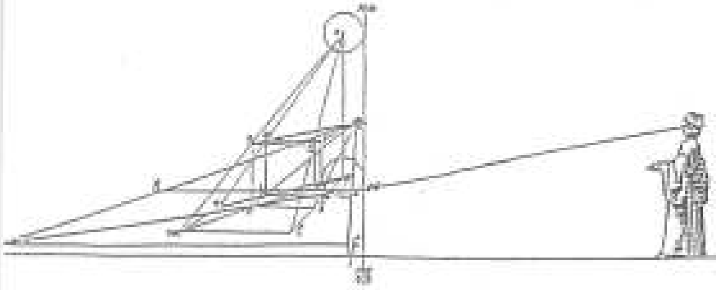
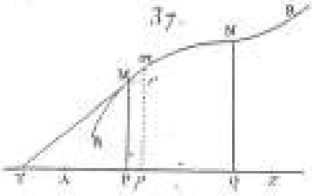
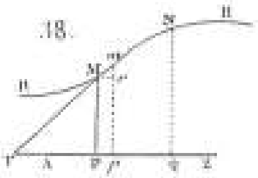
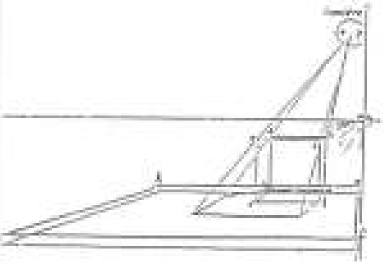
INSTITUT DE
RECHERCHE
SUR L' ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES
Université Montpellier II

DOUZE GEOMETRIES

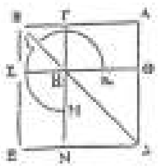


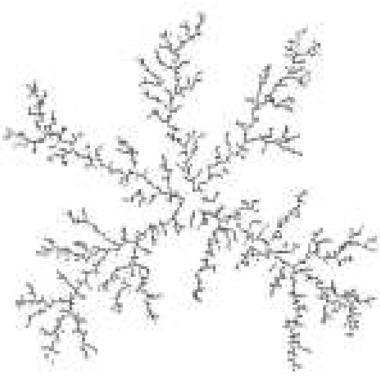


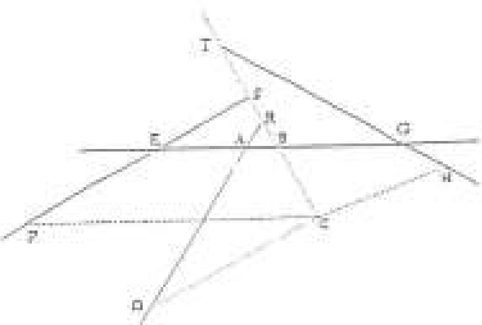




PETIT PARCOURS DE LA GEOMETRIE D'EUCLIDE A LA GEOMETRIE FRACTALE







INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon
cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr

Directrice : Mme D. GUIN

LE PROBLEME DE L'ESPACE, DE L'ETHER ET DU CHAMP PHYSIQUE.

La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique.

Puisque dans cette dernière, le concept d'espace a déjà une fonction fondamentale, établissons et étudions ce concept.

Deux façons d'appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes.

La première méthode s'appelle l'analytique logique.

Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d'emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité, nous la trouvons et la respectons dans la mathématique.

Mais cette sécurité s'obtient au prix d'un contenant sans contenu.

Albert Einstein
Etudes scientifiques

Le problème est magnifiquement posé.
A suivre..........

SOMMAIRE

Dix géométries.

Un premier polycopié intitulé « Dix géométries » était le numéro zéro des trois polycopiés composant « L'esprit de géométrie ».

I. Les mathématiques de l'immobile : Du système de mesure babylonien jusqu'à l'algèbre arabe.

II. Les mathématiques du mouvement : Les 17è et 18è siècles.

III. Les mathématiques modernes : Les 19è et 20è siècles.

Ecrit en 1994, le premier tirage de « Dix géométries » est aujourd'hui épuisé. Le présent polycopié reprend la même approche épistémologique en déroulant de manière chronologique les différentes géométries apparues depuis 5000 ans, ou du moins, les plus importantes d'entre elles.

Ce polycopié est écrit pour servir de base à une initiation à l'histoire des mathématiques lors **d'un stage de l'IREM de Montpellier** en 1997-1998.

Ce stage est organisé en liaison avec **la Mission Académique de Formation des Personnels de l'Education Nationale (MAFPEN).**

Douze géométries

La géométrie, mesure de la Terre, prit naissance probablement autour du golfe persique, il y a environ 5000 ans. (Dans l'état actuel de nos connaissances archéologiques)

Pourtant, à Lascaux, il y a 17000 ou 20000 ans, nos ancêtres ont dessiné plusieurs taureaux de même taille. Ces dessins supposent un système de mesure. Il est facile par exemple de tailler une branche ayant la longueur du dessin et de la reporter plus loin pour obtenir un dessin de même dimension.

La géométrie grecque fut construite sur les géométries de mesure (pléonasme) des Egyptiens et des Sumériens. Elle servit de référence, en particulier à partir des « Eléments » d'Euclide largement diffusés. La géométrie du monde grec fut ensuite à l'origine de dizaines de géométries.

Le polycopié présente 12 de ces géométries en respectant la chronologie de leurs apparitions. Sans développer bien entendu ces géométries mais en s'attachant plutôt à l'épistémologie de la construction des mathématiques.

Six de ces géométries seraient plus importantes que les autres.

1) La géométrie égyptienne (ou babylonienne, ou sumérienne, ou chaldéenne)
2) La géométrie d'Euclide
3) La géométrie de Descartes (analytique ou algébrique)
4) La géométrie différentielle (calculs différentiel et intégral)
5) La géométrie vectorielle (en dimension n).
6) La géométrie algébrique

Les géométries développées au Moyen-Orient autour de la notion de mesure (**mes-** racine d'origine indo-européenne) ont permis aux hellènes de construire le premier savoir déductif de l'humanité (Euclide, -300, Alexandrie). La démonstration ne sera jamais remise en question, elle fera même obstacle (épistémologique) à la construction et à la mesure, concepts qui précèdent la déduction.

Le premier objet de ce polycopié est de réhabiliter les notions de construction et de mesure.

Des tendeurs de ficelles aux mesureurs d'espaces.

Les mathématiciens portèrent le nom de « géomètres » jusqu'au 19è siècle et quand Pascal, par exemple, écrit « géométrie », il faut lire : mathématiques.

1) La géométrie égyptienne

Les tendeurs de ficelles égyptiens faisaient au sens propre de la géométrie puisqu'ils mesuraient la terre après chaque crue du Nil.

2) La géométrie d'Euclide

Les géomètres grecs reprirent les connaissances des Egyptiens. Ils transformèrent la géométrie en un savoir déductif. Les philosophes-géomètres, de Thalès (-550) à Euclide (-300) construisirent ce premier savoir déductif resté pendant 20 siècles la référence des scientifiques comme des philosophes. La géométrie doit attendre le 17è siècle de notre ère pour retrouver, en Europe cette fois, des humains capables de lui donner un nouvel essor.

Durant ces 20 siècles, d'autres civilisations, indienne, chinoise, arabe, mettent en place un savoir fondé sur les nombres. Nouvelle écriture des nombres, nouveaux nombres (ceux que nous utilisons !) venus de chez les Indiens.

Méthodes et règles de manipulation des égalités de nombres, les équations algébriques des Arabes.

3) La géométrie projective

Faire entrer l'espace dans un rectangle de toile, tel est le problème des peintres de la Renaissance, tel est le problème qui donna naissance à la géométrie projective.

Albert DÜRER, en 1525, dans son traité, « Instruction sur la manière de mesurer », écrit : « Le très savant Euclide a défini les fondements de la géométrie. Celui qui l'a bien compris n'a pas besoin de ce qui est écrit ci-après... »

4) La géométrie de Descartes

Piaget a très bien noté le caractère local de la géométrie d'Euclide restreinte à la figure. La géométrie de Descartes repère tous les points du plan à l'aide de 2 mesures, elle est une géométrie globale de l'espace.

Descartes termine de plus la mise en place de l'écriture algébrique, les nombres inconnus x, y ou z et les nombres connus a, b, c. Il réunit dans sa géométrie les connaissances grecques sur les figures avec les connaissances arabes sur les nombres.

Dieudonné considère la « méthode des coordonnées » de Descartes comme étant l'acte de naissance de la géométrie algébrique.

5) La géométrie du hasard

Les mathématiques sont le domaine des certitudes. Descartes disait : « il n'est de plus grandes certitudes que celles des géomètres ». Aussi, nous ne trouvons aucune trace de probabilité avant le 17è siècle. Pascal écrit dans une lettre à l'Académie parisienne de Science : « Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant de Géométrie du Hasard. »

6) La géométrie différentielle : Newton et Leibniz

Le 17è siècle est un siècle de méthodes. Peu de théorèmes. Par contre, les géomètres du 17è construisent de nouvelles géométries. Les calculs différentiel et intégral de Newton et Leibniz font ainsi partie des grandes constructions du siècle, faisant entrer l'infini et particulièrement l'infiniment petit dans les calculs.

7) La géométrie descriptive.

Création de Monge, elle apparaît au début du 19è siècle, le siècle de la révolution industrielle.

8) La géométrie vectorielle, géométrie en dimension n>3.

Les vecteurs représentent des forces. La géométrie des vecteurs symbolise les mathématiques « modernes » depuis la réforme. Il fallut attendre le milieu du 19è siècle pour voir apparaître les espaces de vecteurs.

La géométrie en dimension n.

Depuis Euclide, depuis toujours en fait, la géométrie se décline en trois dimensions, celles de notre espace physique. Schwartz, dans les années trente de notre siècle, signale : « Mais je reste étonné, en me remémorant ce que j'avais étudié et compris, que les espaces à n dimensions, pour n plus grand que 3, me soit resté étrangers.......jusqu'à l'Ecole normale comprise.... excepté le cours de Leray au Collège de France...

Dans la construction des mathématiques, la géométrie commence à s'affranchir de la contrainte dimensionnelle au milieu du 19è siècle.

9) Les géométries non-euclidiennes.

Postulat d'Euclide : « Par un point extérieur à une droite, il passe une seule parallèle à cette droite. » Ce postulat semblait pouvoir se démontrer, les tentatives furent nombreuses. Toujours au 19è siècle, les mathématiciens renoncèrent et transformèrent ce postulat créant de nouvelles géométries, de nouveaux modèles de l'espace qui nous entoure.

10) La géométrie des transformations

Les transformations appliquées aux objets simples de la géométrie sert de base à la géométrie au collège. Pourtant les transformations, les changements de formes sont encore plus modernes que les vecteurs. Euler a un peu étudié les transformations de l'espace mais il fallut attendre Galois, vers 1830, et les permutations d'un ensemble fini de nombres pour avoir le premier groupe de transformations. L'application aux objets de la géométrie intervient en 1870 avec Jordan.

11) La géométrie algébrique

Selon Dieudonné, la « méthode des coordonnées » de Descartes crée la géométrie algébrique. Comme la géométrie de Descartes utilise la méthode analytique, ce nom lui restera. L'analyse va longtemps occulter l'autre aspect de cette géométrie. La géométrie algébrique reprend le dessus à la fin du 19è siècle pour devenir une branche (?) prépondérante de la recherche mathématique au 20è siècle.

12) La géométrie fractale : Mandelbrot, 1970.

Nous terminerons ce petit voyage dans les espaces mathématiques avec une géométrie très moderne.

La théorie des ensembles a pour origine les nombres réels. Quand cette théorie fut mise au point, de nouvelles figures firent office de « galerie des monstres »: ensembles de Cantor, courbe de Von Koch, courbe de Péano remplissant un carré. Ecoutons Mandelbrot : « La trajectoire du mouvement brownien est la plus simple des fractales... La collection de figures géométriques créées à cette époque (1875-1925) qualifiées de « galerie des monstres » peut également être visitée en tant que « Palais de la découverte ».... Ces figures géométriques n'ont jamais eu de chance dans l'enseignement ne passant que de l'état d'épouvantail moderne qu'à celui d'exemple trop spécial pour qu'on s'y arrête. »

....

« Je montre que la carapace formaliste qui les a isolées a empêché leur vrai sens de se révéler, que ces figures ont quelque chose d'extrêmement simple, concret et intuitif. »

CONCLUSION

Les « tendeurs de ficelles » égyptiens faisaient de la géométrie. Les Grecs transformèrent ensuite le système de mesure égyptien en un savoir déductif, gommant par la même occasion les références au monde sensible.

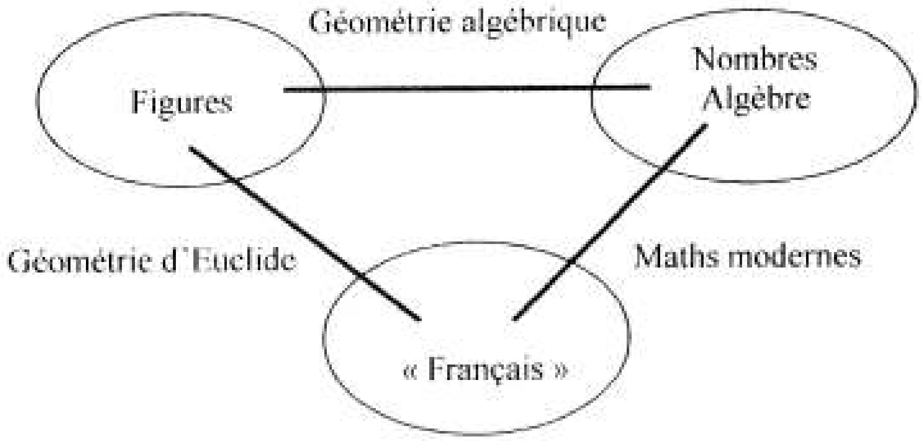
Au cours du 19è siècle, la géométrie s'affranchit de la contrainte dimensionnelle de l'espace physique et se développa sur les mêmes concepts en dimension n quelconque.

Toutefois, les constructions usuelles continuent de se faire autour de la notion d'espace : espace vectoriel,
espace de Hilbert,
espace fonctionnel,
espace de probabilité.

Abstraire = isoler. Derrière la « carapace formaliste », nous allons essayer de retrouver l'espace et le sensible.

Les trois langages.

En conclusion de cette approche, nous pourrions dire que les mathématiques se sont développées sur 2 langages : celui des figures et celui des nombres, d'abord fixes, puis inconnus, puis variables dans l'algèbre ou l'analyse. Ces 2 langages constituent effectivement les mathématiques. Du bon transfert des informations entre ces 2 langages dépend une bonne compréhension de l'espace environnant. Pourtant un troisième langage reste indispensable, le français.
Ce qui pourrait donner le schéma suivant :



La géométrie d'Euclide privilégiait la « traduction » figure-français. Le langage algébrique n'existait pas.

Les maths « modernes » privilégiaient la « traduction » algèbre-français au détriment de la figure et ce, en opposition avec un principe de la géométrie grecque.

La géométrie algébrique privilégie la « traduction » figure-algèbre et semble, à mon avis, être le domaine du matheux ou au moins être une approche plus équilibrée des mathématiques.
La géométrie algébrique est fondée sur la relation « figure-nombre », le système de mesure.

PREMIERE PARTIE

QUELQUES RÉFLEXIONS DE :

PASCAL

EINSTEIN

PIAGET

CHASLES

DIEUDONNÉ

SCHWARTZ

AVANT PROPOS

Avant d'aborder « les » géométries, il me paraît utile de lire quelques textes importants:

1) **« Esprit de finesse et esprit de géométrie »** se trouve dans les « Pensées » de Pascal (Pensées diverses N°2).

Peut-être pas toujours facile à comprendre à notre époque, il cherche à distinguer entre esprit de finesse et esprit de géométrie, un géomètre ne pouvant que rarement être un esprit fin.

2) **« La géométrie et l'expérience »** écrit vers 1920 par Einstein tente de définir les liens entre géométrie et réalité. Un objet géométrique peut-il être un objet réel ?

3) Ensuite, nous vous proposons une brève réflexion épistémologique à travers le chapitre 4 du livre de Piaget et Garcia :**« Psychogenèse et histoire des sciences ».** Les auteurs montrent comment les jeunes construisent leur géométrie personnelle, se repèrent et se structurent à travers la géométrie d'Euclide (les constructions), la géométrie analytique (les repères) et la géométrie des transformations (les structures).

4) **« L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie »** de Michel Chasles (paru en 1837) propose une construction du savoir géométrique en 5 époques qui nous mène jusqu'à la géométrie descriptive de Monge.

5) Nous poursuivons ces réflexions d'éminents personnages par des extraits de l'introduction du livre **« Algèbre linéaire et géométrie élémentaire »** écrit en 1964 par Jean Dieudonné à l'attention des enseignants du secondaire « les plus conscients de la nécessité d'une réforme » tout en précisant quelques lignes plus loin : « je m'excuse d'avance auprès de mes collègues de l'enseignement supérieur aux mains de qui tomberait ce livre, et qui m'accuseraient avec raison d'enfoncer pompeusement des portes ouvertes ».

6) Et nous terminerons avec des extraits du livre de Laurent Schwartz, **« un mathématicien aux prises avec le siècle ».**

Reprenons le texte d'Einstein et allons un peu plus loin en regardant les raisons de ce « contenant sans contenu ».

LE PROBLEME DE L'ESPACE, DE L'ETHER

ET DU CHAMP PHYSIQUE

La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique.

Puisque dans cette dernière, le concept d'espace a déjà une fonction fondamentale, établissons et étudions ce concept.

Deux façons d'appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes.

La première méthode s'appelle l'analytique logique.

Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d'emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité, nous la trouvons et la respectons dans la mathématique.

Mais cette sécurité s'obtient au prix d'un contenant sans contenu.

Car les concepts ne correspondent à un contenu que s'ils sont liés, même le plus indirectement aux expériences sensibles. Cependant aucune recherche logique ne peut affirmer cette liaison. Elle ne peut être que vécue. Et c'est justement cette liaison qui détermine la valeur épistémologique des systèmes de concepts.

Exemple : un archéologue d'une future civilisation découvre un traité de géométrie d'Euclide, mais sans figure.

Par la lecture des théorèmes, il reconstituera bien l'emploi des mots point, droite, plan. Il reconstituera aussi la chaîne des théorèmes et même, d'après les règles connues, il pourra en inventer de nouveaux. Mais cette élaboration de théorèmes restera pour lui **un vrai jeu avec des mots, tant qu'il ne pourra pas « se figurer quelque chose » avec les expressions point, droite, plan, etc...** Mais s'il le peut et seulement s'il le peut, la géométrie deviendra pour lui un réel contenu.

Le même raisonnement s'applique à la mécanique analytique et en général à toutes les sciences logico-déductives.

Albert Einstein.
Etudes scientifiques

ESPRIT DE FINESSE
ESPRIT DE GEOMETRIE

Pascal,

Princes, principes : choses premières.

Principes : « la géométrie comprend un grand nombre de principes » selon Pascal. Pourtant, depuis Euclide, la géométrie serait plutôt une science fondée sur un nombre minimum de principes : des définitions, 5 postulats et quelques notions communes.

1. On peut avoir le sens droit, & n'aller pas également à toutes choses ; car il y en a qui l'ayant droit dans un certain ordre de choses, s'éblouissent dans les autres. Les uns tirent bien les consequences de peu de principes. Les autres tirent bien les consequences des choses où il y a beaucoup de principes. Par exemple, les uns comprennent bien les effets de l'eau, en quoi il y a peu de principes, mais dont les consequences sont si fines, qu'il n'y a qu'une grande penetration qui puisse y aller ; & ceux-là ne seroient peut-être pas grans Geometres, parceque la geometrie comprend un grand nombre de principes ; & qu'une nature d'esprit peut être telle, qu'elle puisse bien penetrer peu de principes jusqu'au fond, & qu'elle ne puisse penetrer les choses où il y a beaucoup de principes.

Il y a donc deux sortes d'esprits, l'un de penetrer vivement & profondement les consequences des principes; & c'est-là l'esprit de justesse : l'autre de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre, & c'est-là l'esprit de geometrie. L'un est force & droiture d'esprit, l'autre est étendue d'esprit. Or l'un peut être sans l'autre, l'esprit pouvant être fort & étroit, & pouvant être aussi étendu & foible.

Il y a beaucoup de difference entre l'esprit de geometrie & l'esprit de finesse. En l'un les principes sont palpables, mais éloignés de l'usage commun, de-sorte qu'on a peine à tourner la tête de ce côté-là, manque d'habitude : mais pour peu qu'on s'y tourne, on voit les principes à plein ;

N

XXXI. & il faudroit avoir tout-à-fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échapent.

Mais dans l'esprit de finesse les principes sont dans l'usage commun, & devant les yeux de tout le monde. On n'a que faire de tourner la tête, ni de se faire violence. Il n'est question que d'avoir bonne vûe: mais il faut l'avoir bonne ; car les principes en sont si déliés & en si grand nombre, qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un principe mene à l'erreur ; ainsi il faut avoir la vûe bien nette, pour voir tous les principes; & ensuite l'esprit juste, pour ne pas raisonner faussement sur des principes connus.

Tous les Geometres seroient donc fins, s'ils avoient la vûe bonne; car ils ne raisonnent pas faux sur des principes qu'ils connoissent ; & les esprits fins seroient Geometres, s'ils pouvoient plier leur vûe vers les principes inaccoutumés de geometrie.

Ce qui fait donc que certains esprits fins ne sont pas Geometres, c'est qu'ils ne peuvent du-tout se tourner vers les principes de geometrie: mais ce qui fait que des Geometres ne sont pas fins, c'est qu'ils ne voient pas ce qui est devant eux, & qu'étant accoutumés aux principes nets & grossiers de geometrie, & à ne raisonner qu'après avoir bien vu & manié leurs principes, ils se perdent dans les choses de finesse où les principes ne se laissent pas ainsi manier. On les voit à peine ; on les sent plutôt qu'on ne les voit ; on a des peines infinies à les faire sentir à ceux qui ne les ſentent pas d'eux-mêmes ; ce ſont choſes tellement délicates & ſi nombreuſes, qu'il XXXI. faut un ſens bien délicat & bien net pour les ſentir, & ſans pouvoir le plus ſouvent les démontrer par ordre comme en geometrie, parcequ'on n'en poſſede pas ainſi les principes, & que ce ſeroit une choſe infinie de l'entreprendre. Il faut tout-d'un-coup voir la choſe d'un ſeul regard, & non par progrès de raiſonnement, au-moins juſqu'à un certain degré. Et ainſi il eſt rare que les Geometres ſoient fins, & que les fins ſoient Geometres, à cauſe que les Geometres veulent traiter geometriquement les choſes fines, & ſe rendent ridicules, voulant commencer par les définitions, & enſuite par les principes ; ce qui n'eſt pas la maniere d'agir en cette ſorte de raiſonnement. Ce n'eſt pas que l'eſprit ne le faſſe, mais il le fait tacitement, naturellement & ſans art ; car l'expreſſion en paſſe tous les hommes, & le ſentiment n'en appartient qu'à peu.

Et les eſprits fins au-contraire ayant ainſi accoutumé de juger d'une ſeule vûe, ſont ſi étonnés quand on leur preſente des propoſitions où ils ne comprennent rien, & où pour entrer il faut paſſer par des définitions & des principes ſteriles, & qu'ils n'ont point accoutumé de voir ainſi en détail, qu'ils s'en rebutent & s'en dégoûtent. Mais les eſprits faux ne ſont jamais ni fins ni Geometres.

Les Geometres qui ne ſont que Geometres, ont donc l'eſprit droit ; mais pourvû qu'on leur explique bien toutes ces choſes

par définitions & par principes ; autrement XXXI. ils ſont faux & inſupportables ; car ils ne ſont droits que ſur les principes bien éclaircis. Et les fins qui ne ſont que fins, ne peuvent avoir la patience de deſcendre juſqu'aux premiers principes des choſes ſpeculatives & d'imagination, qu'ils n'ont jamais vûes dans le monde & dans l'uſage.

LA GEOMETRIE ET L'EXPERIENCE

Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule les propriétés des objets réels ?

A cette question il faut, à mon avis, répondre de la façon suivante : pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.

La parfaite clarté sur ce sujet n'a pu devenir bien commun que grâce à cette tendance en mathématique, qui est connue sous le nom d'axiomatique. Le progrès réalisé par cette dernière consiste en ceci que la partie logique et formelle est soigneusement séparée du contenu objectif ou intuitif. D'après l'axiomatique, la partie logique et formelle constitue seule l'objet de la mathématique, mais non pas le contenu intuitif ou autre qui lui est associé.

Examinons de ce point de vue un axiome quelconque de la géométrie, par exemple le suivant : par deux points de l'espace on peut toujours tracer une ligne droite, et l'on n'en peut tracer qu'une seule. Comment cet axiome doit-il être interprété dans le sens ancien et comment dans le sens moderne ?

Interprétation ancienne. - Chacun sait ce qu'est une droite et ce qu'est un point. Que cette connaissance provienne de la faculté de l'esprit humain ou de l'expérience, de la coopération de toutes les deux ou d'ailleurs, le mathématicien n'est pas obligé d'en décider ; il abandonne cette décision au philosophe. Fondé sur cette connaissance, qui est donnée avant toute mathématique, l'axiome susnommé (comme tous les autres axiomes) est évident, c'est-à-dire qu'il est l'expression d'une partie de cette connaissance *a priori*.

Interprétation moderne. - La géométrie traite d'objets qui sont désignés par les termes de *point*, *droite*, etc. Une connaissance quelconque ou intuition de ces objets n'est pas supposée ; la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes, dont celui mentionné plus haut est un exemple, qui doivent être également conçus comme purement formels, c'est-à-dire dépourvus de tout contenu intuitif ou accessible à l'expérience. Ces axiomes sont des créations libres de l'esprit humain. Toutes les autres propositions géométriques sont des déductions logiques des axiomes (qui doivent être conçus seulement au point de vue nominaliste). Ce sont les axiomes qui définissent en premier lieu les objets dont traite la géométrie.

....

Mais il est d'autre part certain que la mathématique en général et la géométrie en particulier doivent leur existence à notre besoin de savoir quelque chose sur le comportement des objets réels. Le terme de géométrie, qui signifie mesure des terrains, le prouve déjà. Car la mesure du terrain traite des positions relatives possibles de certains corps de la nature, c'est-à-dire de parties du corps terrestre, de cordeaux, de jalons, etc.

Einstein 1921

(Extrait de : Mathématiques au fil des âges, page 287)

EPISTEMOLOGIE

Commençons par la définition de l'épistémologie extraite du dictionnaire de sémiotique de Courtès : « L'épistémologie est l'analyse des axiomes, des hypothèses et des procédures, voire des résultats qui spécifient une science donnée ; elle se donne, en effet, comme objectif d'examiner l'organisation et le fonctionnement des approches scientifiques et d'en apprécier la valeur .... Toute théorie repose sur un nombre plus ou moins grand de concepts non définis qui sont à verser dans ce qu'on appelle l'inventaire épistémologique. Elle doit tout de même viser à réduire au maximum le nombre de ces concepts ».

Avouons que nous sommes au coeur du débat géométrique, première science rédigée de façon axiomatique, doit-on le rappeler.
Courtès donne aussi une version très synthétique de cette définition :

EPISTEME : Attitude socioculturelle d'un groupe vis-à-vis de ses propres signes.
Par sa concision et sa précision, cette définition mérite une longue méditation.

A) Psychogenèse et histoire des sciences - Piaget et Garcia.

La préface , écrite par B. Inhelder, se termine par : « Dans l'histoire de la géométrie, Garcia distingue trois étapes : a) la géométrie de la pensée grecque jusqu'au XVIIIè siècle ; b) la géométrie projective de Poncelet et Chasles, et c) la conception globale de la géométrie introduite par Klein. La géométrie descriptive de Descartes et Fermat, et le calcul différentiel et intégral fournissent des instruments assurant la transition de a) à b), et la théorie des groupes la transition de b) à c). Les similitudes entre de tels progrès constatés à travers les siècles et les représentations spatiales et géométriques du jeune enfant, qui vont des intuitions topologiques à la construction de systèmes de référence abstraits en passant par l'élaboration des notions projectives, posent des problèmes féconds à une épistémologie constructiviste ».
L'épistémologie génétique créée par Piaget distingue 4 stades principaux :

1) Le stade sensori-moteur (0 à 2 ans)
2) Le stade préopératoire (2 à 6 ans)
3) Le stade des opérations concrètes (7 à 10 ans)
4) Le stade des opérations formelles (11 à 12 ans)

Dans le chapitre 4 de leur livre, les auteurs montrent par contre que la structuration de l'espace géométrique chez l'enfant se fait en trois stades successifs. Piaget a enseigné pendant 10 ans l'histoire de la pensée scientifique et pour ce qui nous intéresse, les 3 stades dégagés par Piaget et Garcia - intrafigural, interfigural et transfigural - suivent chronologiquement 3 étapes importantes de la construction du savoir mathématique.

CHAPITRE IV

LA PSYCHOGENESE
DES STRUCTURES GEOMETRIQUES

« Le mode de construction propre à l'espace présente deux caractères spécifiques. En premier lieu, il existe un espace des objets et une géométrie du sujet.... »

1) LE STADE INTRAFIGURAL (avant 7 ans)

Le jeune perçoit et se représente à l'intérieur de la figure, du dessin, de l'objet observé. Il dessinera une cheminée penchée, perpendiculairement au toit d'une maison, et non pas verticale. Piaget précise : « A ces relations intrafigurales, nous pouvons rattacher celles qui résultent d'une comparaison entre les propriétés internes de deux ou plusieurs figures, ce qui est bien différent de l'interfigural en tant que position des figures dans un espace englobant dont la structuration est alors nécessaire ».
Remarque importante : La géométrie d'Euclide est une géométrie intrafigurale y compris les cas d'égalités des triangles qui résultent de la comparaison de propriétés internes de deux figures.

2) LE STADE INTERFIGURAL (7 à 8 ans)

Le jeune se repère par rapport à un espace englobant la figure.
Piaget précise : « Ils comprennent d'emblée la nécessité de deux mesures conjointes pour fixer la position du point ». (page 135)
Piaget continue : « A passer aux directions, il est clair que le tracé d'une horizontale ou d'une verticale par le sujet exige des références interfigurales, en opposition avec les perpendiculaires quelconques dont il a été question plus haut ». (cheminée ou liquide dans un bocal)

Le jeune atteint ici la notion de repère dégagée par Descartes avec ses deux directions privilégiées bien différente de la notion d'angle droit tracé au hasard dans le plan. Selon ses auteurs, ce repérage se fait vers 7 ou 8 ans. Dès cet âge, un enfant peut situer un objet (un point ?) dans le plan par **2 mesures (abscisse et ordonnée).**
Piaget et Garcia précisent : « Tout changement de forme d'une figure est dû à des déplacements de parties et tout déplacement peut se traduire en relations interfigurales puisqu'il s'agit de comparer des positions initiale et finale avec leurs références respectives ».
Précision : Une transformation unique agissant sur un objet relève du stade interfigural par mesures des positions initiale et finale de l'objet. La géométrie des transformations des collèges relève du stade interfigural tant qu'on ne compose pas deux transformations (en 3ème un peu).

3) LE STADE TRANSFIGURAL (11 à 12 ans)

Nous venons de dire qu'il ne s'agit pas seulement de transformer une figure. Pour atteindre ce $3^{ème}$ stade, le jeune doit comprendre la composition des transformations mais aussi il doit savoir « revenir en arrière » avec la transformation réciproque et prendre ainsi conscience de la notion de groupe de transformations. Bien entendu, ces travaux datent de l'époque du structuralisme. Page 143, Piaget écrit : « Le problème que soulève ces premiers faits et que nous retrouvons à propos de tous les autres est de comprendre pourquoi ces compositions de mouvements sont si tardives ».

RESUME

STADE	GEOMETRIE	EXEMPLE	ESPACE
INTRAFIGURAL 0 à 7 ans	Géométrie d'Euclide Propriétés des figures	Angle droit Cas d'égalités des triangles	Espace limité à la figure
INTERFIGURAL 7 à 8 ans	Géométrie analytique Transformation unique	Repère cartésien Homothétie	Compréhension de tout l'espace
TRANSFIGURAL 11 à 12 ans	Géométrie des transformations	Groupe des translations	Structuration de tout l'espace

Dans leur conclusion, Piaget et Garcia notent : « La question historique se pose, en effet, de la manière paradoxale suivante. D'une part, la géométrie grecque demeure, faute d'algèbre, de nature intrafigurale et subordonnée à ses sources exogènes : d'où l'absence de toute « transformation » ..... [sauf] cas particuliers sans généralisations méthodologiques.

La subordination de l'espace à l'algèbre date de Viète et elle est restée entièrement locale (transformations en trigonométrie sphérique). D'autre part, malgré la mise en correspondance systématique de l'algèbre et de la géométrie qu'inaugurait l'oeuvre de Descartes, il a fallu attendre cent quatre-vingt-cinq ans entre celle-ci et le *Traité* de Poncelet : la question est ainsi de trouver l'explication de la longueur de cette période interfigurale, donc de près de deux siècles, qu'il a fallu pour en arriver au début des transformations géométriques, alors que l'algèbre est précisément la science des transformations et que, dès le XVIIé siècle, elle était appliquée à la géométrie. Finalement, c'est avec Lie et Klein ... que le primat des transformations s'impose et subordonne l'ensemble des (et non plus de « la ») géométries à des systèmes algébriques ».

APERCU HISTORIQUE

SUR L'ORIGINE ET LE DEVELOPPEMENT

DES METHODES EN GEOMETRIE

PARTICULIEREMENT

DE CELLES QUI SE RAPPORTENT A LA GEOMETRIE MODERNE
PAR M.CHASLES,

Les pages qui suivent sont extraites de la réédition par l'IREM de Lille de l'Aperçu historique de Michel Chasles. On notera que la première édition en 1837 fut retardée de 2 ans par la découverte des ouvrages hindous de Brahmagupta. Par contre (2e époque) la civilisation arabe n'a pas les faveurs de Chasles et l'invention de l'algèbre est attribuée à Viète ! La dernière phrase de cette 2e époque : « Alliance intime entre l'Algèbre et la Géométrie »...« clef universelle des mathématiques » a un caractère visionnaire quand on connait l'importance actuelle de la géométrie algébrique.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR

Cet ouvrage a été conçu à l'occasion d'une question proposée par l'Académie de Bruxelles. Il se réduisait alors aux deux Mémoires qui le terminent, adressés à l'Académie en décembre 1829, et précédés d'une simple introduction très restreinte. Lorsque l'Académie eut ordonné l'impression de ce travail, je me proposai d'en étendre l'introduction et d'y joindre même, sous le titre de Notes, quelques résultats de recherches qui rentraient dans le sujet. Mais je différai d'abord de donner suite à ce projet : puis les recherches historiques proprement dites, où se présentaient certaines questions obscures que je n'avais pas prévues, retardèrent l'envoi du manuscrit, que l'Académie, et l'insistance amicale de son illustre et bien regretté Secrétaire perpétuel, M. Ad. Quetelet, me faisaient un devoir de terminer. L'impression commença en 1835, d'abord sans entraves, et assez rapidement, mais fut bientôt ralentie, particulièrement par l'étude des ouvrages indous de Brahmegupta, dont on n'avait pas encore signalé le sujet réel et l'importance spéciale pour la partie géométrique. Enfin le volume parut en 1837.

Paris, 20 mai 1875.

HISTOIRE DE LA GEOMETRIE

CHAPITRE PREMIER

PREMIERE EPOQUE

§ 1. La géométrie prit naissance chez les Chaldéens et les Egyptiens.

Thalès qui, né en Phénicie, alla s'instruire en Egypte et vint ensuite s'établir à Milet, y fonda l'école ionnienne, d'où sont sorties les sectes des philosophes de la Grèce, et où commencèrent les premiers progrès de la Géométrie.

Pythagore, né à Samos, disciple de Thalès, qui, comme lui, avait voyagé en Egypte, puis dans les Indes, vint se retirer en Italie, et y fonda son école, beaucoup plus célèbre que celle d'où elle dérivait. Ce fut principalement à Pythagore, qui incorpora la Géométrie dans sa philosophie, et à ses disciples que cette science dut ses premières découvertes. Les principales furent la théorie de l'*incommensurabilité* de certaines lignes, comme la diagonale du carré comparée au côté ; et la théorie des *corps réguliers*. Ces premiers pas dans la science de l'étendue n'offrirent, du reste, que quelques propositions élémentaires, relatives à la ligne droite et au cercle. Les plus remarquables sont le théorème du *carré de l'hypoténuse* d'un triangle rectangle, dont la découverte coûta, dit l'histoire, ou la fable, une hécatombe à Pythagore ; et la propriété qu'ont le cercle et la sphère d'être des *maxima* parmi les figures de même périmètre ou de même surface: propositions qui offrent le premier germe de la doctrine des *isopérimètres*.

§ 2. La Géométrie fut ainsi restreinte jusqu'à la fondation de l'école platonicienne, époque de ses grands progrès.

Platon, comme les sages de la Grèce qui l'avaient précédé, alla s'instruire dans les mathématiques chez les prêtres égyptiens ; puis en Italie auprès des pythagoriciens.

De retour à Athènes, ce chef du Lycée introduisit dans la Géométrie la *méthode analytique*, les *sections coniques* et la doctrine des *lieux géométriques*. Découvertes mémorables qui firent de la Géométrie, pour ainsi dire, une science nouvelle, d'un ordre plus élevé que la Géométrie élémentaire cultivée jusque-là, et que les disciples de Platon appelèrent Géométrie transcendante.

La doctrine des lieux géométriques fut appliquée, dès ce temps, d'une manière très savante, aux fameux problèmes de la *duplication du cube, des deux moyennes proportionnelles* et de la *trisection de l'angle*.

CHAPITRE II
DEUXIEME EPOQUE

§ 9. L'état de stagnation où languirent les lettres, chez les Arabes et les autres nations, après la destruction du Musée d'Alexandrie, dura près de mille ans ; et ce ne fut que vers le milieu du XVè siècle que la Géométrie, suivant le mouvement général des sciences, reprit faveur.

Ses progrès furent lents d'abord : mais néanmoins les conceptions des géomètres ne tardèrent point à prendre un caractère de généralité et d'abstraction qu'elles n'avaient point encore eu jusqu'alors. Chaque méthode, en effet, ne comportait rien de général, et se bornait à la question particulière qui y avait donné lieu : chaque courbe connue, et le nombre en était très restreint, avait été étudiée isolément, par des moyens qui lui était tout spéciaux, sans que ses propriétés, et les procédés qui y avaient conduit, servissent à découvrir les propriétés d'une autre courbe, telles que les coniques et la spirale d'Archimède, par des considérations profondes, mais essentiellement différentes entre elles, et qui ne donnaient aucune ouverture pour la solution du même problème appliqué à d'autres courbes.

La méthode d'exhaustion, qui reposait sur une idée mère tout à fait générale, n'ôta point à la Géométrie son caractère d'étroitesse et de spécialité, parce que cette conception y manquant de moyens généraux d'application, devenait, dans chaque cas particulier, une question nouvelle, qui ne trouvait de ressources que dans les propriétés individuelles de la figure à laquelle on l'appliquait. Cette méthode néanmoins fait beaucoup d'honneur aux géomètres de l'Antiquité, parce qu'elle est le germe d'une suite de méthodes de quadratures qui depuis ont fait, dans tous les temps, l'objet de travaux des plus célèbres mathématiciens, et dont le but final, et nous pouvons dire le triomphe, fut l'invention du calcul infinitésimal.

Ces considérations, qui tendent à faire ressortir la différence du spécial au général, du concret à l'abstrait, qui distingue la Géométrie jusqu'au XVè siècle, de la Géométrie postérieure, nous portent à regarder cette première époque comme formant les préliminaires de la science.

Le caractère de généralité et d'abstraction, que prit ensuite la Géométrie, s'est prononcé de plus en plus dans les époques suivantes, et établit aujourd'hui une différence immense entre la Géométrie moderne et celle des Anciens.

§ 2. Les principales découvertes de la Géométrie, à sa renaissance, sont dûes à Viète et à Kepler, qui sont, à plusieurs titres, les premiers auteurs de notre supériorité sur les Anciens.

Viète, après avoir complété la méthode analytique de Platon, par l'invention de l'Algèbre, ou *logistique spécieuse*, destinée à mettre cette méthode en pratique dans la science des nombres, eut encore la gloire d'introduire cet instrument admirable dans la science de l'étendue, et d'initier les géomètres, par une construction graphique des équations du second et du troisième degré, à l'art de représenter géométriquement les résultats de l'Algèbre ; premiers pas vers une alliance plus intime entre l'Algèbre et la Géométrie, qui devait conduire aux grandes découvertes de Descartes, et devenir la clef universelle des mathématiques.

