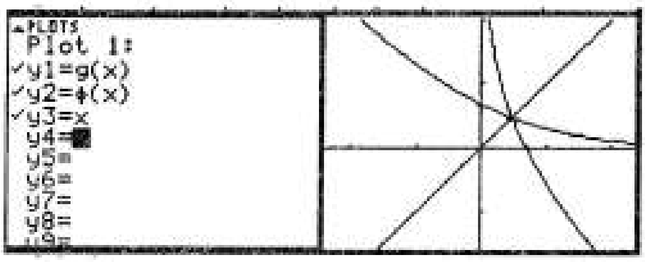
- à la demande g(Φ(x)), la réponse était *circular definition* ; cela pose un problème de conception du logiciel, qui n'accepte, pour une fonction définie avec la variable x, aucun autre symbole comme variable ;

- par contre le logiciel identifie bien g(Φ(t)) et Φ(g(t)) avec t. De l'importance des symboles pour exprimer une variable qui, du coup, n'est plus tout à fait "muette" !

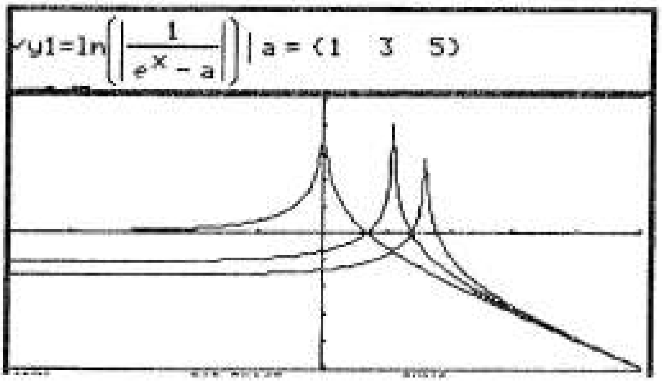
L'application graphique est évidemment mise à contribution pour contrôler les représentations graphiques de f, g et Φ.

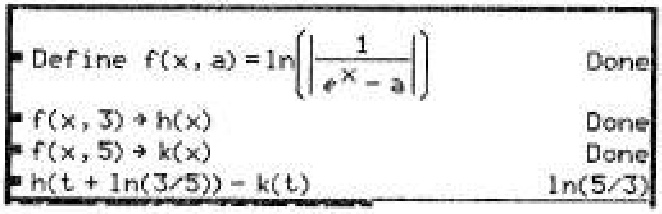


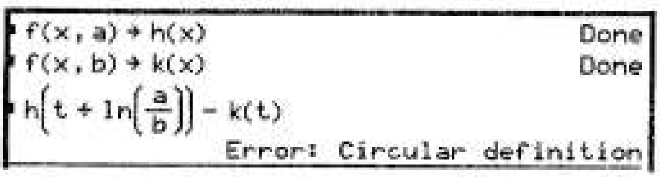
Pour l'application réciproque de g, un tiers de la classe n'a pas su trouver d'expression algébrique. Ils construisent alors le graphique par symétrie par rapport à la droite d'équation y = x. Pour quelques élèves, le domaine de définition de Φ pose problème, l'idée étant que deux fonctions réciproques l'une de l'autre ont nécessairement le même domaine de définition (les souvenirs des fonctions puissances l'emportent sur ceux du couple exponentielle-logarithme).



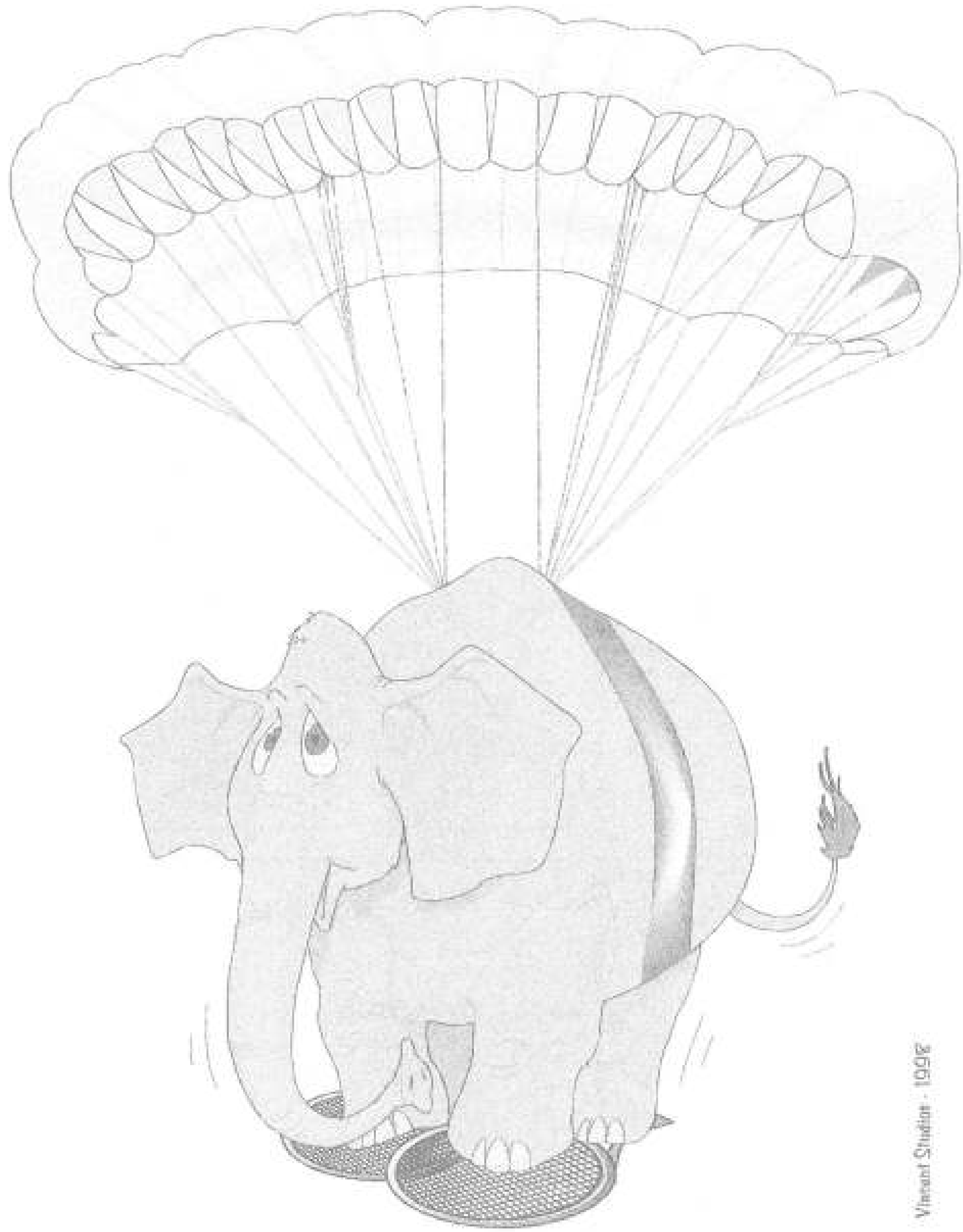
Pour la partie C, l'application graphique apporte une aide incontestable pour la formulation de conjectures quant aux relations entre les courbes (C_a). A partir de considérations sur la translation du domaine de définition, six élèves évoquent une translation de vecteur directeur (lnb-lna, k) = (ln $\frac{b}{a}$, k). Pour des raisons relatives à l'invariance nécessaire de l'asymptote oblique, cette translation ne peut avoir comme vecteur directeur que le vecteur (ln $\frac{b}{a}$, -ln $\frac{b}{a}$). Trois élèves prouvent cette conjecture par un calcul "à la main". Personne n'utilise l'application initiale qui permettait de prouver l'existence de la translation dans des cas particuliers (cf. ci-contre), pas dans le cas général (en raison de la présence de a et b dans la définition des fonctions et dans le calcul particulier demandé : *circular definition*...).







<u>Fin des commentaires sur ce devoir</u> : il illustre bien la difficulté qu'il y a à sélectionner l'information pertinente lors d'un travail avec un outil de calcul complexe.



Devoir surveillé n°5

Exercice n°1 *(4 points)*

On appelle I_n l'ensemble, dans $\mathbb{C}$, des racines $n^{\text{ièmes}}$ de (-1), c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = -1$.

a. Déterminer I_1, I_2, I_3, I_4.

b. Déterminer la forme générale des éléments de I_n.

c. Soit n fixé. Quelle est la somme des éléments de I_n ? Le produit des éléments de I_n ?

Exercice n°2 *(4 points)*

Soit la suite numérique u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 1$.

Soit la suite v définie, pour tout naturel n, par $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

a. Montrer que v est une suite géométrique.

b. Calculer v_0 puis calculer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{19}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6n - 15}{4}.$$

c. En déduire que la suite u peut s'écrire sous la forme u = t+w où t est une suite géométrique et w une suite arithmétique.

d. En déduire une expression synthétique de $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots u_n$.

e. <u>Facultatif</u> *(1 point)* : vérifier ce dernier résultat, pour n = 50, avec votre calculatrice (on précisera les commandes utilisées).

Exercice n°3 *(4 points)*

a. Soient M, N, O, P quatre points du plan. Montrer que MNOP est un parallélogramme si et seulement si le point P est barycentre des points pondérés (M, 1), (N, -1) et (O, 1).

b. Soient ABCD et A'B'C'D' deux parallélogrammes dans le plan. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AA' , [BB'], [CC'] et [DD'] ;

- montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on déterminera. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJKL ?
- montrer que les centre Ω_1, Ω_2, Ω_3, des parallélogrammes ABCD, A'B'C'D' et IJKL sont alignés et préciser les positions relatives de ces trois points.

Exercice n°4 *(8 points)*

On considère sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ la fonction $f : x \to f(x) = 2\sin x + \tan x$.

a. Pourquoi peut-on affirmer que la meilleure approximation affine de f au voisinage de 0 est la fonction $x \to 3x$?

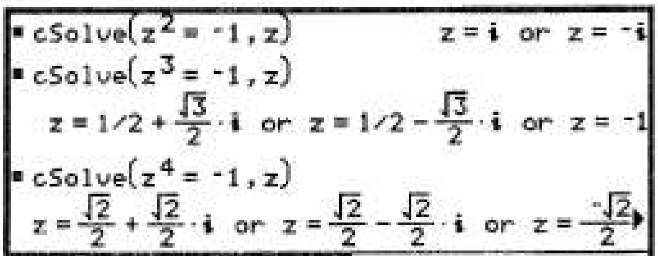
b. On veut démontrer l'inégalité de Huyguens (astronome, mathématicien et physicien hollandais, 1629-1695) : pour tout $x \in I$, $2\sin x + \tan x \geq 3x$:

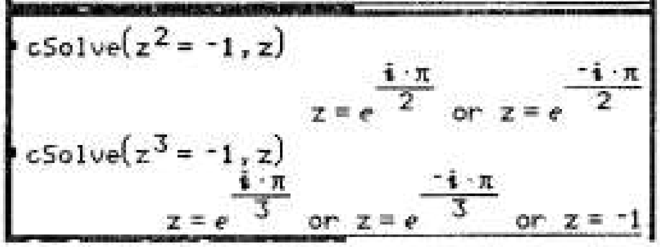
- montrer que f ' peut se mettre sous la forme $H(X) = 2X + \frac{1}{X^2}$ où $X = \cos x$;
- étudier les variations de H pour $X \in]0, 1]$ (puisque $X = \cos x$ et $x \in I = [0, \frac{\pi}{2}[$) ;
- en déduire que $H(X) \geq 3$;
- en déduire alors l'inégalité de Huyguens en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

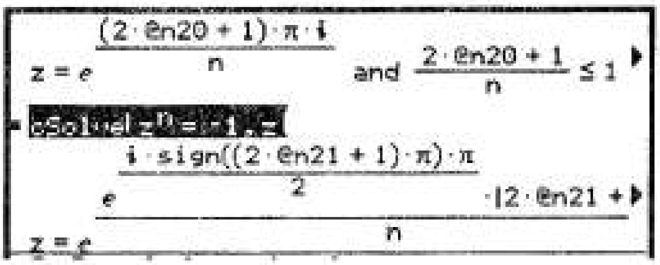
c. Quelles inégalités peut-on en déduire sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, 0]$? Sur $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$?

Petit bilan du devoir surveillé n°5

Exercice 1

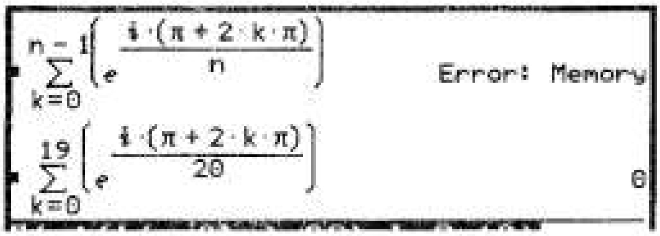






Le logiciel donne les racines de l'équation pour les premières valeurs de n, aussi bien sous forme algébrique que polaire. 80% des élèves donnent les solutions de ces équations particulières, la résolution est justifiée pour la moitié d'entre eux.

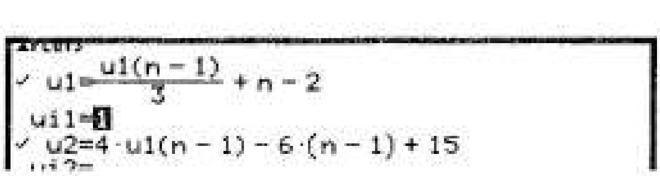
Cela se complique si l'on souhaite une résolution pour n quelconque (cf. troisième écran ci-contre) : le logiciel fournit bien la réponse (@n20, ou @nk en général repésentent un nombre entier quelconque). Les racines sont bien les nombres complexes de module 1, d'argument $\frac{\pi+2k\pi}{n}$. Mais l'interprétation du résultat affiché n'est pas simple. En fait l'interprétation n'est possible que pour celui qui sait résoudre l'équation "à la main" (25% des élèves).



La calculatrice possède une commande de somme d'un nombre donné de termes, mais pas de commande de produit. On peut voir ci-contre que la commande de somme permet d'obtenir le résultat attendu pour des valeurs particulières de n, pas dans le cas général.

De toutes façons, les cinq élèves qui ont déterminé le résultat général l'ont fait par un calcul à la main, en général en référence aux résultats relatifs aux racines nièmes de l'unité qui avaient été établis en classe.

Exercice 2



L'utilisation de la TI-92 posait ici des problèmes assez délicats.

Première possibilité : définir les suites u et v à l'aide de l'éditeur de suites (mode calcul approché).

L'éditeur impose de définir u(n) en fonction de u(n-1), ce qui imposait de modifier l'expression de la suite u : au lieu de $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n+n-1$, il fallait écrire $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}+n-2$. De même pour la suite v(n), nécessairement définie en fonction de u(n-1) : nous avons donc ainsi écrit v_{n-1}. Tout ceci n'est pas particulièrement simple...

Une fois ces problèmes d'écriture surmontés, nous pouvions obtenir des valeurs approchées des premiers termes des deux suites et constater que la suite v ressemblait à une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

n	u1	u2
0.	1.	undef
1.	⁻.6666666667	19.
2.	⁻.2222222222	6.3333333333
3.	.92592592593	2.1111111111
4.	2.3086419753	.7037037037
5.	3.7695473251	.23456790123
6.	5.256515775	.07818930041
7.	6.752171925	.02606310014

<u>Deuxième possibilité</u> : utiliser l'application initiale en calcul exact. Les suites u et v sont définies formellement (il est alors possible de définir directement v(n) au lieu de v(n-1)).

$$\text{Define } u(n)=\begin{cases}1, n=0\\ \dfrac{u(n-1)}{3}+n-2, \text{else}\end{cases} \qquad \text{Done}$$

$$\text{Define } v(n)=4\cdot u(n)-6\cdot n+15 \qquad \text{Done}$$

$$\text{seq}\left(\frac{v(p+1)}{v(p)}, p, 0, 5\right)$$
$$\{1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 1/3\}$$

Le calcul du rapport entre deux termes successifs de la suite v, pour quelques valeurs donne bien l'impression d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. La vérification ne peut pas aller très loin : la définition récursive des suites entraîne une saturation assez rapide de la mémoire. Quant au calcul général du rapport $\frac{v(p+1)}{v(p)}$, il ne donne pas un résultat concluant.

$$\frac{v(10)}{v(9)} \qquad 1/3$$

$$\frac{v(20)}{v(19)} \qquad 1/3$$

$$\frac{v(50)}{v(49)} \qquad \text{Error: Memory}$$

$$\frac{v(p+1)}{v(p)}$$
$$\frac{4\cdot\begin{cases}1, n=0\\ n+\dfrac{u(n-1)}{3}-2, \text{else}\end{cases}-3\cdot(2\cdot p-3)}{4\cdot\begin{cases}1, n=0\\ n+\dfrac{u(n-1)}{3}-2, \text{else}\end{cases}-3\cdot(2\cdot p-5)}$$

La plupart des élèves ont bien défini la suite u dans l'éditeur de suites (pour 50% d'entre eux) ou dans l'application initiale (pour 20% d'entre eux). Mais ils n'ont pas pu définir à partir de là la suite v.

L'énoncé fournissait ensuite l'expression du terme général de la suite u en fonction de n. Dès lors, la calculatrice pouvait donner une expression synthétique de la somme des premiers termes de cette suite.

$$\text{Define } u(n)=19/4\cdot(1/3)^n+\frac{6\cdot n-15}{4} \qquad \text{Done}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u(k) \qquad \frac{^{-}19\cdot 3^{-n}}{8}+\frac{3\cdot n^2}{4}-3\cdot n+27/8$$

$$\frac{^{-}19\cdot 3^{-n}}{8}+\frac{3\cdot n^2}{4}-3\cdot n+27/8 \rightarrow s(n) \qquad \text{Done}$$

$$\sum_{k=0}^{50} u(k) \qquad \frac{12407969344769057181157779113}{717897987691852588770249}$$

$$s(50) \qquad \frac{12407969344769057181157779113}{717897987691852588770249}$$

Personne n'a donné cette forme pour la suite S(n) : tous les élèves ont utilisé les formules du cours donnant la somme des termes des suites arithmétiques et géométriques.

Quelques élèves ont tenté d'identifier la forme obtenue ainsi pour la suite S(n) avec celle donnée par la calculatrice, mais ont renoncé faute de temps.

L'énoncé demandait ensuite, de façon ambiguë, une vérification pour S(50). Dans l'idée du concepteur de l'énoncé, il s'agissait de comparer ce que donnait l'expression synthétique de la suite, s(50), et le résultat obtenu grâce à l'application directe de la commande somme à la suite définie par son terme général (cf. dernier écran ci-dessus).

Pour la plupart des élèves, de façon finalement plus naturelle, il s'agissait plutôt de comparer la somme des premiers termes de la suite obtenue à partir de l'expression initiale de celle-ci (au début de l'exercice) et la somme des termes obtenue à partir de l'expression synthétique finale. Ils avaient donc deux choix possibles :

$$s(50) \qquad 1728.375$$

$$\sum_{n=0}^{50} u1(n) \qquad 1728.375$$

$$\text{Define } u(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ \frac{u(n-1)}{3} + n - 2, \text{else} \end{cases} \qquad \text{Done}$$

$$\sum_{k=0}^{50} u(k) \qquad 51 \cdot \begin{cases} 1, n = 0 \\ n + \frac{u(n-1)}{3} - 2, \text{else} \end{cases}$$

- utiliser l'éditeur de suites qui permet de donner des valeurs approchées pour la suite u (mais la comparaison de deux valeurs approchées ne permet pas une conclusion définitive) ;

- soit utiliser la définition récursive de la suite u dans l'application initiale. On aperçoit alors un message d'avertissement en bas de l'écran : *warning, memory full, simplification might be incomplete.*

On obtient alors, pour la somme des termes demandée, la réponse ci-dessus. Son interprétation est simple : le logiciel indique simplement qu'il y a 51 termes dans la somme, et que chacun d'entre eux est un des termes de la suite.

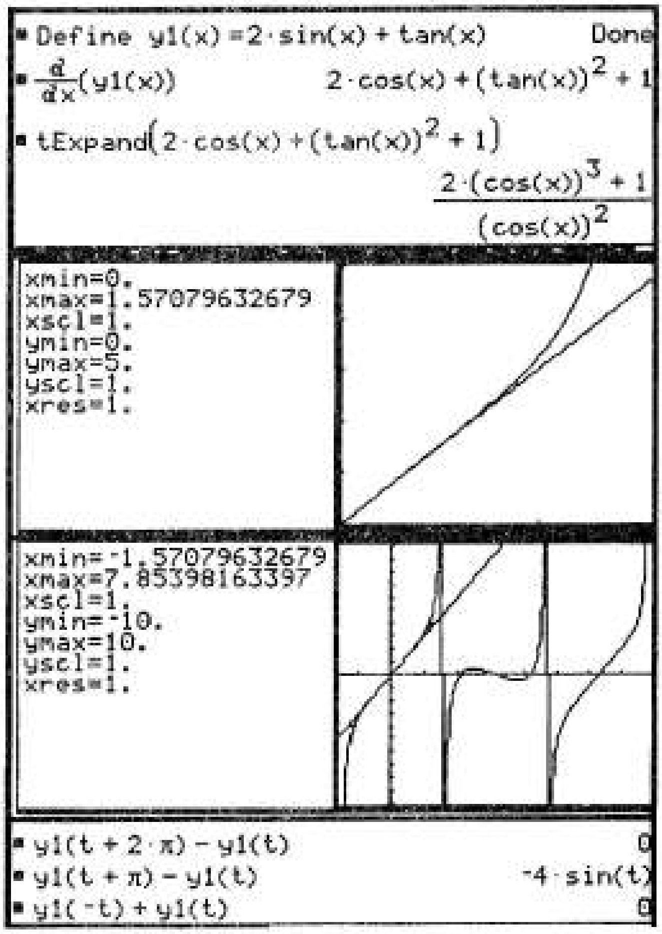
Dans un cas (valeurs approchées via l'éditeur de suites) et encore moins dans l'autre (saturation de la mémoire via la définition récursive de la suite), on ne peut pas dire que la "vérification" soit probante.

<u>Conclusion de cet exercice</u> :

- il illustre assez bien les difficultés techniques qui peuvent résulter de l'utilisation d'un logiciel pour le traitement d'un exercice finalement assez simple ;

- il illustre aussi la nécessité d'être extrêmement précis dès lors que l'on sollicite l'utilisation d'un outil de calcul dans le cadre d'un devoir surveillé (pour une vérification par exemple).

<u>Exercice 4</u>



Pour tout x de I, on sait que $\sin x \leq x$ et $\tan x \geq x$. La comparaison de $2\sin x + \tan x$ avec $3x$ présente donc un certain intérêt.

Le logiciel fournit une expression de la dérivée de f qui n'est pas tout à fait celle attendue. La transformation peut être réalisée avec la TI-92. Les élèves ont quant à eux utilisé les différentes formes connues de la dérivée de la fonction tangente.

Il s'agit ensuite d'une application classique de l'inégalité des accroissements finis. La dernière question a été assez peu réussie, preuve d'une interaction mal maîtrisée entre le registre graphique et le cadre algébrique : la réponse a été en général que l'inégalité subsistait sur $]3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}[$, ce qui ne coïncide pas avec l'observation graphique.

Notons que les potentialités d'étude formelle de l'application initiale (cf. ci-contre) ne sont pas du tout exploitées.

Devoir surveillé n°6

Exercice n°1 *(6 points)*

Dans un plan P, on donne un triangle ABC rectangle en A et isocèle avec AB= AC = a, où a est un réel donné strictement positif.

a) Déterminer et construire le barycentre G du système $\{(A, 4), (B, -1), (C, -1)\}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points du plan tels que :

$$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2.$$

Exercice n°2 *(14 points)*

Une calculatrice peut donner en général une valeur approchée de e avec au plus 13 chiffres significatifs.

On se propose dans ce problème d'obtenir des renseignements supplémentaires sur e :

- une précision plus grande (par exemple avec 20 décimales) ;
- une information sur sa nature (e n'est pas un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels).

A. Pour atteindre le premier but, n étant un entier naturel non nul, on définit :

- la fonction f_n sur [0, 1] par $x \to f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$;
- la suite u par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

1. Montrer que f_n est dérivable sur [0, 1] et que $f_n'(x) = -e^{-x}.\frac{x^n}{n!}$

2. En déduire que, pour tout x de [0, 1], on a $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n!}$

3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre 0 et 1, prouver l'inégalité : $\left|\frac{u_n}{e} - 1\right| < \frac{1}{n!}$

4. En déduire l'inégalité $|u_n - e| < \frac{3}{n!}$, puis la convergence de la suite u vers e.

5. A partir de quel rang n est-on sûr que l'écart entre u_n et e est inférieur à 10^{-20} ?

6. En utilisant une calculatrice TI-92, en déduire une valeur approchée de e, sous forme de fraction $\frac{p}{q}$ (avec p et q entiers) à 10^{-20} près.

7. Pouvez-vous en déduire, en utilisant de façon adaptée votre calculatrice, les 20 premières décimales de e ?

B. Pour atteindre le deuxième but, on définit une deuxième suite v par $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

1. Prouver que u est strictement croissante et que v est strictement décroissante.

2. Peut-on en déduire, sans utiliser la partie A, que les deux suites convergent, et convergent vers la même limite ?

3. En déduire, en utilisant la partie A, que les deux suites convergent vers e et que :

$$u_n < e < v_n \text{ pour tout } n.$$

4. On suppose que e est rationnel, c'est à dire que $e = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels.

Montrer alors, en utilisant l'encadrement précédent, que $p.q! - q.q!.u_q$ serait un entier appartenant à]0, 1[. Conclure.

Petit bilan du devoir surveillé n°6

Exercice 1

Les fonctions f_n peuvent être définies de deux façons :
- à partir des fonctions de deux variables ($f(x, n)$ ci-contre) ;
- comme une fonction de x, en laissant n "flottant" (cf. ci-contre).

$$\blacksquare \text{ Define } f(x,n) = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right) \qquad \text{Done}$$

$$\blacksquare \text{ Define } g(x) = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right) \qquad \text{Done}$$

L'intérêt de la première forme est qu'elle permet d'affecter directement une valeur particulière à n, alors que la deuxième forme demande une double manoeuvre : il faut stocker 3 (par exemple) dans la mémoire n, puis exprimer la fonction (la syntaxe *sachant que* ne suffit pas).

$$\blacksquare\ f(x,3) \qquad \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot e^{-x}$$

$$\blacksquare\ g(x) \mid n = 3 \qquad e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right)$$

$$\blacksquare\ 3 \to n \qquad 3$$

$$\blacksquare\ g(x) \qquad \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1\right) \cdot e^{-x}$$

Le logiciel ne permet pas d'obtenir la dérivée pour une fonction générale ; il permet d'obtenir la forme voulue pour la dérivée de fonctions particulières à condition de factoriser le résultat donné directement.

$$\frac{d}{dx}(f(x,n))$$

$$e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right)\right) - e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x^k}{k!}\right)$$

$$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}(f(x,3))\right) \qquad \frac{-x^3 \cdot e^{-x}}{6}$$

Les élèves qui ont utilisé ici la calculatrice ont exprimé directement la fonction pour des valeurs particulières de n, ont utilisé la commande de dérivation et ont constaté l'annulation de la plupart des termes. Ils ont ensuite pu généraliser le processus. Mais il s'agit là d'une minorité d'élèves : la présence de n et d'une somme indexée sur n semble avoir rebuté la plupart. La majorité de la classe a ainsi fait le calcul "à la main".

Remarque : un élève se trompe dans la dérivation à la main de la fonction e^{-x} (il prend pour dérivée $-xe^{-x}$). Il y a là un certain effet pervers de l'utilisation régulière et non contrôlée d'un logiciel :
- il est utilisé en permanence pour la dérivation des fonctions simples, sans effort de mémorisation, d'identification des résultats obtenus ;
- en présence de fonctions plus complexes, non prises en charge globalement par le logiciel, il y a en dernier ressort un calcul à la main, en général assez maladroit (alors que la calculatrice pourrait donner des résultats partiels).

En somme soit le logiciel fait tout, soit il ne fait rien...

Après une partie théorique pour laquelle la calculatrice n'était pas d'un grand secours, on posait la question : à partir de quel rang a-t-on $\frac{3}{n!} < 10^{-20}$? La classe s'est partagée en deux groupes :
- une première moitié a utilisé la calculatrice, via la table de valeurs des suites ou par tâtonnement via

PLOTS
✓ $u1 = \frac{3}{n!}$
ui1=
u2=
ui2=
u3=
ui3=
u4=
ui4=
u5=

n	u1
0.	3.
5.	.025
10.	.00000083
15.	2.294E-12
20.	1.233E-18
25.	1.934E-25
30.	1.131E-32

l'application initiale. Une valeur convenable pour n a été ainsi repérée, sans autre justification ;

- l'autre moitié de la classe a tenté (en vain) de résoudre l'inéquation "à la main", à l'aide des logarithmes par exemple.

Personne n'a combiné une réflexion théorique et une utilisation de l'instrument, en remarquant par exemple que la suite $(\frac{3}{n!})$ était une suite décroissante qui convergeait vers 0, et que, dans ces conditions, il existait bien une valeur de n convenable qu'il était dès lors légitime de relever dans une table de valeurs de cette suite. Une telle combinaison de plusieurs outils nécessite sans doute une très bonne maîtrise de l'instrument... et des mathématiques !

Pour n = 22, nous sommes donc assurés d'une précision de $\frac{3}{22!}$ c'est-à-dire inférieure à 10^{-20}, ce qui est bien meilleur que la précision obtenue par le calcul approché de *e* dans l'application initiale.

La moitié de la classe obtient ainsi la valeur exacte de u_{22} et donc une valeur approchée de *e* avec une précision de 10^{-20} (mais sous forme fractionnaire).

Si on demande une valeur approchée de ce nombre, on obtient alors la valeur approchée déjà connue pour e...

$$\sum_{k=0}^{22}\left(\frac{1}{k!}\right) \qquad \frac{611070150698522592097}{224800145555521536000}$$

$$\sum_{k=0}^{22}\left(\frac{1}{k!}\right) \qquad 2.71828182846$$

$$e \qquad 2.71828182846$$

C'est pourtant ce qu'ont fait ici la plupart des élèves. C'est sans doute la marque d'une habitude d'utilisation d'un raccourci clavier <u>♦ Enter</u> qui permet d'obtenir des valeurs approchées. Plus profondément, cela témoigne sans doute d'un besoin, pour connaître un nombre, d'en voir une approximation sous forme décimale.

Il était possible d'obtenir les 20 premières décimales de e, à condition de se ramener à un calcul sur les nombres entiers : le logiciel peut alors manipuler des très grandes expressions. Deux méthodes étaient envisageables :

- multiplier la valeur exacte de u_{22} par 10^{20} et prendre la partie entièredu résultat ; on obtient ainsi la partie entière de *e* (qui est 2) et les 20 premières décimales, dont on sait qu'elles sont exactes ;
- on peut aussi opérer une division euclidienne de $u_{22} .10^{20}$.

$$\blacksquare\ \mathrm{int}\left(\frac{10^{20}\cdot 611070150698522592097}{224800145555521536000}\right) \qquad 271828182845904523536$$

$$\blacksquare\ \mathrm{propFrac}\left(\frac{10^{20}\cdot 611070150698522592097}{224800145555521536000}\right)$$

$$271828182845904523536+\frac{84763426714}{3430178002251}$$

Seuls cinq élèves ont obtenu ces résultats. Ce type de calcul avait déjà été vu pourtnt en classe, les commandes *Int* et *PropFrac* étaient connues. Mais les mettre en oeuvre supposait une certaine habitude du travail avec les nombres entiers, difficilement acquise en l'absence d'un cours d'arithmétique (pour le moment) en collège et lycée.

Nous arrivons maintenant à l'étude des suites u et v.

On aura besoin ici de la suite $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (déjà évoquée en A).

L'écart entre les deux suites tend vers 0, ce qui assure aussi la convergence de la suite v vers *e*. Mieux, les deux suites sont monotones :

- il est immédiat que la suite u, par construction, est <u>strictement</u> croissante ;

- l'observation de l'évolution de la suite v (cf. A4) semble indiquer qu'elle est décroissante.

La démonstration de la décroissance de v passe par le calcul de la différence $v_{n+1} - v_n$.

On peut tenter un calcul direct avec la calculatrice. Refus du logiciel de traiter cette différence dans le cas général (cf. ci-contre : définition récursive interdite).