CHAPITRE III
TROISIEME EPOQUE

§ 1. Le plus signalé service rendu à la Géométrie est du à Descartes. Ce philosophe, par son inappréciable conception de l'Application de l'Algèbre à la théorie des courbes, se créa les moyens de franchir les obstacles qui, jusqu'alors, avaient arrêté les plus grands géomètres, et changea véritablement la face des sciences mathématiques.

Cette doctrine de Descartes, dont aucun germe ne s'est trouvé dans les écrits des géomètres anciens, et la seule peut-être dont on puisse dire, comme Montesquieu de son *Esprit des lois*, PROLEM SINE MATRE CREATAM, cette doctrine, dis-je, eut pour effet de donner à la Géométrie le caractère d'abstraction et d'universalité qui la distingue essentiellement de la Géométrie ancienne. Les méthodes créées par Cavalieri, Fermat, Roberval, Grégoire de St-Vincent, portaient aussi, dans leurs principes métaphysiques, le cachet de cette généralité ; mais ne l'avaient point dans leurs applications. La conception de Descartes, seule, procurait les moyens d'appliquer ces méthodes d'une manière uniforme et générale ; elle était l'introduction nécessaire aux nouveaux calculs de Leibniz et de Newton, qui dès lors n'ont point tardé à surgir de ces belles méthodes.

La Géométrie de Descartes, outre ce caractère éminent d'universalité, se distingue encore de la Géométrie ancienne sous son rapport particulier, qui mérite d'être remarqué ; c'est qu'elle établit, par une seule formule, des propriétés générales de familles entières de courbes ; de sorte que l'on ne saurait découvrir par cette voie quelque propriété d'une courbe, qu'elle ne fasse aussitôt connaître des propriétés semblables ou analogues dans une infinité d'autres lignes. Jusque-là, on n'avait étudié que des propriétés particulières de quelques courbes, prises une à une, et toujours par des moyens différents, qui n'établissaient aucune liaison entre différentes courbes.

Aussi la Géométrie prit dès lors un essor rapide, et ses progrès s'étendirent sur toutes les autres sciences qui sont de son domaine. L'Algèbre elle-même en reçut d'utiles secours ; ses opérations symboliques devinrent plus faciles à saisir, son importance s'accrut ; et ces deux branches principales de nos connaissances positives marchèrent d'un pas également assuré.

Quant à l'Algèbre, nous nous bornerons à dire que l'un des premiers et des plus grands avantages que la Géométrie lui procura, fut l'interprétation et l'usage des racines négatives, que jusque-là on regardait comme insignifiantes, et qui avaient si fort embarassé les anciens analystes.

La méthode des coefficients indéterminés, que Descartes créa dans sa Géométrie, et dont il fit un si heureux usage pour la construction des lieux solides, est aussi l'une des découvertes les plus ingénieuses et les plus fécondes de l'Analyse.

CHAPITRE IV
QUATRIEME EPOQUE

§ 1. Cinquante ans après que Descartes avait mis au jour sa *Géométrie*, une autre grande conception préparée par Fermat et Barrow, le *Calcul infinitésimal* de Leibniz et de Newton, prit naissance (en 1684 et 1687).

Cette sublime invention, qui remplaçait avec un avantage immense les méthodes de Cavalieri, de Roberval, de Fermat, de Grégoire de Saint-Vincent, pour les dimensions des figures et les questions de *maxima et minima*, s'appliqua aussi, avec une facilité si prodigieuse, aux grandes questions des phénomènes de la nature, qu'elle devint presque exclusivement l'objet des méditations des plus célèbres géomètres. Dès lors, la Géométrie ancienne et les belles méthodes de Desargues et de Pascal, de La Hire et de Le Poivre, pour l'étude des coniques, furent négligées.

L'Analyse de Descartes, seule des grandes productions de notre deuxième et de notre troisième Epoque, survécut à cet abandon général. C'est qu'elle était le véritable fondement des doctrines de Leibniz et de Newton, qui allaient envahir tout le domaine des sciences mathématiques.

Cependant, quelques géomètres, dans les premiers temps, et à leur tête Huygens, quoiqu'il sut apprécier toutes les ressources de *l'Analyse infinitésimale*, Mac-Laurin, profond commentateur du *Traité des fluxions* de Newton, et Newton lui-même, furent fidèles à la méthode des Anciens, et surent pénétrer dans les mystères de la plus profonde Géométrie, pour résoudre, avec son seul secours, les plus hautes questions des sciences physico-mathématiques.

Quelques autres géomètres ensuite, tels que Stewart, Lambert, dignes admirateurs de ces grands hommes, marchèrent sur leurs traces et continuèrent leurs savantes méthodes. Mais enfin l'attrait de la nouveauté et les puissantes ressources que présentait l'Analyse infinitésimale, tournèrent tous les esprits vers d'autres idées et d'autres spéculations. De sorte que, si l'on peut dire parfois que la Géométrie d'Huygens et de Newton, après avoir posé les véritables fondements de nos connaissances positives, devenait insuffisante pour continuer son oeuvre, il est juste de convenir aussi que ces disciples lui ont manqué ; car je ne sache pas que, depuis trois quart de siècle, on ait fait de nouvelles applications de cette méthode ; et c'est aujourd'hui par tradition et seulement sur parole, que, légèrement peut-être, on parle de son impuissance et des limites qui en restreignent pour toujours les usages.

§ 2. Nous ne pouvons entreprendre ici d'analyser tous les travaux des grands géomètres que nous avons nominés ; cette tâche n'entre point dans notre cadre et serait au-dessus de nos forces. Nous ne devons citer que ceux de ces travaux qui se rapportent à cette partie de la science de l'étendue, que nous avons appelé *Géométrie des formes et des situations* ; qui prend son origine dans *l'Analyse géométrique* des Anciens ; qui, pendant deux mille ans, s'est exercé sur l'inépuisable théorie des sections coniques, et à laquelle enfin Descartes a soumis, d'un trait de plume, l'innombrable famille des courbes géométriques.

CHAPITRE V
CINQUIEME EPOQUE

§ 1. Dans ces derniers temps, après un repos de près d'un siècle, la Géométrie pure s'enrichit d'une doctrine nouvelle, la *Géométrie descriptive*, complément nécessaire de la *Géométrie analytique* de Descartes, et qui, comme elle, devait avoir des résultats immenses, et marquer une ère nouvelle dans l'histoire de la Géométrie.

Cette science est due au génie créateur de Monge.

Elle embrasse deux objets :

Le premier est de représenter sur une aire plane tous les corps d'une forme déterminée, et de transformer ainsi, en constructions planes, les opérations graphiques qu'il serait impossible d'exécuter dans l'espace.

Le second est de déduire, de cette représentation des corps, leurs rapports mathématiques, résultant de leur formes et de leurs positions respectives.

Cette belle création, qui fut d'abord destinée à la Géométrie pratique et aux arts qui en dépendent, en constitua réellement la théorie générale, puisqu'elle réduisit à un petit nombre de principes abstraits et invariables, et à des constructions faciles et toujours certaines, toutes les opérations géométriques qui peuvent se présenter dans la Coupe des pierres, la Charpente, la Perspective, la Fortification, la Gnomonique, etc, et qui auparavant ne s'exécutaient que par des procédés incohérents entre eux, incertains, et souvent peu rigoureux.

§ 2. Mais, outre l'importance due à cette première destination, qui donnait un caractère de rationalité et de précision à tous les arts de construction, la Géométrie descriptive en eut une autre très grande, due aux services réels qu'elle rendit à la Géométrie rationnelle, sous plusieurs rapports, et aux sciences mathématiques en général.

La Géométrie descriptive, en effet, qui n'est que la tradition graphique de la Géométrie générale et rationnelle, servit de flambeau dans les recherches et dans l'appréciation des résultats de la Géométrie analytique ; et, par la nature de ses opérations, qui ont pour but d'établir une correspondance complète et sûre entre des figures effectivement tracées sur un plan et des corps fictifs dans l'espace, elle familiarisa avec les formes de ces corps, les fit concevoir idéalement, avec exactitude et promptitude, et doubla de la sorte nos moyens d'investigation dans la science de l'étendue.

La Géométrie devint ainsi en état de répandre plus aisément sa généralité et son évidence intuitive sur la mécanique et sur les sciences physico-mathématiques.

Cette influence utile de la Géométrie descriptive s'étendit naturellement aussi sur notre style et notre langage en mathématiques, qu'elle rendit plus aisés et plus lucides, en les affranchissant de cette complication de figures dont l'usage distrait de l'attention que l'on doit au fond des idées, et entrave l'imagination et la parole.

La Géométrie descriptive, en un mot, fut propre à fortifier et à développer notre puissance de conception ; à donner plus de netteté et de sûreté à notre jugement ; de précision et de clarté à notre langage ; et, sous ce premier rapport, elle fut infiniment utile aux sciences mathématiques en général.

Algèbre linéaire
et géométrie élémentaire

Jean Dieudonné, 1964

Extraits de l'introduction ... toujours d'actualité :

« Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'algèbre linéaire élémentaire qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès-sciences au moment où il entre dans les classes du 1[er] cycle de l'Enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminés par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement *actuel* donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître comme le *prolongement naturel* de ce qu'il a déjà appris.

Le fait qu'à l'heure présente il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement. Il y a déjà plusieurs années que l'on s'est inquiété un peu partout du divorce grandissant entre les méthodes et l'esprit de l'enseignement des mathématiques, dans les lycées d'une part, dans les universités de l'autre.

....

Les mathématiciens des siècles passés et plus encore les philosophes ou essayistes qui ont voulu parler de mathématiques, n'ont que trop bien réussi à ancrer dans l'esprit du public « cultivé » l'image d'une science immuable et figée, trônant sur un empyrée de « vérités absolues » transmises religieusement de génération en génération comme une révélation divine que l'on ne saurait se permettre de changer d'un iota, et ignorant les tâtonnements et les incertitudes des pauvres sciences dites « expérimentales ». Il y a plus de cent ans que les mathématiciens professionnels sont revenus d'une aussi naïve arrogance, mais il faudra sans doute encore bien des années d'efforts pour venir à bout de ces « clichés », rien n'étant plus difficile que de modifier des « idées reçues ».

....

L'Enseignement secondaire, qui par sa nature même est fort éloigné du niveau où se font les recherches mathématiques contemporaines, était tranquillement resté, avec quelques additions superficielles, ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et Descartes, et, dans les classes terminales, un peu de Calcul infinitésimal. Il n'est donc pas surprenant que le fossé entre cet enseignement et celui que l'on donne dès l'entrée à l'Université n'ait cessé de s'élargir. Qu'on veuille bien, par exemple, considérer sans idées préconçues les sujets suivants, qui tiennent encore une place considérable dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

I) Les constructions « par la règle et le compas ».

II) Les propriétés des « figures » traditionnelles, telles que le triangle, les « quadrilatères » variés, les cercles et « systèmes de cercles », les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de « géomètres » spécialisés et de professeurs en quête de problèmes d'examen.

III) La kyrielle des « formules trigonométriques » et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes « résolutions » de « problèmes » relatifs aux triangles, et ce par des « calculs logarithmiques », s'il vous plaît !
Que l'on ouvre maintenant au hasard un livre traitant des matières enseignées à partir de l'entrée à l'université : on constatera aussitôt qu'il n'y est jamais même fait allusion à toutes ces belles choses.

....

On pourra objecter que l'enseignement des universités est très abstrait.........
........Il est bien vrai aussi que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :
1°) les astronomes
2°) les arpenteurs
3°) les auteurs de manuels de trigonométrie.

....

Et puis, doit-on considérer que l'enseignement secondaire est destiné à accumuler toute une série de connaissances particulières, plus ou moins hétéroclites, en vue de préparer à toutes les professions imaginables ; ou bien au contraire, faut-il essayer avant tout d'apprendre aux enfants à penser, sur un petit nombre de notions générales bien
choisies, et laisser les techniques spéciales se ranger plus tard sans effort dans une « tête bien faite ».

....

Une autre caractéristique de la méthode mathématique contemporaine (sans doute trop connue pour qu'il faille beaucoup insister) est qu'elle permet de regrouper suivant leurs affinités profondes des théories d'aspect superficiel souvent fort différent. Or, plus sans doute que nulle part ailleurs, le cloisonnage des disciplines a atteint dans l'enseignement traditionnel un degré dont le ridicule peut difficilement être dépassé. On enseigne en effet peu ou prou, dans les années terminales des lycées et même jusqu'il y a peu de temps dans les classes préparatoires des grandes Ecoles (ainsi que dans beaucoup d'Universités étrangères) **toute une impressionnante liste de « sciences » :**

la « Géométrie pure »,
la « Géométrie analytique »,
la « Trigonométrie »,
la « Géométrie projective »,
la « Géométrie conforme »,
la « Géométrie non-euclidienne »,
la « Théorie des nombres complexes ».

Non seulement toutes ces disciplines sont-elles en général **présentées isolément**, mais encore est-il fréquent de voir chacune s'efforcer d'ignorer totalement les autres et se targuer de son « indépendance » : les grotesques.......... »

Vous aurez remarqué que cette« impressionnante liste de sciences » est en fait une impressionnante liste de ... géométries ! Y compris la trigonométrie, géométrie du triangle, et la « Théorie des nombres complexes » dont nous reparlerons plus loin.

Un mathématicien aux prises avec le siècle.[1]
Laurent Schwartz

« Je suis mathématicien. Les mathématiques ont rempli ma vie : une passion pour la recherche et l'enseignement tour à tour comme professeur à l'Université et à l'Ecole polytechnique. J'ai en même temps réfléchi au rôle des mathématiques, de la recherche et de l'enseignement, dans ma vie et dans celle des autres, aux processus mentaux de la recherche, et je me suis consacré pendant des décennies aux réformes bien nécessaires de l'Université et des grandes écoles.

Mais j'ai eu bien d'autres activités, parfois au point de démolir ma recherche. J'ai consacré une grande partie de mon temps à lutter pour les opprimés, pour les droits de l'homme et les droits des peuples, d'abord comme trotskiste, puis en dehors de tout parti. Il était normal de ma part de vouloir décrire ces activités, comme témoignage pour l'avenir. »

Laurent Schwartz est le créateur des distributions, généralisation de la notion de fonction. Elles lui valurent la médaille Fields en 1950. Il raconte sa vie d'homme dans un livre qu'il vient de publier (février 1997). En voici quelques extraits.

Séduction de la géométrie.

....

J'entrai donc en mathématiques élémentaires. Pour la première fois de ma scolarité, je rencontrai un professeur de mathématiques enthousiasmant, Julien. Il était légèrement porté sur la boisson, mais nul n'y trouvait à redire. C'est avec joie et simplicité qu'il nous expliquait les plus merveilleux problèmes de la géométrie. Je découvris un univers mathématique inconnu auparavant, entrevu seulement dans la géométrie de quatrième. En l'espace de deux ou trois semaines, je décidai de devenir mathématicien. Je me rends compte *a posteriori* que cette tendance devait toujours avoir existé en moi, mais, bridée jusque-là par la médiocrité de mes professeurs, elle explosait soudain. La valeur d'un professeur pour l'avenir de ses élèves m'a, pour cette raison, toujours paru déterminante.

....

Simplement, les mathématiques étaient belles - d'une beauté extraordinaire -, et la géométrie pourvue d'une esthétique inégalable. Je reste partisan de l'enseigner largement au lycée où un élève ne peut véritablement faire de trouvailles ni en analyse, ni même probablement en arithmétique (encore que ce ne soit pas sûr). Le travail en géométrie, au contraire, constitue une perpétuelle recherche, comparable à celle d'un universitaire mais menée à un niveau moins élevé.................. Les livres de géométrie dont je me nourrissais présentaient une particularité étonnante : la trigonométrie et les coordonnées cartésiennes, qui pourtant faisaient normalement partie du programme officiel de la terminale, en étaient bannies. Il y a généralement deux manières extrêmes de traiter un problème de géométrie : l'une par le calcul algébrique en coordonnées, l'autre sans y recourir, par la géométrie « pure ». Je ne mettais pas mon point d'honneur à n'utiliser que ces deux extrêmes. Pourquoi ne pas utiliser tous les outils dont on dispose ?

....

[1] « Un mathématicien aux prises avec le siècle » Laurent Schwartz, Editions Odile Jacob

Aujourd'hui on apprend les nombres complexes en terminale (ainsi que l'exponentielle et le logarithme, qu'on ne faisait de mon temps qu'en hypotaupe) ; je ne les connaissais pas en terminale, mon avance ne concernait que la géométrie pure. Je ne connaissais pas $z = x + iy$, ni $z = r\,e^{i\theta}$. Hadamard n'étudie qu'à peine, dans ses livres, l'équation du deuxième degré, avec éventuellement deux solutions imaginaires conjuguées ; le nombre i n'existe pas. De toute façon, la bonne définition du complexifié de l'espace réel E par $E + i\,E^{-}$, où E est l'espace affine et E^{-} son espace vectoriel associé, n'était donnée ni dans Hadamard ni dans Guichard, non plus que dans Petersen ou Duport, ni finalement dans la taupe de mon temps car les notions d'espace affine et d'espace vectoriel (de dimensions quelconques) n'existaient pas à cette époque, même à l'université. Je suis sorti de l'Ecole normale avec l'agrégation, sans connaître ces notions, capable d'aborder *l'espace*, mais pas *un espace* de dimension n quelconque. La vie est étrange. En fait, en géométrie, on ne se représente pas de la même manière une droite complexe affine (par exemple pour le théorème de Céva dans un triangle) et le corps des complexes $x + iy$. Quand j'y songe, les points imaginaires de la géométrie sont gris, les points réels noirs, et l'intersection de deux droites imaginaires conjuguées grises est un point réel noir.

....

L'enseignement français actuel a fait l'impasse sur toute la géométrie, essentielle pour les ingénieurs et les physiciens, et devenue une des branches fondamentales des mathématiques modernes. C'est infiniment dommage, pour ne pas dire scandaleux. Par contre, la géométrie des espaces « projectifs-euclidiens » et la conique ombilicale, les faisceaux de coniques ou de quadriques, les théorèmes d'Apollonios et la géométrie grecque sont peut-être devenus obsolètes, comme la géométrie du triangle. J'avoue ne pas savoir. En tout cas, je ne m'en suis plus jamais servi et les ai un peu relégués dans l'oubli, parmi les reliques du passé, au côté du latin et du grec. Non sans quelque nostalgie.

....

L'année [de terminale] s'acheva avec un deuxième accessit de mathématiques au concours général et une mention très bien au baccalauréat..................L'écrit du baccalauréat fut désastreux. J'avais, erreur monumentale, posé dans le problème, pour les côtés et les angles d'un triangle, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \sin A$, au lieu de cos A. Cette étourderie, liée à l'émotion, me valut un zéro au problème ; j'eus 10 à la question de cours.........................[à l'oral] il me nota 39,5 / 40, ce qui me permit de décrocher une mention très bien, malgré l'écrit raté.

....

Ma compréhension de la géométrie comporte une caractéristique peu banale. J'ai mentionné « la vacuité de mon hémisphère droit » et mon incapacité à me repérer dans l'espace. Je ne voyais donc rien à la géométrie dans l'espace, ou à peu près rien, et ne visualisais pas plus une figure formée d'un certain nombre de droites et de cercles dans le plan. Si je la traçais, je pouvais y comprendre quelque chose mais rien ne subsistait dans ma mémoire. Je me basais uniquement sur les propriétés géométriques qui, d'une manière ou d'une autre, peuvent se ramener à des propriétés locales ou simples. Cela permettait de traiter parfaitement tous les problèmes auxquels j'ai fait allusion ici. L'inversion, l'espace projectif, la conique ombilicale, ne nécessitent aucune vision géométrique perfectionnée. Mais c'était une manière quelque peu étrange de faire de la géométrie, et, par la suite, j'ai été de plus en plus perturbé par une absence presque complète de vision des figures.

....

J'avais une énorme mémoire

....

Je ne dépassai jamais les dimensions deux ou trois, et n'était pas sûr qu'il fût rigoureux de parler de l'espace à quatre dimensions. J'interrogeai Julien pour savoir si, de même que l'ellipse était une projection orthogonale d'un cercle, un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe était projection orthogonale d'une sphère dans un espace euclidien à quatre dimensions. Cela lui semblait suspect et il me déconseilla d'utiliser de telles propriétés, ce que l'on me confirma à peu près dans les mêmes termes en spéciales. je ne persévérai pas, des applications du type $x' = ax$, $y' = by$, $z' = cz$, pouvant donner à partir d'une sphère un ellipsoïde quelconque, sans monter en dimension. Mais je reste étonné, en me remémorant ce que j'avais étudié et compris, que les espaces à n dimensions, pour n plus grand que 3, me soient restés étrangers. On n'en parlait dans aucun des livres que j'avais lus, et je ne les ai pas découverts seul. Plus tard, jusqu'à l'Ecole normale comprise, on ne m'en parla jamais, excepté dans le cours de Leray au Collège de France qui mentionnait les espaces de Banach de dimension infinie, mais on ne rencontrait pas ailleurs d'espace euclidien de dimension n au moins égale à 4. C'est bien étrange.

Le contraste entre mon amour pour la géométrie et mon absence presque complète de vision géométrique tient vraiment du mystère.

....

La deuxième partie du livre, « Au soleil de la science » commence par « l'invention des distributions ».

L'invention des distributions eut lieu à Paris, au début de novembre 1944, alors que j'avais encore des papiers d'identité et des cartes d'alimentation au nom illégal de Sélimartin. La découverte, subite, se produisit en une seule nuit. C'est là un phénomène assez fréquent que j'ai vécu plusieurs fois dans ma vie, et que beaucoup de mathématiciens connaissent. Poincaré racontait ainsi qu'il avait découvert l'essentiel de la théorie des fonctions fuchsiennes en montant sur le marchepied d'un tramway. J'ai trouvé un théorème que je cherchais depuis plusieurs semaines cinq minutes avant de me coucher, lors de vacances au Pelvoux. Il est bien évident que le processus n'est pas concevable si l'on n'imagine pas de nombreuses réflexions antérieures restées infructueuses mais emmagasinées dans le cerveau. Un déclic survenant à l'occasion d'une circonstance particulière réunit parfois les chemins ébauchés. Il s'agit là d'un phénomène essentiel pour la découverte. Sans prédécesseurs, sans antécédents, c'est-à-dire, ici, des mathématiciens qui ont trouvé des résultats partiels, il n'y aurait pas non plus de découvertes scientifiques. C'est l'histoire de ces précurseurs et de mes antécédents personnels que je voudrais brièvement retracer ici.

....

SECONDE PARTIE :

LES GEOMETRIES

L'EVOLUTION EN GEOMETRIE : PETITE CHRONOLOGIE

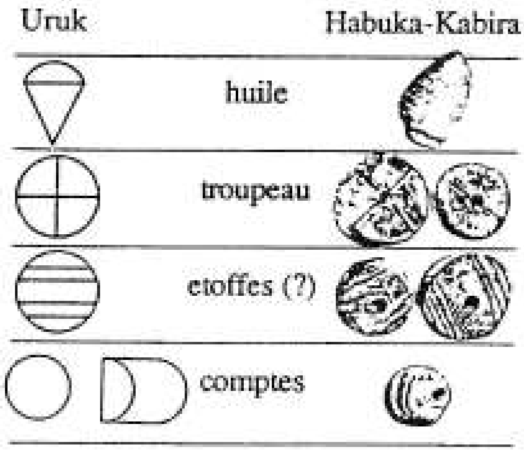
Cette brève chronologie contient aussi quelques références concernant l'arithmétique et l'algèbre, branches maîtresses des mathématiques et impossibles à séparer de la géométrie.

	Ecoles du Moyen-orient
-3000	Comptages : Nombres entiers.
	1) LES GEOMETRIES EGYPTIENNE ET BABYLONIENNE
	Figures planes usuelles, volumes simples.
	Mesures des surfaces et des solides.
-2000	Papyrus de Rhind. Inverses des nombres entiers.
	Ecole grecque
-600	Thalès : « naissance » de la pensée scientifique.
-500	Pythagore : la géométrie pythagoricienne. **GEOMETRIE GRECQUE**
	Eudoxe : la théorie des proportions (Théorème de .... Thalès)
-300	Euclide : les 13 livres des Eléments (Alexandrie)
	2) LA GEOMETRIE D'EUCLIDE
+400	fin de l'école grecque
	Ecoles indienne et arabe
+500	Ecole indienne : **système de position, nombres négatifs**.
+850	Ecole arabe : **L'ALGEBRE**, équations du $2^{ème}$ degré.
+1450	fin de l'école arabe
+1500	Ecole des algébristes « italiens » (Del Ferro, Tartaglia, Cardan.....)
	Nombres complexes
	Ecole européenne
1650	**3) LA GEOMETRIE ANALYTIQUE /Descartes**
1653	**4) LA GEOMETRIE DU HASARD** : Les probabilités.
	5) LA GEOMETRIE PROJECTIVE : Perspective, projection, points à l'infini.
1670	**6) LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE** : Newton, Leibniz.
1770	**LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE** : Monge
1850	**7) LA GEOMETRIE VECTORIELLE**
	8) LES GEOMETRIES NON-EUCLIDIENNES
	D'autres postulats des parallèles.
	9) LA GEOMETRIE EN DIMENSION N : ALGEBRE LINEAIRE
1870	**10) LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS**
	Etudes des transformations géométriques
	Groupe des isométries d'une figure.
	11) LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE
1880	LA THEORIE DES ENSEMBLES
	LES THEORIES DE LA MESURE
1970	**12) LA GEOMETRIE FRACTALE**

1) LES GEOMETRIES EGYPTIENNE ET BABYLONIENNE.

Les premiers mathématiciens furent des comptables. Il y a environ 5000 ans selon nos connaissances actuelles et près du golfe persique. Selon la marchandise à compter ou à mesurer et selon la ville, les calculi diffèrent légèrement.

L'homme et son nombre, Michèle Roux, Irem de Besançon.



Suivant la nature de la transaction les formes des calculi diffèrent. D'après "Habuka-Kabira" "Eine Stadt vor 5000 Jahren"

1) LES NOMBRES ENTIERS.

« Les nombres entiers sont un don de Dieu »
Kummer au 19$^{\text{è}}$ siècle

« L'histoire universelle des chiffres » de Georges Ifrah montre la grande diversité des systèmes d'écriture des nombres. Chaque civilisation a développé son système. Vivre en société impose de disposer d'une méthode de comptage des objets et souvent de pouvoir l'écrire même de façon primitive, à partir de bâtons par exemple.

L'écriture des nombres dans les civilisations de la Méditerranée orientale n'était pas vraiment meilleure que les autres. Effectuer une multiplication ou une division dans les systèmes sumérien, égyptien ou grec n'est guère aisé.

Il faudra attendre 1000 (sic) ans pour que les Indiens créent (vers +500) un bon système d'écriture des nombres et 1000 ans de plus pour qu'il s'impose sur toute la planète. (Seuls quelques villages résistent.....)

Notons enfin que, si la rédaction axiomatique de la géométrie fut réalisée vers -300, la rédaction axiomatique de l'arithmétique date du début du 20$^{\text{è}}$ siècle.... après la construction des nombres réels ! L'usage des axiomes de l'arithmétique reste confidentiel et l'arithmétique - théorie des nombres entiers - a disparu des programmes du secondaire comme du supérieur.

Difficultés pour écrire les nombres, difficultés pour effectuer des opérations, difficultés pour raisonner à partir des seuls nombres, peut-être ces difficultés ont-elles contribué au développement d'une science plus complète.

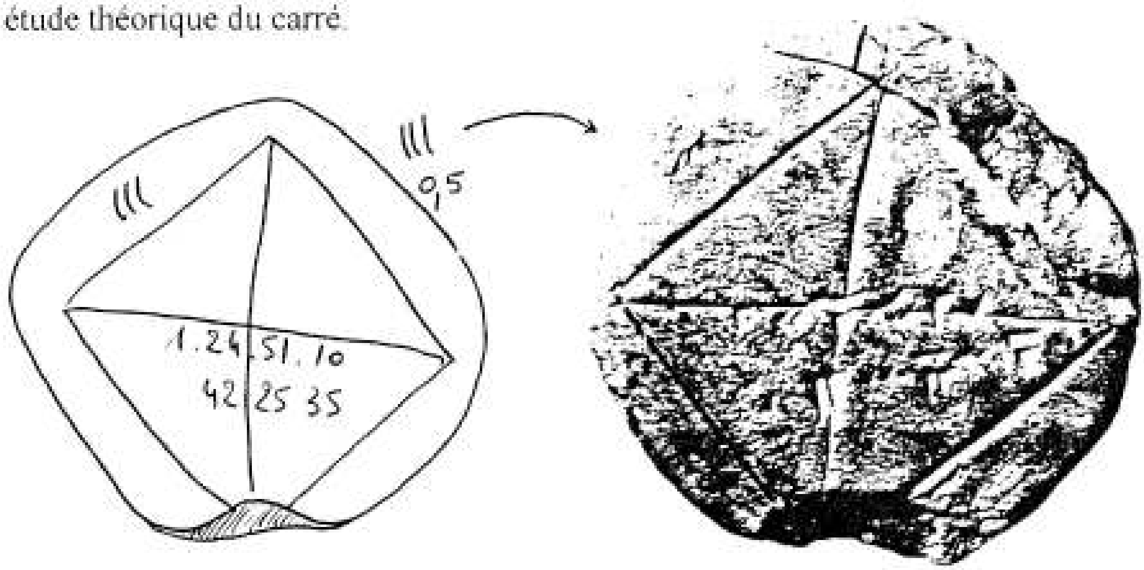
2) LES SYSTEMES DE MESURE.

Au 3^{è} millénaire avant notre ère, les Sumériens et les Babyloniens en Asie, les Egyptiens en Afrique, **créent des « objets » simples** : les figures planes - carré, cercle, triangle, trapèze - et les solides - cylindre, pyramide. Ils apprennent **à mesurer les surfaces et les solides à l'aide des nombres.**

De plus, principe essentiel en construction sur un chantier, les Babyloniens savent qu'un triangle dont les 3 côtés mesurent 3, 4 et 5 unités a un angle droit. Ils savent aussi que le rapport de la mesure du cercle à celle de son diamètre est un nombre fixe voisin de 3. Tous ces résultats sont importants dans une société de constructeurs et sont vérifiables à partir d'expériences simples réalisées à l'aide de ficelles , de sable et de boîtes. (La géométrie et l'expérience ....)

Les Egyptiens, à partir de ces mesures sur des figures du plan, ont évalué l'aire du disque en l'approximant par un octogone. Aujourd'hui nous dirions que cette méthode donne une valeur approchée de $\pi = 3,11$.

Les figures de la géométrie et leurs mesures remontent environ à 2000 ans avant notre ère. En particulier, cette tablette babylonienne témoigne sans ambiguité d'une étude théorique du carré.



Incroyable tablette sur laquelle on trouve, en base 60, la mesure du côté d'un carré, ici 30 soit 0,5 puis la mesure de la diagonale d'un carré de côté 1 soit ici :
1 24 51 10 et enfin la mesure de la diagonale dessinée soit : 0 42 25 35.

D'autres tablettes de la même époque complètent nos renseignements sur les connaissances de nos ancêtres chaldéens, dont des tables de multiplication à l'usage des scribes.

Par exemple :

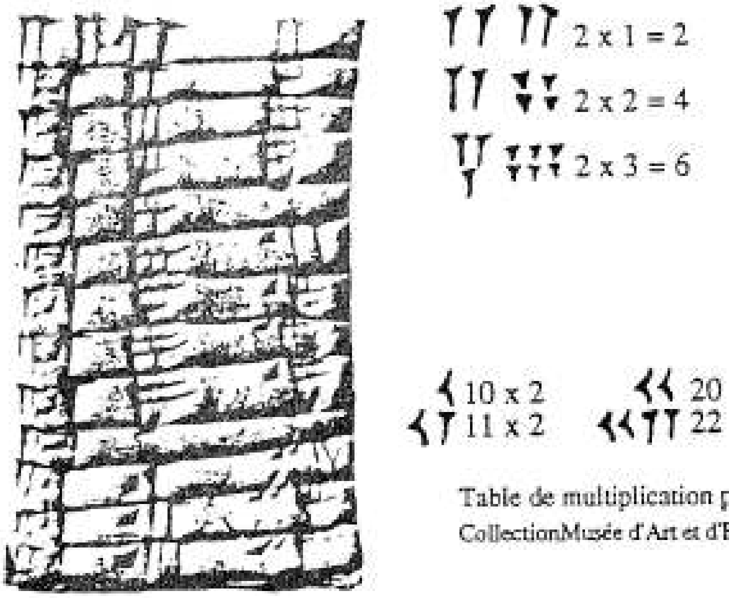
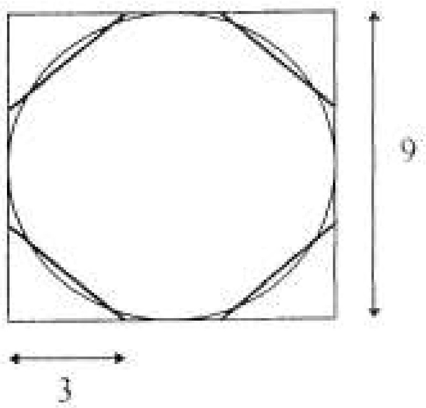


Table de multiplication par 2.
CollectionMusée d'Art et d'Histoire de Genève

Les Egyptiens disposaient d'une bonne évaluation de π en mesurant un carré de 9 unités de côté et un octogone qui visiblement approche fort bien le cercle.



$$A = \pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 81 - 4.\frac{3^2}{2}$$

$$\frac{81}{4}\pi \approx 81 - 18$$

$$\boxed{\pi \approx 63 \times \frac{4}{81} = 3 + \frac{1}{9}}$$

RESUME

LES GEOMETRIES EGYPTIENNE ET BABYLONIENNE.

Rendons aux civilisations sumérienne puis babylonienne d'Asie et égyptienne d'Afrique ce qui leur revient : la CREATION des figures géométriques et la MESURE des surfaces et des solides. La notion de triangle rectangle vient aussi des civilisations d'entre Tigre et Euphrate.

La découverte de la constante π et ses premières évaluations furent faites en Asie et en Afrique.

Enfin, ce système de mesure ne fut jamais remis en question, nous lui devons beaucoup et nous l'utilisons toujours aujourd'hui.

LA GEOMETRIE PYTHAGORICIENNE : L'ECHEC D'UNE GEOMETRIE.

La notion de point, élément sans dimension, n'est pas évidente du tout et sûrement plus délicate à concevoir et définir que celle d'unité de mesure. L'école de Pythagore autour de -500 ou -400 est associée aux débuts de la logique appliquée au système de mesure découvert par Pythagore lors de ses voyages en Asie et en Afrique. Le point semble plutôt être conçu comme un grain de sable, un élément de petite dimension mais de taille non nulle servant ainsi d'unité de mesure. On y revient.

Une ligne ainsi conçue est construite par juxtaposition de points.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Une surface formée de lignes juxtaposées avait une petite épaisseur. En empilant des surfaces on obtenait un solide. Toute cette construction (sic) se déroule à peu près bien autour des nombres entiers et des rapports de nombres entiers. Surtout toutes ces lignes étaient mesurables et même commensurables entre elles jusqu'à ce que la diagonale du carré et le théorème de Pythagore ne viennent mettre leur ...... grain de sable !

On retrouve encore chez Aristote-ou du moins dans les textes que nous lui attribuons-ces points juxtaposés avant qu'Aristote n'abandonne cette géométrie.

On attribue d'ailleurs à Aristote la démonstration par l'absurde de l'incommensurabilité de la diagonale du carré, cette démonstration ayant probablement entraîné la fin de la géométrie pythagoricienne.

Le point sans dimension allait pouvoir faire son entrée et régner sans partage sur la géométrie.

2) LA GEOMETRIE D'EUCLIDE

LES ŒUVRES D'EUCLIDE,

TRADUITES LITTÉRALEMENT

D'APRÈS UN MANUSCRIT GREC TRÈS-ANCIEN, RESTÉ INCONNU JUSQU'À NOS JOURS.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE DÉDIÉ AU ROI.

A PARIS,

Chez C.-F. PATRIS, Imprimeur-Libraire, rue de la Colombe, N° 4, en la Cité.

1819.

Newton se plaignait de « s'être livré aux ouvrages de Descartes et d'autres Algébristes avant d'avoir étudié et médité les Eléments d'Euclide. »

Lagrange considérait que la géométrie était une langue morte depuis Euclide.

Les 13 livres des « Eléments d'Euclide » forment l'ouvrage le plus important de l'histoire des mathématiques. Rédigé par Euclide vers -300 à Alexandrie, cet ouvrage pédagogique (et non de recherche) est la première rédaction axiomatique d'une science: la géométrie.

Son contenu est celui des créations et découvertes mathématiques de la brillante civilisation hellène, les travaux de Thalès, Pythagore, Eudoxe, Aristote. Et bien que nous ne disposions pas de manuscrits de l'époque d'Euclide, loin de là, il n'y a guère de discussion sur les 465 propositions des « Eléments ».

Première science axiomatisée, la géométrie a donné son nom aux mathématiciens jusqu'au 19è siècle. Cependant, peu à peu, les « géomètres » ne comprendront même plus les « Eléments ». Boëce, vers +500, en donnera une édition réduite aux 4 premiers livres, s'arrêtant avant le difficile livre V.

Heureusement, de leur côté, les Arabes traduisirent, utilisèrent puis nous transmirent les « Eléments ». Commençons par voir ce que dit Hoefer, en 1874, sur le cheminement des « Eléments », cheminement qui est celui de la science mathématique au cours des 2300 dernières années.

COMMENTATEURS D'EUCLIDE. — BIBLIOGRAPHIE.

L'histoire des ouvrages d'Euclide est, en partie, l'histoire même de la géométrie depuis le quatrième siècle avant J. C. jusqu'à l'époque de la Renaissance. Euclide eut de nombreux commentateurs. Parmi les plus anciens, on cite Héron, Pappus, Énéas d'Hiérapolis, Théon le jeune d'Alexandrie et Proclus. Théon donna, outre un commentaire important, une nouvelle édition des *Éléments*, avec quelques additions et de légers changements ; c'est lui-même qui nous l'apprend dans son commentaire sur Ptolémée. Parmi ses additions, il signale, dans la dernière proposition du VI^e livre, ce qui est relatif aux secteurs. Le commentaire de Proclus ne va pas au delà du 1er livre des *Éléments*. Il contient des détails fort intéressants pour l'histoire de la géométrie ; malgré sa prolixité, on regrette qu'il n'ait pas été poussé plus loin par son auteur.

Boëce, au cinquième siècle de notre ère, reproduisit, dans son traité de Géométrie, les énoncés et les figures des quatre premiers livres d'Euclide. En affirmant qu'Euclide n'avait fait qu'arranger des propositions découvertes et démontrées par d'autres, il contribua surtout à faire passer Théon pour le principal auteur des *Éléments*. Et il y a même des manuscrits où l'ouvrage entier est donné comme *tiré des conférences de Théon* (ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν). Le livre de Boëce fut le seul traité de géométrie connu en Europe jusqu'au neuvième siècle de notre ère ; le nom même d'*Euclide* y était inconnu. A cette époque, les *Éléments* commençaient à être traduits en arabe sous les khalifes Haroun-al-Rachid et Al-Mansour. Honein-ben-Ishak, mort en 873, en donna une traduction arabe, qui fut plus tard corrigée par l'astronome Thebet-ben-Korrah. Othman de Damas (d'une date incertaine, mais antérieure au treizième siècle) donna une traduction arabe plus complète que les précédentes, d'après un manuscrit grec, qu'il avait trouvé à Rome et qui contenait quarante propositions de plus que les éditions ordinaires. L'astronome et géomètre Nasir-Eddin, qui vivait vers 1260, fit connaître Euclide aux Persans ; son commentaire fut imprimé en arabe à Rome en 1594. Athelard de Bath, qui vivait vers 1130, fut le premier Européen qui traduisit Euclide de l'arabe en latin. Il avait probablement trouvé en Espagne la traduction arabe qui lui tenait lieu de l'original grec. Sa traduction latine, après avoir longtemps circulé en manuscrit, parut imprimée sous le nom de *Campanus*, célèbre commentateur d'Euclide.