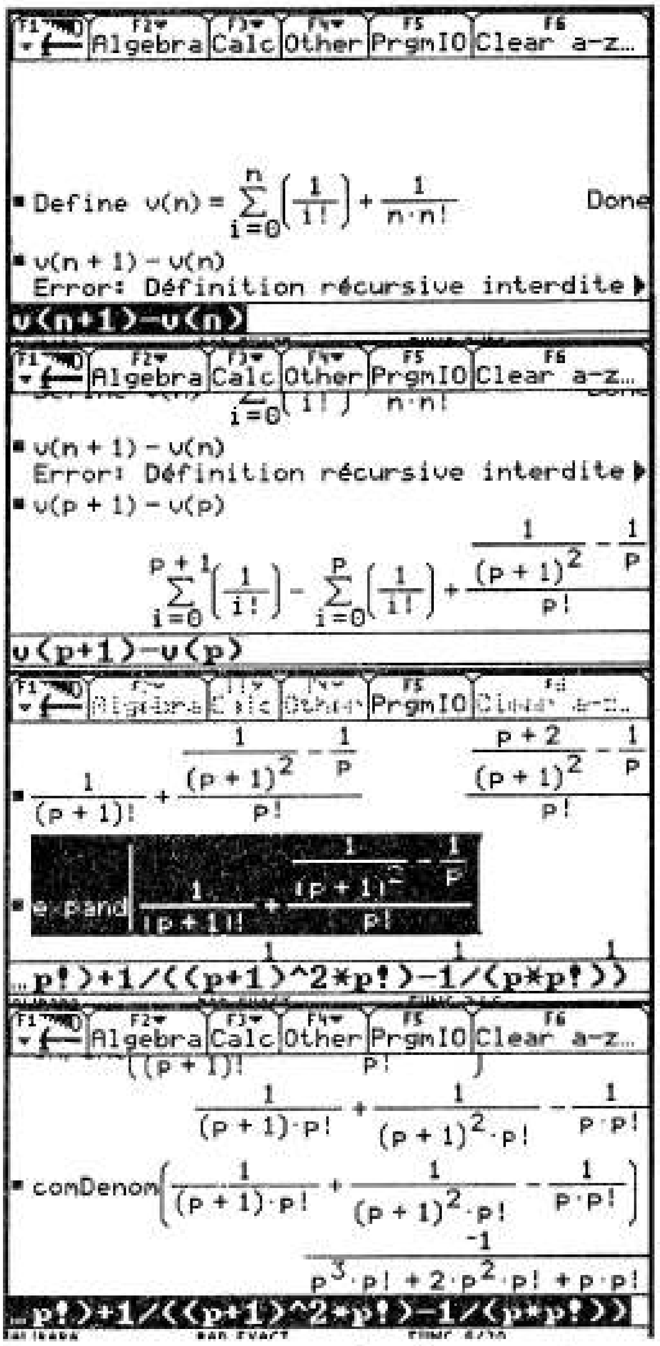
Par contre, si l'on reformule la question en prenant une autre lettre que n, le logiciel fournit une réponse (c'est évidemment un problème théorique important créé par le logiciel : le statut particulier accordé à la lettre qui a servi à définir la suite fait que celle-ci n'est plus tout à fait "muette"...).

L'expression renvoyée pour vp+1-vp n'est pas simplifiée. Elle doit l'être "à la main".

Il faut ensuite utiliser encore deux commandes, *expand* et *comDenom*, pour obtenir le résultat incontestablement strictement négatif qui garantit la décroissance stricte de la suite (cf. ci-dessous à droite).

Deux remarques s'imposent :

- on aurait sans doute eu plus vite fait de prouver la décroissance stricte de la suite "à la main" ;
- traiter le problème avec la TI-92 requiert une certaine expertise. Mais cela peut revêtir un caractère formateur si cela est fait, collectivement, dans le cadre de la classe.



Ainsi la suite u est <u>strictement</u> croissante et converge vers e, la suite v est <u>strictement</u> décroissante et converge vers e (on dit que les suites u et v sont asjacentes).

On en déduit sans peine que, pour tout n, $u_n < e < v_n$. On a ainsi :

$$\mathbf{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}}$$

Supposons alors que e est rationnel, c'est à dire que $e = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers naturels non nuls. On aurait, pour tout n :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}$$

Cette double inégalité étant vraie pour tout n, on peut choisir n = q, pour pouvoir bénéficier d'expressions "comparable". On obtient alors :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!}<\frac{p}{q}<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q.q!}$$

En multipliant les trois expressions en présence par q.q!, on obtient de nouvelles inégalités entre nombres entiers :

$$q.q!\ (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})<p.q!<q.q!\ (1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})+1.$$

Peut-on utiliser la TI-92 pour effectuer ces multiplications ?

Il faut noter un problème dans la gestion du fichier de suites : si l'on définit la suite en u1(n), c'est à dire dans le fichier de suites, le logiciel refuse tout traitement symbolique.

Il ne peut faire que du calcul approché à partir de cette suite ainsi définie.

On peut ainsi vérifier, à partir d'une table de valeurs, que le produit n!u est bien entier, mais sous toutes réserves, car il ne s'agit que de valeurs approchées !

Si on veut un traitement symbolique des expressions, il faut définir la suite indépendamment du fichier de suites (cf. ci-dessous).

La suite u est définie en u(n), qui n'est pas une variable réservée pour le fichier de suites. Il y a alors un traitement symbolique de l'expression mais celui-ci n'aboutit pas aux expressions espérées (l'utilisation des différentes commandes du menu Algebra n'y parviennent pas davantage).

Si on particularise (ci-contre pour n=100), les simplifications donnant un nombre entier sont bien faites. Mais ce n'est qu'un cas particulier...

Comme pour l'étude du sens de variation de la suite v, l'utilisation de la TI-92 pour l'étude de ce produit peut susciter une réflexion utile sur certaines singularités du logiciel. Mais on ne peut pas dire que cela constitue un gain de temps...

Appelons désormais N l'entier naturel égal à q.q! $(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{q!})$. La double inégalité obtenue s'écrit alors plus simplement :

N < p.q! < N+1.

Peut-on avoir un entier naturel strictement compris entre un entier et son successeur? Bien sûr que non [1] . Ainsi l'hypothèse faite, au départ de ce raisonnement, s'avère-t-elle fausse : **e n'est pas un nombre rationnel.**

Il n'y a donc pas d'effet de contagion : le fait que e se trouve entouré de nombres rationnels, aussi près que l'on veut, n'implique pas qu'il soit lui-même un rationnel.
Une petite différence et ses grandes conséquences :
- il n'y a donc pas d'écriture décimale finie de e ;
- pas d'écriture $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers ;
- pas d'écriture décimale périodique.

<u>Conclusion de cette deuxième approche de e</u>

On peut avoir des valeurs approchées rationnelles ou décimales aussi proches que l'on veut de *e*, mais la connaissance numérique <u>exacte</u> de *e* échappe à la TI-92 comme à tout outil de calcul. La seule connaissance exacte de *e* est donc symbolique.
***e* est <u>égal</u> à *e* : c'est l'unique réel dont le logarithme népérien est égal à 1.**

[1] On notera que cette conclusion est rendue possible par l'établissement d'inégalités strictes, découlant de l'établissement de la monotonie stricte des suites étudiées.

(AUTO)ÉVALUATION

(AUTO)ÉVALUATION

Mesurer les évolutions des élèves au cours d'une année scolaire n'est pas en général chose facile. Dans le contexte d'une classe expérimentale, cela l'est encore moins. Cela supposerait en effet de suivre à la fois les processus de conceptualisation (les apprentissages mathématiques, mais aussi plus largement "la formation de l'esprit scientifique") et les processus d'instrumentation (ici la maîtrise progressive par chaque élève de sa calculatrice). Tâche difficile :

- les processus de conceptualisation et les processus d'instrumentation ne sont pas indépendants les uns des autres ; la bonne compréhension d'un objet mathématique permet de l'approcher de façon raisonnable avec une calculatrice, mais l'utilisation raisonnée de la calculatrice permet aussi de se faire une bonne "idée" des objets mathématiques (à l'inverse, une utilisation non raisonnée de la calculatrice permet souvent de se faire une idée fausse des objets mathématiques) ;
- ces processus sont individuels, mais ils ont aussi une dimension sociale. Les élèves, surtout dans le contexte de cette classe expérimentale, apprennent en interaction avec leur collègue de binôme, dans le cadre des échanges qui ont lieu dans la classe...

Il a été choisi ici de repérer les évolutions à partir de ce qu'en disent les élèves eux-mêmes :

- une première occasion a été le questionnaire national sur les savoirs, destiné aux lycéens. Ceux de la T5S ont bien voulu y répondre, en le limitant aux savoirs mathématiques. Deux élèves de la classe ont assuré le dépouillement. Elles le commentent dans les pages qui suivent ;
- la deuxième occasion était liée au cadre expérimental. Un questionnaire au nom évocateur - le baromètre- a été proposé aux élèves en début et en milieu d'année, relatif à tous les aspects de l'expérimentation. On en trouvera le bilan dans la deuxième partie de ce chapitre.

Ces différents outils de mesure font apparaître des évolutions certaines, quant au rapport avec l'instrument de calcul, ce qui est bien naturel, mais aussi et surtout quant aux mathématiques elles-mêmes et plus généralement encore quant à la construction des connaissances de "l'honnête homme" du XX(I)ème siècle...

Questionnaire national élèves
Pourquoi apprendre au lycée ?

3.1 A votre avis, à quoi set ce que vous apprenez au lycée ? *(Cochez les propositions de 1 à 5, le numéro 1 pour la proposition la plus importante)*

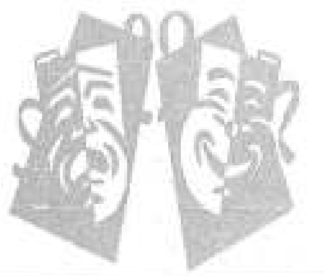
- à réussir son examen ❑
(Bac, BEP)
- à réussir son orientation ❑
(poursuivre des études supérieures)
- à réussir son insertion professionnelle ❑
(trouver un emploi)
- à développer sa personnalité ❑
(affirmer son identité en explorant de nouveaux horizons)
- à acquérir une culture générale ❑
(connaître les grandes étapes de la pensée littéraire, philosophique et scientifique, en Occident et ailleurs)

3.2. Le lycée permet-il, à votre avis, d'acquérir les qualités suivantes ? En utilisant le cadre ci-dessous répondez, pour chacune des qualités citées, dans une des deux cases en donnant un exemple vécu.

	OUI, le lycée permet d'acquérir cette qualité ; voici une illustration.	NON, le lycée ne permet pas d'acquérir cette qualité ; voici une illustration.
ESPRIT CRITIQUE *(à l'égard des opinions, préjugés et des tentatives d'embrigadement...)*		
RESPECT DE L'AUTRE *(apprentissage de la vie en commun et de la discussion démocratique...)*		
AUTONOMIE *(dans la gestion de son travail et le choix de ses orientations...)*		
CREATIVITE ET INITIATIVE *(dans les domaines scolaire et extra-scolaire...)*		
CURIOSITE *(envers un patrimoine artistique, littéraire, historique, les découvertes scientifiques...)*		
CIVISME *(conscience de ses droits et de ses devoirs de citoyens...)*		

Pourquoi apprendre au lycée ?

Petit bilan du questionnaire élèves relatifs aux savoirs mathématiques enseignés.



Le ministère de l'éducation nationale a diffusé auprès des professeurs et des élèves une grande enquête sur les savoirs à enseigner en lycées. Il a été proposé aux élèves de la T5S de répondre aux deux dernières questions (cf. les énoncés dans l'encadré ci-contre), en se référant plus particulièrement aux mathématiques. Une vingtaine d'élèves ont accepté de répondre, deux élèves de la classe, Anne-Sophie Kaloghiros et Danièle Obono commentent ci-dessous, l'une après l'autre, les réponses de leurs collègues.

Le point de vue d'Anne-Sophie Kaloghiros

"Pourquoi apprendre au lycée?" Vaste question, n'est-ce pas ? Cela fait environ 6 mois que notre classe de TS suit un enseignement de mathématiques un tout petit peu différent de celui des autres classes, nous avons donc eu à remplir un questionnaire qui nous permettait de préciser nos sentiments vis à vis de cette nouvelle version des maths. Tout d'abord, nous avions à répondre à la question "à votre avis, à quoi sert ce que vous apprenez au lycée?". Ensuite, on nous demandait si nous pensions que l'enseignement mathématique que nous recevons nous permettait d'acquérir diverses qualités telles que la curiosité, l'esprit critique, le respect de l'autre... Les réponses ont été relativement nombreuses et j'ai réalisé cette synthèse sur les 20 questionnaires qui me sont parvenus.

Dans un premier temps, nous devions classer les propositions suivantes selon que les mathématiques nous permettaient, nous étaient plus ou moins utiles pour y parvenir. Celles-ci étaient : "à réussir son examen", "à réussir son orientation", "à réussir son insertion professionnelle", "à développer sa personnalité" et enfin "à acquérir une culture générale". Le classement suivant est revenu fréquemment : tout d'abord les mathématiques nous servent à réussir notre examen, ensuite à réussir notre orientation et notre insertion professionnelle. Enfin les maths nous permettent d'acquérir une culture générale et à développer notre personnalité.

Comme je l'ai signalé précédemment, la seconde partie du questionnaire consistait à nous demander si les mathématiques nous permettaient d'acquérir certaines qualités, à savoir l'esprit critique, le respect de l'autre, l'autonomie, la créativité et l'initiative, la curiosité et le civisme. Une grande majorité des élèves a estimé que les mathématiques aiguisaient notre esprit critique "à l'égard des problèmes et des différentes méthodes (notamment en TP)" ou encore "contre les préjugés, les démonstrations évidentes". Ainsi, selon un élève, "on perçoit les choses différemment en essayant de les retrouver et de chercher leur sens, leur but". De même, comme le signale un autre, "lorsqu'une réponse est donnée, on se pose la question : est-elle convenable ? Rapide ? Efficace ?". De plus, nombreux ont été ceux qui ont souligné l'intérêt des contre exemples que l'on peut trouver aux théorèmes que l'on supposait a priori toujours valables. Cependant, quelques uns ont émis des réserves : "mais qui oserait critiquer et mettre en doute le fait que 2+2=4 ?"

En ce qui concerne le respect de l'autre, là encore les réponses ont été massivement affirmatives. La grande majorité des élèves a évoqué les séances de TP qui initient "à l'esprit d'équipe" : "lors des séances de TP, nous sommes confrontés à une autre façon de travailler, chez le collègue de binôme". En effet, pour que la recherche puisse avancer, "il faut confronter ses idées à celles de son partenaire, apprendre à coopérer".

Au niveau de l'autonomie, à nouveau, le "oui" a connu une adhésion quasi-généralisée : "il faut apprendre à gérer son temps en devoir et lors des séances de TP". Durant les cours "classiques", l'utilisation de la TI-92 nous laisse une certaine liberté". Certains soulignent également l'effervescence des séances de TP ou encore l'intérêt des "Défis mathématiques". Quelques uns se sont montrés plus sceptiques, évoquant le fait qu'en dehors du travail qui nous est demandé, ils n'ont pas de temps pour effectuer du travail "en plus".

Beaucoup d'élèves ont signalé que les mathématiques favorisaient la créativité et l'initiative tout comme la curiosité, qualités qui, comme le rappelle un élève, "résument l'histoire des mathématiques". Ainsi, un autre précise "la curiosité est un élément essentiel du raisonnement scientifique". Là encore, les travaux de recherche (TP, défis), de même que l'utilisation de la TI-92 ont été cités. D'autres constatent que "l'on ne crée que ce qui a déjà été prouvé par d'autres". Enfin nombreux sont ceux qui ont cité la curiosité historique vis à vis des maths qui est suscitée en cours.

Enfin, au sujet du civisme, bien que personne n'ait répondu que les maths encourageaient cette qualité, comme le souligne un élève "les math ne sont pas là pour nous l'apprendre, mais il est évident qu'il faut en faire preuve".

Pour finir, Lao Tseu a dit : "il faut se trouver sa voie". Je laisse la parole à un élève qui déclare s'avancer "toujours plus dans l'infini de la connaissance"... Réjouissant.

Le point de vue de Danièle Obono

Sans vouloir revenir sur l'excellent travail de synthèse qu'a effectué ma très chère coéquipière Anne-Sophie, je voudrais pour ma part revenir sur quelques questions qu'il m'a paru utile de préciser quelque peu.

Une première lecture un peu superficielle fait apparaître ce qui semble le point de vue essentiel des avis des élèves qui est que les mathématiques servent avant tout à réussir un examen, son insertion professionnelle, etc... Ils (elles ?) sont perçus donc à première vue comme un outil dont il faut apprendre à "se servir" pour pouvoir "réussir". Il faut bien ça comme motivation quand on a près de 8 heures hebdomadaires d'enseignement de mathématiques (ah ! où est donc passé l'heureux temps où on ne faisait des mathématiques que pour le plaisir ! ah, ces jeunes !!).

Néanmoins, au delà de l'aspect utilitaire de cet enseignement, il se trouve que, dans notre classe, il suscite autre chose que l'intérêt classique. Est-ce dû à l'utilisation de la-ô-combien-pratique-merveilleuse-quoique-un-peu-lourde-et-pas-très-belle-calculatrice TI-92, ou à l'organisation de travaux pratiques en binômes ? Il ressort en tous cas des questionnaires que les mathématiques suscitent presque des vocations auprès des élèves. Elles (ils?) développent l'esprit critique, l'autonomie et le respect de l'autre.

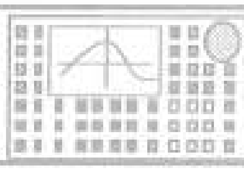
Les élèves se retrouvent la plupart du temps seuls face à leurs devoirs de mathématiques. Ils se rendent compte qu'il s'agit pour eux que ça "passe" ou ça "casse". Ils doivent donc faire preuve d'initiative personnelle et essayer de trouver par eux-mêmes les réponses à leurs questions qui sont en l'occurrence celles des devoirs.

D'où l'importance des TP et d'exercices comme les défis et l'adhésion quasi unanime qu'ils ont remportée. Dans un cas comme dans l'autre, l'élève est seul face aux problèmes ; c'est à lui de prendre l'initiative, de décider, de choisir en pensant à toujours garder un esprit mathématique. Le processus de tâtonnements et de recherche intellectuelle suscite presque autant de plaisir (et oui, j'ai bien dit de plaisir!) que la résolution elle-même de la difficulté. L'élève est allé chercher au fond de lui-même ce dont il avait besoin, et l'a confronté aux regards de son coéquipier. C'est souvent un travail gratifiant.

Pour finir, revenons sur l'indispensable TI-92, celle par qui le scandale est arrivé, objet de toutes les convoitises et de maintes tractations... La TI-92 est devenue l'outil indispensable de tout TS5 qui se respecte. C'est en effet un outil fort pratique, encore faut-il savoir bien en user. Cela demande donc de la part de l'élève plus d'attention et de patience pour arriver à en tirer le maximum. Et puis, on s'attache tellement vite... A un point tel que l'on n'ose même plus imaginer sa vie sans ! Voilà en quelques mots ce que sont pour moi les traits les plus essentiels des questionnaires. Encore une fois, l'essentiel n'est pas autant ce que l'on fait que comment on le fait.

P.S. Après le sexe des anges, le genre des mathématiques : masculin, féminin ?

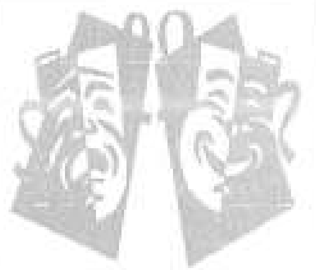
Baromètre TI-92



A. Questions plutôt techniques
1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 (très bien, plutôt bien, plutôt mal, très mal) ?
2. Consultes-tu le mode d'emploi (beaucoup, régulièrement, parfois, jamais) ?
Si oui, quelles rubriques ?
3. Par rapport aux calculatrices graphiques que tu manipulais avant, comment juges-tu la TI-92 : (utilité, convivialité, lisibilité ; bien mieux, plutôt mieux, moins bien, bien pire).
4. Qu'est- ce qui te plaît le plus sur cette machine ?
5. Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?
6. Comment juges-tu l'utilité de la TI-92 (en cours, en TP, en devoir surveillé, à la maison ; très utile, utile, inutile, très inutile)
7. Peux-tu classer dans l'ordre décroissant d'utilisation les applications de la TI-92 que tu connais (pour chacune d'entre elles, signale les menus ou les commandes que tu utilises le plus).
8. Qu'as-tu rentré en mémoire (programmes et informations diverses) ?

B. Questions plus générales
Depuis le début de l'année, une calculatrice rétroprojetable est utilisée systématiquement dans le cadre du cours.
1 Cela a-t-il changé quelque chose pour toi ? (Oui, non , sans opinion)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
2. As-tu jugé cela comme une aide pour la compréhension ? (Oui, non , sans opinion)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
3. As-tu jugé cela comme une perte de temps ? (Oui, non , sans opinion)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
4. Tu peux faire des suggestions pour l'amélioration du dispositif de cours ?
Chaque semaine des TP sont l'occasion d'un travail de recherche en binôme.
5. Ces séances t'ont-elles intéressé ? (Oui, non , sans opinion)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
6. Plus précisément, porte une appréciation sur chacun des TP déjà réalisés (très intéressant, intéressant, inutile, ennuyeux, surprenant)
7. Que penses-tu du fait de travailler par groupe ? (Intéressant, inutile, ennuyeux)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
8. Que penses-tu de la réalisation d'un rapport de recherche sur chaque TP(Intéressant, inutile, ennuyeux)
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
9. Comment juges-tu le travail de ton propre groupe pendant ces TP ?
Coche les cases correspondant à ta réponse (travail d'équipe, rapide, efficace, scolaire, bricoleur, observateur, méthodique) ; on peut ajouter des qualificatifs.
Pourquoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
10. Fais éventuellement des suggestions pour l'amélioration du dispositif TP.
De façon générale (si l'on considère l'ensemble du dispositif de travail de cette année cours/TP/devoirs/contrôles...)
11. Quelle appréciation portes-tu sur celui-ci ? Quelles suggestions peux-tu faire pour l'améliorer ?
12. Ce type de travail a-t-il modifié ton point de vue sur les mathématiques ? (Oui, non , sans opinion)
En quoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
13. Ce type de travail a-t-il modifié ton point de vue sur les calculatrices ? (Oui, non , sans opinion)
En quoi ? (tu peux évoquer un fait, ou un événement, qui illustre ta réponse)
Pour finir, un point de vue sur toi-même...
14. Comment juges-tu tes résultats en mathématiques (bons, moyens, médiocres)
Commentaire éventuel...
15. Comment ces résultats ont-ils évolué cette année ? (en hausse, stables, en baisse)
Commentaire éventuel...
16. Comment juges-tu ton aptitude à utiliser une calculatrice ? (bonne, moyenne, médiocre)
Commentaire éventuel...
17. Comment cette aptitude a-t-elle évolué cette année ? (en mieux, stable, en pire)
Commentaire éventuel...
18 Il y a peut -être une question qui n'a pas été posée, et à laquelle tu aurais aimé répondre... C'est le lieu et le moment...

Baromètre TSS



Les mêmes questions ont été posées aux élèves à 5 mois d'intervalle, le vendredi 24 octobre 1997 et le vendredi 20 mars 1998. On trouvera ci-dessous les réponses en pourcentage de l'effectif total de la classe (37 élèves) : en caractères normaux les réponses d'octobre, en caractères gras les réponses de mars.

Puisqu'il s'agit d'auto-évaluation, on ne trouvera ici aucun commentaire. Les réponses des élèves sont toutes retranscrites (d'abord celles d'octobre puis celles de mars). Un effort d'organisation a été fait, en regroupant les réponses proches.

1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?	Très bien		Plutôt bien		Plutôt mal		Très mal	
	0%	**11%**	61%	**78%**	36%	**11%**	3%	**0%**

2. Consultes-tu le mode d'emploi ?	Beaucoup		Régulièrement		Parfois		Jamais	
	6%		22%	**20%**	66%	**69%**	6%	**11%**

3. Par rapport aux calculatrices graphiques que tu manipulais avant, comment juges-tu la TI-92 :

	Bien mieux		Plutôt mieux		Moins bien		Bien pire	
Utilité	92%	**86%**	8%	**14%**	0%	**0%**	0%	**0%**
Convivialité	33%	**43%**	61%	**46%**	0%	**11%**	6%	**0%**
Lisibilité	53%	**86%**	44%	**11%**	3%	**3%**	0%	**0%**

4. Qu'est- ce qui te plaît le plus sur cette machine ?

Réponses d'octobre :

-"Ça fait petit ordinateur", "elle fait micro-ordinateur", "la résolution de "tout", c'est un ordinateur", "j'ai l'impression qu'elle peut résoudre tous les calculs", "on peut tout faire", "les nombreuses applications et la ressemblance avec un petit ordinateur", "sa puissance, son ergonomie", "le clavier", "l'interface (classement par catégories)", "les menus en haut, le fait qu'il y ait plusieurs touches 2nd et enter", "l'accès facile aux différents calculs, aux différentes fonctions, aux fichiers et aussi les dimensions de l'écran", "accès facile aux différents menus, multiplicité des touches", "sa prise en main et son format", "la taille de l'écran et le calcul symbolique systématique" ;

-"le fait qu'elle résolve de nombreuses opérations (factorisation, limite, dénominateur commun...)", "les applications usuelles (limites, factorisations)", "la puissance de calculs (limites, dérivée, résolution", "résolutions, la lisibilité, puissances dans les calculs", "les résolutions de limites, de dérivées", "la résolution d'équations, la lisibilité de l'écran", "la touche solve, factor, enfin ce qui permet de faire des calculs très longs (expand)", "la TI-92 a la possibilité de résoudre les calculs très complexes", "les méthodes de résolution d'équation", "sa facilité d'utilisation, ses possibilités de calcul", "toutes les fonctions de calcul, d'algèbre...", "moyen de vérification utile", "très bon moyen de vérification, le mode d'emploi est très facile à fait qu'on puisse vérifier tous les calculs et être sûre de ne pas avoir fait d'erreurs de calcul (limites...)", "elle

répond avec rapidité et indique nos erreurs de syntaxe", "le fait de pouvoir vérifier de nombreux calculs, de multiplier les conjectures facilement (on ne doit plus taper sur 10 touches pour obtenir ce que l'on veut - c'est une image!- une seule suffit", "possibilité de recherche plus grande", "nombre de programmes que je devais créer moi-même l'an dernier sont intégrés dans la TI-92... et comme je ne suis pas très douée en programmation...", "le mode 3D", "la 3D, la qualité des graphiques, résolution d'équations avec des degrés élevés".

Réponses de mars :

-"la mémoire"(2 fois citée), "la mémoire, l'écran", "les fichiers, ex : F2, F3, qui sont très utiles", "l'écran qui est grand", "le clavier, la taille, l'écran, les potentialités", "elle est extrêmement agréable d'utilisation", "la facilité d'utilisation", "sa maniabilité et l'éventail des possibilités d'utilisation offert", "je trouve cette calculatrice très pratique, simple d'utilisation", "la présence d'un clavier (lettres), la facilité de compréhension et d'utilisation (avec le professeur)", "la répartition des touches, les 3 touches enter, l'accès facile aux différents fichiers, la possibilité de vérifier les calculs, notamment dans les problèmes", "le grand écran, le clavier, la résolution d'équations, les commandes somme, intégrale, dérivée, factor, expand...", "les messages d'erreur précis, les touches sont plus visibles que sur les autres calculatrices (normal, il y en a plus)", "la clarté : écran suffisamment grand, l'utilité au niveau de la simplification des calculs, elle permet des vérifications", "les menus en haut de l'écran, la multiplicité des touches Enter, les liens entre Home, l'application géométrie, bref le traitement des données" ;

-"on peut vérifier pratiquement tous les calculs, les dérivées, les primitives, le calcul de nombres complexes, les touches solve, expand...", "elle permet la vérification de certains calculs", "elle est utile pour faire des vérifications", "le calcul symbolique, la taille de l'écran", "le calcul en valeur exact", "les calculs de dérivées, d'intégrales, de limites qui me permettent de vérifier mes calculs", "le grand écran, le clavier, la résolution d'équations, les commandes somme, intégrale, dérivée, factor, expand...", "la facilité d'accès aux programmes", "très maniable, beaucoup de raccourcis, fenêtres", "la rapidité d'utilisation", "elle est plus performante dans les calculs, pour rentrer les programmes, c'est plus simple grâce au clavier des lettres", "le calcul symbolique (dérivées, limites, etc), l'application géometrie", "l'application géométrie", "la diversité des applications, l'application géométrie, l'outil de vérification", "programmes déjà intégrés, calcul de dérivées, d'intégrales, toutes les fenêtres, surtout en géométrie", "la grande variété de résolutions possibles (ex. primitives, racines, dérivées...), simplifications rapides d'équations, écran plus structuré", "le fait de pouvoir vérifier les résultats, de conjecturer (limites, tangentes et autres dans le mode Graph). Par ailleurs, j'aime beaucoup l'énorme capacité de mémoire (bien que parfois le mode géométrie ne veuille plus fonctionner)", "les nombreuses capacités (intégrales, dérivées, animation); elle est utile à toutes les étapes d'un problème".

5. Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?

Réponses d'octobre :

-"Écran rayé et poussiéreux, sinon trop lourde et peur de la perdre étant donné le prix", "la sobriété de l'ensemble et son design", "le poids, la taille, assez encombrante", "elle est trop lourde (8 réponses) "son poids, la place qu'elle tient, le manque de couleurs", "manque de couleurs", "la taille", "les dimensions", "la taille, manipulations parfois difficiles et compliquées", "le mode d'emploi, trop gros et repoussant", "beaucoup de fonctions et manipulations possibles que je n'utiliserai jamais... cad j'ai parfois l'impression de m'y perdre", "il n'est pas très évident de connaître tous les programmes", "trop de menus, on se perd et aussi elle ne précise pas pourquoi ça ne marche pas parfois" ;

- "la lenteur du déplacement du curseur ; le clavier est en anglais et l'inversion A-Z est gênante", "je trouve que la calculatrice est parfois très lente (par exemple pour tracer des graphiques ou pour donner un tableau de valeurs", "le fait que les menus soient cachés dans les Fn ($1 \leq n \leq 8$)", "difficulté pour trouver des touches (comme en physique, j'ai besoin de la touche log) et je ne sais pas où elle se trouve sur la TI-92", "la vitesse, l'obligation de passer dans le menu applications pour utiliser les éditeurs (program, geometry, text, tableau)" ;

- "la rigueur de la syntaxe", "difficulté au niveau du langage de la calculatrice", "il y a trop de syntaxes à apprendre (en plus c'est en Anglais lorsqu'il y a une faute)", "sa complexité et les remarques du type few arguments", "je trouve les syntaxes lourdes", "on en veut toujours plus : des logiciels un peu plus puissants (par exemple du calcul symbolique qui donne toujours de bons résultats) ; la commande Zeros semble à bannir au profit de Solve", "la difficulté pour créer un programme" ;

- "sa trop grande performance", "rien ne me déplaît".