Jusqu'au seizième siècle, on confondait Euclide le géomètre avec Euclide fondateur de l'école philosophique de Mégare, quoique celui-ci eût vécu un siècle avant le premier. Cette confusion, née d'un passage de Plutarque, avait été partagée par Boëce. Une autre erreur avait cours : on croyait qu'Euclide n'avait laissé que des définitions, des axiomes et les simples énoncés des propositions dans leur ordre actuel. Les démonstrations, on les attribuait à Théon.

Euclide, rapidement propagé, acquit bientôt une immense popularité : il resta jusqu'au dix-septième siècle l'*auteur élémentaire* par excellence. Son autorité était telle, qu'on eût regardé comme une profanation tout changement apporté à l'ordre établi par lui. On ne croyait pas que, même en réinventant la géométrie, comme le raconte Pascal, on pût trouver un ordre différent de celui qu'avait suivi Euclide.

L'édition *princeps* des *Éléments* d'Euclide parut à Venise, en 1482, in-fol., par les soins d'Erhard Ratholt : c'est la traduction latine d'Athelard avec le commentaire de Campanus. Ce livre, qui ne

porte pas de titre, commence ainsi : *Preclarissimus liber Elementorum Euclidis perspicacissimi in artem geometrie incipit quam felicissime*. L'éditeur fait, dans l'Introduction, un aveu curieux à noter : il déclare que « la difficulté d'imprimer les figures avait jusqu'alors empêché d'imprimer les livres de géométrie ; mais que cet obstacle venait d'être si bien surmonté par de grands artistes, qu'on peut maintenant donner les figures géométriques avec autant de facilité que les caractères imprimés. » Ces figures sont marginales ; à la première vue, elles paraissent gravées sur bois ; mais un examen plus attentif fait reconnaître qu'elles sont gravées sur métal. Cette édition omet 18 propositions sur les 485 que contiennent les quinze livres des *Éléments*, y compris les deux livres d'Hypsiclès ; mais elle en donne 30 qui ne sont pas d'Euclide ; la préface du XIVe livre, qui montre que ce livre n'est pas d'Euclide, est également omise. Les mots *helmuaym* et *helmuariphe*, désignant le *rhombe* et le *trapèze*, font voir que la traduction a été faite sur l'arabe. — La seconde édition, en caractères romains, publiée à Vicence, 1491, in-fol., est la reproduction de l'édition *princeps*. — La troisième édition, publiée en latin et en caractères romains, contient, outre les *Éléments*, les *Phénomènes*, les deux *Optiques* (sous les noms de *Specularia* et de *Perspectiva*), et les *Données*, avec une préface de Marinus ; elle a pour titre : *Euclidis Megariensis, philosophi Platonici, mathematicarum disciplinarum janitoris, Opera, Zamberto Veneto, interprete*. A la fin du volume, on lit : *Impressum Venetiis.... in edibus Joannis Tacuini*, M.D.V.VIII *kalendas novembris*. Zamberti y donne une longue Préface, accompagnée d'une *Vie* d'Euclide, et déclare avoir fait sa traduction sur l'original grec. — La quatrième édition fut publiée à Venise en 1509, in-fol., par Lucas Paciolus, plus connu sous le nom de Lucas di Borgo, sous le titre : *Euclidis Megarensis, philosophi acutissimi, mathematicorum omnium sine controversia principis Opera*. Cette édition ne comprend que les *Éléments* dans la traduction latine d'Athelard. Paciolus cite le commentaire de Campanus et y introduit ses propres additions sous le nom de *Castigator*. Il ouvre le Ve livre par le récit d'une conférence qu'il avait faite sur ce livre dans une église de Venise, le 11 août 1508. — La cinquième édition (traduction libre des *Éléments*) fut préparée par Jacques Lefèvre d'Etaples, et imprimée par Henri Estienne ; Paris, 1516, in-fol. — Ainsi, depuis la découverte de l'imprimerie, on vit, dans un intervalle de trente-cinq ans, paraître cinq éditions in-folio des *Éléments* d'Euclide (traduction latine).

Le texte grec des *Éléments* d'Euclide, avec le commentaire grec de Proclus, fut publié pour la première fois par Simon Gryne (*Grynæus*) ; Bâle, 1533, in-fol. Les éditions grecques et latines que Fabricius et Murchard attribuent à Dasypodius (Conrad *Rauhfuss*) donnent, en grec, seulement l'énoncé des théorèmes. Même remarque pour l'édi-

tion de Scheubel des six premiers livres ; Bâle, 1550, in-fol. L'édition grecque et latine, attribuée au célèbre mathématicien anglais Briggs, et imprimée par William Jones (Londres, 1620), contient, sur la foi du titre, les treize livres des *Éléments*. Mais M. de Morgan s'est assuré que tous les exemplaires connus de cette édition ne donnent que les six premiers livres. — Nous avons déjà mentionné plus haut l'édition, très-estimée, de D. Gregory.

En France, nous avons les *Œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*, par F. Peyrard (Paris, 1814, 3 vol. in-4). Ce manuscrit très-ancien (Peyrard le croyait de la fin du neuvième siècle) avait été tiré de la bibliothèque du Vatican à la suite de la conquête française et transporté dans la Bibliothèque nationale de Paris ; en 1815, il fut restitué à la bibliothèque du Vatican. En tête de l'ouvrage, dédié à Louis XVIII, se trouvent deux rapports favorables présentés au nom de l'Institut ; le premier est signé par Delambre et Prony ; le second, par Lagrange, Legendre et Delambre. Dans le manuscrit, dont Peyrard put profiter jusqu'à la fin de son édition, les *Données* viennent immédiatement après le XIIIe livre et séparent ainsi les livres XIV et XV du reste de l'ouvrage. Peyrard le collationna avec vingt-deux autres manuscrits. Aussi son édition est-elle très-précieuse pour les nombreuses variantes qu'elle donne. — En Allemagne, on estime beaucoup l'édition de F. August (texte grec des treize livres des *Éléments*, revu sur trente-cinq manuscrits) ; Berlin, 1826, in-8, en deux parties. Elle résume les travaux de Grynæus, de Gregory, de Peyrard, et contient des additions de l'éditeur. L'édition donnée par Camerer et Hauber, avec de bonnes notes, des six premiers livres (Berlin, 1824, in-8, grec et latin), est également estimée.

Nous passons sous silence les innombrables éditions du texte latin des *Éléments* spécialement destinées aux écoles, ainsi que les traductions qu'on en a faites dans presque toutes les langues modernes[1].

LE PREMIER LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE

Euclide commence son exposé par les définitions de 35 objets de la géométrie : point, ligne (segment), surface, angle, figure, triangle, carré, quadrilatère, parallèles...

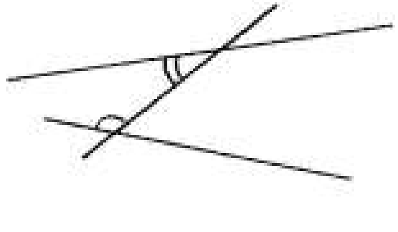
1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou plusieurs limites.
21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.
22. Les quadrilatères, par quatre.
30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.
31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

La présentation euclidienne consistant à préciser d'entrée les objets que l'on va étudier, va marquer profondément les « géomètres » jusqu'à nos jours. Même si ces définitions n'ont pas vraiment la rigueur souhaitée. Comment faire autrement au début d'un exposé ?

Euclide poursuit avec les « Demandes » ou « Postulats ». Ce sont les axiomes propres à la géométrie.

Tout d'abord 3 postulats de construction :
1) Tracer une ligne d'un point quelconque à un autre point.
2) Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3) Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer un cercle.
Euclide poursuit avec 1 postulat d'égalité entre figures :
4) Tous les angles droits sont égaux entre eux
Enfin vient celui qui deviendra le fameux postulat d'Euclide :
5) Si une sécante rencontre 2 autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à 2 droits, ces 2 droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à 2 angles droits.

Le postulat sera reformulé au 18$^{\text{è}}$ siècle : **par un point extérieur à une droite, il passe une seule parallèle à cette droite.**



Peyrard donne une 6è demande :

6) Deux droites ne renferment point d'espace.

Suivent 10 axiomes, ou notions communes, principes de base des mesures et non spécifiques à la géométrie.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.

2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.

3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.

5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.

7. Les grandeurs, qui sont moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.

8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.

9. Le tout est plus grand que la partie.

Cet axiome N°8 de la géométrie répondant à un **principe d'égalité** est une méthode, peut-être **LA grande méthode dont Euclide va user voire abuser pour construire sa géométrie.**

De plus, Euclide, si friand de définitions ne définit pas la notion de grandeur, notion fondamentale de son exposé !

Le livre déroule alors 48 propositions comprenant :

*) Les constructions usuelles à la règle et au compas.

*) Les cas d'égalité des triangles.

*) Les propriétés des droites parallèles.

*) 47 : Théorème de Pythagore.

*) 48 : Réciproque du théorème de Pythagore.

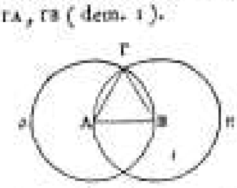
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.

DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).



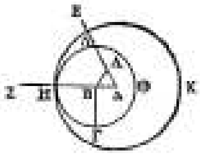
DÉMONSTRATION. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓA est égale à la droite ΓB; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.

CONCLUSION. Donc le triangle ABΓ (déf. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit A le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point A placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.



Menons du point A au point B la droite AB (dem. 1); sur cette droite construisons le triangle équilatéral ΔAB (prop. 1); menons les droites AE, BZ dans la direction de ΔA, ΔB; du centre B et de l'intervalle BΓ, décrivons le cercle ΓΗΘ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔH, décrivons le cercle HKΛ.

Puisque le point B est le centre du cercle ΓΗΘ, BΓ est égal à BH (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle HKΛ, la droite ΔΛ est égale à la droite ΔH; mais ΔA est égal à ΔB; donc le reste AΛ est égal au reste BH (not. 3). Mais on a démontré que BΓ est égal à BH; donc chacune des droites AΛ, BΓ est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc AΛ est égal à BΓ.

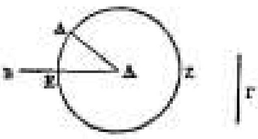
Donc, au point donné A, on a placé une droite AΛ égale à la droite donnée BΓ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de la plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite Γ.

Au point A plaçons une droite AΔ égale à Γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AΔ, décrivons le cercle ΔEZ (dem. 3).



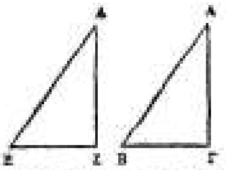
Puisque le point A est le centre du cercle ΔEZ, AE est égal à AΔ; mais Γ est égal à AΔ; donc chacune des droites AE, Γ, est égale à la droite AΔ; donc la droite AE est égale à la droite Γ.

Donc les deux droites inégales AB, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION IV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ; que ces deux triangles aient les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ au côté ΔΖ, et qu'ils aient aussi l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ, que le triangle ΑΒΓ sera égal au triangle ΔΕΖ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ égal à l'angle ΔΖΕ.



Car le triangle ΑΒΓ étant appliqué sur le triangle ΔΕΖ, le point Α étant posé sur le point Δ, et la droite ΑΒ sur la droite ΔΕ, le point Β s'appliquera sur le point Ε, parce que ΑΒ est égal à ΔΕ; mais ΑΒ étant appliqué sur ΔΕ, la droite ΑΓ

s'appliquera sur ΔΖ, parce que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΖ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Ζ, parce que ΑΓ est égal à ΔΖ; mais le point Β s'applique sur le point Ε; donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ; car si le point Β s'appliquant sur le point Ε, et le point Γ sur le point Ζ, la base ΒΓ ne s'appliquait pas sur la base ΕΖ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6); donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ, et lui sera égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

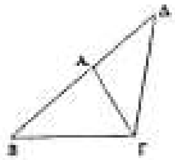
Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

Et la très importante inégalité triangulaire qui apparaît dès la proposition 20.

PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant; les côtés ΒΑ, ΑΓ plus grands que ΒΓ; les côtés ΑΒ, ΒΓ plus grands que ΑΓ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ.



Prolongeons ΒΑ vers Δ, faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ, l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5); donc l'angle ΒΓΔ est plus grand que l'angle ΑΔΓ (not. 9); donc, puisque dans le triangle ΔΓΒ, l'angle ΒΓΔ est plus grand que l'angle ΒΔΓ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand

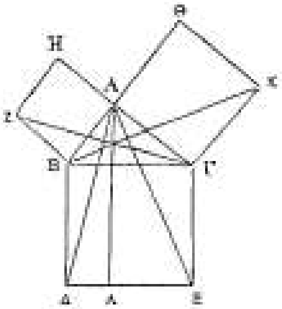
angle (19), le côté ΔΒ est plus grand que le côté ΒΓ; mais ΔΑ est égal à ΑΓ; donc les côtés ΒΑ, ΑΓ sont plus grands que ΒΓ. Nous démontrerons semblablement que les côtés ΑΒ, ΒΓ sont plus grands que ΓΑ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus grands que ΑΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΘΓ; et par le point Α conduisons ΑΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.



Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΒΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΛ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

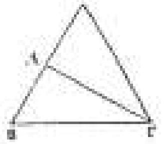
les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le quarré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélograme ΒΛ est égal au quarré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux quarrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le quarré ΒΔΕΓ est décrit avec ΒΓ, et les quarrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le quarré du coté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les triangles, etc.

PROPOSITION XLVIII.

Si le quarré d'un des côtés d'un triangle est égal aux quarrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le quarré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ est droit.

Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.



LIVRE 2

On y trouve, par exemple, les identités remarquables démontrées avec des figures géométriques. Quand les identités remarquables étaient du domaine de la géométrie.

DÉFINITIONS.

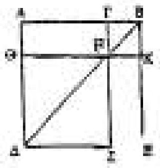
1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprènent un angle droit.

2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

PROPOSITION IV.

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

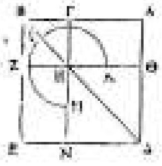
Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ; je dis que le quarré de AB est égal aux quarrés des segments AΓ, ΓB, et à deux fois le rectangle contenu sous AΓ, ΓB.



PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le quarré de la droite entière et le quarré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à deux fois le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au quarré du segment restant.

Qu'une droite AB soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que les quarrés des droites AB, BΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ, et au quarré de ΓA.



Toute la géométrie est là ! Ainsi que ses limites.
Dans un monde compliqué à appréhender :

CREER des objets simples : les figures.
MESURER les éléments de ces figures.
DEDUIRE des propriétés certaines de ces figures.

Par contre, cet esprit de mesure, cette méthode, empêche la création des nombres négatifs et limitera longtemps la géométrie à des mesures d'objets.

Si l'on considère les « Eléments » d'Euclide comme la première théorie de la mesure, n'oublions pas que les théories de la mesure suivantes seront mises au point à la fin du 19^{è} siècle !!

La mesure euclidienne de l'espace physique à 3 dimensions suffira pendant 22 siècles !

LIVRE 3

Euclide applique la méthode géométrique, mise en place dans le livre 1, au cercle. Le livre 3 contient 11 définitions de figures : cercles égaux, tangente,

cercles tangents, etc ...

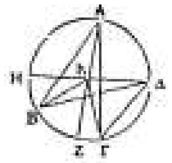
Le livre 3 contient 37 propositions dont :

Proposition 20 : dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

Soit le cercle ABΓ, que l'angle BEΓ soit au centre de ce cercle, que l'angle BAΓ soit à la circonférence, et que ces angles ayent pour base le même arc BΓ; je dis que l'angle BEΓ est double de l'angle BAΓ.



LIVRE 4

La méthode géométrique est cette fois appliquée aux polygones.

7 définitions dont : une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

Seulement 16 propositions, surtout des constructions.

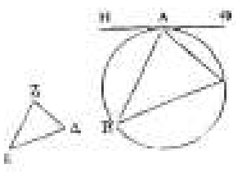
1) Dans un cercle, construire un segment ayant ses extrémités sur le cercle et égal à un segment donné.

2) Dans un cercle, construire un triangle donné et équiangle avec un triangle donné.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ABΓ le cercle donné, et ΔEZ le triangle donné ; il faut dans le cercle ABΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔEZ.



LIVRES 5

Le livre 1 est le livre-clé de l'exposé de la méthode contenant les postulats, les cas d'égalité des triangles et le théorème de Pythagore.

Le livre 5, accompagné du livre 6 , est le second livre- clé.

Ils contiennent la théorie des proportions ou **égalités** de rapports attribuée à Eudoxe.

Notre propos n'est pas d'analyser en profondeur les Eléments d'Euclide mais seulement de préciser le problème.

> Dans les 4 premiers livres, Euclide raisonne sur des segments, des angles, des surfaces i.e.des figures.
>
> Il n'attache pas à chaque élément de ses figures un nombre **mais il raisonne par égalités de figures !**
>
> * Egalité de 2 triangles : **égalité des côtés et des angles**.
>
> * $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ 2 droits dans le triangle par **égalités d'angles.**
>
> * Théorème de Pythagore démontré par construction de triangles superposables ou égaux (axiomes 1, 2 ou 8).
>
> * Identités remarquables du livre 2.

Euclide met en place la mesure des grandeurs (continues) sans nombres, par comparaison des objets géométriques. Il commence par comparer des grandeurs ....comparables au sens de la mesure : commensurables.

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimulsiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

La traduction de la 1ère définition du livre 5 est celle de Peyrard (1809), traduction « officielle » :

« Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande »

A -------------------

E ----

Autre traduction : « on appelle sous-multiple ou partie aliquote (une part) d'une grandeur sa partie la plus petite quand celle-ci (prise comme unité) mesure la partie la plus grande ».

Le propos du livre 5 est de casser l'unité de mesure
L'unité A est trop grande ==> on utilise une unité E qui mesure A
(ce que nous appelons sous-multiple pour les nombres)

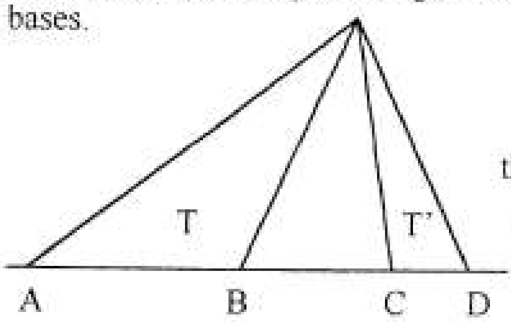
Euclide donne comme exemple les segments mais la méthode s'étend dans son esprit aux surfaces et aux solides.

Il ne définit pas la notion de grandeur. Une fois ces sous-multiples de l'unité mis en place, Euclide peut mesurer des objets plus petits et nous savons qu'Eudoxe et Pythagore pensaient avoir une précision suffisante pour mesurer TOUS les objets.

LIVRE 6 : Théorème de Thalès

La proposition 1 est un lemme technique (en vue de la proposition 2) :

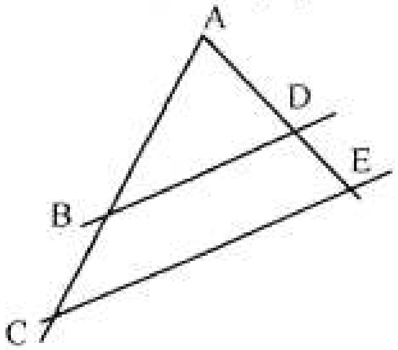
Les triangles et les parallélogrammes de même hauteur sont dans le rapport de leurs bases.



théorème $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{T}{T'} = \dfrac{AB}{CD}$

Proposition 2 : Théorème de Thalès (avec sa réciproque)

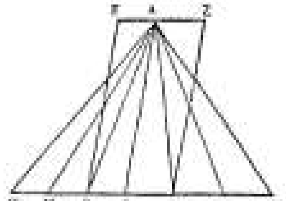
La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles (et réciproquement).



théorème $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{DE}{DA}$

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

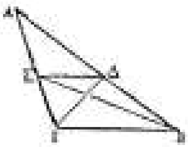


PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔΕ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ; je dis que ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ.

Joignons ΒΕ, ΓΔ.



Le triangle ΒΔΕ sera égal au triangle ΓΔΕ (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔΕ, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔΕ, ΒΓ. Mais ΑΔΕ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ. Mais le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΒΔ est à ΔΑ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Ε sur la droite ΑΒ, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΓΕ est à ΕΑ; donc ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ (11. 5).

Mais que les côtés ΑΒ, ΑΓ du triangle ΑΒΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, Ε, c'est-à-dire que ΒΔ soit à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, et joignons ΔΕ; je dis que ΔΕ est parallèle à ΒΓ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, que ΒΔ est à ΔΑ comme le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ (1. 6), et que ΓΕ est à ΕΑ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ, le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ (11. 5). Donc chacun des triangles ΒΔΕ, ΓΔΕ a la même raison avec le triangle ΑΔΕ. Donc le triangle

LIVRE 7

Le nombre, indépendant (?!) de son objet géométrique, apparaît par une magnifique définition :

Définition 1 : L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une (si !).

Définition 2 : Le nombre est une multitude composée d'unités.

La définition 1 est importante. Comme les autres définitions, elle est critiquable et ne définit pas grand chose en apparence.

Cependant :

1°) Elle montre bien que les mathématiques usent fondamentalement d'une unité (voir les fameuses « unités d'aires » alors que l'on voit plus rarement des « unités de longueurs »).

2°) Elle donne une des bases du raisonnement mathématique. **Il y aurait une unique unité (pléonasme ?) en mathématiques.**

Descartes dira 2000 ans plus tard : « il doit y avoir une science générale qui explique tout ce que l'on peut chercher concernant l'ordre et la **mesure** sans les appliquer à une matière spéciale » et aussi au début de sa « Géométrie », il évoque :

« Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter, ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion.... ».

Très euclidien.

Euclide a dû chercher à unifier complètement son exposé et regretter que l'espace ait 3 dimensions lui imposant 3 unités de grandeurs : unité de longueur, unité d'aire, unité de volume que l'on retrouve dans les définitions de ce même livre 7.

Définition 17 : Le produit de 2 nombres est un nombre plan dont les facteurs sont les côtés.

Définition 18 : Le produit de 3 nombres est un nombre solide dont les facteurs sont les 3 arêtes.

Euclide pousse ici très loin l'identification entre le nombre et l'objet géométrique.

Le produit de plus de 3 nombres n'existe pas dans sa méthode.

Chassez la physique, elle revient au galop !

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

8. Le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre pair.

9. Le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre impair.

10. Le nombre impairement pair est celui qui est mésuré par un nombre impair, multiplié par un nombre pair.

11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre impair.

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

Livre VIII

Deuxième livre sur les nombres. Propriétés des nombres proportionnels, carrés ou cubes.

Proposition XIV

Si un nombre carré mesure un nombre carré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le carré mesurera le carré.

Livre IX

Troisième et dernier livre consacré aux nombres contenant 36 propriétés sur les nombres plans, solides, pairs ou impairs.

Proposition XX

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée des nombres premiers.

Théorème très important de la théorie des nombres. La démonstration est « curieuse » dans sa rédaction.

« Soit A, B, C les nombres premiers que l'on aura proposés, je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, C .»

Et Euclide démontre que AxBxC + 1 (l'unité) est premier. Or Euclide multiplie A, B, et C. Multiplier plus de 3 nombres aurait-il du sens pour lui ?

Livre X

Ce gros livre contient 117 propositions (465 au total) sur les grandeurs commensurables ou incommensurables.

Définitions

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par la même surface.

Toujours ce souci de ne pas mélanger les dimensions. L'homogénéité.

Proposition CXVII

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées, la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Démonstration par l'absurde classique... depuis Euclide sur le pair et l'impair.

Si la diagonale a pour mesure $d = \frac{a}{b}$ irréductible.

Supposons a pair ==> situation impossible.
Supposons a impair ==> situation impossible.

Livre XI

Dans l'espace avec 40 propositions.

Définition 1. Un solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur.

Définitions des plans parallèles, sphère, cône, cylindre....et des cinq solides réguliers de Platon.

Livre XII

D'après Archimède, l'origine de ce livre serait à attribuer à l'école d'Eudoxe. (Collette, page 78)

Proposition 2

Les cercles sont entre-eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Autrement dit, le nombre « π-plan » est une constante;

(Les Indiens ont longtemps utilisé 2 constantes différentes pour le nombre « π-linéaire » de la circonférence et le nombre « π-plan » du disque.)

Livre XIII

Analyse et synthèse.

« Ce que c'est que l'analyse et ce que c'est que la synthèse.

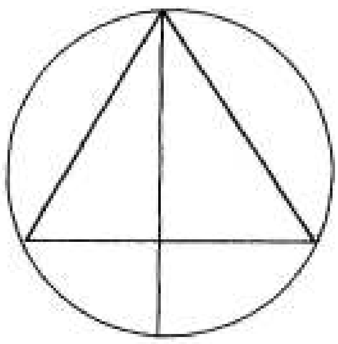
Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé. »

L'analyse n'est pas une branche des mathématiques mais une méthode de recherche allant de l'inconnu demandé vers le connu accordé.

Proposition 12

Si l'on décrit dans un cercle un triangle équilatéral, le carré du côté du triangle sera triple du carré du rayon.



Proposition donnant sin 60°

Les Eléments d'Euclide se poursuivent dans certaines éditions par un Livre XIV écrit probablement au 6è siècle et un Livre XV attribué à l'Alexandrin Hypsiclès (2è siècle avant). (Collette page 78)

UNE CONCLUSION
sur la théorie de la mesure d'Euclide.

13 livres et 465 propositions

On peut critiquer cet ouvrage - aucun livre n'est parfait - mais il donne un exposé clair et définitif de la géométrie.

1) CREATION de figures simples
Euclide définit les figures, ce premier langage de la géométrie dès le début de son exposé et complète ensuite ses définitions à chaque livre.

2) MESURES des éléments de ces figures
Euclide effectue ses mesures directement sur les éléments considérés comme des objets. Il applique à des objets abstraits les règles habituelles des objets concrets.

3) DEDUCTION LOGIQUE des propriétés de ces figures
a) par égalités de figures (livres 1 à 4)
Les célèbres cas d'égalités des triangles
b) par division du segment unité (livre 5)

Les nombres interviennent ensuite comme un caractère des objets géométriques puis sont étudiés à partir du livre 7 en tant que nombres.

La théorie euclidienne de la mesure des grandeurs crée le nombre à partir de la figure.

Et cela est tout à fait logique. On ne peut pas graduer une règle avant de l'avoir créée ! De même, Euclide ne peut créer un nombre avant d'avoir la grandeur que ce nombre mesure.

(L'exposé axiomatique des Naturels ne sera fait que vers 1900 répétons-le !)

En introduisant la logique dans le système de mesure des Egyptiens et des Chaldéens, les Grecs construisent leur savoir scientifique sur la figure dont le nombre est un corollaire.

QUE RETENIR DE CETTE PREMIERE THEORIE DE LA MESURE ?

Dans un exposé, chacun retient ce qu'il veut.

De l'exposé d'Euclide nous retenons souvent aujourd'hui la structure « définitions, axiomes, théorèmes » reprise par tous les livres de mathématiques jusqu'à nos jours.

L'objet n'en était-il pas plutôt de TOUT déduire des objets géométriques dont la simplicité seule permettait ces déductions logiques si chères aux géomètres grecs.

Nous allons voir combien dans les géométries déduites de la géométrie d'Euclide, l'objet géométrique est premier et combien le système de mesure logique mis en place par Euclide a marqué la construction des mathématiques.

Ce système de mesure logique fut mis au point avec des connaissances élaborées sur 3 continents Asie, Afrique et Europe. Il reste unique dans l'histoire de l'Humanité.

Aujourd'hui la géométrie est universelle.

Remarque sur la géométrie et l'expérience :

La géométrie d'Euclide comporte :

un tiers de figure
un tiers de nombre
un tiers de logique
et un tiers de ....

Non, on s'arrête là. Tout est en place.

Un premier résultat : cette géométrie reprend pour ses 2 premiers tiers les travaux et méthodes des « tendeurs de ficelles » égyptiens ou babyloniens.

Aussi, à priori, le propos d'Einstein sur la géométrie et l'expérience surprend. La géométrie d'Euclide est fondée sur l'expérience, sur ces fameuses mesures de terrains effectuées après les crues du Nil ou pour positionner les temples. Si ses objets sont bien des créations de l'esprit, il est moins surprenant qu'ils s'adaptent aux objets de la réalité puisque ces objets et cette méthode furent inventés pour mesurer des étendues.

Notons l'homogénéité, ce problème de dimensions physiques dont Euclide ne parvient pas à se débarrasser.

(à suivre).

NON - CONTRADICTION ET ARITHMETIQUE

La seule contrainte du mathématicien serait la non-contradiction.

Celle-ci a posé problème particulièrement avec les paradoxes générés par la théorie des ensembles mais aussi dès l'Antiquité grecque. Voir les paradoxes de Zénon d'Elée, paradoxe de la flèche d'Achille, etc ....

L'exposé d'Euclide ne comporte pas d'axiomatique des entiers naturels.

Kümmer, au 19$^{\text{è}}$ siècle, disait : « les nombres entiers sont un don de Dieu ».

Dedekind et Cantor, vers 1880, ont construit axiomatiquement les corps **Q** et **R** à partir de l'ensemble **N** considéré comme intuitivement connu.

Remarque 1: Est-il raisonnable, sans risque de contradiction, d'effectuer une construction axiomatique du savoir géométrique ET une construction axiomatique des nombres entiers utilisés en géométrie ?

Euclide semble avoir répondu par la négative à cette question.

L'objet géométrique, par sa mesure, suffisait pour construire le nombre.

Euclide a-t-il perçu le danger d'une contradiction entre un système d'axiomes pour la géométrie et simultanément des axiomes pour les nombres ?

Remarque 2: Le choix est fait d'utiliser les objets géométriques comme objets premiers.

Dès lors, si l'on rapproche :

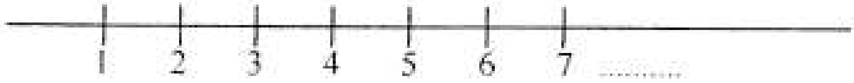
1) le postulat 2 : Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie

2) les définitions du livre 7 :

a) l'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

b) le nombre est une multitude composée d'unités.

On ne doit pas être bien loin d' avoir une construction axiomatique de **N** (ou du moins de **N***).



3. LA GEOMETRIE PROJECTIVE

La mesure de la terre, de l'eau et des étoiles est devenue intelligible grâce à la peinture, et la représentation par la peinture fera encore beaucoup apprendre.

Dürer, 1512

Ses origines remontent au moins à la Renaissance italienne et probablement plus loin. Les peintres du Quattrocento recherchent une représentation scientifique du monde sur leurs tableaux, leurs peintures. Ils recherchent une méthode pour faire entrer l'espace dans un rectangle de toile.

L'usage d'une « boîte noire » et de divers systèmes de visée, grilles ou ficelles permettent aux peintres **une meilleure projection de l'espace sur leurs toiles.**

Citons dans l'école florentine du Quattrocento:

Brunelleschi (1377-1446)
Ghiberti (1378-1455)
Donatello (1386-1466)
Alberti (1404-1472)
Ucello (1397-1475)

La peinture d'Ucello est particulièrement caractéristique de cette recherche d'une perspective dans le but de mieux décrire l'espace.

Della Francesca (1410-1492)
Léonard de Vinci (1452-1519)

Et les traités de perspective de Della Francesca en 1470,
d'Alberti en 1511,
mais aussi d'Albert Dürer en 1525.

L'étape suivante est marquée par le lyonnais Gérard Desargues (1593-1661) - architecte-et son « Brouillon Project ».

Il étudie, en partant des traités d'Apollonius, le passage du « relief » au « plan » et les « événements des rencontres d'un cône avec un plan ».

Toutes ces études se situent dans le domaine des constructions géométriques par projections. Ensuite le dessin technique prend le pas sur l'art avec la géométrie descriptive de Monge vers 1800.

Il faudra attendre le 19è siècle pour parvenir à mieux unifier ces méthodes et principes de représentation de l'espace sur une feuille autour du groupe projectif et de la géométrie projective moderne dont les études se situent cette fois dans un tout autre domaine : **les transformations géométriques structurées par les groupes algébriques.**

On mesurera (sic) l'évolution de la géométrie projective passant des constructions géométriques du 15è siècle aux groupes de transformations du 19è siècle.

Cette évolution mérite de plus amples développements. Nous nous contenterons ici de donner quelques précisions sur les débuts de la géométrie projective.

Le très savant Euclide a défini les fondements de la géométrie. Celui qui l'a bien compris n'a pas besoin de ce qui est écrit ci-après car ceci n'est destiné qu'aux jeunes gens et à ceux qui n'ont personne pour leur dispenser un enseignement conforme à ces fondements.

Dürer, 1525

Présentation

1637 : La « Géométrie » de Descartes.
1639 : Le « Brouillon project » de Desargues.
-300 : La géométrie d'Euclide.

Les deux ouvrages de Descartes et Desargues mettent en place deux prolongements très différents de la géométrie d'Euclide.

Dans sa « Géométrie », Descartes crée la « méthode des coordonnées » créant la géométrie analytique et en même temps la géométrie algébrique.

Dans son « Brouillon project », Desargues théorise pour la première fois la géométrie projective.

En cette première moitié du 17ème siècle, ces 2 nouvelles géométries sont fondées sur l'ancêtre commun : les « Eléments d'Euclide » dont deux caractéristiques importantes sont :

1) La géométrie d'Euclide (-300) est une géométrie locale. L'espace étudié (le plan avant tout) n'est pas repéré dans sa globalité et le raisonnement se fait à l'intérieur d'une figure.

2) La figure « platonicienne » est l'objet idéal et premier.

Mais de part ses origines préhellenes, la géométrie d'Euclide est d'abord une géométrie de mesure des grandeurs (continues ? Livre V).

En France ou en « Italie », il ne s'agit pas d'une « Renaissance » scientifique !

Pour la première fois en ce début de 17ème siècle, les savants commencent à comprendre les livres d'Euclide !

Près de 2000 ans après Euclide, en 3 ans, les géomètres créent 2 extensions de la géométrie euclidienne.

Important : il semble exclu de recréer une mathématique, le seul espoir était bien de comprendre ce que les Anciens avaient inventé. Comme l'a dit Einstein, « ce qui est étonnant, c'est qu'elle ait été inventée une fois ! »

L'axiomatique euclidienne n'est pas remise en cause; la géométrie algébrique et la géométrie projective vont coexister en parallèle (sic!) avant unification au XIXè siècle.

La géométrie algébrique permet de repérer chaque point du plan par 2 mesures. Elle est une géométrie globale du plan ou de l'espace contrairement à la géométrie d'Euclide. De plus, elle intègre l'algèbre, ses équations et ses règles de calcul. Bien plus, elle crée « un transfert d'intuition »(Dieudonné). les objets géométriques sont traduits selon « un dictionnaire » dans le langage des nombres et de l'algèbre. Les problèmes de l'espace sont mis en équations.

La géométrie projective commence par être une géométrie visuelle. A ses débuts, elle ne fait pas intervenir les nombres. Elle **construit des figures** en cherchant à faire entrer scientifiquement l'espace dans un « carré raccourci ». Le problème n'est pas simple! Pourtant la géométrie projective est par là plus conforme à la géométrie d'Euclide en faisant passer la construction de figures en premier, la figure redevenant l'objet premier et idéal.

I) Les peintres

perspectiva = voir au travers

L'énoncé du problème est simple : projeter sur un rectangle de toile l'espace **vu par l'oeil**.

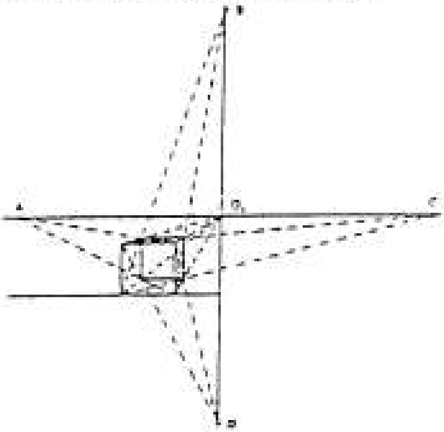
Nous avons conservé plusieurs traités de perspectives dont :

« De Prospectiva Pigendi » de Piero Della Francesca (1475) où il énonce:

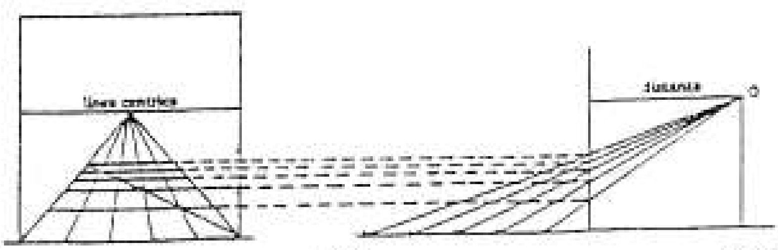
« La perspective est fondée sur cinq choses : la première est l'oeil qui perçoit les objets, la deuxième est l'objet perçu, la troisième est la distance qui les sépare, la quatrième est que tout est perçu au moyen de lignes visuelles droites, la cinquième est la section entre ce qui est vu et l'objet. »

« Le due regole della prospettiva pratica » de Vignola.

On y trouve des représentations de dallages avec les grandes nouveautés que sont **les points de fuite et les points de distance**.



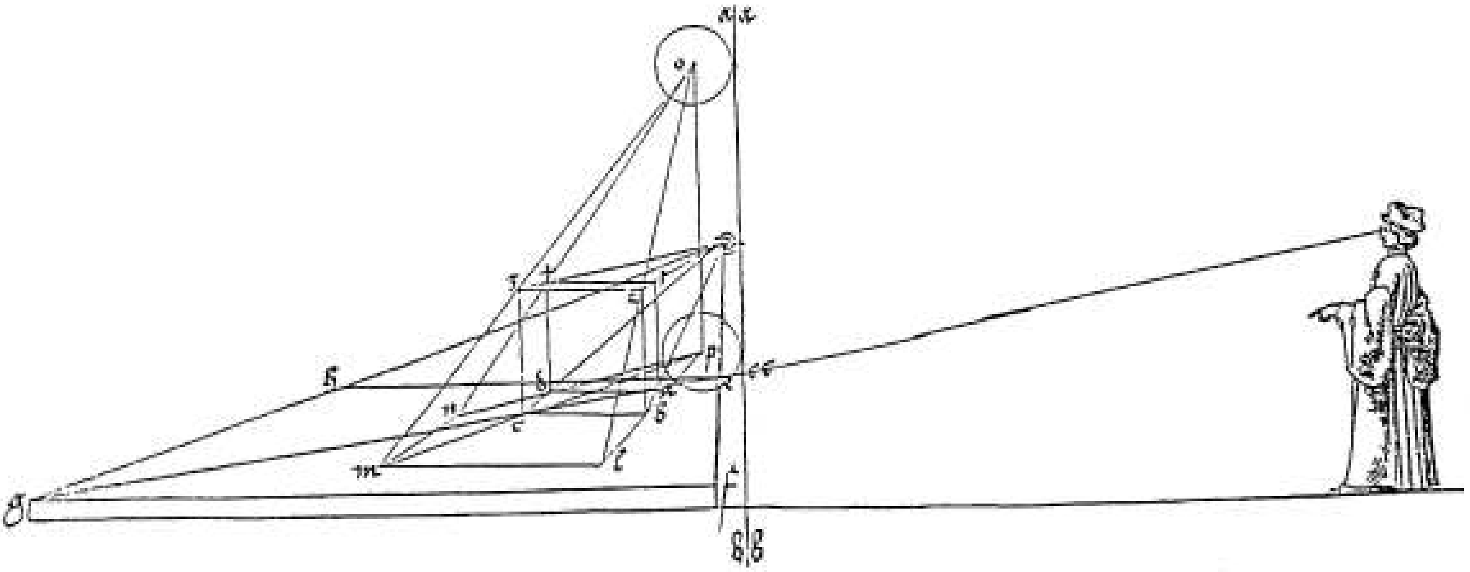
« Trattato della Pittura » d'Alberti donne en1435 « la construction légitime » par une double projection orthogonale sur un plan horizontal et un plan vertical.

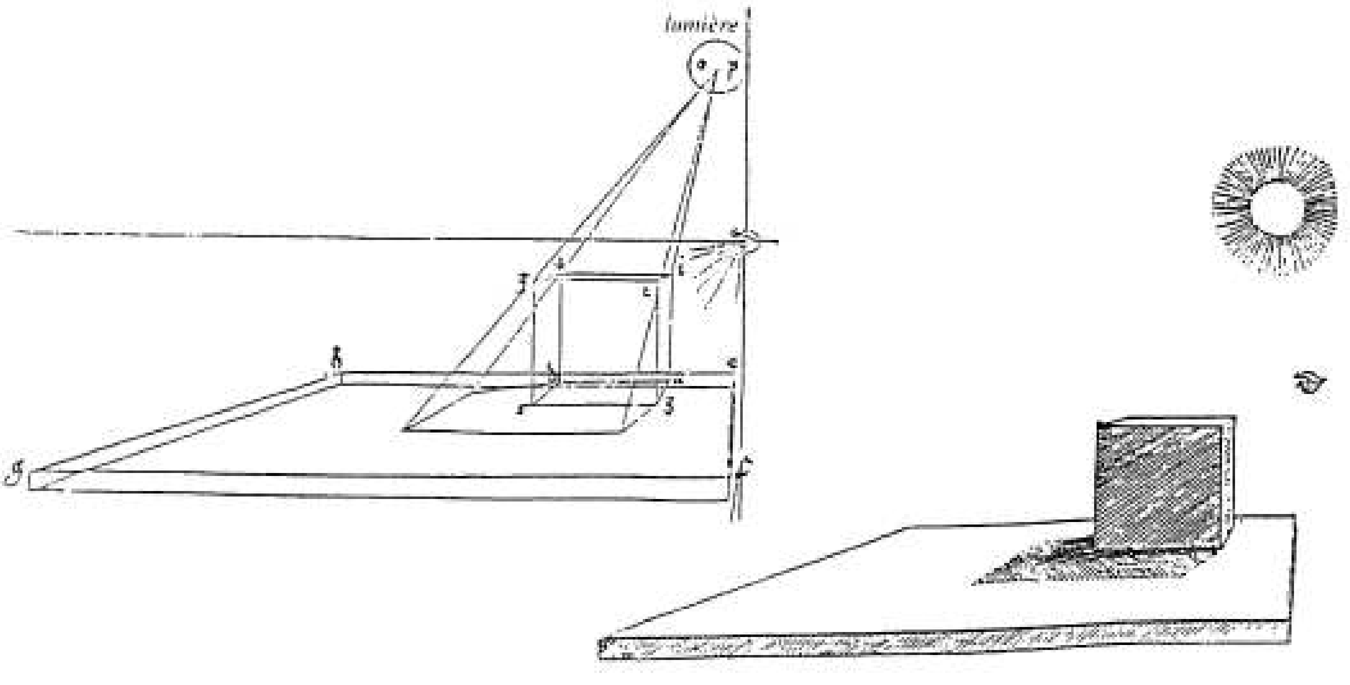


II) Albert DÜRER : Instruction sur la manière de mesurer .... à l'intention de tous les amateurs d'art.

Dürer commence par : « Le très savant Euclide a défini les fondements de la géométrie. Celui qui l'a bien compris n'a pas besoin de ce qui est écrit ci-après.... »

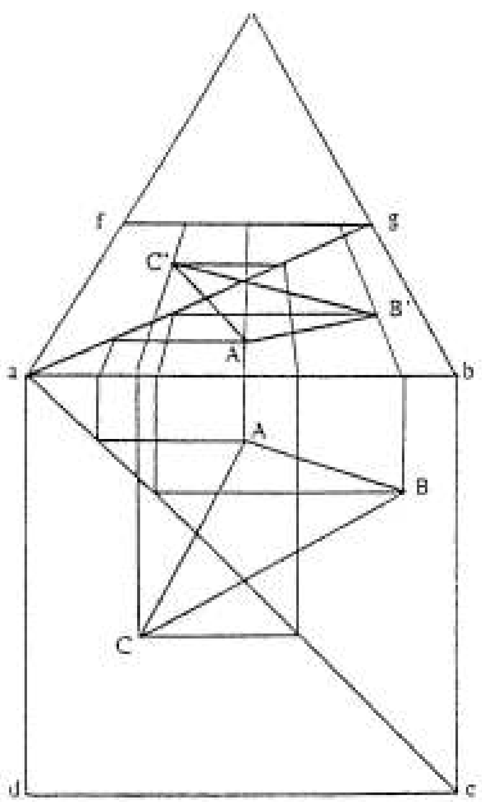
Un peu plus loin, Dürer parle de **grandeur extensive** : « Maintenant, si ce point est étiré de son commencement jusqu'à un autre lieu, alors nous appelons cela une ligne ... » Cette notion de grandeur extensive sera reprise par Kant « l'intuition est une grandeur extensive » et par Grassmann dans sa « Théorie des grandeurs extensives » ancêtre des espaces vectoriels.



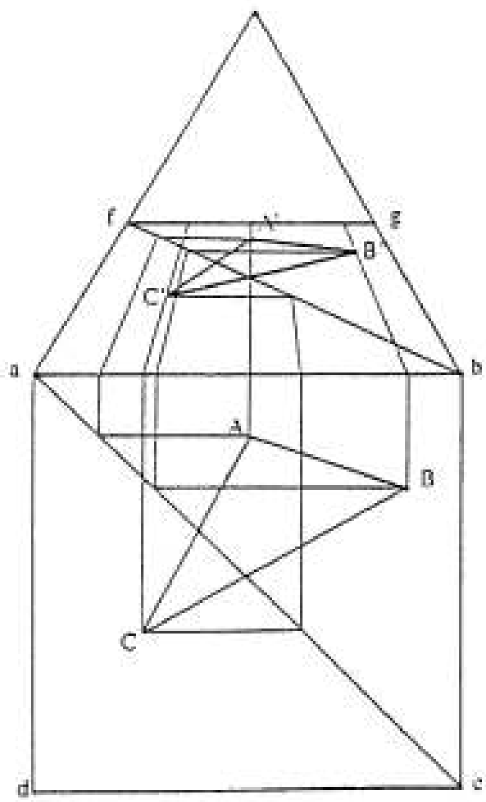


Comparons les méthodes de Piero della Francesca et Dürer pour faire entrer une figure dans un « carré raccourci ».

Nous noterons une « inversion » dans la méthode de Piero della Francesca probablement due à une précédente méthode de Brunelleschi qui utilisait un miroir.
Notons aussi l'utilisation d'un triangle pour exposer la méthode. Le triangle est bien sûr le plus simple des objets.
Notons enfin que nous ne sommes pas loin d'une géométrie qui naîtra presque 3 siècles plus tard : la géométrie descriptive.



Piero della Francesca



Dürer

III) Ubaldo del monte : Les 6 livres de perspective, 1600.
Stevin : Le dessin des ombres, 1605.

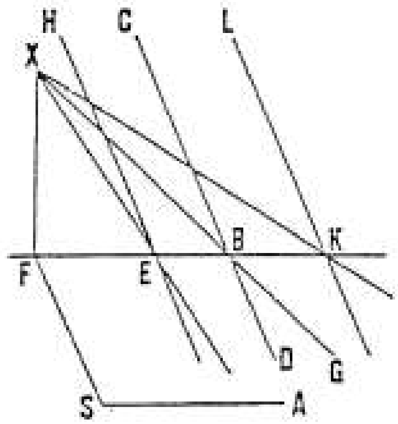
Peu à peu, le problème des constructions légitimes se précise mais dans le pur respect d'Euclide, les propositions doivent être démontrées.

La géométrie projective introduit 2 grandes nouveautés :
1°) les points à l'infini : point de fuite, points de distance.
2°) les transformations : les projections.

La géometrie est d'abord une géométrie de la mesure des grandeurs et la théorie de la géométrie projective s'est faite par des considérations de mesure. Les premières « constructions légitimes » se font par des constructions d'échelles conformes à la théorie des proportions. Plus tard, les démonstrations et rédactions se font dans l'esprit des livres d'Euclide, la référence.

Par exemple, Ubaldo énonce ce théorème, qu'il démontre bien sûr, d'existence du point de fuite.

« Si l'oeil voit des lignes parallèles, qui, prolongées, rencontrent la section, (le tableau) les lignes apparentes dans la section se rencontrent en un point unique, aussi haut que l'oeil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles. »



Ubaldo : SAF : plan support rabattu
FXHCL : plan du tableau
FK : ligne de terre
S : projection de l'oeil
SF : parallèle à EH, BC, KL
FX : hauteur de l'oeil
X : point de fuite

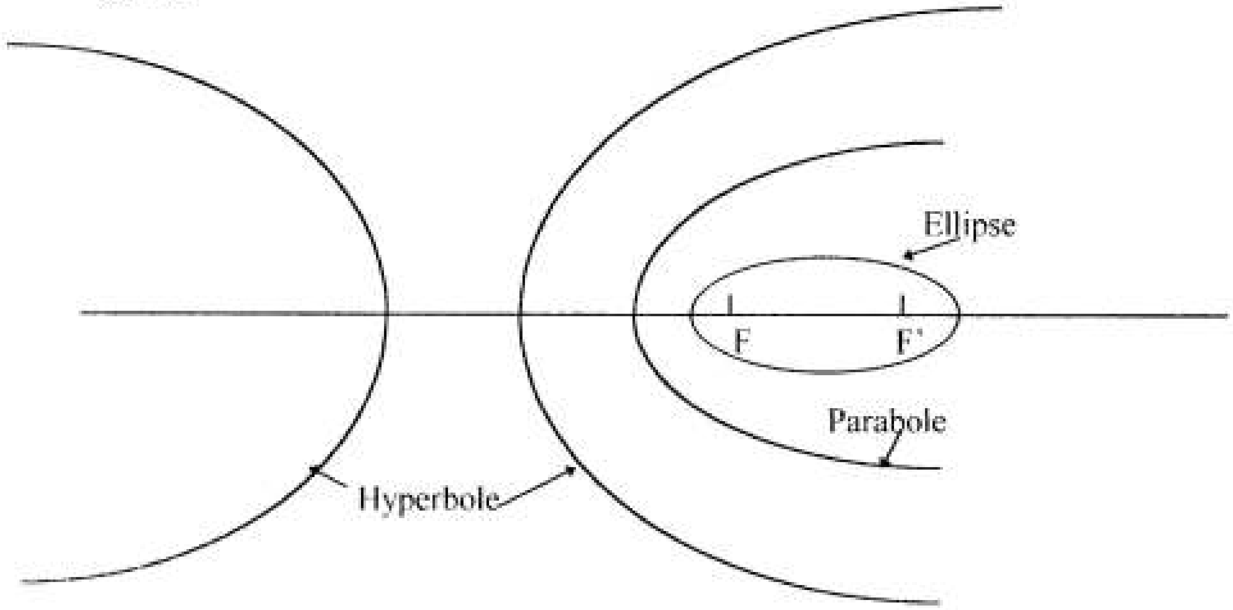
IV) Kepler: point à l'infini et monde fini.

Les problèmes philosophiques liés à l'infini ressurgissent avec les « points à l'infini » dans un monde aristotélicien donc fini !

Kepler exclut qu'une étoile, objet limité en taille, puisse se situer à une distance infinie: « Non, car ce qui est vu est vu par ses extrémités. Ainsi une étoile visible a un pourtour qui la limite ....le diamètre d'une étoile située à distance finie sera lui-même fini, tandis que celui d'un corps dont on rendrait l'éloignement infini grandirait indéfiniment. »

De même l'espace n'a pas lieu (!) d'être infini: « Si l'espace existe du fait de corps qui y ont leurs lieux ... aucun corps susceptible de localisation ne comporte d'infinté en acte; et que les corps de dimension finie ne peuvent exister en nombre infini. Il n'est donc nullement nécessaire que l'espace soit infini du fait des corps qui doivent s'y trouver. »

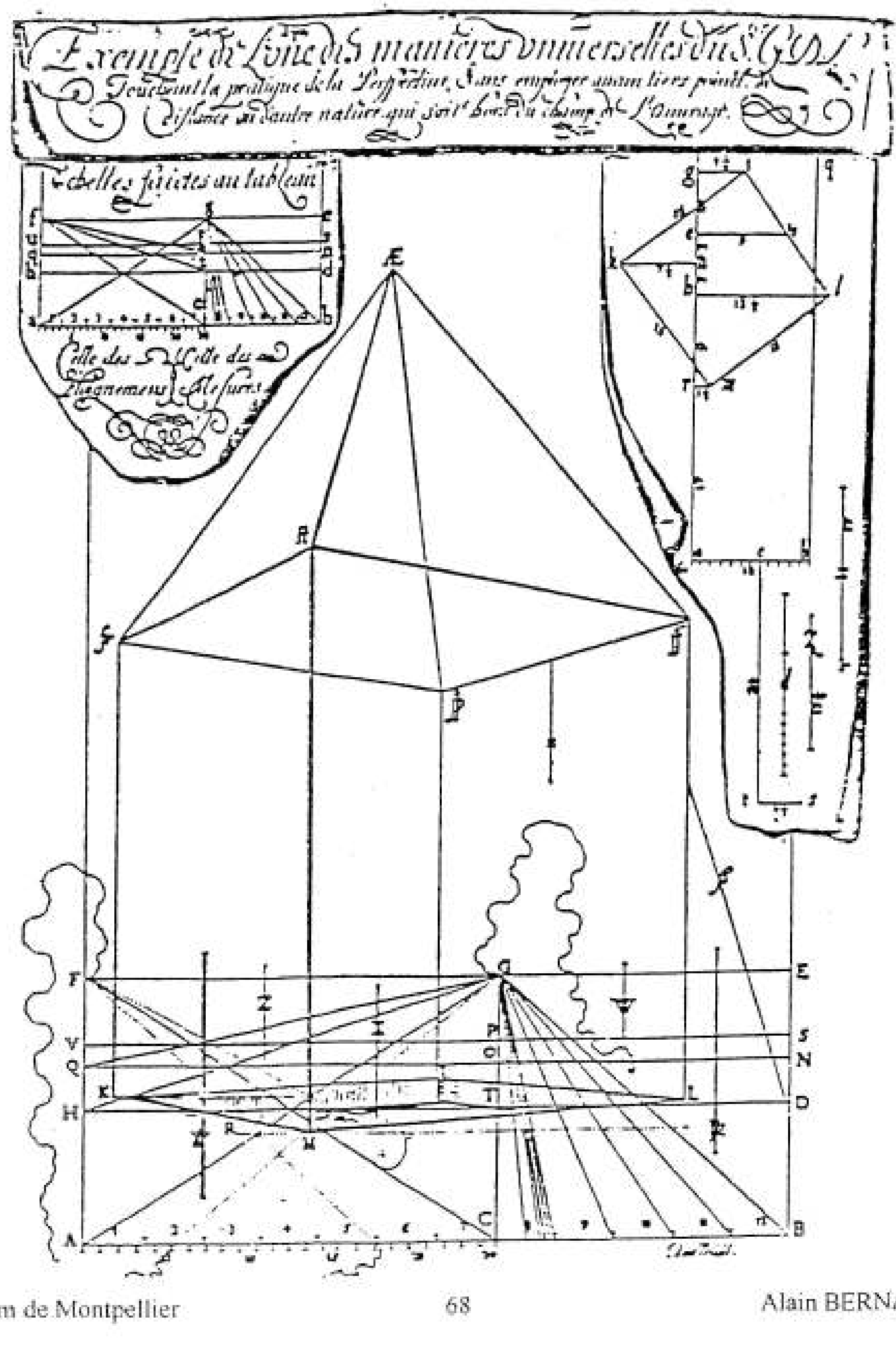
Les coniques qui sont en train de devenir les courbes du second degré en géométrie algébrique, sont les seules courbes connues et étudiées. Kepler imagine une transformation permettant de passer des ellipses à la parabole puis aux hyperboles. Il fixe un foyer F et déplace l'autre foyer F' le long d'une droite.



V) Desargues : Le Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec le plan.

En 1639, peu après Kepler, Desargues change totalement la conception de l'infini : « **Icy, toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part et d'autre.** » ce qui n'est guère conforme à la vision grecque du monde !

Le livre de Desargues est le premier traité complet de géométrie projective allant du point à l'infini jusqu'à l'étude des cercles et coniques étudiées comme des cercles vus en perspective en passant par la recherche des invariants des projections utilisées.



4 LA GEOMETRIE « ANALYTIQUE ».
René Descartes 1596-1650

La multiplicité des règles provient souvent de l'ignorance du maître, et ce qu'on peut ramener à un seul précepte général est moins clair quand on le divise en un grand nombre de préceptes particuliers.

Commentaire de la Règle XVIII des
« Règles pour la direction de l'esprit. »

Le seul livre de mathématiques publié par Descartes est sa « Géométrie » application du « Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. » Le tout publié en 1637.

Dix ans auparavant, en 1628, Descartes avait rédigé les « Règles pour la direction de l'esprit ». Il avait 32 ans et avait vécu une vie plus aventureuse que studieuse. N'ayant pas à assurer sa subsistance, il pouvait, à son gré, accompagné de ses domestiques qu'il traitait fort bien, étudier ou voyager. Ses « Règles » ne furent pas publiées. Descartes accompagne chacune de ses règles d'un long explicatif. Le début du commentaire de la Règle XVIII (ci-dessus) donne probablement la raison pour laquelle Descartes ne publia pas ses « Règles ». Il préféra laisser mûrir ses réflexions. Son « Discours de la Méthode », dix ans plus tard, ne comportait plus que quatre règles; elles connurent un grand succès comme nous le savons.

Vous trouverez ci-dessous :

1°) Les 21 Règles (sans leurs longs commentaires).

2°) Le passage où Descartes met en place sa méthode « cartésienne » d'« analyse-synthèse » dans le Discours de la Méthode.

3°) Les premières pages de sa « Géométrie ».

Le Livre I (il y en a trois) comporte 20 pages d'une exceptionnelle nouveauté. Comme ses contemporains, Descartes fut formé par la géométrie d'Euclide. Comme ses contemporains, il n'a pas repris la forme de l'exposé d'Euclide.

Le XVIIè siècle est un siècle d'idées et de méthodes.

Point de définitions, ni d'axiomes, ni de théorèmes.

En quelques pages, qu'il s'excuse d'être encore trop longues, Descartes expose une toute nouvelle géométrie. Cette géométrie devient algébrique et peut ainsi devenir analytique. Descartes réunit les figures euclidiennes et les équations arabes en nommant chaque ligne par une lettre.

L'aspect analytique de sa géométrie provient alors de ce qu'il suppose son problème résolu dès le départ en nommant x la solution cherchée. Le problème est mis en équations puis résolu.

Descartes va de l'inconnue x vers le connu : la méthode est analytique. Pourtant, la géométrie est bien algébrique, la résolution du problème provenant de sa mise en équations.

Règles pour la direction de l'esprit.

Règle I

Le but des études doit être de diriger l'esprit pour qu'il porte des jugements solides et vrais sur tout ce qui se présente.

Règle II

Il ne faut s'occuper que des objets dont notre esprit paraît capable d'acquérir une connaissance certaine et indubitable.

Règle III

Sur les objets proposés à notre étude, il faut chercher, non ce que d'autres ont pensé ou ce que nous-mêmes nous conjecturons, mais ce dont nous pouvons avoir l'intuition claire et évidente ou ce que nous pouvons déduire avec certitude : car ce n'est pas autrement que la science s'acquiert.

Et Descartes précise dans le commentaire : « Nous allons énumérer ici **tous les actes de notre entendement**, par lesquels nous pouvons parvenir à la connaissance des choses sans aucune crainte d'erreur ; **il n'y en a que deux : l'intuition et la déduction.** »

Règle IV

La méthode est nécessaire pour la recherche de la vérité.

Règle V

Toute la méthode consiste dans l'ordre et la disposition des choses vers lesquelles il faut tourner le regard de l'esprit, pour découvrir quelque vérité. Or nous la suivons exactement, si nous ramenons graduellement les propositions compliquées et obscures aux plus simples, et si ensuite, partant de l'intuition des plus simples, nous essayons de nous élever par les mêmes degrés à la connaissance de toutes les autres.

Règle VI

....

Règle VII

Pour achever la science, il faut parcourir par un mouvement continu et ininterrompu de la pensée toutes les choses qui se rapportent à notre but et chacunes d'elles en particulier, ainsi que les embrasser dans une énumération suffisante et ordonnée.

Et les très importantes règles VIII et IX.

Règle VIII

Si dans la série des choses à rechercher il s'en présente quelqu'une, dont notre entendement ne puisse avoir suffisamment bien l'intuition, il faut s'arrêter là ; il ne faut pas examiner ce qui suit, mais s'abstenir d'un travail superflu.

Règle IX

Il faut tourner toutes les forces de son esprit vers les choses de moindre importance et les plus faciles, et s'y arrêter longtemps, jusqu'à ce qu'on soit accoutumé à avoir l'intuition distincte et claire de la vérité.

Et les choses se précisent en direction de la géométrie avec :

Règle XIV

La même question doit être rapportée à l'étendue réelle des corps, et représentée tout entière à l'imagination par des figures nues : car ainsi elle sera comprise bien plus distinctement par l'entendement.

Règle XV

Il est utile aussi, la plupart du temps, de tracer ces figures et de les montrer aux sens externes, afin que, par ce moyen, notre pensée soit plus facilement attentive.

Puis, Descartes se dirige doucement vers l'algèbre.

Règle XVI

Quand aux choses qui n'exigent pas l'attention immédiate de l'esprit, quoiqu'elles soit nécessaires pour la conclusion, il vaut mieux les désigner par des signes très courts plutôt que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra faillir, et la pensée ne sera cependant pas forcée de se partager pour les retenir, tandis qu'elle s'appliquera à en chercher d'autres.

Règle XVII

La difficulté proposée doit être directement parcourue, en faisant abstraction de ce que quelques-uns de ses termes sont connus et d'autres inconnus, et en ayant l'intuition, suivant le vrai chemin, de la mutuelle dépendance de chacun d'eux.

« ....il faut noter que, dans toute question à résoudre par déduction, il y a une voie simple et directe........ »

Règle XVIII

Pour cela quatre opérations seulement sont requises, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, parmi lesquelles les deux dernières, souvent, ne doivent pas être faites, tant pour ne rien compliquer inutilement, que parce qu'elles peuvent être éxécutées plus facilement ensuite.

Le commentaire commence par : « **La multiplicité des règles provient souvent de l'ignorance du maître**, et ce qu'on peut ramener à un seul précepte général est moins clair quand on le divise en un grand nombre de préceptes particuliers. C'est pourquoi nous réduisons ici toutes les opérations, dont il faut se servir pour parcourir les questions, c'est-à-dire pour déduire certaines grandeurs d'autres grandeurs, à quatre types seulement ; on verra par leur explication comment ils suffisent. »

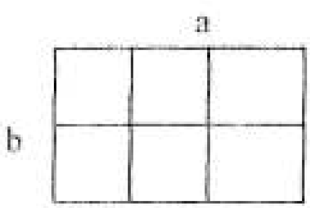
Descartes commence son algébrisation de la géométrie d'Euclide.

nous joignons l'une à l'autre de cette manière ab,

et l'on obtient c.

« dans la multiplication nous concevons aussi les grandeurs données sous la forme de lignes ; mais nous imaginons qu'elles forment un rectangle : car si nous multiplions a par b, nous adaptons ces lignes l'une à l'autre en angle droit de cette manière :

et on a le rectangle



D'autre part, si nous voulons multiplier ab par c,

il faut concevoir ab comme une ligne, à savoir ab :

« ....Il est donc important d'exposer ici comment tout rectangle peut être transformé en une ligne ... »

Perte de l'homogénéité euclidienne.

Descartes termine ici l'exposé de ses règles commentées. Nous pouvons noter les précautions prises pour relier ses travaux à la géométrie euclidienne fondée sur les figures. Nous pouvons aussi apprécier les prémisses de la future révolution cartésienne. Pourtant, Descartes va peaufiner sa méthode pendant dix années.

Descartes donne pour terminer trois règles non commentées sur la mise en équations des problèmes de la géométrie.

Règle XIX

C'est par cette méthode de raisonnement qu'il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes, que nous supposons connus de termes inconnus, pour parcourir directement la difficulté : car ainsi nous aurons autant de comparaisons entre deux choses égales.

Règle XX

Les équations trouvées, il faut achever les opérations que nous avons laissées de côté, en ne se servant jamais de la multiplication chaque fois qu'il y aura lieu à division.

Règle XXI

S'il y a plusieurs équations de cette sorte, il faut les ramener toutes à une seule, c'est-à-dire à celle dont les termes occuperont le moins de degrés dans la série des grandeurs en proportion continue, selon laquelle ils doivent être ordonnés.

LE DISCOURS DE LA METHODE POUR BIEN CONDUIRE SA RAISON ET CHERCHER LA VERITE DANS LES SCIENCES.

Les 4 règles de la « Méthode » sont bien connues : doute, analyse, synthèse et complétude. Voici le passage du « Discours » où Descartes introduit ces règles.

« Mais, comme un homme qui marche seul et dans les ténèbres, je me résolus d'aller si lentement, et d'user de tant de circonspection en toutes choses, que, si je n'avançais que fort peu, je me garderais bien, au moins, de tomber. Même je ne voulus point commencer à rejeter tout à fait aucune des opinions qui s'étaient pu glisser autrefois en ma créance sans y avoir été introduite par raison, que je n'eusse auparavant employé assez de temps à faire le projet de l'ouvrage que j'entreprenais, et à chercher la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes choses dont mon esprit serait capable.

J'avais un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et entre les mathématiques, à l'analyse des géomètres et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait ou même, comme l'art de Lulle, à parler, sans jugement, de celles qu'on ignore, qu'à les apprendre. Et, bien qu'elle contienne, en effet, beaucoup de préceptes très vrais et très bons, il y en a toutefois tant d'autres, mêlés parmi, qui sont ou nuisibles ou superflus, qu'il en est presque aussi malaisé de les en séparer, que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché. Puis pour **l'analyse des anciens** et **l'algèbre des modernes**, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui **ne semblent d'aucun usage**, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur, qui embarasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelqu'autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fût exempte de leurs défauts. Et comme la multitude des lois fournit souvent des excuses, en sorte qu'un Etat est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées ; ainsi au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurai assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois de les observer.

Le premier était de ne recevoir aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle ; c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour mieux les résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations...... »

L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'a'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Pp est

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

Ce livre est une application du « Discours de la Méthode. »

.Ambitieux d'entrée : « Tous les problèmes de géométrie...... ».

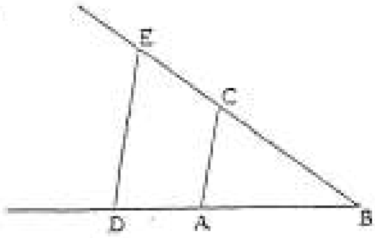
Les problèmes de géométrie se « construisent » selon la tradition euclidienne. Le besoin est de « connoitre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. ». L'objet est bien la connaissance des figures.

Mais Descartes fait entrer l'arithmétique dans la géométrie ce qui reste osé même aujourd'hui.

Théorème de Thalès et multiplication.

Concevoir un nombre-plan comme une ligne.

La Multiplication.

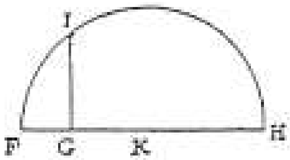


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

· Descartes reprend son idée de représenter la multiplication dont le résultat est un nombre-plan par une ligne rompant l'homogénéité euclidienne. Il avance vers le concept de nombre.

Puis, il reprend la construction grecque de la racine carrée à la règle et au compas. Tout cela est très euclidien. Mais, Descartes ne peut rompre totalement avec celui qui reste LA référence.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Commẽt on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, & il suffist de les designer par quelques lettres, chascune par vne seule. Comme pour adiouster la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & escris $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b d' a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiser a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soy mesme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainsi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d' $a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d' $a^3 - b^3 + abb$, & ainsi des autres.

vser de chiffres en Geometrie.

Où il est a remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me seruir des noms vsités en l'Algebre, ie les nomme des quarrés ou des cubes, &c.

Il est aussy a remarquer que toutes les parties d'vne mesme ligne, se doiuent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'vne que l'autre, lorsque l'vnité n'est point determinée en la question, comme icy a^3 en contient autant qu' abb ou b^3 dont se compose la ligne que i'ay nommée $\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de mesme lorsque l'vnité est determinée, a cause qu'elle peut estre sousentendue par tout ou il y a trop ou trop peu de dimensions: comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est diuisée vne fois par l'vnité, & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme.

.La géométrie devient algébrique. On « désigne » chaque ligne, objet premier, par une lettre, puis on construit des opérations sur ces lettres, **définissant une addition de lignes de manière algébrique : a + b.**

« Et a^3, pour le multiplier encore une fois par a, & ainsi à l'infini. » Très osée définition purement algébrique, sans support d'une figure !

« .... par a^2 ou b^3 ou semblables, ie ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples.... » Eh oui, cela n'est pas évident. Pourtant, Descartes ne donne pas de définition, ni de théorèmes. ***La méthode se construit***.

Deux lignes plus loin, il se préoccupe soudain des dimensions de ses expressions qui doivent être les mêmes pour pouvoir s'additionner ! Le nombre abstrait n'est point encore là.

Comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes.

Au reſte affin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut touſiours faire vn regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

A B ∞ 1, c'eſt a dire, A B eſgal à 1.

G H ∞ a

B D ∞ b, &c.

Commẽt il faut venir aux Equatiõs qui ſeruent a reſoudre les probleſmes.

Ainſi voulant reſoudre quelque probleſme, on doit d'abord le conſiderer comme deſia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſy bien a celles qui ſont inconnuës, qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui monſtre le plus naturellement de tous en qu'elle ſorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iuſques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne meſme quantité en deux façons : ce qui ſe nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons ſont eſgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui eſtoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobſtant on n'omette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela teſmoigne qu'elle n'eſt pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës auſquelles ne correſpond aucune Equation. Aprés cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſeruir par ordre de chaſcune des Equations qui reſteut auſſy, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la comparant auec les autres, pour expliquer chaſcune de ces lignes inconnuës; & faire

ainſi

- La méthode est analytique allant de l'inconnu vers le connu : « Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, & donner des noms aux lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. »

Mais toujours les « lignes » et « construire ».

Mise en équations : « trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. »

$$z^4 = a z^3 - c^3 z + d^4$$

« Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous oterais le plaisir de l'apprendre de vous même, & l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerceant, qui est à mon avis la principale, qu'on puisse tirer de cette science. »

LIVRE PREMIER. 301

ainſi en les demeſlant, qu'il n'en demeure qu'vne ſeule, eſgale a quelque autre, qui ſoit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit eſgal a ce, qui ſe produiſt par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantités, dont l'vne ſoit connuë, & les autres ſoient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte.

$z \infty b.$ ou

$z^2 \infty - a z + bb.$ ou

$z^3 \infty + a z^2 + bbz - c^3.$ ou

$z^4 \infty \; a z^3 - c^3 z + d^4.$ &c.

C'eſt a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, eſt eſgalé a b, ou le quarré de z eſt eſgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z eſt eſgal à a multiplié par le quarré de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainſi des autres.

Et on peut touſiours reduire ainſi toutes les quantités inconnuës à vne ſeule, lorſque le Probleſme ſe peut conſtruire par des cercles & des lignes droites, ou auſſy par des ſections coniques, ou meſme par quelque autre ligne qui ne ſoit que d'vn ou deux degrés plus composée. Mais ie ne m'areſte point a expliquer cecy plus en detail, a cauſe que ie vous oſterois le plaiſir de l'apprendre de vous meſme, & l'vtilité de cultiuer voſtre eſprit en vous y exerceant, qui eſt a mon auis la principale, qu'on puiſſe

Pp 3 tirer

Explication détaillée de l'écriture algébrique. Cette écriture prend ici sa forme définitive. Malgré l'importance du nouveau langage qui va permettre de résoudre le problème (pardon, de le construire), les explications ne font pas plus de quelques lignes.

Apparition des équations de degrés supérieurs à 3. La dimension 3 n'est plus un obstacle infranchissable comme en géométrie.

Quels sont les problèmes plans
Comment ils se résolvent.

« ....lorsque la dernière équation aura été entièrement démêlée.... »

302 LA GEOMETRIE.

tirer de cete ſcience. Auſſy que ie n'y remarque rien de ſi difficile, que ceux qui ſeront vn peu verſés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui eſt en ce traité, ne puiſſent trouuer.

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

Quels ſont les problesmes plans

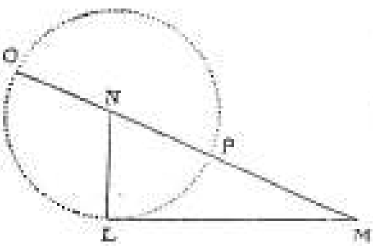
Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Les problèmes de la géométrie ordinaire des lignes et des cercles s'algébrisent sous forme d'équations du second degré.

On démêle ces équations. « Et lors cette racine, ou ligne inconnue se trouve aisément. » Il reste en effet à construire la racine à la règle et au compas pour que le problème soit résolu - pardon, construit.

Comment ils se résolvent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple



$z^2 \infty az + bb$

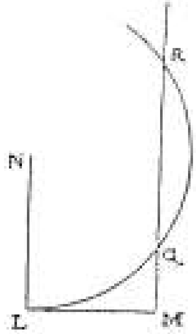
ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

Comment ils se resoluent.

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que si i'ay $yy \infty -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty -ax^2 + b^4$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$z^2 \infty az - bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cóme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

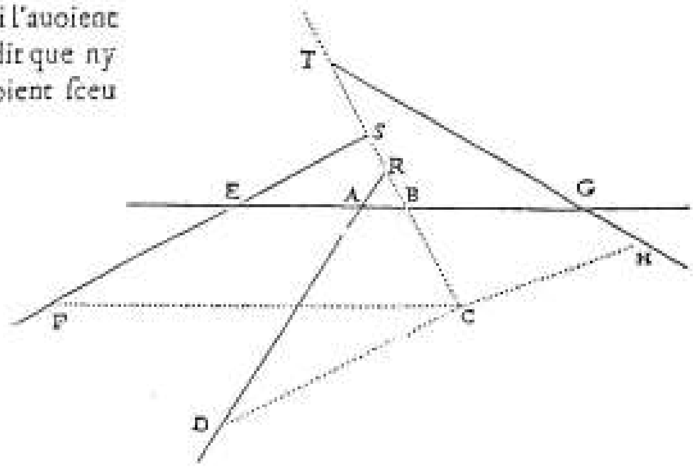
Les équations du second degré se résolvent selon différents cas de ....figures !

Le temps du discriminant algébrique n'est pas encore venu. La « construction du problème proposé est impossible » quand « le cercle ne coupe pas la droite. »

Exemple tiré de Pappus.

Et on le peut voir auſſy fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de ſon ſeptieſme liure, ou aprés s'eſtre areſté quelque tems a denombrer tout ce qui auoit eſté eſcrit en Geometrie par ceux qui l'auoient precedé, il parle enfin d'vne queſtion, qu'il dit que ny Euclide, ny Apollonius, ny aucun autre n'auoient ſceu entierement reſoudre. & voycy ſes mots.

La queſtion donc qui auoit eſté commencée a reſoudre par Euclide, & pourſuiuie par Apollonius, ſans auoir eſté acheuée par perſonne, eſtoit telle. Ayant trois ou quatre ou plus grand nombre de lignes droites données par poſition, premierement on demande vn point, duquel on puiſſe tirer autant d'autres lignes droites, vne ſur chaſcune des données, qui façent auec elles des angles donnés, & que le rectangle contenu en deux de celles, qui ſeront ainſi tirées d'vn meſme point, ait la proportion donnée auec le quarré de la troiſieſme, s'il n'y en a que trois; oubien auec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre; oubien, s'il y en a cinq, que le parallelepipede composé de trois ait la proportion donnée auec le parallelepipede



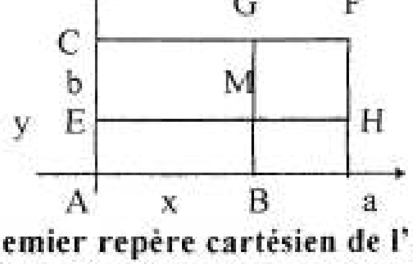
Soient AB, AD, EF, GH, &c. pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme CB, CD, CF, & CH, en ſorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ſoient donnés, &

Qq 3

310 LA GEOMETRIE.

& que ce qui eſt produit par la multiplication d'vne partie de ces lignes, ſoit eſgal a ce qui eſt produit par la multiplication des autres, oubien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion plus difficile.

Une version simplifiée du problème de Pappus est : trouver les points M tels que le rectangle (nombre ?) construit sur 2 segments AB et AE soit égal (ou proportionnel) au rectangle construit sur les 2 autres segments GF et HF. La proportionnalité étant obtenue par des projections du point M à angle donné -Thalès-et non plus orthogonales comme sur le dessin.



En langage algébrique : $xy = k(a - x)(b - y)$
Descartes savait que les courbes du second degré de la géométrie algébrique naissante étaient les coniques.

Le premier repère cartésien de l'histoire : AB donné définit le demi-axe Ax et AC définit la direction d'un demi-axe des y.

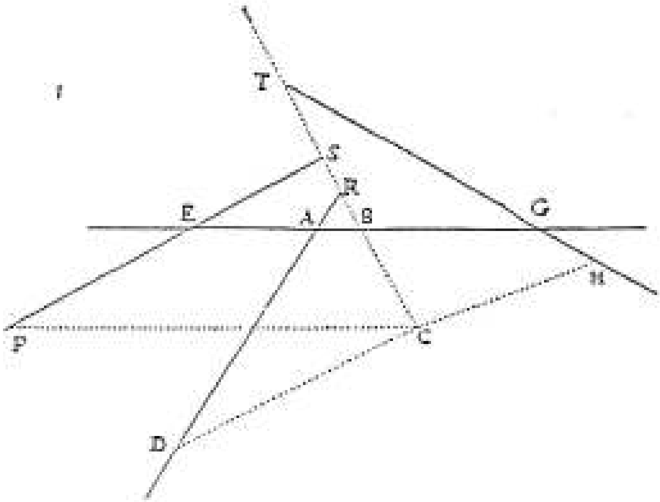
Le premier repère cartésien de l'histoire.

Il permet de repérer TOUT LE PLAN transformant la géométrie locale d'Euclide, restreinte à la figure, en une géométrie de tout l'espace étudié.

Comment on doit poser les termes pour venir à l'Equation en cet exemple.

Premierement ie suppose la chose comme desia faite, & pour me demesler de la cõfusion de toutes ces lignes, ie considere l'vne des données, & l'vne de celles qu'il faut trouuer, par exemple A B, & C B, comme les principales, & ausquelles ie tasche de rapporter ainsi toutes les autres. Que le segment de la ligne A B, qui est entre les poins A & B, soit nommé x, & que B C soit nommé y. & que toutes les autres lignes données soient prolongées, iusques a ce qu'elles couppent ces deux, aussy prolongées s'il est besoin, & si elles ne leur sont point paralleles. comme vous voyes icy qu'elles couppent la ligne A B aux poins A, E, G, & B C aux poins R, S, T. Puis a cause que tous les angles du triangle A R B sont donnés, la proportion, qui est entre les costés A B, & B R, est aussy donnée, & ie la pose comme de z à b, de façon qu'A B estant x, R B sera $\frac{bx}{z}$, & la toute C R sera $y+\frac{bx}{z}$, à cause que le point B tombe entre C & R; car si R tomboit entre C & B, C R seroit $y-\frac{bx}{z}$; & si C tomboit entre B & R, C R seroit $-y+\frac{bx}{z}$. Tout de mesme les trois angles du triangle D R C sont donnés, & par consequent aussy la proportion qui est entre les costés C R, & C D, que ie pose comme de z à c: de façon que C R estant $y+\frac{bx}{z}$,

LIVRE PREMIER. 311



C D sera $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Aprés cela pourceque les lignes A B, A D, & E F sont données par position, la distance qui est entre les poins A & E est aussy donnée, & si on la nomme K, on aura E B esgal a $k+x$; mais ce seroit $k-x$, si le point B tomboit entre E & A; & $-k+x$, si E tomboit entre A & B. Et pourceque les angles du triangle E S B sont tous donnés, la proportion de B E a B S est aussy donnée, & ie la pose comme z à d, sibienque B S est $\frac{dk+dx}{z}$, & la toute C S est $\frac{zy+dk+dx}{z}$; mais ce seroit $\frac{zy-dk-dx}{z}$, si le point S tomboit entre B & C; & ce seroit $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, si C tomboit entre B & S. De plus les trois angles du triangle F S C sont donnés, & en suite la pro-

Comment on doit poser les termes pour venir à l'équation en cet exemple.

proportion de CS à CF, qui soit comme de z à e, & la toute CF sera $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$. En mesme façon AG que ie nomme l est donnée, & BG est $l - x$, & a cause du triangle BGT la proportion de BG a BT est aussy donnée, qui soit comme de z à f. & BT sera $\frac{fl - fx}{z}$, & CT ∞ $\frac{zy + fl - fx}{z}$. Puis derechef la proportion de TC a CH est donnée, a cause du triangle TCH, & la posant comme de z à g, on aura CH ∞ $\frac{+gzy + fgl - fgx}{zz}$.