Réponses de mars :

- "son poids" (cité 9 fois), "trop de menus et trop lourde", "son volume, son poids", "la taille, le poids", "la taille démesurée" (citée 4 fois), "je trouve que la calculatrice est trop grande : elle est beaucoup trop imposante et parfois peu pratique à transporter", "elle fait penser à un mini-ordinateur, par conséquent une calculatrice lourde et grosse", "la place, encombrante, lourde, très grande consommation de pile, parfois capricieuse", "je trouve que les touches pour les chiffres devraient être plus grandes que celles pour les lettres puisqu'on les utilise plus fréquemment" ;

- *"la lenteur pour obtenir un tableau de valeurs pour les suites", "lorsqu'il y a une interruption des calculs (parce que, par exemple, on n'est pas dans le bon mode), cela peut devenir gênant", "la perte de la mémoire sur certains blocages", "l'absence totale de physique-chimie, l'obligation de programmer en TI-basic très très lent, assembleur (fargo ou autre) non inclus... lenteur relative de la machine dans certains cas, la gestion de la mémoire (60 ko pour le système et encore une partie de la RAM pour l'ouverture des fichiers), la version light des logiciels, manquent aussi les petits plus de la HP 486X", "le manque de raccourcis pour passer d'un mode à l'autre, la vitesse d'exécution des programmes, le langage de programmation" ;*

- *"le fait qu'on doive faire tout le temps très attention", "apprentissage pénible et laborieux", "faible marge d'erreur dans la syntaxe", "les messages d'erreur", "les erreurs que je ne comprends pas toujours bien (exemples : dependent limit ou data type); de plus, il faut être très précis (pour les suites définies en fonction de u_{n+1} par exemple)", "elle est assez compliquée au niveau des syntaxes", "langage spécifique : si on ne mémorise pas, on est en quelque sorte bloqué, son poids", "il faut mémoriser les différentes syntaxes afin déviter les messages d'erreur ; des fois, je ne comprends pas l'erreur", "quand s'affiche window variable domain ou d'autres erreurs", "le fait que ce soit écrit en Anglais, quelques éléments trompeurs (calcul en valeur approchée dans le fichier de suites par exemple", "messages d'erreur en Anglais, longueur de certains calculs",*

- *"à force de tout faire (calcul de dérivée, limites...), la TI-92 peut empêcher de réfléchir".*

6. Comment juges-tu l'utilité de la TI-92 :

	Très utile		Utile		Inutile		Très inutile
En cours	28%	**26%**	72%	**74%**			
En TP	72%	**57%**	25%	**43%**	3%		
En contrôle	42%	**49%**	55%	**49%**	3%	**2%**	
A la maison	39%	**26%**	55%	**74%**	6%		

8. Qu'as-tu rentré en mémoire (programmes et informations diverses)

Réponses d'octobre :

- *"informations en physique et chimie (11 réponses)" ;*
- *"des schémas", "les dessins des TP(10 réponses)", "quelques fonctions (5 réponses)", "certaines manipulations vues en cours pour mieux pouvoir les retrouver en revoyant le cours" ;*
- *"quelques programmes, comme un programme qui résout les équations du 2ème degré en donnant le Δ", "j'ai essayé de rentrer un programme pour les systèmes d'équation",*
- *"des valeurs dont je me sers souvent sous forme de lettres"*
- *"tentatives pour programmer des jeux", "des jeux, des poèmes",*
- *"pas grand chose","rien de spécial", "rien (10 réponses)" ;*
- *"je n'ai rien rentré mais j'ai des tonnes de programmes venant de ma soeur qui me les as transmis".*

Réponses de mars :

- *"des synthèses de cours " (8), "les formules de Physique-Chimie" (17), "la classification périodique"(2), "j'ai rentré des programmes de math et mes cours de maths (les formules, les théorèmes) et mes cours de Physique-Chimie" ;*
- *"des dessins" (3), "des courbes ou figures géométriques des TP" (7), "des applications géométriques (graph 3D)", "constructions géométriques (orbites des*

planètes)", "quelques images, surtout des coniques (utiles pour le concours général de physique)", "des fonctions" (3), "des fonctions complexes" ;

- "programmes" (3), "un programme donnant le tableau de variations d'une fonction assez limité"(3), "un programme sur le binôme de Newton", "calculs nécessaires pour certains défis, afin de ne pas les perdre", "conversions pour les unités", "traitement d'information stockées", calcul de longueurs et d'angles dans un triangle", "programme de réalisation de courbes fractales (Dragon curve, Koch curve), de comptage de zéros terminant un nombre" ;

- "des jeux" (2) ;

- "quelques informations utiles en cas de besoin... non, seulement quelques vers de Rimbaud et de Musset pour me faire plaisir", "agenda téléphonique (en projet)" ;

- "rien" (3).

Depuis le début de l'année, une calculatrice rétroprojetable est utilisée systématiquement dans le cadre du cours...

1 Cela a-t-il changé quelque chose pour toi ?

Oui		Non		Sans opinion	
94%	**86%**	3%	**10%**	3%	**4%**

Réponses d'octobre :

- "On comprend mieux les utilisations diverses de la calculatrice", "cela m'a permis de pouvoir suivre les manipulations de la calculatrice qui sont parfois compliquées", "cela permet d'apprendre à se servir de la calculatrice même si c'est souvent un peu rapide", "pour les manipulations de la calculatrice, ça nous évite de lire le mode d'emploi qui, lui, n'est pas convivial", "cela permet de comprendre, sur des exemples, la fonction de la calculatrice", "si je ne comprends pas, je peux suivre les manipulations sans déranger le voisin", "on peut contrôler qu'il n'y a pas d'erreur de saisie" ;

- "on peut davantage travailler tous ensemble sur un problème et apprendre à mieux utiliser la calculatrice", "je regarde plus souvent le tableau", "cours plus convivial, plus vivant", "il y a plus de participation en classe", "la calculatrice illustre les théorèmes et démonstrations ; elle me permet de mieux comprendre".

Réponses de mars :

- "cela masque une grande partie du tableau !" ;

- "possibilité d'apprendre de nouvelles commandes, des raccourcis clavier. Possibilité de contrôler notre bonne (ou mauvaise) manipulation", "on peut suivre les calculs, s'entraîner à la manipulation de la calculatrice", "ça m'a rassuré : je me suis rendu compte que je ne me débrouillais pas si mal", "ça m'aide à la faire fonctionner" (4), , "on mémorise plus facilement les commandes, les menus" (4), "découvertes nouvelles commandes, manipulations plus rapides", "cela permet de mieux suivre les instructions à réaliser", "cela m'a aidé à mieux utiliser ma TI-92 ; par contre, sa plus grande vertu est de me terroriser lors du rituel Rand 37"[2], "on peut mieux suivre les manipulations, voir les erreurs que l'on écrit sur notre propre calculatrice" ;

-"vu que j'ai eu du mal à m'adapter à la calculatrice, cela m'a permis de suivre et de l'appréhender de façon plus ludique qu'avec seulement le mode d'emploi (2). De plus, tout le monde travaille en même temps" ; "cela permet de suivre un certain rythme, cela permet de ne pas être en retard par rapport aux autres", "très utile quand on n'a pas

---

[2] Chaque semaine, quelques cahiers de devoir sont ramassés "au hasard", grâce au générateur de nombres aléatoires de la TI-92.

tout bien suivi", "cela permet au professeur de voir exactement ce qui se passe sur la TI-92 et de donner les instructions en conséquence" ;

- *"compréhension en cours", "il y a plus de participation", "cela permet d'aborder le cours de math d'une autre façon (ex : recherche de solutions avant de commencer un problème", "je suis plus active en cours, plus attentive", "les exercices semblent moins abstraits ; cela montre que parfois, même la calculatrice n'est pas capable de les résoudre", "elle aide à mieux suivre en cours, à le rendre interactif", "permet de vérifier les différentes manipulations, caractère nouveau de l'enseignement des maths", "les cours de math cette année ont été radicalement différents de ceux de la classe de première : adaptation nécessaire".*

2. As-tu jugé cela comme une aide pour la compréhension ?

Oui		Non		Sans opinion	
89%	**86%**	3%	**4%**	3%	**10%**

<u>Réponses d'octobre :</u>

<u>Oui</u> :
- *"car celui qui la manipule a souvent les mêmes difficultés que nous", "parce que, souvent, je ne sais pas quoi faire" ;*
- *"cela permet de mieux suivre les manipulations et visualiser d'une autre façon ce que l'on obtient soi-même", "on comprend mieux visuellement qu'oralement", "cela permet de voir le résultat à obtenir même si l'on a fait une erreur et de reprendre cela chez soi",*
- *"on apprend plein de choses utiles"; "pour l'étude des fonctions, les dérivées, les limites ou bien des problèmes immédiatement illustrés par des graphes ou des schémas", "au niveau des études de fonctions, cela est beaucoup plus palpable, plus concret avec la TI-92", "je ne sais jamais de quoi à l'air une fonction donc ça aide", "il est plus facile de comprendre quand on nous montre ce que l'on explique", "les solutions des problèmes sont explicitées davantage grâce à la calculatrice (et au professeur)", "elle permet de voir concrètement ce que l'on démontre" ;*
- *il ne me semblait pas avoir vu les suites sous forme de somme ; la TI-92 m'a permis de comprendre à travers des exemples".*

<u>Non</u> : "il est difficile de jouer sur les deux tableaux : cours/calculette", "j'ai l'impression qu'à force d'avoir recours à la calculatrice je ne serais plus capable d'expliquer ou de faire moi-même les calculs".

<u>Oui et non</u> : "je ne suis pas assez à l'aise sur TI-92 pour savoir exactement où je vais : pas une aide pour la compréhension mais pour l'exécution", "oui quand on arrive à suivre, non quand on est en retard et qu'on perd le fil des opérations".

<u>Réponses de mars</u>

- *"cela nous permet de vérifier notre connaissance des commandes" (3), "quand il s'agit d'utiliser de nouvelles applications et commandes qui semblent compliquées (géométrie)" (3), "on comprend mieux mais quelquefois (selon la personne qui est aux manettes, cela va trop vite", "à condition que l'on suive en même temps, sinon on est perdu", "l'expérience des autres élèves nous aide à mieux connaître la TI-92", "quand l'élève utilisant la calculatrice nous montre ce qu'il faut faire et ce qu'il faut éviter", "si l'on voit que l'on obtient un écran différent (déjà on s'aperçoit plus vite qu'il y a un problème), on peut résoudre le problème plus vite", "toute la classe est au même niveau du point de vue des pistes à engager" ;*

- *"les intégrales", "les graphiques et applications géométriques me permettent de mieux visualiser une situation" (2), "illustration des exercices d'application", "on voit tout de suite la chose (fonction et sa courbe) étudiée", "l'application graphique permet de mieux visualiser les choses (convergence de suites avec la table)", "permet de matérialiser une situation parfois peu évidente", "cela nous permet d'aborder un exercice selon différents points de vue", "les différentes étapes sont visibles".*

3. As-tu jugé cela comme une perte de temps ?

Oui		Non		Sans opinion	
3%	0%	83%	86%	3%	14%

Réponses d'octobre :

"on doit se servir de la calculatrice et cela constitue un entraînement profitable", "ca prend plus de temps, mais on peut comprendre plus vite : ça compense !", "car le temps mis pour comprendre n'est jamais superflu", "comprendre n'est jamais une perte de temps", "les explications ne sont jamais une perte de temps même si la plupart ont compris", "cela fait partie intégrale du cours et de ma compréhension", "se servir d'une calculatrice développe un côté manuel sur l'informatique qui peut aider pour l'avenir professionnel", "parce qu'en général, les élèves qui manipulent la calculatrice rétroprojetable vont à la même vitesse que tous les autres", "elle donne un rythme uniforme à la classe", "il est plus facile et avantageux d'apprendre à manipuler la calculatrice en cours plutôt que chez soi (gain de temps)".

Réponses de mars :

"Cela nous permet d'apprendre à se servir de la TI-92. Très utile", "même si au début de l'année, on l'utilisait un peu trop, c'était seulement pour se familiariser plus vite", "cependant, dans certains cas, l'utilisation de la TI-92 pourrait être différée", "on découvre un autre aspect des maths : comment une machine limitée réagit-elle face à

nos demandes?","quand on est en retard par rapport au reste de la classe, on peut rattraper ce retard en se contentant de regarder le rétroprojecteur tout en prenant le cours", "tout le monde en profite, on tape en même temps sur la nôtre", "en utilisant ce procédé, cela permet une pause, mais aussi l'acquisition de certains mécanismes", "cela aide à mieux visualiser les choses (intégrales...)", "cela permet à tout moment d'illustrer un passage, une démonstration du cours", "on perd peut-être du temps en cours, mais on n'en perd pas le double chez nous à lire un manuel. De plus, apparemment, ce n'est pas une gêne pour finir le programme (nous sommes en avance par rapport à d'autres)", "plutôt gain de temps : on assimile les commandes en cours, cela nous évite d'avoir toujours recours au mode d'emploi", "au contraire, cela permet de gagner du temps et de mémoriser les commandes", "utilisation pratique des leçons du cours", "le cours est géré de telle façon que cela ne freine pas son avancée", "pour résoudre certains problèmes, on possède d'emblée une vision plus simple de la question, donc la résolution vient plus rapidement".

4. Tu peux faire des suggestions pour l'amélioration du dispositif de cours ?

Réponses d'octobre :

- "aller plus doucement dans l'utilisation de la calculatrice car parfois je suis en retard dans les manipulations (réglage de la fenêtre par exemple)", prendre du temps pour bien expliquer les corrections des exercices et les manipulations avec la calculatrice" ;
- "n'étant pas totalement anglophone, avoir les indications en français ; savoir comment la relier à un PC ou à un Mac" ;
- "faire plus d'exercices d'application".

Réponses de mars :

"Je sais bien que c'est difficile à réaliser, mais lorsque c'est Jean-François qui manipule la TI-92 (ou un autre élève qui s'y connaît bien), il va très vite et on n'a pas le temps de regarder ce qu'il fait. Le rétroprojecteur perd alors un peu de son intérêt car on a toujours un temps de retard", "pourrait-on avoir un meilleur contraste, car souvent la lecture de l'écran projeté relève de la devinette", "le seul problème est le haut du rétroprojecteur qui cache le tableau, ce qui est très pénible. Il faudrait trouver un dispositif en fond de salle par exemple", "rien à dire", "aucune", "ce sont toujours les mêmes qui font la manipulation à la calculatrice rétroprojetable", "non", "je trouve que ces temps-ci c'est mieux qu'en début d'année (plus de récrées, des activités diverses liées aux maths", "peut-être rentrer plus doucement dans les chapitres nouveaux ; les premiers cours sont souvent difficiles à comprendre".

Chaque semaine des TP sont l'occasion d'un travail de recherche en binôme...

5. Ces séances t'ont-elles intéressé ?

Oui	Non	Sans opinion
89% **91%**	0% **0%**	11% **9%**

Réponses d'octobre :

<u>*Oui*</u> *: "travail en groupe, expérimentation et problèmes très intéressants", "je n'avais jamais songé à compter le nombre de zéros à la fin de 10! ou 1997!", "cela permet d'aborder de façon différente (plus ouverte) certains problèmes", "c'est une manière de travailler plutôt stimulante je trouve", "cela nous permet de faire une pause dans la semaine ; le travail est plus décontracté", "je trouve ça intéressant de réfléchir à*

plusieurs et les problèmes posés sont originaux", "ça nous permettait de travailler sur un problème complexe en mettant en commun nos idées et nos pistes de recherche", "ça demande de la logique (pour trouver une fonction qui réponde aux conditions que l'on souhaite)", "c'est la première fois en math que l'on privilégie la pratique par rapport à la théorie", "le but des maths pour moi est de résoudre un problème à partir d'outils. La réflexion à deux est très enrichissante (à condition d'être en forme...)", "ça change des cours théoriques... on doit se prendre en main", "on fait face à des problèmes différents, cela change des cours et des exercices habituels", "car elles donnent un aspect pratique aux mathématiques", "il y a une réflexion intense, les sujets sont peut-être un peu durs", "elles permettent de réfléchir et d'aborder les notions du cours d'une manière différente", "elles permettent le développement d'un esprit critique et de recherche", "parce qu'on fait une recherche à deux, et que le résultat n'est pas sanctionné par une note mais par une appréciation".

Oui et non : *"la méthode de travail m'intéresse mais les contenus des TP un peu moins", "je ne vois pas trop la finalité de ces TP", "je ne vois pas l'intérêt des TP pour le bac".*

... DURANT LES T.P., LA PATIENCE EST UNE QUALITÉ INDISPENSABLE.

Réponses de mars :

"Une autre vision des maths, peut-être plus concrète", "les problèmes posés sont originaux, intéressants", "recherche et utilisation de la TI-92", "réflexion sur les problèmes inhabituels", "étude de problèmes très variés", "travailler à deux, plus détendues", "elles nous donnent un aspect différent des mathématiques", "même si les questions sont parfois très étonnantes, dans l'ensemble ces TP ne sont qu'un prolongement du cours", "le TP permet d'approfondir le cours", "on aborde des problèmes différents du cours", "j'ai beaucoup aimé le TP sur la suite d'imaginaires puis de réels. C'était assez dur, mais très intéressant", "quelquefois ces séances pouvaient être très agréables", "certaines séances ont pu m'intéresser, quand les démonstrations me semblaient accessibles mais quelques fois (TP n°12) elles me dépassaient. Les TP devraient être plus proches du cours", "applications très concrètes du cours", "surtout quand on chemine vers la solution du problème, quand on trouve plusieurs pistes, qu'on cherche à les justifier sur le plan théorique", "ils ouvent de nouveaux horizons, font réfléchir et approfondir le cours. Ils aident à faire une liaison entre les différents outils mathématiques", "recherche active à deux, abords différents des maths, moins conventionnels", "on voit bien ce que l'on n'a pas assimilé et le travail en équipe permet de diminuer cette faiblesse", "de la recherche plus que du calcul", "la recherche personnelle (y compris ses impasses, ses erreurs) reste mieux ancrée que les cours (dans mon cas)", "on prend le temps d'observer nos réflexions sur un problème et cela permet de les améliorer", "cela permet un véritable investissement. On ne peut pas laisser son équipier travailler seul, alors on s'y met", "travail en commun, fusion des idées".