Et ainsi vous voyés, qu'en tel nombre de lignes données par position qu'on puisse auoir, toutes les lignes tirées dessus du point C a angles donnés suiuant la teneur de la question, se peuuent tousiours exprimer chascune par trois termes; dont l'vn est composé de la quantité inconnue y, multipliée, ou diuisée par quelque autre connue; & l'autre de la quantité inconnue x, aussy multipliée ou diuisée par quelque autre connuë, & le troisiesme d'vne quantité toute connuë. Excepté seulement si elles sont paralleles; oubien a la ligne AB, auquel cas le terme composé de la quantité x sera nul; oubien a la ligne CB, auquel cas celuy qui est composé de la quantité y sera nul; ainsi qu'il est trop manifeste pour que ie m'areste a l'expliquer. Et pour les signes +, & --, qui se ioignent à ces termes, ils peuuent estre changés en toutes les façons imaginables.

Puis vous voyés aussy, que multipliant plusieurs de ces lignes l'vne par l'autre, les quantités x & y, qui se trouuent dans le produit, n'y peuuent auoir que chascune autant de dimensions, qu'il y a eu de lignes, a l'explication

cation desquelles elles seruent, qui ont esté ainsi multipliées: en sorte qu'elles n'auront iamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes; ny plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois, & ainsi a l'infini.

De plus, a cause que pour determiner le point C, il n'y a qu'vne seule condition qui soit requise, à sçauoir que ce qui est produit par la multiplication d'vn certain nombre de ces lignes soit esgal, ou (ce qui n'est de rien plus malaysé) ait la proportion donnée, à ce qui est produit par la multiplication des autres; on peut prendre a discretion l'vne des deux quantités inconnues x ou y, & chercher l'autre par cete Equation. en laquelle il est euident que lorsque la question n'est point proposée en plus de cinq lignes, la quantité x qui ne sert point a l'expression de la premiere peut tousiours n'y auoir que deux dimensions. de façon que prenant vne quantité connuë pour y, il ne restera que $xx \infty + \text{ou} -- ax + \text{ou} -- bb$. & ainsi on pourra trouuer la quantité x auec la reigle & le compas, en la façon tantost expliquée. Mesme prenant successiuement infinies diuerses grandeurs pour la ligne y, on en trouuera aussy infinies pour la ligne x, & ainsi on aura vne infinité de diuers poins, tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on descrira la ligne courbe demandée.

Comment on trouue que ce problesme est plan, lorsqu'il n'est point proposé en plus de 5 lignes.

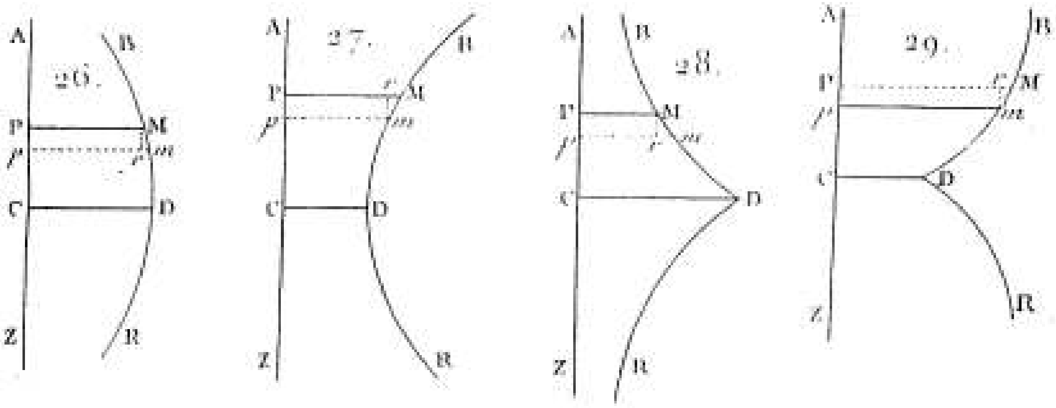
Il se peut faire aussy, la question estant proposée en six, ou plus grand nombre de lignes, s'il y en a entre les données, qui soient paralleles a BA, ou BC, que l'vne des deux quantités x ou y n'ait que deux dimensions en

Rr l'Equa-

La mise en équations est encore un peu rude. Les lettres désignent des segments.

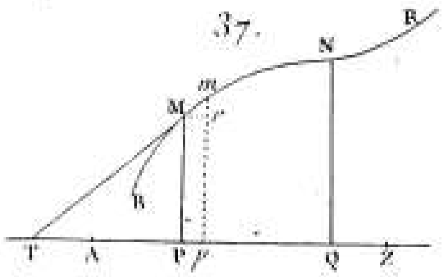
On ne peut soustraire un segment plus grand que le segment de départ, donc il y a plusieurs cas de .....figure à envisager !

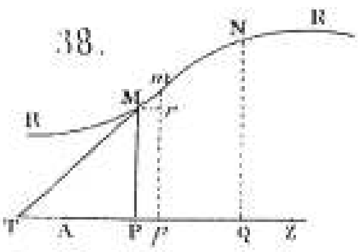
En l'an 6 de la République (1799), soit plus d'un siècle et demi après leur création, voici ce que sont devenus les repères cartésiens dans le « Traité de calcul différentiel et de calcul intégral » de Charles Bossut un rédacteur de l'Encyclopédie.



Vous aurez reconnu l'axe des abscisses AZ vertical et la courbe BMDR. La direction du second axe est ici implicite, par contre PM ou CD donne correctement la mesure du phénomène étudié ce que nous ne notons plus de nos jours (ce n'est peut-être pas un progrès).

Dans la même planche, voici les dessins 37 et 38 :





Les repères sont toujours incomplets mais l'axe AZ de la variable est horizontal. Ce dessin est plus conforme à nos habitudes.

UNE CONCLUSION CARTESIENNE

Quelques apports de Descartes.

La méthode analytique.

La méthode synthétique va du connu vers l'inconnu que l'on recherche.

La « nouvelle » méthode, dite analytique, part de l'inconnue appelée x, met le problème en équations puis le résout allant ainsi de l'inconnue vers la solution, de l'inconnu vers le connu.

Les repères cartésiens : la méthode des coordonnées.

Ils permettent de repérer tout point M du plan par 2 mesures notées x et y. Grande nouveauté : le repérage ne se limite plus à la seule figure considérée. (Notons qu'il est aujourd'hui encore plus aisé, plus commode pour l'esprit, de situer le point M dans le quadran où x et y sont positifs.)

Au niveau du lycée, la réussite des élèves est assez bonne en « analyse » car la logique intervient peu de façon explicite. A l'exception du théorème de variation d'une fonction, l'essentiel du travail consiste en des calculs algébriques. Dans le « Journal de mathématiques élémentaires », au début du 20ème siècle, l'étude des variations d'une fonction se situe en algèbre (voire en trigonométrie). Il n'y a pas de rubrique « analyse »! (Il n'y a pas non plus de calcul intégral)

Dans l'étude des variations d'une fonction, la figure disparaît ou plutôt apparaît automatiquement sur l'écran de la calculatrice. Ainsi l'essentiel du travail se fait au niveau du calcul algébrique dans les cas usuels : étude de fonction, intersection de courbes, tangente, asymptote, limite. La résolution du problème se ramène à des calculs plus ou moins répétitifs.

La logique et la figure voient leurs parts réduites. Ceci facilite le travail des élèves mais les difficultés demeurent et sont loin d'être surmontées par tous. D'autant que nous sommes en pleine géométrie ! Chut ! Ne pas dire !

A ses débuts dans l'enseignement, l'analyse revient au système de mesure pré-hellène, mesures de x et f(x) augmentées de la notion d'infiniment petit pour certaines mesures : pente de tangente, recherche d'asymptote ou étude des variations. La figure n'intervient plus dans la construction de la solution des problèmes. Le calcul infinitésimal a rendu cette figure secondaire dans la construction du savoir.

5. LA GEOMETRIE DU HASARD
Cardan (1501, 1576)
Fermat (1601, 1665)
Pascal (1623, 1662)

Il n'est de plus grandes certitudes que celles du géomètre.
Descartes

Présentation : une lettre de Pascal

Aussi ne s'étonnera-t-on pas de voir les probabilités apparaître seulement au 16^{è} siècle. Les jeux de dés dans lesquels le nombre de cas possibles est assez réduit et les jeux de hasard[2] vont fournir aux géomètres une occasion de créer une nouvelle branche de ....la géométrie ! Cardan, grand joueur, a trouvé au milieu du 16è siècle, les premières règles, les premières lois du hasard. Mais la science est très nouvelle et son livre-De ludo aléas- ne parut qu'en 1663. En France, la tradition fait remonter la création du calcul des probabilités à la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat datée de juillet à octobre 1654. On trouvera cette correspondance dans : Les cahiers de Fontenay N°32 de septembre 1983.

Voici une lettre de Pascal à l'Académie Parisienne de Science :

« Et puis voici un traité tout à fait nouveau, d'une matière absolument inexplorée jusqu'ici, savoir : la répartition du hasard dans les jeux qui lui sont soumis, ce qu'on appelle en français, faire le parti des jeux.

La fortune incertaine y est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice. Et c'est là certes ce qu'il faut d'autant plus rechercher par le raisonnement, qu'il est moins possible d'être renseigné par l'expérience. En effet les résultats du sort ambigu sont justement attribués à la contingence fortuite plutôt qu'à la nécessité naturelle.

C'est pourquoi la question a erré incertaine jusqu'à ce jour ; mais maintenant, demeurée rebelle à l'expérience, elle n'a pu échappé à la raison. Et grâce à la géométrie, nous l'avons réduite avec tant de sûreté à un art exact, qu'elle participe de sa certitude et déjà progresse audacieusement.

Ainsi, joignant la rigueur des démonstrations de la science à l'incertitude du hasard, et conciliant ces choses en apparence contraires, elle peut, tirant son nom des deux, s'arroger à bon droit ce titre stupéfiant de **Géométrie du Hasard**. »

Ainsi les probabilités apparaissent soudainement dans le domaine mathématiques par la demande de joueurs, Cardan, au 16è siècle, ou le chevalier de Méré au 17è siècle qui souhaitent améliorer leur façon de jouer.

[2] « Hasard » vient du mot arabe signifiant « dé » !

Le problème de Galilée (1564, 1642).

On lance 3 dés à 6 faces (dés usuels).

La somme des 3 nombres obtenus est S.

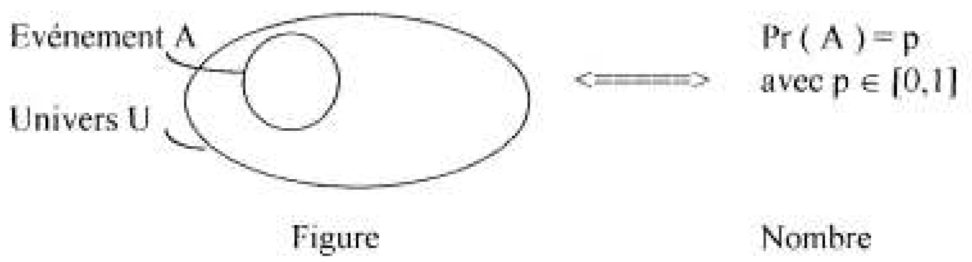
Les joueurs s'étaient aperçu que la somme 11 apparaissait plus souvent que la somme 12 alors que ces 2 sommes s'obtiennent toutes deux de 6 façons différentes. Les joueurs désiraient savoir pourquoi.

Plus généralement, quelle est la somme S la plus probable ?

Galilée a résolu correctement ce problème qui faisait partie du domaine de la recherche et est aujourd'hui un exercice pour débutants. Le progrès fait quand même rage !

Quelle est cette géométrie ?

Comme les autres parties usuelles des mathématiques, les probabilités sont de la géométrie ! La situation est classique :



En probabilité, on **mesure** la probabilité d'un événement A.

Rien de bien nouveau : on construit un espace (de probabilité) et dans cet espace, on mesure les parties qui veulent bien se laisser mesurer. Que vient d'ailleurs faire la dénomination d'espace ici, si ce n'est pour faire de la géométrie !

Nous noterons, par exemple avec le problème de Galilée, que nous débutons avec un Univers fini qui contient $6^3 = 216$ cas possibles. Cet Univers est fini comme l'était celui des Grecs.

Nous retrouvons la certitude, ici l'événement certain, avec l'Univers dont la mesure est 1. Rappelons que 1 n'était pas un nombre chez les Grecs, mais le créateur des nombres. Histoire, histoire...

« Il y a la grande Unité : l'infini ; et la petite unité» : 1 »

Ce proverbe chinois donne la clé du seul changement par rapport à la géométrie de la certitude. En probabilité, l'Univers U est mesuré par 1 (c'est la moindre des choses!) au lieu d'être « mesuré » par l'infini. Comme en Analyse, on fabrique ensuite une fonction Pr sur les parties mesurables de U à valeurs dans [0,1]. Une fonction sert bien à mesurer un phénomène. Les probabilités peuvent permettre de se familiariser avec le vocabulaire des théories de la mesure de la fin du 19è siècle. Et comme par hasard (pas sic) les probabilités vont se trouver très liées aux théories de la mesure à la fin du 19è siècle.

Calcul des Probabilités, Henri Poincaré.
Cours de la faculté des sciences de Paris.

INTRODUCTION

I. LE HASARD

« Comment oser parler des lois du hasard ? »..........

Dans son introduction, Poincaré cherche à définir le hasard : « Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. »

CHAPITRE I.

DEFINITION DES PROBABILITES

« On ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité. On dit ordinairement : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles.

Ainsi, si le premier nombre est n et le second N, la probabilité est $\frac{n}{N}$. »

Après avoir donné quelques exemples triviaux de jeux de cartes ou de boules, Poincaré revient sur la difficulté de définir une probabilité.

« La définition complète d'une probabilité est donc une sorte de pétition de principe : comment reconnaître que tous les cas sont également probables ? Une définition mathématique ici n'est pas possible ; nous devrons dans chaque application, faire des *conventions*, dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles seront admises.

N.B. : Ce très instructif livre de Poincaré est réédité aux éditions Gabay.

6. LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CALCUL INFINITESIMAL

ARCHIMEDE vers -250
NEWTON et LEIBNIZ vers 1670
CAUCHY 1821
RIEMANN 1860
LEBESGUE 1902

L'idée du calcul différentiel, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence.

Lagrange

La quadrature du cercle. Ce problème non-résolu et synonyme d'impossibilité résume parfaitement le problème du calcul intégral. Mesurer la surface limitée par un cercle à l'aide de petits carrés unités est impossible ...si on veut le faire à la règle et au compas. Par contre, si l'on admet que le problème est résolu quand on arrive à mesurer la surface avec un nombre, alors l'espoir reste permis.

A partir de la fin du 17^e siècle, les événements vont se précipiter et nous allons voir naître 8 géométries (pas moins et plutôt plus) en 3 siècles.

La mesure des surfaces

L'énoncé du problème est très simple. Depuis l'Antiquité grecque, notre système de mesure est en sommeil. En 1650, on sait mesurer l'aire d'un triangle, d'un polygone, d'un cercle et assez mal l'aire d'une portion de parabole. Archimède a donné dans l'antiquité deux méthodes pour « quarrer » une parabole. Mais n'ayant pas fondé d'école, ses méthodes se sont perdues et aucun progrès n'a été réalisé dans le domaine de la mesure des surfaces depuis 2000 ans !

Laissons l'introduction à Schwartz, pages 223-224 d' « un mathématicien aux prises avec le siècle ».

« Newton et Leibniz trouvèrent, indépendamment l'un de l'autre, le calcul différentiel et le calcul intégral au début du XVIIIè siècle. Il est évidemment impossible d'imaginer que ces découvertes soient sorties du néant. De nombreux prédécesseurs les avaient préparées. Les Grecs connaissaient la construction des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole : la tangente en un point d'une ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle défini par les demi-droites qui joignent ce point aux deux foyers, tandis que la tangente en un point de l'hyperbole est la bissectrice intérieure. Tangente, donc dérivée. Au XVIIè siècle, Pascal avait construit la tangente à la cycloïde, donc encore une dérivation. En outre, on savait depuis longtemps ce qu'était la vitesse d'un véhicule lorsqu'elle était constante, mais la vitesse instantanée est une dérivée ; or Galilée avait trouvé sa loi $F = m\gamma$, la loi fondamentale de la dynamique, bien avant Newton et Leibniz ; la vitesse est une dérivée première, et l'accélération une dérivée seconde. Newton et Leibniz ont unifié, dans une théorie globale qui domine toutes les mathématiques, beaucoup de données déjà connues. Le calcul intégral est initialement issu du calcul des surfaces et des volumes. Quand Archimède formula l'aire du segment de parabole, il procéda par les méthodes mêmes qui seront plus tard celles du calcul intégral. La grande théorie de l'intégration est celle de Lebesgue, trouvée au début du XXè siècle, mais, au XIXè siècle, Riemann avait trouvé une théorie plus simple et moins générale, celle de l'intégrale de Riemann, qui a été utilisée pendant des décennies, avant l'intégrale générale de Lebesgue. »

Le programme est tracé.

1) **Les précurseurs** : Archimède (-287, -212), Ibn Qurra (836 - 901) et Cavaliéri.

2) **Les créateurs** : Newton et Leibniz pour l'introduction proprement dite de l'« infiniment petit » dans la géométrie vers 1670.

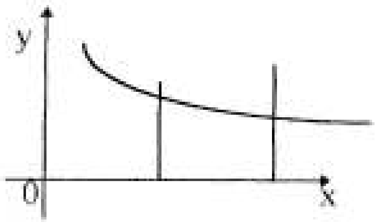
3) **Les théoriciens** : Cauchy en 1821 pour la première théorie, Riemann vers 1860 pour la seconde et enfin Lebesgue en 1902 pour la « dernière » théorie (usuelle) en date.

Mesure de surfaces et non calcul intégral.

Toutes les approches depuis Archiméde jusqu'à Lebesgue sont fondées sur une intuition née d'une figure. La géométrie différentielle est un probléme de **mesure** de surfaces (ou de flux pour Newton).

Il s'agit de « bien » lire une figure avec son cerveau droit et d'en tirer une construction numérique avec son cerveau gauche. Géométrie.

On sait mesurer un rectangle. Il paraît raisonnable de remplacer un côté du rectangle par une courbe DEJA MESUREE, i.e. la « hauteur » définie par une fonction est connue pour toutes les valeurs de x, puis de « sommer » ces valeurs de f(x). Les géomètres ont mis environ 2000 ans pour réussir. D'Archiméde à Newton et Leibniz.



I) Les précurseurs.

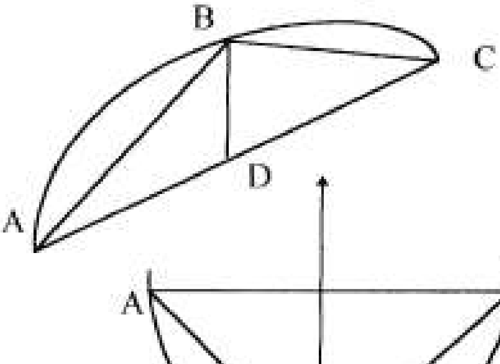
A) Comme Archimède avec la méthode d'exhaustion.

> Ceux qui louent Archiméde sont plus nombreux que ceux qui le lisent, et ceux qui l'admirent plus nombreux que ceux qui le comprennent.
>
> R.P. Tacquet 1654.

Effectivement. (et nous resterons prudemment du côté des plus nombreux)
Archimède réussit le premier la quadrature de la parabole, en démontrant de 2 manières différentes le résultat suivant.

Propriété : Soit un « segment » de parabole ABC
le point D milieu de la corde AC
DB parallèle à l'axe de la parabole

Alors ==> l'aire limitée par la corde AC et la parabole vaut les $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC.

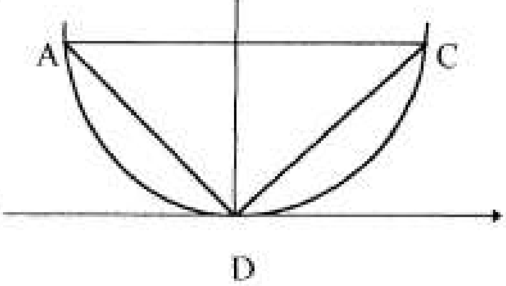


Pour avoir une situation plus habituelle, vérifions avec la parabole représentant f : x → x²

on a : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

l'aire du triangle ABC est $\mathbf{A} = 1$

l'aire limitée par AC et la parabole vaut : $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\mathbf{A}$



La méthode d'exhaustion employée par Archimède est très lourde mais caractéristique des Grecs, une double réduction par l'absurde exigeant de connaître au départ le résultat. Pourtant Archimède utilise une approche géométrique de la courbe par des triangles de plus en plus petits dont la somme des mesures donne le résultat. Or ces mesures forment ....une série numérique.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$$

(L'excellent livre : « Mathématiques et mathématiciens » de Dedron et Itard consacre 20 pages à Archimède et donne les 2 démonstrations, géométrique et mécanique, de ce résultat).

Malheureusement, Archimède ne créa pas d'école et ses idées ne furent reprises que près de 2000 ans plus tard !

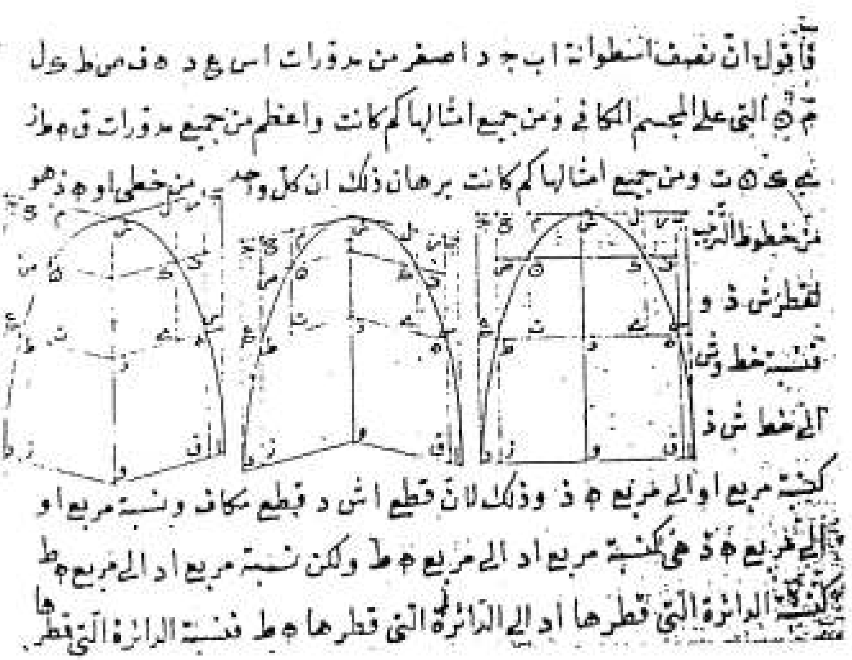
B) Ibn Qurra (836-901) et Al-Kuhi (10è siècle)

Déjà 1000 ans depuis Archimède, la civilisation grecque n'a cessé de décliner. Elle est maintenant remplacée par la civilisation arabe depuis environ un siècle.

Les Arabes ne sont pas célèbres pour leurs travaux sur le calcul infinitésimal. Mais, ayant connaissance des travaux de leurs prédécesseurs, ils continuent dans ce sens en cherchant à mesurer des surfaces et des volumes limités par les courbes du second degré, les courbes dont la théorie est connue.

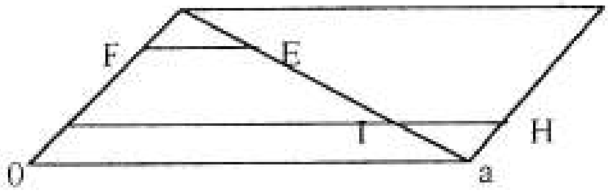
Voici, par exemple un manuscrit conservé à la Bibliothèque Nationale du Caire dont l'auteur est Al-Kuhi.

La mesure du paraboloïde
Auteur : Abu Sahl al-Quhi (ou : al-Kuhi) Manuscrit : Le Caire, B.N. Mus Fad Riyada 40



C) Cavaliéri (1598-1647) et les indivisibles vers 1635.

Cavalieri part classiquement d'une intuition figurale et essaye de mettre au point une méthode des « indivisibles » dans laquelle une surface plane est la « somme » des segments qui la compose. Cette méthode visuellement fondée ne donne pas bien satisfaction du côté des mesures. Comment la réunion de segments d'aire nulle mais en quantité infinie peut-elle donner une figure plane d'aire non nulle ?



Considérant FE = IH pour chaque ligne, il obtient des sommations du type :

$$\int_0^a x\, dx = \frac{a^2}{2}$$

(sans repère cartésien, mais l'idée de repérer le plan est dans l'air du temps ....)

Au 17è siècle, la transmission des découvertes scientifiques est rapide et Leibniz aura connaissance des résultats de Cavaliéri mais aussi des résultats de nombreux géomètres qui travaillent sur le sujet : Mercator, Grégory, Barrow, Wallis ou encore Grégoire Saint-Vincent....

Cependant, cette réunion d'indivisibles qui semble une bonne idée côté figure n'est pas satisfaisante côté mesure. Leibniz et Newton devront prendre le problème par l'autre extrémité et rendre un segment infiniment petit ce qui est tout autant une escroquerie à priori. Mais ça marche. la méthode fonctionne et résout les problèmes posés par les physiciens. La pratique fut longtemps sa seule justification.

Le problème des tangentes et le problème inverse des tangentes.

Les Grecs savaient construire les tangentes aux coniques, seules courbes du domaine de la théorie mathématique. La généralisation de ce problème à de nouvelles courbes dont la cycloïde et l'étude du problème inverse furent deux des moteurs du 17è siècle.

La rectification de la cycloïde.

Comme son nom l'indique, il s'agit de remplacer la cycloïde par une ligne droite de même longueur. Problème très euclidien dont nous avons gardé la dénomination pour la rectification des courbes en général.

II) Newton et Leibniz, les créateurs d'une méthode.

« tangente donc dérivée. »

L.Schwartz.

Ce passage du concept figural au nombre-dérivé ne s'est pas faite sans difficulté. Indépendamment l'un de l'autre et par deux processus très différents, Newton le physicien mesureur de flux et Leibniz le philosophe à la recherche des monades, particules élémentaires, vont donner la solution à quelques années d'intervalle autour de 1665-1670.

Voici des réflexions de **Lagrange**, l'un des très grands mathématiciens du 18è siècle : **« l'idée du calcul différentiel, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence. »** disait -il. La suite du texte est très instructive. Elle montre bien la correspondance entre figure et nombres, entre droite et infiniment petits supposés.

« L'idée du *calcul différentiel*, quoique juste en elle-même, dit Lagrange, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et surtout pour être présentée aux commençants. D'ailleurs il me semble que comme dans le calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée ; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration.... La métaphysique du *calcul fluxionnel* paraît au premier abord plus claire, parce que tout le monde a ou croit avoir une idée

TEMPS MODERNES. 471

de la vitesse. Mais, d'un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile; de l'autre, il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que *la vitesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable*.... Aussi Newton lui-même, dans son livre des *Principes*, a-t-il préféré comme plus courte la *méthode des dernières raisons des quantités évanouissantes*; et il faut avouer que c'est aux principes de cette méthode que se réduisent, en dernière analyse, les démonstrations relatives à celle des fluxions. Mais cette méthode a, comme celle des limites, et qui n'en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités ; car, quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses deux termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois[1]. »

A) Newton, le physicien (1642-1727)

Pas de définitions, pas de théorèmes au sens où nous les entendons. S'il reprend dans la rédaction de ses « Principes de philosophie naturelle » la forme de l'exposé d'Euclide, Newton est physicien, donc inductif. Sur le fond, il ne cherche aucunement à démontrer ses propositions. Il cherche à construire une méthode. La première théorie de l'intégrale ne viendra que 150 ans plus tard !

Calcul des fluxions. — La première idée du *calcul* ou de la *méthode des fluxions* paraît remonter à l'année 1665 ou 1666, époque où Newton s'occupait de l'analyse de la lumière. Peut-être est-ce l'examen du faisceau lumineux diminuant d'intensité dans le rapport du carré de la distance qui fit naître en lui l'idée de la *génération des quantités*. Cette idée, telle que la concevait Newton, avait pour point de départ le mouvement : il l'a d'ailleurs lui-même énoncée sous la forme de ces deux problèmes : 1° la longueur de l'espace parcouru étant continuellement donnée (c'est-à-dire à chaque moment, *quovis temporis momento*), trouver la vitesse du mouvement à un temps donné quelconque ; 2° la vitesse du mouvement étant donnée, trouver la longueur de l'espace parcouru. « Ainsi, dans l'équation $xx = y$, si y représente, dit Newton, la longueur de l'espace parcouru ou décrit à un temps quelconque, temps que mesure et représente un autre espace x, augmentant d'une vitesse uniforme x, alors xx exprimera la vitesse avec laquelle dans le même moment l'espace y sera décrit, et *vice versa*. C'est pourquoi j'ai considéré les *quantités comme engendrées par un accroissement continuel, à la manière de l'es-*

pace que décrit un objet quelconque en mouvement[1]. » — S'expliquant ensuite sur l'emploi du mot *temps*, Newton ajoute qu'il entend par là une quantité par l'incrément (*incremento*) ou fluxion (*fluxu*) de laquelle le temps est exprimé et mesuré. « J'appellerai, dit-il, *fluentes*, ces quantités que je considère comme croissant (*crescentes*) graduellement et indéfiniment ; et je les représenterai par les dernières lettres de l'alphabet u, x, y et z, afin de les distinguer des autres quantités, qui dans les équations sont considérées comme connues et déterminées, et que l'on représente par les premières lettres de l'alphabet, a, b, c, etc. Quant aux vitesses que chacune des fluentes reçoit du mouvement générateur (vitesse que j'appelle *fluxion*), je les exprimerai par les dernières lettres de l'alphabet, surmontées d'un point : $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$. Ainsi, pour la vitesse ou fluxion de la quantité u, je mettrai $\dot{u}$, pour les vitesses de x, y, z, je mettrai $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. » Les valeurs définitives, déduites de la génération graduelle des quantités, étaient donc pour Newton, non pas des agrégations de particules homogènes, mais des résultats de mouvements continus. D'après cette même conception, qui du reste n'était pas nouvelle, les lignes sont décrites par le mouvement des points, les surfaces par le transport des lignes, les solides par le transport des surfaces, et les angles par le mouvement de leurs côtés. Mais il s'agissait de réaliser cette théorie par le calcul. En cela, il fut merveilleusement secondé par le développement, qu'il avait trouvé, des suites infinies et par ce qu'on a depuis appelé le *binome de Newton*. L'auteur nous a fait lui-même connaître comment il y était parvenu.

Binome. — En lisant, à vingt et un ans, le livre de Wallis *de Arithmetica infinitorum*, Newton avait noté les passages

1. *Hinc fit ut considerem quantitates tanquam genitas continuo incremento, ut spatium, quod corpus aut quælibet res mota describit.* Newton, etc. (*Opuscula mathematica*, t. I, p. 54, édit. Castillon).

B) Leibniz, le philosophe (1646-1716)

« Mes méditations roulent sur deux choses : l'unité et l'infini. » disait Leibniz.

Il puise son inspiration dans deux domaines au moins : les nombres entiers et les figures.

1) Le calcul des différences en arithmétique (nombres entiers).

Exemple : Soit la suite des cubes : 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 , ...

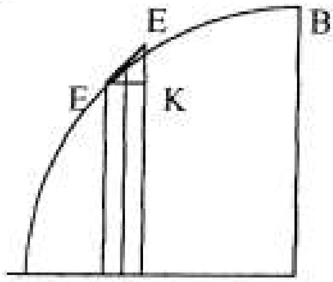
1ère différence :	7 , 19 , 37 , 61 , 91 , ...
2ème différence :	12 , 18 , 24 , 30 , ...
3ème différence :	6 , 6 , 6 , ...

De ces manipulations de nombres entiers, il tire l'idée du calcul des différences. Encore doit-il passer du cas discret de l'arithmétique au cas continu des droites et des courbes.

2) Une intuition sur le triangle caractéristique de Pascal (figure).

Eh oui, les nombres entiers et le triangle.......

Utilisé par Barrow en Angleterre, ce triangle caractéristique apparaît dans le « traité des sinus du quart de cercle » publié par Pascal en 1658.



EKE est le triangle caractéristique.

En 1673, à la lecture des publications de Pascal, Leibniz déclare : « Sur une démonstration très facile dans son espèce, quel fut mon étonnement de voir que Pascal avait eu les yeux fermés comme par un sort ».

Dans ses recherches, Leibniz parvient à montrer, par un calcul « sommatoire » assez compliqué mais basé sur une figure, qu'une somme de y^2 donne $1/3\ y^3$.

3) Une approximation bien peu rigoureuse

Une application du théorème de Thalès permet alors de créer le calcul sommatoire sur les grandeurs continues.

A cette époque, une méthode est exposée sur un exemple, disons, bien choisi.

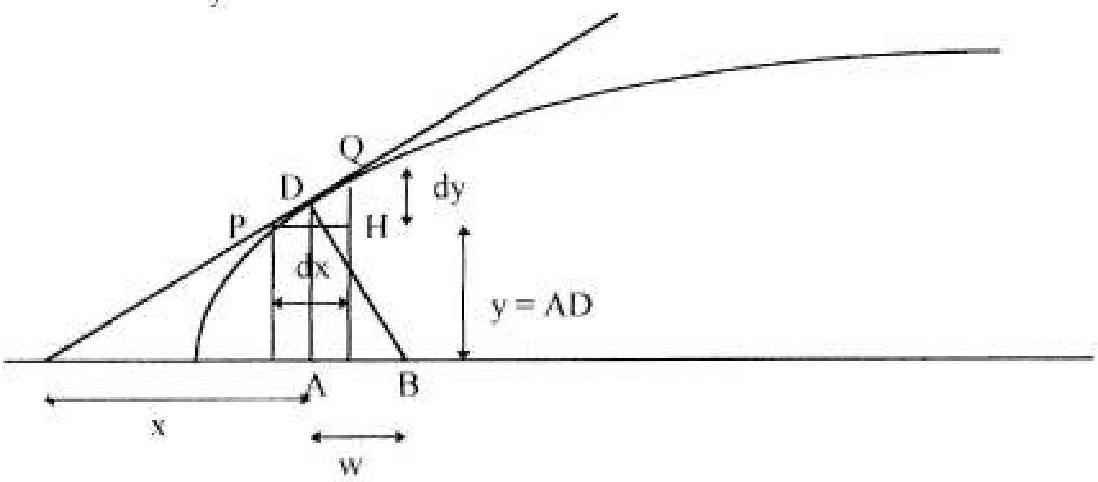
Cet exemple est ici un problème inverse des tangentes i.e. connaissant les tangentes à une courbe, déterminer cette courbe.

Ce problème a longtemps hanté les manuels scolaires sous la forme : Soit une propriété différentielle des tangentes, sous-tangentes, normales ou sous-normales à une courbe, déterminer cette courbe.

Etudions l'exemple de Leibniz :

Soit à déterminer une courbe dont la sous-normale AB est inversement proportionnelle à l'ordonnée y des points de la courbe.

i.e. : $AB = \frac{k}{y} = w$ avec $k > 0$.



En un point D(x,y) de la courbe, Leibniz applique le théorème de Thalès au triangle (caractéristique) « infiniment petit » PQH et au triangle DAB qui lui est semblable.

Il obtient : $\frac{HQ}{PH} = \frac{AB}{AD}$ soit aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{w}{y}$

Les calculs donnent : $y\,dy = w\,dx$

$$y\,dy = \frac{k}{y}\,dx$$

$$y^2\,dy = k\,dx$$

$$dx = \frac{1}{k}\,y^2\,dy$$

et comme il sait sommer y^2 en $y^3/3$ il obtient en sommant :

$$x = \frac{1}{3k}\,y^3$$

Pour nous cela donne : $3\,k\,x = y^3$ et $y = \sqrt[3]{3kx}$

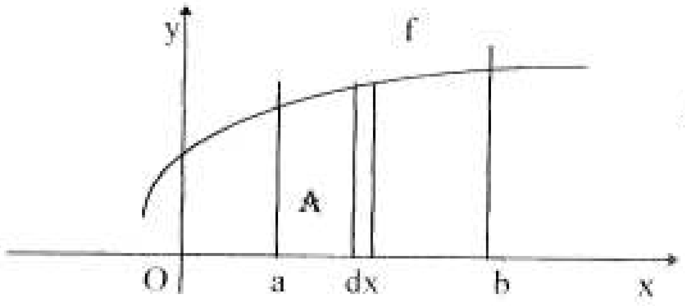
dont on vérifiera que la sous-normale est bien en $\frac{k}{y}$

Résumé

Peu rigoureuse application du théorème de Thalès sur un exemple, le calcul sommatoire de Leibniz (et le calcul des fluxions de Newton en physique) va connaître un immense succès dès son premier siècle d'existence grâce à la famille Bernoulli entre autres et malgré quelques réticences quand même.

Mais cette nouvelle méthode était si peu fondée.......

Par affinages successifs , il donnera :



$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Autrement dit, quand on remplace un côté d'un rectangle par la courbe d'une fonction f et que l'on sait par là même mesurer les « indivisibles » de la surface, alors on sait calculer l'aire de cette surface, mesurer cette surface.

Comment le fait-on ?

En découpant la surface en rectangles « élémentaires » d'aire f(x)dx que l'on somme ! Mais qu'est-ce qu'un rectangle élémentaire ?

Qu'est-ce qu'un « infiniment petit » ? Le problème trouva un début de solution au 17è siècle avec les « évanouissantes ». Le passage du segment « fini » de longueur non-nulle « dx » à sa limite posera longtemps un gros problème aux scientifiques.

Cette histoire est longue et au 17è siècle, nous sommes encore loin, très loin de l'intégrale usuelle. Voici ce qu'en pensait Newton dans ses « Principes de philosophie naturelle » les bien nommés.

Dans le livre I du mouvement des corps, Newton donne le commentaire suivant sur sa « méthode des premières et dernières raisons » à propos des rapports de grandeurs finies devenant très petites :

« On peut objecter qu'il n'y a aucune proportion dernière des quantités évanouissantes ; puisque, avant qu'elles s'évanouissent, leur proportion n'est pas la dernière et que, lorsqu'elles sont évanouies, leur proportion n'est plus.

Mais on peut également soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient en un lieu déterminé n'a pas de dernière vitesse, quand son mouvement s'achève ; en effet, avant qu'il atteigne ce lieu, il n'a pas de dernière vitesse et quand il l'a atteint, il n'en a plus aucune. Mais la réponse est facile : par « dernière vitesse », il faut entendre la vitesse à laquelle le corps se meut, non pas avant qu'il atteigne son dernier lieu et que son mouvement cesse ni après mais au moment même où il atteint ce dernier lieu et cesse de se mouvoir. De même par « dernière raison » des quantités évanouissantes, il faut comprendre la raison qu'ont des quantités non pas avant de s'évanouir, ni après mais celle avec laquelle elles s'évanouissent. »

Les « Traités de calcul différentiel et intégral » de l'abbé Bossut, 1799.
(an VI de la République)

Le « nouveau calcul » incluant les infiniment petits a triomphé tout au long du 18è siècle dans la résolution des problèmes des physiciens. Aucune théorie n'est venue étayer la méthode qui n'est validée que par les résultats et l'expérience.

Voici comment elle fonctionne.

TRAITÉ
DE CALCUL INTÉGRAL.

NOTIONS GÉNÉRALES.

275. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel, et consiste par conséquent à trouver l'expression d'où une formule différentielle est censée avoir été tirée par la différenciation, en supposant, comme dans le Traité précédent, que les différences sont infiniment petites.

Malgré les simplifications que cette hypothèse de différences infiniment petites apporte dans les calculs, il s'en faut beaucoup que les géomètres possèdent des méthodes pour intégrer toutes les expressions différentielles; cependant ils ont porté l'art très-loin. Indépendamment des excellens ouvrages qui ont été publiés à part sur cette matière, les Mémoires des académies des sciences de Paris, de Berlin, de Pétersbourg, de Bologne, de Turin, de Gottingue, &c., contiennent une foule de profondes recherches sur l'analyse infinitésimale pure, ou sur ses applications aux plus importans problèmes des sciences physico-mathématiques. On sent qu'il n'est

Q 2

pas possible de faire entrer toutes ces découvertes dans un espace aussi borné que celui qui m'est prescrit par la nature de cet ouvrage; mais, au moins, je me propose de faire connaître ici à mes lecteurs l'art du Calcul intégral dans tout ce qu'il renferme de plus essentiel et de plus utile, et de les mettre en état de puiser immédiatement dans les sources que je viens d'indiquer.

Je diviserai ce Traité en trois parties: la première aura pour objet l'intégration des formules différentielles du premier ordre, où il n'entre qu'une seule variable. C'est ce qu'on appelle en général *le problème des Quadratures.*

La seconde traitera de l'intégration des expressions différentielles de tous les ordres, quel que soit le nombre des variables.

Dans la troisième j'exposerai les principes de cette branche qu'on appelle aujourd'hui *le Calcul intégral aux différences partielles.*

J'ajouterai à cet ouvrage un petit *Traité de la méthode des Variations*, et de ses usages. Elle s'applique principalement aux problèmes qui ont pour objet la recherche des courbes qui jouissent de quelques propriétés *de maximis et minimis.*

PREMIÈRE PARTIE.

De l'intégration des Formules différentielles du premier ordre, à une seule variable.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux : Applications diverses.

276. La remarque générale de l'article 49 s'applique ici. C'est par la manière dont on descend d'une grandeur finie à sa différentielle, qu'on est parvenu à trouver réciproquement la méthode pour remonter de la différentielle à la grandeur finie, dans un certain nombre de cas simples, auxquels on tâche ensuite d'en assimiler ou rappeler d'autres plus composés, par des transformations ou des opérations analytiques quelconques.

Avant d'entrer dans l'exposition de ces règles, j'avertis qu'on emploie le signe $\int$ placé au-devant d'une expression différentielle, pour indiquer l'intégrale de cette expression. Ainsi $\int dx\sqrt{(aa - xx)}$ veut dire *l'intégrale de la formule différentielle* $dx\sqrt{(aa - xx)}$, ou *la somme de toutes les expressions de cette espèce.*

On voit que le signe $\int$ est pour les intégrales des différences infiniment petites, ce que le signe Σ est pour les intégrales des différences finies. Ces signes

Q 3

s'appellent *signes d'intégration, signes sommatoires* : ils sont les signes inverses de d et Δ.

De-là, on différencie une intégrale *indiquée*, en ôtant le signe $\int$. Ainsi la différentielle de $\int dx\sqrt{(aa - xx)}$ est $dx\sqrt{(aa - xx.)}$

Règles simples et fondamentales pour l'Intégration.

277. Soit x une grandeur ou fonction variable quelconque. Puisque sa différentielle est dx, réciproquement l'intégrale de dx est x.

De même, la différentielle de x^2 étant $2xdx$, réciproquement l'intégrale de $2xdx$ est x^2; la différentielle de $x^{\frac{3}{2}}$ étant $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, l'intégrale de $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$ est $x^{\frac{3}{2}}$; la différentielle de $\frac{1}{x^2}$ ou de x^{-2} étant $-2x^{-3}dx$, l'intégrale de $-2x^{-3}dx$ est x^{-2} ou $\frac{1}{x^2}$.

En général, soit la formule x^m, m étant un exposant constant quelconque : la différentielle est $mx^{m-1}dx$; donc, réciproquement l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ est x^m.

Si l'expression x^m était affectée d'un coëfficient constant quelconque a, ou qu'on eût ax^m, la différentielle serait $max^{m-1}dx$, et l'intégrale de $max^{m-1}dx$ serait ax^m. La constante a affecte également la différentielle et l'intégrale : on peut donc mettre à l'écart cette constante pour abréger, sauf à la rétablir quand l'opération est achevée.

278. De-là résulte cette règle générale, qui est la base de tout le calcul intégral :

Pour intégrer la formule $x^n dx$, *ôtez* dx; *augmentez l'exposant* n *d'une unité, et divisez le tout par ce nouvel exposant.* Ainsi $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; ce que vous pouvez vérifier par la différenciation.

L'intégrale de $x^n dx$ se présente donc de cette manière immédiatement sous une forme finie, quel que soit l'exposant n, positif ou négatif, entier ou rompu, sauf le seul cas où $n = -1$, dont je parlerai tout à l'heure.

En appliquant cette règle à des exemples, on trouvera $\int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}$; $\int x^{-5} dx = -\frac{x^{-4}}{4}$; ainsi des autres.

On doit avoir soin d'ajouter à chaque intégrale une constante arbitraire; car la différentielle de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ et celle de $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, étant également $x^n dx$, réciproquement l'intégrale de $x^n dx$ peut être, ou simplement $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ou $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. La constante C se détermine par les conditions du problème qui a donné lieu à l'intégration, comme on en a vu des exemples dans l'introduction, et comme on en verra une multitude dans la suite : elle peut être zéro, ou avoir une valeur finie quelconque, positive ou négative, et quelquefois une valeur infinie. Si, pour

Q 4

abréger, nous ne l'écrivons pas toujours, elle doit au moins être toujours sous-entendue.

281. *Corollaire I.* Résumons, et concluons que l'intégrale $\int x^n dx$ peut s'exprimer par $\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ pour tout nombre n autre que -1, et par $l\frac{x}{a}$ pour la valeur particulière $n = -1$. Si, pour abréger, on omet la constante a ajoutée en intégrant, l'intégrale est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ dans le premier cas, et lx dans le second.

282. *Corollaire II.* La règle précédente s'applique

immédiatement à toutes les différentielles monomes, puisque toutes ces différentielles sont réductibles à la forme $x^n dx$, ou $kx^n dx$, k étant un coëfficient constant, qui doit affecter l'intégrale comme il affecte la différentielle. Elle s'appliquera aussi aux différentielles complexes qui pourront être développées en termes de la forme précédente : en voici quelques exemples.

283. EXEMPLE I. *Intégrer* $dx(a + bx + cx^2)^2$.

Je développe la puissance 2 de $a + bx + cx^2$; ce qui change l'expression proposée en celle-ci, $a^2dx + 2abxdx + b^2x^2dx + 2acx^2dx + 2bcx^3dx + c^2x^4dx$. Alors chaque terme en particulier est de la forme $kx^n dx$. Intégrant donc successivement tous les termes, et ajoutant ensemble toutes les intégrales, la somme sera l'intégrale demandée, puisqu'un tout n'est autre chose que la somme de ses parties. Cette intégrale est donc, $a^2x + abx^2 + \frac{b^2x^3}{3} + \frac{2acx^3}{3} + \frac{bcx^4}{2} + \frac{c^2x^5}{5} + C$; C étant une constante arbitraire.

III) Cauchy (1821), Riemann (1860), Lebesgue (1902), les théoriciens.

Newton et Leibniz avaient **construit** une intégrale.

Partis d'une figure, ils étaient parvenus à faire entrer les infiniment petits dans les calculs. Leur réussite, au-delà de toute espérance, s'identifia à un nouveau calcul alors qu'il s'agit d'« une clef universelle, alliance intime entre algèbre et géométrie »(Chasles), entre figure et nombre. La nouvelle écriture algébrique, créée pour les équations vers 1637, trouvait un autre champ d'investigation dès 1665. **Le nombre x initialement inconnu et fixe devenait un nombre x connu et variable.**

L'écriture algébrique permettait un nouveau calcul sur les quantités variables supposées connues : méthode analytique. Euler fit merveille avec ses collègues du XVIIIè siècle, les Bernoulli, L'Hospital,....

Cauchy, 1821.

Pourtant, à l'aube du XIXè siècle, si moult problèmes étaient résolus, aucune théorie n'avait vu le jour ! Les calculs différentiel et intégral fonctionnaient merveilleusement sans justification bien claire.

Dans son « Cours d'analyse algébrique » de l'Ecole polytechnique, Cauchy allait donner la première vraie théorie de l'intégrale.

« Analyse algébrique ». La dénomination est correcte. L'écriture est algébrique par ses origines. La méthode est analytique. Mais mon tout est de la géométrie algébrique. (Les fonctions resteront du domaine de l'algèbre jusqu'au début du XXè siècle.)

Riemann, 1860.

Pourtant les questions réapparaissent rapidement. La « rigueur » de Cauchy va s'avérer très insuffisante pour les géomètres allemands. Weierstrass précisait : « Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me paraît très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour que contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain. » Et Riemann le visionnaire va donner une nouvelle théorie de l'intégration, toujours à partir d'une intuition figurale.

Lebesgue, 1902.

Encore une fois, les réponses apportées par Riemann vont surtout susciter des ...questions. La principale étant : du côté des nombres, les géomètres ne savent pas bien dans quel domaine ils prennent ce nombre x tant usité. Cette interrogation va mener à l'ensemble des nombres réels, à la théorie des ensembles (1880) et enfin à la droite réelle, magnifique objet de la géométrie algébrique. Dès lors, les théories ..... de la mesure se succèdent et Lebesgue peut entrer en scène avec une nouvelle intuition géométrique. « Intégrale, longueur, aire. » L'intitulé de la thèse de Lebesgue (1902) est d'une redoutable simplicité. C'est ça le génie !

Il commence par construire les ensembles mesurables et en 90 pages renouvelle complètement la théorie de l'intégration. Méthode du caissier pour compter et découpage des « y ». Les théorèmes sont alors d'une totale nouveauté.

Cauchy : Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1823.

VINGT-UNIÈME LEÇON.

Intégrales définies.

SUPPOSONS que, la fonction $y=f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x=x_0$, $x=X$, on désigne par x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs, pour diviser la différence $X-x_0$ en élémens

(1) $$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ x_3-x_2,\ \ldots\ X-x_{n-1},$$

qui seront tous de *même* signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'*origine* de ce même élément, savoir, l'élément x_1-x_0 par $f(x_0)$, l'élément x_2-x_1 par $f(x_1)$, &c.., enfin l'élément $X-x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soit

(2) $$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment, 1.° du nombre n des élémens dans lesquels on aura divisé la différence $X-x_0$, 2.° des valeurs mêmes de ces élémens, et par conséquent du mode de division adopté. Or, il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des élémens deviennent très-petites et le nombre n très-considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence *insensible*. C'est effectivement ce que l'on peut démontrer, comme il suit.

Si l'on supposait tous les élémens de la différence $X-x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

(3) $$S=(X-x_0)f(x_0).$$

Lorsqu'au contraire on prend les expressions (1) pour élémens de la différence $X-x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des élémens multipliée par une moyenne entre les coefficiens

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots\ f(x_{n-1})$$

D'ailleurs, ces coefficiens étant des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0+\theta(X-x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnemens semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la 7.ᵉ leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mêmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

(4) $$S=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)],$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.

Pour passer du mode de division que nous venons de considérer à un autre dans lequel les valeurs numériques des élémens de $X-x_0$ soient encore plus petites, il suffira de partager chacune des expressions (1) en de nouveaux élémens. Alors on devra remplacer, dans le second membre de l'équation (2), le produit $(x_1-x_0)f(x_0)$ par une somme de produits semblables, à laquelle on pourra substituer une expression de la forme

$$(x_1 - x_0)\, f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)],$$

θ_0 étant un nombre inférieur à l'unité, attendu qu'il y aura entre cette somme et le produit $(x_1 - x_0) f(x_0)$ une relation pareille à celle qui existe entre les valeurs de S fournies par les équations (4) et (3). Par la même raison, on devra substituer au produit $(x_2 - x_1) f(x_1)$ une somme de termes qui pourra être présentée sous la forme

$$(x_2 - x_1)\, f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)],$$

θ_1 désignant encore un nombre inférieur à l'unité. En continuant de la sorte, on finira par conclure que, dans le nouveau mode de division, la valeur de S sera de la forme

$$(5)\quad S = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] + \dots + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1})].$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0,\quad f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \dots \dots\dots\; f[x_{n-1} + \theta_{n-1} (X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1},$$

on en tirera

$$(6)\quad S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

puis, en développant les produits,

$$(7)\quad S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}).$$

Ajoutons que, si les élémens $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ ont des valeurs numériques très-petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1$, ... $\pm\varepsilon_{n-1}$ différera très-peu de zéro, et que par suite il en sera de même de la somme

$$\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1) \pm \dots\dots \pm \varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}),$$

qui est équivalente au produit de $X - x_0$ par une moyenne entre ces diverses quantités. Cela posé, il résulte des équations (2) et (7) comparées entre elles qu'on n'altérera pas sensiblement la valeur de S calculée pour un mode de division dans lequel les élémens de la différence $X - x_0$ ont des valeurs numériques très-petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces élémens se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à-la-fois deux modes de division de la différence $X - x_0$, dans chacun desquels les élémens de cette différence aient de très-petites valeurs numériques. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi, que chaque élément, soit du premier, soit du second mode, se trouve formé par la réunion de plusieurs élémens du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très-peu la valeur de S, en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent, en passant du premier au second. Donc, lorsque les élémens de la différence $X-x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces élémens, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$, et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie.*

Observons maintenant que, si l'on désigne par $\Delta x = h = dx$ un accroissement fini attribué à la variable x, les differens termes dont se compose la valeur de S, tels que les produits $(x_1-x_0)f(x_0)$, $(x_2-x_1)f(x_1)$, &c... seront tous compris dans la formule générale

$$hf(x) = f(x)\,dx \tag{8}$$

de laquelle on les déduira l'un après l'autre, en posant d'abord $x=x_0$ et $h=x_1-x_0$, puis $x=x_1$ et $h=x_2-x_1$, &c... On peut donc énoncer que la quantité S est une somme de produits semblables à l'expression (8); ce qu'on exprime quelquefois à l'aide de la caractéristique Σ en écrivant

$$S = \Sigma h f(x) = \Sigma f(x)\,\Delta x. \tag{9}$$

Quant à l'intégrale définie vers laquelle converge la quantité S, tandis que les élémens de la différence $X-x_0$ deviennent infiniment petits, on est convenu de la représenter par la notation $\int hf(x)$ ou $\int f(x)\,dx$, dans laquelle la lettre $\int$ substituée à la lettre Σ indique, non plus une somme de produits semblables à l'expression (8), mais la limite d'une somme de cette espèce. De plus, comme la valeur de l'intégrale définie que l'on considère dépend des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x, on est convenu de placer ces deux valeurs, la première au-dessous, la seconde au-dessus de la lettre $\int$, ou de les écrire à côté de l'intégrale, que l'on désigne en conséquence par l'une des notations

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}. \tag{10}$$

La première de ces notations, imaginée par M. *Fourier*, est la plus simple. Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est remplacée par une quantité constante a, on trouve, quel que soit le mode de division de la différence $X-x_0$, $\quad S = a(X-x_0)$, $\quad$ et l'on en conclut

$$\int_{x_0}^{X} a\,dx = a(X-x_0). \tag{11}$$

Si, dans cette dernière formule on pose $a=1$, on en tirera

$$\int_{x_0}^{X} dx = X-x_0. \tag{12}$$

B) Riemann: rappel de ses idées par Lebesgue.

I. Intégrale définie des fonctions d'une variable.

15. Au point de vue géométrique le problème de l'intégration peut se poser ainsi :

Étant donnée une courbe C par son équation $y = f(x)$ (f est une fonction continue positive, les axes sont rectangulaires) trouver l'aire du domaine limité par un arc de C, un segment de $0x$ et deux parallèles à l'axe des y d'abcisses données a et b, $(a < b)$.

Cette aire s'appelle l'intégrale définie de f prise entre les limites a et b, elle se représente par $\int_a^b f(x)\,dx$.

Archimède en quarrant un segment de parabole a résolu un cas particulier de ce problème. La méthode classique applicable au cas général consiste essentiellement à évaluer les étendues intérieure et extérieure du domaine à l'aide d'une division du plan en rectangles dont les côtés sont parallèles à $0x$ et $0y$. Pour avoir ces rectangles traçons d'abord des parallèles à $0y$, puis divisons les bandes obtenues par des segments parallèles à $0x$, d'ordonnées variables d'une bande à l'autre. Si l'un R_1 des rectangles R ainsi formés doit être considéré pour calculer l'une des étendues, tous les rectangles R situés dans la même bande et compris entre R_1 et $0x$ doivent aussi être considérés pour le calcul de la même étendue. Les étendues sont donc des limites de sommes d'aires de rectangles ayant leurs bases sur $0x$.

Soient δ_1, $\delta_2, \ldots$ les longueurs de ces bases; m_1, $m_2, \ldots$, M_1, $M_2, \ldots$ les valeurs inférieures et supérieures de f dans les intervalles correspondants. Si l'on suppose les δ donnés, c'est-à-dire les parallèles à $0y$ tracées, et si l'on choisit les segments parallèles à $0x$ de manière à obtenir les valeurs les plus approchées possibles pour les étendues, on obtiendra pour ces valeurs approchées :

$$s = \Sigma\, \delta_i\, m_i \qquad S = \Sigma\, \delta_i\, M_i\,.$$

Ainsi on sait calculer les deux étendues du domaine; on démontre qu'elles sont égales, le problème que nous nous sommes posé a donc un sens et nous savons le résoudre.

Relativement aux fonctions f bornées quelconques M.r Darboux a démontré (*) que les deux sommes s et S tendent vers des limites parfaitement déterminées; on les appelle *intégrales par défaut* et *par excès*. Lorsque ces deux intégrales sont égales, et cela se présente pour d'autres fonctions que les fonctions continues, la fonction est dite *intégrable* et la limite commune de s et S est appelée depuis Riemann (**) *l'intégrale définie de f prise entre a et b.*

C) Lebesgue : une toute nouvelle technique.

Lebesgue : Intégrale, longueur, aire (1902)

ChapitreI : Mesure des ensembles

I. ...

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes :

1.° Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.

2.° Deux ensembles égaux ont même mesure.

3.° La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.

2. Supposons possible le problème de la mesure. Un ensemble formé d'un seul point a une mesure nulle car un ensemble borné contenant une infinité de points doit avoir une mesure finie. L'ensemble des points d'un segment MN a donc même mesure que M et N fassent ou non partie de l'ensemble; d'ailleurs MN ne peut avoir une mesure nulle sans qu'il en soit de même pour tout ensemble borné.

Choisissons un segment MN et attribuons lui 1 pour mesure. On sait que si l'on prend MN pour unité de longueur on peut attacher à chaque segment PQ un nombre, sa longueur; ce nombre est aussi la mesure de l'ensemble des points de PQ. Pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que si la longueur l de PQ est commensurable et égale à $\frac{\alpha}{\beta}$ il existe un segment RS contenu α fois dans PQ et β fois dans MN et que si l est incommensurable, à tout nombre λ inférieur à l correspond un segment contenu dans PQ, et de longueur λ et à tout nombre λ supérieur à l un segment contenant PQ et de longueur λ.

Pour que la 3e condition du problème de la mesure soit remplie, il faut que la longueur d'un segment somme d'un nombre fini ou d'une infinité d'autres segments, n'empiétant pas les uns sur les autres, soit la somme des longueurs de ces segments.

Des propriétés des longueurs il résulte qu'il en est bien ainsi si les segments composants sont en nombre fini; cela est encore vrai s'ils sont en nombre infini. (*Voir les Leçons sur la Théorie des fonctions*, de M.r Borel.)

3. Un ensemble E étant donné, on peut d'une infinité de manières enfermer ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles. L'ensemble E_1 des points de ces intervalles contient E; donc la mesures $m(E)$ de E est au plus égale à celle $m(E_1)$ de E_1, c'est à dire au plus

égale à la somme des longueurs des intervalles considérés. La limite inférieure de cette somme est une limite supérieure de $m(E)$, nous l'appellerons la mesure extérieure de E, $m_e(E)$.

Supposons que tous les points de E appartiennent à un segment AB. Nous appellerons complémentaire de E par rapport à AB, $C_{AB}(E)$, l'ensemble $AB - E$. Puisque la mesure de $C_{AB}(E)$ est au plus $m_e[C_{AB}(E)]$ celle de E est au moins $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Ce nombre ne dépend pas de celui des segments AB contenant E choisi; nous l'appellerons la mesure intérieure de E, $m_i(E)$. Deux ensembles égaux ont des mesures intérieures égales et des mesures extérieures égales. D'ailleurs puisque l'on a:

$$m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geqq m(AB)$$

la mesure extérieure n'est jamais inférieure à la mesure intérieure. Si le problème de la mesure est possible, la mesure d'un ensemble E est comprise entre les deux nombres $m_e(E)$, $m_i(E)$ que nous venons de définir.

4. Nous appellerons *ensembles mesurables* (*) *ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales*, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible. Des propriétés qui suivent il résultera que le nombre $m(E)$ ainsi défini satisfait bien aux conditions du problème de la mesure *si l'on s'astreint à ne considérer que des ensembles mesurables.*

La définition des ensembles mesurables est équivalente à celle ci: Un ensemble E est dit mesurable s'il est possible d'enserrer ses points dans des intervalles α, et ceux de son complémentaire dans des intervalles β de manière que la somme des longueurs des parties communes aux α et aux β soit aussi petite que l'on veut.

Mesure de Borel, mesures de Radon.

A) Les mesures abstraites (ou de Borel)

Maintenant que nous connaissons TOUS les nombres réels (au sens de l'analyse du 19è siècle), il reste à mesurer toutes les parties de la droite réelle. Pour cela, il est important que ces mesures généralisent la mesure usuelle de l'intervalle [a,b] avec quelques propriétés liées au bon sens. En particulier que la somme des mesures d'intervalles (puis d'ensembles) disjoints soit la mesure de leur somme.

Borel eut la meilleure intuition en limitant ses ambitions à la mesure des tribus d'ensembles. On ne sait finalement mesurer que les intervalles, leurs réunions et leurs intersections. Cette mesure de l'aveyronnais Emile Borel (1871-1956) eut et a encore un franc succès car elle généralise vraiment bien la distance usuelle aux espaces métriques définis par Fréchet en 1908. De plus, elle reste très proche de notre intuition spatiale.

Trois axiomes suffisent :

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparabilité)

$d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie)

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

(Inégalité triangulaire,Euclide, livre I, proposition 20)

Trois concepts dont l'origine est très liée à l'espace, vous en conviendrez !
Trois concepts spatiaux traduits en nombres.

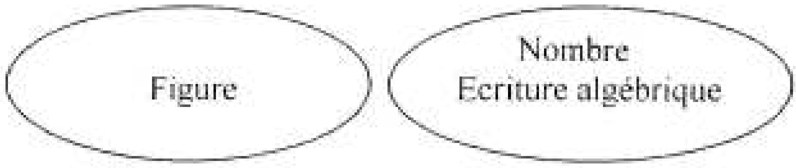
II) Les mesures de Radon

Laurent Schwartz, dans « un mathématicien aux prises avec le siècle » écrit dans un paragraphe intitulé « des erreurs de bourbaki » : « dans l'évaluation des probabilités, Bourbaki a commis de franches erreurs. Antérieurement existaient les mesures abstraites ou de Borel sur des ensembles munis d'une tribu. Bourbaki a introduit, sous l'influence d'André Weil et de son livre remarquable *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, paru en 1940 et que j'ai beaucoup travaillé, les mesures de Radon sur les espaces localement compacts. Il y a donc deux théories de la mesure, également nobles, très étrangères l'une à l'autre : mesure abstraite et mesure de Radon. Le terme d'abstrait est ici un peu ridicule. Les « *espaces abstraits* » de Fréchet sont tous ceux qui sont « *quelconques* », ils généralisent les espaces usuels, la droite, le plan, l'espace à trois dimensions « dans lequel nous vivons » ; les mesures abstraites sont des généralisations de la mesure de Lebesgue sur des « espaces abstraits ». Bourbaki a totalement privilégié les mesures de Radon et rejeté les autres. Or les probabilités nécessitent les autres. »

Une conclusion géométrique.

I) La méthode constructive

Après la géométrie de mesure des Babyloniens et Egyptiens, puis la géométrie d'Euclide et la géométrie de Descartes, l'écriture algébrique fait entrer les infiniment petits dans la géométrie. Le calcul devient prépondérant.



Le nombre x, donné et variable, fait merveille dans cette « analyse-algébrique ».

II) La théorie déductive

Dans un second temps, les théories font encore progresser le calcul intégral. En devenant théorie de l'intégration, le calcul intégral, science de la mesure, devient à son tour un savoir déductif.

Est-il plus certain muni de la théorie de Cauchy ? La réponse n'est pas évidente. Pourtant cette recherche a permis à Riemann de s'interroger sur ses déficiences et, là encore, une interrogation sur le nombre x a permis des progrès.

Les théories de la mesure et une dernière (?) intuition géométrique ont donné l'intégrale de Lebesgue. Cependant, le problème étant de mesurer des grandeurs continues-les surfaces principalement- **l'intégrale de Cauchy suffit le plus souvent**. **La simplicité de sa construction** devrait en faire encore pour quelques temps la base de l'exposé de l'intégration.

Les géomètres de la Révolution Française (à l'exception de Condorcet) pensaient « la mine trop profonde » mais ils laissaient une porte ouverte en disant « qu'à moins qu'on ne trouve de nouveaux filons, il faudrait l'abandonner. »

Qu'en est-il de l'intégrale ?

Les nouveaux nombres de l'analyse non-standard sont-ils ce nouveau filon ? Ou bien les progrès viendront-ils de la mesure de Radon chère à Bourbaki ?

Figures ou nombres ?
D'où viendra la prochaine intuition créatrice ?

7. LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE
Monge 1748, 1818.

Après de remarquables études, Gaspard Monge (1746-1818) se voit confier un poste d'enseignant de physique dès l'âge de 16 ans. Passionné par le dessin technique, il crée une nouvelle technique géométrique dans ses 9 leçons de l'Ecole Normale.

Il énonce : « la géométrie descriptive sert à représenter sur une feuille de dessin, qui n'a que 2 dimensions, tous les corps de la nature qui en ont trois, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement ».

Ainsi le principe de la géométrie descriptive est de projeter un « objet rigoureusement défini » sur 2 plans perpendiculaires, un plan de base horizontal et un plan frontal vertical, plans se coupant suivant la ligne de terre.

Cette méthode permet d'avoir 2 vues en vraie grandeur de l'objet. Pour ce qui nous intéresse, nous retiendrons:

1) Monge reprend un principe de projection proche de celui des repères cartésiens.

2) La géométrie est une méthode de construction.

3) La partie mesure des objets reste implicite. Monge ne mesure pas ses objets avec des nombres mais bien sûr cherche à obtenir des résultats métriques avec de vraies grandeurs sur les plans de projection.

4) La partie logique de la géométrie reste aussi implicite même si le raisonnement est sous-jacent.

5) La géométrie descriptive est restreinte aux « corps rigoureusement définis » i.e. les objets de la géométrie (et pas les objets de la nature).

A l'aube de la révolution industrielle, la géométrie descriptive, inventée par un des créateurs de l'école Polytechnique, connaîtra un franc succès.

Bien que la partie mesure et la partie logique restent implicites, elle donne incontestablement une bonne vision dans l'espace, une bonne description des objets étudiés.

Page suivante , un problème de géométrie descriptive extrait du « Journal de mathématiques élémentaires » de Juillet 1911.

JOURNAL DE

MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

OCTOBRE 1911

... La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille.

Une droite de front F a pour trace horizontale un point situé à 10cm en avant de xy et à 10cm à gauche du grand axe zz' de la feuille ; de plus, la projection verticale de F, dirigée vers la droite et au-dessus de xy, fait avec xy un angle de 30°.

La droite F est l'axe d'un cône de révolution dont le sommet se projette à 10cm à droite de zz', et dont le demi-angle au sommet vaut 30°.

On considère le tronc de cône obtenu en coupant ce cône par deux plans perpendiculaires à son axe, menés à gauche du sommet, et à des distances de ce sommet égales à 5cm et 15cm.

Représenter par ses deux projections la partie du volume de ce tronc de cône située au-dessus du plan horizontal de projection et au-dessous du plan symétrique du plan de la grande base du tronc par rapport au plan horizontal qui contient le centre de cette base.

On fera la distinction des parties vues et cachées en supposant le cône opaque.

Le cône a un plan tangent horizontal. On obtient sans difficulté ses contours apparents en menant des points s et s' des tangentes aux contours apparents de même nom de la sphère inscrite (o, o').

La projection verticale du solide restant se compose de l'hexagone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\sigma'\varepsilon'$. La projection horizontale se compose, outre les contours apparents du cône, de l'ellipse projection horizontale du cercle projeté verticalement en $\alpha'\beta'$, des arcs d'ellipse projection de $\sigma'\varepsilon'$, et de deux arcs de parabole, dont les projections verticales sont les droites $\sigma'\varepsilon'$ et $\gamma'\delta'$.

Détermination d'un point quelconque et de la tangente en ce point. — Toutes ces sections peuvent être considérées comme perspectives de l'une d'elles, par exemple du cercle section par le plan de bout $\alpha'\beta'$. Ce cercle se rabat sur un plan de front autour de la droite GG'. Le point α est rabattu en α_1, d'où sa projection horizontale α, telle que

$$ai = \alpha'\alpha_1.$$

Les intersections de la droite $(s\alpha, s'\alpha')$ avec les plans de bout $\sigma'\varepsilon'$ et $\gamma'\delta'$ donnent les points (m, m') et (n, n') des sections du cône par ces plans.

Les tangentes s'obtiennent de même : la tangente en (α, α') au cercle de base est rabattue suivant $\alpha_1 t_1$; la droite $(s t_1, ...)$ rencontre les plans de bout $\sigma'\varepsilon'$ et $\gamma'\delta'$ en t et t' d'où les tangentes mt, $m't'$, et nt, $n't'$.

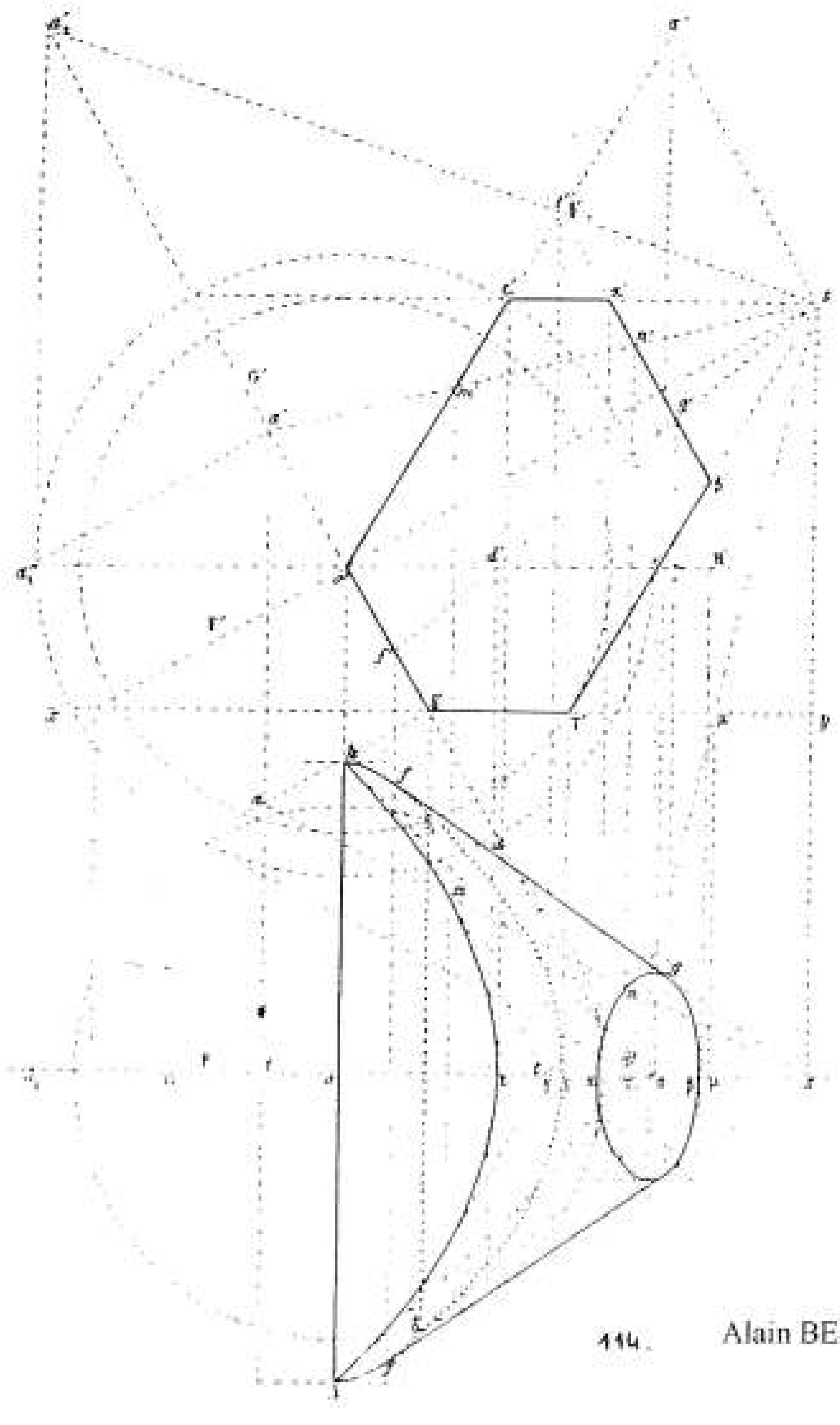
Points remarquables.

1° *Points sur le contour apparent horizontal.* La droite sd tangente à la sphère inscrite touche cette sphère au point d, dont la projection verticale est d' dans le plan horizontal ll' du centre. La droite sd, $s'd'$ rencontre les plans des bases en (g, g') et (f, f'), qui sont les points cherchés.

2° La détermination des autres points remarquables et des tangentes en ces points se fait par la méthode indiquée plus haut : ainsi les tangentes en (δ, δ') sont $\delta\tau$, $\delta'\tau'$ et $\delta\mu$, $\delta'\mu'$.

Visibilité. — On voit facilement que l'ellipse $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ est vue en projection horizontale, ainsi que l'arc de parabole ε. L'ellipse projection du cercle de base est vue dans la portion hf ; la portion $f\delta$ est cachée, ainsi que l'arc de parabole de sommet γ. Il en est de même de $\delta\delta_1$, intersection des plans des deux sections.

(GABRIEL ROUX, à Nîmes.)



Remarque. — On peut opérer beaucoup plus simplement. On sait en effet que le cône et le cylindre projetant horizontalement le cercle o se coupent suivant deux ellipses, situées par raison de symétrie dans des plans de bout (*Bases de Monge*). On pourrait prendre pour base du cône une de ces ellipses. Les constructions seraient très simples, car cette ellipse se projette horizontalement suivant le cercle o et verticalement suivant une droite.

ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. M. LEGENDRE,

AVEC ADDITIONS ET MODIFICATIONS,

PAR M. A. BLANCHET,

Ancien élève de l'École polytechnique,
directeur des études mathématiques de Sainte-Barbe.

TROISIÈME ÉDITION.

PARIS,
LIBRAIRIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE,
RUE JACOB, N° 56.
1854.

Explication des termes et des signes.

Axiome est une proposition évidente par elle-même.

Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*.

Problème est une question proposée qui exige une *solution*.

Lemme est une vérité employée subsidiairement pour la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème.

Le nom commun de *proposition* s'attribue indifféremment aux théorèmes, problèmes et lemmes.

Corollaire est la conséquence qui découle d'une ou de plusieurs propositions.

Scolie est une remarque sur une ou plusieurs propositions précédentes, tendant à faire apercevoir leur liaison, leur utilité, leur restriction ou leur extension.

Hypothèse est une supposition faite, soit dans l'énoncé d'une proposition, soit dans le courant d'une démonstration.

Le signe = est le signe de l'égalité; ainsi l'expression $A = B$ signifie que A égale B.

En 1794, la Convention demande à A.Legendre d'écrire un livre de mathématiques destiné à l'enseignement. Les « Eléments de géométrie » de Legendre seront un des livres de référence dans l'enseignement jusque vers 1850.

Pour exprimer que A est plus petit que B, on écrit $A < B$.

Pour exprimer que A est plus grand que B, on écrit $A > B$.

Le signe + se prononce *plus*; il indique l'addition.

Le signe — se prononce *moins*; il indique la soustraction: ainsi $A+B$ représente la somme des quantités A et B; $A-B$ représente leur différence, ou ce qui reste en ôtant B de A; de même $A-B+C$, ou $A+C-B$, signifie que A et B doivent être ajoutés ensemble, et que B doit être retranché du tout.

Le signe × indique la multiplication; ainsi $A \times B$ représente le produit de A par B. Au lieu du signe × on emploie quelquefois un point; ainsi $A \, . \, B$ est la même chose que $A \times B$. On indique aussi le même produit sans aucun signe intermédiaire par AB; mais il ne faut employer cette expression que lorsqu'on n'a pas en même temps à employer celle de la ligne AB, distance des points A et B.

L'expression $A \times (B+C-D)$ représente le produit de A par la quantité $B+C-D$. S'il fallait multiplier $A+B$ par $A-B+C$, on indiquerait le produit ainsi $(A+B) \times (A-B+C)$; tout ce qui est renfermé entre parenthèses est considéré comme une seule quantité.

Un nombre mis au-devant d'une ligne ou d'une quantité sert de multiplicateur à cette ligne ou à cette quantité; ainsi, pour exprimer que la ligne AB est prise trois fois, on écrit 3AB; pour désigner la moitié de l'angle A, on écrit $\frac{1}{2}A$.

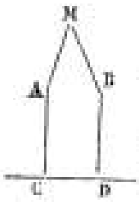
Le carré de la ligne AB se désigne par $\overline{AB}^2$; son cube par $\overline{AB}^3$. On expliquera en son lieu ce que signifient précisément le carré et le cube d'une ligne.

Le signe $\sqrt{}$ indique une racine à extraire; ainsi $\sqrt{2}$ est la racine carrée de 2; $\sqrt{A \times B}$ est la racine du produit $A \times B$, ou la moyenne proportionnelle entre A et B.

THÉORIE DES PARALLÈLES.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.



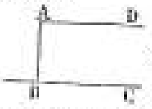
Deux droites AC, BD, *perpendiculaires sur une même droite* CD, *sont parallèles.*

Car, si elles se rencontraient en un point M, par exemple, on pourrait de ce point abaisser deux perpendiculaires sur CD.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Par un point on peut mener une parallèle à une droite.



Du point A abaissez AB perpendiculaire sur BC, et au même point menez AD perpendiculaire sur AB les deux droites AD et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AB, seront parallèles.

On admettra en second lieu, comme une proposition

évidente, que par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.

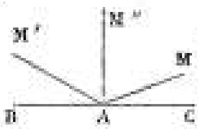
Quand le 5 ème postulat devient un théorème ......

Admis et .... évident . (Ouf !)

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME.

Par un point pris sur une droite on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.



En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A : elle formera deux angles adjacents, MAC, MAB, dont l'un, MAC, d'abord très-petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre, MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position AM'' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Cette démonstration faisant intervenir la continuité serait elle aujourd'hui considérée comme une démonstration ?

Corollaire. Tous les angles droits sont égaux.

Soient DC perpendiculaire sur AB, et HG perpendiculaire sur EF: je dis que l'angle DCB est égal à HGF. En effet, si l'on porte la droite EF sur AB, de manière que le point G tombe en C, GH prendra la direction CD; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite.

Legendre démontre le 4ème postulat d' Euclide !

8. LA GEOMETRIE VECTORIELLE, GEOMETRIE EN DIMENSION « N »

Cayley, 1821-1895
Grassmann, 1809-1877

Le vecteur des mathématiques modernes.

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Comment comprendre simplement les malheurs -non encore résolus- du vecteur dans l'enseignement ?

Les géométries projective et descriptive proposent des méthodes pour représenter -figurer- l'espace physique à 3 dimensions sur un rectangle de papier à 2 dimensions.

Vers le milieu du 19é siècle, Cayley en 1848 et Grassmann en 1844 et 1862 vont s'attaquer à un problème à priori ardu. Prolonger la géométrie à des espaces de dimensions supérieures à trois.

Curieuse idée.

Pour résoudre quel problème spatial ?

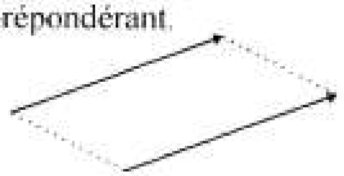
Le vecteur : une évolution finalement peu surprenante.
Première grille de lecture : les étapes épistémologiques du vecteur (selon Piaget).

Rappelons cette grille :
1. Géométrie locale (Euclide)
2. Géométrie globale (Descartes)
3. Géométrie des transformations (structures)

Nous retrouvons bien ces 3 étapes dans l'exposé des vecteurs.

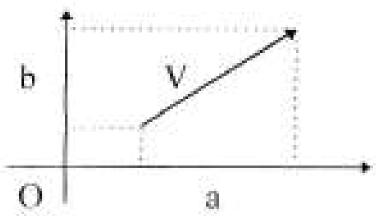
1. Le vecteur construit à partir des côtés parallèles d'un parallélogramme.

Le dessin est prépondérant.