7. Que penses-tu du fait de travailler par groupe ?

Intéressant		Inutile		Ennuyeux	
100%	**91%**	0%	**6%**	0%	**3%**

Réponses d'octobre :

Intéressant : *"on peut unir nos idées (souvent différentes)", "la recherche en binôme enrichit énormément vu que nous n'avons pas nécessairement les mêmes pistes de recherche", "les idées de l'un complètent ou corrigent celles de l'autre", "ça m'oblige à me remettre en question", "on peut confronter nos idées, expliquer à l'autre ce qu'il n'a pas compris", "meilleure écoute de l'autre, partage des idées, de démarches différentes", "on communique, on a plus d'idées", "on peut utiliser les idées des autres et vice-versa ; la réflexion peut avancer beaucoup plus vite car les germes d'idées chez l'un peuvent déboucher sur une idée chez l'autre", "on peut comparer les résultats, les pistes de recherche, on échange les observations. C'est aussi l'occasion de demander des conseils", "cela permet de mettre en commun ses idées et de progresser plus vite, chacun n'ayant pas le même raisonnement", "il est utile d'apprendre à travailler en groupe pour les classes supérieures", "travailler à 2, c'est beaucoup plus motivant, la façon de rédiger nous fait avancer ; c'est un bon principe mais il faut souvent déborder de l'heure qui lui est réservée", "on doit expliquer à l'autre sa méthode et donc cela permet de contrôler sa validité. Pour le TP4, j'ai du expliquer comment passer de la dérivée à la fonction et cela m'a permis de voir les erreurs à éviter".*

Oui et non : *"ce serait bien de changer de binôme de temps en temps".*

Réponses de mars :

"On peut intégrer de nouvelles façons d'aborder les choses", "chacun a des idées différentes quant à la démarche à employer. Parfois toutes sont bonnes", "souvent un des membres du groupe est plus actif ou passif que l'autre. Comportement obligé pour éviter certaines interactions parfois...", "on partage les idées, donc on avance plus vite", "on peut confronter ses idées, se remettre dans la bonne direction mutuellement", "on confronte différentes façons de travailler, d'appréhender un problème", "complémentarité du binôme", "mise en commun des idées et des méthodes de travail", "on peut confronter ses solutions, avoir une idée à partir de ce qu'a dit l'autre", "l'autre a toujours une approche différente du problème", "on peut voir les idées de l'autre et discuter à propos des différents procédés", "complémentarité grandissante dans le binôme", "on n'a pas les mêmes facilités : Cécile arrive bien pour la géométrie, Valérie pour les différentes pistes de travail, et nous remettre en doute, moi pour l'analyse", "ce serait très bien pour avoir des idées nouvelles mais il est difficile de s'entretenir de tout cela en une heure!", "on peut confronter ses idées aux autres", "mise en commun d'un travail de recherche", "très proche du mode de travail abordé à la fac ou dans les écoles d'ingénieur".

8. Que penses-tu du fait de réaliser un rapport de recherche pour chaque TP ?

Intéressant		Inutile		Ennuyeux	
90%	**86%**	5%	**0%**	5%	**14%**

Réponses d'octobre

Intéressant : - *"rigolo", "cela permet de garder une trace du travail effectué", "on peut ainsi voir les idées des autres", "ça nous permet d'avoir une vue d'ensemble, de voir les différentes résolutions et de mieux comprendre", "il faut bien laisser une trace de ce que l'on fait (ne serait ce que pour le professeur) et ça aide à clarifier les idées ;*

de plus on peut s'y reporter ultérieurement", "il laisse une trace écrite du travail, permet de reposer clairement un problème pour le résoudre", "cela vous permet de voir comment nous réfléchissons", "permet d'avoir la critique d'une personne extérieure au groupe", "cela nous permet de ne pas oublier nos résultats et de voir nos erreurs lors de la correction", "c'est indispensable car, s'il ne fallait pas faire de rapport, les recherches seraient effectuées avec moins de sérieux", "vous voyez bien ce qui nous a échappé" ;

- *"c'est très bien, on doit vraiment explorer le sujet et le comprendre", "cela nous pousse à trouver des solutions plus précises", "on écrit pas à pas nos réflexions et cela permet de ne rien oublier en cours de route", "ça nous permet de reprendre le compte-rendu quelques temps après et de revoir les points obscurs", "ça nous fait revenir sur des questions ayant trait à la force obscure que représente chaque TP", "il permet de fixer les idées principales de nos recherches (même si les résultats sont faux)", "intéressant car il permet de fixer les idées", "cela nous oblige à détailler notre pensée et à parfois mieux la comprendre", "il permet d'apprendre à nous exprimer en langage mathématique", "on est obligé de faire la synthèse ou de mettre sur papier nos recherches, de ce fait on cherche quand même une finalité", "c'est un concept utilisé pour les classes supérieures, donc nous avons une très bonne approche de la chose ; j'aime vraiment bien ce travail !".*

Oui et non : *"le fait de donner une note (et donc de mettre en question la rentabilité du groupe) n'est pas intéressante", "il est intéressant de faire un rapport de recherche pour que vous voyiez quand nous réagissons mais je trouve ça inutile de le noter : les TP doivent être réalisés par curiosité intellectuelle et non pour une note" ; "je pense que le rapport est aussi important que la recherche ; je souhaiterais pouvoir le rédiger à tête reposée".*

Inutile : *"perte de temps", "certes on montre ce qu'on a fait si on ne trouve pas mais, perte de temps (la présentation doit être soignée, il ne faut pas faire seulement une prise de notes)".*

Réponses de mars :

Mitigé :*"Disons que parfois cela fait perdre du temps de rendre un rapport et donc souvent des pistes non explorées", "la plupart du temps, on doit le finir à la maison. C'est un travail en plus, qui n'est pas directement nécessaire pour le bac", "intéressant, mais cela nous prend énormément de temps à la maison", "très souvent, je me rappelle ne pas l'avoir rendu à temps".*

Intéressant :*"ça nous permet de remettre en question et de mettre en forme compréhensible nos propres conjectures", "on connaît souvent plusieurs méthodes à la résolution du problème", "cela nous apprend à rédiger ce que l'on observe, les chemins* *pris pour la résolution de problèmes et nous permet d'argumenter pourquoi on choisit ou non une idée", "car on apprend enfin les "vraies" mathématiques : ce n'est pas le résultat qui compte, mais le raisonnement... toute démarche n'est jamais inutile", "car on garde une trace écrite de chaque recherche", "lorsque nos recherches n'ont pas aboutie, il est intéressant de voir les différentes pistes empruntées par les autres binômes", "ça laisse des traces pour un retour éventuel", "ça donne un esprit synthétique", "ennuyeux, mais utile pour rassembler ses idées", "ennuyeux, mais nécessaire pour nous pousser à la recherche. Triste réalité", "même si on ne trouve pas la réponses, on peut écrire nos recherches", "ça nous oblige à clarifier nos approches et parfois ça nous mène à la solution", "il laisse une trace du travail fait, peut-être la source d'une nouvelle recherche", "solution, et mise en commun des différentes réflexions", "nécessaire, pour pousser les élèves à chercher et ainsi à s'y intéresser", "mettre à plat ses idées permet de mieux voir les erreurs éventuelles", "on peut ainsi revenir sur un TP et, en plus, ça nous aide souvent à mettre nos idées au clair, parfois même à voir des erreurs", "cela nous entraîne à rédiger clairement, cela permet de mieux visualiser notre évolution de recherche", plus qu'intéressant, plutôt nécessaire car cela nous oblige à rédiger clairement nos idées et donc à bien les mettre en ordre dans notre esprit".*

**9. Comment juges-tu le travail de ton propre groupe pendant ces TP ?
Coche les cases correspondant à ta réponse. On peut ajouter des qualificatifs...**

	Travail d'équipe	**Rapide**	**Efficace**	**"Scolaire"**	**Bricoleur**	**Observa -teur**	**Méthodi -que**
Oui	97%**80%**	28%**28%**	33%**57%**	3% **17%**	75%**80%**	75%**93%**	40%**40%**
Non	3% **8%**	55%**46%**	25% **8%**	58% **63%**	14%**17%**	8% **0%**	47%**28%**
?	0% **12%**	17%**26%**	42%**31%**	39% **14%**	11% **3%**	17% **7%**	13%**28%**

Octobre : deux élèves ajoutent un qualificatif, *"agréable"*, pour l'un, *"à deux vitesses"* pour l'autre.

Mars : deux élèves ajoutent aussi un qualificatif, "*vivant*" pour l'un, "*stimulant*" pour l'autre. Commentaire d'une élève : *"notre binôme est beaucoup plus actif, vivant, impliqué et intéressé. Moi-même ai appris à envisager les problèmes de math avec beaucoup plus de curiosité"*.

10. Fais éventuellement des suggestions pour l'amélioration du dispositif TP.

Réponses d'octobre :

- *"il faudrait nous expliquer, si personne ne trouve, la question du lendemain" ;*
- *"expliquer plus précisément l'utilisation des applications concernées" ;*
- *"il faudrait* une heure pleine *de recherche !", "il faudrait qu'on puisse y réfléchir plus longtemps", "pourriez-vous nous accorder plus de temps ? ", "un peu plus de temps pour les TP".*

Réponses de mars :

"Il faudrait que l'on ait une heure pleine", "peut-être prendre un peu plus d'une heure", "peut-être plus de temps pour les TP qui nécessitent plus d'une heure", "donner des TP un peu plus court", "une heure est souvent trop peu et finir chez soi est contraignant", "ce serait bien que vous aidiez un peu plus (coup de pouce) les élèves en difficulté, qui ont du mal à se lancer", "aider plus ceux qui sont en difficulté", "faire des groupes mieux équilibrés (bien que certains changements aient été effectués) ;

pourquoi poser une question du lendemain ? Presque personne n'y réfléchi, le TP en lui-même suffit", "faire une introduction orale à chaque TP", "plus de dialogue entre les différents binômes serait souhaité (aides, échanges d'idées", "il est bien que, pour certains TP, on ait le week end pour réfléchir", "après chaque TP, une correction devrait être faite (même photocopiée), cela permettrait de revenir plus facilement sur les TP", "le concept est déjà très bien".

De façon générale (si l'on considère l'ensemble du dispositif de travail de cette année cours/TP/devoirs/contrôles...) :

11. Quelle appréciation portes-tu sur celui-ci ? Quelles suggestions peux-tu faire pour l'améliorer ?

Réponses d'octobre :

Positif : *"bien", "c'est très bien d'avoir mis ça en place", "le dispositif est assez bien", "il est très bien comme ça", "je trouve que les méthodes de travail sont originales et très complètes (TP, devoirs...) ; ça permet d'aborder différentes façons de travailler (en classe, en groupe, seul)", "complet, adapté, intéressant", "travail d'un bon niveau", "il est peut-être un peu tôt, mais je ne pense pas avoir pu passer 8 heures par semaine en math avec un prof ennuyeux et mou", "pour l'instant je le trouve bon ; peut-être faudrait-il conseiller certains exercices sur le livre avant un contrôle pour mieux le préparer", "quel est le maximum ? 19,9 (pour laisser la place à d'éventuelles améliorations ? Amélioration possible : un libretto pour chacun (cela laisse songeur...)" ;*

Réservé : *"le cours est-il assez rapide ?", "les cours devraient être plus expliqués : prendre plus de temps pour les exercices d'application et leur correction", "je trouve que les devoirs maison sont durs et très longs : notre dimanche est souvent gâché", "personnellement, je préférerais que les devoirs à la maison soient corrigés en classe ou la plus grande partie du devoir", "niveau difficile. Beaucoup d'exercices nécessitent à mon avis un esprit mathématique afin d'être réussis : même si on a compris son cours, si on l'a assimilé et si on fait des exercices supplémentaires, ils sont presque infaisables. Les devoirs en classe devraient davantage valoriser le travail et la compréhension que l'esprit de recherche ou la maîtrise de la calculatrice", "le travail est assez difficile ; je trouve que l'on travaille un peu trop avec la calculatrice", "moins cibler l'enseignement en vue de Math. Sup. : personnellement, j'ai choisi la spécialité Math afin d'acquérir une méthode de travail", "les cours devraient être plus expliqués : plus de temps pour les explications", "je trouve que tout va un peu trop vite, mais en y réfléchissant un peu je dois avouer que c'est surtout moi qui suis en retard d'un ou deux wagons" ;*

Du pour et du contre : *"les TP sont très intéressants, les devoirs à la maison indispensables (surtout les corrections), les contrôles... surprenants ! Vos méthodes de travail sont différentes et il faudra du temps pour m'y habituer", "les cours me semblent clairs, les devoirs aussi, les TP me semblent être une torture", "l'ensemble me convient, sauf les TP que je n'arrive pas à faire", "le dispositif de travail a été tout d'abord surprenant mais j'aime bien la "modernité" du cours. Peut-être passer un peu moins de temps à la TI et privilégier les manipulations et la recherche?", "l'utilisation de la calculatrice est intéressante en cours mais ne devrait pas être nécessaire lors des contrôles. En général le dispositif de travail est intéressant", "devoirs du Lundi : très bien. Contrôles : très bizarres ; je n'en comprends pas trop le sens (formulation). Cours : dans l'ensemble, pas assez "carré" (ex : I abc, II abc...). Les sous parties intitulées "un peu de logique" ou autre... ce n'est pas un avis négatif mais cela me gène car je n'ai pas abordé les choses de cette façon l'an dernier. Refaire les choses tout à fait différemment n'est pas évident...".*

Réponses de mars :

"au début de l'année, on a eu des contrôles de 2 heures, voire de 1 heure. C'est vraiment très dur. Je ne sais pas si c'est forcément efficace", "pas assez de temps pour chercher", "bien géré dans l'ensemble ; il est vrai que les questions ésotériques gênent beaucoup", "plus d'exercices d'application simples, pour acquérir les réflexes demandés pour l'examen très codifié du bac auraient été les bienvenus", "le dispositif était assez bien organisé et réparti. Mais les cours étaient trop rapides. Et on sort de temps en temps du programme, ce qui m'a personnellement embrouillé un peu", "c'est un bon dispositif qui permet de sortir des mathématiques très théoriques et "scolaires" ; un problème se pose cependant, il y a le bac à la fin de l'année, le tout étant de trouver une juste mesure. Je pense que c'est réussi cette année, résultats dans trois mois!",

"aucune suggestion", "tout va bien dans le meilleur des mondes", "très bon dispositif de travail, il n'y a rien à améliorer", "travail d'un bon niveau", "le dispositif est pas mal : même si les devoirs à la maison nous prennent toujours beaucoup de temps, c'est un excellent exercice. Les contrôles sont surprenants mais on s'y fait ... et les cours sont très intéressants", "les TP permettent de voir différemment les cours : les deux sont très liés. On se penche un peu plus sur l'aspect pratique du cours", "j'aime beaucoup les TP et je trouve très utile les devoirs du lundi", "le TP est très relié au cours et en approfondit parfois certains aspects", "je ne vois pas de problème dans le dispositif de travail", "le dispositif de travail de cette année est satisfaisant", "intéressant", "intéressant, car il permet de voir d'autres aspects des mathématiques", "aucune amélioration souhaitée, très bien", "sérieux, expérimental", "le dispositif est très organisé. Pour les DS, ce serait bien de faire un autre devoir type bac avant la fin de l'année. Les cours sont bien, car ils ne font pas preuve seulement d'une approche théorique, il y a aussi des exercices", "il est à la fois scolaire et permet de voir d'autres aspects des mathématiques", "organisation originale, dense, complète ; l'ensemble est bien mené", "une année assez marquante : l'accès aux maths est assez surprenant (peut-être un pont entre le lycée et la fac ?", "étudier plusieurs leçons en parallèle (ex: suites le lundi, barycentre le mercredi...) évite de saturer", "plutôt sympa, vivant, intéressant", "les cours de mathématiques ont été les plus intéressants et surtout les plus vivants de toute ma carrière de lycéenne", "j'ai beaucoup aimé l'enseignement des mathématiques cette année : cela les a rendu vivantes et a éveillé la curiosité de tous et l'envie".