2. Le vecteur défini à partir de ses composantes dans un repère.

Equilibre dessin-nombre.



3. Le vecteur devient élément d'un ...espace vectoriel.

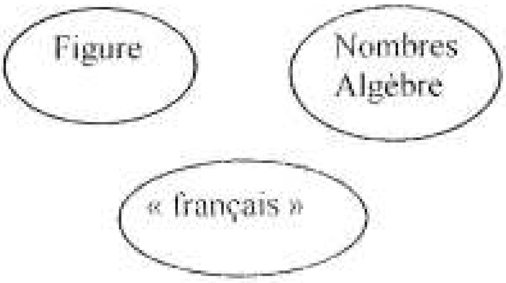
Des nombres, plus de dessin !!!!

Les nombres sont mis dans une **structure**, mais rappelons qu'un dessin se... cons**truit** !

Structurer = élever.

Il est temps d'aborder la seconde grille de lecture.

Seconde grille de lecture : les 3 langages.
Rappelons cette seconde grille.



1. Le vecteur dans la géométrie du parallélogramme vient de la figure.

2. Le vecteur par ses composantes s'exprime par des nombres (2 ou 3) dans le langage numérique ou algébrique.

3. Le vecteur, élément d'une structure algébrique.

Mais cette approche des vecteurs en dimension 2 ou 3 fait oublier les dimensions supérieures. L'événement étonnant, la description et l'étude d'espaces plus grands que l'espace physique eut lieu au milieu du 19è siècle en quelques années.

La géométrie projective a montré les difficultés pour représenter l'espace physique sur une « toile ». La figure limite beaucoup l'imagination dans cette méthode. Par contre, dès que le vecteur s'exprime par ses composantes, 2 ou 3 nombres, pourquoi se limiter à 3 dimensions ?

La théorie des grandeurs extensives de Grassmann.

Le linguiste Grassmann, spécialiste des langues indo-européennes, n'a écrit que 2 mémoires mathématiques à 18 ans d'intervalle en 1844 et 1862 .... et deux fois le même mémoire !

En 1844, Grassmann écrit un premier mémoire commençant par une longue théorie philosophique des « grandeurs extensives ».

Dürer, en 1525, évoque dans son « Introduction à l'art de mesurer » les grandeurs extensives. On dessine un point (si !), on tire sur le point et on obtient un segment. En tirant sur le segment, on obtient un rectangle, etc.....La méthode s'arrête vite côté dessin mais l'imagination la prolonge très bien en « français ».

Grassmann reprend cette idée sous forme très hermétique dans son premier exposé par trop philosophique. Peu de succès (euphémisme).

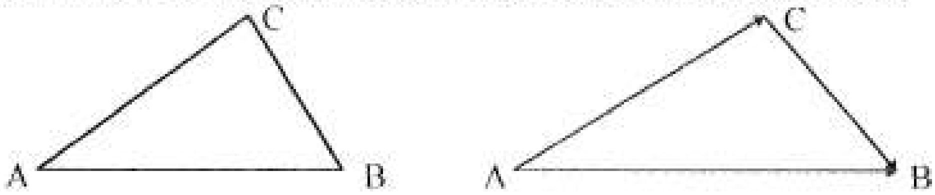
En 1862, Grassmann a abandonné son exposé philo au profit des nombres. Il donne en effet les axiomes d'espace vectoriel que Péano récupérera en 1888.

Ainsi Grassmann a écrit 2 fois le même mémoire dans 2 langages différents ! Pas étonnant pour un linguiste. Les mathématiciens ont bien sûr retenu la seconde version, écrite en langage algébrique. En très peu de temps, le vecteur représentant une force physique est devenu élément d'une structure vectorielle.

Un siècle plus tard, les concepteurs de la réforme dite des « maths modernes » considèreront la structure d'espace vectoriel comme la base (sic), le fondement de la géométrie. Revenons en 1844, Cayley travaille sur des n-uplets de nombres et fait ainsi exploser la géométrie qui devient la géométrie de nouveaux espaces, de dimensions quelconques (entières). Mais ce sont toujours des espaces.

Une remarque au passage sur les difficultés liées à ce genre d'espaces même en dimension deux.

Si l'on veut faire un dessin, ce vecteur, pour 3 points A, B, C non alignés transforme l'inégalité triangulaire des longueurs (le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite) en une égalité pour la somme des vecteurs.



$AB < AC + CB$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Clairement, la notion de vecteur ne se comprend en mathématique que comme élément d'une structure d'espace vectoriel ce qui va poser problème lors de son introduction dans l'enseignement.

Du côté de l'enseignement :

Avec beaucoup de retard, les vecteurs vont entrer massivement dans l'enseignement secondaire et -forcément- comme élément d'un espace vectoriel.

Comment faire autrement ?

Malheureusement, cette structure correspond à un stade avancé de la construction de l'espace chez le jeune, aussi les concepteurs des maths modernes ont cherché un « biais » d'apprentissage.

Ce fut la « géométrie du parallélogramme » proche de la géométrie d'Euclide et l'équipollence (si !) des bipoints utilisant seulement le stade N°1 de Piaget. (Ni repère cartésien, ni structure).

L'apprentissage se poursuivait par un rude passage aux espaces vectoriels dès la seconde. Pour comprendre la genèse et l'histoire de la réforme dite des « maths modernes » lire l'excellent article de B.Charlot dans les publications de la commission inter-IREM Histoire des maths.

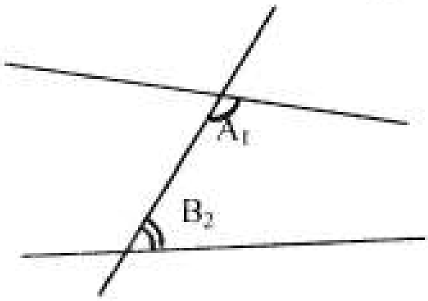
Aujourd'hui le calcul vectoriel reste dans les programmes du secondaire sans la notion de structure. Nous sommes ainsi revenus à un stade médian -au sens de Piaget- déduit du repérage du plan. Nous ne sommes plus restreints à la « géométrie du parallélogramme » mais nous n'avons plus droit aux structures algébriques.

9. LES GEOMETRIES NON-EUCLIDIENNES.[3]

Riemann (1826-1866)
Lobatchevski (1793-1856)

Rappelons les 5 postulats de la géométrie selon Euclide.
Trois postulats de construction :
1) De tout point à tout autre point, on peut tracer une ligne droite.
2) Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3) Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.
Un postulat d'égalité de figures :
4) Tous les angles droits sont égaux entre eux.
Le postulat d'Euclide :
5) Si une sécante rencontre 2 autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à 2 droits, ces 2 droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à 2 droits.

$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 < 2$ droits.



Reformulé au 18è siècle sous une forme équivalente : Par un point n'appartenant pas à une droite, il passe une seule parallèle à cette droite.
Cette formulation ouvre la voie aux géométries non-euclidiennes.
(D'où l'importance de l'écriture...)
De nombreuses écoles mathématiques depuis Euclide ont eu l'impression que le 5e postulat devait pouvoir se démontrer à partir des 4 précédents. Aprés de nombreux échecs, il restait la possibilité de remplacer cet axiome par un autre.
Lobatchevski choisit : Par un point n'appartenant pas à une droite, il passe une infinité de parallèles à cette droite.
Conséquence : La somme des angles d'un triangle est alors inférieure à 180 d.
Riemann choisit : Par un point n'appartenant pas à une droite, il ne passe pas de parallèle à cette droite.
Conséquence : La somme des angles d'un triangle est alors supérieure à 180 d.
Ils développérent de nouvelles géométries parfaitement logiques mais moins naturelles.

[3] Lire : « Sur les géométries non-euclidiennes » de l'IREMde Poitiers par Gaud, Guichard, Sicre et Souville.

La grande nouveauté est liée à la nature de lespace qui dépend de la géométrie mise en place. La géométrie ne se contente plus de mesurer l'espace, elle « définit » cet espace.

D'où la notion de courbure de l'espace et les idées sur la relativité développées à la suite de l'invention de ces nouvelles géométries.

Les géométries dites non-euclidiennes conservent quand même 4 des 5 axiomes d'Euclide et restent ainsi euclidiennes à 80 %.

La description de l'espace attaché à ces géométries semble ne pas correspondre à l'espace dans lequel nous vivons. En ce sens, ces géométries seraient non-euclidiennes.

Mais doit-on se fier à l'apparence où faire confiance aux informations données par les modèles mathématiques ?

Nous laisserons la conclusion à Poincaré : « Imaginant un monde sphérique conforme à la géométrie de Lobatchevski », Poincaré dit : « **Des êtres qui y feraient leur éducation trouveraient sans doute plus commode de créer cette géométrie, qui s'adapterait mieux à leurs impressions.**

Quant à nous, en face de ces mêmes impressions, il est certain que nous trouverions plus commode de ne pas changer nos habitudes ».

Superbe !

Les citations de la couverture de « Sur les géométries non-euclidiennes » donnent une idée du séisme engendré par les dites géométries dans la première moitié du 19è siècle.

Gauss à Bessel en 1829 : « J'ai peur des criaillements des ignorants. »

Et encore à la fin du siècle.

Henri Poincaré : « Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques *a priori* ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions. »

Et au 20è siècle.

Gaston Bachelard : « On retrouvera la géométrie euclidienne, à sa place, dans un ensemble, comme un cas particulier. »

Aurait-il voulu parler des Douze géométries ......?

10. LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS, OU GEOMETRIE DE SITUATION.

Camille Jordan (1838-1922)
Félix Klein (1849-1925)

En janvier 1980, Griess a explicité le 26^{e} et dernier groupe sporadique (groupe fini simple)-le monstre de Fisher-comme étant un groupe de transformations géométriques dans un espace de dimension 196 883. Ce groupe a environ 8.10^{53} éléments-environ c'est-à-dire à 5.10^{52} près....

Il existe entre les diverses parties de toute figure géométrique 2 sortes de rapports: les rapports de grandeur et les rapports de position.

Lazare Carnot

L'objet de la géométrie considérée d'une manière générale est d'étudier les propriétés des corps sous le rapport de leur étendue ou de leur configuration..... Malgré la distinction que nous venons d'établir entre ces 2 sortes de propriétés, on sent toutefois qu'elles ont entre elles la dépendance la plus intime et que souvent celles d'une espèce pourront conduire immédiatement à celles de l'autre. On a constamment réuni dans les recherches purement géométriques ces deux genres de propriétés parce que, en effet, il n'est aucun moyen de les isoler d'une manière absolument parfaite.

Poncelet, 1818

Les géométries descriptive et projective ont ouvert des voies dans l'étude et la description de l'espace. Le dessin technique est nettement lié à la géométrie descriptive. Le dessin d'art et l'architecture sont liés à la géométrie projective.

En ce début de 19e siècle, la géométrie améliore ses méthodes pour décrire l'espace et le ramener au plan de la feuille de papier, que ce soit celle de l'ingénieur ou celle de l'artiste.

La notion de transformation dont font partie les déplacements de points, ne va apparaître qu'au 19e siècle.

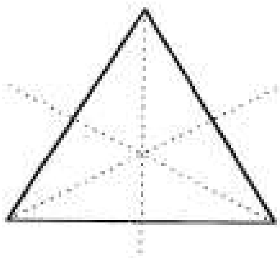
Le théorème de Thalès aurait pu amener à la notion d'homothétie, la mesure des angles aurait pu mener à la notion de rotation. Tel ne fut pas le cas. La science commence par rechercher des connaissances stables et immuables. Lazare Carnot, ingénieur et militaire, élève de Monge, et Poncelet, ingénieur et aussi élève de Monge furent des précurseurs dans la géométrie de position. Celle-ci doit beaucoup à Monge et à la technique.

Les travaux du célèbre Evariste Galois, mort en duel à 20 ans et 7 mois, après avoir trouvé la solution du problème de la « Résolubilité des équations par radicaux » datent de 1830. Ces travaux furent « enterrés » par l'Académie et il fallut attendre 1870 pour que Jordan les exhume. Galois avait eu l'idée des groupes finis (permutations des racines d'une équation).

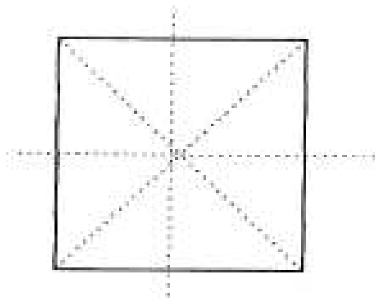
A la fin du 18è siècle, les mathématiciens pensaient devoir abandonner « la mine devenue trop profonde ». Soixante-dix ans plus tard, devant la prolifération des nouvelles géométries, Klein imagine son programme d'Erlangen proposant une classification des géométries à partir des groupes de transformations.

Les transformations géométriques sont enfin étudiées dans le corpus mathématique. Très curieusement, cette étude est une application des ......groupes algébriques .....aux invariants d'une figure géométrique !

Incorrigibles scientifiques qui étudient les transformations à partir de leurs invariants.



Groupe des isométries
du triangle équilatéral



Groupe des isométries
du carré.

UNE CONCLUSION

Les équations algébriques trouvent un aboutissement dans les équations de Maxwell en 1860.

Les structures algébriques trouvent très vite un (premier) aboutissement dans la théorie de la relativité (groupe de Lorentz) et tous les usages des groupes en physique .Lire à ce sujet le chapitre « les groupes prennent le pouvoir » du livre de Lochak intitulé : « la géométrisation de la physique ».

Les structures algébriques vont aussi permettre au groupe Bourbaki (toujours les structures....) de s'exprimer brillamment à partir de 1930.

Pendant ce temps, l'enseignement secondaire prend beaucoup, beaucoup de retard et ronronne sur la géométrie d'Euclide réduite depuis le 19e siècle à la « géométrie pure ».

Le réveil sera brutal.

VERS LES GEOMETRIES ABSTRAITES.

Revenons à Einstein qui disait : « Comment se fait-il que la mathématique qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité ? ».

Cette question nous surprend si l'on considère les travaux des arpenteurs de l'Antiquité créateurs du système de mesure sur lequel furent bâties les mathématiques. Mais quelle est la situation à la fin du 19^{è} siècle, juste avant l'apparition de la théorie des ensembles ? Les mathématiques sont en train de perdre leur....unité et en particulier le nombre des géométries, pourtant sensées décrire un unique monde, croît dangereusement.

Retour à l'unité : Klein, Lie et quelques autres réunifient les géométries autour de la notion de groupe.

A chaque groupe de transformation, ils attachent une géométrie.

1) Géométrie métrique (pléonasme)

Les translations, les rotations et les symétries forment le groupe des isométries laissant « invariantes » les figures au sens de ce groupe (loi interne). Les isométries ou mouvements forment **le groupe principal de la géométrie métrique**.

L'espace cartésien est associé à cette géométrie.

2) Géométrie euclidienne.

Les similitudes (y compris les isométries) forment un groupe laissant invariantes les figures au sens de ce groupe.

Le groupe des similitudes est **le groupe principal de la géométrie euclidienne**.

L'espace euclidien (ou cartésien) est associé à la géométrie euclidienne.

3) Géométrie affine.

Le groupe des affinités ou groupe affine est, bien sûr, le groupe principal de la géométrie affine.

L'espace associé est l'espace affine ou arguésien (Desargues).

4) Géométrie projective.

Le groupe projectif est le groupe principal de cette géométrie. Ses transformations laissent invariantes les figures dans ce groupe.

L'espace projectif, avec point à l'infini, lui est associé.

En 1872, Klein généralise cette méthode dans le fameux programme d'Erlangen.

Une géométrie abstraite est définie par :

Définition : Soit une variété V d'éléments appelés points.

Soit un groupe G de transformations opérant sur les points de V.

Alors ==> la géométrie définie sur V par le groupe (principal) G est formée des propriétés de l'espace V **invariantes** par G.

Chaque géométrie (V,G) structure un espace associé.

La nouveauté est d'importance car **la géométrie**, à travers les transformations autorisées, **AGIT sur l'espace**. La géométrie ne se contente plus de mesurer des objets, elle les transforme. Or, le théorème de Thalès n'a pas donné à son auteur l'idée d'homothétie. La rotation n'est pas plus étudiée dans l'Antiquité et la symétrie est une propriété interne d'une figure, pas une transformation !

Homothétie, rotation, symétrie ne deviennent des transformations qu'au 19e siècle, pas avant !

Encore cette métamorphose ne s'effectue-t-elle qu'avec moult précautions que vous aurez notées : structure, invariance, loi interne. Les garde-fous sont nombreux. (Sans oublier les 2 propriétés d'un groupe : élément neutre et pouvoir revenir en arrière avec une transformation réciproque !).

Que de précautions pour se décider à transformer !

Voilà pourquoi Einstein évoque « une » géométrie indépendante de toute expérience. L'espace de la relativité est structuré par le groupe de Lorentz. Aucune expérience n'avait eu lieu mais une géométrie abstraite décrivait son espace.

Abstraction, abstraction, nous prenons la direction des maths dites modernes et de quelques malheurs de l'enseignement...........

Peu à peu, les avancées du savoir font disparaître la figure au profit des calculs vectoriel et matriciel ou des groupes, voire des raisonnements.

Jusqu'à ce qu'un Mandelbrot fasse ressurgir la figure comme élément fondateur d'une « nouvelle » géométrie. Et puis Einstein pouvait-il réellement se passer de la géométrie d'Euclide ?

Et jusqu'où une géométrie est-elle abstraite ?

L'axiomatique
David Hilbert(1862-1943)

Le vrai problème qu'a à affronter l'enseignement des mathématiques n'est pas le problème de la rigueur, mais le problème de la construction du sens, de la justification ontologique des objets mathématiques. [.....] On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification ; l'absolue rigueur n'est possible que dans et par l'insignifiance. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens.

René Thom

Un livre « Les fondements de la géométrie » et une conférence « Sur les problèmes futurs des mathématiques » ont marqué le tournant du siècle dans la communauté mathématique.

Les espaces hilbertiens sont un des piliers des études mathématiques.

Nous avons vu les profondes transformations subies par la géométrie au 19è siècle. La géométrie reste 2300 ans après Euclide la science par excellence et Hilbert écrit bel et bien « Les fondements de la géométrie » et non de l'analyse ou de l'algèbre! Il propose d'ailleurs de remplacer les mots « point, droite, plan » par « chaise, table et chope de bière » mais il ne le fait pas. Pourquoi d'ailleurs ne propose-t-il pas de remplacer « géométrie » par « taverne » ?

« Sur les problèmes futurs des mathématiques » propose, en 1900, un programme de recherche pour le siècle ! Comme le siècle est en voie de se terminer....

L'introduction contient quelques précieux enseignements. On peut y lire :

« L'histoire enseigne la continuité du développement de la Science; »

..................!!

Un mathématicien français des temps passés a dit : « une théorie mathématique ne doit être regardée comme parfaite que si elle a été rendue tellement claire qu'on puisse la faire comprendre au premier individu rencontré dans la rue.

..................!!!

A de nouvelles idées correspondent nécessairement de nouveaux symboles ; nous devons choisir ces derniers de manière qu'ils nous rappellent les phénomènes qui ont été à l'origine de nouvelles idées. Ainsi les figures de la géométrie sont des symboles qui nous rappellent l'intuition de l'espace, et c'est ainsi que tout mathématicien les emploie.

..................!!!!

Comment se passerait-on de la figure du triangle, du cercle avec son centre, ou de la figure formée par trois axes rectangulaires ? Et qui donc renoncerait à la représentation des vecteurs...

....................!!!!!

Les signes et symboles de l'Arithmétique sont des figures écrites, et les figures géométriques sont des formules dessinées : aucun mathématicien ne pourrait se passer de ces formules dessinées, pas plus qu'il ne pourrait, dans les calculs, se passer de parenthèses ou de crochets ou autres signes analytiques.

.......................!!!!!!

Par contre, dans la conclusion, on trouve : « Cette conviction de la possibilité de résoudre tout problème mathématique est pour nous un précieux encouragement pendant le travail. Nous entendons toujours résonner en nous cet appel : *Voilà le problème, cherches-en la solution. Tu peux la trouver par le pur raisonnement. Jamais, en effet, un mathématicien ne sera réduit à dire : Ignorabimus* ».

Quelques problèmes parmi les 23 problèmes de Hilbert.

I. Problème de M.Cantor relatif à la puissance du continu.
.... au point de vue de l'équivalence, il n'y aurait donc que deux ensembles de nombres : l'ensemble dénombrable et le continu..............

II. De la non-contradiction des axiomes de l'Arithmétique.
.... démontrer qu'en se basant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques................

X. De la possibilité de résoudre une équation de Diophante.
On donne une équation de Diophante à un nombre quelconque d'inconnues et à coefficients entiers rationnels : on demande de trouver une méthode par laquelle, au moyen d'un nombre fini d'opérations, on pourra distinguer si l'équation est résoluble en nombres entiers rationnels.
(voir le théorème de Fermat)

Et de conclure
....
Le caractère d'unité de la Mathématique est l'essence même de cette Science. En effet, les Mathématiques sont les fondements de toutes les connaissances naturelles exactes. Pour qu'elles remplissent complètement ce but élevé, puissent-elles être dans le nouveau siècle cultivées par des maîtres géniaux et par nombre de jeunes gens brûlant d'un noble zèle !

LE TEMPS EST RELATIF

Où l'on voit une application conjointe des 3 stades de l'épistémologie conçus par Piaget.

stade 1) Le théorème de Pythagore (encore !)
stade 2) Les repères du plan.
stade 3) Les déplacements.

Présenté dans un mémoire en 1905, la théorie de la Relativité est probablement la plus célèbre des théories scientifiques du 20$^{\text{è}}$ siècle. En 1905, Einstein a 26 ans.

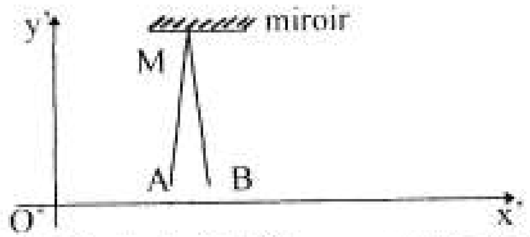
Depuis 1888, les scientifiques savent, par les expériences de Michelson, que la vitesse de la lumière est constante dans toutes les directions et ne s'ajoute ni ne se retranche dans 2 mouvement relatifs.

Einstein est physicien et doit obéir à l'expérience.

Il imagine, selon sa méthode habituelle, une expérience par la pensée devant tirer les conséquences des expériences de Michelson. Cette expérience est plus facile à monter et avouons qu'il n'est pas loin de faire des mathématiques.

En physique, la distance d, la vitesse v et la durée t sont liées par la relation du 1$^{\text{er}}$ degré: $d = v.t$.

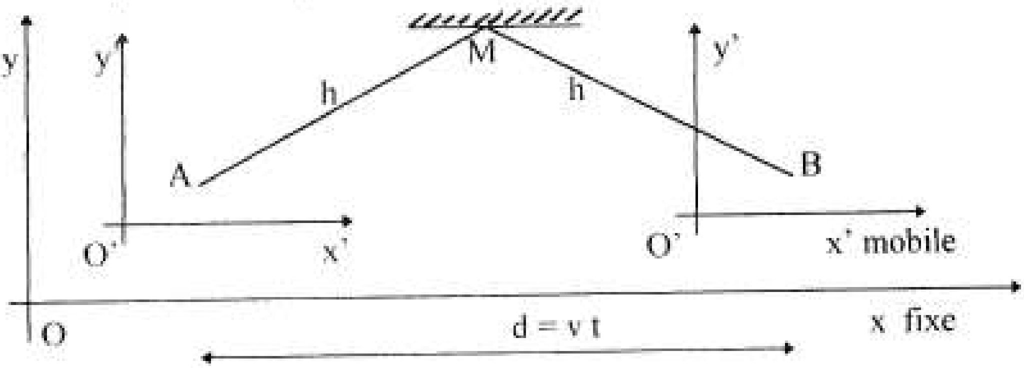
AM = a



Un rayon lumineux va de A à M puis de M à B parcourant la distance 2a pendant la durée t'.

On a : $2a = c\,t'$ où c est la vitesse de la lumière.

Plaçons ce repère x'O'y' dans un repère fixe xOy et faisons se translater le repère x'O'y' d'une distance d pendant le trajet du rayon lumineux. (Il faut aller vite)



Pendant le déplacement de longueur d, d'une durée t, le rayon lumineux parcourt la distance 2 h ce qui donne $2h = ct$ selon Michelson.

Appliquons l'inévitable théorème de Pythagore: $h^2 = \frac{d^2}{4} + a^2$

Remplaçons : $h = \frac{c\,t}{2}$; $d = vt$; $a = \frac{c\,t'}{2}$

Nous obtenons: $c^2 t^2 = v^2 t^2 + c^2 t'^2$ puis $t^2 (c^2 - v^2) = c^2 t'^2$

$$t^2 = \frac{t'^2}{1 - v^2 / c^2}$$

Comme on pouvait s'en douter, cette célèbre relation est clairement du 2ème degré entre le temps t dans le repère xoy et le temps t' dans le repère x'o'y'. Elle est une application du théorème de Pythagore.

Pour un même mouvement, un observateur situé dans le repère mobile mesurera un temps t' inférieur au temps t mesuré dans le repère fixe. Il vieillira moins vite que l'observateur resté immobile. (d'où l'intérêt de bouger)

Pour ce qui nous concerne, 3 types de géométries interviennent, toutes 3 indispensables.

1) La géométrie d'Euclide (ou de Pythagore).

2) La géométrie « analytique » (pour se repérer)

3) La géométrie des transformations (pour le mouvement de translation).

Laissons à Einstein la conclusion sur cette expérience théorique : « si la théorie de la relativité se révèle juste, les Allemands diront que je suis allemand, les Suisses que je suis suisse et les Français que je suis un grand homme de science. Si la théorie de la relativité se révèle fausse, les Français diront que je suis suisse, les Suisses que je suis allemand et les Allemands que je suis juif ».

L'APPRENTISSAGE DE L'ESPACE EN FRANCE EN 1994.

> L'enseignement français actuel a fait l'impasse sur toute la géométrie, essentielle pour les ingénieurs et les physiciens, et devenue une des branches fondamentales des mathématiques modernes.
>
> L.Schwartz (voir page 29)

La raison première de la géométrie est de mieux nous faire appréhender l'espace, un monde que nous n'avons pas créé. Pour ce faire, les géomètres ont « créé » des objets simplifiés qu'ils ont appris à mesurer et à étudier. Comment un jeune Français apprend-il la notion d'espace durant son cursus scolaire ?

Durant les 5 années de l'école primaire, il apprend à construire les figures usuelles de la géométrie élémentaire et à mesurer des segments et des surfaces. Ce premier stade de l'épistémologie de Piaget est complété en 6ème et en 5ème : constructions, mesures et propriétés des figures.

Durant les 7 années de l'enseignement secondaire, l'apprentissage de la géométrie se centre sur les transformations du plan (sans la notion de groupe) par action sur des figures. Les notions de composition et de d'application réciproque sont abordées dans la seconde partie des études secondaires.

Cet apprentissage de la géométrie est complété par l'étude de l'analyse soigneusement séparée de la géométrie. Elle permet de préciser la notion de repérage dans le plan et dans l'espace tout au long de ces 7 années.

La géométrie analytique devenue Analyse avec le temps, deuxième stade de l'épistémologie de Piaget ne participe plus à l'étude de l'espace.

De plus l'apprentissage des stades 2 et 3 (celui-ci amputé de la notion de groupe) se fait simultanément et pour la majorité des jeunes l'apprentissage mathématique de la notion d'espace s'arrête là. Seule une toute petite minorité la poursuivra à travers l'étude des groupes et de l'algèbre linéaire complétant l'étude du stade 3 de Piaget. Cependant, pour ces derniers, la notion même d'espace et de géométrie disparaît au profit du calcul, matriciel ou vectoriel, dans l'algèbre linéaire.(1er degré : les seuls problèmes que l'on sache vraiment résoudre).

Peut-être serait-il judicieux de remettre un peu d'intuition en algèbre linéaire laquelle deviendrait en quelque sorte de la géométrie linéaire.

Questions :

Dans le Secondaire, ne devrait-on pas avoir en application l'étude des groupes de transformations des figures usuelles, triangle équilatéral, carré et cube dont la visualisation est facile et permet justement un bon apprentissage de la notion de transformation mais surtout du plan ou de l'espace ?

Dans le Supérieur, ne devrait-on pas réinsérer l'algèbre linéaire plus clairement en géométrie ? D'autant que l'algèbre linéaire utilise, et pour cause, le vocabulaire de la géométrie : point, droite, plan !

L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite,
la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.
Sophie Germain

Les signes et symboles de l'Arithmétique sont des figures écrites et les figures géométriques sont des formules dessinées ; aucun mathématicien ne pourrait se passer de ces formules dessinées, pas plus qu'il ne pourrait, dans les calculs, se passer de parenthèses ou crochets ou autres signes analytiques.
David Hilbert, 1900.

11. LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Contrairement à une croyance très répandue, l'idée d'une géométrie « pure », séparée de l'algèbre, est tout à fait récente (début du XIXè siècle); elle était complètement étrangère aux Grecs, qui ne connaissaient pas l'algèbre au sens moderne. En revanche, leur géométrie était vraiment une « algèbre-géométrie », un mélange complexe de raisonnements purement géométriques, et de calculs sur des rapports de segments. »
Jean Dieudonné,1982

Présentation

La géométrie est « l'art de raisonner juste sur des figures fausses ». Depuis leur création, les figures sont des objets idéaux. Leur dessin est une représentation imparfaite mais suffisante pour l'usage humain. Par contre, insistons, les mathématiciens sont tenus de raisonner juste. Ce devrait être une de leurs rares qualités. Plus la figure se complique, plus elle est imparfaite et ce qui devait arriver, arriva peu à peu. Les matheux ont continué de raisonner -plus ou moins juste- (voir la citation de Dieudonné), sur des figures de plus en plus fausses puis plus de figure du tout comme en algèbre linéaire, dans R^n, où le dessin d'un pavé est bel et bien superflu (voire difficile pour $n > 3$).

La géométrie algébrique fait encore mieux. Une difficulté de l'algèbre est l'existence ou non des racines d'une équation. Dans le corps des nombres complexes, C, une équation de degré n a exactement n racines ce qui permet, en théorie, de ramener toute équation à une factorisation du 1er degré :

$$(x- x_1)(x-x_2) \ldots\ldots(x-x_n) = 0$$

Le rêve du mathématicien.

Tout problème est découpé en n problèmes du 1er degré. Dès lors, au lieu de considérer les points de R^n à coordonnées réelles, il est plus « logique » (si !) de considérer les points de C^n à coordonnées complexes.

Par exemple, $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre (0,0) et de rayon 1 passant par le point A (1,0).

$x^2 + y^2 = -1$ est l'équation du cercle de centre (0,0) et de rayon i passant par A (0,i).

(Ne pas faire de dessin)

La géométrie algébrique réclame une haute technicité. Cependant, elle reprend les méthodes de la bonne vieille géométrie euclidienne au niveau des courbes en y intégrant les résultats des structures algébriques.

Pour ce qui concerne la rigueur, nous laisserons la parole à Dieudonné, grand prêtre (laïque) de la recherche mathématique française du 20e siècle et qui regrettait un jour, lors d'une émission de télévision de n'être compris ni par ses collègues de l'Académie des Sciences, ni même, souvent, par des collègues chercheurs d'autres branches des mathématiques: « On sait que malgré les efforts de Dedekind, Weber et Kronecker, le relâchement dans la conception de ce qui constituait une démonstration correcte, déjà sensible dans l'école allemande de géométrie algébrique des années 1870-1880 ne devait que s'aggraver de plus en plus dans les travaux des géomètres français et surtout italiens des deux générations suivantes.......les brillants succès obtenus contrastant avec le fait que, jusque vers 1940, les successeurs orthodoxes de Dedekind s'étaient révélés incapables de formuler avec assez de souplesse et de puissance les notions algébriques qui eussent permis de donner de ces résultats des démonstrations correctes ».

O) PREHISTOIRE ET NAISSANCE DE LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

La géométrie grecque fut fondée sur les figures idéales de Platon.

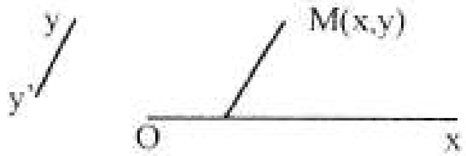
Cette géométrie-toujours d'actualité-avait pour origine LE système de mesure créé par les Chaldéens ou les Sumériens, il y a environ 5000 ans. Ce système de mesure reliait déjà chaque segment à un nombre. Première science rédigée de façon axiomatique à partir de définitions, de postulats, d'axiomes et de théorèmes (ou propositions), la géométrie d'Euclide ne fut jamais remise en cause : la géométrie d'Euclide est un système de mesure déductif de l'espace.

L'algèbre arabe fut fondée vers 850 par Al-Khwarizmi qui résolut toutes les équations du 2è degré.

De son côté, l'algèbre fut fondée sur les systèmes de numération-et l'algèbre-des Indiens et des Chinois. L'algèbre arabe donna au langage des nombres des règles qui ne furent jamais remises en cause.

La géométrie algébrique naît au 17è siècle de la rencontre de ces 2 théories :

1) D'une part, Viète et Descartes mettent au point l'écriture algébrique.
2) D'autre part, Descartes imagine de repérer les points du plan par 2 mesures dans 2 directions fixes. Ce ne sont pas encore les repères mais l'idée et la méthode sont là.



(Rappelons une dernière fois, dixit Piaget, le changement de nature de la géométrie. La géométrie grecque est une géométrie **locale** restreinte à la figure étudiée. La géométrie de Descartes est un géométrie **globale** repérant tous les points de l'espace étudié.)

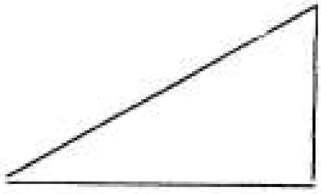
3) Enfin Fermat relie les courbes de la géométrie grecque aux équations de l'algèbre arabe, terminant de mettre en place la géométrie algébrique. Les droites et les coniques, seules courbes étudiées à cette époque (avec les courbes mécaniques) correspondant aux équations du 1^er^ et du 2^ème^ degré.

Avant d'évoquer l'histoire de la géométrie algébrique de sa naissance au 17è siècle jusqu'à ce qu'elle devienne déraisonnable pour nous, examinons quelques grands théorèmes dans le but d'essayer de comprendre comment fonctionne cette liaison entre algèbre et géométrie.

I) THEOREME DE FERMAT :
DE L'ARITHMETIQUE A LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE.

Nous connaissons depuis les Babyloniens (-2000 au moins) l'existence de triplets pythagoriciens (!!!) : Nombres entiers mesurant les côtés d'un triangle rectangle et vérifiant l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Par exemple 3, 4 et 5 et la fort utile corde à 13 noeuds.

C'est déjà de la géométrie algébrique ou une « algèbre-géométrie » comme le note Dieudonné.



$x^2 + y^2 = z^2$

De plus, en divisant par z^2, les solutions sont les points du cercle d'équation :

$X^2 + Y^2 = 1$ dont les coordonnées (X,Y) sont rationnelles.

Toujours de la géométrie algébrique !

Fermat écrivit un jour dans une « Aritmétique » de Diophante (vers le 1er siècle) : « D'autre part, un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux autres puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à deux n'est la somme de deux autres puissances analogues. J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge car elle est trop longue. »

Cette conjecture est purement arithmétique. Pas de figure.

La démonstration manquante fut donnée 350 ans plus tard par Andrew Wiles en juin 1993, complétée en Septembre 1994. Conclusion d'un long et harassant travail de toute une communauté sur 3 siècles et demi, cette démonstration ne se situe pas en arithmétique mais bel et bien en géométrie algébrique. Seule l'étude de certains types de courbes a pu venir à bout de la conjecture de Fermat.

Transfert de l'arithmétique à la géométrie algébrique.

Comme pour le degré 2, on divise par z^n et on se ramène à l'équation :

$(\frac{x}{z})^n + (\frac{y}{z})^n = 1$. Il reste à étudier le polynôme $P(X,Y) = X^n + Y^n - 1$ ou la courbe d'équation $X^n + Y^n = 1$ et à trouver les points à coordonnées rationnelles. La théorie des nombres, le corps Q des rationnels permettent d'avancer dans cette étude. Malheureusement, nous sommes assez démunis devant des courbes algébriques de degré n quelconque et il fallut encore « simplifier » le problème en se ramenant à des courbes de degré 2 ou 3 mieux connues.

Ce furent les courbes d'équation $y^2 = x(x- X^n)(x-Y^n)$ de degré 3 qui menèrent à la solution.

Mais revenons 2 siècles en arrière.

II) THEOREME FONDAMENTAL DE L'ALGEBRE.

Soit une équation polynômiale $P(x) = O$ de degré $n \geq 1$, dans **C**.
Alors ⇒ Cette équation a exactement n solutions.

L'énoncé le plus ancien de cette conjecture **purement algébrique** est attribué au Flamand Girard en 1629 peu après la création des nombres complexes: « Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre. » Enoncé complètement littéral à une époque où l'écriture algébrique est en gestation mais conjecture d'algèbre.

Les nombres complexes étaient apparus en 1545 chez Cardan pour donner des solutions-impossibles-à des équations du 3ème degré. Girard écrivait encore : « On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles, je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité. » Une première démonstration, non-satisfaisante, de la conjecture de Girard fut proposée par d'Alembert vers 1750 (⇒ théorème de d'Alembert). On attribue à Gauss en 1799 la démonstration effective du théorème.

Quelle fut la démarche effective de Gauss ? Etonnante, vous allez le voir.Au cours du 18ème siècle, Euler avait tellement orienté les maths vers les calculs algébriques (malgré le cercle d'Euler....) qu'il en avait « oublié » la représentation « géométrique » des nombres complexes par des points. Euler était passé à côté du plan complexe ! Funeste oubli. Pourtant, au long du 18ème siècle, les nombres complexes avaient peu à peu changé de forme, d'écriture. Le $\sqrt{-121}$ de Cardan était devenu $11\sqrt{-1}$ et les parties réelle et imaginaire se séparaient peu à peu. Mais les nombres imaginaires étaient-ils tous de la forme $a + b\sqrt{-1}$ avec a et b réels ?

Gauss eut l'idée de traiter les nombres $z = a + bi$ comme des points M(a,b) du plan et réciproquement, créant ainsi le plan complexe. Ce passage de l'algèbre à la géométrie était la solution du problème.

Le scénario de la démonstration proposée par Gauss est alors le suivant (lire l'article de Friedelmeyer et Volkert « Quelle réalité pour les imaginaires ? » dans « Histoires de problèmes » IREM page 342)

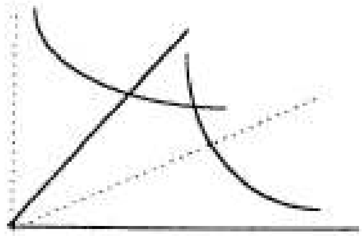
1°) Passer en polaires en repérant chaque point M du plan par son module r et son argument ϕ. $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ et $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin n\phi))$

2°) On sépare partie réelle et partie imaginaire du polynôme P(x) de l'équation étudiée :

$$T(r,\phi) + i\,U(r,\phi) = O$$

3°) $T(r,\phi) = 0$ donne une courbe C_T et $U(r,\phi) = 0$ donne une courbe C_U
Le problème est alors de savoir si ces 2 courbes ont bien un point commun, correspondant dans le plan à la solution de notre équation.

4°) En divisant T et U par r^n, on trouve quand $r \to +\infty$ les asymptotes des 2 courbes données respectivement par :



$C_T \quad |\cos n\phi| = 1 \quad \Rightarrow \phi = \frac{k\pi}{n}$

$C_U \quad |\sin n\phi| = 1 \quad \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$

Ce qui donne des asymptotes se succédant alternativement en polaires.

5°) Les courbes C_T et C_U sont des arcs de courbes venant de l'infini près d'une asymptote et repartant à l'infini près d'une autre asymptote. Il reste à prouver-ce n'est pas évident-qu'au moins 2 de ces arcs de courbes se coupent. Gauss prouve par l'absurde l'existence de ce point image d'une solution de son équation.

Gauss dit : « Il me semble largement assez prouvé qu'une courbe algébrique ne peut ni brusquement s'interrompre quelque part (comme cela se produit par exemple dans la courbe transcendante dont l'équation est $y = \frac{1}{\mathrm{Log}\, x}$) ni se perdre d'une certaine manière en un point après une infinité de détours (comme la spirale logarithmique), et autant que je sache, personne n'a élevé le moindre doute là-dessus. Cependant, si quelqu'un le demande, j'entreprendrai à une autre occasion de fournir une démonstration qui ne puisse être soumise à aucun doute. » Friedelmeyer et Volkert commentent : « Personne apparemment ne le demande, et Gauss ne fournira pas de démonstration de ce résultat. Ce n'est qu'en 1920 que A. Ostrowsky complétera la démonstration de Gauss. »

Il y aurait beaucoup à dire sur cette phrase de Gauss. D'abord sur les types de courbes évoquées, on est loin des courbes sans tangentes ou des fractales. Ensuite sur la certitude issue de l'intuition spatiale. Autant il est douteux qu'une équation ait des racines, autant il est clair-sans autre forme de procès-que 2 courbes bien situées se coupent !

Des dizaines de démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre seront trouvées mais TOUTES ces démonstrations font appel à la géométrie algébrique, à « l'alliance intime » comme disait Chasles entre algèbre et géométrie, « clef universelle des mathématiques. »

III) LES INTEGRALES ABELIENNES :

Abel
Riemann

Calculer l'intégrale $I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$

Là encore, la méthode classique utilise la courbe de la conique : $y^2=ax^2+bx+c$ et l'essentiel du calcul intégral usuel consiste à se ramener par changement de variable à une fraction rationnelle puisqu'en théorie, on sait intégrer toutes les fractions rationnelles.

Ici, on sait paramétrer la courbe sous forme:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$ où f et g sont des fractions rationnelles.

On a gagné puisque l'intégrale devient $\int g(t)\, f'(t)\, dt$ et on aura gagné chaque fois que le paramétrage de la courbe sera possible sous forme de fractions rationnelles. Célèbres depuis Abel qui a trouvé la méthode, ces courbes sont dites unicursales.

Cette fois, un problème de pure analyse trouve sa solution en géométrie, par l'étude d'une courbe associée au système.

IV) LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE : UN PEU D'HISTOIRE.

Bien entendu, dans aucun de ces trois cas, on ne trace la courbe mais seules ces courbes permettent de débloquer le problème arithmétique de Fermat, le problème algébrique de Gauss et le problème d'analyse d'Abel. La géométrie algébrique est une science complète mettant en correspondance l'intuition spatiale et le raisonnement algébrique comme cela s'est régulièrement fait dans les cas difficiles. Nous avons évoqué 3 succès de la géométrie algébrique dans 3 branches des mathématiques dont un succès fort récent. En cette fin de 20ème siècle, la géométrie algébrique fédère à peu près toutes les recherches mathématiques y compris sur les nombres entiers.

La géométrie d'Euclide devint algébrique par 3 grandes créations du 17è siècle

1) Les repères de Descartes
2) L'écriture algébrique : $ax^2 + bx + c = 0$ (Viète, Descartes)
3) La mise en équations des courbes par Fermat

Fermat dit avoir trouvé la démonstration de son théorème. Si cela est fort peu probable (10^{-7}), par contre il avait mis en place les éléments pour le démontrer. Après les travaux d'Abel, de Riemann, de Poincaré, de Noether et des écoles italienne, allemande et française de la fin du XIXè siècle, la géométrie algébrique connut au XXè siècle un immense développement.

Dans les 50 dernières années les espaces de J.P. Serres, et les schémas de Grothendieck (tous deux médaille Fields) furent des créations majeures hors de notre portée mais dont on peut situer le cadre.

Ce développement contemporain de celui de la théorie des ensembles et précédant celui de l'axiomatique (et motivant celui-ci) ne fut peut-être pas un modèle de rigueur. Répétons : « On sait que malgré les efforts de Dedekind, Weber et Kronecker, le relâchement dans la conception de ce qui constituait une démonstration correcte, déjà sensible dans l'école allemande de géométrie algébrique des années 1870 - 1880 ne devait que s'aggraver de plus en plus ...... »

V) LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE : LE CADRE MATHEMATIQUE

Daniel Perrin a publié dans la collection « Savoirs actuels » son cours de D.E.A. à Orsay. (A lire pour en savoir plus...)

Il commence par : « La géométrie algébrique est l'étude des variétés algébriques : toutes celles qui sont définies comme ensembles des zéros d'un ou plusieurs polynômes. »

Autrement dit, la géométrie algébrique étudie les ensembles de points définis par une équation algébrique polynômiale.

Perrin utilise le théorème de Bezout pour préciser ce cadre.

Théorème de Bezout (fin du 18è)

Soit 2 courbes polynomiales planes de degrés m et p.

Alors $\Rightarrow$ ces 2 courbes ont au plus mp points d'intersection.

Comme pour les équations dans R, ce « au plus »n'est pas satisfaisant.

Que manque-t-il pour le remplacer par « exactement » comme dans les équations dans C ?

Quatre conditions :

1°) Composantes communes : Ne pas avoir une infinité de points en commun: $Y = X^2$ et sa restriction à R^+ par exemple.

2°) Dans R^2, un cercle et une droite peuvent ne pas se couper.

$X^2 + Y^2 = 1$ et $X = 2$ mais dans C^2, ils ont 2 points imaginaires en commun.

3°) Parallélisme : Deux droites parallèles n'ont pas de points communs !

Si ! Les points à l'infini .... géométrie, géométrie. Donc, on est amené à passer dans l'espace projectif pour pallier cet inconvénient.

4°) Tangentes et multiplicité des points de contacts.

Un cercle -degré 2- et une droite tangente -degré 1-ont un point double en commun. multiplicité dont il faudra tenir compte.

Conclusion : En géométrie algébrique. on travaille dans les espaces projectifs construits sur C - ou si possible dans des corps algébriquement clos ce qui n'est pas le cas pour le théorème de Fermat avec Q.

C'est bel et bien l'étude des courbes, des variétés affines (des points) qui guide l'intuition. Même s'il parait ardu de tracer ces courbes dans un espace projectif sur C.

Le théorème de Bezout devient :

Dans le plan projectif complexe, soit 2 courbes algébriques C et C' de degrés d et d' et sans composante commune.

Alors $\Rightarrow$ les courbes C et C' se coupent exactement en dd' points comptés avec leurs multiplicités.

Daniel Perrin donne l'exemple suivant :

Trifolium : $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$ de degré 4

Quadrifolium : $(X^2 + Y^2)^3 - 4 X^2Y^2 = 0$ de degré 6

Nombre de points communs : 4x6 = 24

L'origine : 14 fois (?) ; 4 points du plan ; 2 points imaginaires à l'infini et triples soit 2x3 = 6 . total : 14 + 4 + 6 = 24

VI) GEOMETRIE ALGEBRIQUE : DES DROITES AUX VARIETES AFFINES.

La description de l'espace continue avec la construction des ensembles algébriques affines (EAA).

Le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de Bezout amènent à s'intéresser aux ensembles de points qui annulent un, deux, ou plusieurs polynômes. Ces ensembles de points sont les variétés affines qui généralisent les notions de point, droite, courbe ou surface.

Définition : soit un corps k commutatif (R ou C ou Q ....)

S un ensemble de polynômes à une ou plusieurs variables.

La variété algébrique affine V(S) est l'ensemble des points $x \in k^n$ qui annulent tous les polynômes de S.

<u>Exemple 1) n = 1 ; la droite réelle R</u>

a) S est le polynôme nul $\Rightarrow$ V(S) est la droite

b) S est : $P(x) = x(x-1)(x-2)$ $\Rightarrow$ V(S) contient 3 points $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$

<u>Exemple 2) n = 2 ; le plan réel R^2</u>

a) S est le polynôme constant $P(x) = 1$ $\Rightarrow$ V(S) est vide.

b) S est le polynôme nul $\Rightarrow$ V(S) est le plan;

c) S est formé de : $P(x) = x^2 + y^2 - 4$ et $Q(x) = x - 1$ $\Rightarrow$ V(S) est formé des 2 points communs du cercle et de la droite d'équations $P(x)=0$ et $Q(x)=0$

<u>Exemple 3) n = 2 : le plan rationnel Q^2</u>

a) S est le polynôme $P(x) = x^2 + y^2 - 1$ $\Rightarrow$ V(S) est formé des couples (x, y) avec $x = \frac{a}{c}$ et $y = \frac{b}{c}$; (a,b,c) étant les triplets pythagoriciens.

b) S est le polynôme $P(x) = x^n + y^n - 1$ avec $n \geq 3$ $\Rightarrow$ $V(S) = \varnothing$

théorème de Fermat !!!

VII) GEOMETRIE ALGEBRIQUE : TOPOLOGIE DE ZARISKI
Oscar Zariski (1899-1986)

Propriétés des variétés algébriques affines V(S)

1°) L'espace considéré est une variété algébrique affine pour $P = 0$

2°) L'ensemble vide est une variété algébrique affine pour $P = 1$

3°) Une intersection quelconque de variétés algébriques affines est une variété algébrique affine (par intersections de courbes de plus en plus nombreuses)

4°) Une réunion <u>finie</u> de variétés algébriques affines est une variété algébrique affine : $P_iQ_j = 0 \Leftrightarrow P_i = 0$ ou $Q_j = 0$

Les variétés algébriques affines définissent une topologie (toujours l'espace) dite de Zariski dont les variétés algébriques affines sont les fermés.

Les complémentaires des variétés sont les ouverts de la topologie;

Daniel Perrin précise : « Attention, la topologie de Zariski est très différente des topologies usuelles et il faut en acquérir une intuition ad-hoc. »

Intuition et topologie nous ramènent à l'étude de l'espace construit.

Dans l'espace R^3, domaine privilégié de la dite intuition, les fermés « sont » les zéros des polynômes, c'est-à-dire les surfaces ou leurs intersections, courbes et points. Les fermés sont « petits ». Les ouverts sont les complémentaires des fermés et sont « grands » en comparaison des boules et fermés des métriques ou des topologies habituelles. Mesure, mesure....

La géométrie algébrique se développe en passant des espaces affines réels aux espaces projectifs complexes. Que devient alors l'intuition ?

VIII) CONCLUSION

Il est encore moins facile de suivre ce développement vers les espaces de Serres, les faisceaux ou les schémas. Le cours de Daniel Perrin se termine par une introduction simplifiée à ces schémas et il s'agit d'un cours de D.E.A.. ! On comprend mieux les difficultés rencontrées dans les « maths modernes » lors de la perte d'intuition, au moment où toute la construction de l'espace se fait par le langage algébrique.

Pourtant, la géométrie algébrique est fondée sur la construction d'espaces. Au-delà de l'introduction, le livre de Perrin ne contient plus de figure mais toute l'intuition est spatiale - points, courbes, surfaces et hypersurfaces - sans lesquels on ne peut ni comprendre, ni construire. Quand l'auteur définit la topologie de Zariski, il met en place l'intuition ad-hoc.

Les mathématiques sont à l'origine un système de mesure (segment-nombre). Au 17è siècle, la création de la géométrie algébrique (point-coordonnées ; courbe-équation) a ouvert un immense domaine.

Mais les mathématiques restent la science de la mesure de l'espace et seul un bon transfert entre l'intuition spatiale et la logique du langage algébrique a permis de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre, de calculer les intégrales abéliennes et de démontrer le théorème de Fermat.

« Etymologiquement, la géométrie est la science des mesures terrestres; issue des réflexions des arpenteurs, elle est inséparable de la notion de nombre » Jacqueline Lelong. L'apport de l'algèbre au 17è siècle est un « premier pas vers une alliance plus intime entre l'algèbre et la géométrie .... clef universelle des mathématiques » (Chasles, Aperçu historique) Nous voyons cette indispensable « alliance universelle » dans les grands théorèmes <u>créateurs</u> des mathématiques : Thalès, Pythagore, tangente et dérivée, courbe et intégrale, espace vectoriel, espaces métriques.....

Hilbert dans l'introduction de ses « 23 problèmes » en 1900, écrit comme nous l'avons vu : « Les signes et les symboles de l'Arithmétique sont des figures écrites, et les figures géométriques sont des formules dessinées; aucun mathématicien ne pourrait se passer de ces formules dessinées, pas plus qu'il ne pourrait, dans les calculs, se passer de parenthèses ou de crochets ou autres signes analytiques. »

En 1982, Dieudonné, autre chantre de l'axiomatique, évoquait « la domination universelle de la géométrie » et écrivait : « Au contraire, je pense qu'en éclatant au-delà de ses étroites frontières traditionnelles elle a révélé ses pouvoirs cachés, sa souplesse et sa faculté d'adaptation extraordinaire, devenant ainsi un des outils les plus universels et les plus utiles dans tous les secteurs des mathématiques. Et si quelqu'un parle de la « mort de la géométrie », il prouve simplement qu'il est complètement ignorant de 90% de ce que font les mathématiciens aujourd'hui. »

Alors d'où vient cette domination ?

Du créateur des mathématiques : le cerveau.

Nous connaissons aujourd'hui (un peu) l'organisation du cerveau.

L'hémisphère droit est celui de l'intuition et de l'espace : points, courbes.

L'hémisphère gauche est celui du langage et du raisonnement : nombres, équations, logique.

Le corps calleux est chargé de gérer l'alliance intime entre les 2 hémisphères, entre les points et les nombres.

Voilà une raison pour laquelle la géométrie « pure » du 19è siècle dut très vite redevenir une géométrie algébrique ou une algèbre-géométrie, recréant cette alliance intime entre les figures de l'espace et l'écriture algébrique.

Alliance intime liée au fonctionnement du cerveau, du cerveau de Gauss, du cerveau d'Abel, du cerveau de Wiles, de tous les cerveaux.

LE PARADOXE DE BANACH - TARSKI

En cette fin de 19^e siècle, les groupes de transformations et la théorie des ensembles génèrent de nouveaux paradoxes. Banach et Tarski sont deux brillants sujets de l'école polonaise de mathématique Tarski s'intéresse particulièrement à la logique mais la démonstration de son paradoxe -délicate- passe bel et bien par les groupes de transformations.

> L'énoncé est simple : Vous prenez 2 boules (sphères pleines), par exemple une orange et la Terre.
> Alors ==> il existe une façon de découper la Terre pour la réduire à la taille de l'orange !
> Paradoxal, non !

(Pour la démonstration, non triviale comme déjà dit, voir le petit livre de Marc Guinot : le paradoxe de Banach-Tarski).

Essayons de préciser l'idée qui montre bien le lien entre l'espace qui nous entoure et le travail des mathématiciens qui cherchent à le décrire pour mieux le comprendre.

Cette idée est très simple. **Nous pensons bien connaître la droite réelle et plus précisément la MESURE de TOUS les sous-ensembles de cette droite rélle**.Une (in)certaine logique voudrait que la mesure des intervalles de **R** se prolonge à TOUS les sous-ensembles de **R** avec quelques propriétés usuelles.

1) La mesure d'un intervalle I = [a,b] est la longueur habituelle b-a.

2) La mesure de la réunion d'ensembles disjoints E_n est la somme des mesures des ensembles E_n.

3) La mesure est invariante par translation. (il vaut mieux....).

4) TOUTES les parties de la droite réelle ont une mesure.

Malheureusement cette hypothétique mesure universelle n'existe pas. (voir encore Guinot).

Seuls les ensembles pas trop éloignés des intervalles sont mesurables avec l'unité de mesure habituelle.

Ceci explique :

1) la possibilité de découper -en théorie- la grosse boule en sous-ensembles NON-mesurables qu'il sera loisible de faire entrer dans l'orange.

2) les inévitables tribus et clans des cours du Supérieur. Les intervalles ont l'esprit de tribu. Quand ils se réunissent entre eux, tout va bien. Sortir de la tribu dépasse la mesure !

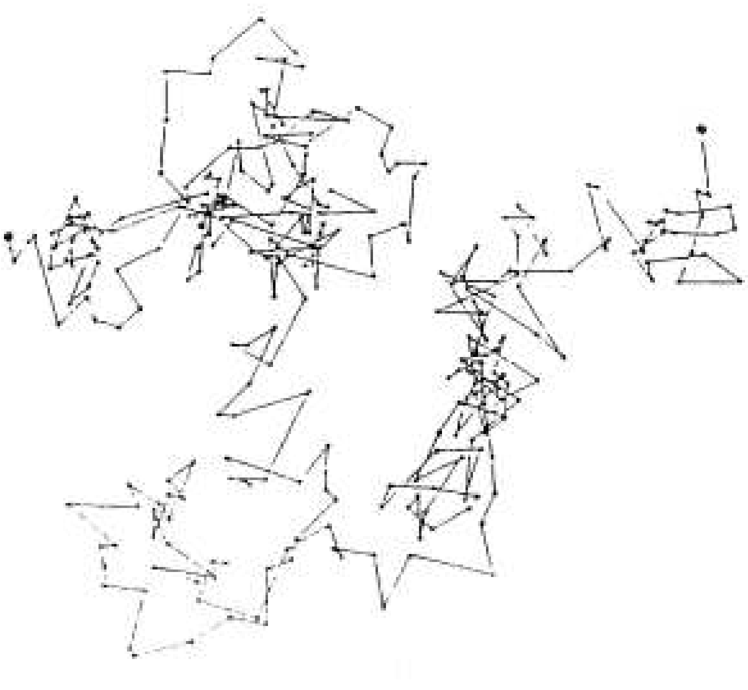
12. LA GEOMETRIE FRACTALE

Les idées géométriques du créateur de la géométrie fractale, Benoît Mandelbrot, sont originales.

Le principe de base de la géométrie grecque est de créer (?) des objets si simples qu'ils n'ont plus guère de points (sic !) communs avec les objets de la nature.

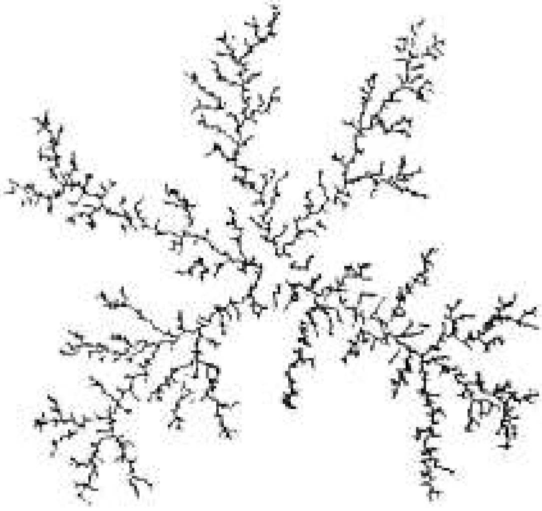
Conformément à ce qu'a dit Galilée, ces objets sont alors des intermédiaires permettant aux humains de comprendre la nature, l'espace dans lequel nous vivons. Mandelbrot cherche, en partant des objets géométriques usuels à se rapprocher des objets de la nature, la côte de Bretagne, très découpée, étant le symbole de ceux-ci.

Mais les origines de la géométrie fractale, selon son créateur, remontent au mouvement brownien particulièrement étudié par Jean Perrin au début du siècle.



Mouvement brownien (approché) d'une particule.

Aujourd'hui, s'approcher de la nature consiste à étudier des phénomènes complexes : diffusion dans un solide, turbulence, distribution des galaxies ou plus simplement recherche de modèles du relief terrestre car il semblerait bien, à y regarder de plus près, que la Terre ne soit pas tout-à-fait une boule.



Diffusion dans un solide.

Les mathématiciens ont, avant lui, exploité 2 méthodes pour « tendre » vers l'infini :

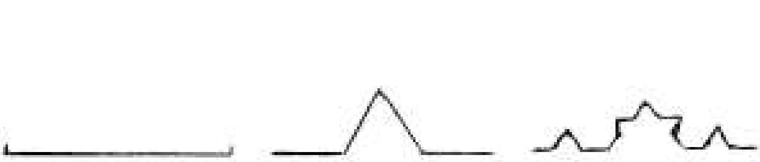
* Le postulat N°2 de la géométrie d'Euclide permet de tendre vers l'infini par juxtaposition de segments (unités) identiques.

* La géométrie différentielle de Newton et Leibniz permet de tendre vers l'infini par découpages successifs de ce même segment-unité ==> les infiniment petits.

* La géométrie fractale permet de tendre vers l'infini en tout point de l'objet par répétition des mêmes opérations sur tout l'objet de départ et non plus en un seul point comme dans les méthodes précédentes.

· Le modèle pratique évoqué est la côte de Bretagne, découpée s'il en est, sur toute sa longueur. (la géométrie et l'expérience toujours...).

Un modèle simplifié (les mathématiques toujours...) est la courbe de Von Koch.



C1 C2 C3 et jusqu'à l'infini.

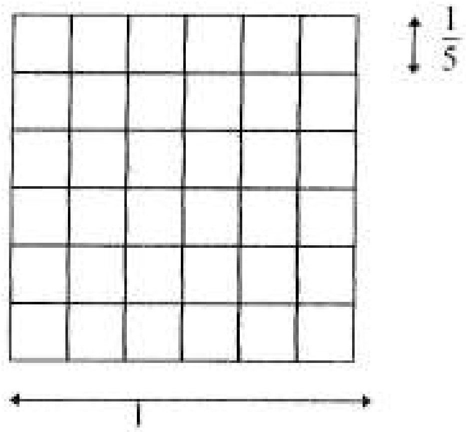
Mandelbrot définit une dimension pour ses courbes car leur « longueur » est infinie donc elles ne sont pas de dimension 1.

$L(C_1) = 1$, $L(C_2) = 1x\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, $L(C_3) = 1x(\frac{4}{3})^2$,

$L(C_n) = 1x(\frac{4}{3})^{n-1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} L(C_n) = +\infty$

Ces idées d'une grande simplicité repartent une fois de plus du système de mesure primitif. Développées depuis les années soixante-dix pour le compte de la société I.B.M. par Mandelbrot, elles débouchent sur les images de synthèse.

<u>La dimension d'homothétie</u> :



En dimension 2, une homothétie de rapport $\frac{1}{5}$ donne $5^2 = 25$ petits carrés.

i.e $(\frac{1}{1/5})^2 = 25$ ===> le plan est de dimension (euclidienne) 2.

Généralisons : une homothétie de rapport $\frac{1}{n}$ en dimension D donne K petits objets selon la formule $\frac{1}{1/n} = K$

Dans la courbe de Von Koch, le rapport d'homothétie est $\frac{1}{3}$ et on crée 4 nouveaux objets ce qui donne :

$$(\frac{1}{1/3})^D = 4$$

$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618$ est la dimension d'homothétie de la courbe fractale de Von Koch.

UNE CONCLUSION PARMI TANT D'AUTRES

Un célèbre « A bas Euclide ! » de Dieudonné avait ponctué la réforme dite des « maths modernes » et son auteur avait vite regretté ses paroles prises un peu trop à la lettre. Il ne semble pas envisageable aujourd'hui comme hier de se passer de la géométrie d'Euclide et il semblerait même important de mieux la connaître pour éviter de graves déformations, par exemple de croire que la géométrie d'Euclide est une « géométrie pure ».

CONSTRUIRE des figures, MESURER ces figures, DEDUIRE des propriétés certaines de ces figures reste l'activité de base du mathématicien : voir par exemple la géométrie fractale.

Par contre, se limiter à la géométrie d'Euclide, serait une erreur tout aussi grave. Se priver des idées développées pendant 25 siècles, il n'en est même pas question !

Dès le 17è siècle, Descartes met en place une géométrie globale de l'espace (ou au moins du plan). Descartes réunit les figures et les équations.

Newton et Leibniz avaient appris les mathématiques dans les Eléments d'Euclide mais aussi dans les livres de leurs contemporains. Le 18 ᵉ siècle fut marqué par le développement fulgurant des calculs différentiel et intégral, fondés sur les différences et sommes d'infiniment petits.

Ils permirent de résoudre de très nombreux problèmes de physique (cordes vibrantes, équation de la chaleur...) que la géométrie d'Euclide n'aurait évidemment jamais permis de résoudre !

Tant et si bien qu'à la fin du 18ᵉ siècle Euler, D'Alembert, Lagrange et d'autres pensent que l'avenir des mathématiques paraît limité et qu'il est préférable pour les meilleurs esprits de se tourner vers d'autres sciences-la physique, la chimie-plus prometteuses ce que fera, par exemple, Ampère.

Or au moins 4 géométries très novatrices vont apparaître au cours du siècle suivant ! Ceci donne à réfléchir en matière de prédiction !

Aujourd'hui, la meilleure conclusion me semble se trouver dans le développement tentaculaire de la géométrie algébrique, seule capable de résoudre de grands problèmes : théorème de D'Alembert ou de Fermat.

La géométrie, science en apparence « indépendante de toute expérience » mais « qui s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité » a-t-elle encore des ressources insoupçonnées comme l'a montré la géométrie fractale ?

Ou bien le très logique système de mesure babylo-égypto-grec a-t-il donné tout ce qu'il pouvait donner ?

ET POUR QUELQUES GEOMETRIES DE PLUS

Pourquoi se limiter à 12 géométries ?

La géométrie affine :

A l'époque où la géométrie était construite à partir des structures vectorielles, il fallait bien, quand même revenir aux points.

La géométrie de Bolyaï :

Le Hongrois Bolyaï (1775-1856) introduit en 1829 une « science absolue de l'espace » à ranger dans les géométries non-euclidiennes. Ce fut un précurseur.

La géométrie birationnelle de Riemann :

Vers 1850, le visionnaire Riemann ouvre les portes de la géométrie algébrique moderne.

La géométrie discrète :

L'écran de l'ordinateur est un ensemble discret de points sur lequel on souhaite tracer les courbes représentatives de fonctions continues d'où la nécessité d'étudier cet espace discret, peut-être proche de la géométrie...pythagoricienne !

La géométrie élémentaire :

« élémentaire » qualifie en général la géométrie d'Euclide.

La géométrie imaginaire :

, Lobatchevski (1793-1856) construit en 1826 une première géométrie non-euclidienne.

La géométrie métrique :

Nous avons déjà rencontré ce joli pléonasme qui oriente vers les mesures et les isométries.

La géométrie pure :

Le plus simple est ici de citer Dieudonné dans l'introduction de son cours de géométrie algébrique (PUF 1974): « En premier lieu, et contrairement à ce que l'on croit souvent, la Géométrie des Grecs est tout le contraire d'une Géométrie...... « pure », c'est-à-dire d'où les calculs ont été éliminés le plus possible : une telle conception ne remonte qu'au 19è siècle ».

De plus, existerait-il une géométrie impure ?

La géométrie supérieure :

De même, existerait-il une géométrie inférieure ?

Mais ce n'est pas fini, loin de là :
La géométrie synthétique de Poncelet eût son heure de gloire au 19e siècle.

Les géométries subordonnées.

La géométrie réglée.

Les géométries cayleyennes.

La géométrie finie.

La géométrie infinitésimale directe.

La géométrie cotée : une cousine de la géométrie descriptive enseignée au 20e siècle.

Pour clore cette liste, non exhaustive, la revue La Recherche de décembre 1994 contient un article **sur la géométrie symplectique** (entrelacée) issue, elle aussi, de l'étude de l'espace et des groupes de transformations et étudiée en cette fin de 20e siècle.

L'espèce humaine fait preuve de beaucoup d'imagination quand il s'agit d'étudier l'espace qui nous entoure. Heureusement !

EN RESUME

Les géométries babylonienne et égyptienne étaient des géométries de mesure.

La géométrie d'Euclide les complète en un système déductif. Construire, mesurer, déduire : les 3 composantes indissociables.

Construire une figure

Mesurer avec les nombres

Déduire avec la logique.

Qu'en est-il pour les « autres » géométries ?

Géométrie	Figure Construction	Nombre Mesure	Logique Déduction
Egyptienne	x	x	
Euclide	x	x	x
Projective	x	x	x
Analytique	x	x	x
Hasard		x	
Différentielle	x	x	x
Descriptive	x		
Vectorielle		x	x
Non-euclidienne			x
Transformations	x	x	x
Algébrique		x	x
Fractale	x	x	

Difficile, en fait, de ne pas mettre une croix partout !

Chaque géométrie utilise de façon explicite ou implicite ces 3 composantes. Une géométrie non-euclidienne utilise-t-elle les constructions ?

Non, elle est déductive par essence mais oui quand même, car...une géométrie est-elle complète sans figure ?

La part implicite de la figure, comme en géométrie vectorielle, donne à réfléchir. On ne peut dessiner un vecteur, mais.... que celui qui n'a jamais dessiné un vecteur me jette la première pierre.

Vieille histoire !

BIBLIOGRAPHIE 1

A part :

Michel Chasles : « L'Aperçu historique ».

Ce livre de 1837 réédité par l'IREM de Lille fut un livre de référence au 19è siècle.

Emile Fourrey : « Curiosités geométriques ».

Livre de 1907 réédité en 1994 par la librairie Vuibert.
Il commence par une « Esquisse de l'histoire de la géométrie élémentaire ».
La première partie contient un chapitre sur le théorème de Pythagore.
La deuxième partie traite la « géométrie de mesure ».

Jean Dhombres : Nombre, mesure et continu (Cédic-Nathan)

Importante étude sur la notion de mesure en mathématiques commençant par une étude détaillée du livre 5 des Eléments d'Euclide.
D'un contenu beaucoup moins élémentaire que les autres ouvrages, il traite aussi de la théorie ....de la mesure, des constructions des nombres réels et de la naissance de .... la logique au 20è siècle !

Georges Lochak : La géométrisation de la physique (Flammarion).

La grande histoire de l'espace vue par un physicien sous forme de paragraphes courts et musclés.
1. La géométrisation de la physique a toujours existé.
2. Trois grands moments de la géométrisation de la physique à la Renaissance.
3. L'apogée et le déclin du règne de la géométrie euclidienne en physique. Etc....

Dedron Itard : Mathématiques et mathématiciens (Magnard);

Un classique récemment réédité contenant une foule de renseignements.

Laurent Schwartz : Un mathématicien aux prises avec le siècle (Odile Jacob).

Une vie au service des mathématiques mais aussi au service des hommes en général. Un engagement scientifique et humain.

Amy Dahan : Routes et déales (Points-sciences)

Une petite histoire des mathématiques en sept chapitres.

Jean DIEUDONNE : Pour l'honneur de l'esprit humain. (Pluriel).

Très intéressante étude historique niveau terminale (et un peu plus).

BIBLIOGRAPHIE 2

BELHOSTE : Les sciences au lycée INRP.
Très intéressante étude sur les maths et la physique dans l'enseignement secondaire au 20è siècle.
CONDORCET : Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain.
COLLETTE : Histoire des mathématiques.
Un classique en deux tomes. Très documenté.
Une courte étude sur les connaissances actuelles relatives au cerveau, intermédiaire incontournable pour « faire » des maths et peut-être pas toujours utilisé correctement.
DUGAC : Jean Dieudonné Gabay
EINSTEIN : Conceptions scientifiques. Champs Flammarion.
EUCLIDE : Les Eléments Rééédition Blanchard
GUINOT : Le paradoxe de Banach-Tarski
HADAMARD :Leçons de géométrie élémentaire
HILBERT : Problèmes futurs des mathématiques Gabay
IFRAH : Histoire universelle des chiffres.
JUAN DE MENDOZA : Cerveau gauche, cerveau droit Domino, Flammarion.
LLOYD : Naissance de la science grecque.
MANDELBROT : Les objets fractals
MEYER et alii : Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeurs. Brochure APMEP
OBENGA : La géométrie égyptienne. L'Harmattan.
PERRIN Jean : Les atomes Champs, Flammarion.
PERRIN Daniel : Géométrie algébrique (introduction) CNRS éditions
PETIT : Le géométricon (B.D.).
PICHOT : La naissance de la science.
POINCARE : Calcul des Probabilités Réédition Gabay.
ROBERT : Comprendre notre cerveau. Points-sciences.
SERRES : Les origines de la géométrie.
SMITH : The geometry of René Descartes.
Peu onéreuse édition en anglais mais contenantun fac-similé de la première édition de 1637, en français.

Bibliographie 3 :Du côté des IREM

Besançon	Mathématiques constructives	Lombardi
Lille	Histoire du concept de nombre	Cousquer
Lille	Sur la résolution des équations algébriques	Mahammed
Montpellier	L'esprit de géométrie	Bernard
Montpellier	Une approche pédagogique déduite de l'histoire	
Montpellier	Les mathématiques : compter, mesurer, résoudre...	
Poitiers	Les géométries non-euclidiennes	Guichard

ACTES

Besançon	La démonstration mathématique dans l'histoire. 1989
Lyon	La figure et l'espace. 1991
Montpellier	Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique. 1993
Lille	Quatrième université d'éte d'histoire des mathématiques. 1994
Besançon	Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques. 1995
Basse-Normandie	La mémoire des nombres. 1994

COLLECTIFS

Mathématiques au fil des âges. Gauthier-villard
Histoires de problèmes....
Histoire des algorithmes

Nous espérons que ce petit voyage dans l'espace vous aura plu et nous espérons vous retrouver bientôt sur....nos lignes.

UN ARTICLE DU JOURNAL LIBERATION (Novembre 1994).

FAUT-IL JETER EUCLIDE AUX ORTIES ?

QUESTION A : Georges Lochak, Directeur de recherches (Mécanique quantique) au CNRS et directeur de la fondation Louis-de-Broglie.

Bien sûr que oui et bien sûr que non ! Non, parce que nous vivons au milieu d'Euclide. Oui , parce que dans la physique théorique d'un niveau élevé, on n'obéit pas à Euclide.

Euclide a été le maître de notre vision du monde jusqu'au XVIIè siècle. Sa géométrie correspond avec une extraordinaire précision à toutes les mesures que nous sommes capables de faire à notre échelle, y compris les mesures astronomiques.

Pour ce qui concerne l'astronomie, ce n'est évidemment plus tout à fait vrai depuis la relativité. Mais la relativité ne concerne qu'une toute petite partie des mesures : une sonde comme Voyager II, qui se promène depuis de longues années à travers le système solaire, fonctionne avec la mécanique de Newton et la géométrie d'Euclide. C'est donc que cette géométrie ne se trompe vraiment pas beaucoup !

Le règne d'Euclide a duré deux mille ans et connaît son apogée avec Newton. Ce dernier, bien qu'il ait inventé le calcul différentiel et intégral, reste un géomètre : comme il ignore les procédés algébriques de ce calcul, il additionne des surfaces « euclidiennes » de plus en plus petites et s'en sert comme d'un tuteur pour faire tenir ses raisonnements. Les principia de Newton, qui décrivent pour la première fois avec exactitude les mouvements des planètes autour du soleil, représente l'ultime couronnement de la géométrie euclidienne.

La fin des « figures »

Tout change au XVIIIè siècle. Lagrange écrit un livre de mécanique céleste, qui rompt radicalement avec la géométrie. Lagrange annonce d'entrée : « Il n'y aura point de figure dans cette ouvrage. » Pas de figure, donc pas de géométrie et pas d'Euclide. Ce fut l'une des grandes ruptures dans la description mathématique des lois de la nature. Depuis lors, les mathématiciens et les physiciens en sont largement revenus et ne se sont pas privés de faire des petits dessins comme du temps de Newton !

En montrant qu'il était impossible de faire de la physique sans géométrie, Lagrange a paradoxalement ouvert la voie à de nouvelles géométries : si Euclide n'était pas indispensable, il devenait légitime de chercher d'autres modèles géométriques. Les mathématiciens du XIXè siècle s'engouffrèrent dans la brèche et comprirent que la géométrie classique était une théorie physique comme les autres, érigée en système mathématique axiomatisé. Ils s'aperçurent que les principes d'Euclide s'appliquaient à l'espace qui nous entoure et aux phénomènes que nous connaissons mais qu'ils ne s'imposaient pas, qu'on adopte un point de vue logique ou physique. Riemann, vers 1860, réalise la première synthèse de toutes ces géométries.

L'explosion des dimensions

Riemann a donc libéré la notion de géométrie de celle qui avait été en vigueur pendant deux mille ans. La physique s'est ainsi mise à utiliser des espaces non-euclidiens qui, en outre, ont un nombre quelconque de dimensions. Le cas le plus simple est celui de la relativité, qui utilise quatre dimensions de l'espace. Dans les théories atomiques, on construit des espaces qui ont des milliards de dimensions. Cela ne signifie pas que les atomes se promènent réellement dans de tels espaces ! Ce sont des espaces de configurations dans lesquels la théorie raconte à sa manière les phénomènes physiques.

La théorie doit ensuite redescendre dans l'espace ordinaire qui est le nôtre, celui des expérimentateurs, pour leur suggérer de nouvelles pistes. La géométrie est ainsi devenue un instrument abstrait : un espace à n dimensions n'a aucune signification concrète, mais dans cet espace, on interprète les phénomènes tel qu'on ne les raconte pas dans notre espace à nous.

Cohabitation

Dans ce contexte, l'un des membres du célèbre groupe de mathématiciens français qui a pris le nom de Bourbaki avait dit : « A bas Euclide ! »Il voulait dire : « à bas la réduction des mathématiques à la géométrie d'Euclide à l'école ». Il ne voulait pas enseigner Riemann dès l'école primaire ! Mais il trouvait qu'il fallait l'ouvrir sur des mathématiques plus actuelles. Dans l'enseignement primaire et secondaire, au nom des « maths modernes », on a supprimé la géométrie, l'intuition et toute la chair des mathématiques. On est déjà revenu de cet excès. La géométrie fut d'abord toute-puissante en physique sous sa forme euclidienne. Chassée de la première place par l'algèbre et l'analyse, son influence commença à décroitre au point que Lagrange crut l'abolir. Mais, nous voyons son retour, au début du Xxè siècle, avec la relativité et la mécanique quantique. Il serait absurde de croire que la nouvelle géométrie a réfuté l'ancienne. Les historiens des sciences du début du siècles'imaginaient les théories comme des poupées russes : la plus vieille théorie englobée par une plus récente, etc. Mais la nouvelle théorie n'englobe rien du tout ! Elle recouvre un tout petit bout de l'ancienne. Elle raconte des choses que la théorie ancienne ne décrivait pas mais, inversement, elle ne sait pas faire certaines choses que la théorie ancienne savait faire. Et Euclide, s'il ne suffit plus, n'est pas près d'être détrôné.

TITRE : DOUZE GEOMETRIES.
PETIT PARCOURS DE LA GEOMETRIE D'EUCLIDE A LA GEOMETRIE FRACTALE.

AUTEUR : Alain BERNARD.
DATE : JUIN 1997.
EDITEUR : IREM de Montpellier.

MOTS-CLES : INITIATION, HISTOIRE, GEOMETRIES EUCLIDIENNE, ANALYTIQUE, DIFFERENTIELLE, PROJECTIVE, DESCRIPTIVE, DE TRANSFORMATIONS, FRACTALE, ALGEBRIQUE.

RESUME : Comment l'homme a mesuré l'espace, comment l'homme a étudié les propriétés de l'espace grâce à la géométrie. Le système de mesure des Chaldéens et des Egyptiens est transformé, par adjonction de la logique, en la géométrie déductive par les Grecs : c'est la méthode « définitions, axiomes, théorèmes » rédigée par Euclide vers -300.

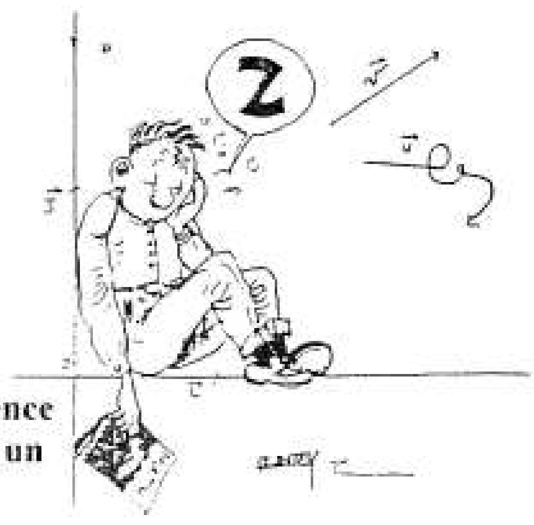
Pendant 2000 ans, les géomètres développent des dizaines de géométries, les plus célèbres formant aujourd'hui la base de notre enseignement : géométrie analytique de Descartes et géométrie différentielle donnant l'analyse complétée par la géométrie des vecteurs et la géométrie des transformations de la fin du 19ᵉ siècle.

La géométrie Chaldéo-égypto-grecque fut vraiment prodigue !

L'idée est de montrer le rôle fondateur de la géométrie de mesure des Egyptiens et des Sumériens rendue déductive par les Grecs.

L'idée est aussi montrer que la « géométrie » n'est pas une branche mais le coeur des mathématiques en dégageant la structure commune des « différentes » géométries. L'idée est enfin et surtout d'observer comment ces géométries abordent la notion d'espace.

NOMBRE DE PAGES : 160
ISBN :



Il est très difficile de faire la différence entre un mathématicien qui dort et un mathématicien qui travaille.
A.Lichnérovicz.