12. Ce type de travail a-t-il modifié ton point de vue sur les mathématiques ?

Oui		Non		Sans opinion	
72%	**80%**	17%	**9%**	11%	**11%**

Réponses d'octobre :

Neutre : *"c'est une autre façon de travailler", "en TP, j'ai vu la difficultés de résoudre certains problèmes", "les TP apportent un nouveau mode de réflexion", "la pratique du TP montre la difficulté à résoudre des problèmes", "besoin de temps en math largement supérieur aux autres années et aux autres matières" ;*

Positif : *"les maths apportent une rigueur méthodique que je ne soupçonnais pas aussi importante", "ça ressemble à un jeu plus qu'à un cours", "je les aborde de manière moins carrée, plus détendue", "le mélange théorie-pratique-calculatrice rend plus passionnantes les mathématiques", "on se penche sur des problèmes plus intéressants", "les mathématiques peuvent être intéressantes", "une approche plus concrète, le sera encore plus je pense pour la géométrie", "la part plus importante donnée à la pratique rend les mathématiques plus intéressantes", "le travail de recherche et de réflexion est important en mathématiques", "je me suis aperçue que la rigueur est indispensable et que je ne pouvais pas inventer des théorèmes quand ça m'arrange", " je me suis rendu compte qu'il faut travailler plus régulièrement et plus sérieusement", "on fait beaucoup plus de recherche alors que les années précédentes on faisait seulement des applications directes du cours", "en comparant cela à la musique, il ne s'agit plus seulement de gammes, mais d'applications intéressantes" ;*

<u>Réservé</u> : *"elles m'apparaissent plus compliquées qu'avant", "les mathématiques m'apparaissent plus vivantes mais aussi plus compliquées".*

<u>Réponses de mars :</u>

<u>Dubitatif</u> :*"la question mérite réflexion : je crois être en mesure de répondre : peut-être" ;*

<u>Affirmatif</u> :*"le travail demandé est très intéressant, vivant et éveille la curiosité", "les maths, c'est en fait une recherche (difficile) d'où on ne part de rien pour arriver à quelque chose. On ne connaît jamais les bases, les vraies relations entre les choses", "les maths, ce n'est pas seulement appliquer des résultats, mais aussi chercher... c'est une science très créatrice!", "je les apprécie encore plus malgré un début difficile", "plus de recherche", "la résolution des problèmes est plus intéressante à chercher", "les maths ne sont pas des sciences abstraites, j'ai découvert l'histoire des maths", "je privilégie plus le raisonnement", "j'appréhende les maths avec beaucoup plus de sérénité, d'intérêt", "les maths peuvent être moins ennuyeuses, moins scolaires", "ce type de travail permet de faire découvrir les vraies mathématiques", "il m'est arrivé de rechercher à la maison, car j'aime bien chercher sur les TP", "on n'a pas besoin de trouver absolument une solution pour évoluer en mathématiques", "je pensais que les mathématiques étaient une discipline carrée ; je me suis aperçue que, bien qu'une certaine rigueur soit indispensable, les maths favorisent la créativité et l'ingéniosité", "cette année, plus de convivialité, mais j'ai toujours trouvé les maths intéressantes", "cette année, on a pu avoir plusieurs approches sur un même problème", "j'ai découvert l'aspect historique de la chose", "très différent des autres années, passionnant bien que surprenant parfois", "on n'a jamais fini un problème, il y a toujours une question pour le poursuivre", "en nous apportant un point de vue moins scolaire".*

13. Ce type de travail a-t-il modifié ton point de vue sur les calculatrices ?

Oui		Non		Sans opinion	
53%	**63%**	36%	**20%**	11%	**17%**

<u>Réponses d'octobre :</u>

<u>Oui</u> : *"j'en découvre un peu plus l'utilité", "elles me semblent encore plus utiles qu'avant", "c'est en fait très utile (j'aimais autrefois faire les calculs de tête", "j'apprends à mieux les apprécier", "je les pensais beaucoup moins performantes. A vrai dire, je ne m'y suis jamais intéressée", "les calculatrices sont des outils de travail qui permettent de justifier des résultats et surtout de pouvoir résoudre des problèmes si l'on sait s'en servir", "je me sens un peu plus à l'aise : elle rassure pour la vérification de la résolution de certains problèmes en interro", "je sais désormais qu'une utilisation sérieuse et appliquée de la calculatrice permet d'alléger le travail" ;*

<u>Non</u> : *"on doit pouvoir se passer de ces machines (manque de confiance dans la machine car, des fois, les réponses ne correspondent pas) ; faire des calculs à la main est plus agréable".*

<u>Réponses de mars :</u>

<u>Mitigé</u> : *"les calculatrices ont toujours été des auxiliaires de réflexion pour moi", "toujours la même opinion : utiles, mais pas indispensables", "on bricole", "c'est un outil utile et efficace, mais qui ne remplace pas une réflexion méthodique", "nouvelles potentialités, nouveaux défauts".*

<u>Oui</u> : *"ça nous aide à en voir les limites", "oui, en tant qu'outil", "je ne pensais pas qu'on puisse faire autant de choses avec une calculatrice", "elles sont très utiles en TP", "beaucoup plus rapide que mon ancienne calculatrice", "beaucoup plus performantes, rapides, diversité des calculs, grande capacité de programmation",*

"rapidité de calcul de la TI-92, plus performante", "cela m'a permis de voir l'utilité des calculatrices et me donne envie de m'intéresser aux ordinateurs", "maintenant, je vois combien une calculatrice peut être utile. Elle ne sert pas seulement à faire des opérations usuelles", "avant cette année, une calculette me semblait inutile, je ne dirais pas que ma calculette m'est devenue indispensable, mais c'est un bon outil de vérification", "elle peut être un outil efficace", "je ne regarderais plus ma calculatrice de la même manière. Je peux vous affirmer que dorénavant mes avis sur la question seront marqués par le respect... et un peu de tendresse (si, si!)", "avant, je les jugeais plus ou moins inutiles (trop peu de fonctionnalités)", "la calculatrice permet de conjecturer", "elles sont devenues pour moi de véritables outils utiles qui aident à la réflexion".

Pour finir, un point de vue sur toi-même...

14. Comment juges-tu tes résultats en mathématiques...

Bons		Moyens		Médiocres	
6%	**29%**	67%	**51%**	27%	**20%**

Réponses d'octobre :

"je recherche les solutions avec de plus en plus de plaisir".

Réponses de mars :

Mitigés :*"j'aurais pu travailler un peu plus pour les améliorer", "peut faire mieux", "fatigue et problèmes divers... du mal à gérer mon temps", "irréguliers (plus aux bacs blancs qu'en contrôle", "(3 fois) mea culpa ! ô râge, ô désespoir, ô mathématiques ennemies!", "avec 8 heures de maths +1 heure de soutien + 4 heures de devoir + 5 à 7 heures de travail personnel, avoir 7,5 au bac blanc est surprenant", "vraiment moyens", "résultats encore à améliorer", "difficile de porter un regard critique sur soi", "je devrais plus travailler", "résultats moyens mais quand même meilleurs qu'en tout début".*

Contents : *"en nette évolution depuis le début de l'année", "moyens, mais j'ai augmenté!", "bons résultats, sauf pour le dernier bac blanc", "des résultats bien meilleurs que l'année dernière".*

15. Comment ces résultats ont-ils évolué cette année ?

En hausse		Stables		En baisse	
42%	**54%**	42%	**34%**	16%	**12%**

Commentaires de mars :

"Le niveau des devoirs me semble moins difficile qu'en début d'année", "je me suis plus ou moins adaptée à la manière de faire le cours du professeur", "résultats en hausse, pourvu que ça dure!", "peut-être qu'au fur et à mesure le niveau des contrôles a été mieux adapté", "je me suis mise à travailler plus sérieusement (enfin, je crois)", "résultats en hause, peut-être pas au niveau des notes, mais dans la façon d'aborder les choses", "après des débuts décourageants, le dispositif de travail différent m'a permis de reprendre confiance".

16. Comment juges-tu ton aptitude à utiliser une calculatrice ?

Bonne		Moyenne		Médiocre	
25%	**34%**	61%	**66%**	14%	**0%**

Commentaires de mars :

"Créer des programmes me dépasse", "je ne maîtrise pas les systèmes d'équations et toutes les capacités de l'application Datalmatrix", "il y a encore certains points troubles et je ne maîtrise pas toutes les applications", "je ne passe pas mes nuits avec", "pas assez rapide", "je ne maîtrise pas tout (par exemple la résolution des systèmes d'équation)", "je ne suis pas très férue d'informatique alors, forcément, ça pose certains problèmes", "je sais que je n'utilise pas assez le mode d'emploi...", "je maîtrise les commandes dont j'ai besoin, mais je ne fais pas beaucoup plus...", "encore faut-il être intéressé par les calculatrices en général".

"je fais le tri entre ce qui m'est utile et ce qui représente un +", "je ne suis pas encore une as, mais je l'utilise mieux que les calculatrices que j'avais avant", "c'est incroyable comme on s'y habitue vite", "des capacités, mais encore des choses à mieux maîtriser", "bonne aptitude, à part l'utilisation des programmes, qui reste sombre pour moi".

17. Comment cette aptitude a-t-elle évolué cette année ?

En hausse	Stables	En baisse
83% 97%	17% 3%	

Commentaires d'octobre :

"je m'intéresse de plus en plus à cela (car utile et amusant)", "le guide TI-92 me sert de plus en plus", "j'utilise plus la calculatrice", "je suis de plus en plus à l'aise mais je peux encore découvrir d'autres outils", "plus on l'utilise, plus on est habile", "j'ai appris à tracer un graphique, ce qui me semblait insurmontable l'an dernier".

Commentaires de mars :

"il faut parfois se forcer à faire ce que l'on n'aime pas..."

"évidemment que, depuis septembre, l'utilisation personnelles de la TI-92 s'est améliorée", "aptitude en progrès : c'était ça, ou j'étais noyée car pour les TP comme pour certains contrôles on devait savoir utiliser la calculatrice", "progression, mais faible", "on est bien obligé, du fait de la diversité des problèmes abordées", "je connais maintenant les fonctions usuelles", "on se familiarise au fur et à mesure, en découvrant ses utilités", "on apprend toujours un peu plus tout le temps", "les messages d'erreurs : je suis à présent capable de modifier ma demande pour obtenir une réponse", "aptitude en hause, grâce au cycle perpétuel : intérêt-amélioration", "on arrive à intégrer de nouvelles méthodes pour aller plus vite".

18 Il y a peut-être une question qui n'a pas été posée, et à laquelle tu aurais aimé répondre... C'est le lieu et le moment :

Libres propos d'octobre :

"Pourrait-on avoir un cours sur la programmation de la calculatrice?", "difficulté sur la calculatrice : programmation" ;

- "j'aimerais vraiment savoir si la calculatrice ne nous induira pas en erreur le jour du bac, sachant que l'on risque de foncer tête baissée, sans réfléchir préalablement" ; "les exercices des contrôles me surprennent beaucoup par rapport à ceux faits pour les devoirs à la maison : j'espère qu'on en aura jamais de tels au baccalauréat ! Si ce n'est pas le cas, comme je ne souhaite pas faire prépa, je préférerais qu'ils ressemblent plus aux épreuves de bac. Je veux quand même dire que c'est très agréable que vous soyez à notre écoute. mais on a souvent peur de vous contredire (sur l'évidence des exercices...). Il est vrai que l'on doit faire des choses difficiles mais pas qui nous apparaissent insurmontables et qui nous obscurcissent l'esprit".

Libres propos de mars :

"J'aurais aimé savoir si nous étions en fin de compte des cobayes de l'éducation nationale : est-il moral d'utiliser des élèves (êtres humains) comme cobayes?";

"est-ce que les autres années il y avait si peu de solutions pour les défis et problèmes ou est-ce une nouveauté de notre classe? Pourquoi ne favoriser qu'une classe en distribuant des TI-92 et non pas toutes les terminales de Joffre ? En effet, c'est sensé voir si c'est une aide précieuse mais je pense que le taux de réussite au bac de notre classe sera élevé et pas que grâce à la calculatrice : on a fait une classe de niveau, et cela fausse les résultats",;

"une remarque : j'apprécie beaucoup les simulations bac. Cela nous donne une vue d'ensemble du niveau de la classe, cela nous permet de nous situer dans la classe, de voir ce que l'on devrait améliorer ; je trouve cela stimulant et, en ce qui me concerne, rassurant" ;

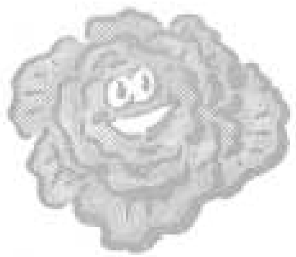
"sans vouloir offenser mon professeur, j'aimerais savoir à quoi servent des problèmes hors programmes (problème de Fermat, algorithme babylonien, etc.) pour le bac. Ne serait-il pas souhaitable de passer du temps sur des points précis du bac, même si on doit les refaire plusieurs fois ? On me dira que les devoirs hebdomadaires sont faits pour cela... Je réponds que les devoirs sont uniquement du travail personnel, on doit tout faire tout seul sans aucune aide. Personnellement, je trouve les corrections peu développées (limites à expliquer plus précisément, trouve-t-on par exemple dans le devoir n°12...Comment faut-il faire?). Mais je suis bien conscient que cette pensée est paradoxale. La majorité des élèves réussissent. Le système permet d'avantager les meilleurs. Ne me reprochons pas de travailler car j'ai 13,5 de moyenne en physique et autant en biologie. Je trouve que l'enseignement en classe est loin d'être synthétique et clair pour aider les élèves en difficulté. Merci de votre compréhension" ;

"la méthode de travail mise en place cette année m'a beaucoup plu. Elle m'a permis de m'intéresser un peu plus aux maths du fait d'un travail moins scolaire (du genre on copie au tableau et on part). Je pense que cela devrait être étendu à d'autres matières car cela permet un dialogue et un échange élève/prof qui est selon moi très appréciable. De plus, le fait de nous mettre au pied du mur (en TP) permet de s'interroger vraiment sur un problème, d'explorer. C'est cet aspect qui a été plus ou moins mon moteur" ;

"Texas Instruments sort régulièrement de nouveaux modules pour sa calculatrice. Cependant, la firme devrait imiter un modèle comme celui d'IBM : l'utilisateur est souvent celui qui connaît le mieux les défauts et les améliorations possibles de la machine. Le consulter serait certainement bénéfique et ce, même si les ingénieurs travaillent durement".

CONCLUSION CÔTÉ ÉLÈVES

Cher lecteur, ça y est, vous êtes presque au bout de vos peines. Nous espérons que vous avez apprécié ce court voyage d'initiation dans le monde surprenant de la TI-92. Mais, avant de nous séparer définitivement, il vous reste à digérer ce court bilan. Comme nous voulons vous éviter une indigestion, ce bilan sera donc allégé et concis. Bon appétit !



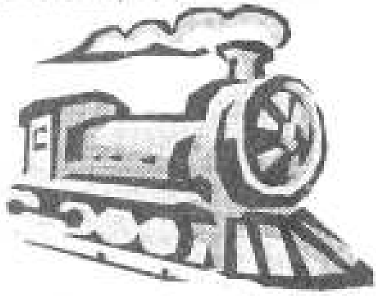
Ce bilan est principalement tiré des deux baromètres donnés à notre classe en octobre et en mars. Ces baromètres sont des questionnaires sur les jugements de notre classe, sur la nouvelle pédagogie que nous avons testée.

D'abord très surprise par ses formes imposantes comparables à un micro-ordinateur et tranchant délibérément avec nos petits calculettes des années passées, la classe s'est peu à peu adaptée à cet "engin". En premier lieu, nous avons découvert ses avantages non négligeables, les facilités opératoires qu'elle offre ; en second lieu, nous avons découvert certains inconvénients au fil des mois : "elle est trop lourde", voilà ce qu'un tiers des élèves remarque principalement. Si la TI-92 a d'abord flatté nos yeux, son poids n'a pas pu attendrir nos petites épaules... Dans le même ordre d'idée, 70% des élèves avouent n'avoir recours que "parfois" (10% des élèves "jamais") au mode d'emploi de la TI-92. Il est vrai que ce pavé aux allures de Gaffiot (pour les latinistes) nous refroidit de façon triviale !

Mais la classe s'est relativement vite familiarisée avec les avantages de cette calculatrice. Son apprentissage a d'ailleurs été facilité par l'emploi de la calculatrice rétroprojetable. Les avis quant aux services rendus par celle-ci ont été cependant partagés. Certains y découvrent une convivialité, un moyen d'être plus attentif en cours ("je regarde plus souvent le tableau"), d'autres mettent en évidence certains problèmes matériels dont elle est à l'origine ("elle masque le tableau").

Les séances de TP du vendredi ont été appréciées par 90% des élèves car elles favorisent le côté pratique des mathématiques jusqu'alors considérées comme très abstraites. En effet le binôme peut progresser en toute liberté dans la recherche du problème, mais ce sont surtout l'aspect convivial et le caractère peu scolaire qui sont appréciés : "on fait une recherche à deux et le résultat n'est pas sanctionné par une note mais une appréciation". Ainsi cette activité a développé entre nous une meilleure communication, une meilleure écoute du partenaire et, pour 80% des élèves, un travail d'équipe plus efficace. Il en ressort que les TP devraient tenir une place plus importante dans notre emploi du temps.

De façon générale, "les cours de mathématiques cette année ont été radicalement différents de ceux de première", de plus 86% des élèves ont jugé cette méthode d'aborder le cours comme une aide pour la compréhension. En contre partie, cela aura exigé pour tous une adaptation considérable et parfois difficile. Enfin, 80% d'entre nous quitteront le lycée avec un jugement différent vis-à-vis des mathématiques : "elles apportent une rigueur méthodique que je ne soupçonnais pas et peuvent être accompagnés de cours très vivants, voire conviviaux".



Ainsi, vous voilà au bout du tunnel, au fond brille la lumière de la connaissance... Nous espérons que vous avez fait bon voyage, qu'il n'a été ni trop long ni trop pénible mais au contraire très instructif et interactif. Si le voyage vous a plu, vous pouvez partager vos découvertes avec d'autres. Dans peu de temps peut-être, toutes les classes pourront vivre notre expérience. Ainsi nous ne resterons pas de simples "cobayes", mais des précurseurs de nouvelles pédagogies nous armant davantage pour affronter un monde où la technologie prend de plus en plus de place.

Ont contribué à l'élaboration de cette conclusion Geneviève Ethève, Valérie Lefèvre, Sofie Khalil, Olivier Clua, Laetitia Rodriguez, Aurélia Charar, Véronique Gerlotto, Pierre Rouquette, Arnaud Lewillon et Marguerite Tuszinska.

CONCLUSION CÔTÉ PROFESSEUR

C'est donc la fin du voyage pour le lecteur, mais aussi pour la classe qui a construit cet ouvrage, la fin d'un voyage collectif qui a duré un an, prélude à d'autres explorations. Nous espérons avoir prouvé, à travers cette aventure, plusieurs choses :

- même dans une année d'examen (le bac), malgré un programme officiel lourd, il est possible de prendre le temps de chercher, il est possible de prendre des chemins de traverse. Ce que l'on perd (apparemment) en temps, on le gagne en profondeur de compréhension, c'est du temps gagné pour la suite...

- les nouveaux environnements dans lesquels va se déployer de plus en plus l'enseignement des mathématiques ne sont pas nécessairement des obstacles supplémentaires pour le professeur et les élèves. Ils peuvent permettre un enseignement plus vivant, une pratique des mathématiques autour de la résolution de problèmes ;

- ce renouvellement ne concerne pas seulement "les bons élèves et les bonnes classes". La classe qui a réalisé ces "38 variations" était certes d'un très bon niveau, cela ne veut pas dire que tous les élèves, au départ, sont, ou étaient considérés comme bons. Un élève redoublant écrit par exemple (cf. page 300) :

> *"la méthode de travail mise en place cette année m'a beaucoup plu. Elle m'a permis de m'intéresser un peu plus aux maths du fait d'un travail moins scolaire (du genre on copie au tableau et on part) ... Cela permet un dialogue et un échange élève/prof qui est selon moi très appréciable. De plus, le fait de nous mettre au pied du mur (en TP) permet de s'interroger vraiment sur un problème, d'explorer. C'est cet aspect qui a été plus ou moins mon moteur".*

Cela ne veut pas dire que tout s'est passé sans peine et sans heurts. Ce type de travail a déstabilisé parfois certains élèves (cf. page 300) :

> *"sans vouloir offenser mon professeur, j'aimerais savoir à quoi servent des problèmes hors programme (problème de Fermat, algorithme babylonien). Ne serait-il pas souhaitable de passer du temps sur des points précis du bac, même si l'on doit les refaire plusieurs fois ?".*

La conviction du professeur est cependant que, malgré quelques petits conflits (ou à cause de... ?) le mouvement de recherche engagé cette année a fini par entraîner toute la classe et que ceci aura des retombées bénéfiques pour le bac et pour les études qui suivront.

Il nous reste à espérer que cet ouvrage donnera l'envie au lecteur de tenter le voyage, éventuellement pour une courte traversée : il est possible pour tout professeur d'organiser en classe quelques TP, en regroupant les élèves par deux, en proposant des rapports de recherche ; il est possible d'installer de temps en temps en classe un dispositif de rétroprojection d'une calculatrice symbolique, en confrontant les résultats obtenus avec ceux des calculatrices (pour le moment graphiques) des élèves. Après quelques excursions, des expéditions plus longues peuvent être envisagées...

Il est assez naturel pour un professeur de mathématiques de terminer par une parabole, extraite, pour refermer cet ouvrage comme il a commencé, du Petit Prince de St Exupéry.

La sixième planète était une planète dix fois plus vaste. Elle était habitée par un vieux Monsieur qui écrivait d'énormes livres (...)

- Je suis géographe, dit le vieux Monsieur.

- Qu'est-ce qu'un géographe ?

- C'est un savant qui connaît où se trouvent les mers, les fleuves, les villes, les montagnes et les déserts.

- Ça c'est bien intéressant, dit le petit prince. (...) Elle est bien belle, votre planète. Est-ce qu'il y a des océans ?

- Je ne puis le savoir, dit le géographe.

- Et des villes et des fleuves et des déserts ?

- Je ne puis le savoir non plus, dit le géographe.

- Mais vous êtes géographe !

- C'est exact, dit le géographe, mais je ne suis pas explorateur. Je manque absolument d'explorateurs. Ce n'est pas le géographe qui va faire le compte des villes, des fleuves, des montagnes, des mers, des océans et des déserts. Le géographe est trop important pour flâner. Il ne quitte pas son bureau. Mais il reçoit les explorateurs. Il les interroge, et il prend en note leurs souvenirs. Et si les souvenirs de l'un d'entre eux lui paraissent intéressants, le géographe fait faire une enquête sur la moralité de l'explorateur (...) Donc, quand la moralité de l'explorateur paraît bonne, on fait une enquête sur sa découverte.

- On va voir ?

- Non. C'est trop compliqué. Mais on exige de l'explorateur qu'il fournisse des preuves. S'il s'agit par exemple de la découverte d'une grosse montagne, on exige qu'il en rapport de grosses pierres.

Le géographe soudain s'émut.

- Mais toi, tu viens de loin ! Tu es explorateur ! Tu vas me décrire ta planète !

- Oh ! chez moi, dit le petit prince, ce n'est pas très intéressant, c'est tout petit. J'ai trois volcans. Deux volcans en activité, et un volcan éteint. J'ai aussi une fleur.

- Nous ne notons pas les fleurs, dit le géographe.

- Pourquoi ça, c'est le plus joli !

- Parce que les fleurs sont éphémères.

- Qu'est-ce que signifie "éphémère" ?

- Les géographies, dit le géographe, sont les livres les plus précieux de tous les livres. Elles ne se démodent jamais. Il est très rare qu'une montagne change de place. Il est très rare qu'un océan se vide de son eau. Nous écrivons des choses éternelles.

- Mais les volcans éteints peuvent se réveiller, interrompit le petit prince. Qu'est-ce que signifie "éphémère" ?

A l'inverse des géographies du vieux Monsieur de St Exupéry, les mathématiques vivantes ne sont pas faites de vérités éternelles qu'il s'agirait d'apprendre par coeur dans de vieux grimoires.

Les mathématiques se font.

Les élèves géomètres, les élèves arpenteurs de la T5S ont exploré, comme le petit prince, une petite partie d'une vaste planète, grâce à d'étranges (et lourds !) instruments, grâce surtout à leurs capacités de réflexion. Ils ont appris à <u>capter des phénomènes éphémères</u>, à <u>exploiter les irrégularités du terrain</u> pour trouver de nouvelles prises, à <u>confronter</u> différentes sources d'information, à <u>analyser les impasses</u> pour prendre un nouveau départ.

C'est utile pour les mathématiques, c'est utile pour la vie !

BIBLIOGRAPHIE

Concernant les travaux relatifs à l'intégration des calculatrices graphiques ou symboliques dans l'enseignement des mathématiques, on pourra se reporter utilement aux ouvrages suivants :

Actes de l'Université d'Été. 1996. *Des outils informatiques dans la classe aux calculatrices symboliques et géométriques : quelles perspectives pour l'enseignement des mathématiques ?*. Rennes : IREM, Université Rennes I.

Artigue Michèle, B. Defouad, M. Dupérier, G. Juge et J.-B. Lagrange. 1997. *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée.* Paris : Irem, Université Paris VII.

Bernard René, C. Faure, M. Noguès, Y. Nouazé et L. Trouche. 1995. *Arithmétique, le retour.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Bernard René, C. Faure, M. Noguès, Y. Nouazé et L. Trouche. 1998. *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en lycée.* Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Bruillard Éric (coordonné par). 1995. *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes.* Les dossiers de l'ingénierie éducative n°19. Paris : CNDP.

Canet Jean-François, J. Delgoulet, D. Guin et L. Trouche. 1996. *Un outil personnel puissant, qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir.* Repères-Irem n°24. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Guin Dominique et J. Delgoulet. 1996. *Étude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de seconde.* Montpellier : Irem, Montpellier II.

Hirlimann Anne (coord par). 1994. *Enseignement des Mathématiques et logiciels de calcul formel, Derive, un outil à intégrer.* Paris : Ministère de l'Education Nationale

Kuntz Gérard. 1993. *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, Repères-Irem n°11, pp 5-32. Pont-à-Mousson : Topiques éditions.

Trouche Luc. 1996. *Enseigner les mathématiques en Terminale S avec des calculatrices graphiques et formelles* : volume 1 ("côté cours"), volume 2 ("côté jardins"). Montpellier : Irem, Montpellier II.

Trouche Luc. 1997. *Calculatrices symboliques en lycée : un défi mathématique.* Montpellier : CRDP.

CRÉDITS D'IMAGES

L'illustration de cet ouvrage a été réalisée par une équipe composée de Sébastien Bayle, Benoît Chifolleau, Marianne Leheup, Xavier Rivory, Pierre Rouquette, coordonnée par Alice de Bigault.

Les auteurs en sont :

Albert (1992, *Les cahiers du bac*, Éditions ABC) pages 15, 17, 77, 118, 243, 274.

Gendrot (1992, *Les cahiers du bac*, Éditions ABC) page 93.

Hergé (Éditions Casterman) page 13 (1942, *L'étoile mystérieuse*), page 16 (1938, *Le sceptre d'Ottokar*), page 25 (1932, *Les cigares du Pharaon*), page 171 (1960, *Tintin au Tibet*) et page 213 (1958, *Coke en stock*).

Rouxel Jacques (1975, *Les shadoks, Pompes à rebours*, Éditions Grasset) page 275.

Antoine de Saint Exupéry, (1946, *Le Petit Prince*, Gallimard) première de couverture et pages 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Schuiten Peeters (1985, *La fièvre d'Urbicande*, Editions Casterman) pages 143, 215, 216, 237 et 299.

Des élèves ont aussi produit des illustrations originales :

Pierre-Emmanuel Allirol (élève d'une autre terminale S du lycée) pages 241 et 281 ;

Murielle Almairac, page 124 ;

Sébastien Bayle, pages 284, 285, 289, 291, 293 ;

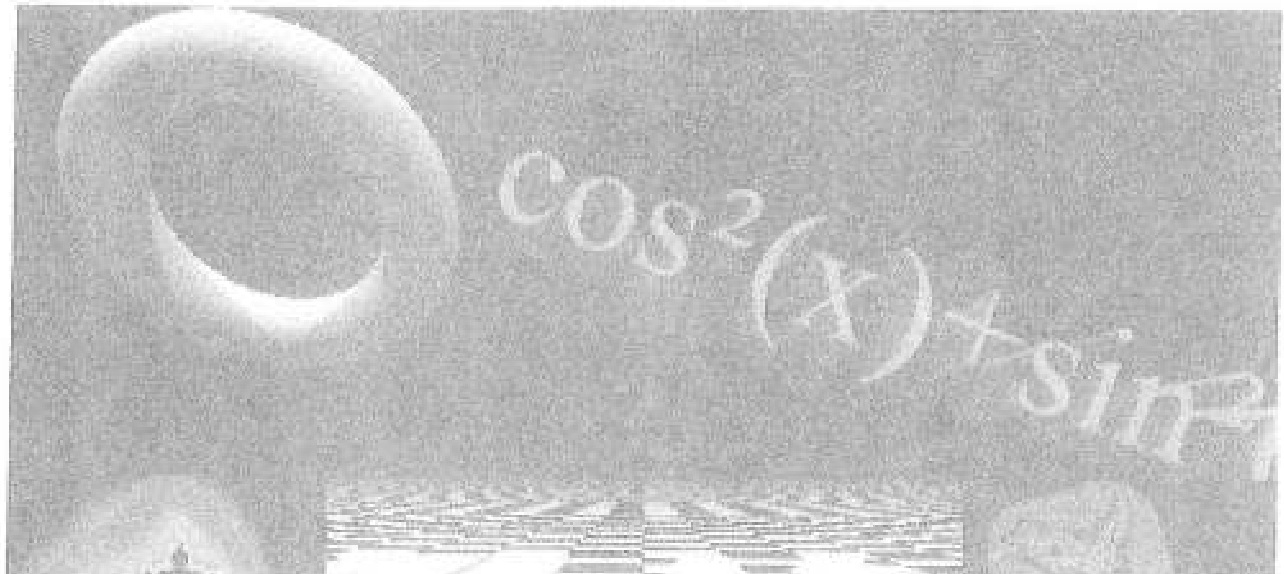
Alice de Bigault pages 85, 262 et illustrations du défi 3 ;

Benoît Chifolleau, page 309 ;

Xavier Rivory, page 229 ;

Jean-François Vincent pages 8, 9, 10, 11, 12, 224 ter, 230, 264 et illustrations des défis 1, 2, 3 et 4.

TABLE DES MATIÈRES


$\cos^2(x)+\sin$
TI-92

TITRE

Expérimenter et prouver : FAIRE DES MATHÉMATIQUES AU LYCÉE AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES, *38 variations sur un thème imposé.*

AUTEURS

Luc TROUCHE et les 37 élèves d'une classe de Terminale S :
M. Almairac, A. Arnoux, S. Bayle, F. Bécamel, A. Bialès, C. Bonnet, C. Bozonnat, J. Caramel, A. Charar, B. Chifolleau, O. Clua, A. de Bigault, C. Delarbre, G. Ethève, E. Franceschini, I. Fromental, V. Gerlotto, A. Guez, A.-S. Kaloghiros, S. Khalil, V. Lefèvre, S. Le Guillou, M. Leheup, A. Lewillon, M. Lieber, M. Lysowec, M. Mouls, O. Mouraille, D. Obono, X. Rivory, L. Rodriguez, P. Rouquette, P. Souteyrand, N. Téot, M. Tuszynska, D.-L. Versace, J.-F. Vincent.

DATE, EDITEUR

Mai 1998, IREM, Université Montpellier II

MOTS CLÉS

Conjecturer, prouver, travaux pratiques, débat scientifique, évaluation, calculatrice symbolique et géométrique.

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une expérimentation IREM-CRDP (Montpellier) et Distn (Ministère de l'Education Nationale), une classe de terminale S (spécialité mathématiques) a été dotée de calculatrices TI-92 (comportant un logiciel de calcul symbolique, Derive, et un logiciel de géométrie, Cabri Géomètre). Le professeur et les 37 élèves ont contribué à la réalisation de cet ouvrage. On y trouvera :

- 14 TP (énoncés et pistes de résolution) ;
- 5 défis mathématiques, avec les différentes solutions avancées par les élèves ;
- une "pochette surprises" contenant des sujets de recherche libre réalisés par 5 groupes d'élèves ;
- les sujets des devoirs surveillés, avec les problèmes spécifiques posés par l'évaluation des travaux avec calculatrices ;
- l'évaluation que les élèves eux-mêmes font de cette année expérimentale.

Ce renouvellement de l'enseignement des mathématiques (rendu indispensable par l'évolution des outils de calcul) s'organise autour d'un jeu entre conjectures, preuves et réfutations ; il (re)situe les mathématiques comme une science expérimentale particulière, où l'art de la raison est guidé par l'exigence de la preuve.

NOMBRE DE PAGES, PRIX

310 pages, 100F

ISBN

2-909916-286

IREM de Montpellier

Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon, cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05

Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr