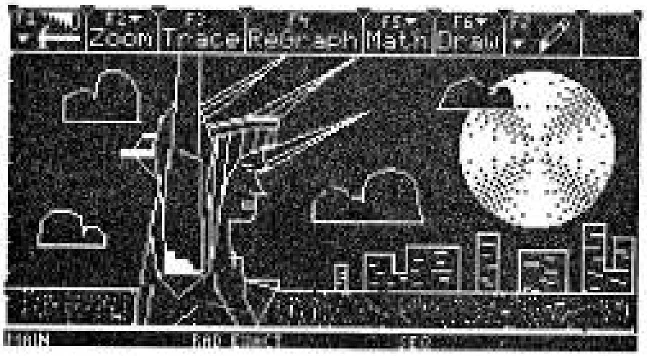
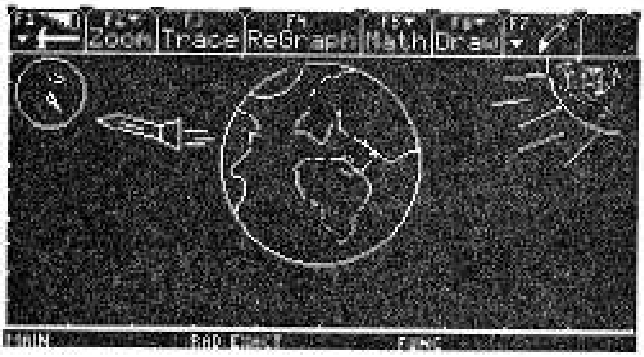
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon Montpellier cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 67.14.33.83 - 67.14.33.84
Fax : 67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr

Enseigner les mathématiques en Terminale scientifique avec des calculatrices graphiques et formelles





Bilan d'une expérimentation.

Volume 2, côté jardins.

Luc TROUCHE
Contributions de G. Drezen,
C. Faure et M. Noguès.

Juin 1996

Un même titre pour deux volumes

Petite chronologie...

Année scolaire 94/95. Texas Instrument annonce la sortie de nouvelles calculatrices, les TI-92, comprenant, entre autres applications, un logiciel de calcul formel, Derive, et un logiciel de géométrie, Cabri.

La généralisation de tels outils dans les classes ne peut pas être sans effet sur l'enseignement des mathématiques...

D'où un intérêt assez vif pour ces calculatrices, en particulier parmi les équipes des IREM qui ont développé leur recherche autour de l'intégration des outils de calcul[1].

Un hasard, des nécessités

Intérêt partagé par le directeur du CRDP [2] de Montpellier : en Juin 95, J. Gaspari, propose d'équiper une classe de lycée en calculatrices TI-92, à titre expérimental.

Informé de ce projet par les Inspecteurs Régionaux de Mathématiques, Thierry Murgier et Daniel Boutet, je propose comme terrain d'expérimentation la classe de TS dont j'aurai la charge, à la rentrée suivante, au lycée Joffre.

Il reste à constituer une équipe de suivi : c'est possible, grâce à Dominique Guin, directrice de l'IREM[3] de Montpellier, qui obtient des moyens horaires de la MAFPEN [4], de la Direction des Lycées et Collèges (Ministère de l'Education Nationale), et du Groupe de Recherche Didactique (CNRS).

Le cadre était en place, pour un début de l'expérimentation en Septembre 1995.

Une machine, des acteurs

Il s'agissait donc d'évaluer l'effet des nouvelles calculatrices sur les processus d'apprentissage des mathématiques. Cela a nécessité un investissement important de tous les élèves d'une classe : il n'est pas évident d'apprendre à utiliser une machine complexe, d'accepter de se mettre en situation de recherche...

Les protagonistes essentiels de cette aventure sont donc les 34 élèves de T11S (option biologie) : Etienne, Elsa, Pierre, Julien, Tristan, Stéphanie, Sébastien, Alexandre, Caroline, Candice, Alice, Rachel, Patrice, Karen, Thierry, Erwan, Brigitte, Jérôme et Jérôme, Nikola, Aurélie, Guillaume, Hakim, Cécile, Christelle, Aline, Guilhem, Vincent, Cyril, Damien, Laurent, Fabienne, Michaël et Nathalie, qui ont tous accepté de jouer le jeu.

Un auteur, des auteurs

Les résultats de cette année expérimentale ont été réunis dans deux volumes :

---

[1] Entres autres, l'équipe Analyse de l'IREM de Montpellier, dont on trouvera les publications référencées dans la bibliographie, en fin de volume. Petite publicité légitime...

[2] CRDP : Centre Régional de Documentation Pédagogique.

[3] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

[4] MAFPEN : Mission Académique à la Formation des Personnels de l'Education Nationale.

- le volume 1, **pistes pour un renouvellement** ("côté cours"), qui reprend le versant mathématique (éléments de cours, énoncés et correction des TP...) de l'expérimentation ;

- le volume 2, **bilan d'une expérimentation** ("côté jardins"), qui essaie de cerner l'évolution des élèves, l'appropriation de l'outil, les réussites partielles et les difficultés...

Il est clair cependant que les questions mathématiques et didactiques ne peuvent pas être aussi mécaniquement séparées. D'ailleurs on trouvera les deux aspects, d'une certaine façon, dans les deux volumes. Mais cette séparation partielle devrait permettre une lecture mieux organisée, un suivi plus facile du travail réalisé.

Au lecteur (à qui nous ne saurions trop conseiller de se procurer les deux volumes !...) d'opérer les allers-retours nécessaires !

Ces deux volumes sont écrits d'une seule plume : parce que j'étais au coeur du dispositif, comme professeur de la classe, et surtout parce que je bénéficiais de plus de temps, j'ai pu rédiger cours et TP, et consigner au fur et à mesure les observations de l'équipe.

Mais ce travail n'a été possible que parce qu'une équipe existait, composée de Maryse NOGUES, professeur de Mathématiques au Lycée Louis Feuillade de Lunel et Christian FAURE, professeur de Mathématiques au lycée Joffre de Montpellier (tous deux membres de l'équipe Analyse de l'IREM de Montpellier. A ce noyau initial s'est joint Gaëtan DREZEN, étudiant en didactique des disciplines scientifiques, dont le mémoire porte justement sur certains aspects de cette expérimentation. Enfin Dominique GUIN, directrice de l'IREM, a fait bénéficier l'équipe de ses critiques avisées, et a pu établir des passerelles avec les autres équipes travaillant sur le même thème.

Sans leurs critiques, leurs propositions (constructives !), leur relecture attentive des manuscrits, sans le travail collectif de cette année, ces documents n'auraient pas pu exister...

Un mot pour finir sur le titre donné à ces deux volumes : *Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles*. Le début est sans ambigüité : je me place du point de vue des professeurs qui enseignent, ou sont intéressés par l'enseignement des mathématiques dans les sections scientifiques de lycée.

La suite du titre est plus discutable. J'aurais pu choisir *Enseigner les mathématiques avec un système de mathématique symbolique* (ce qui reste d'ailleurs en haut de page), en donnant à l'expression Système de Mathématique Symbolique le sens rappelé par J.-F. Canet (Canet, 1994) : "le terme *système de mathématiques symboliques* est utilisé pour définir les calculatrices et les ordinateurs offrant, dans un même environnement, des possibilités pour traiter des calculs numériques, des représentations graphiques, et des manipulations symboliques".

L'expression me paraissait cependant trop peu explicite pour la majorité des enseignants. L'expression "calculatrice graphique et formelle" me semble plus claire, pour le moment : elle fait référence à un objet connu, les calculatrices graphiques, et signale l'élément nouveau : le calcul formel.

D'où une solution de compromis : un titre, pour les spécialistes, en petit caractère en haut de page, et l'autre titre pour tous, en milieu de page. Utile introduction aux changements de points de vue !

Luc TROUCHE
Equipe ERES (Etudes et Recherches sur l'Enseignement Scientifique)
Université Montpellier II

Introduction

Derrière chaque image révélée
se cache une autre image,
plus proche de la vérité.
Et derrière celle-ci
s'en cache encore une autre...

Antonioni,1996, Par delà les nuages.

Un désordre...

Ce deuxième volume est donc consacré au bilan de l'expérimentation qui s'est déroulée, pendant toute une année, dans une classe de Terminale S du Lycée Joffre de Montpellier.

Après le premier document "côté cours", le choix, pour ce deuxième du titre "côté jardins" peut paraître un peu facile...

Mais au-delà de l'effet d'opposition, ou plutôt de complémentarité, entre ces deux volumes, ce titre exprime autre chose :

- l'idée d'une réalité complexe, difficile à appréhender. Il y a en effet une singularité des itinéraires individuels des élèves, et en même temps des régularités qui apparaissent, et qui permettent de dégager des types de comportement. C'est le côté "jardins secrets"...
- l'idée des chemins sinueux de la recherche, de la découverte, et donc de la construction des connaissances en mathématiques. Le panorama qui se dégage, à la fin de cette année d'expérimentation, est plus celui d'un "jardin anglais", avec son exhubérance et son "désordre cohérent", que d'un "jardin français", avec ses symétries bien organisées.

Ordonné (plus ou moins...)

Ce volume s'ouvre sur un premier chapitre, "Essai de typologie", en forme de plan du labyrinthe : quelles sont les régularités qui permettent de dire que deux élèves travaillent, apprennent, cherchent, bref, "se comportent" de la même façon quand ils font des mathématiques ? Cette typologie est indispensable pour observer les évolutions des élèves tout au long de l'année.

Cette évolution sera contrôlée ensuite sur trois plans :

- on considèrera d'abord les élèves en activité de recherche. Ce sera, dans le chapitre 2, le bilan des 18 TP qui ont jalonné l'année (les 10 premiers TP réalisés avec des calculatrices graphiques, les 8 derniers avec les TI-92) ;
- puis on étudiera les productions des élèves dans des activités plus scolaires. Il s'agira, dans le chapitre 3, du bilan de 4 "interrogations écrites", dont deux bacs blancs, réalisés avec les TI-92 ;
- enfin, ce seront les élèves eux-mêmes qui tireront, à leur façon, les leçons de l'expérimentation, à travers les réponses à 5 questionnaires que l'on trouvera dans le chapitre 4.

Ce volume s'achèvera sur un cinquième et dernier chapitre, dans lequel les enseignants qui ont suivi l'expérimentation donneront leur propre point de vue sur celle-ci. Vues et changement de point de vue...

Des entrées multiples...

Les différents chapitres de ce volume se croisent et s'entrecroisent. En particulier l'analyse des TP constitue à la fois une illustration, et une justification, de la typologie avancée.

Différents ordres de lecture sont donc possibles :

- on pourra lire d'abord le premier chapitre (construction de la typologie), ou les suivants (illustration de cette typologie)... ou, mieux, faire des aller-retour !

- dans le même esprit, ou pourra lire d'abord le deuxième, ou le troisième, ou le quatrième chapitre, en fonction des besoins, ou des intérêts immédiats :

- si on s'apprête à traiter avec ses propres élèves tel ou tel TP, on pourra lire directement les résultats correspondant de la classe expérimentale ;

- si on veut avoir une idée de l'effet d'une calculatrice type TI-92 dans des travaux de type bac, on pourra aller directement au chapitre 3, etc.

Cependant, pour avoir une idée assez complète de ce qui s'est passé cette année, on aura intérêt à envisager les différents facettes de ce travail : "derrière chaque image révélée se cache une autre image, plus proche de la réalité..."

Et de nouvelles pistes.

D'ailleurs ce premier bilan en appelle d'autres : l'analyse du matériel accumulé cette année est loin d'être épuisée.

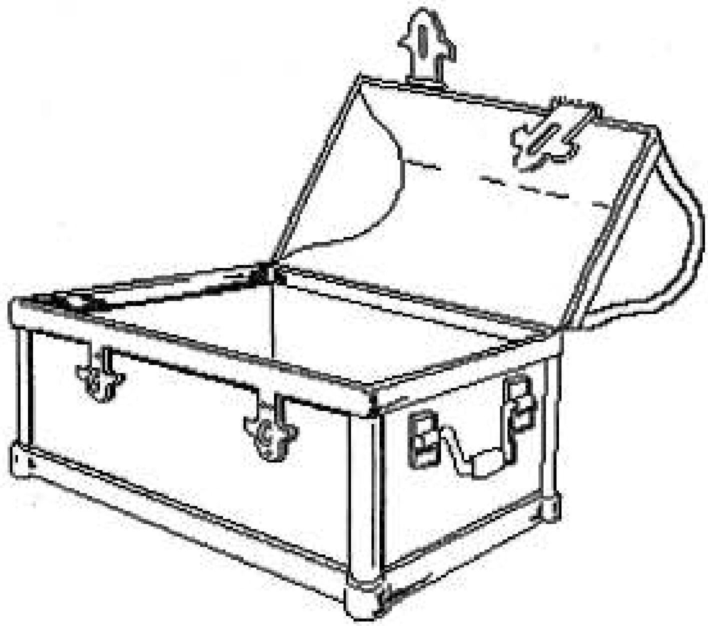
On pourra trouver des éléments complémentaires dans le mémoire de DEA (en didactique des disciplines scientifiques) de Gaëtan Drezen [Drezen 1996] qui a suivi le travail de l'équipe, et s'est intéressé plus particulièrement à une analyse statistique "orientée objets" de la typologie des élèves.

On trouvera aussi d'autres éléments dans une thèse que je devrais soutenir en Décembre 1996, centrée sur la notion de limite en Analyse, et sur la façon dont cette notion est influencée par l'utilisation d'outils de calcul.

Ce premier bilan est fait "à chaud". Il devra être complété, approfondi, croisé avec les bilans des autres équipes travaillant sur le même thème.

Mais, en l'état, il contient sans doute des informations utiles pour ceux qui s'intéressent à l'intégration des outils de calcul dans la classe.

Toute critique sera la bienvenue !



Sommaire

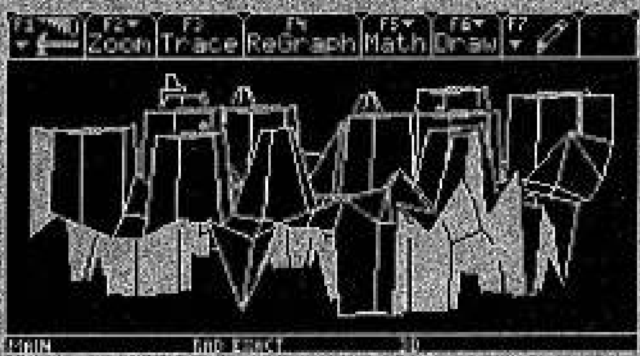


Illustration de la couverture
Jérôme MONNIER
Alexandre COHEN
Illustration de cette page
Rachel HOUSSIN

1. Sur une typologie des élèves

Typologie, quid ?

Atmosphère, atmosphère, est-ce que j'ai une gueule d'atmosphère ?

1. Une nécessité liée au suivi des élèves

Le travail expérimental engagé cette année avait un double but :

- tracer quelques pistes de renouvellement du cours de mathématiques, lié à l'introduction de nouveaux outils de calcul ;
- observer les comportements des élèves, et leur évolution, dans ce nouveau contexte.

Les deux objectifs étaient évidement liés : le cours, et les activités s'y rapportant (exercices, TP...) ont été adaptés au fur et à mesure en fonction des réactions des élèves. Et les dispositifs d'observation des élèves ont été adaptés en fonction de la nature des activités qui leur étaient proposées.

C'est lors des TP hebdomadaires que les élèves peuvent le plus librement déployer des comportements différents, liés à leur histoire scolaire, aux connaissances disponibles, à leur rapport avec la calculatrice, à leur aptitude à la recherche...

C'est aussi lors de ces TP que le dispositif d'observation est le plus serré : les 4 enseignants de l'équipe sont là, chacun suivant 4 binômes d'élèves.

Après chaque TP, une réunion de l'équipe fait le point. Chacun décrit les travaux des binômes dont il a "la charge". La dynamique même de l'échange fait apparaître des comparaisons, et donc des regroupements et des différenciations entre les différents binômes.

Ainsi se construisent peu à peu des modèles de comportement. Ce sont bien sûr, comme tout modèle, à la fois des simplifications et des exagérations de comportements d'élèves. Et il n'est pas toujours possible de rattacher telle ou telle attitude d'élève à un modèle précis. Bien souvent, on situera un élève dans un modèle intermédiaire.

Mais l'intérêt est de fixer un vocabulaire, et des points de repère pour les observateurs, de disposer d'une sorte d'échelle par rapport à laquelle on pourra situer les comportements des élèves, de pouvoir ainsi étudier les évolutions (en particulier lors du passage des calculatrices graphiques aux TI-92), ou constater des permanences.

2. Une première approche empirique

Il n'y a pas eu, au départ, de recherche de fondement théorique à cette typologie : pris par les impératifs de l'expérimentation (l'équipe s'est mise en place en même temps que les interventions dans la classe), les différents observateurs ont utilisé leurs propres mots pour qualifier le travail de tel ou tel élève...

On a vu apparaître ainsi différents termes, qui par recoupements, agrégations successives, permettaient de distinguer cinq types d'élèves :

- le rêveur (ou spéculateur, ou réfléchi, ou théoricien) ;
- le calculateur (ou algébriste, ou théorique, ou linéaire, ou rationnel) ;
- le scolaire (ou suiviste) ;
- le bricoleur ;
- l'expérimentateur (ou coordonnateur).

Le nombre de qualificatifs étant lié au flou du modèle...

En même temps, 5 élèves étaient distingués comme prototypes de chacun des 5 types qui apparaissaient dans les différentes bilans.

Pour préciser cette typologie, un tableau apparaît dans le rapport d'étape n°2 (page 43), qui situe chaque type par rapport à quatre questions :

- quel est le geste prioritaire ? (calcul à la main, calculatrice, ou "c'est selon") ;
- y a-t-il maîtrise d'ensemble du processus du TP ?
- y a-t-il une attitude "expérimentatrice" ?
- quelle est l'attitude face à la machine (experte, ou novice ?)

Chacune des rubriques se rapporte à l'action des élèves pendant les TP. Le contenu de chacune d'entre elles reste vague. Seule est précisée "l'attitude des élèves face à la machine" : est appelée experte, ou novice, l'idée que l'élève se fait de ses capacités à utiliser la calculatrice. Cette idée peut, ou non, coïncider avec l'opinion du maître, c'est une autre histoire...

	Type	1	2	3	4	5
Geste prioritaire	Calcul à la main		x	x		
	Calcul machine				x	
	C'est selon	x				x
Maitrise d'ensemble du processus	Oui	x	x			
	Non			x	x	x
Attitude expérimentatrice	Oui	x			x	x
	Non		x	x		
Attitude face à la machine	Experte	x	x		x	
	Novice			x		x

Cette première typologie manifeste vite ses faiblesses :
- les 5 élèves repérés ne restent pas suffisamment stables pour pouvoir servir de référence commune. L'un suit un processus de marginalisation scolaire qui va le tenir à l'écart du travail de la classe pendant 3 mois, l'autre fait partie d'un binôme qui éclate (son partenaire, pour des raisons de santé, va s'absenter jusqu'à la fin de l'année) ;
- la diversité des actions que les élèves mènent pendant un TP ne peuvent pas être analysées au seul filtre des quatre questions repérées dans le tableau ci-dessus...

D'où un détour par une certaine théorisation rendue nécessaire.

3.Une deuxième approche, plus rationnelle.

Différentes approches, liées à la psychologie cognitive [Houdé, Miéville 1993], [Houdé 1995], à l'intelligence artificielle [Pitrat 1990], à la didactique des mathématiques [Baron et alii, 1993], ont conduit à distinguer deux niveaux :
- un premier niveau d'**outils** : les éléments de référence, le calcul papier/crayon, la calculatrice, le voisinage (en TP, le voisin) ;
- un deuxième niveau, de **"métaconnaissances en action"** : l'investigation, la coordination/comparaison, l'interprétation sémantique des données, l'inférence, le contrôle. Ces deux niveaux sont détaillés dans le diagramme ci-contre.

Il est clair qu'il ne s'agit pas avec ce diagramme de décrire toute l'activité de l'élève, ni de définir un nouveau système de pensée "logico-mathématique"... Ainsi, entre les outils du premier niveau, et les outils d'organisation, il n'y a pas le vide... L'opérateur d'"investigation" est celui qui va activer des schèmes exécutifs.

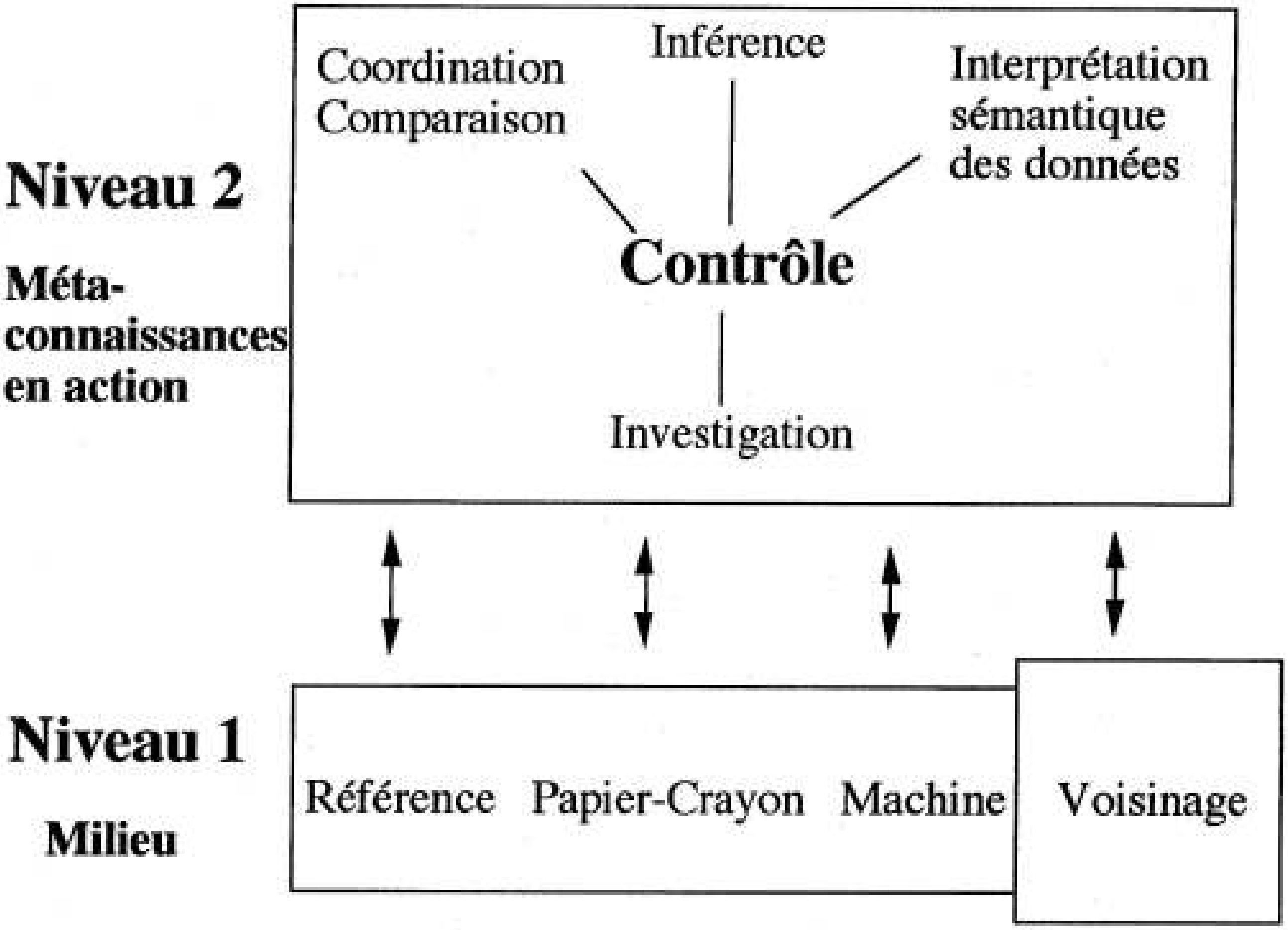
Revenons sur la nature des différents outils.

1. Les outils du premier niveau

Il serait simpliste de les considérer en un seul bloc, et consitués une fois pour toutes.
- d'abord chaque outil doit se comprendre en deux étages : la référence est constituée par l'ensemble des connaissances acquises, mais aussi par les connaissances sur ces connaissances (leur historique, leur véracité, leur précision, leur classification ..., cf [Pitrat 1990]).

De même le calcul machine est constitué par les compétences de manipulation, l'idée que l'on a de la machine, etc ; de même pour le travail "papier-crayon" (qu'on notera souvent travail P/C) ;

- les outils ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils entretiennent des rapports complexes, et évolutifs ;
- on pourrait ainsi parler pour ces outils de connaissances "statiques", au sens boîte à outils, mais ces boites évoluent dans le temps, peuvent être plus complètes, plus sophistiquées, mieux organisées.



2. **Les outils du deuxième niveau**

- l'<u>investigation</u> a une double fonction.

Dans le sens "boite à outils -> système de traitement", elle fonctionne comme recherche d'information (au sens large : notion, outil, etc). Dans ce sens, elle sera définie comme étant l'aptitude à multiplier les points de vue, avec un outil (changer de fenêtre par exemple), ou avec plusieurs outils, à l'intérieur d'un registre (changer le "pas" dans un tableau de valeurs d'une fonction par exemple), ou à travers plusieurs registres (un petit dessin à la main, un coup d'oeil sur un tableau de valeurs, etc). Il y a deux critères pour juger cette capacité : <u>un critère de temps</u> (changer trois fois de points de vue en 5 mn, ou en une heure, ce n'est pas pareil), et <u>un critère de variété</u> (un élève qui changerait de point de vue à l'intérieur d'un seul registre (cf [Duval 1988]), et avec le même outil, ne manifesterait pas ainsi une aptitude à s'informer) ;

Mais elle fonctionne aussi dans le sens "système de traitement -> boîte à outils", où elle assure une fonction de stockage de l'information, qui assure l'évolution de la "boîte à outils".

Il y a là aussi une expertise fondamentale, qui combine expression de la nouvelle connaissance, et rangement de celle-ci à la place adéquate, repérable et disponible pour une nouvelle utilisation.

- la coordination/comparaison sera définie comme la capacité de coordonner les différents résultats issus de l'investigation (le calcul, le contexte...). L'investigation est ainsi une condition nécessaire, mais non suffisante, de la coordination. Deux critères peuvent être évoqués pour juger de la qualité de la coordination : un critère de pertinence des choix (j'ai étudié le domaine de définition d'une fonction - point de vue papier/crayon - je vais maintenant jeter un coup d'oeil à la courbe sur la machine - point de vue graphique/machine - mais je vais d'emblée adapter la fenêtre au domaine, aux max et min de la fonction...), et un critère de "fécondité : les points de vue A et B interagissent pour donner un nouveau point de vue C ; on peut placer ainsi une partie de l'activité inférentielle dans cet "objet" d'organisation. Notons que pour ces outils de niveaux 2, il y a aussi deux étages : la capacité de coordination elle-même, et la conscience de la nécessité de la coordination...(cf Artigue M, in [Baron 1993])

- l'interprétation sémantique des données, comme son nom l'indique, est l'interprétation du sens des résultats de l'investigation. Deux critères peuvent être considérés : un critère de temps (l'interprétation suppose le recul, qui suppose une certaine épaisseur de temps), et un critère de référence : on ne peut pas donner du sens sans référence à un corpus de données préexistant.

- l'inférence, imbriquée avec l'interprétation et la coordination, repose sur l'activité déductive.

- le contrôle, est, dans ce dispositif, central [Houdé 1993]. Ainsi l'investigation, la coordination, l'interprétation, l'inférence, peuvent fonctionner, ou non, sous contrôle. Les erreurs apparues dans l'action ne sont ainsi pas nécessairement dues à un "défaut de rationalité", mais plutôt à une non-inhibition de schèmes dangereux [Houdé 1995]. Cette non-inhibition étant d'autant plus forte que la dépendance vis-à-vis du "champ" est importante. Cet opérateur n'aura ainsi pas le même fonctionnement suivant les individus (ce qui est une trivialité), mais aussi suivant l'outil manipulé (le rôle de la calculatrice peut être très important, en favorisant un fonctionnement "automatique"...).

La capacité à activer l'investigation, la coordination, l'interprétation, l'inférence, de façon controlée, définit l'élève expert : différents points de vue sont mobilisés, chacun d'entre eux étant exploré, interprété, "juste assez" pour en retirer l'essentiel, et pouvoir passer, en relation avec les autres points de vue mémorisés, à un point de vue "supérieur".

Cette architecture permet de donner un nouveau fondement à la première typologie mise en place au cours de l'expérimentation.

4. Une fixation des termes et des types.

Après ce détour théorique, les mêmes types sont repris [5], et mieux définis, ce qui impose le choix d'un nom, toujours significatif. On a fait en sorte qu'il n'incorpore pas de jugement de valeur, mais il faut bien reconnaître que les appellations choisies in fine ne sont pas tout à fait satisfaisantes... Faute de mieux, donc, on a distingué 5 types : théorique, rationnel, scolaire, bricoleur, et expérimentateur.

---

[5] On reprend les mêmes et on recommence... Cela peut signifier deux choses :
- soit le caractère auto-justificatif des références choisies. La théorie appelée au secours de l'observation...
- soit le caractère judicieux des premières observations et constructions empiriques...
L'adéquation, ou non, de la typologie avec les observations suivantes permettra de conclure !

Pour rendre cela le plus clair possible, on présente ci-dessous les "cartes d'identité" de chacun des types, avec un bref commentaire. Ont été grisées les cases correspondant aux outils opérationnels (deux niveaux de gris ont été choisis : le gris plus soutenu correspond à un outil plus sollicité).

Le type théorique

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail par rapport à la recherche et à l'utilisation d'éléments de référence (d'où des phases longues de réflexion). Niveau 1 : les éléments de référence ; niveau 2 : l'investigation, l'interprétation sémantique, et, à un degré moindre, la comparaison.

La méthode de preuve repose sur l'évocation, ou l'analogie (on pense à la preuve, "expérience mentale", de Lakatos [Lakatos 1974]).

Le type rationnel

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail autour de calculs (sous entendu papier/crayon aujourd'hui, mais cela changera avec l'arrivée des TI-92); déroulement linéaire des productions écrites. Outils niveau 1 : éléments de référence, et calculs P/C. Niveau 2 : l'investigation, l'interprétation et l'inférence.

La méthode de preuve repose sur la démonstration (cf la "preuve analytique" de Lakatos).

Le type scolaire

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il n'organise pas son travail... ou plutôt procède par "copié-collé" de démarches décrites antérieurement. Outils niveau 1 : calculs P/C, machine, voisinage. Outils niveau 2 : même l'investigation est faible.

La méthode de preuve repose sur la reproduction de preuves, ou de "morceaux de preuve" mémorisés.

Le type bricoleur

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

Il organise son travail autour de conjectures et validations issues de la calculatrice. Outil niveau 1 : surtout la machine, mais aussi des échanges avec le, ou les, voisins. Niveau 2 : surtout l'investigation, et, plus faiblement, la comparaison.

La méthode de preuve repose sur la <u>production d'indices</u>, d'exemples...

<u>Le type expérimentateur</u>

Niveau 1	Papier/Crayon	Machine	Voisin	Références
Niveau 2	Investigation	Comparaison	Interprétation	Inférence

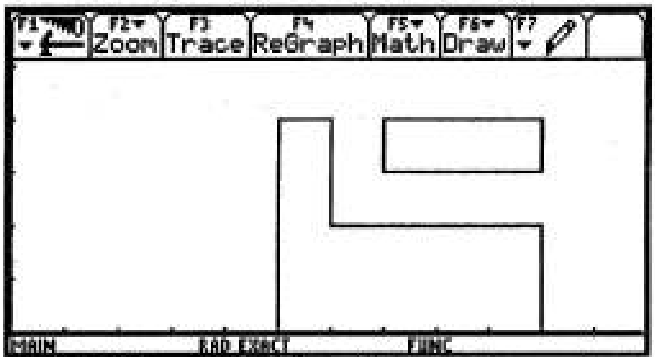
Il organise son travail autour de conjectures et validations, issues de la calculatrice, de calculs partiels, d'étude de cas particuliers.... Outils niveau 1 : tous, sauf les références. Il y a un critère "d'actualité" pour ce type d'élève : sont mobilisables les données issues de l'observation, ou des calculs, <u>du moment</u>. Niveau 2 : l'investigation, la comparaison, et, à un moindre degré, l'interprétation.

La méthode de preuve repose sur l'<u>accumulation</u> d'indices cohérents, issus si possible de plusieurs cadres d'étude.

Tout ceci peut sembler bien abstrait : les chapitres qui suivent contribueront à donner de la chair à cette classification. Cependant, une première illustration n'est sans doute pas inutile...

5. Un rappel, en guise de première illustration...

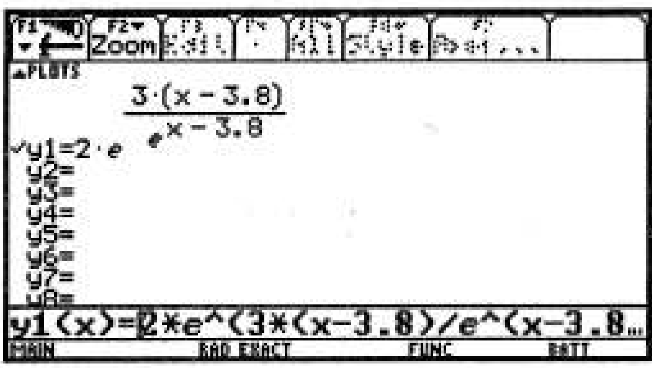
Le volume 1, "côté cours" (pages 225 et suivantes), s'achevait par un bilan des travaux réalisés par les élèves sur un problème "long".

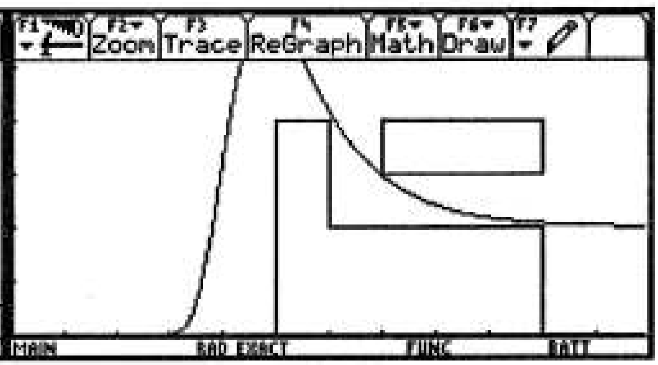


Il s'agissait de déterminer une fonction modélisant la trajectoire d'un avion, décollant en O, passant au-dessus du relief, mais sous le nuage, et atterrissant "asymptotiquement" sur l'axe des abscisses.
La fonction devait être "donc" continue et dérivable.

Voici 5 travaux d'élèves illustrant chacun des types repérés.

<u>Le type théorique.</u>





Jérôme recherche parmi les fonctions de référence une fonction "ressemblant" à la fonction cherchée. Il trouve la fonction x^2e^x : "elle satisfait les condition de départ (fonction et dérivée nulle en zéro), les conditions d'arrivée (asymptote égale à l'axe des abscisses), et une forme générale de "cloche"". Il reste à adapter l'objet repéré à la situation concrète, ce qui est fait par utilisation des fonctions associées... mais qui ne débouche pas sur une solution tout à fait convenable.

Le type rationnel.

Michaël détermine les contraintes, formalise les conditions, résout des systèmes, et trouve une fonction continue et dérivable convenable.

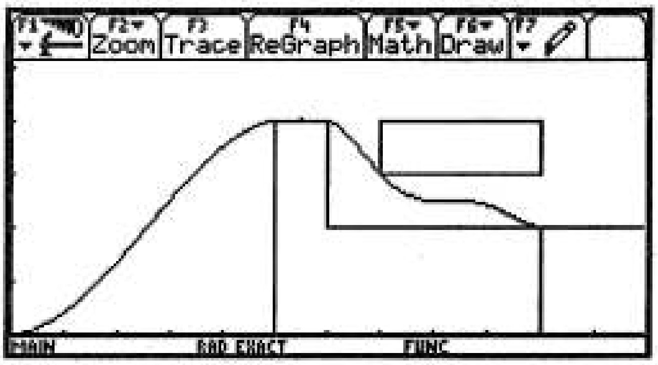
$f_1(x) = -\frac{3}{50}x^3 + \frac{23}{50}x^2$ pour $x \leq 5$;

$f_2(x) = -\frac{x^2}{10} + \frac{11x}{10} + 1$, pour $5 \leq x \leq 6$;

$f_3(x) = \frac{1207}{28800}x^5 - \frac{49099}{28800}x^4 + \frac{395317}{14400}x^3 - \frac{1573541}{7200}x^2 + \frac{1030783}{1200}x - \frac{6642}{5}$ pour $6 \leq x \leq 10$

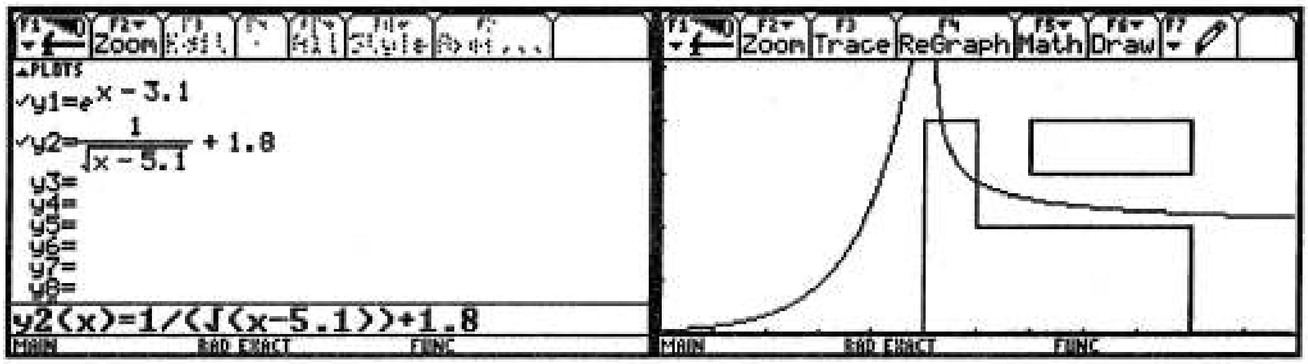
$f_4(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{400\sqrt{2}} + \frac{39}{40\sqrt{2}}\right)^2}$ pour $x \geq 10$.

Le degré du polynôme est choisi en fonction du nombre de contraintes fixées. Si cela ne marche pas, l'intervalle est recoupé.



Le travail est ainsi systématique, mais il n'y a pas de réflexion a priori sur des fonctions convenables (par leur forme générale, leurs caractères connus...). On voit la différence avec le type "théorique".

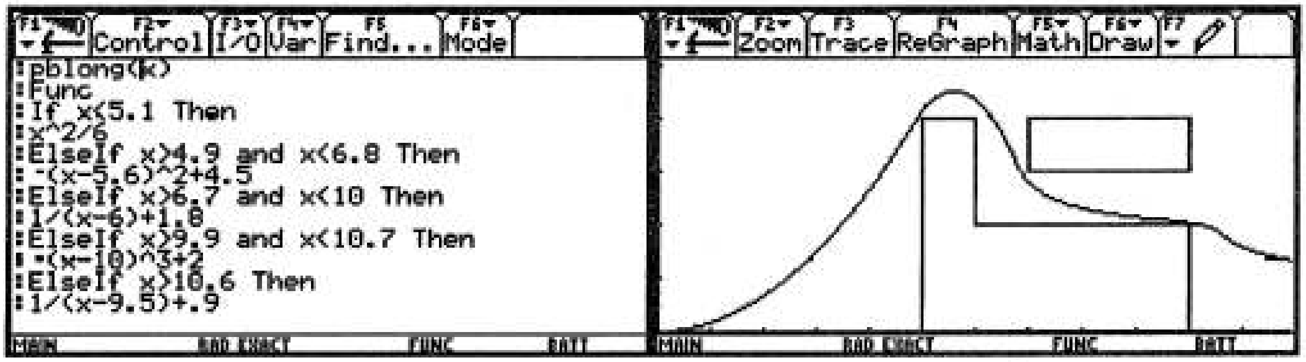
Le type scolaire



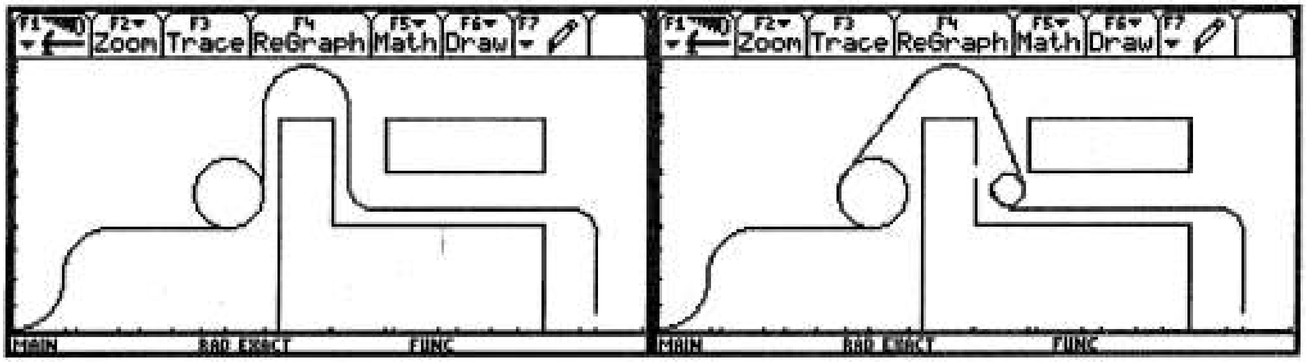
Références, calculs, utilisation de la machine, tout est assez faible ici. Il y a recollement de bouts de solution, dont aucun n'est satisfaisant, et qui ne se recollent pas entre eux...

Le type bricoleur

Pierre invente la stratégie "des manchons" : il définit un premier tronçon de 0 à 5,1 puis un deuxième tronçon de 4,9 à 6,8, etc. La construction de ces manchons assure pour lui la qualité de "continuité des pentes". Une bonne utilisation de la machine permet, par une méthode d'essais successifs rectifiés, d'obtenir une courbe "tellement vraie"... qu'elle est fausse : la fonction ainsi définie n'est pas continue.



Le type expérimentateur



Damien cherche ce qui pourrait modéliser la trajectoire de l'avion, dans un champ plus large que les fonctions usuelles : il pense aux objets géométriques "segments et arcs de cercle", qu'il définit via l'application géométrique de la TI-92. Voyant que les tronçons "verticaux" ne sont pas convenables, il a recours à des artifices (les loopings).

On a à travers ces 5 réalisations une première idée des différents types de travail, qui seront précisés dans les chapitres à venir.

6. Une première tentative de précision : la grille d'observation minutée.

Une fois repérés 5 élèves, liés à chacun des types, il paraît naturel d'observer en situation de travail, c'est à dire en TP, et de la façon la plus précise possible, les gestes réalisés :

- quelle est la durée de chaque geste ?
- quelle est la succession des différents gestes ?

Ce qui suppose de disposer d'une nomenclature des gestes, et d'un dispositif qui permette de noter ceux-ci, avec leur durée.

6a. Une nomenclature des gestes.

L'équipe des observateurs distingue, après plusieurs discussions, suivies de nouveaux ajustements (cf rapport d'étape n°2, pages 46-48), les gestes suivants :

- les gestes relatifs au travail papier/crayon : faire un dessin, faire un calcul, faire un tableau de variation (ce qui a une fonction de synthèse qui dépasse le simple calcul), rédiger le rapport de recherche, lire l'énoncé, relire le travail réalisé, regarder le travail du voisin, regarder le cahier de cours. Soit 8 gestes répertoriés ;

- les gestes relatifs au travail avec la calculatrice, en distinguant à chaque fois s'il s'agit de faire, ou de regarder : un graphique, une fenêtre (Range, ou Window), un calcul, un tableau de valeurs, le mode d'emploi, la machine du voisin. Soit 6 gestes répertoriés, mais qui peuvent être réalisés simultanément, par utilisation de l'option de partage d'écran (auquel cas l'élève peut avoir accès simultanément par exemple à un graphique et un tableau de valeurs) ;

- les gestes relatifs à la réflexion personnelle, ou en relation avec une autre personne : réfléchir ("regard vague"), parler avec un professeur (demander un complément d'information, appeler au secours -"je suis perdu !"-, ou demander une validation -"j'ai fait ça, c'est bon?"), échanger avec son partenaire (demander, ou apporter une information, être corrigé, ou corriger). Soient 8 gestes ;

- enfin des gestes divers, sans rapport direct avec le TP (se moucher, demander l'heure...).

Au total, 23 gestes élémentaires.

6b. Un dispositif de relevé d'observations

Une fois sélectionnés les 5 élèves à observer, et décidée la nomenclature des gestes, il fallait opérer plusieurs choix :

- fallait-il une observation continue, ou discrète, c'est-à-dire fallait-il noter les ruptures dans les actions (de 8h à 8h07, dessin, puis de 8h07 à 8h09 calcul...), ou noter, à intervalles de temps réguliers, l'action en cours ?

C'est le deuxième type d'observation, discrète, qui a été retenue, pour la raison suivante : il parait impossible de décider, à tout moment, de quelle action relève la multiplicité des gestes accomplis par l'élève. Par contre, à intervalles de temps réguliers, l'observateur a le temps de la réflexion, et du choix.

- deuxième débat : quelle est l'unité de temps élémentaire à choisir, compatible avec la précision de l'observation (ne pas laisser échapper de tâches significatives), et avec les capacités de l'observateur ? L'accord se fait sur une durée de 15 secondes, choix "légitimé" par une référence : Card, Moran, Newell (cité par [Meinadier, 1991]), définissant l'échelle des temps humains, donnent 10 secondes pour l'"unité de tâche".

Comme l'intervalle de 10 secondes paraît trop court pour un observateur normalement constitué [6], la durée de 15 secondes paraît devoir convenir...

Deux mises en oeuvre de ce dispositif interviennent pendant l'année, sur deux TP proches par leur énoncé :

- le TP 9, traité avec des calculatrices graphiques ;
- le TP 17, traité avec les TI-92.

La comparaison des observations recueillies était censée permettre :

- de tester la validité de la typologie ;
- d'évaluer les différences de travail avec calculatrices graphiques et TI-92 (avec prudence cependant : entre les deux observations, le type de calculatrice change, mais le type de travail évolue aussi par lui-même en cours d'année...).

7. Bilan de la première observation minutée.

On lira ci-contre la feuille la première feuille remplie par chaque observateur (elle correspond aux 6 premières minutes). On réalise que le repérage, parmi les 25 possibles, d'un geste de l'élève, toutes les 15 secondes, est une tâche assez complexe pour un observateur, aussi attentif soit-il...[7]

---

[6] Pour tester la faisabilité du dispositif, une observation préalable est faite.

[7] Il faut remercier à cette occasion Dominique Guin, directrice de l'IREM de Montpellier, Alain Albert et Jacques Delgoulet, du groupe "Intégration des outils informatiques" de l'IREM, qui ont bien voulu renforcer à cette occasion l'équipe habituelle pour cette observation de proximité.

		15	30	45	1	15	30	45	2	15	30	45	3	15	30	45	4	15	30	45	5	15	30	45	6
Pap/Cray	Dessin																								X
	Tableau de variation																								
	Calcul																								
	Ecriture rapport							X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X							
	Regard travail fait																								
	Lecture énoncé	X	X	X	X	X	X																		
	Regard cours																								
	Regard feuille voisin																								
Machine	Graph																								
	Fenêtrage																								
	Tableau de valeurs																								
	Calcul																								
	Mode d'emploi																								
	Machine voisin																								
Interact	Regard vague																								
	Prof, complément																								
	Prof, bouée																								
	Prof, validation																								
	Emetteur						X	X	X													X		X	X
	Récepteur																		X	X	X		X		
	Correcteur																								
	Corrigé																								
Divers																									

Feuille d'observation minutée n°1

7a. Hypothèses [8]

Deux hypothèses étaient faites, avant le dépouillement :

- une hypothèse faible : il pourrait exister, au niveau du nombre total d'observations pour les différentes modalités prises en compte, ou pour leur enchaînement quant à leur distribution temporelle, des valeurs propres à chaque type d'élève (cela correspondrait à une tendance cognitive) ;
- une hypothèse forte : il pourrait exister une récurrence temporelle dans l'apparition des différentes modalités, avec l'existence de modalités ou d'enchaînements de modalités "déclenchantes", propres à chaque type d'élève (cela correspondrait à une structure cognitive).

Pour tester ces hypothèses, différents observations et comptages ont été effectués :

- effectif des différentes modalités (durée totale calculable) ;
- date de la première apparition ;
- date de la dernière apparition ;
- chaîne la plus longue pour chaque modalité ;
- effectif des enchaînements de 2 modalités différentes (on compte à partir de deux apparitions) ;
- effectif des enchaînements de trois modalités différentes (on compte à partir de deux apparitions);
- situation temporelle des différentes modalités dans l'intervalle [1; 200] (valeur centrale : moyenne, dispersion : écart-type) ;
- création de "distance" (durée déclenchante entre deux modalités).

En fait, toutes ces mesures ne sont pas utilisables...

7b. Difficultés, problèmes

Le dépouillement des feuilles d'observation minutée a révélé en effet plusieurs problèmes :

- les relevés des différents observateurs n'ont pas obéi aux mêmes règles d'écriture. En effet, pour certaines périodes, des observateurs ont noté plusieurs modalités. Ce qui entraîne un problème : doit-on considérer qu'un enchaînement d'une même modalité a été brisé lorsqu'apparaît de manière concomitante une autre (ou plus) modalité dans la même période ?
- dans certains relevés d'observateurs, des erreurs d'écriture, notamment des sauts de périodes, sont apparus (jusqu'à 4 périodes sautées d'affilée !). La difficulté est que l'on ignore s'il y a eu décalage d'écriture (phénomène de "saut de ligne"), ou "assoupissement passager" ! Et cette information est capitale dans l'évaluation des "durées déclenchantes" (doit-on compter ces intervalles en temps morts, ou temps nuls ?);
- une certaine confusion est apparue lorsque les observateurs ont eu à discerner le travail concernant le rapport de recherche (travail de rédaction) et le travail concernant la recherche proprement dite (calculs, dessins, ébauche de tableaux de valeurs, etc) ;
- enfin il a fallu quelquefois interpréter les relevés des observateurs : ainsi par exemple lorsque l'observateur a inscrit R (pour regard) sur "Ecriture rapport", cela a été traduit par "regard travail fait".

En bref, on peut se poser la question : y a-t-il, au niveau des possibilités d'observation, une adéquation entre les observations matériellement possibles, et la finesse de la grille d'analyse envisagée ? Cela nécessiterait sans doute une formation, ou un entraînement adéquat des observateurs, le couplage de cette observation minutée avec d'autres relevés (enregistrement audio, enregistrement des écrans de la calculatrice...).

Le seul couplage possible ici était le croisement avec le cahier de recherche des élèves, ce qui s'est avéré insuffisant pour lever les ambiguïtés signalées.

---

[8] L'étude qui suit est réalisée à partir du travail fait par Gaëtan Drezen [Drezen 1996]

Dans ces conditions, il faut se garder de mettre du signifiant sur des relevés empreints de beaucoup d'approximations a priori...

Finalement, seul le comptage des effectifs des différentes modalités semble être utilisable ici.

7c. Effectif des modalités

Quelques indications pour faciliter la lecture du tableau ci-dessous.

On y trouve, dans chaque colonne, le nombre de modalités repérées pour chacun des 5 élèves observés. Ainsi l'élève "théorique" a effectué pendant 7 intervalles de temps élémentaires de 15 secondes (successifs, ou disjoints) un dessin "à la main".

Dans la rubrique Graph ont été distingués Regard et Action : ainsi le même individu théorique a regardé le graphique machine à 18 reprises, et a agi sur ce graphique à 16 reprises (Trace, Intersection...).

Enfin, pour les totaux relatifs à chaque domaine, on a reporté un total brut, et un total en pourcentage (nombre d'actions de ce domaine, sur nombre total d'actions repérées : ainsi, pour le type théorique, en total papier crayon, 0,55 correspond à 112/203). Le calcul de ce pourcentage était nécessaire pour tenir compte du fait que le nombre total d'actions repérées a beaucoup varié selon les observateurs (entre 199 et 285...), selon que ceux-ci marquaient, pour un même moment, différentes actions, ou non...

		Théorique	**Rationnel**	**Scolaire**	**Bricoleur**	**Expérim.**
Pap/Cray	Dessin	7	1	0	3	9
	Tab de var	0	15	14	0	0
	Calcul	0	17	12	0	7
	Rapport	70	32	73	40	82
	Reg trav fait	9	24	20	0	9
	Enoncé	6	9	17	9	8
	Reg cours	16	4	1	17	0
	Reg voisin	4	0	2	5	6
Total		**112** **0, 55**	**102** **0,51**	**139** **0, 48**	**74** **0,36**	**121** **0, 56**
Machine	Graph	18+16	0+3	16+19	31+5	14+13
	Fenêtrage	0	4	1	3	4
	Tab de val	0	0	6	3	0
	Calcul	0	0	1	2	0
	Mod d'empl	0	0	0	0	0
	Mach voisin	0	0	6	9	5
Total		**34** **0, 17**	**7** **0, 04**	**45** **0, 16**	**53** **0, 26**	**36** **0, 17**
Interact	Reg vague	12	9	0	11	5
	Prof, compl	0	10	6	10	9
	Prof, bouée	0	0	0	13	0
	Prof, valid	1	4	0	1	1
	Emetteur	20	50	64	30	16
	Récepteur	11	11	31	14	22
	Correcteur	2	0	0	0	4
	Corrigé	0	0	0	0	0
Total		**46** **0, 23**	**84** **0, 42**	**101** **0,35**	**79** **0,38**	**57** **0, 26**
Divers		11	6	0	0	2
Total géné		**203**	**199**	**285**	**206**	**216**

7d. Quelques conclusions de ce tableau.

Il permet de vérifier la validité de la typologie sur plusieurs points :

- pour les actions papier/crayon, on note :
  - la faiblesse du type "bricoleur" ;
  - la longueur du temps mis par le type "scolaire" pour lire l'énoncé ;
  - la longueur de temps d'écriture du rapport pour les élèves théorique, scolaire et expérimentateur (pour des raisons différentes : l'élève théorique "pense en écrivant" de longs développements généraux, l'élève scolaire reproduit laborieusement des démonstrations ou des parties du cours, l'élève expérimentateur note scupuleusement les résultats de toutes ses investigations ; au contraire, l'élève rationnel va droit au but, et l'élève bricoleur n'est pas préoccupé par l'écriture de ce qu'il voit ou pense...);
- pour les actions machine, on note :
  - deux pôles opposés, le type "rationnel" (0, 04) qui ne l'utilise quasiment pas, et le type "bricoleur" (0, 26) ... qui bricole ;
  - la faiblesse de l'utilisation de la calculatrice pour faire autre chose que du graphique ; c'est là aussi le type bricoleur qui se distingue par la variété -relative- de l'utilisation de la machine ;
- pour l'interaction, on trouve :
  - un total plus faible pour le type "théorique" (ce qui est normal au vu du tandem constitué : depuis le début de l'année, l'élève théorique, et son "partenaire" bricoleur, travaillent indépendamment l'un de l'autre) ; ce qui est plus étonnant est la faiblesse de l'effectif pour le type expérimentateur. Il est possible que ce soit dû à la nature de l'observation, ou à l'influence de l'observateur, dont la proximité paralyse les échanges.
  - une relation assez déséquilibrée (en comparant les rôles d'émetteur et de récepteur) dans les binômes des types rationnel, théorique, scolaire et bricoleur : c'était attendu, l'individu observé étant dans chaque cas "dominant" ; par contre on notera la relation "égalitaire" dans le binôme expérimentateur.

Voila donc une certaine validation, partielle, de la typologie mise en place (on pourra avoir des informations complémentaires en se reportant au bilan du TP 9, qui a servi de support à cette observation : dans ce volume, au chapitre 2).

On peut juger aussi le résultat final assez mince, pour un travail qui a mobilisé beaucoup d'énergie. Mais il devrait être plus efficace quand l'observation sera reconduite avec les TI-92 accompagnées de tablettes rétroprojetables, qui permettront à l'observateur d'être "au coeur du sujet".

8. Bilan de la deuxième observation minutée.

8a. Les conditions de l'observation.

La deuxième observation avait pour but, on l'a dit, une nouvelle validation de la typologie, et une comparaison des travaux d'élèves avec, et sans TI-92. Pour que cette comparaison soit valide, il fallait réunir un certain nombre de conditions :

- que le sujet du TP soit assez proche (c'est le cas, cf l'énoncé du TP 17) ;
- que les mêmes observateurs observent les mêmes élèves : ce ne fut pas tout à fait le cas. Un des observateurs, et deux élèves (les représentant du type théorique, et bricoleur) étaient absents...
- que le travail se fasse dans les mêmes conditions, c'est-à-dire que l'élève observé soit celui qui écrive le rapport. Cela fut le cas, sauf pour les représentantes du type scolaire, et du type expérimentateur : erreur de "mise en scène", ce fut leur voisine qui écrivit le rapport...

En fait, on s'en rend compte à chaque fois : le dispositif est si complexe à mettre en place (17 binômes à installer, un énoncé à distribuer, 5 élèves à "surveiller" de près avec un dispositif particulier, des observateurs nouveaux à intégrer dans la classe...), qu'il échappe toujours un élément essentiel...

Ce TP devait se dérouler avec des tablettes de rétroprojection : la calculatrice des élèves observés est alors reliée à cette tablette, qui permet à l'observateur de voir précisément les actions réalisées. Hélas, le jour dit, on ne dispose que de 3 tablettes : seuls les élèves scolaire, bricoleur, expérimentateur, seront suivis avec ce type de matériel.

8b. Une nouvelle feuille d'observation minutée.

La feuille d'observation est modifiée, pour tenir compte de l'arrivée des TI-92 :
- pas de changement pour les actions papier/crayon ;
- par contre, nombreuses modifications au niveau machine :
    - une première ligne d'état (écran partagé, ou non, calcul exact, ou approché, mode fonctions, ou suites... bref, le réglage général du "mode" de la machine) ;
    - ensuite 5 lignes correspondant aux applications principales de la TI-92 ;
    - et une ligne correspondant à la machine du voisin.
- pour l'interaction, il a fallu compenser la complexification de l'observation machine : les différentes actions relatives au prof ont été regroupées entre elles, ainsi que les actions relatives au partenaire.

Chaque observateur peut alors préciser, dans une case donnée, l'action réalisée : par exemple SE dans l'application initiale signifiera "solve exact", c'est-à-dire résolution d'une équation en mode exact (voir page suivante un exemple de feuille d'observation utilisée).

Il est précisé, pour éviter les distorsions de la précédente observation de ce genre, qu'il ne faut noter qu'une action par colonne.

8c. Le bilan de l'observation.

On trouvera page 21 le relevé des différentes observations.

Quelques remarques préalables, avant d'analyser les résultats :
- sur les lignes "total", on a reporté, à fin de comparaison, les résultats de la précédente observation (en pourcentage) ;
- la consigne "une colonne, une observation" a été suivie : on obtient donc un total général de 210 relevés à peu près, ce qui donne une durée de 52mn 30s pour le TP, ce qui est raisonnable. Seule la dernière observatrice a du subir une sorte de contraction du temps... Elle ne note que 173 observations... ce qui est un peu insuffisant !
- il faut avoir à l'esprit que, pour les deux dernières colonnes, l'élève observé n'écrit pas le rapport, ce qui modifie considérablement l'équilibre des tâches...
- un autre élément, non prévu, est venu perturber l'observation : le représentant du type rationnel n'a aucun échange cette fois-ci avec sa partenaire. En effet celle-ci a décidé de travailler seule "pour ne pas gêner l'observation"... ce qui aboutit évidemment à l'effet inverse. Il n'y a donc aucune interaction entre ces deux élèves pendant tout le TP !

Tout ceci doit rendre prudent dans les conclusions que l'on va tirer.

Cependant les éléments suivants apparaissent avec suffisamment de clarté pour que l'on puisse les relever (d'autant que, on le verra, ils sont compatibles avec les observations relatives à l'ensemble des TP). On utilisera dans l'analyse qui suit les observations complémentaires qui apparaissent sur les feuilles de relevé minuté (quelle est la commande activée à tel moment dans l'application initiale, etc), observations qui n'apparaissent pas dans le tableau récapitulatif.

i) Seuls les élèves "théoriques" et "rationnels" utilisent des éléments de référence, par retour au cours, ou au précédent TP qui se rapportait à une situation similaire. Les autres élèves repartent "à zéro" ;

Suite page 24

Feuille d'observation minutée n°2

Enseigner en TS avec des calculatrices comprenant un système de mathématique symbolique, volume 2
IREM de Montpellier, page 23

		15	30	45	1	15	30	45	2	15	30	45	3	15	30	45	4	15	30	45	5	15	30	45	6
Pap/Cray	Dessin																								
	Tableau de variation																								
	Calcul					X	X	X	X	X	X					X		X							
	Ecriture rapport																								
	Regard travail fait											X	X	X											
	Lecture énoncé	X			X																				
	Regard cours																								
	Regard feuille voisin																								
Machine	Etat	(F	1	E)																					
	Application initiale																			SE	SE	SE	SA	SA	SA
	Window																								
	Y editor																								
	Graph																								
	Table de valeur																								
	Machine voisin																								
Interact	Regard vague																								
	Avec le prof																								
	Avec le voisin		X	X											X		X		X						
Divers																									

		Théorique	Rationnel	Scolaire	Bricoleur	Expérim.
Pap/Cray	Dessin	13	0	5	12	1
	Tab de var	9	14	3	0	2
	Calcul	19	6	34	3	14
	Rapport	52	59	0	40	11
	Reg trav fait	10	18	17	3	5
	Enoncé	7	8	2	11	6
	Reg cours	6	26	0	0	0
	Reg voisin	0	0	3	5	5
Total		**116** (0,55) **0,55**	**131** (0,51) **0, 63**	**64** (0,48) **0, 29**	**71** (0,36) **0, 33**	**44** (0,56) **0, 25**
Machine	Home	8	20	32	17	19
	Window	6	6	9	10	7
	Y Editor	7	9	22	16	10
	Graph	24	13	20	13	25
	Table de val.	11	2	0	0	0
	Mach voisin	5	0	1	13	0
Total		**61** (0,17) **0, 29**	**50** (0,04) **0, 24**	**84** (0,16) **0,39**	**69** (0,26) **0, 32**	**61** (0,17) **0, 35**
Interact	Reg vague	6	4	0	2	5
	Avec le prof	0	20	13	13	28
	Avec voisin	27	1	53	57	35
Total		**33** (0,23) **0,16**	**25** (0,42) **0, 12**	**66** (0,35) **0,30**	**72** (0,38) **0, 34**	**68** (0,26) **0, 39**
Divers		0	1	0	1	2
Total géné		**210**	**207**	**214**	**213**	**173**

ii) Pour les élèves théorique, rationnel (surtout pour lui d'ailleurs), scolaire, expérimentateur, il y a une prise en compte de la calculatrice beaucoup plus importante avec la TI-92 qu'avec les calculatrices graphiques antérieures, mais pas pour la même utilisation :

- l'élève théorique continue à faire les calculs à la main. La calculatrice graphique est utilisée surtout pour son application graphique, pour ce qu'elle "donne à voir" (les équations sont résolues avec la commande "Zero" de l'application graphique);
- l'élève rationnel utilise plutôt les commandes de l'application initiale pour résoudre les équations. Il y a un équilibre qui s'est instauré entre les calculs élémentaires faits à la main, et ce qui est délégué à la machine ;
- l'élève scolaire utilise beaucoup la calculatrice aussi bien dans l'application initiale que dans l'application graphique. Les calculs élémentaires (dérivée des fonctions puissances, limites) sont faits avec la calculatrice, et refaits "à la main" ;
- l'élève bricoleur ne fait plus ni calcul, ni synthèses à la main (tableau de variation). Tout est fait par la calculatrice ;
- l'élève expérimentateur, comme l'élève rationnel, équilibre calcul à la main/calcul machine, et application initiale/application graphique.

iii) Le temps mis pour chaque action est aussi révélateur.

Ainsi l'élève scolaire met un temps assez important (4 unités, soit environ 1 mn) pour régler une fenêtre, ce qui limite les possibilités d'investigation. Au contraire l'élève bricoleur va vite, et alterne ainsi "réglage de fenêtre"/"observation graphique". Il dispose ainsi de plus d'informations (ce qui ne veut pas dire qu'il sera en mesure de les exploiter...).

iv) Enfin l'ordre dans lequel les actions sont réalisées donne d'utiles informations :

- pour l'élève expérimentateur, il y a des interactions permanentes dès le début du TP entre les différents cadres (papier/crayon et machine, et pour la machine : graphique/application initiale) ;
- pour les élèves scolaire et bricoleur, il y a des phases longues soit de travail machine (même si à l'intérieur de ce travail le type bricoleur peut varier les points de vue), soit de travail papier/crayon. Pour l'élève scolaire, le cadre de travail semble cependant être le travail papier/crayon (le TP commence ainsi, et se poursuit avec les phases longues d'incursion dans l'exploration de la calculatrice, puis retour au papier/crayon). Pour l'élève bricoleur, c'est l'exact contraire ;
- pour les élèves théorique et rationnel, le cadre de travail est clairement le cadre papier/crayon : le TP commence donc par une longue phase de travail sur papier, avant d'entreprendre des investigations avec la calculatrice (l'élève théorique jette un petit coup d'oeil à la calculatrice en début de TP, puis travaille 15mn sans l'utiliser, l'élève rationnel travaille 15mn sans ouvrir sa calculatrice).

9. Une première conclusion.

Ces observations ne contredisent pas la typologie mise en place de façon empirique, puis appuyée sur quelques éléments théoriques.

Elles donnent aussi quelques indications sur l'effet de l'introduction des TI-92 sur le travail des élèves.

Cependant la mise en oeuvre de ces dispositifs était à la fois trop lourde (ce qui a entraîné les dysfonctionnements signalés), et trop superficielle : même en notant toutes les 15 secondes les actions réalisées, des informations échappent. Il aurait fallu compléter ce relevé par l'enregistrement des écrans des élèves, et par des entretiens d'explicitation avec chaque élève observé.

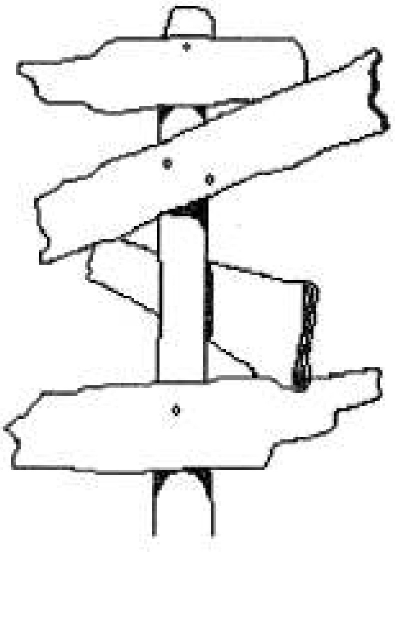
Cela n'a pas été fait. Une autre fois peut-être !

Mais l'intérêt principal de ces premières analyses est sans doute une introduction à ce qui va suivre.

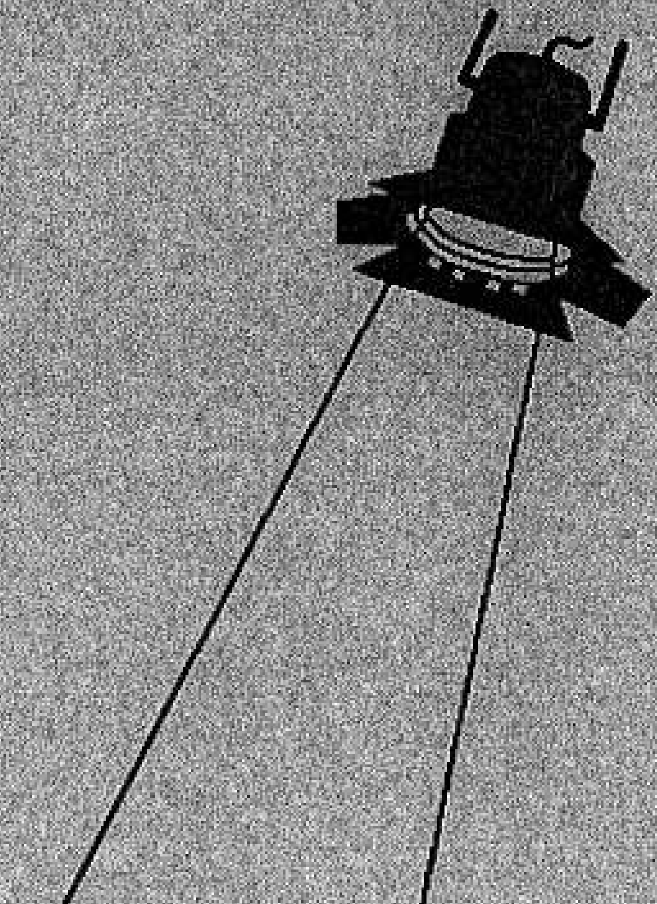
Avant de commencer une visite guidée, il est bon de disposer d'un plan des lieux. Celui-ci ne donne qu'une vague idée de l'endroit, mais permet de disposer de quelques points de repère.

Les différents types d'élèves ont été présentés, la visite peut commencer.

Suivez le guide...



1, 2, 3, de nombreux TP... Bilans.



Un, deux, trois, de nombreux bilans...

Quiconque réfléchit sur quatre choses, mieux vaudrait qu'il ne soit jamais né : ce qui est dessus, ce qui est dessous, ce qui est avant, et ce qui est après.
Talmud, Hagigah, cité par Umberto Eco, le Pendule de Foucault.

Un contrat négocié avec les élèves...

Tous les Jeudi matin, entre 9h et 10h, les élèves, en binôme, traitent un petit problème de recherche, en forme de TP [9]. Les résultats de leur recherche doivent être consignés sur un "cahier de TP", de la façon la plus complète possible. Une semaine après, toujours le Jeudi, entre 8h et 9h, un retour critique est fait sur le TP, et sur les différents résultats de la recherche.

Une telle organisation n'est pas facile à mettre en place. Les résistances sont nombreuses :

- d'abord les résistances explicites. Ce travail spécifique sera-t-il rentable pour le bac ?
- ensuite les résistances implicites. Les élèves ont l'habitude de rendre un travail "propre" au professeur, c'est-à-dire un travail dans lequel les essais infructueux, les erreurs, les impasses reconnues, ont disparu. Dans un rapport de recherche, c'est précisément cela qui est intéressant !

Les premières résistances ont été les plus faciles à vaincre : les élèves ont réalisé assez vite que la réflexion des TP permettait d'approfondir des points essentiels du cours. Le fait cependant que cette activité ne débouche pas sur une note en a relativisé pour certains l'importance. Ainsi il y a eu en moyenne un peu plus d'absents en TP qu'en cours, ce qui est un indice révélateur (même si cela ne porte que sur deux ou trois élèves).

Le deuxième type de résistance a été beaucoup plus tenace. Ce n'est qu'au bout de 2 mois environ que la majorité des élèves a accepté cet élément du contrat, et encore a-t-il fallu, régulièrement, refaire les mises au point nécessaires, et adapter le dispositif lui-même : au début, chaque élève devait rendre un rapport de recherche ; puis, pour contraindre à une négociation à l'intérieur de chaque binôme, celui-ci a dû rendre un seul rapport (écrit à tour de rôle par l'un, puis par l'autre) ; enfin, pour permettre une mémoire des travaux successifs, il fut donné à chaque groupe un "cahier de recherche", ramassé à la fin de chaque TP.

Globalement, on peut estimer que la classe a accepté le contrat qui lui était proposé. Les binômes, formés spontanément en début d'année, ont tous "tenu le coup". On a pu observer l'établissement de relations de travail de complémentarité ("complémentarité équilibrée", ou "complémentarité guidée", on détaillera ce point plus tard) dans la plupart des groupes.

Un seul ajustement a été fait, en associant un élève plutôt "actif" avec une élève qui était en voie de marginalisation.

...et avec les observateurs.

Trois observateurs ont suivi, en plus du professeur, tous les TP : Maryse Noguès et Christian Faure, professeurs de mathématiques, et membres de l'équipe Analyse de

[9] Sur le cadre des TP, voir le volume 1, "côté cours", page 77.

l'Irem de Montpellier. Le troisième, Gaëtan Drezen, étudiant en didactique des Mathématiques, a choisi le cadre de cette expérimentation pour construire son mémoire de DEA [Drezen 1996].

Chacun des éléments de cette équipe a suivi pendant l'année les mêmes binômes (4 ou 5), et a tenu un "cahier d'observations". Ce sont d'ailleurs ces cahiers d'observations, croisés avec les cahiers des élèves eux-mêmes, qui ont permis en fin d'année d'analyser, avec plus de recul, chacun des TP.

Qui dit équipe dit contrat...Il a fallu se mettre d'accord sur ce que "suivre les binômes d'élèves" voulait dire... Il y avait en effet un grand éventail d'attitudes possibles : observateur type "homme invisible", observateur type "casque bleu", observateur type "tuteur"...

L'accord s'est fait autour d'une double mission :

- recueillir le plus d'informations possibles sur les travaux des élèves, en particulier celles qui n'apparaîtront pas sur leur cahier de recherche. Les moments "cruciaux", ceux qui correspondent à des brusques changements d'orientation, à des découvertes, sont à cet égard essentiels. Mais on n'est pas forcément là quand celà se produit...
- aider chaque groupe à faire le point. Ce qui suppose de ne pas se contenter de "regarder derrière l'épaule", mais de s'asseoir régulièrement avec les élèves de chaque binôme, pour poser la question : "où en êtes-vous ?". Cette contrainte d'expression de l'historique de la recherche est conçue comme une aide pour le recueil d'observations (versant observateur donc), mais aussi comme un retour critique permettant un nouveau départ dans la recherche (versant élève).

Ce dispositif s'est mis progressivement en place, appuyé sur des discussions régulières de l'équipe tous les Jeudis entre 12h et 14h (la formule du déjeuner-débat...) : le TP précédent était alors passé en revue, et le TP suivant (objectifs, énoncé, cadre de travail) était mis au point. De plus, trois stages ont permis un bilan plus approfondi au cours de l'année.

Le contrat de "suivi" des binômes a-t-il fonctionné ? Disons qu'il a évolué, tout au long de l'année. On peut distinguer trois phases :

- une phase de mise en place : les observateurs et les élèves ne se connaissent pas encore. Les premiers se contentent surtout de regarder les seconds. Les informations recueillies sont assez sommaires, faute de connaissance du terrain, et d'habitude de ce genre d'activité. L'aide à la reformulation de la recherche ("où en es-tu ?") est quasiment inexistante ;
- une deuxième phase de fonctionnement "normal" : en cours d'année, le dispositif s'est rodé. Le contrat fixé est respecté par les observateurs. Mais il est l'objet de pressions de la part des élèves :"voilà, j'en suis là... Qu'en pensez-vous ?".
- une troisième phase, de fonctionnement "normalement perverti" : une bonne connaissance s'est établie entre élèves et observateurs.

Il y a donc tout un système de signaux implicites qui fonctionne, et qu'il est impossible de totalement maîtriser : quand l'élève explique au professeur où il en est, sauf à se composer un masque type Buster Keaton, comment imaginer que le professeur ne renvoie aucune information à l'élève ?

On peut même considérer qu'il y a des éléments de solidarité plus forts encore qui s'établissent : il y a le sentiment que élèves et équipe d'observation sont engagés dans la même galère, et que l'enjeu de réussite, de compréhension, de découverte, concerne tout le monde.

Ainsi peuvent s'expliquer, il me semble, les petits "coups de pouce" subreptices qu'on devine ça et là...

Cela prouve simplement que le statut d'observateur neutre ne peut pas être conservé toute une année dans une classe. Ce qui est bien normal, s'agissant d'êtres vivants... Mais c'est un élément à prendre en compte dans l'analyse des TP.

Il y a bilan et bilan...

Il y a de nombreuses façons de faire le bilan d'une activité aussi foisonnante qu'un TP
On pourrait relever tout ce que les élèves ont trouvé, s'attacher à l'évolution des rédactions dans les "cahiers de TP", s'attacher à l'évolution des conceptions des élèves sur une notion particulière (par exemple la notion de limite, très présente cette année), s'attacher à l'évolution des rédactions des "cahiers d'observateurs"... Un certain nombre d'éléments ont d'ailleurs déjà été consignés dans les rapports d'étape qui ont jalonné l'expérimentation [10].

On a fait le choix ici de rappeler, pour chaque TP, le cadre du travail (le thème, la question problématique, et l'objectif pédagogique (déjà indiqués dans le volume 1), et de présenter le bilan de deux points de vue :

- un point de vue global, sur les réponses des différents groupes (pour permettre la comparaison avec d'autres "expériences" que des professeurs voudraient conduire dans leur classe) ;
- un point de vue lié à la typologie présentée au chapitre précédent (pour s'inscrire dans les études actuelles sur l'effet des outils de calcul formel pour l'apprentissage des mathématiques).

Derrière tout bilan, une mise en abîme...

Il a fallu pour écrire ces bilans croiser différents points de vue (celui des élèves, bien sûr, mais aussi celui des observateurs, le sien propre consigné dans les rapports d'étape), croiser aussi ces points de vue avec ses propres souvenirs des TP passés, et avec ce que sont devenus les élèves, quelques mois après.

Ces croisements révèlent un certain nombre de surprises :

- tel travail d'élève avait été catalogué comme inintéressant ; on découvre, en le relisant plus attentivement, et avec une meilleure connaissance de l'élève en question, qu'il y avait en fait là une certaine finesse d'observation, une certaine profondeur de réflexion, qui avaient échappé en première lecture ;
- tel élève avait été catalogué comme scolaire, et figé dans ce type de travail ; on découvre, en suivant de plus près le travail sur plusieurs séances, que des évolutions ont bien eu lieu, certes très lentes, mais témoignant d'efforts considérables.

On découvre ainsi, avec la profondeur que donne le temps de la réflexion sur l'expérience, que les phénomènes les plus significatifs sont parfois les phénomènes les moins "brillants"...

Il y a ainsi une utilité inattendue de ce retour en arrière : une sorte de mise en abîme. L'observateur s'observe observant ses propres élèves...

C'est l'occasion d'une réflexion sur sa propre façon de faire de la didactique, comme le problème long (Volume 1, page 253) avait été l'occasion d'une réflexion sur sa propre façon de faire des mathématiques...

La typologie des comportements des élèves peut ainsi s'appliquer à ses propres comportements de didacticien en herbe : avec le recul, on se voit parfois théorique, parfois rationnel, assez souvent scolaire, plus souvent expérimentateur, très souvent bricoleur.

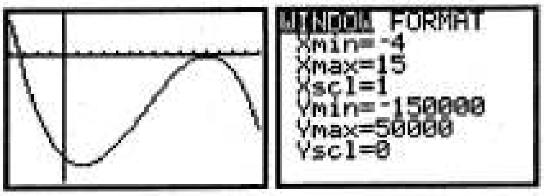
On disait, dans la présentation des TP (Volume 1, page 78), que "l'art des TP, c'est l'art de laisser du temps au temps".

Ce qui s'applique aux TP s'applique aussi (à plus forte raison sans doute) à leur bilan...

---

[10] Trouche 1995, Rapport d'Etape n°1, Trouche 1996, Rapport d'Etape n°2, non publiés, mais disponibles pour consultation à l'IREM de Montpellier.

Bilan du TP n°1



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves[11]

TP n°1.

Soit P le polynôme qui, à tout x réel associe :

$$P(x) = -121011 - 14290{,}1989\,x + 5601{,}73023\,x^2 - 300{,}56003\,x^3 + 0{,}03\,x^4$$

1. Déterminer les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On veut résoudre maintenant "expérimentalement" l'équation $P(x) = 0$.

Pour cela, vous utiliserez votre calculatrice graphique, les résultats de la première question, et vos connaissances générales sur ce type de fonctions...
Vous reproduirez précisément sur feuille les graphiques apparus sur l'écran de votre machine et qui ont été utilisés dans la résolution (préciser à chaque fois la fenêtre d'affichage)
- Combien de solutions semble avoir cette équation ?
- Quel encadrement donne votre calculatrice pour chacune d'entre elles ?

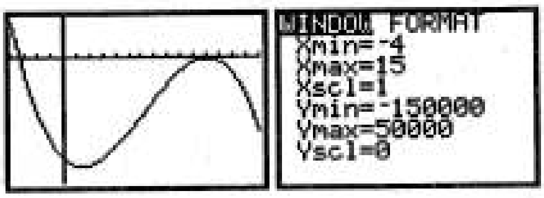
3. Utilisez les résultats obtenus à la question 1 et 2 pour donner une estimation de l'allure générale de la courbe de P.

4. Prouver les résultats observés en revenant sur l'étude théorique de l'équation $P(x) = 0$.

2. Le cadre de travail

Le thème. Il y a là un thème principal, l'étude des limites, et un thème secondaire, la résolution des équation.

La question problématique. Il y a contradiction apparente entre la limite annoncée en $+\infty$, et la représentation graphique que donne la machine pour la fonction sur une fenêtre "raisonnable" :



L'objectif pédagogique. Il est en fait double :
- sur le plan théorique, il s'agit de donner un fondement moins approximatif à la notion $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Une fonction qui réalise cela est une fonction qui prendra des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x sera suffisamment grand. Et donc, ici, une fonction qui sera positive (et le restera) à partir d'une certaine valeur de x.
- sur le plan de la machine, il s'agit d'organiser les premiers aller-retours entre apparences (éventuellement trompeuses) et résultats théoriques. Ce qui suppose une organisation des apparences (le choix d'une fenêtre adéquate n'est pas évident...), et une

[11] Il est extrait de la brochure 1995 de l'Equipe Analyse de l'IREM de Montpellier *Des fonctions et des graphes*.

organisation de ses propres connaissances. C'est cet objectif qui explique le choix d'un énoncé vague :"combien de solutions semble avoir cette équation"...

3.Les résultats globaux.

On a fait le choix de noter ci-dessous :

- les résultats donnés pour les limites ;
- la méthode utilisée pour les établir (soit une méthode correcte -l'application du théorème sur les limites en $+\infty$ des polynômes ou une factorisation, et l'application des théorèmes opératoires- , soit une méthode incorrecte - la considération des valeurs prises par la fonction pour de "grandes valeurs" de x, ou la justification des limites par les variations de la fonction) ;
- le nombre de solutions trouvées pour l'équation ;
- le type de courbe tracée (type 0 : pas de courbe, type 1 : une courbe "qui ne remonte pas" en $+\infty$, type 2 : une courbe à peu près correcte) ;
- et enfin le repérage, ou non, de la contradiction apparente entre la courbe vue à l'écran et la limite en $+\infty$.

	Lim en $-\infty$	Lim en$+\infty$	Méthode	Nb sol.	Courbe	Contradic.
Groupe 1	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	1	1	Non
Groupe 2	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	2	1	Non
Groupe 3	$+\infty$	$+\infty$	Factorisa.	?	0	
Groupe 4	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	2	2	Oui
Groupe 5	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	4	2	Oui
Groupe 6	$+\infty$	**$+\infty$ ou $-\infty$**	Factorisa.	2	0	?
Groupe 7	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	3	2	Oui
Groupe 8	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	2	1	Non
Groupe 9	$+\infty$	$-\infty$	**Dérivation**	2	1	Non
Groupe 10	$+\infty$	$+\infty$	Factorisa.	2	1	Oui
Groupe 11	$+\infty$	$+\infty$	Factorisa.	2	1	Non
Groupe 12	$-\infty$	$+\infty$	Factorisa.	?	0	?
Groupe 13	$+\infty$	$-\infty$	**Valeurs**	1	1	Non
Groupe 14	$+\infty$	$-\infty$	Théorème	2	1	Oui
Groupe 15	$+\infty$	$+\infty$	Théorème	2	1	Non

Pour comprendre ce qui va suivre, quelques informations supplémentaires sur le déroulement du TP :

- l'utilisation de la calculatrice est assez "faible" . C'est naturel, puisque c'est la première occasion, dans l'année, d'une utilisation "officielle" de cet outil. Des élèves ne savent pas comment on écrit une fonction dans le fichier de la calculatrice (Rachel demande comment on écrit la variable x), 2 groupes n'arrivent même pas à "voir" quelque chose qui ressemble à une courbe (le groupe 3 écrit : "je trouve pas une image assez précise à cause du Range"), un groupe seulement arrive à décoller les deux racines au voisinage de 11 ;
- rien n'a encore été dit en classe sur l'organisation de la confrontation entre les différents résultats de la machine, et entre ces résultats et les résultats théoriques attendus. D'où l'étanchéité entre ces différents résultats pour certains élèves, la perplexité profonde pour d'autres...;
- le contrat de recherche à deux n'est pas encore tout à fait respecté. D'une part les échanges ne sont pas réduits au seul binôme ("puisqu'on peut parler, on peut aussi parler au voisin de l'autre binôme"), et ces échanges sont plus des recueils d'information que des discussions sur une question problématique ;
- la notion de limite n'a pas encore été revue en ce début d'année. S'expriment donc avec force des modèles assez primitifs, que la manipulation de la calculatrice risque bien de renforcer [Trouche 1996] : une fonction qui tend vers $+\infty$ est une fonction qui prend de grandes valeurs, ou une fonction croissante à partir d'un certain moment.

4. TP et typologie.

Il s'agit du premier TP. Il y a une certaine réserve, chez les élèves, qui n'autorise pas encore un déploiement des attitudes. Mais déjà apparaissent des indices de comportements très différents :

<u>Un type plus théorique : Guilhem</u> (groupe 1).

Il note d'emblée le théorème qui permet de conclure :
"la limite de P(x) en $+\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré, ici $0,03\,x^4$ ".
Voilà pour les limites. Pour la deuxième question :
" on obtient une bonne vue de la courbe de la fonction en mettant :
xmin = -100, xmax = 100, ymin = -10^8, ymax = 10^8 ".
On voit que la recherche des références est immédiate, et que ces références sont opérationnelles : elles permettent de donner les limites, mais sont réinvesties aussi pour la résolution d'un problème "voisin", l'ajustement de la fenêtre pour avoir une vision convenable de la courbe.
Ensuite, cela se gâte un peu :
"pour voir le nombre de solutions, on observe combien de fois la fonction coupe l'axe des abscisses. On observe une seule solution, car en zoomant au maximum on remarque que la courbe s'approche vraiment de l'axe des abscisses, mais sans la couper, f(x) est toujours négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On peut dire que sur cet intervalle la fonction a un majorant qui est y = 0. Sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, la fonction a une solution qui est en valeur approchée par la calculatrice $-\frac{10}{3}$."
Il reproduit une courbe qui traduit cette situation apparente.
On voit bien les faiblesses : <u>mauvaise utilisation des commandes de la calculatrice</u>, et <u>mauvaise coordination des informations</u> (limite de la fonction en $+\infty$, et signe de la fonction sur $[0, +\infty[$. Mais on retrouve encore certaines caractéristiques : l'évocation de l'existence d'un majorant, la reconnaissance dans -3, 333... d'un possible $-\frac{10}{3}$, la distinction maintenue entre valeur exacte, et valeur approchée.
C'est une assez bonne illustration du "type théorique".

<u>Un type plus rationnel, Cyril</u> (groupe 10).

Un temps important est utilisé pour la détermination des limites de P.

D'abord détermination de la limite de chaque monôme en $+\infty$. Constatation d'une indétermination. Factorisation du terme de plus haut degré. A nouveau étude des limites de chaque facteur. Et conclusion par application des théorèmes opératoires. Transfert des résultats pour les limites en $-\infty$.

Après cette partie, qui correspondait à un schéma de travail habituel, Cyril ne trouve pas une stratégie qui lui convienne : il perçoit le paradoxe entre la courbe apparue à l'écran, et la limite trouvée, mais ne voit pas comment dépasser la contradiction. Des tentatives de dérivation (au brouillon), mais rien ne tranparaît dans le rapport de recherche (qui ne comporte d'ailleurs aucune reproduction de courbe).

C'est là aussi une assez bonne illustration de ce type d'élève en début d'année : à l'aise dans les travaux de type "scolaire", ils sont déstabilisés dans ces activités de recherche : ils n'y retrouvent pas leurs points de repère habituels.

<u>Un type plus scolaire, Rachel</u> (groupe 13).

Elle cherche d'abord les valeurs que prend le polynôme en quelques points. Les calculs sont faits par combinaison assez maladroite de calculs à la main, et d'utilisation de la calculatrice (l'expression du polynôme n'a pas été rentrée dans la machine).

Les "grandes" valeurs prises par la fonction assez rapidement induisent les réponses : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$, avec la justification :

"On obtient ces résultats en remplaçant d'abord x par 0, 1, 2, puis par 0, -1, -2".

On a là un méthode de preuve pragmatique primitive, par répétition de quelques épreuves [Balacheff 1987].

Elle cherche ensuite à faire apparaître une courbe sur la calculatrice. Après beaucoup de tentatives (dont il ne reste pas de trace sur son rapport), et quelques coups d'oeil sur les voisins, elle fait apparaître la courbe suivante :

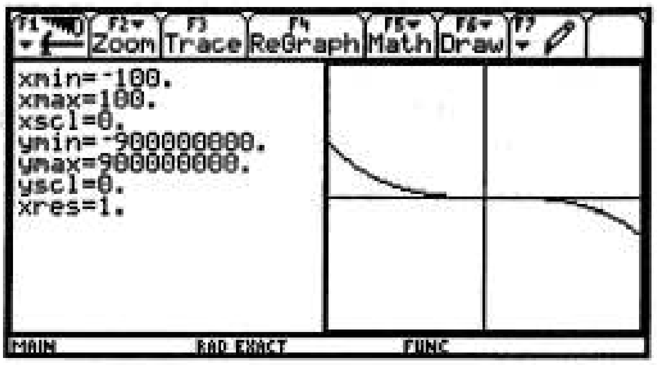
Résultat :

"Cette équation semble avoir 1 solution car elle coupe la ligne des abscisses en un point".

Ladite solution est obtenue par déplacement du curseur sur l'écran :

x = 1, 052 631 6

et y = - 130 196, 9.



On voit bien tous les problèmes posés ici :

- faiblesse des références (aucun résultat du cours concernant les limites n'est évoqué) ;
- faiblesse de l'investigation (3 résultats ponctuels donnent la limite de la fonction, une seule vue graphique donne "la" solution de l'équation) ;
- faiblesse de la coordination (la solution de l'équation proposée correspond à une valeur du polynôme assez éloignée de 0...).

<u>Un type plutôt bricoleur, Laurent</u> (groupe 4)

Il commence par rentrer le polynôme dans le fichier de fonctions de la calculatrice, puis observe la courbe sous toutes ses coutures. L'habileté dans le fenêtrage permet d'aller vite.

Le rapport est écrit dans le feu de l'action.

Les limites du polynôme sont notées (il semble bien qu'un coup d'oeil providentiel sur le binôme voisin ait bien fait avancer les choses) : $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (0,03x^4) = +\infty$

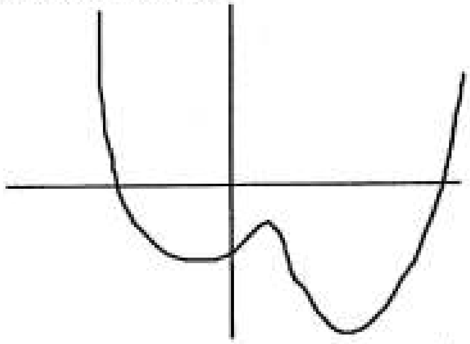
Laurent se concentre alors sur la recherche des solutions.

" Il semble qu'il y ait deux solutions selon les changements du Window, c'est à dire :

- plus le Window est grand, plus la courbe est imprécise et montre trois points solutions ;
- plus le Window est petit, plus la courbe devient précise et montre qu'il n'y a que deux solutions (on peut aussi procéder au Zoom in et Zoom box).

Comme nous savons que la courbe était croissante ($\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$), nous en avons déduit les deux points d'intersection qui sont les solutions de notre problème".

Il conclut en notant : "la courbe obtenue a environ cette allure :



La courbe esquissée n'est pas une copie d'écran, mais une récapitulation assez grossière de plusieurs vues.

En gagnant de l'information (récupération de la racine 10000), il en perd du même coup (perte des deux racines au voisinage de 11).

L'évocation des commandes utilisées indique l'importance que la machine a dans l'argumentation de Laurent.

Il y a une certaine coordination apparente entre les différents registres (la limite infinie, et la courbe qui doit nécessairement "remonter"). Cependant l'observation du travail de Laurent indique que l'information sur la remontée de la courbe a été récupérée sur un groupe voisin. Le travail réalisé ensuite a permis de récupérer une forme adéquate.

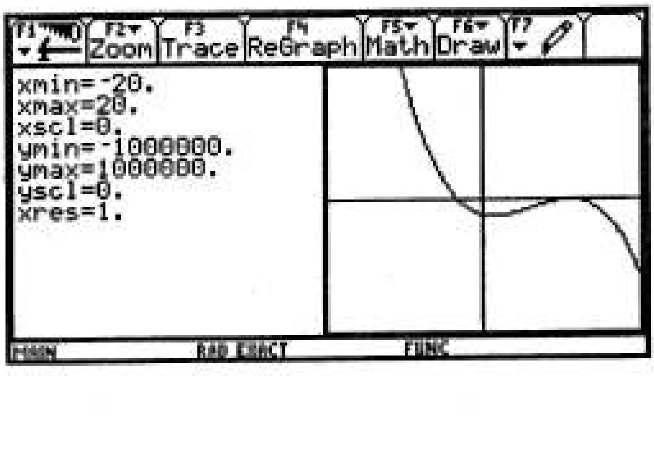
La coordination à l'intérieur du registre graphique/machine est, elle, assez mauvaise. En fait, Laurent multiplie les angles de vues de la courbe, mais sans comparer, confronter, les différentes vues. Tout se passe comme s'il était à la recherche d'une vue cruciale [Balacheff, 1987], c'està-dire d'une fenêtre qui concentre la totalité de l'information. C'est elle qui permet d'assurer qu'il n'y a que deux solutions.

Un type plutôt expérimentateur, Christelle.

Elle commence par rechercher la limite de chacun des monômes de P. En passant à la somme, elle réalise qu'il y a un problème... Elle récupère alors le théorème sur les limites de polynôme, et obtient les deux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

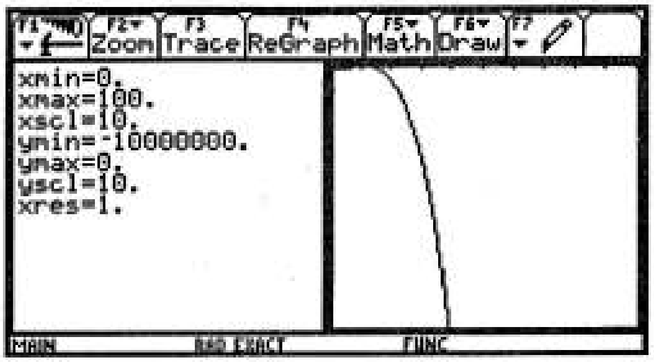
Pour l'étude de l'équation, elle reproduit plusieurs graphiques.

"On a là un aspect de la courbe axé sur l'origine du repère".



Puis elle décide un changement de fenêtre, à cause de la contradiction apparente avec la limite en $+\infty$.

"On a changé les échelles par rapport au graphique, pour voir si la courbe continue de décroître quand x tend vers $+\infty$.



Remarque : on observe sur le graphique que, lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $-\infty$. C'est donc différent du calcul théorique de la question 1".

Discussion intense à l'intérieur du groupe. Et conclusion :

"On tiendra compte du graphique pour déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$. On prend donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. On choisit ce choix car il semble le plus correct".

C'est une bonne illustration de ce type de travail : bonne recherche d'information, confrontation assez naturelle des différents points de vue. La démonstration procède par accumulation de preuves plus que par la recherche de références théoriques.

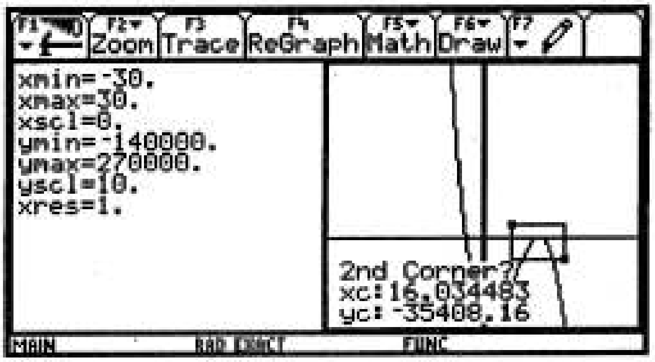
Voilà pour ce premier TP...

Le bilan qu'on vient de lire a été retravaillé en fin d'année, après avoir affiné une typologie, et avec une meilleure connaissance des différents élèves. L'analyse que l'on pourrait lire dans le rapport d'étape n°1, rédigée au lendemain du TP lui-même, était beaucoup plus sommaire...

Un élément avait cependant été déjà noté : Damien et Etienne, du groupe 5, sont les seuls élèves de la classe à avoir suivi, en classe de Première S (deux ans avant, pour cause de redoublement), une expérience d'intégration -partielle- des calculatrices graphiques. Le travail de Damien se distingue nettement de celui des autres groupes, pour la résolution de l'équation :

Damien note :

"Cette équation semble avoir 2 solutions, mais, après une vérification approfondie, on constate qu'elle en possède 3. Avec un Zoom, on remarque qu'il y a 2 solutions dans le cadre.



Néanmoins il reste un problème car nous avons remarqué que $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.

mais la courbe, apparemment, ne remonte pas en $+\infty$.

Le problème est résolu car, pour x = 10000, la courbe remonte brusquement. Il y a donc 4 solutions".

Et Damien achève son travail en donnant l'allure générale de la courbe, qui récapitule les différents points de vue déjà obtenus.

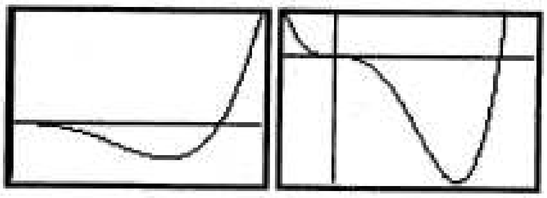
Ce n'est pas si mal...

Dans le rapport d'étape n°1, je notais :

"Ces élèves avaient déjà planché (il y a deux ans) sur de nombreux exercices de fenêtrage. Il y a quelques restes apparemment... Il faudra voir si une année de travail avec toute cette classe aboutit au même résultat".

C'est toute la question en effet !

Bilan du TP n°2



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

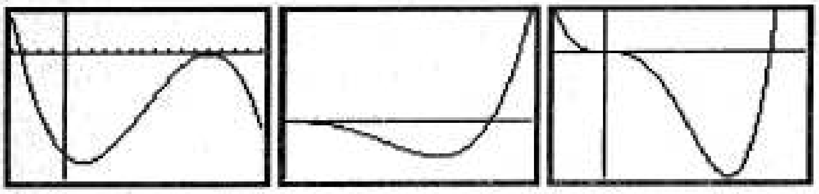
TP n°2

On reprend le polynôme P qui, à tout x réel, associe :

$$P(x) = -121011 - 14290{,}1989\,x + 5601{,}73023\,x^2 - 300{,}56003\,x^3 + 0{,}03\,x^4$$

On connait désormais les limites et les variations de ce polynôme (décroissant-croissant-décroissant-croissant).

1. Déterminez des fenêtres pour lesquelles la machine donne successivement chacune des trois représentations graphiques ci-contre (ou une représentation de même "allure").



2. On veut maintenant déterminer le plus précisément les racines de P.
- donnez, en utilisant votre machine, un encadrement le plus précis possible pour chacune d'entre elles ;
- pouvez-vous alors déterminer la valeur exacte de chacune d'entre elles ?
(si oui, expliquer précisément pourquoi il s'agit bien d'une valeur exacte)

2. Le cadre de travail

Il s'agit d'un TP de "reprise" d'activité. Il s'agit de voir d'abord si les apprentissages du dernier TP concernant l'adaptation de la fenêtre graphique ont été mémorisés. Et ensuite d'aller plus loin dans la résolution de l'équation.

Le thème.

Distinction valeur exacte, valeur approchée.

La question problématique.

Les différentes commandes de la calculatrice graphique (Trace, Intersection, Zéro) sont-elles fiables ?
Si la machine annonce P(a) = 0, peut-on affirmer que a est racine de P ?

L'objectif pédagogique.

Il s'agit de développer les attitudes de contrôle de la machine :

- sur le plan graphique (ne pas prendre les fenêtres au hasard, choisir ce que l'on va voir en fonction des objectifs du problème) ;

- sur le plan numérique : le résultat annoncé est-il exact ? Quelle est la qualité de la valeur approchée ?

3. Les résultats globaux.

On a noté dans la grille ci-dessous les points suivants :

- des fenêtres adéquates (1, 2 et 3) ont-elles été trouvées (c'était l'occasion de réinvestir ce qui avait été vu lors du précédent TP) ?
- les deux racines proches de 11 ont-elles été séparées (ce qui permet de contrôler la maîtrise du zoom) ?
- combien de racines ont été vues ?
- combien de racines ont été encadrées ?

Quand le problème n'a pas été abordé, la case est laissée vide.

	Fenêtre 1	Fenêtre 2	Fenêtre 3	Séparées ?	Nb racines vues	Nb racines encadreés.
Groupe 1	Oui	Oui	Oui	Oui	4	4
Groupe 2	Oui	Non	Non			
Groupe 3	Oui	Oui	Non			
Groupe 4	Oui	Oui	Oui	Oui	4	4
Groupe 5	Oui	Oui	Oui		?	0
Groupe 6	Oui	Oui	Oui			
Groupe 7	Oui	Oui	Oui			
Groupe 8	Oui	Oui	Oui		3	3
Groupe 9	Oui	Oui	Oui			
Groupe 10	Oui	Oui	Oui	Oui	4	4
Groupe 11	Oui	Oui	Oui	Non	3	3
Groupe 12	Oui	Oui	Oui			
Groupe 13	Oui	Oui	Oui			
Groupe 14	Oui	Oui	Oui		?	1
Groupe 15	Oui	Oui	Oui	Non	3	3

<u>A la lecture de ce tableau, une remarque s'impose</u>

Seulement 6 groupes dépassent l'étape de la recherche de fenêtres adéquates. Les résultats peuvent sembler décevants. En fait, les groupes ont manqué de temps : leur fenêtrage reste très maladroit.

Le problème de l'hétérogénéïté des matériels reste aussi posé. Plusieurs élèves demandent à disposer d'une autre machine pour pouvoir communiquer avec leur voisin.

Cette hétérogénéïté des matériels est un obstacle à un travail commun pour deux raisons :

- il est difficile (parfois impossible, pour nous en tous cas) de comprendre pourquoi, pour une même fenêtre, des machines différentes donnent des résultats différents (l'une affiche la courbe, l'autre pas par exemple) ;

- les machines n'ont pas les mêmes routines intégrées : ainsi les Casio donnent, pour un choix de l'intervalle de x, un intervalle automatiquement sélectionné pour y (et cela ne donne pas forcément le dessin attendu...). On ne peut pas attendre les mêmes réactions d'un élève qui dispose de ce dispositif sur sa machine, et d'un élève qui n'en dispose pas...

Notons une différence notable avec le TP 1 : chaque groupe rédigeait ici un seul rapport. Ceux-ci sont ainsi un peu mieux construits, mais des progrès sont encore souhaitables : la conception dominante reste la suivante, "on travaille, et quand on arrive à un résultat, on le note". Tout ce qui est "recherche" disparaît souvent du compte rendu...

Suggestion : il faudrait forcer la demande d'explicitation des démarches, lors du TP lui-même (c'est le rôle des observateurs...), mais aussi dans l'énoncé distribué aux élèves (à chaque question, demander "quelles ont été les démarches..."). Par exemple, dans ce TP, on demandait des fenêtres donnant des courbes de même allure. On aurait pu demander : "quels sont les critères de ressemblance de deux graphiques *de même allure* ? ".

Une dernière remarque sur les échanges internes aux groupes . Il peut y avoir un effet pervers de la désignation d'un rapporteur : dans certains groupes (le groupe 15 par exemple) s'instaure une répartition des tâches du type "tu travailles, et je note ce que tu fais...", sans que cela ne stimule pour autant l'échange entre les deux partenaires.

De façon générale, les discussions restent encore trop maigres dans les groupes. Ce n'est que quand on est bloqué que l'on fait appel à l'autre.

Deux explications possibles à cette situation :

- c'est peut-être parce qu'ils sont en situation d'apprentissage (et non dans un scénario de "recherche") que chaque élève travaille sur sa calculatrice, sans trop regarder ce que fait l'autre (c'est en forgeant que l'on devient forgeron...). Peut-être faudrait-il mettre en place des scénarios impliquant une stimulation, pour forcer la coopération interne des groupes.

- il y a aussi un problème de formation des groupes. Ceux-ci se sont constitués sur la base des "atomes crochus". Mais pour qu'il y ait échange, il faut susciter des situations de conflit gérable (donc élèves non semblables, mais pas trop dissemblables).

La réunion des observateurs qui suit le TP décide d'intégrer davantage cette préoccupation d'échange interne, dans la conception des énoncés, et dans l'animation des TP, sans toucher à la composition des groupes : il faut laisser le temps du rodage du dispositif, et on ne connaît pas encore suffisamment les élèves pour opérer les "dosages" opportuns...

4.TP et typologie.

On observera ici ce qui a été traité par tous, c'est-à-dire ce qui relève de la stratégie de fenêtrage. En conclusion, on notera les travaux des quelques groupes qui ont abordé la question valeurs exactes/valeurs approchées.

Pour comprendre ce qui suit, il faut savoir que, pendant l'heure qui précède le TP, le polynôme P a été étudié : les variations et les limites sont encore affichées au tableau de la classe.

Le travail de Guilhem, "théorique".

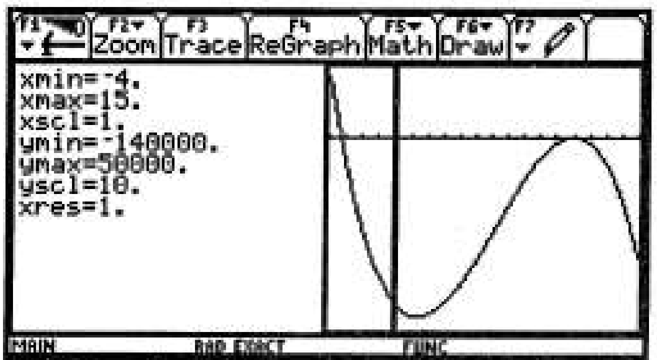
C'est lui qui écrit le rapport de recherche. Le travail est facilité par le fait que Guilhem avait étudié pendant la semaine, en détail, le polynôme P. Il dispose devant lui d'un tableau de variations avec les valeurs approchées des "points cruciaux".

Il ne traite pas les questions du TP "dans l'ordre", mais commence par la localisation des racines. Dans sa hâte à conclure, il ne se pose pas la question de la séparation des racines voisines de 11 (ni de la distinction valeur exacte/valeur approchée). En fait, on le verra dans d'autres TP, ce qui intéresse ce type d'élève, c'est la résolution des questions problématiques, ce qui les amène à négliger les questions identifiées comme "techniques" : ici, la question problématique était la descente apparemment inexorable de la courbe, alors que la limite de la fonction était +∞. Dès lors que cette question est résolue, le reste ne présente pas d'intérêt majeur. Guilhem par exemple n'utilise pas la commande Zoom, et se contente de régler directement la fenêtre voulue.

Dans un deuxième temps, il s'attache à la résolution de la première question. On donne ci-dessous les fenêtres, et la rédaction de Guilhem :

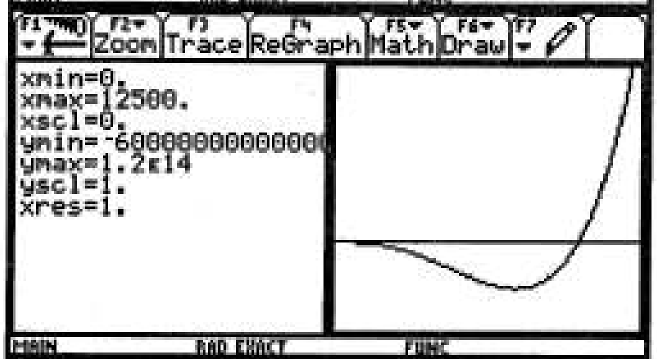
On connaissait à peu près la valeur approchée des racines, on a donc pu voir que l'axe des abscisses était gradué de -4 à 15.

On calcule f(1, 5) pour avoir le minimum local.
On calcule f(-3, 8) pour avoir ymax.



On détermine xmin, xmax par rapport aux racines.

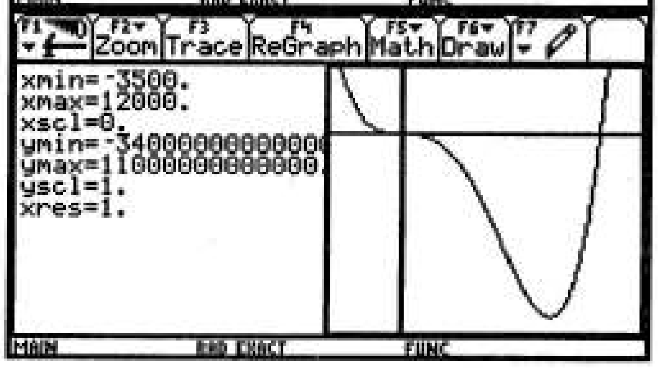
On savait que la courbe avait un minimum vers -4.10^{13}, et, comme la courbe est écrasée, on a donc pris un ymin inférieur à -4.10^{13}.



xmin, xmax, par rapport aux racines.

Minimum étant vers -4.10^{13}.

On règle les y par tâtonnement.



Il est clair ici que le tâtonnement est assez réduit. Ce sont les résultats théoriques établis qui permettent d'obtenir directement les fenêtres souhaitées. Les adaptations sont faites "à la marge".

<u>Le travail de Cyril, "rationnel".</u>

Les questions sont traitées dans l'ordre. Les méthodes utilisées sont identiques à celles de Guilhem. La présentation diffère : avant chaque fenêtre, Cyril reproduit la partie du tableau de variation correspondante.

C'est à dire qu'il recolle ici les procédures habituelles d'étude des fonctions : étude générale, tableau de variation, puis graphique.

Du tableau de variation sont extraits les éléments (racines, extremums), qui permettent de conclure. La procédure de localisation des racines est précisée : "on prend la représentation graphique idéale pour encadrer le mieux possible les racines. On fait un Zoom.. et on trouve une valeur approchée des racines". La possibilité d'en trouver les valeurs exactes n'est pas évoquée.

Le travail de Rachel, "scolaire".

Seule la première question est traitée (ce qui n'est pas si mal : on a pu voir dans le tableau récapitulatif que le groupe 2, du même type, n'a pu traiter que la première fenêtre de la question 1...). La méthode est annoncée dès le départ : "par tâtonnements, on réussit à déterminer les fenêtres des trois représentations graphiques".

Pour la fenêtre 1 :"pour les x, on compte les carreaux, pour les y par tâtonnement" ;

Pour la fenêtre 2 :"par tâtonnement. Mais pour trouver xmax, on savait que la valeur devait être supérieure à 7500 grâce au TP1" ;

Pour la fenêtre 3 :"par tâtonnement".

On voit que la méthode de travail est diamétralement opposée à celle de Guilhem. Ici ce sont les références théoriques qui sont marginales. Quant au tâtonnement, l'observation du travail du groupe montre qu'il est extrêmement laborieux : une observation superficielle semble même indiquer que les fenêtres choisies sont aléatoires. En fait, ce n'est pas tout à fait le cas, il y a une certaine logique dans les rectifications opérées, mais celle-ci n'est pas explicite, ni pour l'observateur, ni pour les élèves eux-mêmes.

Le travail de Laurent, "bricoleur".

Les justifications des fenêtres données sont totalement absentes. Laurent procède comme le groupe précédent par tâtonnement, mais avec une très bonne maîtrise du fenêtrage. Là aussi, une logique implicite, mais d'une mise en oeuvre beaucoup plus rapide que celle de Rachel : pendant que Rachel essaie 1 fenêtre, Laurent en essaie 5 (estimation grossière) !

Les 4 racines sont données, sous forme apparemment exactes :

"nous trouvons 4 racines : $x = -3$, $x = 11,0001$, $x = 11,0011$, $x = 10000$".

Bonne illustration du travail de ce groupe : manipulation rapide de la calculatrice, sans retour explicite aux résultats théoriques (ce qui posera des problèmes dans les TP suivants), non intérêt d'ailleurs pour les problèmes identifiés comme théoriques (ici la distinction valeur exacte/valeur approchée). Le problème pour eux était ici de trouver toutes les racines. Mission, pour eux, accomplie.

Le travail de Fabienne, expérimentatrice.

Le tableau de variation est rappelé en début de TP, puis chaque "bout de courbe" est reproduit sur la feuille, avec la fenêtre correspondante, et les méthodes utilisées pour leur détermination.

Fenêtre 1 : "pour les valeurs de x, on a pris en compte les racines du polynôme calculées dans le TP1. Pour les valeurs de y, on connaît $f(0) = -121011$".

Fenêtre 2 : "pour x, on connaît une racine de P(x) égale à 10000 donc on a pris un peu plus ; pour y, P(x) admet un minimum en 7500, on a donc pris une valeur approchée de $\lim_{x \to 7500} P(x)$ [12], et comme l'axe positif des y est plus grand que l'axe négatif, on a multiplié par 2 pour avoir ymax".

Fenêtre 3 : "on a gardé les valeurs de la fenêtre 2 pour ymin ; pour ymax, on prend un plus petit que ymin ; pour xmax, on a gardé la même valeur que dans la fenêtre 2 ; pour ymin : on voit sur le dessin que ymin est à peu près égal à $\frac{1}{3}$ de ymax".

Ensuite, Fabienne n'a plus que le temps d'encadrer la première racine :

$-3,333984 < x_1 < -3,333203$

12 Notons que, dès que les choses sont un peu floues, on fait appel à la notion de limite...

Là aussi, le travail est assez significatif : on notera les interactions entre les résultats théoriques et les graphiques donnés, mais aussi les interactions entre les différentes fenêtres. L'aptitude à la coordination est assez caractéristique de ce type de travail.

Pour finir, examinons les travaux de trois élèves qui ont essayé de déterminer les valeurs exactes des racines :

1. Damien explique : on ne sait résoudre de façon exacte et systématique que les équations du deuxième degré. Donc "on cherche deux racines approchées avec le curseur. Ensuite on factorise $(x - x_1)(x-x_2)(ax^2 + bx + c)$, et on résout $ax^2 + bx + c$".

Il y a là un élément intéressant de retour à un problème connu, mais par un détour assez étrange : comment pourrait-on trouver des valeurs exactes à partir d'une "factorisation approchée" ?

Cette stratégie est assez caractéristique du travail de Damien (dont on a déjà parlé à propos du précédent TP) : beaucoup d'agilité pour passer d'un point de vue à l'autre, sans s'interroger suffisamment sur la légitimité des sauts effectués. Un type de travail que l'on peut situer comme intermédiaire entre le type bricoleur, et expérimentateur.

A la décharge de Damien, il faut préciser que cette idée intervient en fin de TP, et que, s'il l'avait creusée un peu, il est possible qu'elle ait dévoilé ses contradictions...

2. Pierre trouve $f(11) = 0$, et conclut prudemment : $10 \leq x_2 \leq 12$. On constatera que c'est l'exact contraire de la démarche de Laurent vue ci-dessus (pour lui, les valeurs approchées étaient notées exactes, alors qu'ici les valeurs éventuellement exactes débouchent sur des encadrements). Dans les deux cas, la question : "est-il possible de déterminer des valeurs exactes ?" n'est pas vraiment traitée...

3. Michaël, dont on reparlera par la suite comme assez caractéristique d'un travail rationnel, se prend au jeu de la recherche graphique des solutions (il a traité rapidement la question 1 comme Cyril).

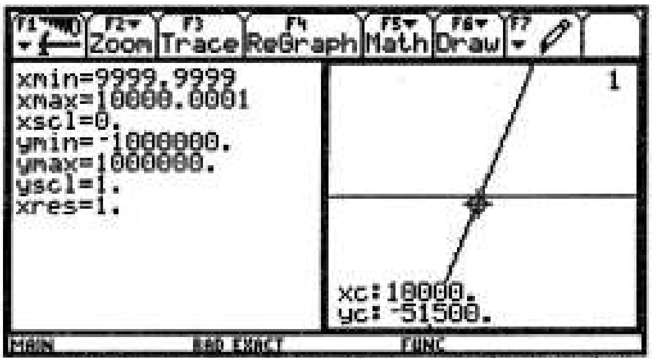
Pour cela, il procède par Zooms successifs, et déplacement du curseur avec la commande "Trace".

Il obtient d'abord $P(9\,999,9996) = -12\,759\,935$ et $P(10\,000) = 14\,886\,089$.

Conclusion $9\,999,9996 \leq x_3 \leq 10\,000$.

Puis il note : "ensuite, en faisant un autre zoom, on obtient, pour la même valeur de x (10 000) une valeur de P(x) négative et positive. 10 000 est donc la racine x_3 ".

Il y a là une certaine intelligence de la situation : un nombre à la fois négatif et positif est forcément nul... Sauf qu'il n'est pas possible qu'un même nombre soit à la fois strictement négatif, et strictement positif...

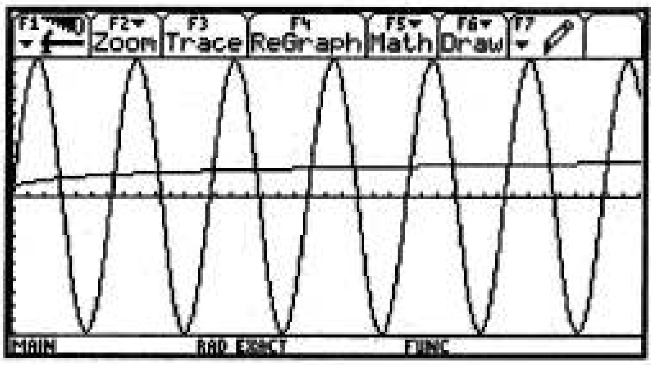


L'explication de ce fait est simple : sur toutes les calculatrices graphiques (et sur les TI-92 dans l'application graphique), on est en mode "calcul approché". Quand le curseur indique 10000, cela n'implique en général pas que l'on est sur 10000...

Donc, quand Michaël a l'impression que le curseur se place deux fois successivement sur 10000, en fait il se place sur deux valeurs approchées différentes de 10000.

Voilà pour l'explication. Quant à l'analyse de ces recherches, on pourra constater que tous les élèves (sauf, de façon déformée, Damien), en restent, pour la détermination des racines, à la recherche graphique... Il y a du travail à faire pour organiser les allers-retours entre graphique et calcul... Sans parler de l'indispensable travail sur les valeurs exactes, qui sera repris avec les TI-92.

Bilan du TP n°3



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°3 .

Première modalité

On considère l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10\sin x$, sur $\mathbb{R}+$.

Quelle est sa plus petite solution ?
Donnez un encadrement à 10^{-5} près de sa 10ème solution, de sa 100ème solution, puis de sa 1000ème solution.

On précisera la méthode choisie, les fenêtres utilisées pour "cerner" le phénomène, on n'hésitera pas à faire des dessins pour illustrer ses réponses.

Cette équation a-t-elle un nombre fini, ou infini, de solutions ?
Si c'est un nombre infini, pourquoi ?
Si c'est un nombre fini, combien de solutions ?
On justifiera avec soin les réponses à ces questions.

Deuxième modalité

On considère l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10\sin x$, sur $\mathbb{R}+$.

Cette équation a-t-elle un nombre fini, ou infini, de solutions ?
Si c'est un nombre infini, pourquoi ?
Si c'est un nombre fini, combien de solutions ?

On justifiera avec soin les réponses à ces questions.

Quelle est la plus petite solution de cette équation ?
Donnez un encadrement à 10^{-5} près de sa 10ème solution, de sa 100ème solution, puis de sa 1000ème solution.

On précisera la méthode choisie, les fenêtres utilisées pour "cerner" le phénomène, on n'hésitera pas à faire des dessins pour illustrer ses réponses.

2. Le cadre de travail

On présente ci-dessus deux variantes d'un même problème. Il peut être utile pour le professeur de tester l'influence de cette "variable didactique" liée à la forme de l'énoncé : vaut-il mieux d'abord prendre du recul sur un problème (modalité 2), ou l'aborder "par le petit bout de la lorgnette", en considérant d'abord quelques cas particuliers, pour s'approprier l'ensemble de la situation (modalité 1) ?

D'ailleurs, pour chaque TP, il peut être utile de réfléchir aux variables sur lesquelles le professeur peut jouer. Pour ce TP par exemple, on pourrait tester 100sinx au lieu de 10sinx, la fonction lnx au lieu de la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$, etc.
Mais revenons à ce TP, ainsi rédigé, sous ses deux versions.

Le thème.

Il s'agit encore de l'étude des limites infinies.

La question problématique.

Une fonction à croissance très lente peut-elle "sortir d'une bande" donnée à l'avance ? C'est à dire une fonction à croissance lente peut-elle tendre vers $+\infty$?

Les objectifs pédagogiques.

Sur le plan théorique, ce TP sera l'occasion de poursuivre le travail de définition engagé lors du TP 1 : une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est une fonction qui finira par dépasser définitivement tout réel préfixé.

Sur le plan pratique, ce TP sera l'occasion de revenir sur les stratégies de fenêtrage : pour voir ce que l'on veut voir, on ne peut compter ni sur le hasard, ni sur le déplacement laborieux le long de la courbe. On ne peut ni tout voir, ni voir au hasard, il faut du discernement. Et c'est l'objet d'une réflexion, et d'un calcul prélable.

Sur le plan technologique, ce sera l'occasion de voir de premières "aberrations" de l'écran. Alors qu'avec les fonctions polynômes, les précédents TP avaient été l'occasion de voir qu'avec une bonne fenêtre, les variations de la fonction apparaissaient clairement "dans leur globalité", là, la discrétisation de l'écran pourra faire apparaître des pseudo-périodes difficilement compréhensibles pour ceux qui n'en auraient pas encore rencontrées.

3. Bilan global

Remarque préalable, pour situer le travail des élèves : nous venons de finir le chapitre sur les limites et la continuité des fonctions, en particulier le théorème des valeurs intermédiaires. On a vu sur de nombreux exemples que, pour résoudre des équations du type f(x) = g(x), il est souvent utile de traiter le problème sous la forme f(x) - g(x) = 0 ("il est plus simple de comparer une fonction à zéro que de comparer deux fonctions entre elles").

Ce qui explique que de nombreux groupes préfèreront se ramener à cette procédure, plutôt que de comparer deux fonctions de référence...

On a noté dans les deux grilles ci-dessous les résultats des binômes, suivant les modalités. Les effectifs des deux groupes sont déséquilibrés, pour éviter que l'observateur n°2 ne soit obligé de courir entre deux salles de TP... Le groupe "5 bis" vient du recollement de deux demi groupes, disloqués pour cause d'absences. Le groupe 7 n'existe donc momentanément plus.

Modalité 1

On a relevé la localisation de la plus petite solution, de la 10ème, ... et l'éventuelle réponse à la question : nombre fini, ou infini, de solutions.

	Plus petite	$10^{ème}$	$100^{ème}$	$1000^{ème}$	Fini, infini?
Groupe 1	Oui	Oui			Fini
Groupe 2	Oui	Oui			Infini
Groupe 3	Oui	Oui			Fini
Groupe 4	Oui	Oui	Oui	Oui	Fini
Groupe 5	Oui	Oui	Oui	Oui	Infini
Groupe 5bis	Oui	Oui			

Modalité 2

On a relevé la réponse à la question : nombre fini ou infini de solutions, la présence éventuelle d'une justification, l'éventuel dénombrement du nombre fini de solutions, la localisation de la plus petite et de la $10^{ème}$ racine.

On a mis des points d'interrogation pour les groupes 9, 14 et 15, car ce sont des groupes qui ont cru, jusqu'à la dernière minute, qu'il y avait un nombre infini de solutions à l'équation. Un brusque phénomène de contagion les a fait changer d'avis en fin d'heure, sans que l'on sache vraiment s'il s'agissait d'une réelle conviction...

	Fini, infini ?	Justification	Dénomb.	Plus petite	$10^{ème}$
Groupe 6	Fini	Oui		Oui	
Groupe 8	Fini	Oui	Oui	Oui	
Groupe 9	Fini ?	Non	Oui	Oui	Oui
Groupe 10	Fini	Oui	Non	Oui	
Groupe 11	Fini	Oui		Oui	Oui
Groupe 12	Fini			Oui	
Groupe 13	Fini	Oui		Oui	
Groupe 14	Fini ?				
Groupe 15	Fini ?			Oui	Oui

Quelques éléments de bilan.

- La prise de recul dépend très faiblement des modalités 1 et 2 de l'énoncé...

Elle dépend beaucoup plus de l'aptitude "naturelle" des élèves. Ainsi le groupe 1, à qui cela n'était pourtant pas demandé, a remarqué d'abord qu'il y avait un nombre fini de solutions, ce qui l'a aidé ensuite à traiter le problème.

On peut même dire que les élèves faibles restent bloqués par un énoncé d'emblée très ouvert, alors que quelques questions de "rentrée douce" peuvent permettre une dévolution du problème (c'est le rôle qu'ont pu jouer les questions du type"quelle est la 10ème racine" par exemple pour les groupes 3 et 4).

En fait, pour favoriser ce recul, il faudrait arriver à donner régulièrement des problèmes de ce genre, pour la résolution desquels on doit sans cesse passer de l'examen des détails à la prise de champ...

- La variable didactique intéressante aurait été plutôt le "10" de sinx...

Que se serait-il passé si la "sortie" de la bande des sinus avait eu lieu après 10^{10}, c'est à dire quand les calculatrices graphiques "ordinaires" ne calculent plus les sinus ? Il sera important, pour les prochains problèmes, de tester cela : quand la machine donne, jusqu'au bout, une certaine réponse (par exemple, comme ici, "les deux courbes se rencontrent"), quels élèves pourront imaginer qu'en dehors des plages accessibles par la calculatrice il se passe autre chose ? Autrement dit, que ce qui ne se "voit" pas peut quand même exister ?

- La notion de limite n'est pas du tout un outil.

Ce sont les variations de la fonction qui sont utilisées. La manipulation d'une calculatrice semble bien favoriser les études globales (variation des fonctions) plutôt que locales (limites d'une fonction). Ainsi les élèves qui veulent prouver qu'il y a un nombre fini de solutions argumentent-ils à partir de la croissance de la fonction racine, qui va finir par dépasser la fonction 10sinx. Cette idée peut être correctement exprimée : "pour x supérieur à 10000, la fonction "racine de racine" sera supérieure à 10". Mais la plupart du temps, la confusion est maintenue : ainsi le groupe 8 défend-il l'idée qu'"une fonction négative globalement croissante finira par devenir tout le temps positive". Il y a bien là des risques de confusions majeures entre croissance, non majoration, et limite infinie...

Il y a des écarts qui se creusent dans les stratégies de fenêtrage :

Les aptitudes des groupes qui trouvent que la dernière solution est 6000, ou 8124, ou 9979, ou 10000, ne sont pas les mêmes... En fait les groupes qui ne savaient presque rien au début progressent lentement, ce qui est normal dans les phases de début d'apprentissage, et les groupes qui savaient déjà un peu manipuler progressent plus vite : l'observation de l'entrelacement des racines de la fonction sinus et de la fonction sinx - $\sqrt{\sqrt{x}}$ pour le groupe 5, l'observation que la fonction racine coupait chaque sinusoïde de plus en plus haut pour le groupe 1, la remarque qu'il y a 32 solutions par intervalle de 100 pour le groupe 8, témoignent de réelles qualités d'observation. Il demeure cependant un double problème :

- la difficulté de justifier les résultats trouvés (qui découle souvent de deux phénomènes : "il est inutile de démontrer, puisque cela se voit", ou "ça se voit, donc ce n'est pas rigoureux, il faut laisser cela, et passer à une étude théorique"...) ;
- la perte d'un point de vue global quand on s'"enfonce" dans l'image : le groupe 5, qui a établi une stratégie astucieuse de localisation des racines, est persuadé qu'il y a une infinité de solutions, puisqu'elles sont entrelacées avec les solutions de sinus...

Certaines aberrations graphiques ne constituent pas des obstacles

Les élèves ne sont en général pas surpris quand ils obtiennent, sur certains "grands" intervalles, des représentations assez étranges pour la fonction sinus. Elles apparaissent même tout à fait "naturelles".

"L'éducation du regard" reste à faire. On y reviendra dans le TP 6, relatif à la fonction sinus justement.

Il n'y a en général pas de recours naturel aux fonctions de référence.

C'est aussi pour cela que beaucoup d'élèves étudient la fonction sinx - $\sqrt{\sqrt{x}}$ plutôt que de comparer les fonction racine et sinus. Il faut bien admettre que celles-ci ne font pas référence pour eux. C'est aussi dans cette construction de références qu'il sera nécessaire aussi d' orienter les prochaines travaux.

4. TP et typologie.

Un type théorique...

Guilhem, qui sert jusqu'à présent de référence pour ce type de travail, est absent ce jour-là. Je me rends compte en parcourant les différents groupes, que peu d'élèves ont un comportement du même type (pour le moment). Le binôme n°1, binôme de Guilhem sans Guilhem, composé de Julien, et, pour l'occasion, de Michaël, fonctionne sur le même modèle.

Michaël trace immédiatement sur papier une ébauche de la courbe du sinus et de la courbe de la fonction racine. Il explique que "c'est un mauvais dessin, mais il montre qu'il y a un nombre fini de solutions". A la question "pourquoi ?", il répond "parce que la fonction racine est croissante". L'argument est évidemment insuffisant. Mais en fait Michaël veut dire plus que cela : il s'agit d'une fonction croissante qui peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, c'est à dire d'une fonction croissante non majorée. Il écrit ainsi : "dès que x dépasse 10000, $\sqrt{\sqrt{x}}$ dépasse 10, et il ne peut plus y avoir de solutions".... De façon implicite, il s'agit bien de la confrontation entre une fonction bornée et une fonction à limite infinie.

Peu d'échange dans le groupe : Julien a pris une grande fenêtre sur les x (entre 0 et 1000000) et a le sentiment qu'il n'y a qu'une solution, zéro, pendant que Michaël en est à chercher la dixième solution...

Par ailleurs, le fait de comparer des fonctions de référence permet des observations utiles : "il n'y a pas régularité des solutions, parce que la fonction racine coupe la sinusoïde de plus en plus haut".

L'observation d'aberrations graphiques ne crée pas de bouleversements : "si on voit des choses bizarres, c'est que le Range est mal adapté"...

Le TP se termine trop tôt pour que Michaël puisse aller plus loin, ou pour que d'utiles confrontations à l'intérieur du binôme permettent un déblocage de Julien...

Cyril, plutôt rationnel.

Il commence par une observation graphique de la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$ - 10sinx. Rendu méfiant par les précédentes expériences, il prend assez rapidement une grande fenêtre pour x (entre 0 et 20000). Conclusion : "cette équation a un nombre fini de solutions, car graphiquement on peut voir que la courbe monte et ne coupe plus l'axe des abscisses".

Puis "pour trouver le nombre de solutions, on peut chercher les variations de f(x)."

Cyril dérive la fonction f. Calcul juste (ce qui n'était pas évident !). L'heure s'achève sur des tentatives, infructueuses, de détermination du signe de f '.

Rachel, plutôt scolaire.

Rachel prend beaucoup de temps pour lire l'énoncé (on verra que c'est une des caractéristiques de ce type de comportement), puis pour décider un "geste" de résolution. Premières tentatives (au brouillon, non reproduites sur le rapport) de calcul de dérivée. Calcul qui s'avère, pour elle et sa collègue, impossible.

Observation graphique, et remarque : "on pourrait croire que la fonction a un nombre infini de solutions". Là aussi, échaudée par l'expérience, Rachel essaie un "grand" intervalle pour les x (en fait, elle reprend un des intervalles du dernier TP : c'est la stratégie du copié/collé...). Conclusion, en prenant x entre 0 et 100 000 et y entre -15 et 15, "on s'aperçoit que l'équation 10sinx -$\sqrt{\sqrt{x}}$ a des solutions finies puisque y, à un moment donné, n'est plus égal à 0".

On remarquera les confusions entre "nombre fini de solutions" et "solutions finies", et la rédaction en forme de constat : "on s'aperçoit que...". Faiblesse calculatoire (impossible de calculer la dérivée), faiblesse dans l'utilisation de la machine (très peu de fenêtres choisies), lenteur dans la réalisation, caractérisent ce type de travail.

Laurent, plutôt bricoleur.

Recherche rapide d'une résolution théorique ($-10 \leq 10\sin x \leq 10$, puis $x = 10000\sin^4 x$, et Laurent note "nous ne nous en sommes pas servis"). Passage alors à l'utilisation de la calculatrice.

La première solution est localisée sans peine, et justifié "sin0 = 0, et cette fonction est forcément positive car une racine n'est jamais négative". Ce sera la dernière "allusion théorique".

Puis la 10ème solution est localisée, par déplacement le long de la courbe de $\sqrt{\sqrt{x}}$ - 10sinx et zoom : 28, 042. Enfin affirmation non prouvée : la 100ème solution est 10 fois plus grande que la 10ème solution, la 1000ème solution est 100 fois plus grande que la 10ème solution. A l'appui de ces dires, Laurent exhibe des fenêtres, qui contiennent bien des solutions, mais qui ne correspondent ni aux valeurs approchées annoncées, ni au numéro des solutions voulues. Il y a là des artifices de calcul, qui frisent l'escroquerie... mais qui correspondent bien à des raccourcis, à des "bricolages de la réalité", en gardant toujours un lien avec les mathématiques : 100 est bien 10 fois plus grand que 10...

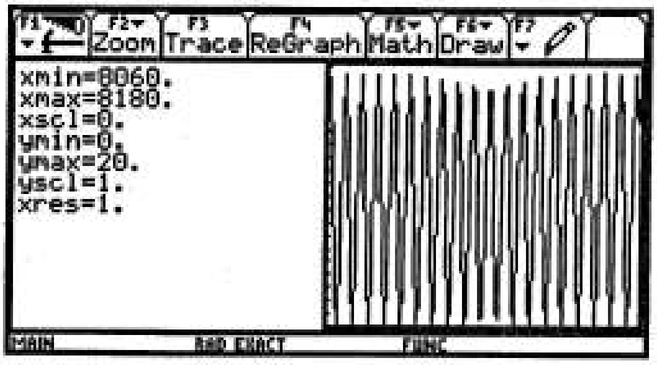
Cela ne s'arrête pas là : Laurent note :"C'est un nombre infini de solutions, car la fonction sinus s'étend à l'infini. Cette fonction varie dans l'intervalle [0, +∞[".

Puis :"après avoir fait plusieurs vérifications, nous avons remarqué notre erreur car lorsque l'on fait le Range 1E10, 1,5E10 pour x, entre 0 et 500 pour y, la fonction tend vers l'infini, tout en augmentant. Il y a donc un nombre de solutions déterminé. Avec le Range [8060, 8160] pour x, [0, 20] pour y, on voit qu'à partir de x = 8124, 82 la fonction augmente sans toucher l'axe des abscisses".

On remarque ici la rédaction qui s'appuie sur les notations de la machine (1E10), et des constatations sans aucun recul théorique.

Laurent a l'impression qu'il n'y a plus de solution à cause des problèmes de tracé "discret" de la courbe.

Tous dépend de la calculatrice qu'il utilisait ce jour-là. Mais il se peut que les "pointes basses" de la courbe ne soient pas des points de calcul, et donc que l'illusion s'installe que la dernière solution est autour de 8000 (ce qui n'est pas le cas du graphique ci-contre).



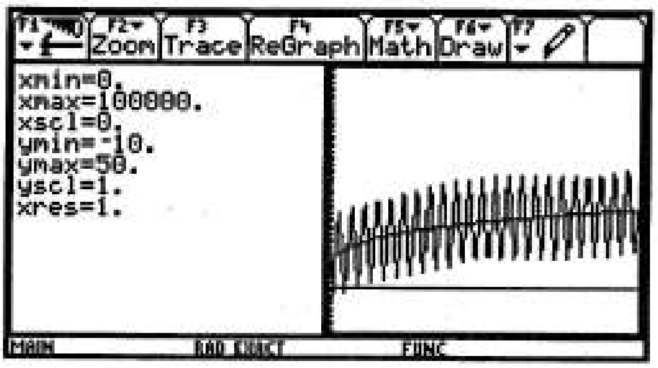
Il n'y a en tous cas aucun retour dans le travail du groupe vers un point de vue théorique pour comprendre ce qui se passe.

<u>Un travail plutôt expérimentateur : Fabienne.</u>

Conjecture : l'équation a un nombre infini de solutions. Puis calcul de la dérivée pour trouver les variations de $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} - 10\sin x$. Calcul exact, et constatation : "on ne connaît pas le signe de f ' ". Observation graphique sur l'intervalle [0, 10 000]. Discussion entre Fabienne et Christelle (la discussion est toujours animée dans ce trinôme) :"il n'y a finalement qu'un nombre fini de solution, mais comment le prouver ?". L'idée vient de comparer la fonction f avec des fonctions proches plus simples.

Le groupe observe simulanément la courbe de $\sqrt{\sqrt{x}} - 10\sin x$ et de $\sqrt{\sqrt{x}}$.

Observation orale : "la courbe de f suit la courbe de $\sqrt{\sqrt{x}}$". Fabienne note sur le rapport : "il n'y a, donc, pas un nombre infini de solutions".



Le TP s'achève par un petit échange : a-t-on bien prouvé, et quoi ?...

On voit qu'il y a là ces capacités de rapprochement d'objets voisins, de comparaison, de remise en question, qui sont tout à fait adaptées à un travail de recherche. Il manque une mise en forme de ces observations, qui nécessite un petit détour théorique.

<u>Pour finir, un détour du côté du groupe de Damien</u>, qui confirme à nouveau un type de travail intermédiaire entre un modèle bricoleur, et un modèle expérimentateur.

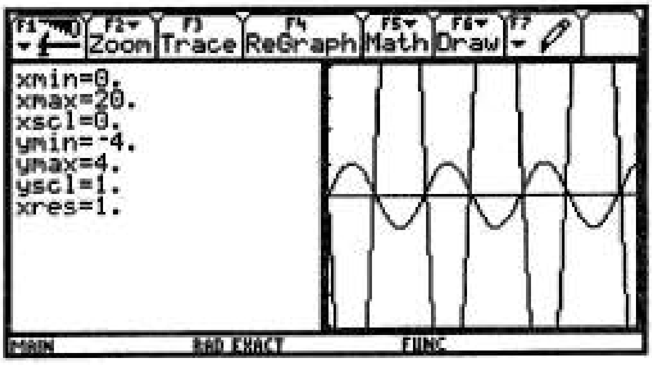
Le groupe étudie aussi la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$ - 10sinx. La plus petite racine est vue après une discussion : 0 est-il admissible ? (c'est-à-dire $\sqrt{0}$ existe-t-il ?). Pour trancher cette question, Etienne, le collègue de Damien, regarde la table de valeurs que donne la calculatrice pour f : conclusion, f(0) = 0. Le fait de faire trancher par la calculatrice une question de ce genre semble caractéristique de ce type "bricoleur"...

Puis remarque de Damien : il y a une proximité entre la fonction sinus, et la fonction f (même recherche de proximité que le groupe de Fabienne, mais qui débouche sur la fonction sinus, et non sur la fonction racine : il aurait été intéressant de faire inter-agir les deux groupes... Mais c'est le genre de chose qu'on ne réalise qu'après !).

La remarque débouche sur : "on constate que la fonction f(x) s'annule pour les mêmes solutions que la fonction sinx. La fonction s'annule donc pour $k\pi$. Donc la 10ème solution est 10π."

La première impression est bien en effet que la fonction f et la fonction sinus s'annulent aux mêmes endroits....

Mais si l'on va "un peu plus loin", les choses ne sont pas aussi simples...



Vérification, et patatras... "on a vérifié, et c'est une mauvaise méthode".

Et, ténacité intéressante : "mais on continue quand même".

En effet, la méthode ne permet pas d'obtenir les solutions de l'équation, mais un encadrement de celles-ci : "comme le graphique le montre, la première et la deuxième solutions de sinx encadrent le 1ère et la deuxième solution de f(x). Ceci nous permet d'avoir une fenêtre d'encadrement pour les nièmes solutions.

31, 615 39 ≤ 10ème solution ≤ 31, 665 25

314, 558 19 ≤ 100 ième solution ≤ 314, 608 06

3142, 390 51 ≤ 1000ème solution ≤ 3142, 44038 "

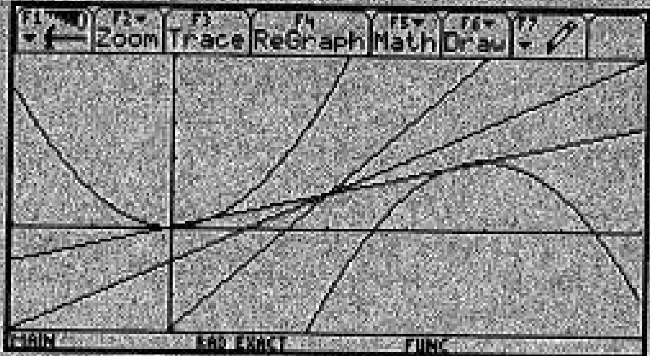
Il y a un problème de numérotation des solutions, mais la méthode est assez habile : utilisation d'une fonction de référence pour une première localisation de la racine voulue, et affinement de l'encadrement.

Le problème est que Damien reste collé à l'écran : il y a eu une certaine ouverture (de l'illusion de la coïncidence des zéros de f à la stratégie d'encadrement des zéros de l'une par les zéros de l'autre). Mais l'illusion subsiste que ce qui se produit alors se produira toujours : "il y a un nombre infini de solutions. Car ces solutions sont encadrées par la fonction sinus".

Il y a bien dans ce travail des caractères qui rapprochent du type de travail de Laurent (habileté manoeuvrière avec la calculatrice), et du type de travail de Fabienne (comparaison des objets nouveaux avec des objets connus). Mais l'absence de recul, la trop grande influence de l'écran par rapport aux propriétés mathématiques des objets manipulés, empêchent un déploiement des qualités manifestées.

Une remarque : on aura noté que l'on parle de plus en plus dans ces bilans de travaux d'équipe. D'une part parce que la rédaction d'un rapport commun contraint à des échanges réguliers, d'autre part parce que des habitudes de travail en commun s'installent peu à peu. A suivre...

Bilan du TP n°4



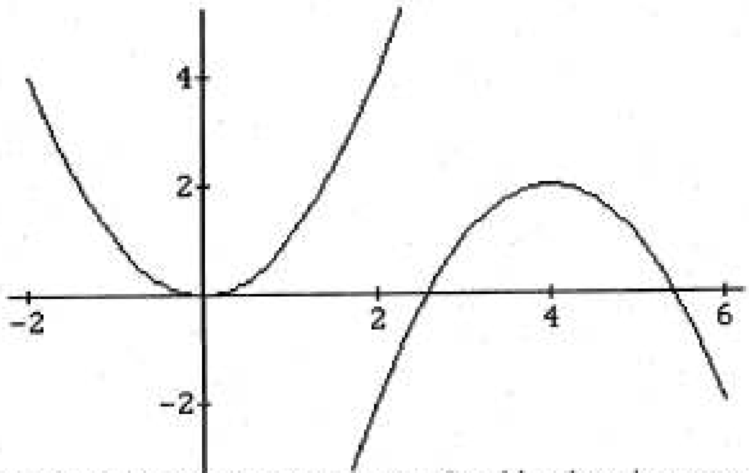
TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°4

On se propose de tracer la, ou les, tangentes communes aux deux paraboles d'équation :

$P_1 : y = x^2$ et $P_2 : y = - x^2 + 8x - 14$



1. Observer les deux courbes sur votre écran. Combien imaginez-vous de tangentes communes ? Essayez par une succession d'essais corrigés de déterminer l'équation de droite(s) approchant la ou les droite(s) cherchées.
On précisera bien sûr les équations successives obtenues, et les méthodes de vérification utilisées.

2. Déterminer l'équation d'une tangente D_a en un point de P_1 d'abscisse a, et l'équation d'une tangente D_b en un point de P_2 d'abscisse b.
A quelle condition portant sur a et b ces deux tangentes sont-elles parallèles ?
Vérifier votre résultat en prenant a = 1, en calculant b pour que D_a et D_b soient parallèles, et en observant les deux paraboles et les deux droites ainsi obtenues sur votre écran.

3. Supposons la condition de parallélisme de D_a et D_b réalisée. A quelle condition supplémentaire ces droites sont-elles confondues ? Calculer alors les valeurs de a et de b qui vérifient les deux conditions.

4. Déterminer alors les équations des tangentes communes aux deux paraboles, vérifier que cela convient bien en observant le tracé des paraboles et de ces droites, et confronter ces résultats aux résultats expérimentaux de la première question.

5. Les droites solutions se coupent en un point particulier. Etait-ce prévisible ?

2. Le cadre de travail

Le thème du TP reprend une idée du Bac S 1995 (tangente commune aux courbes des fonctions exponentielle et logarithme), dans un cadre simplifié.

Le thème.
Dérivées et tangentes.

La question problématique.
Une tangente commune est évidente. La deuxième tangente, qui oblige à sortir du cadre de l'épure, sera-t-elle vue ?

Les objectifs pédagogiques.
L'énoncé de ce TP et du TP suivant, sont assez différents, dans leur esprit, de l'ensemble des autres TP. Il s'agit de contraindre les élèves :
- à faire des allers-retours entre observation et validation ;
- à rédiger de façon plus complète leur rapport de recherche.

Pour ce TP, il s'agira de plus :
- de développer l'aptitude à associer droites et équations de droites (c'est le but des "essais corrigés" de la première question) ;
- de développer l'aptitude à sortir des fenêtres standards, pour imaginer ce qui peut se passer "ailleurs".

3. Bilan global

- A propos du thème du TP : aucun élève redoublant (il y en 12 dans la classe) n'a reconnu dans ce problème un proche parent du problème du dernier baccalauréat. Arriver à situer un exercice donné dans une classe d'exercices du même type n'est pas si simple que cela. Cela demande du recul, une bonne compréhension de la problématique...
- A propos de la forme de l'énoncé : celle-ci était beaucoup plus proche de celle d'un devoir standard. Questions successives, organisation assez stricte du travail. On verra que ce type d'énoncé très guidé a favorisé les élèves "scolaires", et bridé les élèves "bricoleurs"
- A propos du contenu lui-même : des élèves ont été gênés par le caractère trop vague de l'expression "équation de droites approchant la tangente cherchée". Certains se sont épuisés dans des approches... sans fin. Il aurait peut-être fallu préciser qu'il s'agissait simplement d'avoir une idée du problème (il était assez difficile, avec deux coefficients, de donner une mesure de la qualité de l'approximation cherchée) ;
- A propos des rédactions des élèves : les élèves disposent désormais de cahiers de TP (un cahier par binôme). Il est difficile de dire si c'est l'effet du précédent TP, ou l'effet des cahiers neufs... Mais dès le début, les courbes ont été tracées, et c'est bien souvent ce qui a permis de voir que la droite des sommets n'était pas tangente. Et les rapports sont mieux écrits (mais toujours trop peu détaillés...) ;
- A propos des travaux des élèves :
  - l'ajustement de l'équation des droites semble très maladroit. De nombreux élèves ne semblent pas savoir le rôle exact des coefficients m et p dans l'équation mx + p. Ainsi Elsa, du groupe 12, demande pourquoi elle ne voit pas la droite d'équation $y = 8x + 20$, alors que sa fenêtre est [-5;5] sur les x et les y (rien que pour cela, ce TP aura été utile!) ;
  - les élèves ont du mal "à sortir de l'épure". Ainsi, si de nombreux zooms sont faits pour adapter la tangente "proche des sommets" (parce que les points de contact se voient "directement"), les vérifications sont beaucoup plus restreintes pour l'autre tangente. Tout se passe comme si ce que l'on ne voit pas n'est pas problématique...
- A propos du rôle des observateurs : on constate une ambiance de travail très différente, entre les groupes qui "piétinent", et les groupes qui engrangent des réussites partielles. Par exemple ici entre les groupes qui avaient traité les questions 1 et 2 (et donc qui avaient pu vérifier que les calculs donnaient bien des tangentes parallèles) et

les groupes qui, tels Sysiphe, cherchaient à approcher au plus près une tangente qui se dérobait sans cesse.

Peut être faudrait-il envisager à un moment donné un déblocage, du type : "c'est pas mal, mais le temps passe, tu devrais aller de l'avant"...

<u>Passons en revue les résultats des différents groupes.</u>

On a noté les résultats sous la forme suivante :
- imagine-t-on une, ou deux tangentes ?
- équation approchant la première tangente (près des sommets) ;
- équation approchant la deuxième tangente ;
- relation entre a et b (question 2) ;
- vérification graphique ;
- calcul de a et b (question 3).

	1 ou 2 tg ?	Equation 1	Equation 2	Relat. a,b	Vérif.graph	Calc a,b
Groupe 1	2	0,5x-0,1	7x-13	Oui	Oui	Début
Groupe 2	1 ou 2	?	?	Oui	Oui	Oui
Groupe 3	2	0,5x		Oui	Oui	Oui
Groupe 4	2	$\frac{21,5x}{40}$-0,09	7,2x-13			
Groupe 5	2	0,55x-0,1	7x-12,95	Oui		
Groupe 5bis	2	0,545x-0,109				
Groupe 6	1			Début		
Groupe 7	2	0,5x				
Groupe 8	2	0,5x	$\frac{2,1x}{0,35}$-10,5	Début		
Groupe 9	2	0,5x	5x-9	Début		
Groupe 10	2	0,5x	7x-13	Oui		
Groupe 11	2	0,5x	$6x-12+3\sqrt{2}$	Début		
Groupe 12	2	0,5x	5x-10	Début		
Groupe 13	2			Début		
Groupe 14	2	0,5x	6x-9	Début		
Groupe 15	2	0,5x	7x-15	Début		

On voit clairement dans ce tableau les écarts entre les groupes (groupe 4) qui ont passé l'heure à adapter au plus près les tangentes à l'aide de leur calculatrice, et les groupes (groupe 2) qui ont négligé les tâtonnements expérimentaux pour aller directement au calcul...

4.TP et typologie

Pendant ces premiers TP, on assiste à une stabilité assez générale dans le comportement des élèves. Tous se passe comme si le travail en équipe favorisait l'installation de routines. Dans un premier temps, cela paraît assez naturel : la liberté de recherche entraîne un déploiement d'attitudes propres à chaque élève. Ce n'est que dans un deuxième temps, quand la recherche aura pris son rythme de croisière, qu'on poura espérer un infléchissement des comportements, en fonction de ce qui sera analysé comme réussite ou échec par les élèves eux-mêmes, et, marginalement en fonction des conseils du professeur...

Guilhem, type théorique.

Guilhem commence par un dessin "à la main", et conjecture l'existence de deux tangentes. Première impression : une tangente commune passe par les sommets des deux paraboles. Rectification immédiate : "impossible, aux sommets les tangentes sont horizontales". Mais la première impression permet d'avoir une première équation approchante, y = 0, 5x, que Guilhem adapte "en faisant descendre un peu la droite". Ce sera 0,5x - 0,1. Vérification rapide sur la calculatrice. Il n'y a pas de tentative d'approcher davantage la "vraie" tangente commune.

Pour la deuxième tangente, le dessin à la main indique que l'intersection est juste au-dessus de "l'ordonnée à l'origine" de la deuxième parabole. Guilhem choisit - 13. Il faut un deuxième point : "la deuxième tangente a une pente de 7, car on pense qu'elle passe par - 13 à l'origine, et que les deux tangentes passent par le même point (2, 1)".

Question de l'observateur : "pourquoi doivent-elles passer par ce point ?" Réponse : "c'est le centre de symétrie de la figure". Cette qualité d'observation a deux origines :

- Guilhem parcourt à chaque fois l'énoncé pour voir s'il ne contient pas des pistes utiles pour la résolution du problème ;
- mais il est aussi très attentif aux caractéristiques des objets manipulés.

On peut constater que la première tangente donnée ne passe pas par ce centre de symétrie : mais il ne s'agit que d'une première approche...

Le TP se poursuit ensuite par les calculs demandés :

- "pour que les deux droites soient parallèles, il suffit que le coefficient directeur de D_a et D_b soient égaux" ;
- "le parallélisme étant donné par le coefficient directeur des droites, elles sont donc confondues si elles ont la même ordonnée à l'origine".

Michaël, type rationnel.

On change ici d'élève prototype : non que Cyril ait changé de profil, mais le cas de Michaël me semble plus intéressant, car plus "évolutif". Au début absent des TP, puis y participant "du bout des doigts", se contentant de remarques générales (ainsi, lors du dernier TP, son travail a été classé comme "théorique" : il a résolu l'essentiel de la question par l'évocation de résultats de référence, sans rentrer dans le vif du sujet). A partir de ce TP, son travail s'organise mieux : s'étant résigné à participer "normalement" à ces séances de travail, il va s'y comporter comme s'il s'agissait d'une tâche scolaire "normale", c'est à dire comme s'il s'agissait de traiter un devoir de mathématiques.

Revenons à ce TP. Michaël est seul ce jour-là. Il commence par une esquisse rapide, qui conclut provisoirement à l'existence de deux tangentes. Aucun essai n'est fait avec la calculatrice : il essaie d'aboutir par le calcul.

"Je cherche d'abord à observer la droite passant par les sommets des deux paraboles (...) $y = \frac{1}{2}x$.

Puis j'essaie d'additionner P_1 et P_2 pour trouver une tangente. J'obtiens y = 8x - 14 pour me faire une idée sur le nombre de tangentes. Les tangentes sont donc surement au nombre de 2. Mais la tangente $y = \frac{1}{2}x$ n'est pas tangente à x^2 en 0 (puisque celle-ci est égale à $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $y = 0$. Donc, il y a peut-être une seule tangente commune".

Cette façon de tout justifier avec des calculs (parfois inutiles -pour l'équation de la tangente au sommet de la parabole-, parfois absurdes -pour la détermination de la tangente commune par addition des équations des paraboles-) est assez caractéristique de ce travail. On peut estimer aussi que Michaël jugeait peu sérieux ce type de conjectures...

D'ailleurs, il ne se perd pas en conjectures, et traite les questions qui suivent tout à fait correctement. Il trouve ainsi les deux valeurs possibles pour a et b, mais ne revient pas à la question de départ : une, ou deux tangentes ?

Le travail est linéaire, les questions sont traitées dans l'ordre, avec d'autant plus d'efficacité que ce sont des questions identifiées comme étant "scolaires".

<u>Rachel, type scolaire.</u>

Après des essais quasiment aléatoires, le groupe essaie de rationaliser ses démarches, ce qui constitue un progrès :

"l'équation de la tangente T_1 de P_1 est : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

On remplace alors x_0 par des valeurs pour trouver :

- pour $x_0 = 0$, $y = x$, ça n'est pas tangent aux deux courbes ;
- pour $x_0 = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$, T_1 est tangente à P_1, mais pas à P_2 ;
- pour $x_0 = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$, T_1 est tangente à P_1, mais ça coupe (à peine) P_2 ;

donc la valeur de x convenable est comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

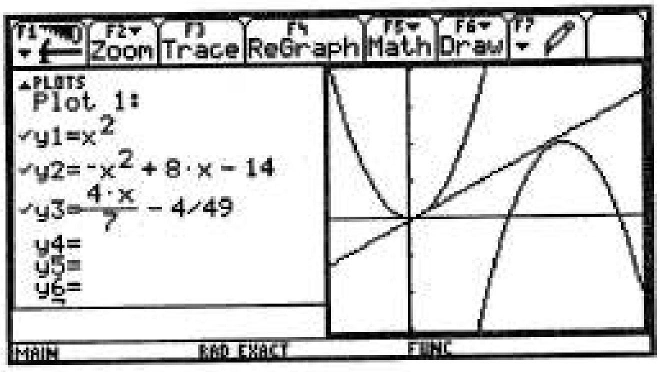
- pour $x_0 = \frac{2}{7}$, $y = \frac{4}{7}x - \frac{4}{49}$, T_1 est tangente aux deux courbes."

L'idée est bonne, mais l'observation du travail des deux élèves du groupe montre qu'elle n'est pas exploitée très rationnellement : alors que les droites trouvées sont nécessairement tangentes à la première parabole, une erreur de calcul, pour $x_0 = 0$, montre que ce n'est pas le cas. Les deux élèves du groupe ne remettent pas en cause leur calcul, mais décident alors de vérifier, pour toutes les autres valeurs (il y en eut 5 ou 6 de choisies), par des zooms, la qualité du contact de la droite <u>avec les deux paraboles</u>.

Il y a donc une perte de temps considérable sur des manipulations répétitives.

L'idée de l'encadrement de l'abscisse cherchée est bonne, mais débouche sur l'illusion que la valeur $\frac{2}{7}$ est la valeur exacte cherchée.

Il y a donc des problèmes théoriques... mais aussi pratiques : comme on le voit ci-contre, la tangente commune proposée n'est pas tout à fait satisfaisante pour P_2. On perçoit dans ce travail à la fois un progrès dans une certaine organisation de la recherche, et la persistance d'un comportement se caractérisant par la répétition de tâches assez peu contrôlées.



<u>Laurent, type bricoleur.</u>

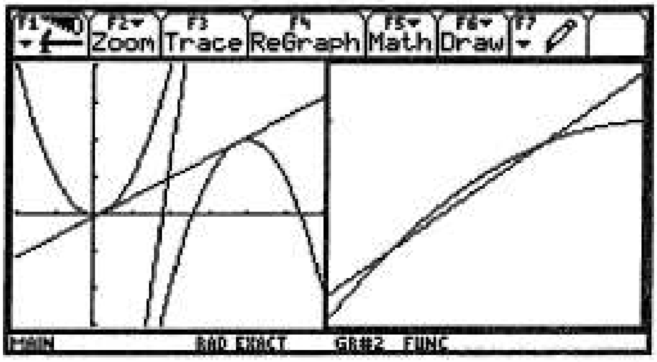
Alexandre et Laurent, "bricoleurs adroits", passent l'heure sans faire ni dessins, ni calculs "à la main".

Ils essaient, avec la calculatrice, d'adapter les coefficients pour avoir les meilleures tangentes possibles. Rédaction assez maigre du rapport de recherche :

"j'ai commencé par inscrire la droite d'équation y = x/2. Au premier regard cela pouvait être une des deux tangentes, mais lorsque j'applique un zoom box, je me rends compte que cette droite n'est pas tangente aux deux courbes. Après de nombreux essais, la droite qui semble la plus tangente aux deux courbes est la droite d'équation

$y = \dfrac{21,5x}{40} - 0,09$. Nous avons appliqué de nombreux zooms qui prouvent notre affirmation. La tangente ne passe pas pas les sommets des deux courbes."

Pour la deuxième tangente : "après plusieurs essais. Montrent que y = 7, 2x - 13 est la deuxième tangente aux deux courbes".



Commentaires :

- sur le plan technique, la qualité de l'approximation est meilleure que celle de Rachel. Cependant, un zoom assez raisonnable montre que la tangente est en fait... sécante.
- sur le plan de la méthode de recherche ensuite. Il n'y a aucun calcul, aucune stratégie explicitée, sinon l'utilisation de zooms successifs.
- sur la méthode de preuve : il y a des glissements significatifs. Laurent parle d'abord de "la droite qui semble être la plus tangente possible aux deux courbes". Puis ce sont les zooms qui "prouvent" l'affirmation. Et la deuxième droite donnée ne "semble" plus, mais "est" la deuxième tangente cherchée.

Fabienne, type expérimentateur.

Quelques essais sur la calculatrice : y = x ne convient pas ; estime que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est une bonne approximation. En fin de TP, le groupe réalise son erreur, revient sur ses pas, et note :"la droite des sommets n'est tangente à aucune des deux paraboles "puisque les tangentes au sommet sont horizontales", "mais nous avons précisé que c'est une approximation". Une approche de l'équation de la deuxième tangente est réalisée par combinaison de l'utilisation de la calculatrice, d'un dessin sur papier, et de petits calculs

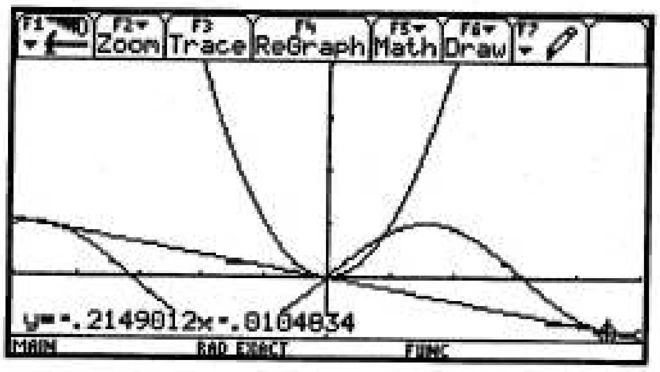
"D passe à peu près par le point (1,5 ; 0). On essaie de trouver la pente par rapport au graphique : on trouve à peu près 6. Donc D : y = 6x + b." Et, en utilisant le point (1, 5 ; 0), elle trouve b = -9. D est du type y = 6x - 9 (approximativement). Pour le moment, on en déduit qu'il y a deux tangentes communes".

Le groupe passe ensuite aux calculs, envisage les conditions pour que deux tangentes soient parallèles. Le problème n'est pas traité dans le cas général, mais uniquement dans le cas particulier, envisagé par l'anoncé, où a = 1. La vérification est faite tout de suite sur la calculatrice.

C'est un travail caractéristique de ce type "expérimentateur" : allers-retours entre différentes représentations d'un même objet, retour critique sur ses propres réalisations, traitement privilégié de ce qui peut se vérifier plutôt que des questions trop générales.

On verra comment ces attitudes évoluent, ou non, dans le TP suivant, sur un thème proche...

Bilan du TP n°5

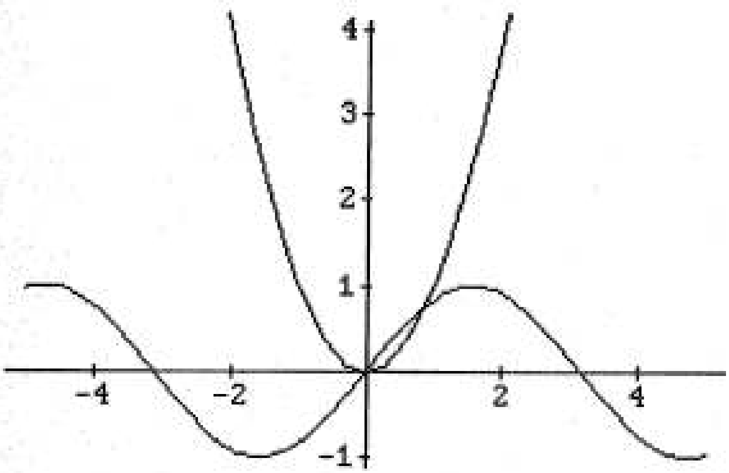


TP traité avec des calculatrices graphiques.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°5

On se propose de chercher les tangentes communes à la parabole P d'équation $y = x^2$, et à la sinusoïde S représentant la fonction $x \rightarrow \sin x$.



1. Combien de tangentes communes imaginez-vous ? Pourquoi ?

Pour déterminer leurs équations, on reproduit la méthode utilisée lors du dernier TP :

2. Déterminer l'équation d'une tangente D_a en un point de M de P d'abscisse a et l'équation d'une tangente D_b en un point N de S d'abscisse b.
A quelle condition portant sur a et b ces deux tangentes sont-elles parallèles ?
Vérifier vos résultats en prenant $b = - 0,25$ puis en calculant a pour que D_a et D_b soient parallèles, et en observant les deux courbes et les droites ainsi obtenues sur votre écran. Reproduisez sommairement cette configuration sur votre feuille.

3. A toute tangente D_a à P correspond-il une, ou des, tangente(s) D_b parallèle(s) ?
Réciproquement, à toute tangente D_b à S correspond-il une, ou des, tangente(s) D_a parallèle(s) ? Justifier précisément vos réponses, et illustrez les par un dessin.

4. Supposons la condition de parallélisme de D_a et D_b réalisée. A quelle condition supplémentaire ces droites sont-elles confondues ? Montrer alors que b doit être solution de l'équation :

$$\cos^2 b - 4b \cos b + 4 \sin b = 0$$

5. Déterminer alors une valeur approchée à 10^{-5} près de la plus grande solution négative de l'équation qui précède. Déterminez alors les équations de la tangente commune correspondante aux deux courbes, vérifier que cela convient bien en observant le tracé des courbes et de cette droite.

2. Le cadre du travail

Ce TP se situe dans la continuité du précédent. Cependant, il y a de nouveaux éléments, théoriques, et pratiques :
- pas de résolution "exacte" possible ;
- pas de symétrie entre les deux courbes : à toute tangente à la sinusoïde correspond une et une seule tangente à la parabole, alors qu'à toute tangente à la parabole correspond soit aucune, soit une infinité de tangentes "soeurs" ;
- il existe cependant des symétries... mais qui ne sont pas d'une aide particulière (symétrie de la parabole par rapport à l'axe des ordonnées, symétrie de la sinusoïde par rapport à l'origine).

Le thème.

On retrouve à la fois bien sûr la question des dérivées et des tangentes, mais aussi celle d'une confrontation de fonctions à limite infinie, et de fonctions bornées (les dérivées respectives des fonctions carrée et sinus).

La question problématique.

Y a-t-il un nombre fini, ou infini, de tangentes communes ? Les points de contact s'accumulent pour la fonction sinus à l'infini, et pour la parabole au voisinage de 0 : a-t-on alors "assez de place" pour une infinité de solutions ?

Les objectifs pédagogiques.

- plus encore que lors du dernier TP, la réalisation de celui-ci impose des "visions larges", des tracés sur papier, des sorties de l'épure...
- sur le plan théorique, il s'agira de transposer les résultats des précédents TP (résolution d'équation, fonction bornée et fonction non bornée, tangentes communes), dans une situation nouvelle, et plus riche.

3. Bilan global

Pour situer le travail des élèves, il faut préciser qu'ils viennent de voir en cours l'inégalité des accroissements finis. Ils ont vu des stratégies d'encadrement des fonctions à partir du contrôle de leur dérivée.

En particulier il a été établi en cours que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$. Rien de tout cela ne sera réinvesti dans le TP (en particulier le fait que la fonction sinus est "à dérivée bornée").

<u>Remarques générales.</u>

Sur le plan des rapports de recherche, les cahiers sont remplis avec plus de soin. On y trouve plus d'éléments, mais plus aseptisés (sauf pour certains groupes, en particulier les expérimentateurs) : les phases de recherche, de discussion, ont tendance à disparaître à nouveau. Ce qui impose de repréciser le contrat.

Sur le plan des résultats des élèves :

- la démarche calculatoire du précédent TP est réinvestie : condition de parallélisme, condition d'égalité des tangentes ;
- par contre, ce qui relevait d'observations graphiques plus fines a été beaucoup moins mémorisé : on retrouve encore souvent les tangentes communes aux sommets des courbes ;
- une fois de plus, ce sont les tracés sur papier qui favorisent les visions larges. Ceux qui en restent à la considération de l'image de leur écran ont beaucoup plus de mal à imaginer ce qui se passe "ailleurs".

Dans le récapitulatif suivant, on a noté les réponses aux questions :
- combien de tangentes communes ?
- établissement de la condition de parallélisme des tangentes ;
- exécution du schéma demandé ;
- à toute tangente à la parabole correspond-il des tangentes à la sinusoïde ?
- et réciproquement ?
- dessin illustratif ;
- condition d'égalité des tangentes ;
- détermination de la valeur de b ;
- équation de la tangente commune demandée ;
- dessin final.

	nb tan	parral	schém	tansin	tanpar	dessin	égalit	b=?	éqtan	dessin
Gr 1	infini	oui	oui	non	non	oui				
Gr 2	infini	oui	non	non	oui	non	oui			
Gr 3	infini	oui	oui							
Gr 4	infini	oui	oui							
Gr 5	infini	oui	oui	non	oui					
G5bis	?	oui	oui				oui			
Gr 6	infini	oui	oui							
Gr 7	2	oui	oui	oui						
Gr 8	infini	oui	oui	oui	oui	oui				
Gr 9	?	oui	oui	oui	oui	oui	oui			
Gr 10	oui	oui	oui	oui						
Gr 11	infini	oui	oui	non			oui			
Gr 12	infini	oui	oui	non	oui	oui	oui			
Gr 13	oui	oui	oui							
Gr 14	plusie	oui	oui	oui		oui				
Gr 15	infini	oui	oui	oui	oui		oui			

4. TP et typologie.

Guilhem, type théorique.

Il observe qu'il y a une infinité de tangentes communes, avec une ambiguïté : "nous pouvons imaginer qu'à chaque sommet de la fonction sinus, sauf pour $x = \frac{\pi}{2}$, il y a une tangente commune avec la parabole". Interrogé, Guilhem répond : "en fait, c'est au voisinage de chaque sommet ; mais ce sont les sommets qui me permettent de me repérer". La réflexion est conduite en considérant un dessin reproduit sur feuille.

La question 2 est traitée convenablement.

C'est la question 3 qui suscite le plus de réflexion : "non, quel que soit le coefficient directeur de D_a, on n'aura pas toujours une tangente D_b parallèle et réciproquement". Une certaine symétrie est donc établie dans la réponse. Puis Guilhem fait sur son dessin des tangentes à la parabole au voisinage de zéro avec des pentes de plus en plus fortes Et c'est en considérant le dessin que la remarque arrive en fin d'heure : "si la tangente à la parabole à une pente trop verticale, elle n'aura pas de tangente parallèle sur la sinusoïde". Je pose la question : "à partir de quand est-ce trop vertical" ? Réponse, en montrant le dessin : "la limite est la pente de la sinusoïde aux points de rencontre avec l'axe des abscisses". Puis le calcul est fait en écrivant l'équation de la tangente en ces points. "La limite est cos π" .

On observe une évolution interne au groupe : les échanges sont moins nombreux parce que les attitudes diffèrent de plus en plus. Guilhem alterne phases de réflexion assez profonde, petits dessins, calculs. Julien multiplie les observations sur sa calculatrice. Très rapidement les itinéraires de travail se séparent.

Michaël, type rationnel.

Aucun dessin réalisé (à part quelques vagues tracés sur la feuille d'énoncé). Constatation au début : il y a une infinité de tangentes communes (sans justification). Les calculs sont faits jusqu'à la question 4 (équation en cosb). Les vérifications graphiques sont faites sur la machine, mais pas reportées sur papier. Un moment de blocage, qui est commun à beaucoup de groupes : arrivé à 2a = cosb, réaction : "on ne peut rien en faire"...parce qu'il n'y a pas de résolution exacte possible.

Discussion : y a-t-il toujours des tangentes à la sinusoïde parallèles aux tangentes à la parabole ? Hésitation... La réflexion se fait en considérant l'écran de la machine : il y a l'illusion que les tangentes tracées précédemment sont les tangentes "limites". D'où la réponse : "pour toutes les tangentes D_a ayant un coefficient directeur < 0.97, il y a des tangentes D_b parallèles".

Confirmation du comportement de Michaël : bonne aptitude à suivre un schéma de résolution "classique", peu d'intérêt pour les questions "sortant des sentiers battus".

Une remarque sur le fonctionnement du groupe : Michaël a été placé avec Candice, de type plutôt scolaire, qui a eu quelques problèmes d'absentéisme. Il agit avec elle comme "tuteur", explicitant au fur et à mesure la démarche de résolution. Il s'attache en fait davantage à dérouler les calculs successifs qu'à éclairer les points problématiques. Mais Candice, en lui posant des questions sur ces points là, le contraint à s'y intéresser un peu plus que prévu. Bref, une bonne complémentarité de travail...

Lors des TP où Candice est absente, Michaël sera avec Aurélie, avec qui les mêmes rapports de travail se noueront.

Rachel, type scolaire.

Rachel et Caroline ont à peu près les mêmes comportements de travail. Des différences existent sur le plan scolaire (Caroline est un peu plus à l'aise), et sur le plan de la motivation (Rachel envisage une carrière artistique : les mathématiques sont cette année un passage obligé). On verra que ces différences auront des conséquences sur l'évolution en cours d'année...

La première question du TP est traitée rapidement, dessin à l'appui. Ensuite, et enfin, la question 2 est traitée assez laborieusement, par transposition de ce qui a été fait dans le TP précédent. La vérification est faite. Et c'est la fin de l'heure.

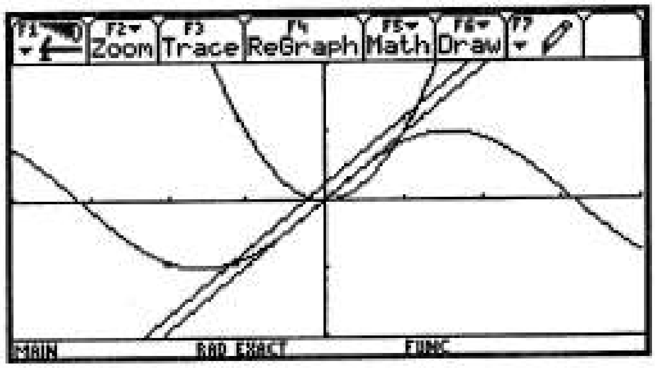
Le travail est donc assez lent.

Laurent, type bricoleur.

Laurent et Alexandre ont les mêmes comportements de travail (Alexandre un peu plus curieux, Laurent un peu plus "paresseux").

Ils semblent beaucoup moins intéressés par ce TP : la partie "manipulation de la calculatrice" est plus réduite, la partie calcul plus complexe.

Ils imaginent assez vite une infinité de tangentes communes, et traitent la question 2. Puis la vérification graphique est faite. Mais ils se trompent dans la rentrée d'un coefficient : ils reproduisent finalement le dessin faux apparu sur leur écran. Deux droites qui sont bien parallèles, mais dont l'une n'est tangente ni à la parabole, ni à la sinusoïde...



Il y a à cette incohérence plusieurs éléments d'explication sans doute:

- un manque d'intérêt pour l'exercice ;
- une absence d'analyse fine des résultats obtenus (on l'a vu pour le précédent TP : ce qui est presque juste est juste) ;
- une absence d'inter-action entre dessins et calculs...

<u>Fabienne, type expérimentateur.</u>

Discussions toujours très animées à l'intérieur du groupe.

Discussions d'abord sur la nature des objets mathématiques en cause : une tangente à une courbe peut-elle la recouper plus loin ? La conception tangente = un point commun (issue du cercle), constitue ici un obstacle sérieux. Devant la paralysie du groupe, je pose la question suivante, en dessinant une cubique : "y a-t-il tangente au sommet ? Si oui, elle recoupe la courbe, sinon, que dire de la dérivabilité de cette fonction ?". La discussion est relancée sur le caractère particulier, ou non, d'une tangente de pente nulle. Finalement l'accord se fait dans le groupe sur le fait qu'une tangente peut recouper la courbe, "mais pas trop près".

L'enjeu de la première question est éclipsé par l'importance de la discussion sur la définition d'une tangente. Le groupe s'entend sur la réponse : "il y a plusieurs tangentes". A la question "combien ?" , la réponse est "plusieurs". L'enjeu principal étant "y a-t-il ou non des tangentes ?", le fait de savoir s'il y en a "plusieurs", "beaucoup", "une infinité"..., passe au second plan.

La deuxième question est faite sans problèmes.

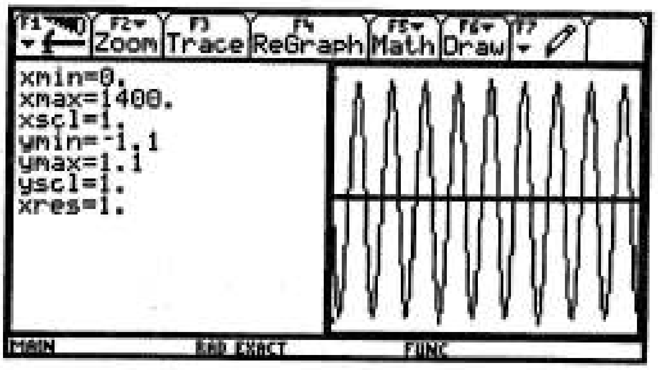
Discussion sur les questions d'existence ensuite.

Pour la troisième question, le groupe pense qu'il y a une infinité de tangentes à la sinusoïde parallèles à une tangente à la parabole "parce que la fonction sinus est périodique".. Le groupe passe alors un grand moment à valider cette affirmation, en essayant de déterminer les équations de plusieurs tangentes à la sinusoïde parallèles à la tangente D_a à la parabole, déterminée dans la question 2. Le groupe y arrive, après beaucoup de déboires de calcul. Dans cette recherche d'une validation par la mise en évidence "d'exemples convaincants" la généralité de la question 3 disparait.

Le caractère de ce groupe est bien confirmé : bonne interaction, bonne expression des blocages, aptitude à se fixer des micro-objectifs qui font perdre de vue les objectifs du problème.

Il est significatif que l'on parle ici régulièrement du "groupe", plus que de Fabienne ou de Christelle qui le composent. La régularité, et la vivacité, des échanges internes fait qu'il est difficile en effet d'attribuer à l'une ou à l'autre les résultats avancés. Cependant, en cours d'année, un certain déséquilibre va se créer : Fabienne, qui dispose de plus de "références" va progresser plus rapidement que Christelle. Une situation de "complémentarité négociée" (un TP, l'une conduit la recherche pendant que l'autre vérifie avec la machine, l'autre TP on échange les rôles) va déboucher sur une "complémentarité déséquilibrée" (Fabienne, qui conduira de plus en plus la recherche).

Bilan du TP n°6



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°6

Observer la courbe de la fonction f : x → sin x sur les intervalles successifs suivants : [0 ; n], en faisant varier n entre 590 et 610.

1. Que pensez-vous des 21 graphiques obtenus ?
(on pourra aussi comparer, pour des fenêtres égales, les graphiques donnés par deux modèles différents de calculatrice)

2. Pouvez-vous tracer une esquisse de la représentation graphique de f sur l'intervalle [0 ; 600] ?

3. Pouvez-vous donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 sur l'intervalle [0; 600] ?

4. Pouvez-vous donner un encadrement, à 10^{-5} près, de la plus grande racine de cette équation sur cet intervalle ?

2. Le cadre de travail

Le thème.

Mise en évidence de l'écart irréductible entre les objets mathématiques, et leur représentation par la calculatrice.

La question problèmatique.

Comment se fait-il qu'une fonction aussi simple que la fonction sinus soit traitée de façon aussi étrange par la calculatrice ? Sur certaines plages, pourtant de grande amplitude, il apparaît des phénomènes de "relaxation" de la sinusoïde assez surprenants...

Les objectifs pédagogiques.

Il s'agit ici de développer une attitude qui ne soit pas de simple défiance vis à vis des tracés obtenus par la calculatrice, mais de contrôle de ceux-ci : sur l'intervalle considéré, pour la fonction étudiée, n'y a-t-il pas des effets particuliers, attendus ou observés, de la discrétisation du tracé ?

3. Bilan global

Quelques remarques générales.

- Sur les rapports de recherche : les mises au point ont porté leurs fruits. Plus d'éléments apparaissent (parfois écrits au crayon...), on arrive ainsi davantage à suivre l'histoire, ou les histoires, du groupe pendant l'heure. La principale réticence vient des groupes "scolaires". Le contrat, très fort, reste pour eux que l'on rend au professeur un produit fini.

- Sur l'investissement de chacun dans la recherche : l'évolution est positive. Les moments de découragement sont assez rares. A peu près tous les groupes travaillent toute l'heure. De ce point de vue, il est bon que les TP fonctionnent par paire : un premier TP sur un thème nouveau, un deuxième TP permettant un réinvestissement du précédent. Il est significatif que dans le deuxième TP les élèves les plus faibles, bénéficiant de points d'appui, s'investissent bien davantage que lors du premier TP.

- Sur les effets des "images paradoxales" : les contradictions apparaissent très vite pour les élèves, non pas, comme on aurait pu l'imaginer, entre deux images de la fonction obtenues, sur la même calculatrice, pour des fenêtres proches (en effet, les élèves, dans un premier mouvement, ne sont pas surpris qu'une légère variation de fenêtre provoque une variation considérable de la représentation graphique ...), mais entre deux images de la même fonction, pour une même fenêtre, sur deux calculatrices différentes : il suffit en effet que deux calculatrices n'aient pas le même nombre de pixels "horizontaux" sur un écran pour que les images obtenues puissent différer considérablement. C'est cet élément qui choque la plupart des élèves (ce qui constitue un effet positif inattendu de l'hétérogénéité des matériels...).

Cette surprise des élèves est en fait assez naturelle : pour eux, la calculatrice est un outil "neutre", qui représente fidèlement un objet mathématique. Il est donc tout à fait incompréhensible pour eux que le même objet, dans le même cadre, soit représenté différemment par deux machines.

C'est là que réside la difficulté du TP : les élèves n'ont jamais été confrontés à des images paradoxales de leur machine. Mieux, ils n'ont jamais réfléchi aux images qui leur sont livrées sur écran (pour la calculatrice comme pour la télé...).

La seule interprétation est ainsi, en général : la machine déraille.

On a noté dans le tableau ci-dessous les réponses aux questions suivantes :

- les contradictions apparentes entre les différents graphiques ont-elles été relevées ?
- une tentative d'explication de ces paradoxes est-elle donnée ?
- le graphique donné pour la fonction sinus sur [0, 600] est-il correct ?
- nombre de solutions pour l'équation sinx = 0 sur cet intervalle ?
- contradiction éventuelle relevée entre le graphique faux donné et le nombre de solutions déterminé ?

	Contradic.	Explication	Graphique	Nb solutions	Contradic.
Groupe 1	Oui	Oui	Faux	192	Oui
Groupe 2	Oui	Oui	Juste	191	
Groupe 3	Oui	Oui	Faux	191	Non
Groupe 4	Oui	Non	Faux	191	Non
Groupe 5	Oui	Oui	Faux		
Groupe 5bis	Oui	Non	Faux	191	Oui
Groupe 6	Oui	Non	Faux	191	Non
Groupe 7	Oui	Non	Juste	180	
Groupe 8	Oui	Non	Faux	191	Oui
Groupe 9	Oui	Non	Juste	191	
Groupe 10	Oui	Non	Juste		
Groupe 11	Oui	Non	Faux	191	Non
Groupe 12	Oui	Non	Faux	191	Oui
Groupe 13	Oui	Non	Faux	191	Non
Groupe 14	Oui	Oui	Faux	191	Oui
Groupe 15	Oui	Non	Faux	190	Oui

4.TP et typologie

La difficulté, et la nouveauté, de l'exercice renforcent du même coup les caractéristiques des groupes :

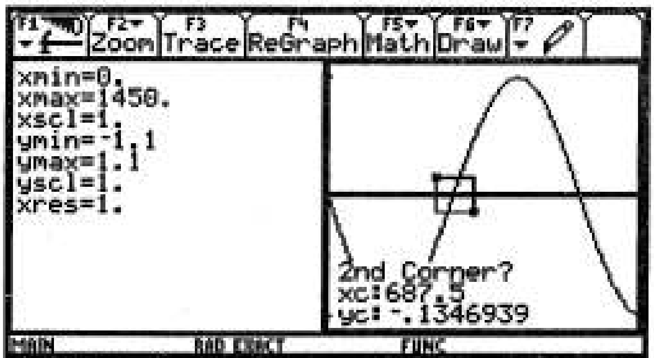
- les élèves "scolaires" font assez peu de choses : le contexte est trop loin du cours ;
- les élèves "bricoleurs" passent l'essentiel du temps à organiser des variations possibles des images écran, et restent assez loin d'un contexte théorique ;
- les élèves "expérimentateurs" sont relativement paralysés, car ils ne peuvent pas s'appuyer sur des résultats partiels pour aller de l'avant ;
- les élèves "rationnels" restent perplexes, ne trouvant pas de points d'accroche théorique ;
- seuls les élèves "théoriques" essaient de trouver une explication "logique" à ces paradoxes apparents.

<u>Guilhem, type critique.</u>

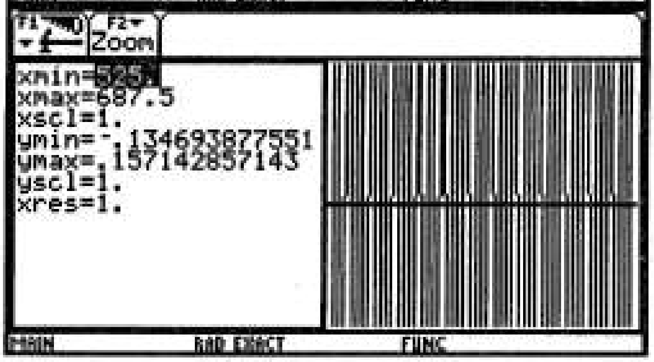
Observation immédiate : les 21 graphiques sont faux, parce que la fonction sinus devrait s'annuler tous les π.

Première interprétation : les intervalles sont trop grands, et les limitations de la machine l'empêchent de donner un graphique convenable.

Il analyse le gaphique en utilisant Trace et Zoom :
il cadre sur une partie de la sinusoïde "raisonnable"...



...et constate alors que les oscillations "normales" réapparaissent dès que l'on regarde de près.



Une remarque : "si on trace la courbe sur [0, 3π] la machine donne quasiment la même chose que sur [0 , 600]. La machine ne remplacerait-elle pas 200 par π ?" Puis réutilisation de Trace : <u>entre deux points consécutifs, il y a quasiment 2π</u>, et c'est ce qui explique que les images des points de calcul successifs soient très proches.. Question de l'observateur : que se passerait-il s'il y avait un écart de 2π exactement? Réponse : on aurait une droite.

L'essentiel a ainsi été vu, par un aller-retour entre explorations graphiques et utilisation des résultats de référence relatifs à la fonction sinus.

Michaël, type rationnel.

A nouveau réduit à une unité, du fait de l'absence de Candice. A noter : Michaël s'est installé en face de Guilhem, et la communication entre les deux groupes est bonne.

Il y a une sorte de synergie, de contagion qui s'opère. Le type de travail de Michaël est ainsi modifié, indiquant l'influence du voisinage sur les attitudes de recherche, et plus généralement sur le travail réalisé.

Les remarques faites au début sont du même type que le groupe 1. Cependant, il y a moins de manipulation de la machine, et plus de dessins sur le papier effectués. L'idée émise est que "la calculatrice ne prend pas assez de x pour tracer la courbe". Un dessin est fait, montrant qu'entre deux points de calcul positifs successifs de la fonction, la fonction pourrait fort bien prendre une valeur négative, ce qui ne se verrait pas sur l'écran. C'est bien le caractère "discret" du graphique qui est ainsi mis en évidence. Puis un nouveau dessin est fait : il représente une sinusoïde, et des points épars sur cette courbe, représentant les points de calcul de la fonction. Michaël explique que, suivant les points de calcul, on peut en fait trouver à peu près n'importe quelle représentation graphique pour la fonction sinus à l'écran. Je lui suggère de reporter son dessin sur le cahier de recherche : " ça vaut pas le coup, c'est un brouillon...".

A la question de l'observateur : mais qu'est-ce qui explique que, pour certaines fenêtres, on ait une "fausse sinusoïde" ? La réponse est : "la machine fait du calcul approché". On le voit, Michaël ne va pas jusqu'au bout de l'explication (à la différence de Guilhem). La commande Trace n'est pas utilisée. La compréhension du fonctionnement "intime" de la calculatrice n'est pas perçue comme un enjeu mathématique.

Par contre, Michaël justifie soigneusement le nombre de solutions ("c'est la partie entière de $\frac{600}{\pi}$ à laquelle il faut ajouter 1, à cause de la solution en zéro", oralement).

D'autres élèves, fonctionnant sur un mode "rationnel", mais ne bénéficiant pas du même voisinage que Michaël, ne vont pas aussi loin. Cyril, dont on a évoqué le travail pour les premiers TP, se contente d'observer les représentations différentes suivant les fenêtres et le type de calculatrices : "Sur la 7000G, la fonction périodique sinus n'apparaît que pour $n \geq 592$. De même pour la TI-82. Par contre, bizarrement la représentation graphique sur la TI-81 est différente que sur les autres calculettes, et cela sur une même fenêtre." Puis Cyril reproduit les différents écrans, en forme de "musée des horreurs", accompagnés d'exclamations diverses ("bizarre ! Très bizarre ! Périodicité anormale !"). Mais aucune tentative d'explication.

Pour la représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle [0, 600] (deuxième question), Cyril reproduit une esquisse convenable. Pour la résolution de l'équation, il donne un dessin qui indique que la fonction doit s'annuler tous les $k\pi$.

Rachel, type scolaire.

Ce groupe se contente d'observer les graphiques différents, suivant les fenêtres, et les calculatrices. Le rapport contient une description des différences, sans l'expression de la surprise que manifestaient les élèves précédents : "jusqu'à x = 600, la courbe s'allonge quand x grandit. De 600 à 610, les oscillations semblent se resserrer quand x augmente". On ne sait pas si cela est analysé comme "anormal".

Pour l'esquisse de la représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle [0, 600], Rachel reproduit les écrans de la TI-81 et de la TI-85, contradictoires, et tous les deux faux...

Enfin, concernant le nombre de solutions à l'équation sinx = 0 sur cet intervalle, Rachel annonce le nombre de 191, et donne comme justification "$\frac{601}{\pi}$ égale à peu près 191,3". Il semble bien que ce dernier résultat ait été obtenu par contagion avec les autres groupes, et que Rachel se soit arrangé pour trouver 191. Comme la division de 600 par π ne donnait pas 191, Rachel remplace 600 par 601...Ce qui est fait étant sans référence avec la fonction sinus, en fait <u>sans sens mathématique</u>, cette substitution n'a pas d'importance...

Alors que les TP précédents, plus guidés, avaient vu une certaine amélioration du travail, on voit ici un retour au type de travail de début d'année.

<u>Laurent, type bricoleur.</u>

Il reproduit avec son collègue une partie des graphiques observés. A la différence du groupe précédent : "nous trouvons que ces résultats sont étranges car sur un intervalle [0, 600] nous devrions trouver une infinité de courbes".

Pourtant, sur l'intervalle [0, 600], une courbe est tracée avec trois arches de sinusoïdes, issue sans doute d'une copie d'écran.

Nombre de zéros :"nous pouvons penser qu'il y a 4 solutions sur l'intervalle [0, 600], mais en fait il y en a $\frac{600}{\pi}$ égal à peu près à 191. Nous trouvons donc qu'il y a 191 solutions". A l'appui de cette affirmation, un graphique soigné est fait, très serré, avec les 191 solutions...

A la différence du groupe précédent, on voit là un recul relatif sur les images données par l'écran. Relatif, parce que, quand il s'agit de donner l'esquisse de la courbe de la fonction sur l'intervalle [0, 600], c'est bien l'une des "étranges" courbes qui est recopiée... Mais c'est l'image qui reste bien l'argument décisif : pour justifier les 191 solutions, c'est un nouveau graphique qui est fait (contradictoire avec le précédent - la contradiction n'est pas signalée).

Sur le plan théorique, on constate de nombreuses ambiguïtés : confusion entre "un grand nombre de solutions" et "une infinité de solutions", arrondi de $\frac{600}{\pi}$ à l'entier le plus proche sans justification...

Mais on perçoit un investissement dans la recherche beaucoup plus grand que pour le précédent TP (à l'inverse du groupe "scolaire").

<u>Fabienne, type bricoleur.</u>

Le groupe, pourtant très actif d'habitude, est paralysé par ce problème nouveau : "on se demande pourquoi, sur différents intervalles, la courbe n'a pas la même allure". Observation de nombreuses fenêtres, et perplexité. Puis tentative d'explication : "on pense que la calculatrice est incapable de calculer le sinus de x pour certains intervalles. La calculatrice fait ce qui l'arrange".

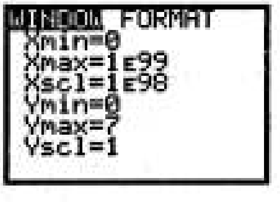
Sur [0, 600] une sinusoïde à trois arches est reproduite.

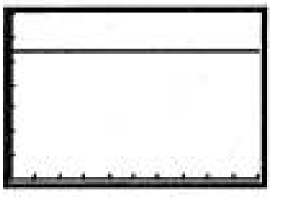
Résolution correcte de l'équation : "la fonction s'annule pour $x = k\pi$". D'où à peu près 190 solutions. Il y a alors un retour critique sur le graphique tracé :"par rapport au graphique obtenu, il y a un problème". En opérant des zooms sur des portions de "sinusoïdes étranges", Fabienne retrouve le nombre de solitions localement attendues. C'est la fin du TP, donc le groupe n'a pas le temps de développer davantage.

On voit là des différences importantes avec le groupe précédent : perplexité beaucoup plus importante devant des réponses non attendues, volonté d'explication, c'est à dire de compréhension des phénomènes observés, comparaison des différents résultats obtenus, remise en cause d'anciens résultats par les nouveaux résultats obtenus.

On verra comment tout ceci évolue dans le TP suivant, consacré aussi à un travail sur les représentations graphiques que donne une calculatrice pour une fonction donnée.

Bilan du TP n°7





TP traité avec des calculatrices graphiques.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°7

On se propose, comme lors du précédent TP, d'analyser les représentations graphiques que donne une calculatrice pour une fonction donnée, dans des fenêtres données.

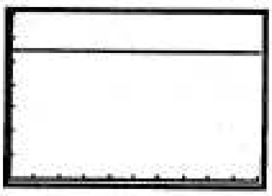
Il s'agit de la fonction f : $x \to f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Observer la représentation graphique que donne votre calculatrice pour cette fonction, sur une fenêtre donnée. Reproduisez le dessin, en justifiant le choix de la fenêtre.

2. Etudier les variations de f (domaine de définition, sens de variation, limites). Les résultats vous paraissent-ils cohérents avec les observations de la première question ?

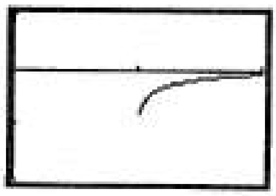
3. Une calculatrice TI 82 donne pour cette fonction le graphique suivant (pour x variant entre 0 et 10^{99}) . Ce graphique est-il celui que vous attendiez ? Comment l'expliquer ?

```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=1E99
Xscl=1E98
Ymin=0
Ymax=7
Yscl=1
```

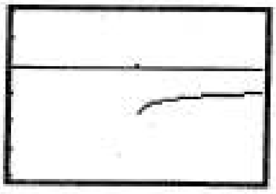


4. La même calculatrice donne les graphiques suivants pour f, au voisinage de x = 1. Ces graphiques sont-ils ceux que vous attendiez ? Comment les expliquer ?

```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=5
Yscl=5
```



```
WINDOW FORMAT
Xmin=.99
Xmax=1.01
Xscl=1
Ymin=-20
Ymax=10
Yscl=5
```



2.Le cadre de travail.

Le thème.

Encore le contrôle des graphiques de la calculatrice, mais dans un contexte davantage lié au cours actuel : la fonction logarithme est au centre du cours d'analyse de TS.

La question problématique.

Là où on n'attend pas d'asymptote (sur [0, 1099]), en apparaît une...
Et là où une asymptote est légitimement espérée (au voisinage de 1), on n'en obtient qu'un moignon !

Les objectifs pédagogiques.

Comme pour le précédent TP, il s'agit de prendre du recul sur les images observées, et d'exercer un contrôle actif de celles-ci. Plus précisément, les compétences visées :
- pour un intervalle donné sur les x, savoir adapter "au mieux" le choix des y ;
- comprendre l'importance d'un "petit" déplacement des x dans le choix de la fenêtre, en particulier pour l'apparition, ou la disparition, de pseudo-asymptotes.

3.Le bilan global.

Quelques remarques générales.

Deux obstacles inattendus, dus encore une fois à l'hétérogénéité des matériels :
- un élève a une TI 85, qui calcule des logarithmes complexes. Aussi la machine donne-t-elle une valeur de lnx entre 0 et 1, ce qui met en doute le domaine de définition de la fonction ;
- les élèves qui ont certaines calculatrices Casio disposent d'une option de fenêtrage automatique. Ainsi ils ne voient pas l'utilité de justifier le cadre choisi ; en fait la question devrait être posée autrement pour eux : "pourquoi la machine choisit-elle ce cadre ? Auriez-vous choisi le même ?". Autre difficulté : ces machines refusent certaines fenêtres jugées "excessives" : par exemple $]0, 10^{99}]$. Pour voir ce qui se passe, les élèves doivent emprunter une machine au groupe voisin...

De façon générale, le travail réalisé s'organise davantage autour d'une étude "classique" de fonction (dérivée, limites), que d'un travail sur les formes particulières du graphique. Les questions auraient gagné à être plus exigeantes, pour contraindre les élèves à une recherche plus précise de fenêtre (par exemple, pour la question 4 : "est-il possible de faire apparaître une pseudo-asymptote au voisinage de 1 ?", ou "est-il possible de faire "descendre" la courbe plus bas que 100 ?")...

En fait, les problèmes graphiques sont ici un peu plus subtils que lors du précédent TP. Il n'y a pas là une stimulation susceptible de pousser les élèves à creuser la question. Ils ont l'impression que tout a été dit lors de la correction du TP 6 : "c'est une affaire de pixels"...

4.TP et typologie.

Il est assez intéressant de noter que, au fil du temps, se construisent des rapports de travail particuliers dans chaque groupe. On peut en distinguer trois types :

- des rapports de travail cloisonné : c'est le cas par exemple du groupe de Julien et Guilhem (groupe 1). Guilhem est plutôt théorique, Julien plutôt bricoleur : chacun travaille à se façon, dans son coin. Le seul échange se situe au début du TP : qui écrit le rapport de recherche ? Si c'est Guilhem, il y a décrochage complet des activités des deux élèves : Guilhem réfléchit et écrit de son côté, Julien trafique de l'autre. Si c'est Julien qui écrit, il demande de temps en temps des renseignements à son collègue, qui répond "en style télégraphique" ;

- des rapports de complémentarité dirigée : on l'a déjà évoqué à la fin du dernier TP pour Fabienne et Christelle, au comportement "expérimentateur". C'est vrai aussi pour Michaël, rationnel, et ses partenaires du groupe 2, plutôt scolaires (Aurélie ou Candice);

- des rapports de complémentarité équilibrée, où les différentes fonctions sont interchangeables : c'est le cas du groupe de Laurent et Alexandre, tous deux "bricoleurs", ou du groupe de Rachel et Caroline, plutôt "scolaires" (mais on verra que ce dernier groupe évoluera vers des rapports de complémentarité dirigée).

<u>Petit tour des élèves repérés...</u>

<u>Guilhem, type théorique.</u>

Dès la première question, des éléments théoriques apparaissent (alors qu'ils n'étaient pas explicitement demandés) : domaine, limites, preuve d'une bonne interaction entre théorie et "pratique", et de références tout de suite disponibles. Fenêtre pour x : [0, 20], "pour mettre en évidence la faible pente de la courbe", fenêtre pour y : [-3,5 ; 2], "pour voir que la calculatrice ne trace plus la fonction en dessous de 3". Il y a dès ce moment la constatation que la machine <u>ne donne pas à voir</u> la limite établie par ailleurs.

Puis l'étude théorique est faite rapidement, reprenant les éléments donnés plus haut (seul problème : il est écrit que la dérivée existe sur]0, +∞ [, du fait de sa forme $\frac{1}{x\ln x}$. Après ma question : "la dérivée peut-elle exister si la fonction n'existe pas ?", ce point est rectifié.

Observations correctes pour les question 3 et 4, mais qui ne vont pas au fond des choses :

- pour la question 3 : l'explication est la croissance lente de la fonction (l'option trace est mobilisée) : la calculatrice traduit bien cette croissance, mais "elle n'apparait pas sur l'écran du fait du range" ;
- pour la question 4, explication plus superficielle : la calculatrice ne peut pas faire descendre la courbe vers -∞ "car elle n'a pas la place".

Le contexte de ce TP n'est pas suffisamment problématique pour déclencher une dynamique de recherche...

<u>Michaël, type rationnel</u>

La première question est faite sans référence à des calculs. "La fenêtre choisie est due à plusieurs essais successifs. On peut voir la forte progression des x pour une faible progression des y". A la différence de Guilhem, on observe souvent chez Michaël un tel décrochement entre manipulation de la calculatrice, et calculs : on demande dans la première question "d'observer", Michaël le fait sans référence explicite à des propriétés de la fonction observée...

Deuxième question sans problème. L'étude des variations et des limites est faite avec tous les détails convenus. Michaël aurait rédigé de la même façon pour une interrogation écrite.

Troisième question : "croissance très faible donc la calculatrice donne les mêmes valeurs pour f(x) sur tout l'intervalle". Je passe à ce moment là et pose la question : "tu es sûr que ce sont les mêmes valeurs ?". Réponse : "ah, il faut vérifier ?". Significatif du refus de "mettre les mains dans le cambouis", de comprendre le fonctionnement réel de la calculatrice (comme pour le précédent TP)... Après cette remarque, l'option Trace est mobilisée. Observation des faibles variations : "au début, la fonction augmente de 5, puis entre le premier point de calcul et 10^{99}, la fonction augmente de 0,4". Question : "quel est le premier point de calcul ?" Réponse : "je ne sais pas, mettons 20"...

Pour la quatrième question, Michaël calcule les valeurs que la machine donne pour f(x), avec x proche de 1. Il prend donc $x=1+10^{-a}$, avec a = 10, puis 11... Il constate que, à partir d'un certain moment, la machine ne peut plus calculer : "c'est parce que les valeurs prises par la fonction sont trop petites".

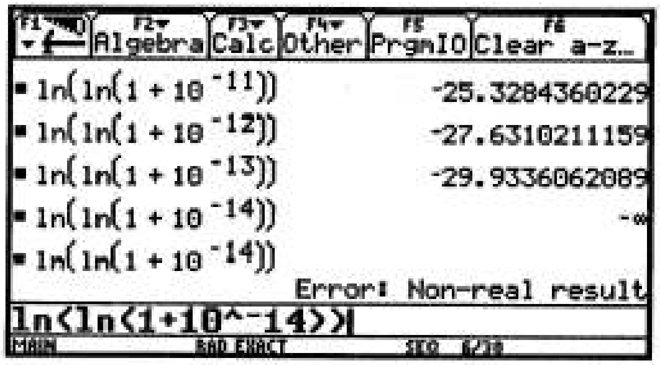
Il est assez frappant de voir que, faute de compréhension (ou faute de volonté de compréhension, ce qui revient localement au même), du fonctionnement de la calculatrice, Michaël passe à côté de problèmes ici essentiels :

- pour l'application graphique :
  - le nombre forcément limité de pixels "verticaux" peut donner l'impression d'une fonction constante, alors que la calculatrice attribue en fait aux différents points de calcul des images numériques différentes (visibles avec Trace) ;
  - le nombre forcément limité de pixels "horizontaux" (une centaine ici) fait que, pour un intervalle de calcul de 10^{99}, le premier point de calcul est à peu près 10^{97}, ce qui est une des explications du tracé observé ;
- pour les calculs eux-mêmes : si la machine ne calcule plus $\ln\ln(1+10^{-a})$ dès que a est supérieur à 13, ce n'est pas parce que ce nombre est trop grand (en valeur absolue), mais pour une question de représentation des nombres. Le nombre qui suit 1, pour une calculatrice "travaillant" avec 13 chiffres, est 1, 000 000 000 001. Donc, pour la calculatrice, $\ln\ln(1+10^{-13})$ est égal à $\ln\ln 1$, c'est-à-dire n'existe pas.

Remarque : ces problèmes ne seront pas résolus avec le passage aux TI-92, comme on le voit ci-dessous :

le problème se posera en fait à chaque fois que l'on fera du calcul approché, même avec des outils plus performants.

On le voit, ci-contre, une TI-92, identifiant $1+10^{-14}$ avec 1, donne $\ln\ln(1+10^{-14})$ = $-\infty$ (en valeur approchée...), ou "résultat non réel", en valeur exacte... Ce n'est pas plus simple à comprendre...



Une telle attitude de refus d'approfondissement de ces problèmes, de la part de ce type d'élèves, ne constitue pas seulement une sorte de dédain des "problèmes techniques". C'est aussi, plus profondément, un refus de faire du "hors piste", de s'engager sur des chemins de recherche non balisés (voir sur ce point l'analyse du "problème long" dans le Volume 1 "côté cours").

<u>Rachel, type scolaire.</u>

Dans la première question, le choix de la fenêtre est [0, 20] pour x. Explication : "la fonction est une fonction logarithme, donc définie pour x > 0".

Dans la deuxième question, complètement déconnectée de la première, la fonction est étudiée comme d'habitude : le domaine devient là]1, +∞[(sans retour critique sur la première question). Dérivée, et limites correctes, et affirmation : "ces résultats sont cohérents avec les observations de la première question" (sic).

Troisième question : "ce graphique n'est pas attendu car on ne voit pas l'accroissement de la courbe. Nous pensons que la calculatrice ne montre pas cet accroissement car la fenêtre des x est beaucoup trop grande : la courbe est écrasée".

Il s'agit là d'un mauvais raisonnement : c'est "l'accroissement trop grand" de la fenêtre des y qui aurait tendance à écraser la courbe d'une fonction croissante... La raison théorique (croissance lente) et la raison pratique (premier point de calcul à 10^{97}) ne sont pas vues.

Quatrième question : "la machine n'a pas assez de pixels pour pouvoir représenter la faible variation d'une valeur à une autre : c'est pourquoi on a l'impression, sur l'écran de la machine, que la fonction s'arrête au point (1, 4)".

On peut remarquer ici de réels efforts de recherche de ce groupe, qui s'orientent dans des directions plus variées qu'au début de l'année. Mais ce type de travail reste encore marqué par des observations assez approximatives : "la fonction s'arrête au point (1, 4)", par une étancheïté des réponses successives, par la transposition inadaptée de résultats antérieurs dans une situation nouvelle : "la machine n'a pas assez de pixels pour représenter la faible variation d'une valeur à une autre". C'était vrai pour la troisième question, pas pour la quatrième...

<u>Laurent, type "bricoleur".</u>

La modification des fenêtres graphiques ne donnant pas des résultats aussi spectaculaires que lors du précédent TP, l'activité de Laurent et d'Alexandre est beaucoup moins enthousiaste.

Première question : "la fenêtre choisie est [0, 10], car la fonction est définie pour $x > 0$".

Deuxième question : "le domaine est $\mathbb{R}_+^* - \{1\} =]1, +\infty[$"

Il y a identification des deux ensembles. Interrogé, Laurent répond que, si on enlève 1 à $\mathbb{R}_+^*$, il "reste" $]1, +\infty[$.

Puis calcul de la dérivée, avec une confusion entre la composition, et la multiplication, des fonctions. D'où $f'(x) = \frac{\ln x}{x} + \ln \frac{1}{x}$. Constatation de l'erreur par un coup d'oeil circulaire auprès des autres groupes. Remplacement, sans recherche de l'origine de l'erreur, par $\frac{1}{x \ln x}$.

Le tableau de variation est dressé, et les limites données.

Retour à l'observation des graphiques sur l'écran dans des fenêtres variées :

- la fonction tend "lentement mais sûrement vers $+\infty$";
- assez longue recherche du point d'intersection de la courbe avec l'axe des x ; oralement : "ce ne serait pas 1 ?" ; utilisation de Trace : "c'est à peu près 2, 7", puis "ce ne serait pas e ?", et vérification.

Question 3 : "en mettant une fenêtre très grande, je savais que ça donnerait une ligne horizontale, parce que la calculatrice n'a pas assez de pixels pour définir tous les points".

On retrouve bien là les caractéristiques essentielles de ce comportement : calculs théoriques très peu assurés, très peu de coordination des résultats théoriques entre eux, entre résultats théoriques et observations (ainsi, ces élèves ne seraient pas choqués que la fonction s'annule pour $x = 1$, alors même qu'ils ont étudié les limites de f), et entre les observations successives (ainsi, alors que Laurent a remarqué que la fonction avait une croissance lente, il ne donne pas cela comme explication pour l'horizontalité du graphique). Par contre, ces élèves peuvent être stimulés par une question issue de leurs propres observations (et hors énoncé) : ici, pour quelle valeur de x la fonction s'annule-t-elle ?

Christelle, type expérimentateur.

Première question : au lieu du graphique demandé, quatre graphiques sont faits. Le premier, "au hasard, pour voir l'allure de la courbe", le deuxième, "on a pris x très grand car la limite de lnlnx en $+\infty$ est $+\infty$", le troisième "pour mieux voir $C_f < 0$", le quatrième au voisinage de 0 pour voir en fait s'il y a une limite ou si, pour un certain x, C_f n'existe pas". Le graphique apparaît bien ici comme un outil expérimental pour voir, et pas du tout comme la synthèse d'un certain nombre de propriétés établies.

Deuxième question : erreur sur le domaine (x > 0) et sur la dérivée : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. D'où un premier tableau de variation, faux. Le croisement avec les graphiques déjà tracés fait apparaître la contradiction : "c'est horrible !" (du coup les pages coupables sont collées entre elles, pour cacher ce qui fâche...).

L'erreur repérée sur la dérivée entraîne une reprise de toute l'étude, qui permet de voir l'erreur sur le domaine. Ceci débouche sur des résultats corrects (domaine, variations, limites).

Troisième question : "on n'attendait pas vraiment ce graphique, mais un peu quand même, car on a vu la limite de f en $+\infty$, et, par l'observation des graphiques, que la courbe croissait lentement, donc un coefficient directeur faible. Les tangentes approchent de l'horizontale, donc leur pente approchent de zéro. Si on se déplace sur la courbe, on voit que f(x) est bien croissante... Elle augmente, mais pas de beaucoup."

Christelle et Fabienne cherchent enfin à expliquer cet accroissement faible.

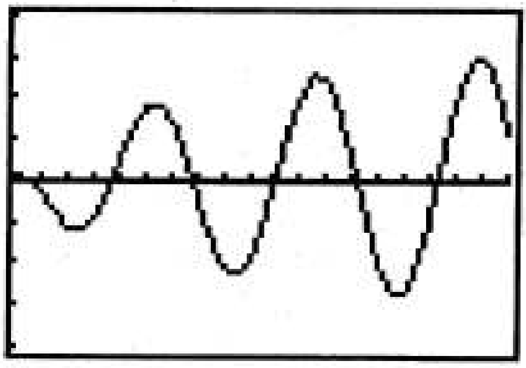
" $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\ln x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$, donc les pentes des tangentes sont faibles, faible accroissement".

On observe ici un certain nombre de confusions (entre la variation des pentes, et la limite nulle de celles-ci, c'est-à-dire entre comportement local et comportement global). Le type de travail réalisé présente cependant les mêmes caractéristiques que d'habitude :

- pas de coordination a priori des informations disponibles (c'est-à-dire que les références ne sont pas directement mobilisées, cf l'émergence lente du domaine de définition) ;
- accumulation d'informations issues de points de vues différents (graphiques, calculs, utilisation de la calculatrice ;
- croisement de ces informations ;
- recherche d'explications des phénomènes apparus.

L'appellation "expérimentateur" n'est pas si mauvaise...

Bilan du TP n°8



TP rédigé par Gaëtan DREZEN dans le cadre de son DEA.

TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

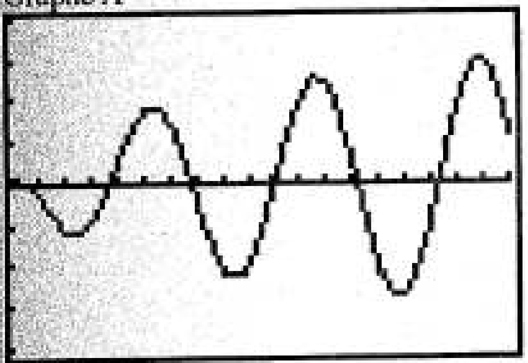
TP n°8

Attention : la première question se traite sans calculatrice !
La calculatrice pourra être utilisée une demi-heure après le début du TP

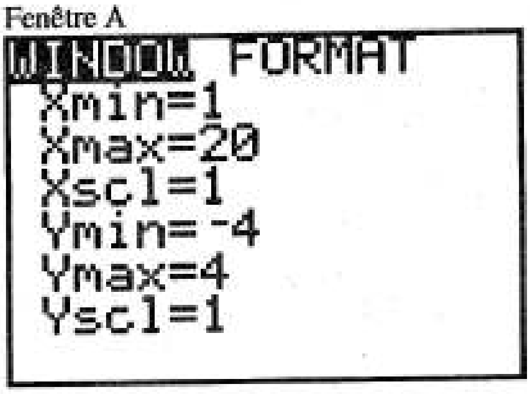
<u>Présentation</u> : *Quand le paysage dépend du belvédère*

On propose trois représentations graphiques, telles qu'elles apparaissent sur l'écran d'une calculatrice, en précisant chaque fois la fenêtre :

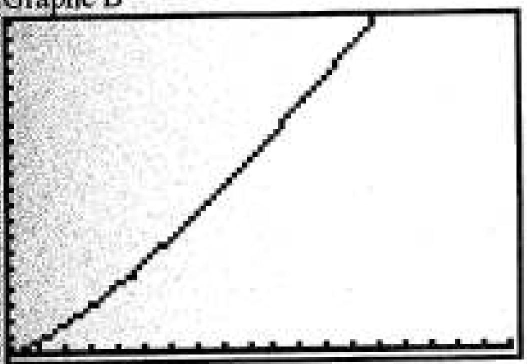
Graphe A



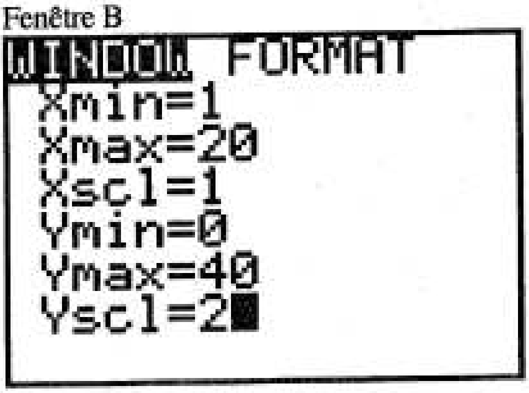
Fenêtre A



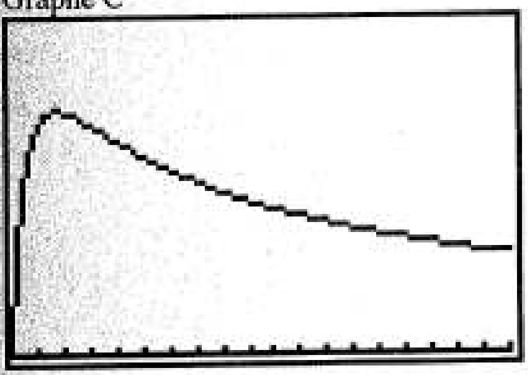
Graphe B



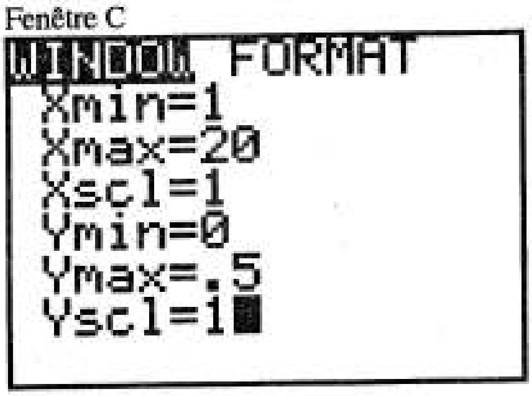
Fenêtre B



Graphe C



Fenêtre C



Première épreuve : *Quand le futur impétrant doit se jeter à l'eau*

On sait que les trois représentations appartiennent à des fonctions qui sont définies par les expressions ci -dessous :

1	$x \ln x$	2	$x^2 \ln x$	3	$\frac{\ln x}{x}$	4	$\frac{\ln x}{x^2}$
5	$\frac{\cos x}{\ln x}$	6	$\frac{\sin x}{\ln x}$	7	$(\ln x)(\cos x)$	8	$\ln(\cos x)$

Il faut associer, SANS UTILISER LES CALCULATRICES, chaque représentation graphique à la fonction qui peut lui correspondre.
Vous direz, pour chacune des 8 fonctions proposées, pourquoi vous pensez possible, ou non, une association avec A, B, ou C.

Pour les fonctions orphelines, vous tracerez des ébauches de représentation graphique. Attention, on ne vous demande pas d'étudier théoriquement les variations de chacune de ces fonctions, mais simplement d'utiliser les caractères des fonctions de référence que vous connaissez bien (ln, cos, carré...) pour "deviner" l'allure générale des courbes en question.

Deuxième épreuve : *Quand on peut saisir la bouée.*

Vous vérifiez vos propositions grâce à la calculatrice.

Vous donnerez alors éventuellement la nouvelle association "graphique <—> fonction " que la calculatrice vous permet de faire.
Attention, si vous vous êtes trompés lors de la première question, n'effacez pas vos réponses précédentes... Mais essayez de comprendre pourquoi vous vous êtes trompés...

Troisième épreuve : *Quand l' île au trésor sort de la brume.*

Les trois fonctions représentées en A , B et C ayant été identifiées, donner et justifier votre choix de Ymin et Ymax dans chaque cas .

A) Xmin = 0 XMax = 1 Ymin = ... YMax=	B) Xmin = 0 XMax = 1 Ymin = ... YMax=	C) Xmin = 0 XMax = 1 Ymin = ... YMax= .....

Quatrième épreuve : *Quand on déterre le trésor.*

Pour terminer, tracer avec soin des représentations graphiques des fonctions présentées dans les cadres B et C, en justifiant précisément le choix du repère et le tracé effectué.

2.Le cadre du travail

C'est le seul TP de l'année pendant lequel les calculatrices sont partiellement exclues. Il était prévu comme un TP de transition entre calculatrices graphiques, et calculatrices formelles. Mais celles-ci sont arrivées un peu plus tard que prévu...

Le thème.
Etude générale des fonctions (limites, variations, représentation graphique, combinées)

La question problématique.
Quels sont les critères pertinents permettant d'associer courbes et équations ?

Les objectifs pédagogiques.
Développer l'aptitude à changer de registre de représentation d'une fonction, à faire des aller-retour (donc dans les deux sens...) entre courbes et équations.
Prendre du recul par rapport à la calculatrice, pour développer les attitudes de contrôle : le graphique observé est-il le graphique attendu ? Contient-il les informations déjà connues ? En donne-t-il d'autres ?
Installer des objets qui feront référence commune dans la classe.
Enfin, la question 3 devrait être l'occasion de voir si les élèves savent ajuster au mieux une fenêtre, c'est à dire s'ils réinvestissent les enseignements des deux précédents TP.

3.Le bilan global.

La majorité des élèves manifeste une certaine surprise devant la découverte du TP : les formulations changent (évidemment, puisque l'auteur n'est pas le même...), et le contrat n'est plus le même (calculatrices interdites).

La mise au travail est donc un peu plus lente, le choix d'une stratégie plus hésitant.

On note que l'association graphique/fenêtre n'est pas encore évident : de nombreux élèves relèvent très tard que la fenêtre part de x = 1...

Les élèves en restent en général à des méthodes d'étude habituelles : limites des fonctions en ∞, ce qui n'était pas forcément pertinent ici, dérivation des fonctions...

Une demi-heure après le début du TP, la calculatrice est autorisée, dans une certaine confusion : certains groupes auraient aimé disposer de la calculatrice plus tôt, d'autre plus tard. <u>En fait, il aurait sans doute été préférable de faire tout le TP sans calculatrice, le changement des règles du jeu en cours de partie est très difficile à gérer</u>.

On a reporté dans le tableau ci-dessous les techniques utilisées par chaque groupe pour associer courbes et fonctions :

- la détermination du domaine de définition ;
- le calcul de la dérivée ;
- la détermination des limites ;
- les variations de la fonction ;
- l'utilisation des fonctions de référence (sinus, log) ;
- la détermination de points cruciaux (extremums, points d'annulation de la fonction);
- la détermination de points particuliers (que vaut à peu près f(10)?) ;
- la comparaison des pentes ;
- et enfin la combinaison des fonctions de référence.

Ce tableau ne permet pas d'avoir une idée complète du travail des élèves : des éléments de compréhension du travail des élèves sont aussi l'ordre dans lequel tout ceci se passe, l'interaction entre les différents résultats obtenus, les hésitations, les retours critiques...

On le verra dans l'observation plus précise, liée à la typologie mise en place.

Groupes	Df	Dérivée	Variation	Limites	Fonctions référence	Points cruciaux	Points part.	Pentes	Comb. référence
1	x		x	x	x	x	x	x	x
2			x	x	x	x		x	x
3		x	x	x	x		x		
4			x		x			x	
5			x	x	x	x			x
5bis	x	x	x	x	x				
6				x	x	x			
7		x	x	x	x	x			?
8			x		x	x	x	x	?
9	x			x	x		x		
10				x	x	x			x
11				x	x	x		x	x
12		x	x	x	x	x			
13					x	x			
14	x	x	x	x	x			x	
15		x	x		x				

De ce tableau peuvent être cependant tirés différents enseignements :

- l'utilisation de fonctions de référence se retrouve partout : normal, il s'agit de fonction très "typées", les sinusoïdes, ou qui viennent d'être traitées en cours (log) ;
- ce qui vient juste après, c'est l'étude des limites, alors que les fenêtres étaient données ;

pour x variant entre 1 et 20. Cela accrédite l'idée que, pour tout élève, une fonction se comporte hors d'une fenêtre donnée comme prolongement "naturel" de ce qui se passe sur l'écran. Donc la connaissance de la fonction sur l'intervalle [1;20] donne une petite idée de ce qui se passe en 0 et en $+\infty$;

- de ce tableau ressortent assez nettement deux pôles :
  - certains élèves en restent à un cadre d'étude classique (dérivée...) ;
  - d'autres élève utilisent la combinaison des fonctions de référence pour identifier les courbes en présence ;
- comme points extrêmes de ce dispositif ressortent les groupes "faibles" (en particulier le groupe 13) qui mobilisent très peu de techniques, et les groupes "forts", qui font interagir toutes les techniques disponibles (en particulier les groupes 1 et 2).

Ce TP laissera un certain goût d'inachevé : il est symptomatique que les élèves qui se sont investis dans une véritable recherche aient refusé de prendre la calculatrice quand cela a été autorisé, et que les élèves réticents aient attendu avec autant d'impatience la délivrance de leur machine.

Ceci s'explique : le type de travail fourni avec, ou sans calculatrice, n'est pas du tout le même, et une telle rupture en cours de TP n'est gérable que par les élèves qui ont l'habitude de changer facilement et rapidement de registre.

Mieux, le travail d'association courbes / fonctions n'est pas du tout le même que le travail de reconstruction de courbe, pour une fonction donnée. C'est toute la différence qui existe entre reconnaître un objet, et reconstruire celui-ci, entre reconnaître un suspect, et dessiner un portrait robot (version policière de l'histoire). Ce deuxième travail est beaucoup plus délicat, et fait appel à d'autres compétences. Il est significatif d'ailleurs que très peu d'élèves aient traité cette partie de la "première épreuve".

A renouveler l'expérience un peu plus tard dans l'année, il faudrait le faire avec un contrat clairement défini : pas de calculatrice pendant toute l'heure, et travail réduit à une association courbes/fonctions (cf les propositions qui suivent la correction de ce TP, dans le volume 1, "côté cours", page 125).

4. TP et typologie.

On retrouve pour partie les éléments connus de typologie, parfois déformés par le fait qu'il n'y a pas dans un premier temps de calculatrice mobilisable.

Le type théorique (Guilhem), groupe 1.

Guilhem travaille dès le début avec "passion". Julien est en force d'appoint. Il y a même assez vite déconnexion des deux types de travail : Guilhem refuse de recourir à la calculatrice quand ce sera autorisé, parce qu'il n'a pas fini le travail d'association (ce qui prouve que le temps prévu était trop court...), alors que Julien récupère dès que possible sa machine.

Le travail de Guilhem témoigne d'un réel travail de recherche : des hypothèses sont notées dans le cahier, éventuellement invalidées.

"On associe la fonction $x^2\ln x$ avec le graphe B, car on sait que la fonction x^2 a une pente infinie en l'infini, et l'association de x^2 avec $\ln x$ atténue la pente, mais pas suffisamment, car $\ln x$ met très longtemps à tendre vers $+\infty$, $\ln x$ a une pente faible en $+\infty$".

Puis tout est barré, et Guilhem rectifie : "autant pour moi, je change d'avis car si je calcule pour $x = 14$, $x^2\ln x$ est largement supérieur à 40 car $14^2 > 40$, et $\ln 14 > 1$. Le résultat me permet plutôt de pencher vers $x\ln x$, donc le graphe B irait plutôt avec $x\ln x$".

Bonne rectification, mais qui ne l'amène cependant pas à revenir sur l'idée fausse exprimée plus haut (la pente de $x^2\ln x$ est inférieure à la pente de x^2..."

- Le premier critère pertinent retenu pour reconnaitre des fonctions est la "pente" ;
- Deuxième critère pertinent : le calcul de quelques valeurs ;
- Troisième critère : les limites de la fonction en $+\infty$. Cela lui permet de conjecturer que $\frac{\ln x}{x}$ correspond à la courbe C.
- Quatrième critère : des points cruciaux. Ainsi le maximum de cette fonction est en e, avec $f(e) = 1/e$, cela marche.
- Cinquième critère : le recours à des fonctions de référence. "Le graphe A pourrait être assimilé à la fonction $\frac{\sin x}{x}$ car cela ressemble à la fonction sinus".
- Sixième critère : la combinaison des fonctions de référence. "$\frac{\cos x}{\ln x}$ ressemblerait plutôt à une sinusoïde qui s'écrase sur l'axe des abscisses".
- Septième critère : le domaine de définition. "La fonction $\ln(\cos x)$ n'est définie que pour $0 < \cos x \leq 1$".

Il s'agit là d'une recherche sérieuse, avec de nombreux résultats de référence disponibles, un large éventail de procédures, une bonne interaction entre celles-ci.

Ceci permet d'ailleurs à Guilhem de tracer une esquisse assez bonne de la fonction $\ln\cos x$ "forcément négative, et définie quand le cosinus est strictement positif".

Le type rationnel (Michaël), groupe 2.

Il part des fonctions, en les traitant les unes après les autres, sans retour critique. Il essaie à chaque fois d'éliminer les associations impossibles, et donc de signaler celles qui sont possibles :

- "$\ln\cos x$ ne correspond ni à A, ni à B, ni à C car elle est périodique ;
- $x\ln x$: graphe B (x prévaut sur $\ln x$) ;
- $x^2\ln x$: graphe B (1/2 d'une parabole), avec une pente plus forte ;
- $\frac{\ln x}{x}$: graphe C car $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{\ln x}{x}) = 0$, et max $= x = \frac{1}{e}$;

- $\frac{\ln x}{x^2}$ graphe C, pente plus forte, max = x = $\frac{1}{e^2}$, avec une tangente horizontale plus basse ;

- $\frac{\cos x}{\ln x}$ c'est le graphe A, mais dans l'autre sens, car $\frac{\cos x}{\infty}$ tend vers 0 ;

- $\frac{\sin x}{x}$ idem que le 5 ;

- lnx.cosx, graphe A. Va varier entre lnx et - lnx car -1 < cosx < 1 donc lnx.cosx va prendre des valeurs de plus en plus fortes".

Il y a là de réelles compétences qui s'expriment (en particulier l'encadrement de lnxcosx par lnx et -lnx, appuyé par un petit dessin sur un brouillon), et un réel investissement dans la recherche... qui se paie d'un certain relâchement dans la rédaction.

Comme d'habitude, une certaine distance est gardée avec "les détails" : on ne saura pas ce qui a permis de séparer concrètement les représentations de xlnx et de x^2lnx. Prise de distance confirmée avec la question 3 : pour lnxcosx, entre 0 et 1, la fenêtre suggérée est "il faut prendre Ymin assez petit puisque la fonction en 0 tend vers -∞". Le moins que l'on puisse dire est que la problématique d'ajustement de la fenêtre est assez légère...malgré ce qui a été vu dans les précédents TP.

<u>Le type scolaire</u> (Rachel), groupe 13.

Perplexité complète. Les échanges sont faibles à l'intérieur du groupe. La perplexité cède vite la place au découragement. Les résultats notés témoignent des difficultés.

Rachel part toujours de la considération des graphiques, pour rechercher des fonctions convenables (Michaël partait des fonctions, et Guilhem partait parfois des graphiques, parfois des fonctions).

Premier résultat : "Graphe A : nous pensons qu'il y a présence d'un sinus ou d'un cosinus. La courbe commence à (0, 0), donc on peut penser qu'il s'agit d'un sinus. La fonction est $\frac{\sin x}{\ln x}$".

Deuxième résultat : "nous pensons que ce graphe correspond à une des 4 premières fonctions".

Faiblesse dans l'analyse des objets présentés (les graphiques ne commencent pas à (0, 0) !), faiblesse des critères pertinents utilisés pour reconnaître les fonctions (si ça oscille, il y a du sinus, sinon, il n'y a pas de sinus), faiblesse des références disponibles et des "opérateurs de contrôle" [Houdé 1995] : le calcul de $\frac{\sin x}{\ln x}$ en zéro ne pose pas de problème à Rachel, le fait que l'amplitude de la courbe A augmente n'est pas croisé avec le comportement prévisible de $\frac{\sin x}{\ln x}$.

<u>Le type bricoleur</u> (Laurent), groupe 4.

Activité très faible, et fébrilité en attendant d'avoir le droit d'utiliser à nouveau les calculatrices.

Ne sachant pas par quel bout commencer l'étude, Laurent dérive quelques fonctions. Bloqué avec la dérivée, il revient à la considération des graphiques.

- "xlnx : f ' (x) = lnx + 1. Nous pouvons penser que xlnx correspond au graphe B, car son ébauche est... *Laurent dessine ici une sorte de cubique, définie aussi pour les x négatifs*.

- x^2 lnx est orpheline, car elle remonte trop vite (*à nouveau une sorte de cubique, mais avec une pente plus raide, est dessinée ici*)";

Puis il associe à la fois $\frac{\ln x}{x}$ et $\frac{\ln x}{x^2}$, sans explication, au graphe C.

Il dérive ensuite $\frac{\sin x}{\ln x}$. A nouveau bloqué, il dit "la fonction est orpheline, car son ébauche est" ...*Il dessine une sinusoïde amortie*.

Il termine en associant lnxcosx et lncosx au graphe A.

On voit ici :

- la paralysie relative de l'activité, en l'absence des calculatrices : il y a une réelle dépendance vis à vis de l'outil ;
- les faiblesses des références (la fonction lnx semble définie pour x négatif) ;
- la faiblesse de la rédaction : l'évocation de la sinusoïde amortie n'est pas étayée, et semble bien avoir été empruntée à un groupe voisin ;
- les ambiguïtés dans la réalisation : des fonctions différentes sont associées aux mêmes courbes. Il s'agit là d'une "transposition automatique" d'un registre à l'autre : si deux objets ont, dans un certain registre, des représentations proches, ils doivent avoir, dans un autre registre, des représentations aussi proches. Ici, si deux fonctions ont des formules qui se ressemblent, elles ont nécessairement des courbes du même type.

Dans la deuxième partie du TP, Laurent et Alexandre se précipitent sur leurs calculatrices, et associent rapidement courbes et fonctions, sans retour sur ce qui a été fait précédemment, et commentaires particuliers.

<u>Le type expérimentateur</u> (Fabienne), groupe 14.

Perplexité du groupe qui se retrouve amputé d'un des outils d'investigation habituel, la calculatrice. Puis réflexion sur les objets en présence :

"on peut étudier l'allure de la fonction lnx, et voir si la fonction $y = x$ est "dominante". $y = x$ et $f(x) = \ln x$ sont deux fonctions croissantes. Peut-être que xlnx est une fonction croissante car $\ln x \geq 0$ sur $[1; 20]$, et $y = x > 0$ sur cet intervalle.

On pose $f(x) = x\ln x$"... Suit l'étude complète de la fonction. Conclusion : "le graphique est le B car $\frac{1}{e} < 1 = \text{Xmin}$, et la fonction est croissante sur l'intervalle $[1, 20]$".

Etude reproduite pour la deuxième fonction : "cela peut-être le B, mais la pente serait plus raide si l'on admet que B correspond à xlnx."

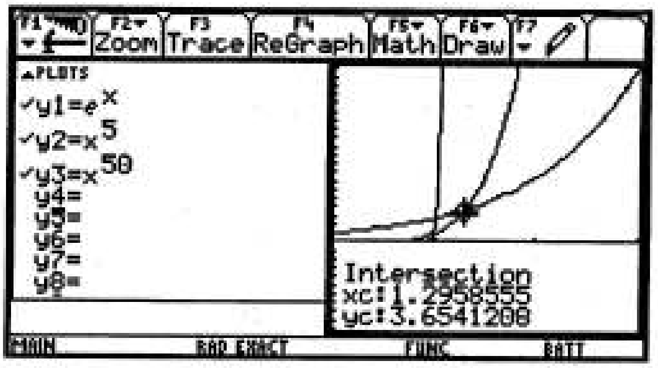
On le voit encore sur cette activité :

- ce groupe est capable d'évoquer plusieurs pistes, pour se ramener dans un deuxième temps au terrain qui apparaît le plus solide. Ainsi, il aurait pu poursuivre sur l'idée de départ (le produit de deux fonctions positives croissantes est une fonction positive croissante). Ne se sentant pas assez assurée sur ce terrain, Fabienne préfère revenir à une étude standard ;
- ce groupe est capable de croiser les informations disponibles. Ainsi la fonction est croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{e}, +\infty[$, et la fenêtre de représentation de la fonction est incluse dans cet intervalle ;
- ce groupe est capable de comparer les résultats successifs : la deuxième fonction peut correspondre aussi au B, mais "avec une pente plus raide" ;

Une petite faiblesse : ce groupe a du mal à activer une recherche d'nformation nouvelle , pour aller plus loin dans l'identification des objets. La deuxième fonction a une pente plus raide..."si l'on <u>admet</u> que B correspond à xlnx".

En conclusion, on peut noter que si les élèves de type bricoleur sont paralysés par l'absence de la calculatrice, les élèves de type expérimentateur sont simplement gênés par cette absence : ils ont pris l'habitude, depuis le début de l'année, d'intégrer cet outil dans leurs prospections. Quant aux élèves de type scolaire, il est difficile de faire la part de l'absence de la calculatrice, et de la difficulté du sujet, pour expliquer leurs blocages. Les élèves de type "théorique" ou "rationnel" ont travaillé à peu près comme d'habitude.

Bilan du TP n°9



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°9

A. On se propose de résoudre l'équation $e^x = x^5$. Il s'agit donc d'établir avec rigueur le nombre de solutions de cette équation, et de donner les valeurs exactes, ou un encadrement de chacune d'entre elles.

En général, pour résoudre un tel problème, diverses méthodes d'approche sont possibles :

- étude directe de l'équation ;
- transformation de l'équation ;
- étude d'une fonction, ou de deux fonctions ;
- transformation des fonctions ;
- représentations graphiques ;
- utilisation de la calculatrice...

A vous de voir ici ce qui convient le mieux. Comme d'habitude, on demande de noter dans le cahier de recherche, au fur et à mesure, toutes les méthodes utilisées. S'agissant de représentations graphiques, on reproduira précisément le dessin, en justifiant le choix du repère, ou, pour un dessin issu de la calculatrice, le choix de la fenêtre.

B. Même question, avec l'équation $e^x = x^{50}$.

2. Le cadre du travail

Thème.

La fonction exponentielle, et la comparaison avec les fonctions puissances. En fait, il s'agit d'un thème plus large, qui donnera le cadre de ce TP, du TP suivant, et du TP 17 : les rapports entre exponentielle, logarithme, et puissances.

La question problématique.

Les calculatrices ne donnent pas la seconde racine positive de l'équation $e^x = x^{50}$.
N'y en aurait-il qu'une ?
Ce TP, par ailleurs, ressemble au premier TP de l'année, où la plus grande racine positive d'un polynôme se trouvait "très loin". Elle existait nécessairement pour des raisons de limite. C'est le même problème ici.

L'objectif pédagogique.

Développer différentes approches de résolution d'équation (changement de fonctions, différence de fonctions...), mais en gardant au poste de commande la connaissance des attributs de chacun des objets (ici les théorèmes de comparaison exponentielle/puissances).

3. Le bilan global.

Quelques remarques.

- On découvre, avec ce TP, une rédaction qui restera stable à peu près jusqu'à la fin de l'année : l'énoncé est relativement bref, le problème est exposé, avec quelques pistes de solutions, qui sont laissées à la discrétion de l'élève. Souvent une deuxième question, comme c'est le cas ici, vient relancer le problème avec un léger "pas de côté" (ce peut être une généralisation partielle, ou, comme ici, une petite différence qui modifie le champ des réponses).
- C'est lors de ce TP qu'a lieu une première observation minutée expérimentale (cf chapitre 1, consacré à la typologie). Guilhem, Michaël, et Fabienne sont sous haute surveillance. L'installation du dispositif provoque une légère perturbation. Tous les observateurs, sauf un, sont pris par cette nouvelle tâche. Ce que l'on gagne en information sur le petit groupe d'élèves observés, on le perd sur l'ensemble de la classe... Enfin, on n'a rien sans rien !
- Un nouvel élève, issu d'une TS "option math", arrive lors de ce TP. Il permet de fonder, avec un élément du seul trinôme existant, un nouveau binôme, n°16. On constatera à la lecture du tableau ci-dessous, qu'il impulse un type de travail non habituel dans ces séances : aller le plus vite possible, comme lors d'une interrogation écrite. La calculatrice n'est quasiment pas utilisée, les valeurs approchées ne sont pas cherchées, sauf en fin d'heure. Il s'agit d'études de fonction, assez bien menées.
- Il faut situer ce TP par rapport au cours : on vient de voir (c'était le cours précédent le TP) la limite de $\frac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$.

On a noté dans le tableau ci-dessous, pour chacune des deux équations proposées, le nombre de solutions trouvées, la détermination, ou non, d'un encadrement, ou de valeurs approchées de celles-ci, et la méthode de "preuve", théorique, ou seulement "expérimentale", c'est à dire, en l'occurrence, graphique.

	$e^x = x^5$			$e^x = x^{50}$		
	Nb sol	Val. appr.	Justificat.	Nb sol	Val. appr.	Justificat.
Groupe 1	1	Oui	Théorique			
Groupe 2	2	Oui	Théorique	b et c		Théorique
Groupe 3	2	Oui	Graphique			
Groupe 4	2	Oui	Graphique	a et b	Oui	Graphique
Groupe 5	2	Oui	Théorique			
Groupe 5b	2	Oui	Théorique			
Groupe 6	?					
Groupe 7	1		Graphique			
Groupe 8	2	Oui	Graphique	a et b	Oui	Graphique
Groupe 9	2		Théorique	a, b et c		Oui
Groupe 10	2	Oui	Théorique	a, b et c	Oui	Théorique
Groupe 11	2	Oui	Théorique	b et c	Oui	Théorique
Groupe 12	2	Oui	Théorique			
Groupe 13	2 ou plus		Graphique			
Groupe 14	2	Oui	Théorique			
Groupe 15	2		Théorique			
Groupe 16	2	Non	Théorique	a, b et c	Oui	Théorique

On voit, à la lecture de ce tableau, qu'entre les groupes qui trouvent toutes les solutions (et les justifient), et ceux qui ne peuvent "voir" qu'une des solutions de la première équation (sans pouvoir ni l'encadrer, ni la justifier), il y a un gouffre !

4.TP et typologie.

Un petit tour de piste.

Guilhem, type théorique.

Guilhem fait partie des élèves dont l'activité est minutée. Sur le moment, on a pu penser que c'était pour cela que sa "prestation" était moins bonne que d'habitude. En fait c'est une première manifestation d'un certain processus de marginalisation. Guilhem ressent une certaine "saturation" des choses scolaires.

Très bon départ cependant : "Cours sur les puissances, rapport avec l'exponentielle, on sait que la limite de $\frac{e^x}{x^n}$ quand x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. Donc la fonction $x \to e^x$ a une pente beaucoup plus forte que x^n, donc que x^5, ainsi il ne peut y avoir qu'un nombre restreint de solutions, voire même une seule".

Avant toute observation graphique, il y a donc évocation du résultat théorique essentiel dans ce contexte.

Ensuite cela se gâte un peu :" $e^x > 0$, donc les solutions sont forcément positives sur y $]0,+\infty[$. Il y a là une petite confusion entre les solutions de l'équation, qui sont le abscisses des points de concours des courbes en question, et les points eux-mêmes.

Puis diverses stratégies sont abordées (avec quelques coups d'oeil rapides sur la calculatrice) :

- les deux fonctions e^x et x^5 sont étudiées séparément ;

Une conjecture est formulée oralement : deux fonctions croissantes ne peuvent se rencontrer qu'en un point.

- l'équation $e^x = x^5$ est envisagée ;

- en posant $e^x = X$, l'équation est tranformée, et devient $X = (\ln X)^5$;

- puis, en repartant de $e^x = x^5$, et par passage au logarithme, il aboutit à $x = 5\ln x$, et envisage la fonction $f(x) = x - 5\ln x$.

En désespoir de cause, n'arrivant pas à privilégier une voie plutôt qu'une autre, en fin d'heure, il revient à la calculatrice, ne localise qu'une solution, ce qui fait écho à la conjecture indiquée plus haut !

La démarche est toujours la même : aller-retour entre le cours et le problème, éclatement du problèmes en micro-problèmes, changement de point de vue. Mais en fin de course, aujourd'hui, les choses se passent mal : les différentes éléments ne sont pas raccordés.

La feuille d'observation minutée donne des informations intéressantes : le TP commence et finit par des plages de travail papier/crayon ; à l'intérieur du TP, il y a alternance de plages régulières (2/3mn) papier - crayon / machine, et quasiment aucune interaction avec le voisin, qui reste passif toute l'heure (ou se cantonant dans des tâches d'accompagnement).

Michaël, type rationnel

Il est aussi suivi dans le cadre de l'observation minutée, sans que cela ne semble le troubler le moins du monde.

Le travail est sans surprise : le passage au log est fait tout de suite, Michaël étudie les variations de la fonction différence, et conclut, en citant le théorème adéquat (mais faux, hélas : "une fonction continue et monotone réalise une bijection"...). Il est assez intéressant de noter que Michaël donne toujours les théorèmes exacts en "interro", et des théorèmes approximatifs en TP...

Pour la deuxième équation, le refus d'observer, et de rentrer dans les détails "pratiques", entraîne deux inconvénients majeurs :

- en reproduisant, sans recul, la première stratégie de passage au logarithme (qui avait été pertinente pour la première équation), il oublie la racine négative de l'équation ;

- en refusant de considérer la recherche d'encadrement des racines comme une tâche mathématique, il n'approfondit pas suffisamment la question. Il ne trouve donc pas de valeur approchée pour la plus grande racine, et note "Ø de calculs possibles de cette racine à la calculatrice"...

La feuille d'observation minutée donne là aussi des informations intéressantes : il y a utilisation de la machine en début et en fin de TP (conjectures, et vérifications rapides), à l'intérieur du TP les phases de travail papier/crayon dominent. Il y a de nombreuses plages de discussion avec sa "collègue" de binôme, qui sont, comme on l'a déjà signalé, des plages de "tutelle pédagogique"...

<u>Caroline, type scolaire.</u>

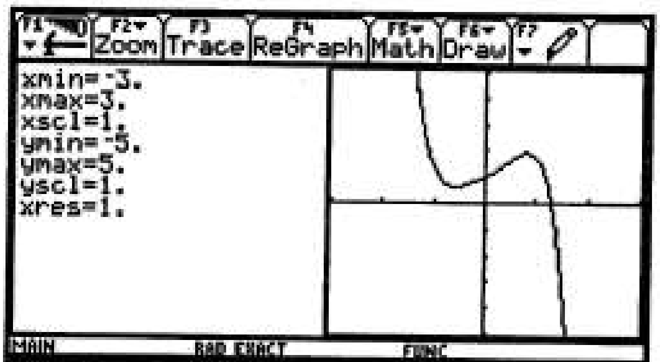
Voici tout le rapport du groupe Rachel-Caroline, rédigé par cette dernière. On donne, pour illustration du propos, les courbes proposées :

"Nous avons tracé la courbe sur la calculette.

Xmin = -3, Xmax = 3,
Ymin = -5, Ymax = 5.

$e^x = x^5$, donc $e^x - x^5 = 0$.

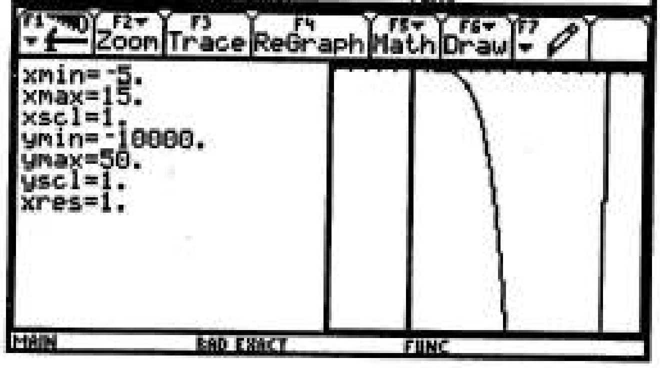
Il semble qu'il y a une seule solution à cette équation.



Mais si on agrandit le Range :
Xmin = -5, Xmax = 15,
Ymin = -10000, Ymax = 50.

Il y a donc d'autres solutions.

Nous avons essayé de transformer l'équation, mais ça n'a donné aucun résultat."



On distingue bien dans ce travail les caractéristiques de ces élèves :
- aucune évocation des propriétés des fonctions de référence ;
- le fenêtrage n'est pas réfléchi (pourquoi regarder les x négatifs ? Pourquoi prendre pour les y un intervalle [-10000, 50] ?
- la manipulation des commandes de la calculatrice est encore très maladroite : aucune valeur approchée, ou encadrement, n'est proposé.
- aucun début de preuve n'est avancé.

On peut aussi regarder ce travail sous un autre angle : le groupe a transformé l'équation une première fois, pour se ramener à l'étude d'une fonction, il ne s'est pas contenté d'une seule fenêtre, mais a essayé de voir s'il n'y avait pas de solution hors de "l'épure", et s'est posé, même infructueusement, le problème de la preuve. C'est-à-dire que ce groupe, à doses homéopathiques certes, est pris dans une certaine dynamique de classe. Ce sont pour les groupes les plus faibles et les plus discrets, que les changements sont les plus difficiles à percevoir. Raison de plus pour y être attentif !

<u>Laurent, type bricoleur.</u>

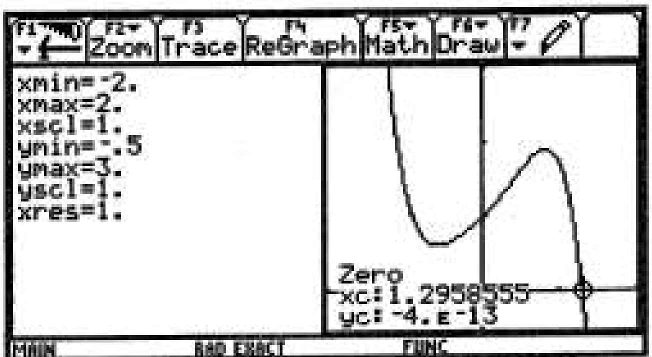
Le groupe est très actif, multiplie les fenêtres sur sa calculatrice, utilise des commandes spécifiques pour la résolution approchée des équations. Ci-dessous le rapport, avec des écrans TI-92 (au moment du TP 9, Laurent et Alexandre travaillaient avec des TI-82).

"$e^x - x^5 = 0$

D'abord je prends un Window apte à me donner les renseignements nécessaires pour connaître la ou les solutions de cette équation (*le groupe fait le choix de la fenêtre ci-contre*).

Je remarque déjà une solution. En appliquant Shift-Calc, je vais sur Root, je trouve le point pour que la fonction s'annule :

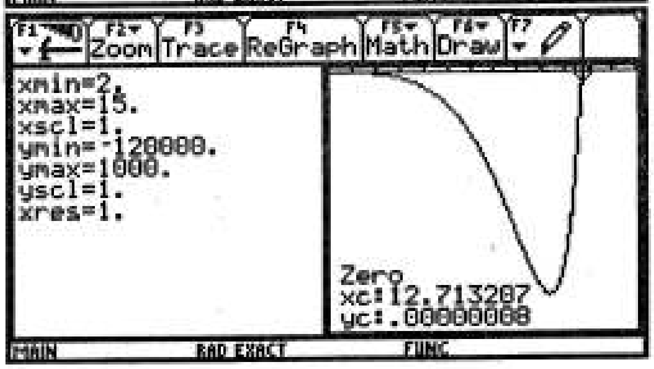
x=1, 295 855 5 (Y=- 4.10^{-13})"



Nouveau choix de fenêtre ci-contre.

"Ensuite j'applique le même système que l'exercice précédent, et je trouve que la fonction s'annule pour x= 12, 713 207

(Y= 8.10^{-8})"



En bas de page, on trouve :

"$e^x = x^5$; $x = \ln(x^5)$; $f'(x) = \dfrac{50}{x} - 1$.

Puis question B.

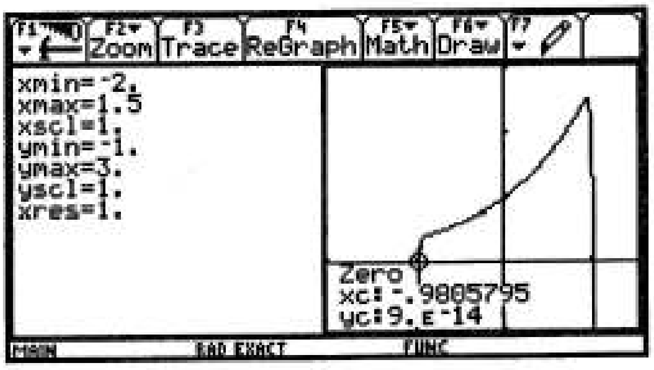
"$e^x = x^{50}$ $\quad e^x - x^{50} = 0$

(nouvelle fenêtre)

J'applique toujours la même méthode. Je trouve que la fonction s'annule pour x = -0, 980 579 5 (y = 2.10^{-14})

et je trouve encore

x = 1, 020 622 (y =-$1,5.10^{-12}$)"



Le rapport s'arrête là.

Les ressemblances avec le groupe "scolaire" sont claires : même absence de références théoriques (recherchées, ou disponibles).

Les différences sont aussi éclatantes :

- du point de vue de la manipulation de la calculatrice, les fenêtres sont bien choisies (d'un point de vue esthétique, et aussi de représentation du "maximum" d'informations), les commandes adéquates activées ;
- du point de vue de la légitimation des choix et des résultats, il semble bien que les traces résiduelles, dans un coin de feuille, ne correspondent pas à un début de

démonstration. La calculatrice est clairement l'outil de validation des solutions ("je prends un Window apte à me donner les renseignements nécessaires pour connaître les ou la solution de cette équation") ;

- cette dépendance vis-à-vis de la calculatrice se manifeste aussi dans l'affirmation du nombre de solutions : aucun doute n'est émis sur la possibilité qu'il y ait d'autres solutions en dehors de l'écran...

- du point de vue de la distinction calcul exact/calcul approché, il y a un petit problème :

"je trouve le point pour que la fonction s'annule : x=1, 295 855 5 ($Y=-4.10^{-13}$) "... Drôle d'annulation !

- du point de vue de la tâche réalisée : on peut se demander ce que veut dire ici "résoudre une équation". Est-ce trouver les valeurs de x convenables, ou les points d'intersection de courbes, c'est-à-dire des couples (x, y) ?

On peut penser que, pour ces élèves, il y a une contagion très forte de l'écran sur les notions mathématiques qui se construisent dans ces occasions !

Fabienne, type expérimentateur.

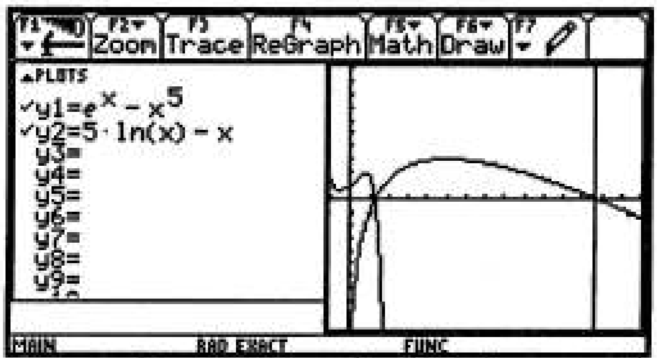
Le groupe commence par différentes observations graphiques :

- d'abord les fonctions e^x et x^5. Puis la fonction $e^x - x^5$.

Une première racine est localisée, puis une deuxième "par extension de fenêtre". Fabienne propose de passer à une étape de démonstration, par l'étude de $h(x) = 5\ln x - x$.

Le mot de bijection est évoqué, qui prouve l'existence de deux solutions. Les solutions sont localisées, non pas par utilisation des commandes graphiques, mais par utilisation de la dichotomie : h(13) est négatif, h(11) est positif, donc la racine cherchée est entre 11 et 13.

Puis le groupe est saisi par un doute : l'équation initiale $e^x - x^5 = 0$, et l'équation traitée, $5\ln x - x = 0$, sont-elles équivalentes, c'est-à-dire ont-elles les mêmes solutions ?



Retour au graphique, à fin de vérification. Il faut un grand moment pour arriver à visualiser les deux courbes : quand on voit bien l'exponentielle, le logarithme disparaît...

Satisfaction de Fabienne (sur une TI-81) : on a bien les mêmes solutions ! Et surprise de Christelle : la Casio, avec son fenêtrage automatique, ne veut montrer les deux courbes en même temps... Du coup, toutes les deux doutent : qui a raison ? La sonnerie de fin d'heure met un point final... provisoire à la discussion.

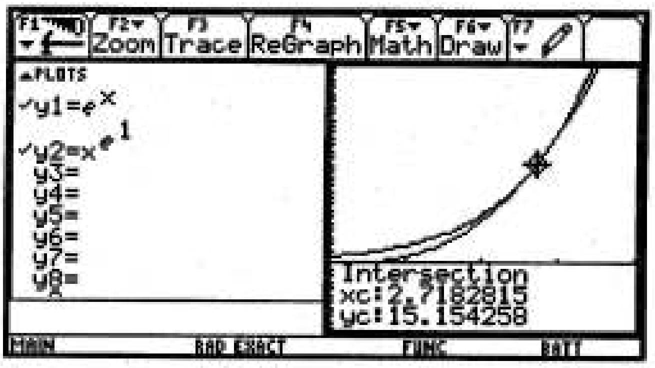
La feuille l'observation minutée (troisième groupe observé de cette façon), donne aussi d'utiles renseignements : interaction constante, et équilibrée, entre les deux éléments du groupe, 15mn d'expérimention tous azimuts en début d'heure sans écrit, puis alternance régulière machine/papier, puis en fin d'heure, longue discussion ...sur un point non prévu.

On retrouve bien là le fonctionnement habituel de ce groupe : bon investissement dans la recherche, multiplication des points de vue, volonté de croiser les informations.

La preuve d'une bonne solution, pour ces élèves, n'est pas seulement (pas principalement ?) la démonstration faite, mais la concordance de tous les points de vue sur cet objet. C'est une faiblesse, et en même temps une richesse de ce type d'élève.

Suite au prochain TP, sur un thème très proche.

Bilan du TP n°10



TP traité avec des calculatrices graphiques.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°10

<u>On se place dans tout ce qui suit sur $\mathbb{R}^{*+}$.</u>

Nous avons vu la semaine dernière que les courbes des fonctions $x \to x^5$ et $x \to x^{50}$ rencontraient deux fois la courbe de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}+$.

Par ailleurs, on sait que la droite représentant la fonction $x \to x$ ne rencontre pas la courbe de la fonction exponentielle.

1. Y a-t-il d'autres fonctions puissances dont la courbe ne rencontre pas celle de la fonction exponentielle ? Si oui lesquelles ?

2. Y a-t-il une (ou des) fonction(s) puissance(s) dont la courbe rencontre une fois et une seule la courbe de la fonction exponentielle ? Si oui, laquelle (ou lesquelles) et pourquoi ?

3. Que peut-on en conclure pour les courbes des fonctions puissances et celle de la fonction logarithme ?

2. Le cadre de travail

Le thème
Il recouvre celui du TP précédent. Avec un point nouveau, essentiel : celui de dérivée, ou de tangente.

La question problématique.
Y a-t-il une situation intermédiaire entre la situation de coupure de l'exponentielle par les fonctions puissances en deux points, et la situation d'intersection vide ? (la question problématique se pose en fait pour les exposants positifs ; pour les exposants négatifs, la situation est assez claire).

Les objectifs pédagogiques.
En plus d'une familiarisation avec les fonctions puissances d'exposant réèl, il s'agit ici d'apprendre à inventorier les cas de façon exhaustive, à classer ceux-ci en fonction des caractéristiques visées (nombre d'intersections avec la fonction exponentielle).
Comme pour les précédents TP, l'aller-retour entre observation et validation est souhaité...

3. Le bilan global.

<u>Quelques remarques générales</u>

1. Sur l'énoncé.

Celui-ci a été longuement discuté dans l'équipe d'animation. Il y a eu plusieurs modifications par rapport à la formulation initiale de ce TP, qui vont dans le sens d'une plus grande ouverture :

- les indications données primitivement *"on pourra rechercher expérimentalement une telle situation, dessiner... voir les conséquences pour la nature du contact..."* ont été supprimées. Aux élèves de choisir les méthodes d'investigation, et de démonstration. D'autant que le TP est précédé par une séance de rappel sur l'importance du changement de point de vue(cf volume 1, page131). Quelle est l'importance de ce changement si la vue "licite" est fortement suggérée ?

- une deuxième indication a été supprimée, plus implicite : "y *a-t-il **une** fonction puissance dont la courbe rencontre une fois et une seule la courbe de la fonction exponentielle...*"". Rien ne dit que pour les élèves, il n'y aura qu'une situation de ce type... Il se peut très bien que certains imaginent que pour n "très grand", la fonction x^n rencontrera une seule fois la courbe de la fonction exponentielle ! C'est ce que le TP montrera.

- une dernière indication, encore plus implicite, a été supprimée : "y *a-t-il une situation **limite**...*" . Le mot limite induit là aussi une méthode puissante, pour un expert : il y a parfois 0 intersection, parfois deux, donc, par continuité, il y a une situation "limite". On n'attend pas forcément un raisonnement de ce type chez les élèves, et, de plus, autant ne pas mettre ce mot "limite" à toutes les sauces...

2. Sur le déroulement de la séance.

Après un coup d'essai lors du TP précédent, c'est lors de ce TP que se déroule la première observation minutée de 5 élèves (Guilhem, Michaël, Rachel, Damien, Christelle). Des observateurs sont venus en renfort dans la classe à cette occasion. Cela fait beaucoup de monde, mais les élèves semblent relativement indifférents : les groupes de TP fonctionnent désormais assez bien, la réflexion, et l'animation des échanges internes, font de chaque binôme un petit monde relativement clos.

Sur le travail réalisé par les élèves.

Les groupes ont tous travaillé toute l'heure, avec un intérêt en général assez vif. On a relevé dans le tableau ci-dessous les réponses des élèves sur les deux points clés :

- des élèves ont-ils imaginé qu'une fonction puissance coupant la fonction exponentielle pouvait ne pas la recouper ensuite (ce qui signifierait que les leçons du TP précédent n'ont pas été mémorisées) ?
- une "valeur charnière" a-t-elle été relevée ? Prouvée ?
- le cas des fonctions puissances d'exposant négatif a-t-il été vu ? Prouvé ?

Groupes	Erreurs manifestes	Val. charnière	Prouvé	Exposant négatif	Prouvé
1		e	Tentative	Oui	Presque
2		e	Oui	Oui	Oui
4		Entre 2 et 3	Tentative		
5		2, 7	Tentative		
5bis	x^{60}	Entre 2 et 3	Oui		
6		2, 7		Oui	Oui
7		Entre 2, 6 et 2, 7		Oui	
8		e	Oui		
9		2,6		Oui	Tentative
10		e	Oui	Oui	Oui
11		e	Tentative		
12		e	Oui		
13		e	Partiel	Oui	
14	Plus grand que 3	Entre 2 et 3		Oui	Presque
15		2,7			
16		e	Oui		

On voit ci-dessus que seuls deux groupes expriment une erreur relative à l'existence d'une seule intersection entre e^x et des fonctions puissances d'exposant "fort".

Il ne faut pas en déduire hâtivement que pour les autres groupes les choses sont claires... comme on le verra dans l'analyse plus précise qui suit.

Apparaissent par ailleurs assez clairement, à travers la lecture du tableau, les groupes qui se sont épuisés à manipuler leur machine pour trouver la valeur charnière, et qui, du coup, ont délaissé la partie "preuve". En procédant ainsi, ils se sont en fait privés de la possibilité de trouver cette valeur charnière !

4.TP et typologie.

Un nouveau tour de piste.

Guilhem, type bricoleur.

Guilhem "subit" l'observation minutée. L'analyse de celle-ci fait apparaître très peu de phases de calcul et d'interaction avec le voisin. Le travail est organisé autour de l'écriture du rapport de recherche, avec des phases de réflexion, et des phases courtes de mobilisation graphique de la machine, à intervalles assez réguliers.

Question 1.

Tout passe par la mobilisation d'éléments de référence.

Dans un premier temps, Guilhem évoque les "points cruciaux" des deux fonctions.

"Par définition, la fonction exponentielle passe par le point (0, 1). Toutes les fonctions puissances passent par le point (1, 1). A mon avis, toutes les fonctions puissances qui ont une pente plus faible en (1, 1) que la fonction exponentielle en (0, 1) ont leur courbe qui ne rencontrent pas la courbe de e^x."

Puis il explique : "Pour comparer les fonctions, il faut se placer au même niveau", et note : " Prenons comme repère le point d'abscisse 1. Au point d'abscisse 1 et d'ordonnée e, la fonction e^x a une pente de e. A la même abscisse, les fonctions puissances passent par (1, 1) , et toutes les fonctions puissances qui ont une pente inférieure à e en ce point ne peuvent matériellement pas couper la courbe de e^x ".

Il poursuit : "En $x = 1$, x^a passe par (1, 1) et e^x passe par (1, e) donc beaucoup plus haut et donc si la pente de x^a est inférieure à la pente de e^x au niveau d'abscisse 1, ces courbes ne se coupent pas. la condition est donc $a \leq e$ ".

Question 2.

"Cette question nous fait de suite penser aux fonctions puissances qui ont une pente négative, c'est à dire qui sont décroissantes...". Il conclut en évoquant la continuité des deux fonctions, leurs limites, et le fait qu'elles ont des sens de variation opposés.

Phrase de fin : "désolé que ça se finisse aussi promptement".

On le voit, tous les éléments de référence sont mobilisés avec beaucoup de facilité ("cette question nous fait de suite penser..."). La démonstration proposée pour la première question est très subtile : elle repose sur un argument de bon sens ("si je pars après toi, et si je vais moins vite, je ne pourrai jamais te rattraper..."). Mais elle présente quelques insuffisances : il reste à prouver que "j'irai joujours moins vite que toi"... Et cela ne répond pas à la question : "que se passe-t-il si je pars après toi, et si je vais un peu plus vite que toi" ? Ce sont ces imprécisions qui empêchent d'ailleurs Guilhem de conclure complètement : ainsi il note que, pour $a \leq e$, les courbes ne se rencontrent pas. Et que ce ne sont que les fonctions puissances d'exposant négatif qui ne rencontrent qu'une seule fois la fonction exponentielle (il ne voit pas le cas $a = e$).

Ce point faible est apparu dans la plupart des TP. C'est sur ce point que Guilhem devrait faire porter son effort.

L'investissement dans la recherche, la mobilisation et l'articulation des éléments de référence, s'ils étaient appuyés sur une exigence de rigueur, une mise en forme précise, seraient des atouts décisifs, pour l'activité mathématique.

Michaël, type rationnel.

La feuille d'observation minutée indique une lecture de l'énoncé rapide, puis un regard au cours, puis l'écriture du rapport de recherche, entrecoupé de phases de discussion, et de 4 regards (sur l'heure !) à la machine. C'est le type rationnel...

Les résultats sont trouvés, par étude de la fonction $f(x) = x - a\ln x$. Tous les cas de figure sont systématiquement étudiés : a positif, a négatif, a = 0. En conclusion : pour a négatif, et a = e, un seul point de rencontre.

Michaël travaille un peu "en aveugle" :

- aucun dessin n'est fait ;

- le signe de la dérivée $f'(x) = 1 - \frac{a}{x}$ est étudié sur $\mathbb{R}-$, alors que la fonction f n'y est pas définie ;

- la singularité du cas a = e (contact tangent) n'est pas évoquée.

Ce travail sans recul fait que la symétrie de ce problème avec le problème suivant (rapport entre fonctions puissances et fonction logarithme) n'est pas vu. Michaël s'apprête à recommencer une nouvelle étude théorique (étude de $x^a - \ln x$), quand l'heure s'achève.

On le voit, ce type de travail est l'opposé d'un certain point de vue du travail de Guilhem :

- pour Guilhem : beaucoup de recul sur les objets manipulés, et pas assez de soin et de rigueur pour l'étude détaillée ;

- pour Michaël... le contraire.

Rachel, type scolaire.

Rachel fait aussi l'objet d'une observation minutée. Le TP commence par une très longue lecture de l'énoncé, se poursuit par l'alternance de phases longues papier/crayon, et de phases longues machine.

Première étape.

"A première vue, on pourrait croire que les fonctions puissances avec une puissance négative ne recoupaient pas la fonction exponentielle, mais, en regardant sur la calculatrice, on prouve le contraire, toutes les fonctions puissances avec une puissance négative recoupent la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}+^*$."

Il y a donc eu une phase de vérification, avec la calculatrice, d'une conjecture de départ. Mais on notera le caractère de la validation : "en regardant sur la calculatrice, on prouve"...

Deuxième étape.

"On essaie alors x^2 : on observe qu'elle ne recoupe pas la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}+^*$. On sait aussi qu'elle ne peut pas la recouper, même sur une fenêtre plus grande car la fonction exponentielle s'accroît plus fortement que la fonction x^2. On pourrait penser alors que la fonction puissance ne recoupe pas la fonction exponentielle lorsque la puissance de la fonction exponentielle est comprise entre 0 et e, car à partir de e les deux courbes se confondent, donc e est à éliminer des solutions. Les solutions sont donc comprises entre x^0 et x^e exclu".

On constate un progrès : certains résultats du précédent TP ont été mémorisés ("on sait que...", et certaines attitudes commencent à rentrer dans les moeurs (se demander ce qui pourrait se passer "sur une fenêtre plus grande").

La suite devient extrêmement confuse. Plusieurs éléments interfèrent :

- une confusion de formes : e^x et x^e c'est pareil (à l'ordre près) ;

- une confusion de graphiques : à partir de e, les deux courbes se confondent, ce qui ressort d'une observation rapide d'un écran (très rapide et très localisée).

Rachel et Caroline passent alors à une étape de calcul "pour y voir plus clair". En fait, c'est plutôt Caroline qui suggère cette phase de travail, Rachel serait volontiers restée à la phase d'observation.

La stratégie du TP précédent est reprise :

- étude de l'équation $e^x = x^2$, transformée en étude de fonction $f(x) = x - 2\ln x$. Conclusion, pas d'intersection sur $\mathbb{R}+*$;
- étude de l'équation $e^x = x^{2,5}$, transformée en étude de fonction $f(x) = x - 2,5\ln x$. Conclusion, pas d'intersection sur $\mathbb{R}+*$.

Et c'est la fin du TP.

On voit bien, sur cette fin de séance, la nécessité de la preuve désormais à peu près installée, et la difficulté de la mener à bien : Caroline et Rachel procèdent par copier-coller de démarches antérieures, identifiées comme pertinentes, mais ne passent pas à une étape de généralisation.

L'absence de généralisation peut être expliquée de plusieurs points de vue :

- l'illusion que l'on pourra conclure "par épuisement des cas de figure envisagés" ;
- la difficulté de l'abstraction en général, et pour ce type d'élève en particulier.

Ceci explique la difficulté, pour ces élèves, de mener au bout un tel travail de recherche... et le mérite qu'ils ont de s'y investir, malgré cette difficulté !

<u>Laurent, type bricoleur.</u>

Beaucoup de manipulations de la calculatrice pendant l'heure. Mais cette fois-ci, le problème est plus difficile à cerner : il n'y a pas de commande particulière, sur la machine, qui permette de traiter "automatiquement" le problème (comme pour la résolution des équations, lors du dernier TP). Laurent essaient de cerner le "contact tangent", mais n'y arrivent pas d'une façon convaincante (pour eux).

Passage à une étape de rédaction :

- "On <u>constate</u> que la fonction carré ne coupe pas la fonction exponentielle". Un petit dessin accompagne cette "<u>constatation</u>", mais il n'y a là aucune référence à des résultats antérieurs, aucune ébauche de justification ;
- "Pour $n = 3$, l'équation a deux solutions". Là aussi, petit dessin, et même absence de preuve ;
- "Donc la solution est $2 < n < 3$".

Et ébauche de démonstration :

" $x = n\ln x \quad n = \dfrac{x}{\ln x}$ ". Ce passage est noté "Faux". Oralement : "c'est une équation à deux inconnues".

Deuxième tentative :

" $e^x - n\ln x = 0 \qquad e^x = n\ln x \qquad n = \dfrac{e^x}{\ln x} \qquad n = e^x + \ln(-x)$"

On retrouve là les caractéristiques d'un travail assez particulier :

- sur le plan des références, Laurent ne semble retenir que les exposants positifs ;
- sur le plan des démonstrations, dans une situation de blocage, il n'y a ni étude de cas particuliers, ni retour à des problèmes proches déjà traités (comme le font Rachel et Caroline), mais une sorte de fuite en avant, de délire théorique qui finit par ne plus avoir qu'un rapport très lointain avec le cours... et le problème traité. En fait, cette partie de "démonstration" est perçue comme totalement étrangère. Mais plus généralement, c'est le cours de mathématiques qui est encore considéré comme extérieur, étrange, étranger...

On le voit aussi dans la correction du TP : la correction prise par Rachel ou Caroline est claire, réutilisable en cas de besoin. Celle de Laurent et Alexandre est aussi ordonnée et cohérente que leurs propres productions...

Christelle, type expérimentateur.

Observation minutée là aussi, qui révèle un travail très haché. Même la lecture de l'énoncé est interrompue par un appel au prof... Equi-répartition de phases (de longueur moyenne) de discussions dans le groupe, d'utilisation de la machine, de calcul.

Une idée de départ : il faut comparer les pentes pour x=1 (même idée que Guilhem). "Pour que la courbe d'une fonction puissance ne rencontre pas celle de e^x, il faut que la pente de sa tangente en 1 soit inférieure à e".

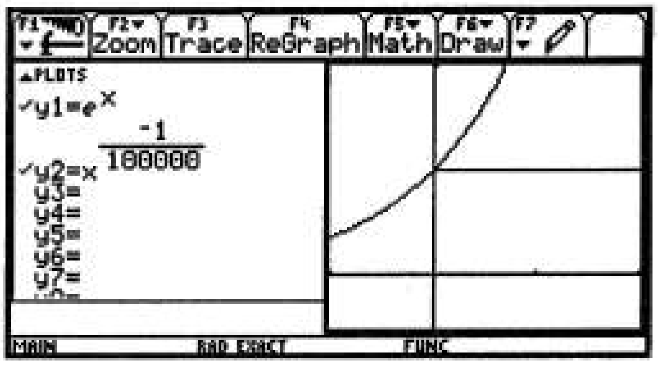
Puis validations partielles, avec des graphiques obtenus par la machine, et des calculs :

- pour n = 2, pas d'intersection (calculatrice), et détermination de l'équation de la tangente en 1 (calcul) : conjecture validée ;
- pour n = 3, intersection (calculatrice), et détermination de l'équation de la tangente en 1 (calcul) : conjecture validée ;

Le groupe envisage ensuite les exposants $(\frac{1}{n})$ (pas d'intersection), les exposants (-n), les exposants $(-\frac{1}{n})$ par simple observation graphique.

L'exposant $(-\frac{1}{100000})$ en particulier laisse perplexe : y a-t-il, ou non, intersection ?

Il y a alors une sorte de fuite en avant dans l'examen des cas : Fabienne suggère les fonctions $-x^n$, puis les fonctions polynômes.



Devant l'abondance des cas qui se présentent alors, formulation d'une question : qu'est-ce qu'une fonction puissance ? Interpellation du professeur, qui retourne la question. Réponse de Fabienne : "mais oui, on l'a vu en cours !"... Et reprise du TP.

Pour les exposants positifs : la conjecture est maintenue que le basculement se fait pour n = 2. Retour à l'observation de x^3 : "les deux fonctions e^x et x^3 sont croissantes, et ont même limite. Donc elles ne se coupent qu'une fois".

Le résultat du dernier TP passe à la trappe !

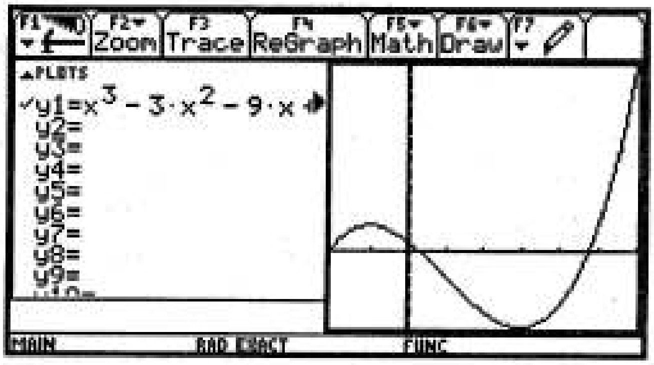
Enfin le cas des exposants négatifs est correctement traité, par variations et limites.

A nouveau les caractéristiques de ce groupe apparaissent assez clairement :

- grande faculté d'investigation (de nombreux cas de figure sont passés en revue, avec la préoccupation de recenser "même les cas tordus") ;
- tendance à manipuler d'abord les objets, avant de se poser la question de leur définition ;
- tendance à ne faire interagir que les informations du moment, c'est-à-dire récoltées pendant le TP. Ainsi, les résultats antérieurs, des TP précédents, ou du cours, ne sont pas toujours recherchés.
- tendance à se contenter de validations partielles, par "recoupement d'informations".

On arrive ici à la fin des TP "calculatrices graphiques". On pourra observer, avec le prochain TP, l'évolution des élèves, ou plutôt de leurs comportements, dans l'action !

Bilan du TP n°11



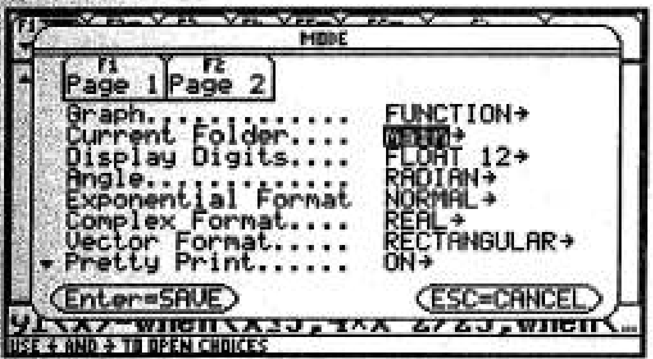
Il s'agit du premier TP traité avec les TI-92

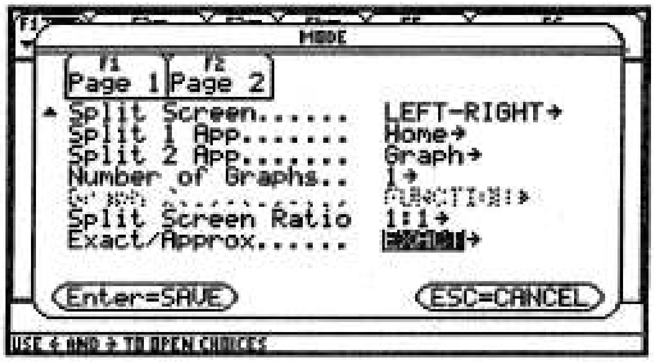
1.Le travail donné aux élèves

TP n°11 du Jeudi 21 Décembre

C'est le premier TP fait avec les TI-92. Le travail est donc assez guidé, beaucoup d'indications techniques sont données.
C'est la stratégie de l'immersion douce...

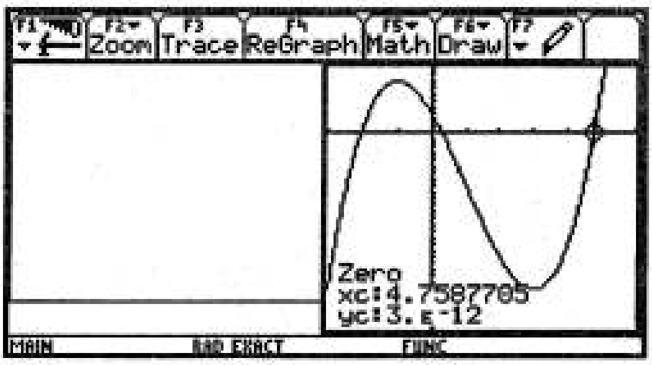
Régler d'abord le mode de fonctionnement de la calculatrice (touche "mode" en haut à droite) : cette touche est essentielle, en particulier pour l'organisation de l'écran (partagé en deux, ou non : split, ou full), pour l'affichage des nombres (combien de décimales disponibles : display digits), et surtout pour le mode de calcul (exact, ou approché). Vous devez obtenir les deux pages ci-dessous.



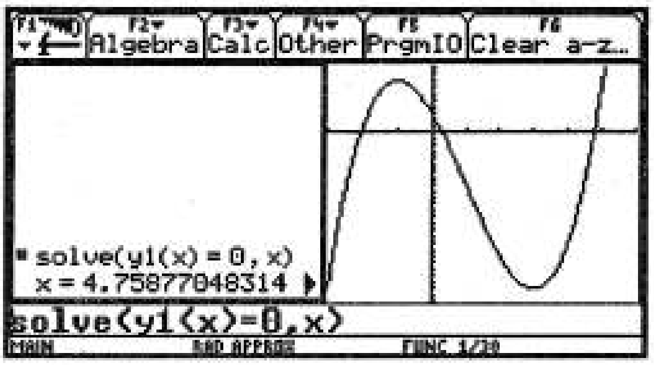


1. Rentrer dans le fichier de fonction (touche verte Y) en **Y1** la fonction f qui à x associe $x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ (cette fonction a été étudiée dans le contrôle n°3).

Choisissez une fenêtre (**Window**) qui permette d'obtenir l'allure de la courbe ci-contre.
En utilisant l'option Math de l'application graphique(F5), localiser les trois racines de l'équation $f(x) = 0$

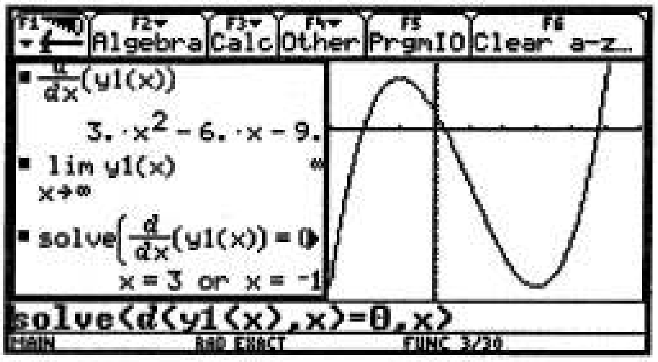


2. Repasser dans l'application initiale (**Home**).Utiliser alors l'option **solve** du menu Algebra pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, d'abord en calcul exact, puis en calcul approché.
(Attention, l'existence d'une petite flèche en fin de ligne indique qu'il y a d'autres résultats affichés, que l'on peut atteindre en se déplaçant avec le curseur)
Comparer les résultats obtenus dans la question 1 et la question 2.

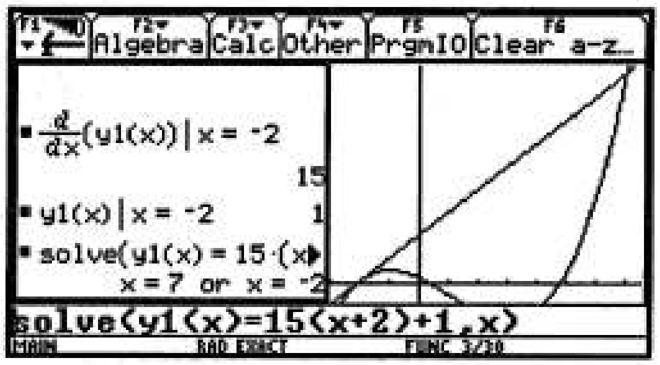


3. Repasser en mode calcul exact.
- Calculer alors la dérivée de la fonction f (menu calcul (F3), ou touche jaune, superposée à la touche 8 du clavier numérique. Syntaxe : d(y1(x), x)
- Calculer les limites de f en $+\infty$ ou $-\infty$. Syntaxe : limit(y1(x), x, ∞).
- Résoudre l'équation f ' (x) = 0. On peut recopier l'expression de f ', on utiliser à nouveau la touche de dérivation (voir écran ci-contre : attention à la syntaxe !).

L'écran garde les traces des calculs effectués.



4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2. Rentrer cette fonction en **Y2**. Etudier l'intersection de cette tangente avec la courbe. Changer la fenêtre graphique pour faire apparaître cette intersection.
Généralisation : déterminer l'équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse a. Etudier alors l'intersection de cette tangente avec la courbe. Conclusion ?



2.Le cadre du travail

Le texte du TP reprend pour partie l'énoncé d'un contrôle écrit donné en début d'année. Le sujet est classique, l'objectif n'est pas ici de réaliser une recherche, mais plutôt d'apprendre à fournir un travail "assisté" par la calculatrice.

Le thème

Intersection d'une courbe avec ses tangentes

La question problématique

La tangente coupe-t-elle toujours la cubique, même quand sa pente paraît beaucoup plus forte que ce que l'on peut voir de la cubique ?

Les objectifs pédagogiques.

En premier lieu une prise de contact avec l'outil. C'est pourquoi le travail donné est assez simple, pour permettre une immersion douce...
En deuxième lieu le développement des "visions larges". Ce n'est pas parce que une droite et une courbe semblent ne pas se couper qu'elles ne se coupent pas... Il faut y voir de plus près (c'est-à-dire ici de plus loin...).

3.Un bilan global.

Quelques remarques d'ordre général d'abord.

A propos de l'ambiance de travail.
Il règne dans la classe une certaine effervescence, due à la nouveauté du matériel. Ce qui induit des phénomènes de contagion beaucoup plus important que d'habitude, entre

les différents groupes ("tu fais ça comment, montre voir...", et une attitude moins distanciée des observateurs, qui interviennent plus directement dans les situations de blocage.

A propos de l'activité des binômes.

Tous les observateurs notent ainsi un investissement très fort des groupes. Même les groupes d'habitude peu productifs sont ici très actifs. Il s'agit là sans doute d'un effet d'émerveillement devant la nouveauté. On verra qu'il s'émoussera lors des TP suivants. On passera successivement, au cours de l'année, de l'enthousiasme ("c'est super, cette calculatrice sait tout faire !", à une certaine forme de désillusion, ou d'irritation ("elle me répond toujours Syntax Error!"), pour arriver enfin à une sorte de banalisation de l'objet.

A propos de la rédaction des rapports de recherche.

Mis à part les résultats écrits sur le cahier de TP (plus maigres que d'habitude), il n'apparaît aucun brouillon, aucune recherche papier/crayon, aucun résultat intermédiaire noté. Il y a là une différence nette avec les TP précédents réalisés avec les calculatrices graphiques. Cet effet d'une calculatrice, qui est en elle-même une sorte de "cahier de recherche" (avec la mémoire conservée des calculs à l'écran), sera difficile à contrôler.

A propos de la familiarisation avec la calculatrice.

La TI-92 avait été introduite dans la classe, quinze jours avant, sous sa forme rétroprojetable. Les élèves ont reçu du CRDP "leur" calculatrice deux jours avant [13] Il est frappant de voir que les élèves posent relativement peu de questions techniques aux observateurs au début du TP. Visiblement la machine a été utilisée à la maison, et les commandes "de base" sont connues. Ou plutôt les élèves imaginent les connaître [14]...

A propos de la "transposition" des calculatrices graphiques aux TI-92.

Toutes les connaissances qui relèvent du fenêtrage (Window, ou Range, Zoom, Trace) sont immédiatement réinvesties, les autres commandes graphiques (Zéros), le sont plus difficilement ; ceci peut s'expliquer de plusieurs façons :

- dans les précédents TP, on a surtout travaillé le réglage des fenêtres ;

- quelque soit le type de calculatrice graphique, la commande "Range", ou "Window", est à peu près la même. C'est aussi pour cela qu'elle était souvent évoquée dans les échanges entre élèves ;

- la TI-92 aussi a conservé la même structure que la plupart des calculatrices graphiques (une touche "Y", pour le fichier de fonctions, une touche "Window" pour le réglage de fenêtre, une touche "Graph" pour obtenir la représentation graphique, une commande "Trace" pour "se" déplacer sur la courbe);

- pour les autres commandes, il y a une petite différence d'étiquette ("Zero", à la place de"Root" par exemple), mais une petite différence d'adresse peut avoir de grandes conséquences, surtout quand on se trouve en territoire inconnu..., avec une langue que l'on ne maîtrise pas tout à fait (en fait deux niveaux de langue -l'anglais, et les mathématiques-...).

Dans un premier temps, ceux des élèves qui étaient très habiles avec leur calculatrice graphique vont investir uniquement les applications semblables sur la TI-92. Ainsi Damien utilise la commande "Tangente" du Menu Calcul de l'application graphique pour déterminer l'équation de la tangente demandée.

Il trouve : $y = 14,999\,994x + 30,999\,989$ (au lieu de $y = 15x + 31$), ce qui le dispense d'utiliser les nouvelles commandes de la TI-92 ! De même, pour déterminer l'intersection de la courbe avec la tangente, il utilise un Zoom (à 7 reprises, indique-t-il !)... tout cela pour ne trouver comme intersection courbe/tangente... que le point de contact, ce qui était tout de même attendu !

---

13 Voit Volume 1, "côté cours", page 13, le chapitre relatif à l'introduction de la machine dans la classe.

14 Voir sur ce point le mémoire IUFM de Marjorie Boutin "Introduction de calculatrices graphiques en seconde, processus de familiarisation et processus de contrôle", publié dans [Bernard et alii, 1996].

A propos du contrôle des nouveautés justement :

- le partage en 2 de la fenêtre[15], pour avoir accès à deux applications, est fait sans trop de problèmes techniques (sauf que les élèves ne savent pas toujours quelle est la fenêtre qui est activée...). Mais il n'y a pas vraiment d'interaction entre les deux fenêtres, ce qui apparaît assez naturel, dans une phase de découverte !

- à propos du calcul formel, la "logique" des arguments demandés par la machine n'est pas nettement perçue. Cela ne tient sans doute pas seulement à l'anglais utilisé : pour Solve par exemple, les élèves oublient souvent " = 0". Il y a derrière cette difficulté deux phénomènes : une compréhension vague de ce qu'est une résolution d'équation, et une illusion que la machine, vues ses capacités, peut comprendre des messages incomplets. Les élèves réaliseront rapidement l'intransigeance de la machine sur ce point...

- c'est sur la distinction calcul exact/calcul approché qu'il y a le plus de problèmes, de deux points de vue :

- les élèves ne voient pas l'importance de la précision d'un résultat approché. La plupart du temps, ils ne relèvent qu'une ou deux décimales dans les résultats donnés par la machine. Ainsi, ils ne remarquent pas que l'on gagne de la précision quand on passe de l'application graphique à l'application initiale (alors que la question était précisément posée par l'énoncé) ;

- la notion même de calcul exact est assez floue. Ainsi Vincent écrit : "la valeur approchée de x_2 est 0, 305 407 289 3, sa valeur exacte est $\frac{3\,054\,072\,893}{10\,000\,000\,000}$ ", puis (suite à une discussion avec le voisin...) raye "valeur exacte".

Cette difficulté est renforcée par le fait que, même quand on travaille dans l'application graphique (donc en valeur approchée), l'écran conserve un bandeau d'état indiquant "valeur exacte". C'est d'ailleurs sur ce fait que Damien se fonde pour indiquer que l'équation de la tangente trouvée (voir ci-dessus) est une équation exacte...

C'est probablement le fait le plus saillant de cette première séance avec les TI-92. Le travail avec ces machines va confronter en permanence les élèves avec la question de la nature des résultats trouvés : exacts, ou approchées ?

Voyons maintenant les résultats des différents groupes.

Tous les élèves ont su utiliser les commandes donnant limites et dérivée. C'est certainement ce qui apparaît le plus spectaculaire aux élèves, ce qui explique leur application à réussir cette manipulation élémentaire. On notera dans le tableau ci-dessous les réponses aux questions suivantes :

- les élèves ont-ils utilisé pour la résolution graphique "Trace" (commande habituelle pour eux, mais plus longue, et plus imprécise), "Zoom" (commande aussi connue), ou la commande "Zéro" (commande nouvelle) ? (colonne Comm) ;

- indiquent-ils qu'il s'agit de valeurs approchées (avec un symbole du type ~ ou ≃), ou indiquent-ils une égalité entre les nombres trouvés, et les racines de l'équation ? (colonne Approc) ;

- donnent-ils pour les valeurs trouvées toute la précision obtenue (on notera "max"), ou se contentent-ils de quelques décimales (on notera alors le nombre de décimales données) ? (colonne Précis) ;

- remarquent-ils que l'on bénéficie de plus de précision dans l'application initiale que dans l'application graphique ? (colonne Compa) ;

- arrivent-ils à trouver l'équation de la tangente en -2 ? (colonne Equat)

- arrivent-ils à déterminer l'intersection de la courbe et de sa tangente ? (colonne Inters.) ;

---

[15] Ce partage existait sur certaines calculatrices graphiques (TI-82 par exemple), mais n'était pas trop utilisé dans la pratique.

- arrivent-ils à déterminer une fenêtre adéquate pour visualiser l'intersection ?(colonne Fenêtr)
- arrivent-ils à déterminer l'équation d'une tangente en a ? (colonne TanGén) ;
- arrivent-ils à déterminer l'intersection avec la courbe ? (colonne EquGén) ;

Petit récapitulatif, donc.

Groupe	comm	approc	précis	compa	équat	inters	fenêtr	tan.gén	équ.gén
1	Zero	max	=	+ précis	juste				
2	Zero	max	=	+ précis	juste			juste	
3	Zero	max	=	mêmes					
4	Zero	2 déc	≃		fausse				
5	Zero	max	=	mêmes	approx	approx			
5bis	Trace	3 déc	=	mêmes	fausse				
6	Zero	max	=	mêmes	fausse	fausse		juste	
7	Trace	2 déc	=	mêmes					
8	Zero	max	=	+ précis	juste		?		
9	Zero	max	=	+ précis	juste	juste	oui		
10	Zero	2 déc	=	mêmes	juste				
11	Zero	max	≃	+ précis	juste				
12	Zero	max	=	mêmes	fausse				
13	Zero	2 déc	≃	mêmes	juste				
14	Zero	max	=	+ précis	juste	juste	oui		
15	Zero	max	=	+ précis	début				
16	Zero	2 déc	=	+ précis	fausse				

Quelques commentaires.

Une majorité de groupes utilisent la commande Zero pour la localisation graphique des racines. Mais, la plupart de temps, les premières commandes sollicitées ont été Trace et Zoom. Ce n'est que dans un deuxième temps que, par contagion entre groupes, la commande Zero a été utilisée.

6 groupes sur 17 ne relèvent qu'une partie de l'information donnée par la machine. Pour la plupart des élèves, le fait de donner une valeur approchée dispense de s'intéresser à la qualité de l'approximation : ainsi, pour un groupe sur deux, les valeurs approchées données semblent les mêmes par l'application graphique, et par "Solve", alors que, dans le deuxième cas, on dispose de 4 décimales supplémentaires...

La plupart des groupes indiquent un signe" égale" entre les racines de l'équation et les nombres trouvés à partir de l'application graphique, ou à partir de la commande Solve. Ceci n'implique pas nécessairement qu'il s'agisse d'une confusion entre valeur exacte et valeur approchée (des élèves interrogés disent : "j'ai voulu dire que les valeurs approchées étaient égales à..."). Cela indique toutefois une négligence d'écriture.

Pour deux groupes, l'erreur est cependant manifeste : Patrice et Alice pensent que, dans l'application graphique, il s'agit de valeurs approchées, alors que dans l'application initiale, il s'agit de valeurs exactes.

On notera qu'un groupe sur deux (seulement) détermine l'équation de la tangente en -2... Deux explications possibles de cette faiblesse :

- beaucoup d'élèves ont utilisé l'heure pour explorer les commandes de la calculatrice ;
- établir l'équation de la tangente nécessitait de faire un pas de côté, et de récupérer un résultat du cours. Beaucoup d'élèves, enfermés dans leurs manipulations, n'en ont pas été capables.

On notera enfin qu'aucun élève n'est arrivé en fin de TP, où la puissance du logiciel de calcul formel intervenait vraiment.

La correction sera l'occasion d'y revenir utilement (Volume 1, page 147).

4.TP et typologie.

Ce TP était important, pour observer les premiers symptômes d'évolution des différents types, liée à l'introduction de nouveaux matériels.

On a déjà remarqué le travail de Damien, qui avait une bonne maîtrise de l'outil graphique : dans un premier temps, il va manifester son attachement à cet outil en restant confiné dans l'application graphique de la TI-92 (c'est d'ailleurs un des seuls élèves qui apportera régulièrement en interrogation écrite son ancienne calculatrice graphique - au cas où-). C'est après tout une réaction naturelle : on appelle cela "ne pas lâcher la proie pour l'ombre"...

Qu'en est-il des élèves dont nous avons suivi l'évolution depuis le premier TP (ou presque) ?

Guilhem, type théorique.

Il note "en calcul exact, on obtient une équation $x(x^2 - 3x - 9) = -3$, qui, résolue en valeur approchée, donne les trois solutions suivantes (qui sont écrites avec toute la précision disponible). Ces solutions sont plus précises en calcul approché que sur le graphique. Car, sur le graphique, la calculatrice a déjà des mémoires prises".

Puis l'équation de la tangente, juste, est donnée (rappel du résultat de cours, puis application au contexte).

L'attitude de Guilhem pendant le TP témoigne d'un intérêt pour la TI-92 beaucoup plus important que pour les calculatrices graphiques. On constate une réflexion (c'est le seul élève qui se penchera sur la question) sur une explication du gain de précision dans l'application initiale ("sur le graphique, la calculatrice a déjà des mémoires prises"). C'est une nouvelle manifestation d'une attitude caractéristique : le recul sur les résultats obtenus, la recherche des racines des phénomènes observés.

La calculatrice intéresse ici comme nouveau "champ de problèmes".

Michaël, type rationnel.

Là aussi, un intérêt beaucoup plus important pour l'outil de calcul que lors des précédents TP. Le rapport commence par : "on utilise la calculatrice. Elle marche bien".

En fait, c'est l'application initiale qui intéresse : de façon tout à fait significative, toutes les questions relatives au graphique ne sont pas traitées, en tous cas pas évoquées dans le rapport. Les fenêtres demandées (question 1 et 4) ne sont pas données. Par contre l'équation générale d'une tangente à la courbe est donnée.

La calculatrice intéresse ici comme auxiliaire de calcul performant.

Caroline, type scolaire.

Caroline et Rachel utilisent la calculatrice avec beaucoup de concentration : déjà l'utilisation des calculatrices graphiques n'était pas naturelle... La rédaction du rapport est très détaillée : les commandes activées sont citées, les résultats sont reportés sous la forme mathématique usuelle, et pas sous la forme d'entrée dans la calculatrice (elles notent $f'(x)$, et pas d(Y1(x), x) ...).

Mais il n'y a pas de recul sur les résultats obtenus :

"A l'aide du"solve" nous avons trouvé en calcul exact $x(x^2 - 3x - 9) = -3$".

Pendant le TP, on a pu percevoir la perplexité du binôme : ceci pouvait-il être accepté comme résolution légitime ? Dans le doute, le résultat est recopié, sans commentaires...

Toujours le même manque de recul : "on retrouve dans l'application initiale les racines obtenues à la question 1 par la résolution graphique". L'augmentation de précision n'est pas vue.

Ensuite, les calculs de limites, de dérivée sont faits avec la machine. Mais, à chaque fois, Caroline observe : "la machine donne le résultat exact !". C'est-à-dire qu'il y a une vérification implicite.

L'équation de la tangente est déterminée correctement, par recours à la formule du cours, et calcul à la main des valeurs de la fonction et de sa dérivée au point donné.

On le voit, le contexte reste ici le cours.

La calculatrice intéresse ici comme tuteur, outil de vérification des résultats.

Laurent, type bricoleur.

Le même manque de recul par rapport aux résultats affichés par la calculatrice se manifeste (le groupe ne remarque pas que l'on gagne en précision avec l'application initiale par exemple). Mais, à la différence du groupe précédent, le contexte du cours disparaît à peu près complètement :

- l'écriture mathématique usuelle disparaît, au profit de l'écriture des commandes effectuées : d(Y1(x), x), lim(Y1(x), x, ∞) ;
- il n'y a aucun croisement avec les résultats attendus ;
- on assiste au contraire à une exploration "tous azimuts" ("calcule la limite en 0, la limite en 1000, elle sait vraiment tout faire"...)
- logique, l'équation de la tangente est écrite, mais tout est faux dans l'application au point (-2).

La calculatrice intéresse ici comme substitut à l'apprentissage, comme "machine à tout faire".

Fabienne, type expérimentateur.

Beaucoup d'intérêt pour la nouvelle calculatrice, d'autant que ce groupe a l'habitude d'aller chercher beaucoup d'informations, et de croiser celles-ci. La TI-92 apparaît tout de suite comme un outil privilégié pour ce type de travail.

Première question. La fenêtre est déterminée "grâce à la courbe du polycop" : Christelle compte les graduations (oralement : "pour les y positifs, cela fait à peu près 10, pour les y négatifs, cela fait à peu près trois fois les y positif donc 30"). Cette utilisation de l'énoncé est rare lors de ce TP, à cause de l'attrait des élèves pour la TI-92) ! L'introduction d'un nouvel outil n'empêche pas ce groupe d'aller chercher l'information... où elle se trouve !

Deuxième question. Fabienne donne une explication de l'impossibilité de résoudre en valeurs exactes : "la calculatrice ne résout pas, elle factorise l'équation, car trop dur !". Puis elle observe le gain de précision avec l'application initiale.

Troisième question. L'équation de la tangente est correctement établie, par utilisation du résultat du cours, et calcul à la main. L'intersection courbe/tangente est faite par utilisation de la commande "solve".

Enfin, la fenêtre adéquate est établie "en prenant Ymax > f(7) = 136. Donc Ymax = 150". C'est-à-dire qu'il n'y a pas de recherche aléatoire, mais utilisation des résultats antérieurs pour sélectionner la fenêtre adéquate. Encore un croisement d'informations !

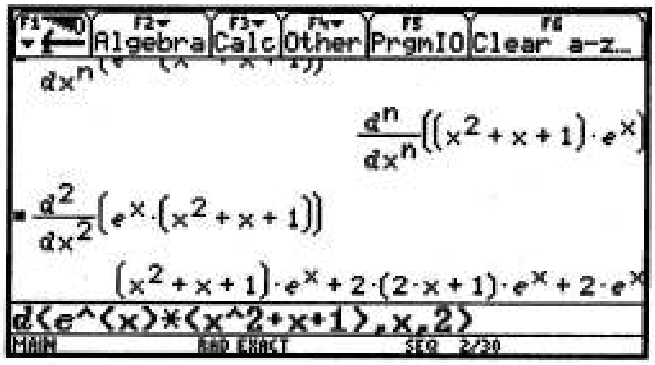
La calculatrice intéresse ici comme outil d'investigation.

Ces remarques sur les réactions des différents types d'élèves sont à considérer ici avec prudence :

- il s'agit d'un premier TP. L'effet "du jouet que l'on vient de recevoir" est important.
- il faut tenir compte aussi du fait que l'énoncé est relativement simple : il est en effet aisé de traiter avec un outil puissant un problème conçu pour être traité sans cette aide. Les choses évolueront quand il s'agira de traiter des problèmes construits spécialement pour la TI-92.

Ce sera le cas pour le prochaine TP, n°12.

Bilan du TP n°12



TP traité avec les TI-92.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°12

1. Déterminer la dérivée 1ère, 2ème, 3ème...nième de la fonction f, qui à x associe $f(x) = e^x.(x^2+x+1)$.
2. Généralisation : pouvez-vous déterminer la dérivée 1ère, 2ème, 3ème...nième de la fonction g, qui à x associe $g(x) = e^x.(ax^2+bx+c)$?

Indications :

Ecriture mathématique :

La dérivée nième de f est notée $f^{(n)}$ (les parenthèses sont indispensables, pour ne pas confondre dérivée nième, et puissance nième) ;

Ecriture TI92 :

- ne pas oublier de vider les mémoires numériques avant le début du TP (Commande F6 dans l'application initiale), pour ne pas laisser traîner des contenus divers dans les mémoires a, b et c, utilisées ici ;
- ne pas oublier le signe x ("multiplié") dans le calcul formel : ainsi, pour dériver f, il faut taper le signe "multiplié" entre e^x et la parenthèse du polynôme ;
- pour obtenir la dérivée nième d'une fonction f avec la TI92, la syntaxe est d(f(x), x, n), n étant nécessairement un nombre entier ;
- on peut obtenir si l'on veut une forme factorisée de la dérivée en utilisant la commande factor du Menu Algebra, dans l'application initiale (Home) ;

Cahier de recherche :

- ne pas oublier : sur la page de gauche, les recherches, les copies d'écran, la syntaxe TI-92, le brouillon... sur la page de droite la rédaction du rapport.
- noter scrupuleusement toutes les commandes effectuées, même celles qui n'ont pas donné de résultat, ou qui n'ont pas donné le résultat attendu.

2.Le cadre du travail

Le thème.

Dérivées successives de fonctions de référence (exponentielle et polynômes).

Les questions problématiques.

La calculatrice refuse de donner une formule pour la dérivée nième de la fonction.
Comment reformuler la, ou les, questions, permettant de découvrir la réponse ?
Une multiplicité d'observations concordantes vaut-elle preuve ?

Les objectifs pédagogiques.

Il s'agit là d'un premier travail de recherche avec un outil de calcul formel.

Il faut donc combiner recherche d'informations, organisation de celles-ci, recherche de régularités, conjecture de résultat général, réfutation éventuelle, preuve générale (objectif méthodologique).
Sur le plan mathématique, l'occasion est bonne pour reprendre le raisonnement par récurrence.

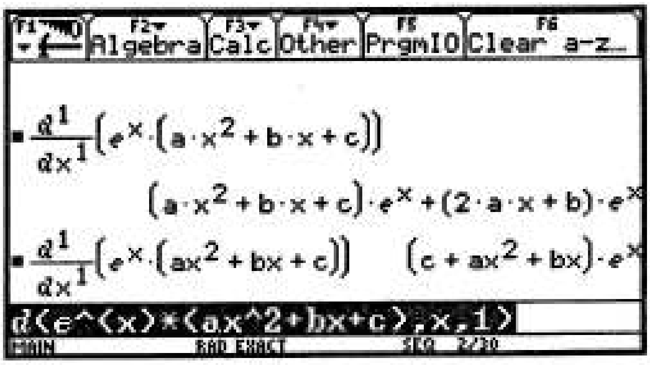
3.Le bilan global.

Quelques remarques générales.

Sur "l'ambiance générale".
Il s'agit là du premier vrai travail de recherche "assisté par TI-92". Tous les observateurs constatent une bonne maîtrise de la machine (en général), et un bon investissement dans la recherche.

Sur les premières réactions des élèves face aux "compétences" de la machine.
On distingue deux types de réactions, opposées :
- au début du TP, les élèves sont très étonnés que la calculatrice refuse de donner la dérivée nième, et se contente de renvoyer la question en forme de réponse. Surprise générale : comment une machine aussi performante peut-elle refuser de donner une telle réponse ? Certains élèves, imaginant une erreur dans l'entrée de la question, la reformulent. D'autres passent en calcul approché : l'illusion, issue de la résolution des équations, est que, si on ne peut pas avoir la valeur exacte d'un objet, on peut toujours en disposer d'une valeur approchée...
- en cours de TP, les élèves sont assez impressionnés que la calculatrice dérive aussi des expressions contenant des paramètres (a, b et c). Une certaine inquiétude s'exprime d'ailleurs chez certains élèves. Ainsi Jérôme, qui a redoublé 2 fois la Terminale, dit : "au moins, sans machine, je pouvais faire le calcul de la dérivée. Si la machine le fait, je n'aurais plus rien à faire dans un problème...". Une sorte de crainte de "concurrence déloyale", qu'il faudra apaiser en assurant une réelle complémentarité entre calculatrice, et réflexion personnelle, et ceci pour tous les élèves. On verra que c'est plus facile à dire qu'à faire...

Sur la maîtrise de la syntaxe.
On peut repérer des erreurs à deux niveaux :
- un problème de parenthésage. La plupart des élèves repèrent assez facilement d'éventuelles erreurs d'entrée grâce au retour à l'écran des formules (l'écriture "Pretty Print", qui sera vite identifiée comme un outil de contrôle fondamental par les élèves). Un seul élève, Julien, "scolaire faible", traîne pendant une demi-heure une erreur de syntaxe non repérée, et qui débouche sur des réponses qu'il ne comprend pas. Il a rentré en effet au départ $e^{x^2} + x + 1$... On verra que ce type d'erreur est une cause de perturbation considérable pour ces élèves, en particulier en situation "d'interrogations écrites" : on rentre de façon incorrecte une expression, que la calculatrice traite à sa façon, et on n'arrive pas à analyser la réponse de la machine... Résultat : perte de temps, et calculs faux...
- non respect des régles d'écriture du logiciel de calcul formel. Ainsi Alice (groupe 9), est bloquée au début de la deuxième question parce que la calculatrice renvoie une réponse étonnante pour la dérivée de g : en effet, elle a oublié de mettre un signe "multiplié" entre a et x, ce qui fait que le logiciel interprète (ax) comme une nouvelle variable, qui n'intervient pas dans la dérivation (puisque on dérive par rapport à la variable x). On voit ci-dessous les réponses de la machine à la question correctement formulée, puis à la question incorrectement formulée. Les différences de notation à l'écran (la présence, ou non, du point entre a et x) sont minces. On comprend les difficultés des élèves, d'autant que l'idée même d'exprimer une fonction de plusieurs variables ne leur est pas très naturelle....



On notera dans le tableau récapitulatif ci-dessous les éléments suivants :
- y a-t-il eu calcul de dérivée "à la main" ?
- la formule générale a-t-elle été conjecturée ?
- y a-t-il eu preuve de cette formule, et si oui de quel type ?
- y a-t-il eu généralisation à $e^x.(ax^2 + bx + c)$?

Groupes	Calc "main"	Conjecture	Preuve	Généralisation
Groupe 1	Oui	Début		
Groupe 2		Oui	Récurrence	Début
Groupe 4		Oui		Fausse
Groupe 5	Oui	Oui	Récurrence	
Groupe 5 bis	Oui	Oui	Analogie	
Groupe 6	Oui	Oui	Récurrence	
Groupe 7		Oui	Exemples	Juste
Groupe 8		Oui	Récurrence	Juste
Groupe 9	Oui	Oui	Exemples	?
Groupe 10		Oui	Exemples	Juste
Groupe 11	Oui	Oui	Récurrence	Juste
Groupe 12	Oui	Oui	Récurrence	Juste
Groupe 13	Oui			
Groupe 14	Oui	Oui	Récurrence	Juste
Groupe 15		Oui	Exemples	
Groupe 16		Oui	Exemples	Juste

<u>Quelques remarques sur ce tableau.</u>

<u>D'abord sur ce qui n'y est pas...</u>
Il n'a pas été compté le nombre de dérivées calculées par les élèves avec la TI-92 avant d'avoir une idée de la formule générale. Il aurait fallu pour cela faire des copies d'écran des différentes machines, ou alors qu'il y ait un observateur derrière chaque élève... Cependant le croisement des observations générales des groupes avec des entretiens informels avec les élèves, et les rapports de recherche, laisse penser qu'il y a deux pôles :

- les élèves de type scolaire, ou théorique, accumulent peu de résultats issus de la calculatrice, et ce pour des raisons différentes : les élèves de type théorique aiment bien considérer chaque résultat pour lui-même, en extraire la "substantifique moëlle". Les élèves scolaires ont leur mémoire de travail suffisamment encombrée par toutes les contraintes de gestion de la situation, pour pouvoir stocker beaucoup d'informations nouvelles ;

- à l'autre bout de la chaîne, on trouve les élèves bricoleurs, ou expérimentateurs, qui calculent beaucoup de dérivées successives, mais pour une utilisation différente de l'information stockée : les élèves expérimentateurs croisent et entrecroisent tous les résultats, alors que pour les élèves bricoleurs une information chasse l'autre. Ainsi, pour les élèves expérimentateurs, la formule générale émerge lentement d'une succession de conjectures partielles, refutées ou confirmées, alors que pour les élèves bricoleurs cette formule générale surgit brusquement (parfois par hasard - c'est à dire par une successions d'opérations mentales non formulables explicitement, d'autrefois par contagion du groupe voisin...) ;

- intermédiaire entre ces deux pôles, on trouve les élèves rationnels, qui maîtrisent souvent assez bien l'économie de résolution d'un problème.

Le calcul sur papier des résultats que la machine donne par ailleurs peut correspondre à des préoccupations différentes :

- pour des élèves de type scolaire, cela découle directement de ce qui est identifié depuis longtemps comme contrat intangible. Un calcul justifié est un calcul fait à la main ;
- pour des élèves de type expérimentateur, cela correspond à la nécessité d'accumuler, à fin de comparaison, le maximum d'informations. Ainsi Damien, pour la démonstration de la récurrence, fait le calcul à la main de la "dérivée de la dérivée nième", et se trompe. Il fait le calcul à la machine, repère l'erreur, et refait le calcul à la main. Fabienne fait la même chose, dans l'autre sens (elle avait mal rentré une fonction, d'où erreur de dérivée, elle fait le calcul à la main, et repère l'erreur) ;
- pour des élèves de type "théorique", cela correspond au besoin de comprendre "comment les choses se construisent" (Guilhem).

La nécessité de la preuve de la conjecture n'était pas évidente...

La dynamique du TP pouvait être en effet du type "chasse au trésor". L'objectif était alors de trouver une cohérence à tous les résultats donnés par la machine, sans qu'il n'apparaisse nécessaire de prouver la validité générale de la formule "qui marche". D'autant que les élèves n'ont pas encore l'habitude de la "dialectique" conjecture/preuve. On voit d'ailleurs dans le tableau précédent tous les degrés possibles dans "le besoin de preuve" :

- pour certains élèves, le problème de la preuve ne se pose pas ;
- pour d'autres élèves, la preuve est apportée par le fait que la formule convient pour tous les exemples qu'on a pu choisir (Karen : "ça marche même pour n = 200!", Hakim :"ça marche pour n'importe quel n... la preuve ? Donner moi le n que vous voulez, et vous allez voir !"). C'est la preuve "générique, ou cruciale" [Balacheff 1987] ;
- pour d'autres élèves, la conjecture est vérifiée, parce que ça leur rappelle une situation analogue (On reparlera ci-dessous de l'analogie, avec le travail de Cécile) ;
- pour d'autres enfin, il faut une preuve solide "du type de celle que l'on fait en cours".

Signalons que pour aucun élève la récurrence n'est venue naturellement. Il y a eu un effet inducteur des observateurs (voir le travail de Michaël ci-dessous), qui s'est assez vite répandu parmi les élèves qui étaient "en attente de preuve"...

4.TP et typologie.

Un élève théorique, Guilhem, groupe 1... suivie d'une deuxième, Cécile, groupe 5 bis

Guilhem recherche avec la calculatrice les trois premières dérivées de f (sans utiliser la commande Factor), les note sur papier, factorise "à la main" les expressions obtenues, puis réfléchit pendant un long moment sur le rapport existant entre les coefficients successifs. De nombreuses tentatives sont faites pour trouver une cohérence (machine éteinte) : division des polynômes, suites... Résultat : seuls les coefficients de x^2 et de x sont trouvés, échec pour le coefficient constant.

Un élément nouveau interfère ici, non lié à l'expérimentation en cours. Guilhem se marginalise scolairement, et envisage à ce moment de l'année de quitter le lycée. Son travail de TP s'en ressent, comme on vient de le constater (même si c'est dans ce type d'activité qu'il est encore le plus présent...)

Pour illustrer le type de travail dont il était jusqu'à présent le prototype, une autre actrice entre en scène, Cécile. Cette élève (groupe 5 bis) s'était au début de l'année assez peu investie dans le travail de recherche, à la fois peu passionnée par les calculatrices graphiques, et assez sceptique sur l'utilité des TP. Peu à peu son attitude s'affirme comme étant assez représentative aussi d'un type "théorique".

Pour ce TP, elle commence par faire trois dérivées à la main, puis obtient la confirmation des résultats avec la machine. Elle observe une régularité : "on suppose qu'il existe une régularité dans les résultats : on anticipe une quatrième dérivée". Elle donne alors, à l'ordre 4, la traduction de la formule conjecturée : "on vérifie à la machine. Le résultat est confirmé. Explication de l'anticipation :"

Elle présente alors le tableau des premières dérivées, avec un jeu de couleurs qui montre comment on passe d'une ligne à l'autre, par addition des coefficients : "il suffit de multiplier le coefficient du 2ème terme avec celui de la ligne précédente pour obtenir le coefficient du troisième terme (ressemblance avec le triangle de Pascal)".

Enfin, pour solde de tout compte, la formule est vérifiée à l'ordre 100.

On le voit bien, la "preuve" repose sur la mise en évidence d'une "loi de passage" d'une ligne à l'autre, puis sur l'évocation d'une situation de cours du même type qui avait permis de passer d'une récurrence à une expression générale. C'est cette analogie qui permet de conclure à l'existence d'une formule générale, qu'il suffit de vérifier à un ordre quelconque. Il y a là une sorte de combinaison de "l'expérience cruciale", dont on a parlé tout à l'heure, et de "l'expérience mentale" dont parle Lakatos [Lakatos, 1974].

Un élève rationnel, Michaël, groupe 2.

Fait notable : alors que Michaël utilisait très peu les calculatrices graphiques, il fait ici une utilisation intensive de la TI-92 (calcul de dérivées, factorisations). Et aucune dérivée n'est calculée à la main pour l'établissement de la conjecture, ce qui est une attitude notablement différente de son travail dans les TP antérieurs.

Il fait apparaître sur l'écran (sans recopier les résultats sur papier) suffisamment de dérivées pour conjecturer le résultat (la commande Factor est utilisée [16], mais il semble ne pas avoir été gêné par l'obstacle des premières factorisations "parasites"). La conjecture est alors écrite sur le papier : $f^{(n)}(x) = e^x.(x^2 + (2n+1).x + n^2 +1)$. Il pose alors le problème de la validation : comment le prouver ? Je lui suggère (après un long moment de réflexion) : "quel est le type de démonstration que l'on met en oeuvre quand on a l'idée d'une propriété générale, indiciée sur n, et vraie "au départ" ? C'est le mot "départ"qui est déclenchant : la récurrence. La démonstration est faite, à la main.

Mais l'origine de la formule générale, la "loi de formation" (par exemple "le coefficient de x est à chaque fois augmenté du double du coefficient de x^2"), n'ont pas été vues ce qui fait que le résultat pour f n'est pas transféré à la fonction g.

Une élève scolaire, Caroline, groupe 13.

Le calcul est fait à la machine pour les trois premières dérivées. Mais la forme factorisée ne permet pas de deviner une régularité :

$f'(x) = e^x.(x + 1)(x + 2)$; $f''(x) = e^x.(x^2 + 5x +5)$; $f'''(x) = e^x.(x + 2)(x + 5)$.

Le calcul est fait alors à la main, et aboutit au résultat développé.

Première vérification faite : "le calcul à la main donne le même résultat".

---

[16] Il semble que l'utilisation de commandes "superposées" (ici Factor (Dérivée)) soit caractéristique d'une bonne maîtrise du logiciel.

Puis Caroline choisit la forme qui semble la intéressante pour permettre des rapprochements, et organise l'information disponible :

$f'(x) = e^x.(x^2 + 3x + 2)$;
$f''(x) = e^x.(x^2 + 5x + 5)$;
$f'''(x) = e^x.(x^2 + 7x + 10)$;
$f''''(x) = e^x.(x^2 + 9x + 17)$.

"On remarque x^2 ne change jamais, que le deuxième terme de la somme augmente de deux en deux, que le 3ème terme est la somme du nombre du rang précédent plus la valeur numérique du 2ème terme du rang précédent".

La formule générale n'est pas trouvée, mais il y a un premier travail d'organisation de l'information, et de mise en évidence de régularités, qui témoigne d'un investissement certain dans la recherche. Le handicap de ce type d'élève est ici la lenteur à produire, et à croiser l'information.

Un élève bricoleur, Laurent, groupe 4.

Il utilise toutes les commandes indiquées (factor, et dérivation nième). La rédaction du rapport consiste à décrire les manipulations de la machine, sans que ceci semble avoir tout le temps un sens :

"F3, ensuite dérivée. Nous marquons ensuite f(x), puis la constante (!) x, et enfin Enter, puis Factor".

Par répétition de dérivation (beaucoup de dérivées calculées), la formule générale, sous sa forme factorisée, est pressentie, elle apparaît comme l'aboutissement des cas particuliers envisagés. On lit dans le rapport la dérivée première, seconde, troisième, puis centième, et enfin nième. Et la question s'arrête là. Aucune évocation de preuve.

Caractéristique du bricolage, la "généralisation" est faite pour la question 2 :

Laurent passe de $f^{(n)}(x) = e^x.(x^2 + (2n+1).x + n^2 + 1)$, obtenue à la question 1, à $g^{(n)}(x) = e^x.(ax^2 + (2n+b).x + n^2 + c)$. Il s'agit bien d'une généralisation mécanique, qui ne correspond pas à ce que donne la machine. Mais l'élève n'a pas accordé suffisamment d'attention au croisement entre les résultats de la machine et la formule espérée. Il fallait que cette formule soit, et elle fut...

Ce travail repose sur l'utilisation intensive de la calculatrice, qui débouche sur des résultats partiels. Mais ceux-ci ne sont pas liés aux références mathématiques (et contribuent donc assez peu à leur construction), et les résultats partiels eux-mêmes ne sont pas nécessairement croisés entre eux.

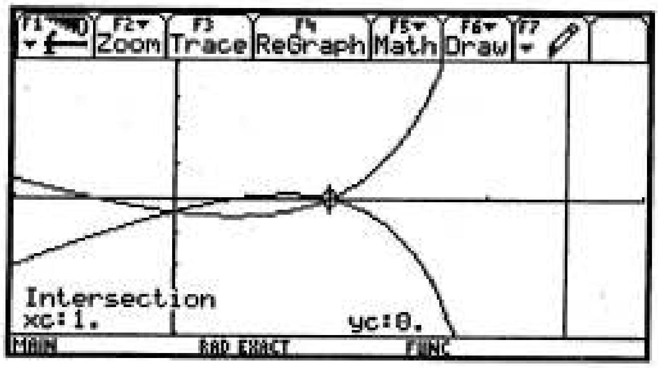
Une élève expérimentatrice, Fabienne, groupe 14.

Une bonne coopération est instaurée dans le groupe. L'une fait des dérivées à la main, l'autre observe les résultats machine. La commande Factor n'est pas utilisée, les dérivées sont factorisées "à la main". Par combinaison des deux démarches, le résultat général est imaginé. Il y a le sentiment qu'il faut une démonstration générale, que de nombreuses vérifications ne suffisent pas. Mais la récurrence n'est pas envisagée. Une fois suggérée, elle est réalisée convenablement.

Ce qui est remarquable aussi, c'est que la formule générale obtenue pour la fonction f est rapidement transférée à la fonction g, après quelques observations. Ce qui caractérise ce travail semble bien être l'aptitude à tranférer des résultats, de façon relativement contrôlée, d'une situation à une situation proche (ce que Michaël n'a pas su faire, et que Laurent a fait, mais en se trompant ...).

Finalement, ce TP aura été un des plus réussis de l'année : il combinait la stimulation de la recherche, la possibilité de trouver des résultats au moins partiels assez facilement, l'interrogation sur la généralisation possible des résultats trouvés. La TI-92 a réussi là pour les élèves son examen de passage...

Bilan du TP n°13



TP traité avec les TI-92.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°13

On veut étudier les courbes des fonctions f_m, qui à x associent :

$$f_m : x \to f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2).x + 2}{2x - 5}$$

On note C_m la représentation graphique de la fonction f_m.
- y a-t-il des points communs à toutes les courbes C_m ? Lesquels ?
- y a-t-il des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m n'admet aucun extremum ? Lesquelles ?
- choisir une valeur de m pour laquelle la fonction f_m admet des extremums. Faire alors l'étude complète de cette fonction (sens de variation, "points cruciaux", asymptotes...), se terminant par un graphique précis et soigné.

Indications relatives à la TI92
- penser à effacer les mémoires numériques avant de commencer le travail, pour ne pas laisser dans la mémoire m des valeurs parasites ;
- penser à noter le signe "multiplié" entre deux lettres (par exemple entre m et x^2) ;
- on pourra utiliser, pour obtenir une autre forme de la fonction, la commande propFrac du menu Algebra dans l'application initiale : celle-ci, ici, opère la division du numérateur par le dénominateur, et donne ainsi le résultat sous la forme $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

2. Le cadre de travail.

Le thème.

Recherche d'extremum.

La question problématique.

Il s'agit de l'étude d'une famille de fonctions, dépendant d'un paramètre m. En même temps on étudie l'influence de m sur la forme des courbes (c'est-à-dire que m "varie"), et on étudie chaque fonction pour elle même (avec m constant). Cette distinction variable/paramètre est tout à fait délicate pour un élève qui, en TS, n'y est pas particulièrement préparé...

Les objectifs pédagogiques.

Un objectif fondamental : apprendre à définir les contours des objets mathématiques manipulés (f est fonction de quoi ?). La machine devrait aider à cette définition (en exigeant de préciser par rapport à quoi on dérive par exemple !) ;

Un objectif lié au cours : préciser le rapport entre l'existence d'extremum local et la nullité de la dérivée (condition suffisante, condition nécessaire ?) ;

Un objectif lié à la manipulation de la machine : multiplier les interactions entre courbes et équations, entre application initiale et application graphique. La recherche des intersections des courbes, comme la recherche des extremums devrait se prêter naturellement à ces allers-retours.

Un objectif lié à la compréhension des mécanismes de calcul : les résultats affichés pour m négatif devraient donner des attitudes plus vigilantes à l'avenir. Mais la compréhension profonde ne pourra intervenir qu'après l'étude des complexes !

Un objectif lié aux contrôles scolaires à venir (le bac par exemple) : apprendre à étudier une fonction complètement, en utilisant la calculatrice, mais en validant chaque résultat (dérivée, limites...) de façon scolairement acceptable. Cet objectif en fait n'est pas atteignable lors du TP lui même : on ne peut pas concilier en 1h les exigences de recherche, et de rédaction propre. Mais ce peut être réalisable après la correction, lors d'une reprise personnelle du problème.

3.Le bilan général.

Quelques remarques générales.

1. De façon générale, le texte du TP apparaît trop "touffu" : contrairement à celui des autres TP, l'objectif central est difficilement identifiable. Chacune des trois tâches qu'il contient aurait pu nécessiter un TP particulier (recherche des points communs, étude des conditions d'existence d'extremums, étude soignée d'une fonction particulière). Chacune d'elles d'ailleurs nécessitait la mise en oeuvre d'une stratégie différente. Un peu comme pour le TP n°8, les élèves ont dû, quand ils le pouvaient, modifier à chaque fois leur angle d'attaque. Ce qui a posé à certains de sérieuses difficultés. Sur une question aussi délicate que l'étude des familles de fonction, il aurait fallu construire un TP plus "limpide"...

2. La commande propFrac, suggérée dans l'énoncé, n'a été utilisée par aucun groupe. Les groupes qui ont lu l'énoncé jusqu'au bout (élèves "scolaires") n'ont pas dépassé les deux premières questions, et donc n'ont pas vu l'utilité de la commande. Quant aux groupes qui sont allés jusqu'au bout (c'est-à-dire qui ont abordé l'étude d'une fonction particulière), ils n'ont pas lu les indications de la fin de l'énoncé... et n'ont pas déterminé l'équation de l'asymptote.

La leçon doit être retenue pour les prochains TP : si on veut qu'un TP soit l'occasion de découvrir une nouvelle commande, il faut que celle-ci soit au centre du travail de recherche (comme la commande "Dérivée nième" dans le TP 12).

3. Il y a eu de nombreuses confusions dans le traitement du problème entre la variable x et la "variable" m. Normal, les élèves n'ont pas l'habitude d'étudier des familles de fonctions. On peut penser cependant que la généralisation des outils de calcul formel remettra ce genre de travail au goût du jour. Il y a en effet derrière ces exercices un apprentissage essentiel : donner à une fonction le statut d'un objet à part entière, inclut donc une famille d'objets du même type. De plus pour les apprentissages fondamentaux de l'analyse, l'étude des familles de droite par exemple est tout à fait essentielle (pour la définition d'une tangente...).

4. Le travail des groupes manifeste à nouveau une attraction très forte pour le travail dans le cadre graphique. C'est lié bien sûr aux trois mois de travail avec les calculatrices graphiques. Mais, plus profondément, il y a une attraction des élèves pour "ce qui se voit", c'est-à-dire pour "la" représentation graphique de la fonction supposée en concentrer toutes les propriétés. Il faudra donc insister régulièrement pour rééquilibrer les points de vue, en montrant ce que l'on gagne à travailler avec l'application initiale :
- d'abord on récupère le calcul exact (ou, en calcul approché, plus de précision) ;
- ensuite on gagne en efficacité (par exemple pour l'intersection de deux courbes, on n'est pas obligé de localiser chaque racine, la commande "Solve" donne d'un coup toute l'information nécessaire - en principe tout au moins...-) ;

- enfin on est plus proche du calcul théorique, de la formalisation que l'on reportera sur la feuille de devoir.

Bilan des travaux des groupes.

Un certain nombre de résultats des groupes ont été récapitulés dans un tableau.

- Exp : y a-t-il eu recherche expérimentale des deux points communs (via un graphique, ou une table) ;
- Preuve pour 2 : y a-t-il eu preuve que ces deux points étaient communs à toutes les courbes ;
- Résol $f_m=f_n$: y a-t-il eu recherche de l'ensemble des points communs à toutes les courbes (à la main ou à la machine);
- Cas part : y a-t-il eu étude de cas particuliers "sans extremum" ;
- Cond $f' \neq 0$: y a-t-il eu calcul de la dérivée pour chercher dans quelles conditions elle ne pouvait pas s'annuler ;
- $\Delta < 0$: la condition $\Delta < 0$ a-t-elle été mise en évidence ;
- Valeurs de m : les valeurs de m convenables ont-elles été trouvées ;
- Fonct part : l'étude d'une fonction particulière a-t-elle été entreprise.

Groupe	Exp	Preuve pour 2	Résol $f_m=f_n$	Cas part	Cond $f' \neq 0$	$\Delta < 0$	Valeurs de m	Fonct particul
Gr 1	Graph		Main	Oui				
Gr 2			Main		Oui	Oui	Oui	Oui
Gr 3	Graph	Oui	Main		Oui	Oui		
Gr 4	Graph Table		Machine					
Gr 5bis	Graph Table		Main	Oui	Oui			
Gr 6	Graph Table		Main					Oui
Gr 7	Graph				Oui	Oui		
Gr 8	Graph		Machine		Oui		Oui	
Gr 10			Main		Oui	Oui	Oui	
Gr 12			Machine Main		Oui	Oui	Oui	Oui
Gr.13			Machine Main					
Gr 14	Graph	Oui	Main		Oui	Oui	Oui	Oui
Gr 15	Graph		Main					
Gr 16			Main		Oui			

Quelques remarques complémentaires sur ces résultats :

- le groupe 6 émet l'hypothèse que "le point" $(\frac{5}{2} ; \infty)$ est un point commun à toutes les courbes. C'est peut-être lié à une "banalisation" de l'infini consécutive à sa manipulation ordinaire sur une TI 92 ;
- le groupe 10 traite la recherche des points communs par la résolution de l'équation $f_m=f_{m+1}$. C'est sans doute une conséquence de l'étude actuelle des suites ;
- deux groupes, les groupes 8 et 12 résolvent l'équation $f'(x) = 0$ avec la calculatrice. Ils trouvent donc des racines qui n'existent que pour $m > 0$ (cf la fin de ce bilan, ou la correction de ce TP, volume 1, "côté cours", page 158).

Face à cette situation, deux attitudes :

- le groupe 8 ne vérifie pas à la main, et conserve la condition machine. Donc pour m < 0, pas de racines, et pas d'extremum...
- le groupe 12 refait les calculs à la main, trouve autre chose que les résultats machine, ne pose pas le problème de la cohérence... et poursuit avec les résultats issus du calcul à la main.

4. TP et typologie.

De façon générale, on retrouve une dispersion de l'activité des groupes liée à leur type de travail :

- certains groupes ne se posent à aucun moment le problème de l'interprétation des résultats de la machine. Ce sont les groupes 4 et 8 (groupes plutôt "bricoleurs") ;
- certains groupes réfléchissent systématiquement à la nature des objets en présence. Ce sont eux qui imaginent que certains fonctions de la famille n'ont pas d'extremum (les fonctions homographiques). On retrouve là les groupes 1 et 5bis, plutôt"théoriques".
- certains groupes traitent les questions d'emblée dans le cas général : ce sont les groupes 2, 10, 12, 16. Ce qui correspond plutôt à un profil "rationnel".
- certains groupes n'arrivent pas à traiter les questions théoriques "générales". Ils procèdent par étude plus ou moins systématique de cas particuliers. Ce sont les groupes 6, 7 et 13, de type plutôt "scolaires" ;
- certains groupes enfin envisagent les questions sous de nombreux aspects : recherche expérimentale de points communs, preuve que les deux points exhibés sont bien communs, recherche d'éventuels autres points communs... Ce sont des groupes plutôt "expérimentateurs" (groupes 11, 14, 15).

De façon plus précise maintenant, autour des travaux de 5 élèves :

Cécile, "type théorique" groupe 5 bis.

Elle commence par observer des courbes correspondant à des valeurs différentes de m (m = 2, puis 3, puis 50). Puis elle note :

"Petite anticipation : quelque soit la valeur de m pour toutes les courbes, l'asymptote $x = \frac{5}{2}$ est constante à toutes les courbes. Or f(x) est une hyperbole. Il semblerait que se balade sur l'asymptote $x = \frac{5}{2}$ un centre de symétrie variant selon les valeurs de m. Ce centre de symétrie serait l'intersection de l'asymptote verticale avec une autre asymptote oblique de type ax+b".

Ainsi, dès qu'il y a observation d'objets mathématiques, il y a mobilisation d'éléments de référence, recherche de classes d'objets, ou de situations analogues. Dans ce mouvement, sont éventuellement abordées des questions non posées. C'est la stratégie du "chemin des écoliers", ou du détour pour "profiter du point de vue"...

Puis, recherche des points communs : "après observation de plusieurs courbes : on pense que x = 1 serait un point commun à toutes les courbes, ainsi que x = 0".

Et résolution de l'équation $f_m(x) = f_n(x)$ " à la main".

Pour la recherche des fonctions sans extremum : " les fonctions qui n'ont pas d'extremum sont les hyperboles et les fonctions affines. Cherchons les valeurs de m qui donnent une telle fonction". Le TP se termine par des recherches sans machine de dérivées, de variation, avec confusion constante entre les rôles de m et x. Des erreurs de calcul gênent aussi la progression.

Il est tout à fait remarquable de voir la mobilisation constante d'éléments de référence, avec une qualité certaine de réflexion. Mais il n'y a pas coordination entre les différentes sources d'information, et le choix des outils n'est pas toujours pertinent (par exemple pour la recherche des fonctions sans extremum).

Michaël (type "rationnel"), groupe 2

Il résout d'emblée l'équation $f_m(x) = f_n(x)$, et vérifie ensuite à la machine, avec la commande Solve (Y1(x)=Y2(x), x), après avoir rentré dans le fichier de fonctions deux fonctions paramétrées en m et n.

On remarque un retour au calcul "à la main", par rapport au précédent TP. Sans doute parce qu'ici le cadre est plus scolaire, les calculs moins répétitifs que lors du dernier TP. On remarque aussi le travail privilégié dans l'application initiale, plutôt que dans l'application graphique.

Le calcul de dérivée est fait à la main, puis vérifié à la machine, ce qui fait apparaître une erreur dans le calcul à la main. Michaël reprend alors le calcul de la dérivée, et trouve l'erreur. "Pour qu'il n'y ait pas d'extremum, il suffit que la dérivée ne s'annule pas". Une erreur apparaît dans le calcul, et, la vérification machine n'étant pas faite, l'erreur reste. Le statut particulier des deux valeurs charnières pour m n'est pas vu a priori. C'est après coup que Michaël constate que pour m = 0, il n'y a pas d'extremum. Puis l'étude est faite, avec m = 1. Tous les calculs sont faits à la main. L'asymptote oblique n'est pas envisagée, faute de temps.

Il y a un progrès dans le travail réalisé, dans le sens d'une meilleure coordination entre les différentes informations. Mais il y a encore des progrès à faire dans ce domaine, comme en témoignent les insuffisances dans l'étude de la fonction : une meilleure exploitation des indications de l'énoncé, des possibilités de la machine, un meilleur contrôle à toutes les étapes du travail.

Caroline et Rachel (type "scolaire"), groupe 13.

Caroline et Rachel écrivent le rapport de recherche "à deux mains", au cours de l'heure. Les deux recherches sont en fait parallèles, et il y a confirmation d'un écart entre les deux types de travaux :

- **Rachel** reste confinée dans l'application graphique : "y a-t-il des points communs à toutes les courbes ? Pour obtenir ce renseignement, on trace sur la machine plusieurs courbes, en prenant des valeurs différentes de m. On s'aperçoit que toutes ces courbes passent par le point x = 1, y = 0. On suppose donc que, pour toutes les valeurs de m, les courbes C_m passent par le point x = 1, x = 0". On voit la faiblesse du travail réalisé : un seul point détecté (quoique l'évocation du point "x = 1, x = 0" entretient la confusion sur un éventuel autre point...), aucune validation proposée ("on suppose donc que..."). L'observation de son travail montre qu'elle a repéré un point commun, et s'en est rapproché de plus en plus par des zooms successifs. En faisant cela, elle perdait de vue les autres points d'intersections potentiels, et en même temps se persuadait que ce gain de précision était en fait une démonstration en oeuvre... Il s'agit bien d'un travail repéré comme "scolaire" : agissement par répétition d'actions dans un champ assez restreint, sans qu'émerge une démarche de généralisation, ou de preuve ;
- **Caroline** commence par un petit contresens : elle confond intersection des courbes, et résolution de l'équation $f_m(x) = 0$. Elle résout donc l'équation avec la calculatrice (Solve), et trouve deux solutions, $\frac{2}{m}$ et 1. Conclusion : "la seule valeur de x pour laquelle toutes les courbes se recoupent est x = 1". Puis elle passe dans l'application graphique, pour vérification : "en observant les courbes pour plusieurs valeurs de m, il semble qu'elles se recoupent au point d'abscisse 0. Si x = 0, $f_m(x) = -\frac{2}{5}$ quelque soit m, donc toutes les courbes de coupent au point $(0, -\frac{2}{5})$".

On note ici, malgré des difficultés de départ, des progrès réels : le croisement des résultats de l'application initiale et de l'application graphique, la validation d'une observation par le calcul, plutôt que par des zooms successifs.

Caroline dérive ensuite f_m (à la main, puis par la machine), et résout $f'_m(x) = 0$. Les racines obtenues (avec la TI-92) ne sont pas contrôlées, d'où l'illusion qu'il n'y a pas d'extremum pour $m \leq 0$.

Pour finir ce survol de ce groupe, on observera que la différence des évolutions entre les deux élèves s'accompagne d'un ralentissement des échanges. Caroline n'en est pas encore au stade où elle pourrait expliquer ses choix à Rachel, et la convaincre de leur intérêt.

Et les tâches de contrôle (relatif) de la machine sont suffisamment absorbantes pour pouvoir prendre un recul qui permettrait un échange...

Laurent (type "bricoleur"), groupe 4.

La discussion va toujours bon train entre Laurent et Alexandre. Il y a d'abord utilisation de l'application graphique : quelques courbes sont tracées (une seule fonction est rentrée dans le fichier de fonctions, avec l'utilisation de la syntaxe "sachant que m = ...). Puis utilisation de la commande "Intersection". Rapport : "nous trouvons le point d'intersection commun aux deux courbes, I (0; 0,4). Et il y en a un deuxième, que l'on appelle J (1, 0)". Le groupe se pose alors le problème de la vérification. Il y a alors utilisation du tableau de valeurs : "nous l'avons vérifié avec Table".

Il est significatif ici que les premières applications mobilisées soient celles dont ils avaient déjà l'habitude sur les calculatrices gaphiques, et que la vérification ne soit pas faite par retour à la formule...

Un observateur pose alors la question : "êtes-vous sûr qu'il n'y a pas d'autres points communs ?". Il y a alors retour au graphique : "on ne va pas toujours faire des Zoom arrière, on n'en finira pas !", et retour au calcul "à la main". Laurent bloque sur $(m-n)x^2 + (m-n)x = 0$.

Il utilise alors la machine, pour le débloquer, avec Solve $((m-n)x^2 + (m-n)x = 0, x)$. "nous trouvons :
$x = 1$, or $x = 0$ or $m - n = 0$ ".

Le message de résolution de l'équation est reproduit tel quel (en anglais), sans analyse de sa signification.

Il y a là quelques éléments intéressants, en particulier l'appel à la calculatrice comme auxiliaire momentané de calcul. Mais le fait que les résultats obtenus ne soient pas interprétés, réutilisés pour reprendre le calcul là où il en était, réinjectés comme élément complétant, validant le rapport de recherche, enlève à cet auxiliaire la fonction pédagogique qu'il pourrrait avoir ici.

Christelle (type "expérimentateur"), groupe 14.

Christelle et Fabienne commencent par observer plusieurs courbes, repèrent les deux points communs. Pour le premier point commun, vérification par report dans la formule : si $x = 0$, $y = -\frac{2}{5}$. Pour le deuxième point, utilisation de la commande Zero sur les deux courbes affichées : "on obtient dans les deux cas $y = 0$ pour $x = 1$". Vérification enfin par report dans la formule.

Une discussion se développe alors dans le groupe : comment savoir s'il n'existe pas d'autres points communs ? A aucun moment l'application initiale n'est sollicitée ici. Le groupe s'oriente vers une transformation de l'écriture de la fonction "pour faire sauter m". Avec un petit coup de pouce de l'observateur, cette stratégie aboutit.

La recherche des extremums est organisée dans une certaine confusion "pour que la fonction admette des extremums, il faut que sa dérivée soit croissante et décroissante, ou l'inverse".

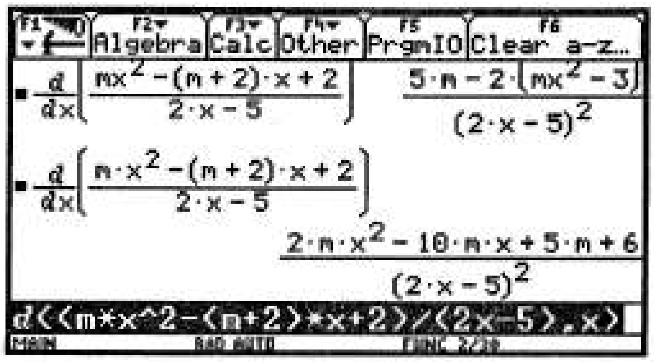
C'est à dire qu'il y a confusion entre signe de la dérivée, et variations de la dérivée.

La dérivée est calculée à la main (calcul juste), puis à la machine (résultat faux : le signe "multiplié" a été oublié dans la syntaxe).

Dans le premier calcul, le signe multiplié a été oublié entre m et x.

Dans le deuxième calcul, il a été rétabli.

Une petite différence et ses grandes conséquences...



La non concordance des résultats est repérée. Le calcul à la main est refait, puis la commande est reformulée (avec la même erreur). L'observateur attire alors l'attention sur les contraintes d'écriture. Christelle reconnaît que les indications de l'énoncé n'avaient pas été lues jusqu'au bout...

Puis le calcul des zéros de la dérivée est fait "à la main", ce qui évite les erreurs d'interprétation des réponses de la machine.

Le groupe en arrive à la conclusion : pas d'extremum quand m est dans l'intervalle $]0;\frac{4}{5}[$. Des vérifications sont faites en prenant une valeur de m dans cet intervalle, et une valeur de m à l'extérieur (les valeurs frontières ne sont pas envisagées).

Conclusion : "<u>En vérifiant sur la machine, on prouve la conjecture</u> ci-dessus".

Cette conclusion me paraît tout à fait significative de cette démarche : bonne mobilisation du calcul papier-crayon, de la machine, bonne coordination des différents outils permettant de déceler des erreurs ; mais il n'y a pas hiérarchisation du travail, le statut de preuve n'est pas clair. En dernier ressort, ce qui prouve la justesse d'un résultat, c'est la cohérence des différentes réponses ou tests...

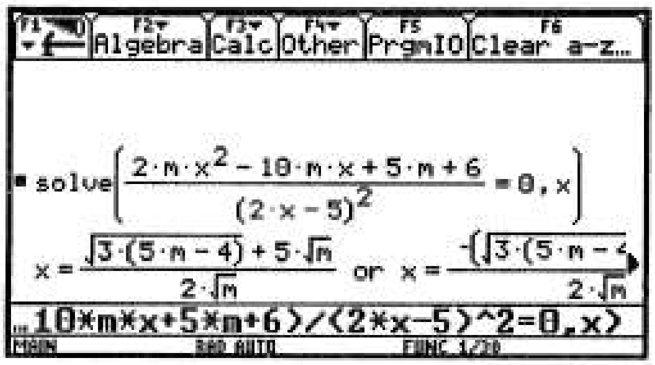
Cette attitude peut être positive : une démonstration étant faite, une vérification est toujours utile... Elle peut être aussi dangereuse : le croisement de quelques points de vue concordants peut dans certaines situations tenir lieu de démonstration.

En conclusion, une observation sur une question un peu délicate : que doit-on calculer "à la main", et que peut-on déléguer à la calculatrice ?

La réponse n'est pas la même, pour la pratique d'un expert, et la pratique d'un élève. Parce que pour un expert, il y a un contrôle (assez) systématique des réponses de la machine. Mais, pour un élève en situation d'apprentissage, la seule façon de comprendre certains résultats est... de les établir soi-même.

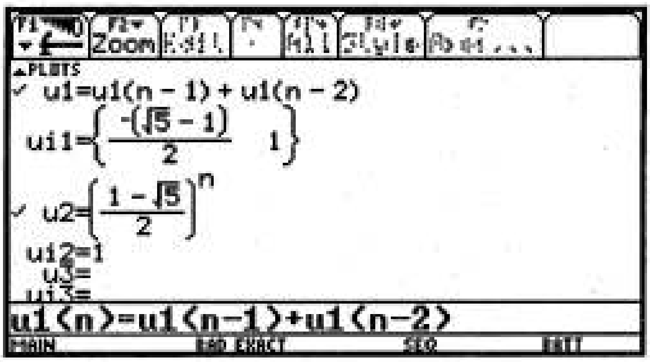
Un "expert" sait que la calculatrice traite les calculs via les complexes. Donc, pour m négatif, la dérivée s'annule bien.

Mais, pour un élève, la compréhension de cette écriture passe nécessairement par la résolution de l'équation "à la main", et la "simplification" des racines, donc par la <u>génèse</u> de ce résultat.



Il n'y a sans doute pas de réponse générale à cette question. L'essentiel est de contrôler le plus possible les réponses de la machine. Si une réponse paraît bizarre, alors il faut lever ce caractère d'étrangeté, au besoin par le retour à un calcul à la main.

Bilan du TP n°14



TP traité avec les TI-92.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°14

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_n$.
Que dire de son sens de variation ? De sa limite ? (On prouvera les résultats annoncés!)
A partir de quel rang est-t-on sûr que la valeur absolue de u_n sera inférieure à 10^{-10} ? A 10^{-1000} ?2. On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
Programmez séparément les deux suites sur votre calculatrice, et observez leur évolution conjointe dans une table de valeur, avec un pas de 1. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.
3. Observer une table de valeurs avec un pas de 10, puis regardez les valeurs affichées pour u_{500} et v_{500} . Interprétation ? ?

Indications relatives à la TI92
Pour programmer une suite récurrente à deux pas (ici v_n), on procède ainsi :
On rentre en U2 par exemple la relation de récurrence, en exprimant $U_2(n)$ en fonction de $U_2(n-1)$ et de $U_2(n-2)$.
Les deux termes initiaux sont rentrés sous la forme { v_1, v_0} (attention à l'ordre !).

NB. L'idée du TP est extraite du livre d'Analyse de l'IREM de Strasbourg, page 297 (1983, *Mathématiques, Terminales C et E, Analyse et Statistiques*, ISTRA).

2.Le cadre du travail.

Le thème.

Etude des suites récurrentes, et des suites définies par leur terme général. Problème du passage d'un mode de définition à un autre.

La question problématique.

Deux suites dont on démontre, ou dont on est supposé avoir démontré, qu'elles sont égales, ont des comportements différents pour n grand. Et même très différents, puisque l'une converge vers 0, ce qui est conforme à la théorie, et l'autre diverge vers $-\infty$, ce qui est nettement plus dérangeant.

Les objectifs pédagogiques

Un objectif fondamental : montrer, dans l'action, l'écart entre valeur exacte, et valeur approchée : une petite différence peut avoir de grandes conséquences...
Ce TP devrait avoir le rôle, sur la question calcul exact/ calcul approché, qu'a eu le TP à propos des tracés de la fonction sinus, sur la question discret / continu.

Un objectif important : montrer l'importance du recul par rapports aux objets manipulés, l'importance de garder "à portée d'esprit" les éléments de référence. La suite donnée au début du TP est une suite géométrique, qui doit être reconnue, et qui doit être pourvue de tous ses attributs usuels ;

Un objectif annexe : le retour sur le raisonnement par récurrence.

3. Le bilan global.

Quelques remarques générales.

Sur le déroulement du TP.

Cela ne se passe pas tout à fait comme prévu : la plupart des élèves ne vont pas identifier rapidement une suite géométrique, et vont se perdre en conjectures sur son comportement. Cela peut s'expliquer de plusieurs façons :

- une suite géométrique n'est pas souvent donnée avec une raison aussi "épaisse" ;
- le contrat implicite du TP est qu'on étudie d'emblée des objets assez complexes, pour lesquels la calculatrice constitue un utile, sinon indispensable, outil d'investigation ; du coup, avant d'identifier le type de suite, la plupart des élèves vont observer un tableau de valeurs, un graphique...
- les élèves venaient de traiter, dans le contrôle 7, une suite récurrente pour laquelle il était indispensable d'étudier la fonction f d'appui ; ainsi, certains vont étudier en détail la fonction affine d'appui (dérivée, limites...)

Cela constitue en tous cas une utile leçon pour les élèves, sur laquelle on insistera lourdement dans la correction : au début d'un TP, se demander si les objets mathématiques rencontrés ne sont pas familiers, ne font pas partie des références communes.

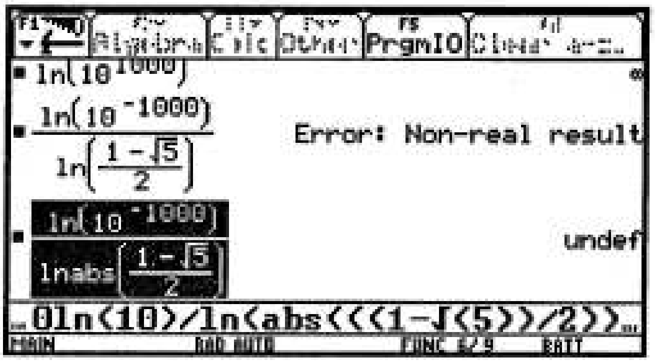
Le temps passé en observations diverses empêchera la majorité des élèves d'aborder les questions 2 et 3, coeur du TP.

Sur la confrontation avec la TI-92

Il y a une réelle surprise quand la calculatrice refuse de calculer $\ln(10^{-1000})$. La réaction majoritaire est alors de contourner la difficulté en utilisant les ressources de la calculatrice, par exemple en calculant séparément numérateur et dénominateur, ce qui amène à de nouvelles déconvenues. Le recours aux résultats de référence concernant la fonction logarithme n'est pas immédiat...

On comprend la perplexité des élèves. La machine donne :

- pour $\ln(10^{1000})$ Overflow, ou ∞, suivant le mode ;
- pour la première expression "non-real result" (à cause du logarithme d'un nombre négatif) ;
- pour la deuxième expression, "undef".



Il y avait là sans doute matière à un travail plus approfondi...

Petite auto-critique, donc : il aurait été sans doute opportun de couper ce TP en deux séances : une première séance qui aurait permis de travailler sur ces problèmes de dépassement de capacité de calcul, et une deuxième séance qui aurait abordé le problème de la divergence apparente des deux suites. De façon générale, on a tendance à surestimer la rapidité d'exécution des élèves. Il ne suffit pas de dire "l'art des TP, c'est l'art de laisser du temps au temps" (volume 1, "côté cours", page 78) : il faut aussi le faire !

Sur la rédaction des rapports.

Il semble bien que l'importance de la rédaction des rapports soit inversement proportionnelle à la quantité d'investigation sur la calculatrice... Ainsi on ne retrouve sur la plupart des cahiers de TP aucune trace des observations, pourtant nombreuses, de la suite ! La plupart des groupes, constatant après moult observations que la suite est géométrique (le bruit s'est répandu dans la classe après un certain moment), écarte piteusement les premiers calculs d'approche, et reprend son travail par application du cours. Les cahiers de recherche traduisent ainsi très mal le travail effectivement réalisé.

- **7 groupes** (6, 7, 8, 9, 10, 15, 16) ne donnent dans leur cahier que la solution, ordonnée, de la première question.

- **5 groupes** (1, 5, 5bis, 13, 14) ne traitent aussi que la première question, mais donnent l'historique de leurs recherches. On y retrouve les tableaux de valeurs, les graphiques, l'étude des variations de la fonction affine, l'étude de la seule limite possible (solution de $x = f(x)$). Un seul groupe (le groupe 5), "scolaire", poursuit cette démarche tâtonnante même après avoir identifié une suite géométrique. Ainsi pour le contrôle de la rapidité de convergence, ce groupe a recours à un tableau de valeurs, et non pas au logarithme.

- **3 groupes** (2, 11, 12) traitent la 2ème question, avec des réactions diverses.
  - Le groupe 12 démontre l'égalité des deux suites, passe à l'observation des tables numériques pour de grandes valeurs de n, et conclut : "elles ne sont pas du tout égales ! L'une tend vers 0, l'autre vers $+\infty$". Il semble que, pour ce groupe, l'observation l'emporte sur la démonstration. Mais c'était en fin d'heure, et le conflit entre les deux informations ne s'est sans doute pas développé comme il aurait dû.
  - Le groupe 2 démontre aussi par récurrence l'égalité des deux suites, puis constate la divergence. la conclusion est plus prudente : "cela ne marche pas...".
  - le groupe 11 constate d'abord que les deux suites se séparent, en prolongeant un peu plus loin les tables de valeurs. Du coup, il manque un peu de conviction pour se lancer dans une démonstration de l'égalité des deux suites...

4. TP et typologie.

On voit bien, à travers ce rapide descriptif des réalisations, le déploiement de stratégies caractéristiques de notre typologie :

- **Cécile, type "théorique"**, identifie une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Application ensuite de la stratégie vue en cours : "f est décroissante, donc u_n n'est pas monotone" (en fait, c'est un "retournement" d'un théorème vu en cours...). Et si la suite converge, cela ne peut être que vers l'unique solution de $f(x) = x$, donc 0.

Puis observation des graphiques "Time" et "Web", qui confirment les résultats précédents. Mais il demeure un doute sur la "preuve" de la limite.

Nouvelle identification de la suite : c'est en fait une suite géométrique. D'où la limite par évocation du théorème du cours. Détermination enfin du rang à partir duquel la valeur absolue de u_n vérifie les conditions données.

Cécile termine par une comparaison des deux rangs.

- **Michaël, type "rationnel"**, identifie rapidement les objets (suite géométrique), ne se livre à aucune observation (ni graphique, ni tableau de valeurs). La limite de la suite, la détermination des deux rangs cherchés, sont faits sans difficulté. L'égalité des deux suites est établie par récurrence. Il constate enfin, sur un tableau de valeurs (c'est le premier observé depuis le début de l'heure), qu'il y a un problème apparent de divergence. Conclusion : "ça ne marche pas". C'est une expression assez symbolique... Car oralement Michaël précise : de toute façon, ce n'est qu'une machine, elle déraille, c'est tout. On retrouve là la même réaction que pour les tracés paradoxaux de la fonction sinus : les problèmes posés par les outils de calcul ne sont pas des problèmes mathématiques.

C'est la conclusion logique aussi d'un TP pour lequel la calculatrice n'a pas été d'une grande aide (pour lui). A la différence des précédents TP, tout, ou presque, a été fait à la main.

- Caroline, type "scolaire", et Rachel commencent par de nombreuses observations de la suite (graphiques et tableau de valeurs). Comme les commandes sont mal maîtrisées, cela prend du temps. Des conjectures sont émises ("le signe change à chaque fois, les termes de la suite se rapprochent de zéro"). Puis, alors que Rachel continue ses observations, Caroline démontre (comme Cécile, voir plus haut) : évocation d'une suite récurrente, avec les résultats du cours, puis reconnaissance d'une suite géométrique, et résultats.

Pour trouver le rang à partir duquel on a $u_n \leq 10^{-10}$, Caroline et Rachel considèrent un tableau de valeurs. Puis elles essaient de retrouver le résultat par le calcul, mais n'ont pas le temps d'aboutir.

Ce travail est bien marqué par des lenteurs dans la manipulation des objets (matériels, et mathématiques), et dans la difficulté de l'abstraction.

- Etienne représentera aujourd'hui le type "bricoleur". Laurent et Alexandre sont en effet absents ce jour, ce qui traduit à la fois un début de marginalisation scolaire, et un désintérêt pour l'activité de recherche: "ça sert à rien, on sait s'en servir, de la machine !"...

Etienne passe le TP le regard rivé à la machine, manipule des fonctionnalités parfois opportunes (tableau de valeurs, graphiques), parfois insensées (pour le contrôle de convergence, il veut rentrer en "Window" : nmax = 10^{-10}...). C'est lui qui déclare "cette suite oscille, donc elle n'a pas de limite". Quand on lit le rapport de recherche (exceptionnellement c'est lui qui l'écrit, son collègue, Damien, est absent), toute trace de ces errements a disparu : les résultats empruntés ça et là ont été recollés.

Il n'y a pas référence au cours de mathématique. Au contraire, on peut considérer que c'est l'empilement des observations qui va faire référence, et déboucher sur des théorèmes personnels ("dès que ça oscille, ça diverge").

Le sens mathématique... et le sens tout court de l'activité en prend un coup : ainsi, ayant oublié de changer le sens d'une inégalité lors d'une division par un nombre négatif, il se retrouve avec $n \leq 48$. Comme il attendait une inégalité de sens contraire, il modifie son sens, sans problème.

- Fabienne, type "expérimentateur", et Christelle multiplient les changements de points de vue organisés :

- "c'est une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f décroissante. Le sens de variation reste inconnu avec cette méthode" ;
- "avec la calculatrice, en prenant un tableau de valeur... la suite semble alterner entre valeurs positives et négatives" ; oralement "est-ce que c'est vrai toujours ?" ;
- "remarque ! c'est une suite géométrique de raison négative, donc elle alterne bien entre valeurs positives et négatives" ;

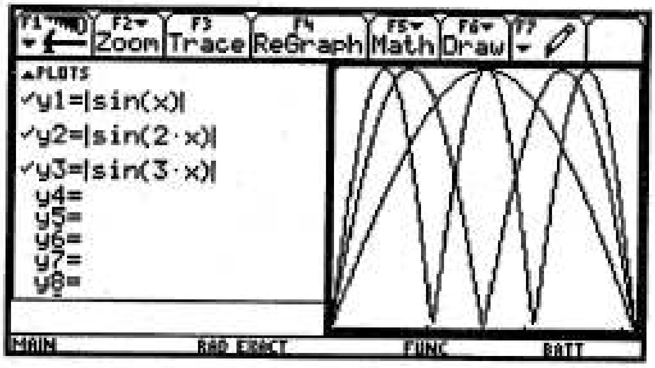
Puis étude de la limite de la suite :

- "limite de la suite semble être avec la calculatrice..." ;
- "puis la limite de la suite est la solution de l'équation f(x) = x, donc 0" ;
- enfin application du théorème de convergence des suites géométriques.

Il n'y a pas traitement de la situation globale ("c'est une suite géométrique, donc je connais ses variations et sa limite"), mais, sur chaque point, accumulation et croisement des informations disponibles.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

Bilan du TP n°15



TP traité avec les TI-92.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°15

Le but du TP est le calcul de $I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,dt$, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Comme d'habitude, plusieurs méthodes d'approche sont envisageables :
- calcul direct dans le cas général ;
- observation numérique, ou graphique, des premiers termes de cette suite ;
- conjectures diverses, suivies des preuves ou réfutations...

On précisera avec soin les différentes pistes empruntées, et les résultats partiels engrangés.

2.Le cadre du travail.

Le thème.

Le calcul d'intégrale, sous ces différentes facettes. S'agissant d'une fonction clairement positive, les questions de calcul d'aire prennent une certaine importance.

La question problématique.

Toutes les intégrales, évaluées en calcul approché, sont presque égales. Le sont-elles tout à fait ?

Les objectifs pédagogiques.

Objectif principal : faire jouer les différentes représentations possibles d'une intégrale, choisir parmi celles-ci celle qui sera plus pertinente pour la résolution du problème.
Ces changements de représentation permettront de solliciter de nombreuses facettes de la machine (application graphique, suites, fonctions, application initiale en calcul exact, ou approché...).

Objectif secondaire : apprendre à reformuler un problème, à le décomposer en problèmes élémentaires plus simples (ici décomposer l'intervalle d'intégration en intervalles plus petits sur lesquels on contrôle le signe de la fonction).

Objectif permanent : apprendre à considérer la nature des objets manipulés (comme lors du TP 12 sur la famille de fonctions à paramètre). Qu'est-ce qui varie, la variable d'intégration, ou l'indice de la suite ? Tout dépend de la facette de l'objet mathématique que l'on considère...

3.Bilan général.

Quelques remarques générales.

Sur l'état d'esprit des troupes...
Beaucoup d'élèves (10) sont absents ce jour, du fait de l'organisation d'un forum sur l'orientation post-bac. En fait, les élèves qui se sont absentés sont ceux qui sont le moins attachés au travail de TP.

La fatigue de fin de demi-trimestre se fait aussi sentir. Un échange significatif entre Fabienne, pourtant "élève sérieuse", et le professeur, en début de TP :

" - je ne sais pas par quoi commencer, c'est trop difficile ;
- c'est difficile, donc c'est stimulant...
- en fait, j'en ai assez de réfléchir !
- mais, faire des mathématiques, c'est réfléchir, non ?
- je le sais bien, mais, là, on n'a plus le moral..."

Au-delà de l'anecdote, il est certain qu'un travail de recherche nécessite de la part des élèves une réelle disponibilité, un engagement, qui peut déboucher sur un apprentissage réel, mais qui est fatigant pour ceux qui s'y investissent.

A cette fatigue - momentanée - des élèves correspond, par un mouvement de balancier, une attitude plus "inductrice" des observateurs. On peut penser ainsi qu'un certain nombre d'idées mises en oeuvre par les élèves ont été, plus que d'habitude, induites par certaines questions des observateurs...

<u>Sur l'investissement dans le travail de recherche.</u>

L'énoncé se prête bien à une recherche des élèves :

- la question problématique apparaît assez vite (la suite est-elle vraiment stationnaire, et pourquoi ?
- la TI-92 permet, si on le veut bien, de multiplier les points de vue sur l'objet étudié.

Il y a ainsi une nette différence entre l'attitude des élèves au début, et à la fin du TP. A la fin du TP, il y a une certaine satisfaction d'avoir trouvé "la clef de l'énigme". De ce point de vue, le TP est mieux "calibré" que les TP précédents, trop longs.

<u>Les premières réactions, au début du TP, sont révélatrices d'une compréhension encore restreinte des objets enseignés... :</u>

- beaucoup d'élèves demandent : s'agit-il d'une suite, ou d'une intégrale ?
- certains élèves, voyant que la machine ne renvoie pas de résultats pour I_n, disent " on va particulariser, en donnant des valeurs particulières à t, c'est à dire à la variable d'intégration"...
- certains élèves, pour voir la fonction à intégrer, et avoir une interprétation en terme d'aire, rentrent comme fonction... l'intégrale elle-même.

Cette compréhension restreinte des objets est naturelle, puisque l'intégrale vient d'être introduite. L'intérêt du travail en TP est ici double :

- les élèves travaillent en binôme, et évoquent plus facilement illusions ou difficultés ;
- les élèves sont en action, et c'est quand ils s'engagent dans une procédure de résolution pratique qu'ils révèlent les erreurs de conception..

<u>Il y a encore des insuffisances dans l'utilisation de la machine, mais une distinction valeurs exactes / valeurs approchées s'installe peu à peu.</u>

Ces insuffisances se manifestent de deux façons :

- erreurs de syntaxe : de nombreux oublis du signe "multiplié" entre n et x ;
- difficulté pour contourner une non-réponse de la machine : quand la machine refuse de donner une valeur générale pour I_n, la réaction générale est "la machine ne peut pas le faire, on va devoir le faire à la main". Il n'y a pas encore l'initiative prise de particulariser la demande (pour n = 1, n = 2...), ou de solliciter une valeur approchée en l'absence de valeur exacte donnée ;

Par contre, la prise de distance avec les résultats donnés par les tableaux de valeurs ou l'application graphique est manifeste. Le précédent TP a été utile de ce point de vue ! Les élèves annoncent désormais assez clairement : "une valeur approchée de I_5 est 2". Du coup, les élèves se méfient un peu avant de conjecturer que la suite est stationnaire (groupe 12 : "la suite n'est sans doute pas constante, mais reste autour de 2").

Résultats généraux.

On note dans le tableau suivant :

- exact : y a-t-il eu calcul des premières intégrales exactes ?
- génér : y a-t-il eu tentative de calculer directement le terme général "à la main"?
- appro : y a-t-il eu calcul de quelques valeurs approchées ?
- table : y a-t-il eu affichage d'un tableau de valeurs pour la suite ?
- time : y a-t-il eu affichage d'un graphique de la suite ?
- graph : y a-t-il eu affichage du graphique de la fonction |sin(nx)| ?
- périod : y a-t-il eu évocation du caractère périodique de cette fonction ?
- conjec : y a-t-il eu conjecture du caractère stationnaire de la suite ?
- preuve : y a-t-il eu preuve (ou début de preuve) du caractère stationnaire de la suite

Group	Exact	Génér	Appro	Table	Time	Graph	Périod	Conjec	Preuve
2	Oui		Oui			Oui	Oui	Oui	Oui
5			Oui	Oui	Oui				
5bis						Oui	Oui	Oui	Oui
6		Oui							
7	Oui		Oui			Oui		Oui	
8	Oui			Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
9	Faux			Oui					
10	Oui				Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
11							Oui	Oui	Oui
12				Oui		Oui		Oui	Oui
13				Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	
14	Oui		Oui			Oui	Oui	Oui	Oui
15				Oui		Oui	Oui	Oui	

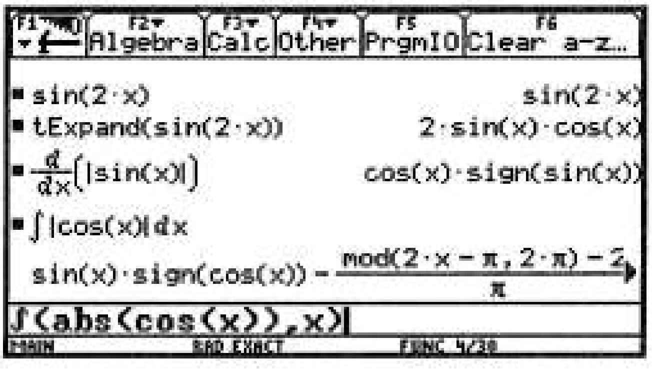
On le voit à la lecture de ce tableau : les élèves qui réussissent ce TP sont ceux qui ont considéré la suite sous différents aspects : c'est évidemment l'aspect "aire", vu à partir de la représentation graphique des fonctions successives, qui induisait l'idée de la démonstration à partir de la périodicité (le groupe 11 est aussi passé par ces observations graphiques, mais il n'en a laissé aucune trace dans son rapport de recherche).

Les groupes qui en sont restés à l'idée de suites (groupes 5 et 9) n'ont pas pu traiter la question (surtout le groupe 9, qui se trompe dans les calculs des premières intégrales "à la main"...).

Le groupe 6 (Jérôme M., qui travaille seul ce jour-là) est resté dans le seul registre du calcul de l'intégrale par une intégration par parties...

Il a passé l'heure à tourner en rond, et à se perdre en conjectures sur les réponses étranges données par la calculatrice.

Ni résultat partiel, ni conjectures...Le signe d'une obstination peu rentable !



4. TP et typologie.

Un peu plus de détails maintenant sur les élèves désormais familiers pour le lecteur...

Cécile, de type théorique.

Elle étudie d'emblée la fonction |sinx|, et constate l'existence d'une période de π.
Dans un deuxième temps, essai de calcul avec la machine : "la calculatrice ne donne ni intégrale, ni primitive, et nous renvoie la formule telle quelle".
Essai aussi infructueux de calcul "à la main" (avec un certain nombre d'erreurs de signe...).
Retour alors à l'observation des courbes des fonctions sin(nx), puis |sin(nx)|, pour n = 5, puis 6. Affirmation (non prouvée) : "la fonction a comme période $\frac{\pi}{n}$". La preuve est apportée à nouveau par une analogie : "rappel de physique $T = \frac{2\pi}{\omega}$".
Puis considérations graphiques : "en fait, plus le nombre de sommets augmente, plus l'aire d'une période diminue, mais l'augmentation du nombre de sommets paraît compenser l'aire d'une arche. Donc il semble que, quelque soit n, l'intégrale donne la même aire".
Enfin, il y a application de la relation de Chasles, et utilisation de la calculatrice pour obtenir la valeur de l'intégrale sur $[0, \frac{\pi}{n}]$ (l'ablation de la valeur absolue a été justifiée par la positivité de sin(nt) sur cet intervalle). Multiplication par n, et résultat.
On notera le fait qu'aucun calcul n'est fait à la main, et que les outils spécifiques de l'étude des suites (le tableau de valeurs par exemple) n'ont pas été mis à contribution. C'est encore une fois la construction de chaque objet pour lui-même qui est prise en compte. L'analogie vaut aussi preuve. La calculatrice permet de se décharger des tâches de calcul pour se consacrer à la "réflexion stratégique"...

- Michaël, de type rationnel.

Il note d'abord "la fonction |sin nt | est continue sur $[0, \pi]$, dont l'intégrale existe".
Puis utilisation de la calculatrice pour tenter de calculer des valeurs exactes, et, à défaut, des valeurs approchées des premières intégrales. Résultat : c'est presque 2. Pour lever l'ambiguïté, Michaël calcule "à la main", les deux premières intégrales (soigneusement, avec découpe de l'intervalle donné). Conclusion : "on peut penser que $I_n = 2$ pour tout n".
Pour se faire une idée, observation de la représentation graphique de |sin nt | (le dessin est reproduit en format timbre poste..). Résultat : "on suppose que pour n, il y a n périodes".. Calcul alors, par découpe, de I_5, puis de I_n. Et conclusion.
On peut constater ici une nette évolution du travail : celui-ci est moins linéaire, il y a des changements de registre notables, des conjectures émises, et vérifiées, une volonté de comprendre l'origine des phénomènes.
Et même, pris par la dynamique de la recherche, Michaël ne démontre pas la périodicité de la fonction : "on suppose que, pour n, il y a n périodes"...

Caroline, de type scolaire.

Le rapport est écrit par elle seule, ce qui confirme une certaine marginalisation de Rachel.

Le contexte du travail réalisé est comme toujours le cours (comme pour Michaël d'ailleurs) :"la fonction sinus est continue, la fonction valeur absolue aussi, donc l'intégrale existe".

Puis l'objet est envisagé sous la forme de suite :

- la suite est rentrée dans le fichier de suite, et Caroline observe un tableau de valeurs, avec prudence : "les valeurs de la suite semblent constantes, mais ce sont des valeurs approchées"... Les leçons du TP 14 ont porté !

- ensuite Caroline observe un graphique en "Time", qui confirme les résultats du tableau de valeurs. Avec le même souci d'accumuler tous les renseignements possibles, elle essaie d'obtenir un graphique "Web" (réservé aux suites récurrentes!), en vain. Ne comprenant pas cette surprenante impossibilité, elle perd un grand moment à modifier la fenêtre... jusqu'à ce qu'une remarque d'un observateur l'oblige à un retour critique !

L'objet est alors envisagé sous la forme d'intégrale (au moment où cette idée fait tâche d'huile dans la classe) :

- observation des courbes pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

- "on remarque que la représentation graphique de $f(x)$ forme des ponts. Quand n augmente, le nombre de ponts augmente proportionnellement. La largeur des ponts diminue quand leur nombre augmente, leur amplitude par contre ne change pas. On peut penser que les intégrales pour $n = 1$, $n = 2$, peuvent être égales".

Il y a enfin calcul, qui combine une partie à la main (coupure en plusieurs intervalles d'intégration), et une partie machine, pour I_1 et I_2.

On constate encore des progrès dans ce travail, dans l'interaction de différents points de vue, dans la combinaison de plusieurs outils. Les mêmes faiblesses apparaissent : description vague des phénomènes (le mot de périodicité n'est pas utilisé), qui limite leur exploitation mathématique, références parfois vacillantes (utilisation à contre temps du graphique Web), qui entraîne des pertes de temps en recherches inutiles, difficulté à passer d'études particulières à une étape de généralisation.

x. de type bricoleur...

Laurent et Alexandre sont absents de jour-là. C'est le signe d'une certaine marginalisation scolaire. Leur absence contraint à rechercher d'autres élèves également représentatifs de ce type de travail, et donc à observer les évolutions des uns et des autres de plus près...

Le même écart qu'entre Caroline et Rachel (type scolaire) se manifeste à l'intérieur des élèves repérés comme bricoleurs. On prendra deux exemples :

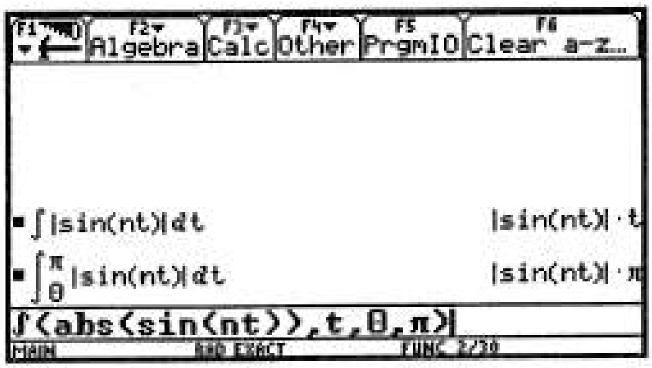
Etienne et Damien (groupe 5) ne travaillent pas de la même façon. Damien (voir premiers TP) est sur une trajectoire "bricoleur → expérimentateur", alors qu'Etienne a gardé pendant les différents TP un profil plutôt bricoleur. Pour ce TP, c'est lui qui donne le ton (Damien est plus en retrait).

Première étape : observation de quelques résultats approchés sur la calculatrice : mais Etienne a oublié le signe "multiplié" entre n et x.

La calculatrice renvoie comme intégrale $|\sin(nt)|.\pi$, et comme primitive $|\sin(nt)|.t$.

Ne comprenant pas pourquoi il reste t dans l'intégrale calculée, Etienne calcule lui-même l'intégrale à partir de la primitive donnée.

Résultat : 0.



Mais cette astuce laisse un certain malaise, d'autant qu'en calcul approché le groupe a trouvé 2 pour la première intégrale. Après un retour sur l'écriture/machine, c'est Damien qui découvre l'erreur.

Le travail est repris, il consiste à relever les valeurs approchées des premiers termes de la suite dans l'application initiale : "contrairement à ce que l'on aurait pu penser, à partir de n = 5, la suite est très proche de 2 par excès ensuite pour n = 6 elle est aussi très proche de 2 par défaut (elle se rapproche un peu), mais pour n = 7 elle s'en éloigne un peu par excès". Puis il y a observation d'une représentation graphique de la suite, et d'un tableau de valeurs, avec calcul des écarts entre deux termes successifs. Et c'est tout.

On le voit ici, le travail est resté dans le seul registre des suites, avec comme seule rédaction des commentaires sur l'évolution de la suite.

Pierre (groupe 8), est seul ce jour-là. Mais, même quand son collègue (Sébastien) est là, c'est lui qui conduit les opérations. Au début de l'année, les deux élèves travaillaient sur le même modèle, très "bricoleur". Au fil des TP, Pierre améliore son travail : meilleure comparaison des informations, utilisations des résultats du cours... alors que Sébastien en reste à un bricolage très élémentaire.

Ici Pierre tente d'abord un calcul du terme général de la suite ("aucun calcul"), puis il rentre I_n dans le fichier de suites, et observe une représentation graphique, et un tableau de valeurs de la suite : "il semble que pour toutes les valeurs de $n \geq 1$, alors la valeur de I_n est égale à 2 (approximativement)".

Il change alors de registre : "on peut aussi regarder différentes fonctions, |sin6x|, |sin5x|". Pour n = 5 : 5 périodes, pour n = 6 : 6 périodes. De même, lorsque n = 15, il y a 15 périodes. Donc on peut supposer que, pour n, il y a n périodes".

Le calcul est alors fait (avec la calculatrice), "sur une période", pour n = 5, suivi d'une multiplication par 5. La même chose est reproduite pour n = 6, puis pour n. Résultat final, n = 2.

Il y a bien sûr quelques faiblesses dans ce travail ("donc on peut supposer que..."), c'est-à-dire que l'observation fait loi. Cependant, l'observation est de bonne qualité, elle est bien exploitée, et débouche sur un calcul correct. Disons que cela confirme l'évolution positive de cet élève...

Fabienne, de type expérimentateur.

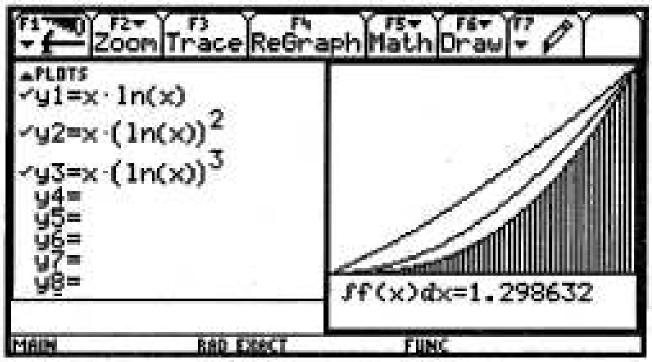
La séance commence par une longue phase "expectative", avec formulation de beaucoup de questions : est-ce une suite normale ? Quel sont les rôles respectifs de n et t ? Puis le travail démarre, dans beaucoup de directions à la fois : "Nous savons que la fonction est continue et positive. L'intégrale correspond donc à une aire". Fabienne observe les premières représentations graphiques des fonctions (dans un cadre de complémentarité avec Chistelle : "tu regardes la deuxième ? Alors je regarde la troisième"), et note la périodicité. Retour à l'application initiale, et calcul des valeurs approchées des premiers termes : "c'est à peu près 2". Fabienne calcule alors à la main, avec découpe de l'intervalle $[0, \pi]$ pour contrôler le signe du sinus, les trois premières intégrales : "les valeurs de I_n sont apparemment égales à 2 indépendamment de n. Cependant le nombre de sinusoïdes augmente avec n, mais elles sont de plus en plus étroites". Il y a alors retour au cas général : "la fonction doit être de période $\frac{\pi}{n}$ ...l'aire totale est donc n fois l'aire de la première sinusoïde".

C'est à peu près le même travail que Pierre, l'évocation du cours ("fonction continue positive"...), et le calcul à la main en plus.

En conclusion, on peut noter qu'il se dessine une évolution positive de la plupart des élèves (qui se sont investis dans le travail de recherche !).

On en reparlera à la fin des TP...

Bilan du TP n°16



TP traité avec les TI-92.

1. Le travail donné aux élèves

TP n°16

Le but du TP est l'étude de $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, et $I_0 = \int_1^e x\,dx$

Comme d'habitude, plusieurs méthodes d'approche sont envisageables :
- calcul direct dans le cas général ;
- observation numérique, ou graphique, des premiers termes de cette suite ;
- étude du sens de variation de la suite ;

On pourra aussi, à l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n-1}, et en déduire un encadrement de I_n. On précisera avec soin les différentes pistes empruntées, et les résultats partiels engrangés.

2. Le cadre du travail

Le thème.

Reprise du thème du précédent TP. Mais cette fois-ci la suite d'intégrales n'est pas stationnaire.

La question problématique.

Est-ce qu'une suite positive qui décroît, et se "rapproche" de zéro, converge vers 0 ?

Les objectifs pédagogiques.

Premier objectif. Apprendre à choisir la représentation de l'objet permettant de traiter au mieux une question :
- pour avoir une idée du sens de variation de la suite, il est plus clair d'observer des valeurs approchées que des valeurs exactes ;
- pour comprendre pourquoi elle décroît, il est plus facile d'observer la suite des fonctions $x(\ln x)^n$ entre 1 et e que d'essayer de trouver le terme général de la suite ;
- pour prouver la décroissance de la suite, il est plus facile d'utiliser la linéarité de l'intégrale que d'utiliser la relation de récurrence issue de l'intégration par parties, etc.

Deuxième objectif. Apprendre à combiner égalités et inégalités pour en déduire un encadrement.

3. Bilan global

Quelques remarques d'ordre général.

Sur l'adhésion de la classe au dispositif de recherche "TP".

Un point positif : alors qu'un mois s'est écoulé depuis le dernier TP (interruption due aux vacances de Février, et à l'organisation d'un bac blanc), le contrat de recherche fonctionne bien (la mise au travail est très rapide, et le travail régulier pendant toute l'heure) ;

Un point négatif : il faut signaler cependant que quelques élèves manquent à l'appel (il y a une interrogation écrite de Biologie l'après-midi). Les absences répétées de certains élèves sont assez significatives de leur désintérêt pour l'activité de recherche.

Sur le type de travail réalisé.

Une constatation s'impose pour tous les observateurs : le travail papier/crayon est beaucoup plus développé que d'habitude. Ce TP se situe à la fin du cours sur l'intégration. Aussi les références sont nombreuses, en particulier celles relatives à l'intégration par parties.

Les leçons du dernier TP sont aussi mémorisées : personne n'oublie le signe "multiplié" entre x et lnx, les rapports entre n et x sont (à peu près) compris.

La rationalisation du travail fait gagner du temps, mais, en revanche, semble réduire la recherche de points de vues différents. Il n'y a que 4 groupes qui observent le comportement de la fonction, et considèrent l'intégrale du point de vue de l'aire. On peut aussi considérer cela comme un renversement "naturel" de tendance :

- lors du précédent TP, les élèves s'étaient interrogés sur la nature d'un objet similaire : était-ce une intégrale, ou une suite ? La suite d'intégrales étant stationnaire, ils avaient essayé d'en comprendre la raison en observant le comportement de la fonction à intégrer ;
- pour ce TP, la suite semble décroissante, et il y a une pression naturelle pour utiliser les outils habituels d'investigation des suites : tableau de valeurs, graphique de suite...

Sur les résultats des groupes.

On a noté pour chaque groupe les points suivants :
- Fonc : y a-t-il eu étude de la fonction x(lnx) (variations, graphique...) ;
- Exact : y a-t-il eu calcul des valeurs exactes des premiers termes de la suite ;
- Table : y a-t-il eu observation d'une table de valeurs approchées de la suite ;
- Time : y a-t-il eu observation d'un graphique de la suite ;
- IPP : y a-t-il eu intégration par parties ;
- Var : y a-t-il eu preuve de la décroissance de la suite ;
- Conv : y a-t-il eu preuve de la convergence de la suite ?

	Fonc	Exact	Table	Time	IPP	Var	Conv
1					Oui	Oui	
2		Oui	Oui		Oui	Oui	
4			Oui				
5			Oui	Oui	Oui		
5 bis	Début		Oui		Oui	Oui	
7			Oui		Oui		
8			Oui		Oui		
9				Oui	Oui		
10	Oui	Oui			Oui		
11		Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	
12			Oui	Oui	Oui	Oui	
13		Oui	Oui		Oui		
14	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
15	Oui		Oui		Oui		
16			Oui		Oui		

Le succès de l'intégration par parties, et de l'observation d'une table de valeurs de la suite, attire l'attention sur les groupes qui ont fait autre chose : le calcul des valeurs exactes de quelques termes de la suite, l'étude de la fonction pour elle-même, sont sans doute révélateurs du type de travail réalisé.

4. TP et typologie.

Cécile, de type théorique.

Après avoir constaté que l'intégrale existait bien, elle entame une intégration par parties, qu'elle n'arrive pas à mener à bien : en effet, elle ne reconnaît pas I_{n-1} dans la deuxième partie de l'expression, et recommence une nouvelle intégration par parties...

Conclusion: "l'intégration par parties ne permet pas d'avancer ; autre méthode, l'observation graphique dans le fichier suite : la suite semble décroissante...".

Puis elle aborde l'étude de la fonction $x(\ln x)^n$, la dérive... et ne sait pas qu'en faire.

Elle revient alors l'intégration par parties, toujours "à la main", qu'elle mène cette fois-ci à bien.

Elle démontre alors la décroissance de la suite, par étude du signe de $I_{n+1} - I_n$. Conclusion : "la suite est bien décroissante. Elle semble converger vers une limite finie". Et le TP s'arrête là.

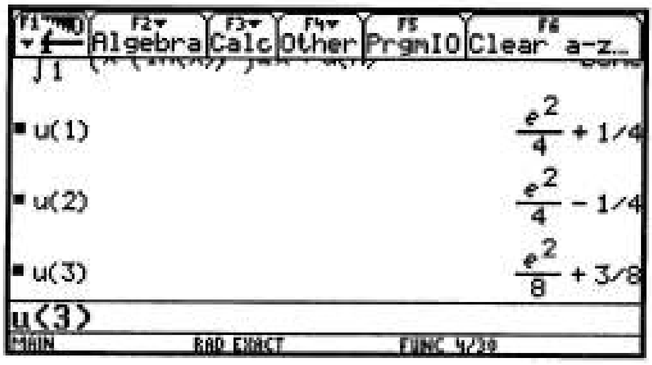
Le travail ne va pas très loin lors de ce TP (on note une certaine lassitude). On reconnait cependant le type de travail habituel de Cécile : un travail qui consiste à s'intéresser au objets globalement, plutôt qu'à des points particuliers (ainsi elle commence par une intégration par parties au lieu d'observer les premiers termes de la suite, elle commence l'étude de la fonction $x(\ln x)^n$). Le TP s'achève d'ailleurs par une interrogation : "mais qu'est-ce que cela veut dire, finalement, qu'une suite converge ?".

Michaël, de type rationnel

Il fait d'emblée l'intégration par parties (à la main), et trouve la relation entre deux termes successifs de la suite. Pendant ce temps, sa voisine calcule les valeurs exactes des premiers termes de la suite. Le passage aux valeurs approchées (il a fallu qu'un observateur pose la question : "que penses-tu de l'évolution de cette suite ?") permet de faire des pronostics d'évolution. Michaël prouve alors cette décroissance. Puis, utilisant la relation de récurrence et l'inégalité de décroissance, il arrive à encadrer le terme général de la suite. Il n'utilise pas ce résultat pour prouver la convergence de la suite vers 0.

En fait, depuis le début du TP, il a une idée en tête : le calcul exact des premiers termes de la suite (que fait bien la calculatrice), et l'apparente régularité des résultats, n'induisent-ils pas l'existence d'une formule générale simple ?

C'est pourquoi l'encadrement trouvé ne lui semble être qu'une première approche, insatisfaisante.



Il fait d'ailleurs référence au TP n°12, qui avait permis de déterminer la forme générale de la dérivée nième d'une fonction. Il termine le TP par la recherche d'une telle forme générale pour I_n. On le voit, il y a là de réels progrès dans l'investissement, et les résultats, de la recherche...

Caroline, de type scolaire.

Caroline évoque d'abord la continuité de la fonction pour prouver l'existence des intégrales. Puis elle mène à bien l'intégration par parties.

Elle calcule alors les valeurs exactes des premiers termes de la suite, et observe une table de valeurs approchées de la suite : "en observant une table de valeurs de I_n, on se rend compte que I_n est décroissante". Le TP s'arrête là.

Le contexte du cours est toujours présent, certaines leçons ont été mémorisées (distinction valeurs exactes/valeurs approchées).

En revanche la difficulté demeure quant aux démonstrations : en l'absence de généralisation, ou de validation, c'est "l'observation" qui permet de "se rendre compte".

Alexandre, de type bricoleur.

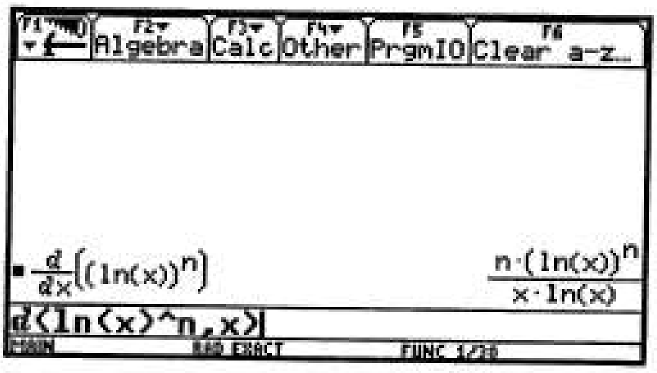
C'est l'habituel partenaire de Laurent, qui aujourd'hui n'est pas là.

Il commence par l'évocation d'un théorème faux : "la fonction est définie, donc son intégrale existe". Puis une observation graphique des premiers termes de la suite : "en observant la table de valeurs, on peut constater que la suite est décroissante".

Une tentative de démonstration du caractère décroissant de la suite, par étude du signe de $I_{n+1} - I_n$, n'aboutit pas.

Puis Alexandre passe un long moment sur l'intégration par parties (assisté par calculatrice), n'arrivant pas à interpréter une dérivée donnée par la TI-92.

Après discussion avec les groupes voisins, il arrive à achever cette intégration par parties.



On sent qu'un effort est fait (évocation de théorèmes d'existence, tentative de démonstration...). Mais le fond du travail reste encore une attitude de "constatation" des résultats affichés par la machine, ce qui pose problème quand ces résultats n'ont pas la forme attendue...

Fabienne, de type expérimentateur.

Elle commence par une intégration par parties, et obtient une relation entre deux termes successifs de la suite.

Question : "à quoi cela pourrait-il servir ?".

Fabienne évoque alors un exercice du cours où la combinaison d'une inégalité et d'une relation de récurrence avait permis d'obtenir une limite. Comment obtenir une inégalité ? Christelle pense à l'inégalité de la moyenne : Fabienne l'applique à l'intégrale en question : $0 \leq I_n \leq e^2 - e$. En remplaçant alors I_n par $\frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, elle peut encadrer I_{n-1}, et prouver alors que I_{n-1}, donc I_n, converge vers 0.

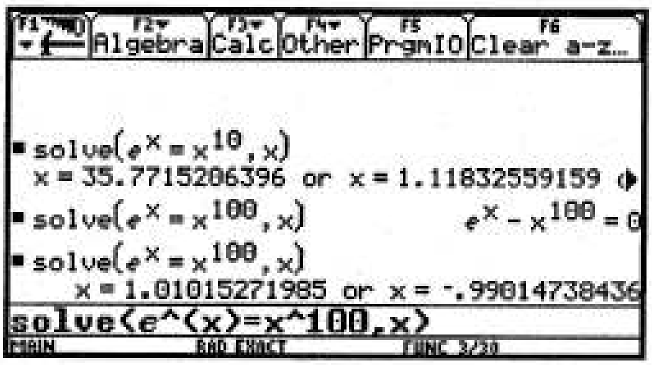
Après avoir réglé le comportement à l'infini de la suite, Fabienne revient au comportement global : calcul exact et approché des premiers termes, table de valeurs approchées, graphique en mode Time : la suite semble décroissante et positive.

Le TP s'achève par la preuve de la décroissance de la suite.

On retrouve ici la stratégie d'accumulation d'informations (pour l'observation de la décroissance de la suite). Mais il y aussi de nouveaux traits qui apparaissent : la réflexion sur certains éléments s'approfondie, la recherche de références s'organise...

Finalement, pour tous les groupes "qui ont joué le jeu", on peut noter des progrès réels dans l'organisation des recherches (même quand les "tendances lourdes", caractéristiques du type de travail repéré, continuent à se manifester !).

Bilan du TP n°17



TP traité avec les TI-92.

1.Le travail donné aux élèves

TP n°17

On se propose ici d'étudier les équations $e^x = x^{10n}$, n étant un entier strictement positif. (la première équation est donc $e^x = x^{10}$, la deuxième est $e^x = x^{20}$, etc).

1. Combien de solutions a chacune de ces équations ? (prouvez votre réponse !)
2. Pouvez-vous donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut des solutions de la première, de la deuxième, de la troisième, de la dixième équation ?
3. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur le comportement des suites de solutions quand n augmente ?
4. Pouvez-vous démontrer certaines de ces conjectures ?

Ce TP reprend, en les reformulant, les questions posées dans le TP 9 (mais à ce moment là, les élèves ne disposaient pas des TI-92).

2.Le cadre de travail.

Le thème

Etude comparée des fonctions exponentielles, puissances, et logarithme.
En fait, c'est le dernier TP d'analyse de l'année, et il recouvre une bonne partie du programme de TS.

Les questions problématiques.

L'énoncé a été choisi pour faire émerger deux questions principales :
- y a-t-il toujours une "grande" solution positive (alors que pour n = 2, la calculatrice ne signale plus qu'une solution positive) ? ;
- comment organiser les résultats sous forme de "suites" de solutions (l'énoncé est volontairement vague sur ce point) ?

Les objectifs pédagogiques.

Se familiariser encore et toujours avec les fonctions de référence.
S'entraîner encore et toujours à faire varier les représentations d'un même objet (ici une équation), prendre de la distance avec les résultats "bruts"de la calculatrice (surtout quand ceux-ci sont donnés en calcul approché).
Apprendre à organiser la complexité pour en faire ressortir des régularités (pour le comportement des suites de solution).
Dès la formulation de conjectures, se poser le problème de la preuve, de la collecte de premiers jalons de démonstration.

3.Le bilan global.

Remarques générales.

Sur le "contrat de recherche".

Ce TP est l'objet d'une deuxième observation minutée (cf le chapitre 1 de ce volume, consacré à la typologie). Mais le travail de la classe est assez peu troublé par la présence des observateurs supplémentaires. Les 5 élèves suivis de plus près dans le cadre de la typologie "subissent" une observation minutée de leurs faits et gestes, ce qui va modifier pour deux d'entre eux le travail réalisé.

On constate que tous les groupes s'investissent avec sérieux, et pendant toute l'heure, dans la recherche [17].

Mieux, on constate un investissement dans la recherche de deux élèves jusque là assez réticents. Deux illustrations :

Guilhem (théorique) : il n'utilise que très peu la calculatrice d'habitude. Dès la lecture de l'énoncé, il constate "on a déjà fait un TP de ce genre". Il le retrouve dans son cahier, reproduit la même méthode. Il démontre ainsi l'existence des deux racines positives. Puis il jette un coup d'oeil à la machine, repère une racine négative, et reprend alors la résolution théorique pour prouver l'existence de cette racine. Cet aller-retour entre observation et démonstration est assez nouveau...

Nikola (rationnel) : étudie la différence $e^x - x^{10n}$. Il commence par une observation graphique. Deux racines localisées, puis remarque : "on voit que la fonction finit par émerger des négatifs et tranche l'axe des abscisses entre 35 et 36". Et il me pose la question : "vaut-il mieux étudier la différence des deux fonctions, ou l'égalité des fonctions ?". Je lui retourne la question. Après réflexion, il répond : "en considérant séparément la fonction exponentielle et la fonction puissance, c'est plus simple, parce que je les connais bien". Un graphique réalisé à l'instant confirme alors la présence des trois solutions. Une telle réflexion n'était pas de son "style" en début d'année...

Sur les rapports avec la calculatrice.

On ne peut pas en conclure de ce qui précède que les rapports avec la calculatrice sont réglés, et de la même façon pour tous :

- certains élèves utilisent très peu leur calculatrice, dès lors qu'ils ont identifié une question "de cours". Ainsi Jérôme L. (théorique) : aucune observation au départ. Etude du cas particulier n = 1, puis du cas général sur $\mathbb{R}+$, via un passage au logarithme. Puis remarque : "l'équation de départ est définie sur $\mathbb{R}$. Il faut donc vérifier si on n'oublie pas une ou plusieurs solutions sur $\mathbb{R}-$". Etude, preuve, et conclusion : "il y a une troisième solution sur cet intervalle". Le TP s'arrête sur cette remarque : "cette question (de la recherche des valeurs approchées) nous semble pouvoir être résolue graphiquement grâce à la fonction zéro. Manque de temps". L'essentiel du TP a ainsi été fait sans recours à la machine, et sans localisation des racines.
- à l'inverse, d'autres élèves passent l'heure à trafiquer leur calculatrice, en dehors de tout sens mathématique : ainsi Etienne (bricoleur), qui étudie des tables de valeurs pour e^x et x^{10} séparément, avec des pas de plus en plus fins, et qui m'appelle : "mais aucune de ces deux fonctions ne s'annule, comment pourraient-elles être égales ?".

Sur les résultats finaux des groupes.

Le tableau ci-dessous ne rend pas compte de la richesse du travail de certains groupes, des premières erreurs, des retours critiques, des rectifications...

Il s'agit bien des résultats finaux, qui donnent malgré tout quelques indications utiles sur le travail réalisé par la classe. On a repéré :

- Géné : y a-t-il eu résolution générale de l'équation, avec combien de solutions (notées, dans l'ordre, a, b et c) ;
- 1°équ, 2°equ, 3°équ, 10°équ : combien de solutions (et lesquelles), trouvées aux équations pour n = 1, n = 2, n = 3, n = 10 ;

[17] Une observatrice, enseignante de mathématiques, présente pour la première fois dans la classe, relève cela comme élément marquant de sa visite : "tous les élèves travaillent, et toute l'heure !".

- Metho : avec quelle méthode ces équations particulières ont-elles été résolues ;
- Suite : y a-t-il eu organisation des résultats pour une mise en forme de "suites" de solutions ;
- Var : y a-t-il eu conjectures sur le sens de variation des suites ;
- Lim : y a-t-il conjectures sur les limites des suites ?

Group	Géné	1°équa	2°équa	3°équa	10°équ	Métho	Suite	Var	Lim
1	abc								
2	abc	abc	abc	abc	abc	Solve	Oui	Oui	Oui
4		abc	abc	abc	abc	Solve Graph Calc			
5		abc				Graph Calc			
5bis	bc	ab	ab	ab	ab	Graph	Oui	Oui	
6	abc								
7	bc	ab				Graph			
8	a?bc	ab	ab	ab	ab	Solve	Oui	Oui	
9	bc	ab				Graph			
10	abc	abc	ab	ab	ab	Solve			
11	abc								
12	abc								
13		abc	ab	ab	ab	Solve Calc			
14	bc	bc	bc	bc	bc	Graph Solve	Oui	Oui	
15	bc	abc	ab	ab	ab	Solve			
		bc				Graph			

Dans ce tableau apparaissent quelques éléments significatifs :

- l'aptitude à l'abstraction (certains groupes ne traitent que la question générale, d'autres ne traitent que les exemples) ;
- l'appropriation du nouvel outil (certains groupes traitent la résolution des équations dans l'application initiale, d'autres dans l'application graphique - comme ils l'auraient fait avec des calculatrices graphiques "ordinaires"-, d'autres groupes enfin traitent les équations dans les deux applications !) ;
- l'habileté dans l'utilisation de la TI-92 : elle est manifestée par les groupes qui trouvent des valeurs approchées pour toutes les solutions des trois équations ;
- l'aptitude à la coordination (certains groupes trouvent 2 solutions positives dans le cas général, 2 solutions de signe opposé dans chacun des exemples, et ne relèvent pas la contradiction...) ;
- l'aptitude à l'organisation des données : elle est manifestée par les groupes qui arrivent à organiser les solutions en suite de réels, à dégager des régularités, ou une évolution...

4. TP et typologie.

Examinons plus en détail le travail des 5 élèves habituels, suivis dans le cadre de "l'observation minutée", ce qui pourra nous donner quelques informations supplémentaires sur le travail réalisé.

Cécile, élève de type théorique.

L'observation de la feuille d'observation minutée indique une alternance de phases de durée moyenne (3 mn) de travail écrit, et de travail machine, quasiment exclusivement dans l'application graphique.

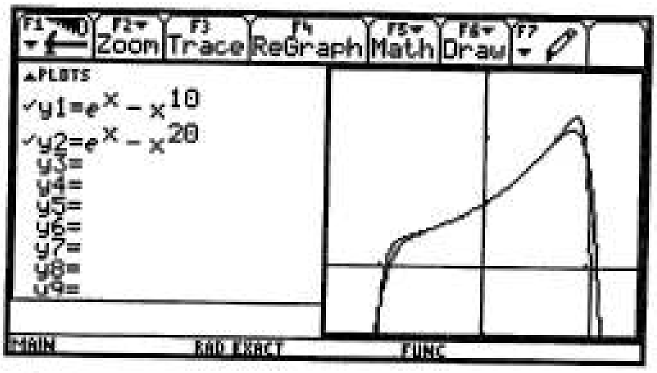
Cécile observe rapidement les courbes en présence, uniquement sur ℝ+ (la référence au TP n°9 est faite oralement : il se déroulait bien sur cet intervalle !) "il doit y avoir deux solutions". La démonstration précise est faite, par recours au logarihme, et application très soignée du théorème de la bijection. Il y a bien deux solutions !

Cécile passe alors à l'étude des exemples. Elle ne prend pas l'équation avec les logarithmes, mais revient à l'équation de départ.

Par soustraction ("il est plus simple de considérer une seule fonction"), elle observe la courbe de $e^x - x^{10}$, de $e^x - x^{20}$...

Par utilisation de la commande "Zero" de l'application graphique, elle trouve bien deux solutions... mais ce ne sont pas les deux solutions positives dont l'existence a été démontrée plus haut.

Et Cécile ne remarque pas la contradiction.



En fait, Cécile va vite, pour avoir le temps de traiter la dernière question, sur l'évolution des deux familles de solutions repérées. Elle remarque que les deux suites sont décroissantes, qu'elles "semblent se stabiliser".

Conclusion : "plus n est grand, plus les valeurs des solutions diminuent (prévisible par le décalage des courbes vues). Donc elles diminuent faiblement toutes les deux. Conservent-elles le même écart entre elles ? Oui, et cet écart est environ 2."

On retrouve dans ce travail l'intérêt spéculatif, la bonne mobilisation des références du cours, la volonté de "voir" les objets manipulés (d'où le choix ici de l'application graphique), et une certaine faiblesse dans le croisement des résultats successifs.

Michaël, élève de type rationnel.

Comme d'habitude, il fonce. Effet pervers de l'observation minutée, il ne communique quasiment pas avec sa collègue avec laquelle les échanges sont habituellement nombreux (et de type "pédagogique", ce qui le contraint à opérer un recul profitable sur son propre travail).

Il fonce donc, sans avoir recours à la calculatrice. L'observation minutée le confirme : pendant les 15 premières minutes, il y a lecture du cours (5mn), et étude de fonction (10mn). Et il refait les mêmes erreurs que lors du TP 9, c'est-à-dire que le passage au logarithme lui fait oublier la racine négative. Comme il ne vérifie pas, et que, absorbé par les calculs, l'écriture précise des théorèmes, il n'a pas ces références en tête, cette solution lui échappe.

En passant, je fais surgir par une remarque le problème : "les deux équations (avec et sans logarithme) sont-elles équivalentes ?". Il repère le problème. Du coup, son travail est réorienté à partir des fonctions de référence. Coup d'oeil à l'application graphique (2mn), et retour à la preuve écrite de l'existence d'une troisième racine.

Les racines sont localisées dans l'application initiale (commande Solve).

Question : quelles suites faut-il envisager ? Il se prononce pour distinguer trois familles de suites . L'étude est faite par mobilisation conjointe de l'application initiale, et de l'application graphique.

Les conclusions, en langage imagé, sont accompagnées de dessins explicites :

- "b, de plus en plus proche de 1 au fur et à mesure que le degré évolue, car $x < 1$, $x^{10n} \simeq 0$, $x > 1$, x^{10n} croît très rapidement ;
- "c, de plus en plus grand, car l'exponentielle met du temps pour rattraper la puissance. La limite de c, quand n tend vers $+\infty$, est $+\infty$;
- " quand x est négatif, x^{10n} se rapproche de e^x en -1" .

Il y a là il me semble un progrès dans l'investissement de la recherche, l'interaction des différents registres de représentation des objets, la qualité d'investigation. Tout ceci semble bien être le résultat d'une année de sollicitations par l'action. Notons que c'est à partir d'une interpellation d'un "observateur" que le travail a pris une nouvelle tournure. On l'a remarqué à d'autres reprises : c'est quand il y a un élément dérangeant, un déséquilibre dans l'action, que ce type d'élève accepte de sortir d'une stratégie routinière. On apprend par déséquilibre et rééquilibre, ce n'est pas nouveau... Simplement, il faut arriver à produire de telles situations...

Caroline, de type scolaire.

C'est Rachel qui est observée, mais c'est Caroline qui écrit le rapport de recherche. On distingue dans le travail du groupe des phases (3mn) de travail machine (aussi bien dans l'appl cation initiale que dans l'application graphique) des phases d'échange, des phases de calcul sur papier.

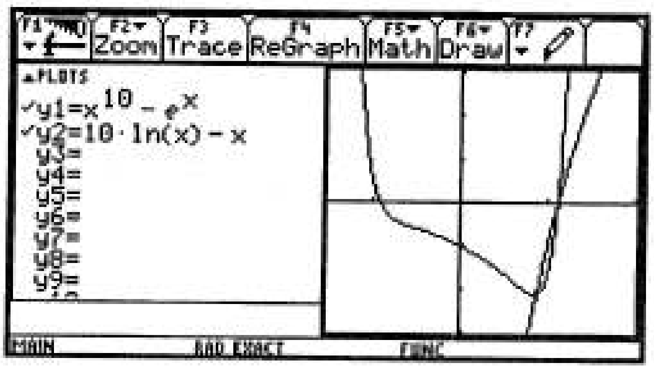
Il y a d'abord utilisation de Solve dans l'application initiale, pour déterminer des valeurs approchées des solutions des trois premières équations : repérage de 3 solutions pour la première équation, 2 solutions pour les suivantes. Il n'y a pas de remarques particulières sur la différence du nombre de solutions entre ces différentes équations.

Puis le groupe aborde l'étude de l'équation en exponentielle (c'est-à-dire que le recours aux logarithmes n'a pas été mémorisé). Remarque : "cette fonction est trop compliquée, on va la transformer" (30mn après le début du TP).

Elles passent alors aux logarithmes : étude des variations de la fonction x - lnx (on notera que c'est une fonction particulière qui est étudiée, et pas la fonction sous sa forme générale), tableau de variation et vérification graphique. Un observateur passe alors près du groupe, Rachel lui dit "on est coincé, on ne trouve pas pareil par le calcul, et graphiquement". Et pour cause : elles observent sur leur machine la fonction $e^x - x^{10}$, et pas du tout la fonction x - 10lnx, dont elles viennent d'étudier les variations...

On comprend la surprise du groupe quand, au lieu de la deuxième fonction attendue, elles ont vu apparaître le graphique de la première fonction...

Il semble bien que cette erreur provienne d'une confusion : pour elles, si les équations sont équivalentes, les fonctions le sont aussi.



Après une question "inductrice" de l'observateur (quelle est la fonction dont vous observez le graphique ?), Rachel remarque l'erreur.

Rassurées, elles retournent donc à leur tableau de variation. Mais celui-ci est assez fantaisiste : l'étude se fait aussi sur les négatifs, alors qu'il s'agit d'une fonction logarithme. Les limites de f qui sont reportées sont en fait les limites de sa dérivée...

On retrouve bien là les caractéristiques repérées de ce type de travail : croisement très difficile des informations issues de plusieurs registres, et même à l'intérieur d'un même registre, réutilisation difficile des résultats antérieurs (peu de références immédiatement mobilisables), difficulté à généraliser.

Laurent, de type bricoleur.

L'observation minutée fait apparaître de longues plages de discussion avec le voisin, mais aussi avec le groupe de derrière, de devant... Les discussions avec le voisin sont un peu déséquilibrées : Laurent a parfois des idées qu'il veut mettre en pratique. Alexandre réagit : "non, il ne faut pas faire comme cela !", et, après quelques protestations, Laurent suit.

Les phases de travail sont beaucoup plus "hâchées" que pour le groupe précédent.

On constate dès le départ un manque de réflexion sur les objets en présence. Laurent rentre $e^x - x^{10n}$ dans le fichier de fonctions et essaie de tracer la courbe. Refus de la machine ("undefined variable"). Il essaie alors dans le fichier de suite. Sans plus de succès évidemment. Il pose alors la question : "pourquoi cela ne marche-t-il pas ?"...

Un observateur attire l'attention du groupe sur le sens des différentes parties de l'expression en question...

Laurent choisit alors des valeurs particulières de n. Puis le groupe décide d'utiliser la fonction logarithme, par référence aux TP déjà effectués, ou aux travaux des voisins. Et le groupe lance la commande Solve avec l'équation en logarithme. Deux solutions sont distinguées pour chacune des équations. La démonstration reste extrêmement allusive : "nous savons que la fonction puissance croît plus vite au départ que la fonction exponentielle, donc nous pouvons affirmer qu'il y a deux solutions à l'équation".

Même sur ce point décisif, il n'y a pas tout à fait consensus. Laurent dit : "je ne suis pas sûr, on devrait faire $e^x - x^{10}$ "...

Finalement, le groupe en reste là pour la validation de cette résolution, et se pose le problème de la question suivante : comment parler de "suites de solutions" ? Alexandre propose de passer dans le fichier "séquence" de la machine.

Un observateur leur demande : "avez-vous tenté de résoudre l'équation initiale, sans transformation, avec "Solve" ? Le groupe s'exécute, et découvre alors, pour $e^x - x^{10}=0$ trois solutions : les deux solutions déjà trouvées, et la solution négative. Gros dilemme pour le groupe...: discussion avec les autres élèves (derrière, devant). Alexandre affirme qu'il ne peut pas y avoir de solution négative, Laurent affirme que si. Finalement, à force d'observations et de discussions avec les groupes voisins qui sont plus avancés, le consensus sur cette solution négative se fait. Mais il n'y a pas l'ébauche d'une démonstration : "Nous remarquons que lorsque la fonction exponentielle est dans l'intervalle $]-\infty, 0]$, elle coupe les fonctions x^{10n} en un point. Il y a donc trois solutions à l'équation.".

On le voit, il n'y a seulement des descriptions, ou l'évocation vague de propriétés du cours. L'observation fait loi, avec certaines qualités de cohérence. Une marque de progrès cependant pour ces élèves en fin de TP : l'éventail des fonctions puissances est tracé, coupé par la fonction exponentielle, avec l'indication :"il y aura une autre solution quand la fonction exponentielle aura rattrapé la fonction puissance". Ce passage semble essentiel : alors que ces élèves en début d'année se contentaient de dire "je vois", là, ils "donnent à voir". Il y a à la fois là la nécessité d'une argumentation qui apparaît, et la construction d'éléments qui sortent de la machine pour faire référence.

Cependant, tout cela reste fragile. En fin de TP, Laurent, pour vérifier la cohérence de tout cela, résout l'équation $e^x - x^{20} = 0$ en valeurs approchées dans l'application initiale. Il ne trouve que deux valeurs. Cri du coeur : "je rêve !"...

Fabienne, de type expérimentatrice.

Fabienne est gênée, parce que, au fil des TP, une "complémentarité dirigée" s'est installée entre Christelle et elle : c'est elle qui travaille plutôt sur la papier, et c'est sa voisine Christelle qui manipule la machine. Mais aujourd'hui, elle est observée, et, en plus, sa calculatrice est reliée à une tablette de rétroprojection... Elle se sent contrainte d'utiliser la machine plus systématiquement.

Elle commence par quelques manipulations dans l'application graphique, assez maladroites : on sent que le fait d'être observée constitue une gêne. Après quelques observations ("on dirait qu'il y a toujours deux solutions"), le groupe passe à des calculs à la main.

Elles commencent par la résolution en logarithme de l'équation générale, et prouvent l'existence de deux racines positives.

Puis elles utilisent la calculatrice, d'abord en mode graphique, avec l'équation en logarithme. Elle ne voit qu'une solution : "mais que se passe-t-il" ? Fabienne repasse alors dans l'application initiale, utilise Solve, et récupère les deux solutions positives. Retour au graphique, choix d'une fenêtre adaptée, et visualisation des deux solutions.

Puis une question émerge : en passant aux logarithmes, on a restreint l'étude aux positifs ; que se passe-t-il sur les négatifs ? Fabienne interpelle un observateur : les fonctions puissances sont définies sur quel intervalle ? L'observateur retourne la question : sur quel intervalle est définie la fonction carrée ? La fonction racine carrée ? La fonction inverse ? La fonction "puissance π" ? Elle réenvisage la question, reprend la première équation $e^x - x^{10} = 0$ avec Solve, et détecte la solution négative, accompagnée des deux solutions positives connues. Nouvel essai, avec n = 2. Elle utilise alors la commande Solve, avec la précision "sachant que", ce qui lui permet de récupérer, avec l'équation initiale, la "grande" solution.

La preuve est traitée avec un seul raisonnement aux limites... qui n'assure pas l'unicité de cette solution.

Le TP se termine par une observation du comportement des solutions : "les solutions positives s'éloignent, la pemière solution se rapproche de 0, la deuxième solution est de plus en plus grande. La solution négative est de plus en plus petite" (on remarque que les observations sont faites sur le comportement global (les variations") des suites, et pas du tout sur les limites de celles-ci).

On retrouve dans ce travail la multiplicité des points de vue, le croisement des informations, quelques faiblesses dans les références (comme dans le TP 10, des questions sont posées sur la définition des fonctions puissances).

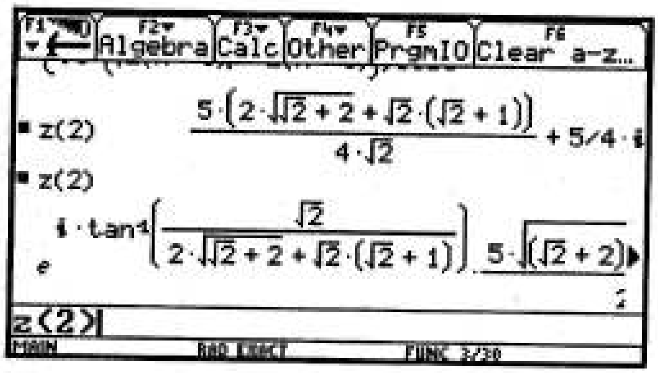
Pour finir, deux remarques d'ordre général :

- <u>sur l'intérêt des TI-92</u> : la comparaison avec le TP 9, sur le même thème (mais traité avec des calculatrices graphiques), fait apparaître une différence assez nette. L'activité des élèves est plus dense, les registres considérés plus variés. Il est difficile de faire la part de ce qui relève de la machine, et de ce qui relève de "l'habitude des TP". On peut noter cependant (même si l'outil de calcul formel n'est pas vraiment sollicité dans ce TP) que le fait d'avoir à gérer <u>deux</u> applications distinctes (une application initiale, et une application graphique) implique <u>naturellement</u> une activité de comparaison, qui semble porter ses fruits ici ;

- <u>sur l'évolution des élèves</u> : on a affaire ici à un sujet de recherche assez foisonnant, qui constitue une sorte de synthèse du cours d'analyse de l'année. C'est une stimulation pour les élèves théoriques, rationnels, expérimentateurs. Par contre, on sent bien que pour les élèves scolaires, la quantité d'informations à gérer est trop grande : ils se réfugient donc dans des observations partielles. Quant aux élèves bricoleurs, l'importance du panorama ne constitue pas un obstacle : ils vont simplement parcourir le lieu de l'action, avec la seule mobilisation de la calculatrice. Toute validation théorique des constatations disparaît alors.

On le voit, les performances des uns et des autres sont liées d'assez près au thème, à l'amplitude, et à la formulation du TP...

Bilan du TP n°18



Dernier TP de l'année, traité avec TI-92

1.Le travail donné aux élèves

TP n°18

On considère la suite complexe définie par :
$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ (où $|z_n|$ représente le module de z_n)
$z_0 = 5 + 5i$
Etudier l'évolution de cette suite.

Notations : on appellera x_n et y_n les parties réelles et imaginaires de z_n, r_n et a_n le module et l'argument principal de z_n, et M_n l'image de z_n (M_n a donc pour coordonnées x_n et y_n).
Indication :
- on peut représenter graphiquement la suite des points M_n, en utilisant le fichier de suites. On rentre en u1 la suite x_n, en u2 la suite y_n. Dans le Menu F7 (Axes), on choisit CUSTOM, et on sélectionne pour X Axis : u1, et pour Y Axis : u2.
Ainsi, en graphique, apparaîtront les points de coordonnées x_n et y_n, c'est à dire les points M_n. Et on trouvera, dans la table de valeurs, les valeurs approchées des termes successifs des suites (x_n) et (y_n) ;
- on peut aussi travailler en mode exact, en restant dans l'application initiale, avec la syntaxe : When(n=0, z_0, $\frac{1}{2}$(z(n-1) + |z(n-1)|)) STO z(n)

2.Le cadre de travail

Le thème.
Les complexes, et les suites.

La question problématique.
Quelles sont les méthodes d'étude qui peuvent être transférées des réels aux complexes ?

Les objectifs pédagogiques
Faire jouer à propos des complexes (qui s'y prêtent bien) toute la panoplie des changements de représentation :
- forme algébrique, ou exponentielle ;
- observation numérique, ou graphique ;
- travail en calcul exact, ou calcul approché.
Apprendre à trier l'information, et à faire des choix de démonstration ("qu'est-ce-que je peux démontrer à peu de frais, en quoi cela me servira-t-il pour la suite...").

3.Le bilan global.

Une remarque préalable sur la théorie et la pratique...

Le bilan de ce TP rappelle l'importance de distinguer entre deux possibilités :
- la possibilité, théorique, d'utiliser un outil de calcul donné pour croiser différentes informations, varier les registres de représentation d'un même objet ;
- la possibilité, pratique, pour les élèves, d'utiliser la calculatrice dans ce sens.

Ainsi, dans le cadre de ce TP, la TI-92 permettait, pour qui savait l'utiliser dans ce sens, de multiplier les points de vue sur la suite donnée.

Cependant les élèves n'étaient pas en mesure d'utiliser toutes ces possibilités : les complexes étaient vus en classe depuis une semaine. Même si les différents modes de représentation des complexes sur la TI-92 avaient été vus, ceci était trop frais pour pouvoir être réinvesti dans une activité de recherche.

Il y a un lien assez complexe entre la compréhension d'une notion, et sa manipulation dans des registres différents : l'une permet l'autre... et réciproquement !

On constatera "donc" assez peu de changements de points de vues dans ce TP.

D'autant que se greffait sur cette difficulté propre aux complexes une difficulté supplémentaire : il s'agissait d'étudier une suite de nombres complexes, ce qui nécessitait une adaptation des routines habituelles pour accéder par exemple à une représentation graphique...

Bref, il y avait là un concentré de difficultés qui a rendu la recherche un peu difficile. Le fait que ce TP ait été annoncé comme étant le dernier de l'année, et se situait deux jours avant un bac blanc commun à toutes les classes Terminales du lycée n'arrangeait pas les choses...

<u>Un petit tour des travaux des groupes maintenant.</u>

On considèrera ce récapitulatif avec prudence : les élèves sont un peu en retrait (l'activité est un peu molle, et les rapports de recherche sont beaucoup moins fidèles) ; dans cette situation, on a déjà vu que les observateurs sont un peu plus inducteurs...

Il y a donc, dans les cahiers de recherche, des résultats qui n'y auraient pas été sans une certaine pression -implicite- des observateurs. Et il n'y a pas des résultats qui y auraient été avec un rapport plus "vrai" par les élèves de leurs propres activités de recherche [18].

Mais enfin, tout bilan contient des informations utiles. Il faut simplement le remettre dans son contexte. Ce qui vient d'être fait.

On a distingué dans le tableau ci-dessous les éléments suivants :

- Alg : y a-t-il eu écriture des deux suites récurrentes des parties réelles et imaginaires ?
- Pol : y a-t-il eu considération de la forme polaire de z (main, ou machine) ;
- Géom : y a-t-il eu un dessin représentant point, affixe, parties réelles et imaginaires, et module/argument ?
- Exac : y a-t-il eu calcul exact des premiers termes de la suite (main, ou machine) ;
- Sépa : y a-t-il eu étude séparée des deux suites Re(z) et Im(z), sous forme de table, ou sous forme graphique ?
- Comb : y a-t-il eu étude combinée de ces deux suites (Table ou Graphe), ce qui revenait à considérer la "suite de points" ;
- Conj R : y a-t-il eu conjecture sur l'évolution des parties réelles (variation, ou limite) ;
- Conj I : y a-t-il eu conjecture sur l'évolution des parties imaginaires (variation, ou limite) ;
- SuitG : a-t-il été vu que la suite des parties imaginaires était une suite géométrique;
- ConjA : y a-t-il eu conjecture sur l'évolution des arguments ;
- ConjM : y a-t-il eu conjecture sur l'évolution des modules ?

Il est clair que les réponses dans les quatre premières rubriques sont significatives des capacités à changer de registre de représentation d'un objet donné ;

Quant à la possibilité de traiter conjointement les deux suites Re(z) et Im(z), elle est significative de l'aptitude à utiliser de nouvelles commandes de la TI-92 ;

---

[18] Information complémentaire, et personnelle : c'est le seul TP pour lequel je n'étais pas présent. Je réalise qu'il est toujours difficile de comprendre les détails d'une recherche à la seule lecture des cahiers des élèves et des rapports des observateurs. La compréhension profonde des choses nécessite de capter, sur le moment, une foule d'informations qui permettent de relier, ensuite, les traces écrites.

Les conjectures émises sont évidemment révélatrices des capacités d'observation, d'organisation de l'information ;

Quant à la reconnaissance d'une suite géométrique, elle permet de noter l'aptitude, dans une activité de recherche, à récupérer des références du cours.

Gr	Alg	Pol	Géom	Exact	Sépar	Comb	ConR	ConI	SuitG	ConA	ConM
1	Oui				Graph				Oui		
2	Oui	Main		Main							
4	Oui	Mach				Table Graph		Lim	Oui		
5	Oui	Main	Oui								
5bis	Oui		Oui		Table Graph	Table Graph	Var Lim	Lim	Oui		
6	Oui				Graph	Graph			Oui		
7	Oui			Main					Oui		
8	Oui	Mach				Table	Var	Var			
9				Main		Graph	Lim	Var Lim	Oui		
10	Oui	Mach				Table	Var	Var			
11	Oui			Main		Table	Lim	Var Lim	Oui	Lim	
12	Oui		Oui			Table	Lim	Var Lim	Oui	Var	
13	Oui				Graph	Graph	Lim	Lim	Oui		
14	Oui		Oui			Table Graph	Var Lim	Var		Var	Var
15	Oui					Table Graph	Lim	Var Lim	Oui		
16	Oui							Var	Oui		

<u>Trois remarques sur ce tableau.</u>

La première relative aux rapports entre deux colonnes.

Il est clair qu'il y a une relation directe entre la colonne "SuiG" (la suite des imaginaires a-t-elle été identifiée comme géométrique ?) et la colonne précédente, relative au comportement de cette suite. Si la suite géométrique a été reconnue, alors son comportement en est déduit. Il est donc prouvé, par application des théorèmes du cours. Par contre, s'il n'y a pas eu reconnaissance, le comportement annoncé est une simple conjecture, qui découle de l'observation.

La deuxième relative au calcul exact.

On constate qu'aucun groupe n'a utilisé les rappels de l'énoncé relatives au calcul exact des suites. A la décharge des élèves, on peut signaler que cette écriture a été peu utilisée en classe depuis le TP 14, qui avait mis en évidence ce problème. De plus, ce TP est assez dense comme cela : l'attitude des élèves d'utiliser de façon privilégiée les fichiers de suite, qui sont prévus pour cela, est assez naturelle...

La troisième relative au cadre du TP.

La question problématique avait été située, a priori, pour ce TP comme étant celle de l'étude d'une suite complexe. En fait, cette question ne s'est pas posée dans la pratique. La plupart des groupes ont étudié séparément les suites des parties réelles et des parties imaginaires.

Seuls les groupes 5bis, 12 et 14, qui sont allés assez loin dans l'observation des termes de la suite, et sous plusieurs angles, se sont posés le problème d'une "synthèse de l'information", en se demandant : "quel est le sens de variation de la suite z_n ?"On observe alors dans les rapports de recherche l'établissement d'inégalités étranges (s'agissant de nombres complexes...), qui ne débouchent sur rien. Il est probable que cette question aurait émergé, pour tous les groupes, avec un peu plus de temps de recherche, ou en traitant celle-ci en deux temps...

La prochaine fois !

4.TP et typologie.

Un dernier tour de piste...

Cécile, représentante du type théorique.

Elle commence par donner le cadre de l'étude :
"Etude d'évolution de la suite : variations, minoration, majoration, représentation graphique, convergence".
L'étude de $z_{n+1} - z_n$ ne donne rien.
Elle trace alors un petit dessin rappelant les rapports entre parties réelles, parties imaginaires, module et argument. Cela ne donne rien non plus.
Les suites des parties réelles et imaginaires sont mises en place.
Conclusion : "la suite y_n est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Elle est donc décroissante car $0 < q < 1$" (la convergence est oubliée).
Cécile observe un tableau de valeurs : "la suite semble minorée par 0". Elle se remémore alors un théorème évoqué pendant l'année (mais signalé comme étant hors programme) : une suite décroissante minorée converge. Cécile prouve alors par récurrence que la suite est positive, et en déduit qu'elle converge vers 0 (ce qui est une application un peu abusive du théorème...).
Cécile et Stéphanie (dont on a peu parlé, parce qu'elle a un rôle assez effacé, de force d'appoint) font apparaître alors d'abord les graphiques séparés des suites x_n et y_n, puis un graphique combiné, pour voir la suite des points M_n : "la suite x_n des réels semble converger vers une limite égale à peu près à 5, 392. Elle est minorée par 5, car elle est croissante".
Fin du TP, encore marqué par la recherche des références, une organisation du travail liée à des démarches générales (ici démarche d'étude d'une suite). Il y a des progrès dans la recherche et le croisement d'éléments d'informations "pratiques" liés au problème.

Michaël, représentant du type rationnel.

Michaël retombe dans une habitude solidement ancrée : l'objectif est identifié comme étant "il faut trouver le terme général d'une suite donnée par récurrence" (comme pour la suite d'intégrale du TP 16). Le mieux est pour lui de le trouver "à la main", par un calcul sur papier.
Il essaie d'abord de calculer le terme général de z_n.
N'arrivant pas à déboucher, il essaie alors de calculer le terme général des suites des parties réelles et imaginaires.
N'arrivant pas, il essaie de calculer z_1, puis z_2, puis z_3... Puis il "craque".
Il y a bien changement de point de vue, mais assez relatif, restreint à un seul registre.
Ce manque de "flexibilité", qui est en général un atout dans les problèmes classiques, du type bac (on appelle cela de la ténacité), peut être dans ces TP un handicap (on appelle alors cela de l'entêtement...).

Caroline, représentante du type scolaire.

Après un long moment de réflexion, et un petit coup de pouce, Caroline écrit l'expression récurrente des suites x_n et y_n. La suite y_n est identifiée comme géométrique, son terme général est alors écrit, et réinjecté sous cette forme dans l'expression de la suite x_n. Remarque : "y_n est une suite géométrique qui tend vers 0".

Il y a ensuite observation d'une table de valeurs, et d'un graphique, qui fait apparaître la suite des points M_n. Conclusion :"on remarque que la suite y_n converge vers 0, et que x_n semble converger vers 6, 37".

On peut noter ici des progrès dans l'évocation, et l'utilisation des références du cours, dans l'exploitation des observations, dans la distinction entre ce qui est prouvé, et ce qui est conjecturé ("y_n converge vers 0, x_n semble converger vers...").

Laurent, représentant du type bricoleur.

z_0 est rentré sur la TI-92, qui est utilisée en mode polaire pour en donner module et argument.

Puis il y a séparation des parties réelle et imaginaire. Remarque : "y_n est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ qui tend vers 0 en limite $+\infty$".

Puis Laurent reporte une table de valeurs des deux suites, et un graphique des points M_n, sans commentaires.

Ce travail est marqué par une bonne utilisation de la calculatrice (c'est un des seuls groupes qui utilise le mode "polaire") de la TI-92. Il y a une sorte de jubilation à faire fonctionner les différentes commandes de la machine, et l'observation, bien souvent, ne donne lieu à aucun commentaire. Il est vrai qu'il y a ici évocation d'une suite géométrique. Mais il faut noter (sans polémiques...) qu'il est toujours difficile de démêler dans ces références ce qui relève d'un rappel personnel, et ce qui relève d'une observation des groupes voisins... En tous cas, il est certain que ce type d'évocation, comme les évocations des théorèmes, revêt le plus souvent pour ce groupe un aspect "liturgique", sans conséquence pratique pour le problème.

Fabienne, représentante du type expérimentateur.

Il y a d'abord séparation des suites x_n et y_n, puis observation des comportements dans une table de valeurs : "on a la suite x_n qui est croissante, et la suite y_n qui est décroissante". Un doute est émis : "est-ce sûr ?". La preuve semble nécessiter de passer au calcul des valeurs exactes. Le groupe calcule alors (sur papier), z_1, puis z_2.

Cela semble trop compliqué. Fabienne revient alors à une idée géométrique : un dessin fait apparaître M_n, x_n, y_n, r_n, et a_n. Mais le lien n'est pas vu avec le terme suivant de la suite.

Le groupe passe alors à l'observation du graphique que donne la calculatrice pour la suite des points M_n : "d'après la courbe l'argument décroît, et le module décroît ?".

Le TP s'achève par une tentative d'encadrement de z_n, à partir des encadrements de x_n et de y_n (l'ordre semble fonctionner dans $\mathbb{C}$)

Il y a en une heure un nombre de changements de points de vue assez considérable... au détriment peut-être de l'interprétation de chacune des informations : le fait que la suite y_n était géométrique n'a pas été vu...

Fin d'un TP difficile. Disons que le véritable TP de conclusion de l'année de recherche aura été davantage le TP 17, qui reprenait plusieurs recherches de l'année, et balayait une bonne partie du programme !

Ce TP aura par contre eu des prolongements utiles pour beaucoup d'élèves : la correction qui en a été donnée a été retravaillée par beaucoup d'entre eux (voir volume 1, page 215). Le retour sur les lieux du crime est souvent un acte symbolique utile...

Bilan des bilans

Les TP ont été un élément central du dispositif expérimental de cette année. En faire un bilan global, c'est donc pour une grande partie faire le bilan de l'expérimentation elle-même. On y reviendra donc à la fin de ce volume.

Quelques éléments cependant "à chaud", après ce tour des TP...

Un premier bilan global, pour toute la classe.

Les TP ont pris, pendant à peu près toute l'année, deux heures sur les sept heures hebdomadaires de la classe. Loin d'être du temps perdu, on peut dire que ça a été, pour l'essentiel, du temps gagné. Et cela, de trois points de vue :

- du temps gagné pour l'intégration de tous les élèves dans la classe.

On l'a signalé dans l'introduction, cette classe n'était pas facile. Elle comportait un grand nombre de redoublants, et un grand nombre d'élèves en voie de marginalisation scolaire. Le "travail à deux" a permis de créer des solidarités de travail réelles dans la plupart des binômes, et des dynamiques d'explications mutuelles dans plusieurs d'entre eux. Le fait qu'il y ait plusieurs professeurs dans la classe pendant cette heure a permis de créer d'autres rapports entre élèves et professeurs : l'explicitation des démarches, des difficultés est devenue assez naturelle, ce qui a permis en retour d'ajuster l'enseignement, sur le plan de son rythme, de son contenu...

En fin d'année, on peut juger que la classe a un comportement de travail en mathématiques tout à fait satisfaisant. C'est à dire que "l'ambiance des TP" a eu des conséquences dans les "cours normaux" ;

- du temps gagné pour l'intégration des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques.

On a vu, dans la relation des différents TP, que la possession d'outils de calcul était un atout puissant pour développer un travail de recherche, fait d'observations, de croisement d'informations... Mais il faut affirmer aussi que, réciproquement, l'organisation de TP est un atout puissant (on pourrait même dire indispensable) pour l'intégration d'outils de calcul dans la classe.

L'appropriation par les élèves de tels outils nécessite en effet :
- que chacun d'entre eux puisse manipuler à son rythme sa calculatrice ;
- que ceci se fasse dans le cadre de la classe ;
- que ceci se fasse à l'occasion de problèmes dont la résolution suppose une mobilisation conjointe de la calculatrice, et des références du cours.

C'est bien le cadre des TP...

- du temps gagné pour les mathématiques elles-mêmes...

L'évolution des rapports de recherche, au fil des TP, révèle clairement l'apparition de plus en plus fréquente d'expressions "métamathématiques" : "je vais calculer les trois premiers termes de la suite pour essayer de découvrir une régularité", "on peut conjecturer que la suite est décroissante", "la calculatrice ne donne qu'une solution pour cette équation. Pour en être sûr, je passe au calcul", "que se passe-t-il en dehors de l'écran ?", "je me suis trompé à cause d'une mauvaise écriture", "la calculatrice me donne presque 2. Et si c'était 2 ?".

Toutes expressions qui prouvent en général des progrès dans la distinction entre conjecture et certitude, entre valeur approchée et valeur exacte, et des progrès plus généraux dans la conduite même de l'activité mathématique. Rechercher de l'information, interpréter celle-ci, confronter les différentes informations obtenues, considérer les éléments de cours non pas comme des formules magiques, mais comme des outils issus de problèmes, et servant à résoudre des problèmes, tout ceci a progressé, parfois rapidement, parfois de façon homéopathique (mais les plus petits progrès sont parfois les plus méritoires...).

En fin d'année, on peut considérer que tous les élèves ayant accepté de s'investir dans la recherche (c'est-à-dire la grande majorité de la classe) ont avancé en mathématiques.

Mieux, on peut estimer que ce degré d'avancée est lié au degré d'investissement dans ces TP.

On le verra à la fin du chapitre 3, en observant l'évolution des notes (ce qui constitue bien un indice !), et à la fin du chapitre 4 en considérant le point de vue des élèves sur eux-mêmes.

On peut le voir aussi à travers les rapports des élèves à la recherche. On a pu lire (Volume 1, page 243 et suivantes) les résultats proposés par les élèves pour le "problème long". Ces solutions ont été rediscutées en classe, améliorées par les élèves. En fin de course, 5 devoirs définitifs sont rendus (après les vacances de Pâques, alors que cela revêtait un caractère facultatif, bac oblige) : un devoir de Cécile, un devoir de Michaël, un devoir de Caroline, un devoir de Christelle et Fabienne, un devoir de Jérôme et Vincent. Il est assez significatif :

- qu'on y retrouve 4 des 5 groupes observés dans le cadre de ce bilan (seul manque à l'appel le type "bricoleur"...) : s'ils avaient été choisis pour ce bilan, c'est à cause de leur profil, mais aussi parce que leur investissement dans les TP permettait le recueil de nombreuses informations !
- que certains travaux soient le fait de binômes, d'autres le fait d'individus isolés : c'est la sanction de la complémentarité, ou d'une complémentarité dirigée poussée à son terme !

Un deuxième bilan, relatif à la typologie.

On a pu l'observer tout au long des TP, ce travail de recherche a bien mis en évidence des régularités dans le comportement des élèves, mais aussi des infléchissements assez significatifs :

- les élèves de type théorique ont davantage développé leurs <u>investigations</u>, surtout avec les TI-92, davantage <u>coordonné</u> les différentes informations, davantage <u>organisé</u> leur réflexion ;
- les élèves de type rationnel ont accepté le jeu des conjectures et réfutations, le jeu des allers-retours entre observations et preuve ;
- les élèves de type scolaire ont pris un peu de recul sur leur travail, ont commencé à considérer un problème sous plusieurs angles, ont perçu l'importance de la relation entre cas particuliers, et généralisation (ce qui ne veut pas dire que ceci est désormais facile pour eux) ;
- les élèves de type bricoleur ont été contraints par la complexité de la TI-92, et le caractère problématique des TP, de prendre un peu de recul sur la machine elle-même, de se poser, au moins partiellement, les questions de validation théorique des observations (ce sont pour ces élèves que les progrès sont les plus variables - on le verra en fin de chapitre 3 - fonction très nette de l'investissement dans les TP...) ;
- les élèves expérimentateurs ont davantage activé leurs références théoriques, passé davantage de temps à interpréter les résultats obtenus. Mais ce sont eux qui partaient du meilleur pied dans l'expérience de cette année !

Donc des progrès assez généraux, qui ne règlent pas tout (on ne change pas en quelques mois des comportements construits pendant une vingtaine d'années), mais qui situent les apprentissages de chacun dans une autre perspective...

3.Bilan des "interrogations écrites"

4 interrogations écrites composées avec TI-92 sont ici analysées.
La dernière est commune avec une autre classe, ce qui permet d'utiles croisements.
Enfin, on considèrera l'évolution des notes des élèves.

Premier contrôle réalisé avec les TI 92

Classe de TS11, Mardi 16 Janvier, Contrôle n°6
Lycée Joffre, Année 95/96

Exercice 1 *(3 points)*

Résoudre l'équation $C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{3} = 387n$

(1 point pour la résolution machine - à condition de donner la syntaxe de la question - 2 points pour la résolution "à la main")

Exercice 2 *(4 points)*

Soit E l'ensemble a 12 éléments E = {a, b, c d, e f, g, h, i, j, k, l}.
1. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   - a et b ;
   - a mais pas b ;
   - b mais pas a ;
   - ni a ni b. *(2 points)*
2. En déduire la relation $C_{12}^{5} = C_{10}^{3} + 2C_{10}^{4} + C_{10}^{5}$. *(1 point)*
3. Généraliser le résultat obtenu. *(1 point)*

Exercice 3 *(7 points)*

On considère, pour x élément de $[-\pi, \pi]$, la fonction $f : x \to (\cos x)^x$.
1. Quel est son domaine de définition ? *(1 point)*
2. Quelles sont ses limites, aux bornes du domaine ? *(1 point machine, 1 point sans)*
3. Est-elle dérivable sur son domaine, et, si oui, quelle est sa dérivée ? *(idem)*
4. Justifier le signe de la dérivée, et faire le tableau de variation de la fonction *(1 point)*
5. Faire une représentation graphique soignée de cette fonction *(0 point pour une copie d'écran, 2 points pour un graphique complet)*

Exercice 4 *(6 points)*

On considère la suite définie par récurrence :
$u_0 = 0$, $u_n = \sqrt{u_{n-1} + 1}$.
1. Observer son comportement sur vos calculatrices, par un tableau de valeurs, et les 2 types de graphiques. Reproduire sur votre feuille ces éléments d'information. Quelles conjectures pouvez-vous faire ? *(2 points)*
2. Prouver que cette suite est croissante *(2 points)*
3. Prouver par récurrence que tous les termes de la suite sont compris entre les bornes 0 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *(2 points)*

Comme on le voit, l'objectif est à la fois :

- de contraindre les élèves à utiliser leurs machines (avec l'"appât" de points);
- de fixer les conditions de l'utilisation des résultats de la machine, pour éviter le simple recopiage des résultats sur l'écran, ou le voisin (il faudra donner la syntaxe de la question) ;
- d'indiquer, aussi par le barême, que le résultat machine ne remplace pas le résultat argumenté.
L' objectif est, à travers ces différentes contraintes, d'imposer une articulation entre le raisonnement "pur" et l'utilisation de la machine.

Exercice 1

Seuls deux élèves délimitent le champ des solutions acceptables pour n (n entier supérieur ou égal à 2). Tous les autres se précipitent dans la résolution. Il semble qu'il y ait là une attraction non maîtrisée (encore) pour la machine et ses résolutions "magiques".
On lira ci-dessous un récapitulatif des réponses, en pourcentage des présents (32 présents sur 34) ; on comptera justes les réponses justes, et quasi-justes, en particulier celles qui n'ont pas éliminé les solutions parasites.

Calculs...	Avec machine:Oui	Non
A la main : Oui	25	10
Non	**50**	15

75% des élèves savent résoudre l'équation avec la machine.

C'est un résultat intéressant, puisque la syntaxe nécessaire était assez lourde :
Solve (ncr(2n, 1)+ncr(2n, 2)+ncr(2n, 3)) = 387n, n)
Notons que 4 élèves écrivent l'équation de façon synthétique, avec un $\sum$.
La machine donne trois solutions : -17, 0, et 17. Seuls trois élèves enlèvent (-17), et trois élèves enlèvent 0 et - 17.
On retrouve les caractères différents mis en évidence dans la typologie :
- les élèves "théoriques" résolvent théoriquement l'équation, et ne touchent apparemment pas à la machine (cf Michaël) ;
- les élèves "bricoleurs" résolvent sans problème avec la machine, et abordent dans des conditions assez mauvaises la résolution théorique (Etienne se trompe même dès le départ dans la formule des combinaisons) ;
- les élèves scolaires (cf Aurélie) ne font aucune des deux résolutions : l'exercice ne rappelait rien de connu ;
- les élèves "expérimentateurs" résolvent avec à peu près autant d'habileté par les deux "techniques".

Seulement 35% des élèves savent résoudre théoriquement l'équation.

Il est assez frappant que seuls 4 élèves utilisent la machine pour des calculs partiels au cours du calcul théorique (rappel de formule, simplifications de fraction, ...). C'est probablement dû à l'énoncé, et à la nouveauté de l'exercice. De nombreux élèves se trompent ainsi, soit dans le calcul des combinaisons, soit dans les écritures (oubli des parenthèses pour (2n)!), et donc dans les simplifications. Tout ceci aurait pu être évité, puisque la machine donnait des expressions simplifiées pour C_{2n}^{1} par exemple... Il semble que le contrat était pour les élèves de tout faire à la main, et même d'utiliser au maximum les "formules" du cours.
Ainsi plusieurs élèves simplifient $C_{2n}^{1} + C_{2n}^{2}$ en C_{2n+1}^{2}, puis restent bloqués....

D'autres élèves utilisent le calcul du discriminant pour résoudre $4n^2 - 1156 = 0$...

En résumé, l'impression est que les élèves maîtrisent assez bien les commandes de résolution d'équation de la machine, mais n'arrivent pas à combiner, à toutes les étapes du calcul, résultats théoriques, et utilisation de la machine. Ceci reste à enseigner.

Exercice 2.

Cette question ne nécessitait pas l'utilisation de la calculatrice. 81% des élèves ont traité la question 1 à peu près convenablement (sur le plan de l'argumentation) . Il faut signaler que des exercices assez proches avaient été faits en classe.
Elément remarquable, pour la question 2, 56% des élèves ont traité la question numériquement (en vérifiant l'égalité), 25% des élèves l'ont traité sur le plan logique ("si on choisit 5 éléments parmi 12, on peut prendre soit a et b, soient..."etc.). Cette méthode était plus conforme à l'esprit du problème. Mais on peut penser que la présence d'un outil de calcul puissant fait pencher la balance vers une vérification numérique, surtout quand elle est peu coûteuse... Il est d'ailleurs notable que les élèves qui ont choisi la méthode logique se recrutent parmi ceux qui sont le moins "bricoleurs" dans la classe (Aline, Karen, Alice, Elsa, Erwan).
Seuls 13% des élèves traitent la question 3, non pas comme extension "logique", mais comme application à répétition de la propriété des combinaisons $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Exercice 3

L'exercice était difficile :
- sur le plan mathématique général, les élèves n'aiment pas les fonctions trigonométriques, il peut y avoir confusion avec une fonction puissance ;
- sur le plan technique, la machine ne donnera pas sans mal les limites (puisqu'il s'agit de limite à gauche, et à droite des bornes du domaine) ;
- pour l'étude des variations, le signe de la dérivée n'est pas tout à fait évident.

Enfin, last but not least, l'étude des fonctions date d'avant les vacances de Noël, d'avant les études des suites. Mieux, les TI 92 sont arrivées après que l'on a arrêté (provisoirement) l'étude des fonctions.
Les résultats, comme attendu, ne sont pas très bons :

	Machine	Calcul
$(\cos x)^x = e^{x\ln(\cos x)}$		31
Domaine		31
Limites	3	16
Dérivée	**63**	13
Signe de la dérivée		9
Graphique	16	16

- seuls ceux qui ont "traduit" la fonction à partir des fonctions usuelles ont déterminé le domaine. On note de grossières erreurs de domaine chez ceux qui ne connaissent ni les fonctions en cause, ni les possibilités de vérification graphique (les élèves "scolaires"): fonction définie sur $\mathbb{R}$ par exemple, ou sur $\mathbb{R}+$, etc. ;

- la dérivation machine emporte toujours un succès d'estime, comme on l'avait noté lors de la prise en main de la machine. mais il faut noter que beaucoup d'élèves font des erreurs en recopiant la dérivée que donne la machine (oubli de parenthèses assez fréquent). 2 élèves tentent une dérivation "à la main", se trompent, et ne parviennent pas à utiliser le résultat de la machine pour rectifier le tir ;

- on a noté en graphique-machine les simples copies d'écran, en graphique-calcul les graphiques qui comportent au moins une indication théorique (asymptote, tangente horizontale en zéro, point limite, etc.). Les élèves qui ont fait de simples copies d'écran se sont beaucoup appliqués, imaginant que "graphique soigné" signifiait seulement "graphique fait avec soin" (la notion de graphique complet avait été donnée en cours : graphique qui donne à voir les propriétés de la fonction établies précédemment) ;

- notons pour finir que les élèves ne connaissaient pas la syntaxe de limite à droite ou à gauche. Celle-ci n'est pas particulièrement naturelle... Ainsi, pour obtenir la limite à droite de $-\frac{\pi}{2}$, il fallait écrire limit (f(x), x, $-\frac{\pi}{2}$, 1). Comme la fonction n'admet pas de limite en $-\frac{\pi}{2}$, mais seulement à droite, la demande d'une limite sans l'ajout de 1 (qui signifie ici à droite), appelle la réponse undef. Il était intéressant de voir les tentatives que les élèves feraient pour contourner l'obstacle. Il faut reconnaître qu'ils ont fait preuve d'initiative... :

- Michaël a tapé : limit (f(x), x, $-\frac{\pi}{2}$), puis valeur approchée. La calculatrice donne la réponse correcte $+\infty$;

- Cécile a tapé f($-\frac{\pi}{2}$). La calculatrice ne donne pas la réponse, même avec valeur approchée. Par contre, pour f($\frac{\pi}{2}$), la calculatrice donne la valeur de la limite, 0 (c'est-à-dire qu'elle opère le prolongement par continuité) ;

- Laurent a recherché f(- 1,57)...

Toutes ces procédures de contournement sont caractéristiques de modèles primitifs sur les limites [Trouche 1996]. Le fait que la calculatrice s'y adapte ne peut que renforcer ces modèles...

Exercice 4

Cet exercice est beaucoup plus simple : le cours actuel porte sur les suites, et la prise en main des machines a été faite au moment de la découverte des suites.

Premiere question : les élèves savent-ils entrer une suite récurrente dans leur fichier de suites (ce qui n'est pas tout à fait évident, voir le chapitre sur la prise en charge de la TI92 au début de ce rapport), et savent-ils utiliser les tableaux de valeurs, et les deux types de graphique (le graphique "Time" qui construit les points de coordonnées (n, f(n)), et le graphique "Web" en escalier, ou escargot) ?

Réussite en pourcentage

Entrée de la suite	Tableau de valeurs	Graphique Time	Graphique Web
70	70	70	55

On peut considérer que l'apprentissage est à peu près acquis ; on constate cependant que le graphique Web, qui permet de voir la construction des termes successifs de la suite "autour" de la fonction de récurrence, est moins bien acquis que le graphique Time, qui déroule "linéairement" les termes de la suite.
Une deuxième constatation : les graphiques sont reproduits avec beaucoup de laisser-aller, ce qui s' explique peut-être parce qu'ils ne sont pas pour les élèves de réels outils comme on le verra ci-dessous...

<u>Deuxième question</u> : quid des conjectures ?

Suite croissante	Suite convergente	Suite bornée
25	30	13

On ne peut qu'être frappé par la faiblesse des conjectures émises, comparée à la richesse des informations données par le tableau et les deux graphiques. Cette faiblesse s'explique sans doute par deux raisons :
- la première, liée au contrat d'un contrôle écrit : il s'agit d'aller vite, de répondre à des questions précises, et non de réaliser un rapport de recherche comme en TP. Ainsi les élèves ne se sont pas attardés sur ces conjectures ;
- la deuxième, liée à une connaissance assez réduite de la machine. Les élèves sont encore trop peu sûrs de leurs gestes, ils restent ainsi "collés" au clavier et à l'écran, sans bénéficier du recul qui autorise la réflexion.

D'ailleurs, les conjectures, quand elles sont émises, sont marquées par la prégnance de "l'observation première" :
- " plus n augmente et croit vers l'infini, plus la courbe croit jusqu'à un point où elle converge" ;
- "on s'aperçoit qu'à un certain stade, la suite ne s'accroît plus" ;
- "la suite paraît croissante jusqu'au rang 9 où elle se stabilise" ;
- "on peut penser que la suite tend vers un maximum, c'est à dire qu'elle sera constante à partir de n = 9".

Encore une fois, on a l'impression que la considération simultanée des tableaux de valeurs, et des graphiques (qui fonctionnent tous sur le mode du calcul approché"), renforcent les modèles primitifs de limites.

Une nécessité impérative lors de la correction : prouver que la suite est <u>strictement</u> croissante, de sorte qu'elle ne se "stabilise" jamais.

Très faible réussite des deux dernières questions :

- personne ne voit d'où sort $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;
- un seul élève utilise le résultat vu en cours : si une fonction définissant une suite récurrente est <u>croissante</u>, alors la suite est <u>monotone</u>. Par contre, 4 élèves inventent le théorème plus commode : si f est croissante, alors la suite l'est aussi...
- trois élèves démontrent par récurrence que la suite est bornée. Notons que dans le cadre de leur démonstration, ils veulent prouver que $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et que aucun d'eux ne songe à utiliser leur calculatrice en mode exact pour le vérifier... Ils le font donc en mode approché, ce qui prouve que les deux nombres en question sont... à peu près égaux, et ne les avance pas beaucoup...

Pour finir, on peut tirer de ce premier contrôle avec TI-92 les conclusions suivantes :
- les élèves sont encore très peu sûrs dans leurs manipulations (ce qui est relativement normal, ils n'ont la machine que depuis un mois, dont 15 jours de vacances) ;
- les phases de <u>travail</u> machine, et de travail théorique sont encore assez étanches ;
- les apprentissages théoriques qui se jouent dans la manipulation de la machine peuvent peser lourdement pour la construction des notions fondamentales (les limites en particulier).

L'amélioration des deux premiers points devrait se faire sentir lors des prochains contrôles. Quant à la maîtrise du troisième, cela demandera un suivi... de tous les instants.

Enseigner en TS avec des calculatrices comprenant un système de mathématique symbolique, volume 2
IREM de Montpellier, page 177

Deuxième contrôle réalisé avec les TI 92

Classe de TS11, Mardi 6 Février, Contrôle n°7
Lycée Joffre, Année 95/96

Exercice 1 *(4 points)*
Dans une publicité, une loterie annonce : " Un billet sur trois est gagnant. Achetez trois billets !" . Le texte de cette publicité suggère qu'en achetant trois billets, on est sûr de gagner... Faisons le calcul dans le cas où la loterie comporte 30 billets, et sachant qu'un billet sur trois est gagnant.

a) Combien y a-t-il de billets gagnants ?

b) On achète un billet. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. Quelle est la probabilité que ce soit un billet gagnant ?

c) On achète trois billets. On suppose que tous les ensembles de trois billets ont la même probabilité d'être achetés.
- Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
- Quelle est la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant sur trois ?

d) Combien faut-il acheter de billets pour être sûr d'avoir au moins un billet gagnant ?

e) Quel est le nombre minimum de billets qu'il faut acheter pour que la probabilité de gagner quelque chose soit supérieure à 0,95 ?

Exercice 2 *(6 points)*
On considère les fonctions numériques de la variable x, dépendant du paramètre réel m et définies par :

$$f_m(x) = \frac{2x^2+mx}{x^2-1}$$

a) Discuter suivant les valeurs de m le nombre des extrema de la fonction f_m.
b) On considère la fonction particulière f_0. Montrer que $f_0(x)$ peut s'écrire sous la forme $a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$, où a b et c sont trois nombres réels. En déduire les primitives de f_0 sur des intervalles que l'on précisera.
c) Déterminer la primitive F de f_0 sur l'intervalle]-1;1[qui satisfait la relation $F(\frac{1}{2}) = 2 - \ln 3$.

Exercice 3 *(10 points)*
Une suite (w_n) est définie par la donnée de $w_0 = 1$ et par la relation de récurrence $w_{n+1} = 4 - e^{-w_n}$
1) Décrire le comportement apparent de cette suite, en reproduisant les deux graphiques habituels et une table des valeurs approchées des premières valeurs.
2) On appelle f la fonction qui à x associe $f(x) = 4 - e^{-x}$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule racine sur $\mathbb{R}+$, que l'on notera λ.
3) Si la suite (w_n) converge, quelles peuvent être les limites possibles ? Étudier les variations de f. Que peut-on en conclure pour les variations de la suite (w_n) ?
4) Montrer ensuite que la suite est croissante majorée.
5) Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $I=[1, \lambda]$. Montrer que pour tout x appartenant à I, $f'(x)$ est compris entre 0 et 0,5. En déduire alors les inégalités : $0 \leq \lambda - w_{n+1} \leq 0{,}5(\lambda - w_n)$, puis $0 \leq \lambda - w_n \leq 0{,}5^n (\lambda - 1)$.
Que peut-on en conclure pour la limite de la suite (w_n) ? A partir de quelle valeur de n est-on sûr d'avoir un écart entre λ et w_n inférieur à 10^{-100} ?

Quelques commentaires sur le choix et la forme du sujet :

- le premier exercice combine des questions où la calculatrice n'est d'aucune utilité, et des questions où elle peut utilement être sollicitée ;
- le deuxième exercice est une reprise du TP 13, sous une forme assez proche (recherche d'extremums pour une famille de fonctions, décomposition d'une fraction rationnelle "en éléments simples") ;
- le troisième exercice est une reprise d'un exercice classique, autour du "point fixe", traité sous une forme assez proche en classe ;
- aucune indication n'est donnée dans l'énoncé, contrairement au précédent contrôle, sur l'utilisation de la machine.

Les questions qui se posent, après un mois de manipulation de la TI 92 :

- les élèves sauront-ils combiner les phases de raisonnement, de rédaction, de vérifications partielles avec la machine ?
- sauront-ils distinguer, comme le fait la machine, valeurs exactes et valeurs approchées ?
- sauront -ils réinvestir de la même façon les résultats du cours, et les résultats du TP ?
- y aura-t-il une évolution sensible depuis le précédent contrôle ?

Remarques sur le déroulement du contrôle :

- Aucun élève n'a oublié la TI 92. 5 élèves ont deux calculatrices sur leur table (la TI 92, et leur ancienne calculatrice graphique). Il s'agit de trois élèves sachant bien manipuler - ou le croyant- (Laurent, Damien, Sébastien) et de deux élèves assez réticents à l'utilisation de la TI (Candice et Nikola). Dans la pratique, ni les uns, ni les autres n'utilisent la calculatrice graphique.

- En débutant un exercice (surtout le 2 ou le 3), les élèves utilisent beaucoup la calculatrice "pour voir ce qui se passe". Suivant le type d'élève, on passe alors plus ou moins vite à un travail écrit, avec plus ou moins de retours à la machine. Mais peu de questions techniques sont posées. Seulement trois, en fait : Julien a oublié de noter le signe "multiplié" entre m et x, Sébastien ne connaît pas la syntaxe pour rentrer une suite dans le fichier, et Guilhem s'étonne de la lenteur du tracé de la fonction dérivée (il a rentré en Y2 la fonction d(Y1(X), X), au lieu de rentrer directement l'expression de la dérivée).
Il y a donc, par rapport au précédent contrôle un très net progrès dans la maîtrise de la machine.

Exercice 1

a	b	c	d	e
100	87	52	74	10

Pourcentage de réussite pour chaque question

Une chute dans les résultats entre le b et le c : des élèves considèrent comme indépendants les tirages successifs de billets de loterie (Erwan, Guilhem), ou ne considèrent que le tirage de 1 billet (Jérôme L).
La plupart des élèves ne restent pas enfouis dans les calculs, et distinguent le caractère d'évidence de la question d.

Quelques comportements significatifs :
- Fabienne, dans un premier temps, échafaude une formule très complexe pour la question d, et constate : " cette équation reste impossible pour moi... et la TI 92", et en

revient à la constatation d'évidence cependant : "s'il y a 20 billets perdants et les 10 autres gagnants, il faut acheter 20 billets de loterie pour gagner". On retrouve là une attitude d'exploration de différentes voies (sans choisir forcément la meilleure en premier), et qui sait changer de direction en cas de problème. Type expérimentateur.
- pour la question c, Michaël donne deux réponses (l'une directe, l'autre en passant par l'évènement contraire). La première réponse est fausse, la deuxième est juste. Mais comme Michaël ne vérifie pas, il ne constate pas l'incohérence. On reconnaît un type "rationnel", déroulant linéairement le travail, sans entrecroiser les pistes.
- pour la question e, la plus difficile, Cécile résout correctement le problème (l'inéquation est posée, simplifiée), mais ne passe pas à la recherche du "n" convenable. Type "théorique".

Résultat intéressant, 60% des élèves donnent les résultats sous forme exacte (en utilisant la simplification des rapports de combinaisons donnée par la machine), et distinguent clairement valeurs exactes, et valeurs approchées. 40% des élèves n'opèrent pas nettement cette distinction.

Exercice 2

a méthode	a cas part	b décomp	b primitive	c constante
42	13	84	78	52

Pourcentage de réussite pour chaque question

Il apparaît que le TP 13 a été peu mémorisé : 42% des élèves reprennent la méthode générale de calcul de la dérivée, et recherchent pour quelles valeurs de m celle-ci ne peut s'annuler. Mais 13% des élèves seulement envisagent les cas "charnières", $m = 0$, et $m = \pm 2$, alors que ces questions avaient été vues en détail lors de la correction du TP.
Hypothèse : les élèves retiennent davantage des TP des questions de méthode de recherche, ou des techniques particulières relatives à l'utilisation de la machine. Les questions de cours, théoriques, sont réservées aux autres moments de la semaine.
Le fort pourcentage de réussite pour la décomposition de la fraction en éléments simples, pour la recherche de primitives, ou la recherche de la constante, est dû semble-t-il à la mobilisation de fonctions de recherche, ou de vérification, de la calculatrice.
Des carences encore, chez des élèves "scolaires" :
- Nathalie écrit que les primitives de $\frac{1}{x-1}$ sont de la forme - $\frac{1}{x-1}$; alors que la machine donnait sans peine le résultat ;
- Guillaume se trompe de signe dans le calcul de la dérivée, et traîne dans toute la question $\sqrt{4}$, sans simplification de l'écriture ;
- Guihem oublie la valeur absolue à l'intérieur du logarithme, et rencontre des problèmes de définition des primitives ;
- plusieurs élèves faibles semblent avoir eu des difficultés pour résoudre des inéquations du type $m^2 < 4$. Hypothèse : la machine ne résolvant pas ce type d'inéquation, il y a peut être une paralysie de calcul, ou des maladresses dues au "travail sans filet" ?

Globalement, on constate une dispersion des attitudes entre ceux qui traitent quasiment toute la question avec leur calculatrice, et passent ensuite à une rédaction, et ceux qui ne touchent presque pas la machine "ne sachant pas par où commencer".

A noter : beaucoup d'élèves n'avaient pas mémorisé que la machine ne calculait pas seulement des intégrales, mais aussi des primitives. D'où les erreurs manifestes constatées.

Exercice 3

1 Observer	2 Equation	3 Variatio	4 Majorée	5 Limite
90	66	50	25	15

Pourcentage de réussite pour chaque question

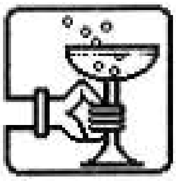
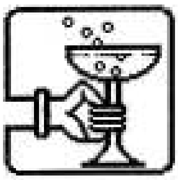
On note que, si la quasi-totalité des élèves savent rentrer une suite dans le fichier de fonctions, 20% des élèves tracent un graphique Web sans faire apparaître "l'escalier" de construction de la fonction, ce qui montre qu'ils n'ont pas compris le sens de ce graphique !
Il n'y a plus que 10% des élèves qui notent que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui témoigne d'un net progrès par rapport à la dernière interrogation.
Question 2 : il s'agit de résoudre une équation. Seulement 15% des élèves le font avec Solve. 66% des élèves ont recours au théorème de la bijection, sous des formes plus ou moins correctes.
Pour la dernière question, une seule élève détermine le "n" convenable "artisanalement", par méthode d'approches successives. Les autres élèves qui en sont arrivés là utilisent justement le logarithme.
Sur le plan théorique, on constate les mêmes difficultés :
- confusion entre les suites définies par leur terme général, et les suites définies par récurrence (d'où des résultats fantaisistes pour les variations de la suite, et ses limites, par rapport à la fonction d'appui) ;
- difficulté de mettre en oeuvre un raisonnement par récurrence clair et correct ;
- difficulté d'énoncer convenablement l'inégalité des accroissements finis.

Il faut souligner une difficulté qui n'avait pas été mesurée, en donnant l'interrogation
La suite $w_{n+1} = 4 - e^{-w_n}$ a une limite très proche de la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = 4 - e^{-x}$: cette fonction a en $+\infty$ une limite égale à 4, et la suite a une limite égale (valeur approchée !) à 3, 98. D'où une confusion favorisée entre la limite d'une suite définie par son terme général, et la limite d'une suite récurrente...

Ces confusions maintenues sur un sujet aussi important incitent à donner, sur ce dernier exercice, une correction soignée que l'on trouvera Volume 1 ("Côté cours"), page 55.

Pour finir, sur l'ensemble de l'interrogation, on constate, par rapport à la dernière interrogation, un progrès dans l'utilisation "technique" de la machine, et dans l'utilisation raisonnée de celle-ci à l'intérieur d' un processus de démonstration.

Les notes sont aussi en progrès (7,5 de moyenne la dernière fois, 9 de moyenne cette fois-ci).

Troisième contrôle réalisé avec les TI 92

Il s'agit du premier "bac blanc", réalisé dans les conditions de l'examen, en 4 heures.

Classe de TS11, Mercredi 13 Mars, , Contrôle n°8
Lycée Joffre, Année 95/96

Exercice 1 *(2 + 3 points)*

a) Vous lancez 10 fois de suite une pièce de monnaie. On définit X, variable aléatoire égale au nombre de résultats " face " obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X, l'espérance mathématique, et la variance de X.

b) Tous les montpelliérains (250.000 individus) lancent 20 fois de suite une pièce de monnaie.
Quelle est la probabilité que l'un d'entre eux (au moins) obtienne une série de 20 faces ? Donnez une valeur approchée de ce résultat à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 2 *(4 points)*

a étant un réel strictement positif,

Soit $I(a) = \int_1^a \cos(\ln x)\, dx$, a étant un réel strictement positif.

- montrer que I(a) existe ;

- calculer I(a) à l'aide de deux intégrations par parties.

PROBLÈME *(11 points)*
Les trois premières parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

A

Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \dfrac{x}{e^x}$

1. Étudier q (sens de variation ; limites de q en $-\infty$ et $+\infty$). La courbe représentative n'est pas demandée.
2. a) Montrer que, pour tout réel x on a $q(x) < 1$; en déduire que pour tout réel x on a $x \neq e^x$.

   b) Montrer que, si $x \geq 0$, alors $0 \leq \dfrac{x}{e^x} \leq \dfrac{1}{e}$

B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

1. Étudier f (sens de variation ; limites de f en $-\infty$ et $+\infty$).

2. Préciser les asymptotes et tracer avec soin la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique : 5cm).

3. Montrer que, si $x \geq 0$, alors $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$

C

1. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
$G(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$

En déduire la valeur de $I_1 = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) dx$.

3. Déduire des résultats précédents la valeur de $I_2 = \int_0^1 \left[1 + \frac{x}{e^x} + \left(\frac{x}{e^x}\right)^2\right] dx$.

D

On se propose de trouver un encadrement de $J = \int_0^1 f(x)dx$
<u>(On ne demande pas de calculer J)</u>

x étant un réel donné, on considère la suite $(S_n(x), n \geq 1)$ définie par :
$S_n(x) = 1 + \left(\frac{x}{e^x}\right) + \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 + \left(\frac{x}{e^x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x}{e^x}\right)^n$.

1. Montrer que $S_n(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{e^x}\right)^{n+1}\right) . f(x)$
(on rappelle que la somme des premiers termes d'une suite géométrique est donnée par la formule : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *)*

2. a) En utilisant les encadrements obtenus dans A et B, démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{e-1} \cdot \frac{1}{e^n}$$

b) En déduire un encadrement de $J - I_n$, où $I_n = \int_0^1 S_n(x)dx$
puis, en utilisant la valeur de I_2 trouvée dans la partie C, donner un encadrement de J.

Remarques générales :

- la dernière question de l'exercice 1 ne peut pas être traitée par la TI 92 (Overflow). Il faut passer par le logarithme pour pouvoir conclure ;

- le deuxième exercice (énoncé proposé par Gaëtan ne peut pas être traité directement par la machine. Par contre celle-ci peut faire des calculs partiels... si on le lui demande !
- par contre l'essentiel des intégrales du problème peut être fait par la TI-92.
Il s'agira donc de voir si les élèves ont acquis suffisamment d'autonomie pour contourner les refus de la machine, et pour justifier les résultats de la machine quand celle-ci les donne "directement", ce qui sera essentiel le jour du bac...
<u>A propos de l'évaluation par les élèves de leur rapport à la machine</u> : en cours de composition (2 heures après le début) je leur demande de noter 3 questions, auxquelles il faudra répondre avant de rendre la copie :
- en quoi la machine m'a aidé (pour cette épreuve) ;
- en quoi la machine m'a gêné ;
- en quoi la machine m'a surpris ?
Pour être sûr que ces questions seront prises en considération, j'annonce qu'un bonus de 1 point sera accordé à quiconque aura répondu à ces questions (quelles que soient les réponses). Cette pression est nécessaire : en effet c'est un autre professeur qui surveille la classe pendant les deux dernières heures, ce qui fait que la consigne ne pourra pas être rappelée.

Commentaires généraux

32 élèves présents. Résultats donnés ci-dessous en pourcentage des élèves présents.

<u>Personne n'a oublié sa calculatrice</u>.
Le fait n'est pas anodin : avec les calculatrices graphiques, je n'ai pas souvenir d'un seul contrôle où plusieurs élèves n'aient pas oublié leur machine... Mieux, les élèves qui avaient des éclairages faibles ont changé leurs piles.
<u>4 élèves ont porté aussi leur vieille calculatrice graphique</u> :
- Sébastien (bricoleur), qui imagine que la disposition de plusieurs outils est un atout. Il n'ouvrira pas sa calculatrice graphique ;
- Stéphanie (scolaire), qui n'est pas sûre de sa maîtrise de la TI-92. Elle n'ouvrira pas non plus sa calculatrice graphique ;
- Nikola et Damien (plutôt rationnel pour l'un, expérimentateur pour l'autre) : ils avaient stocké des information sur leurs calculatrices graphiques qu'ils n'ont pas chargées sur la TI-92. Ils les consulteront donc un peu.
Deux élèves seulement appellent au secours à propos de leurs machines :
- Michaël (rationnel) : il a programmé une somme de 250000 termes, et ne comprend pas le renvoi de la machine (qui retourne simplement la question, mais, même en "Pretty Print", cela prend deux lignes-écran) ;
- Rachel (scolaire) : au bout de deux heures, elle se décide à me demander pourquoi la machine refuse tout calcul. Elle n'a pas effacé les mémoires numériques, et il traîne dans la mémoire "x" des données parasites.
<u>C'est un bac blanc</u> : les élèves donnent donc une rédaction adaptée, sans indiquer l'utilisation qui a été faite de la machine.

Exercice 1 (probabilité)

70% des élèves ont abordé cet exercice. Remarque générale : peu d'explications sont données, en particulier la justification de l'utilisation de la loi binomiale n'est faite que par deux élèves.

<u>Pour la question a</u>
- certains élèves ont simplement donné la formule de la loi binomiale, les autres ont donné dans un tableau les 11 probabilités (toutes en valeur exacte) ;
- certains ont calculé l'espérance mathématique en faisant les produits et la somme nécessaires, d'autres ont appliqué la formule vue en cours (n.p).

	Formule n.p	Calcul	Rien
Seulement la formule binomiale.	12	3	9
Le tableau des 11 valeurs.	9	25	3

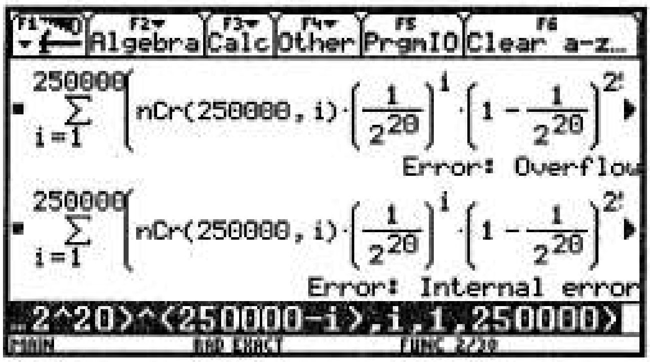
Je retire les leçons suivantes de ce tableau :
-les élèves qui ne donnent que la formule, sans détailler son application, sont soit les "bons élèves", qui ont aussi retenu la formule spécifique de l'espérance pour la loi de Bernoulli, soit des élèves plus faibles qui, hors la formule, ne savent pas grand chose.
- les élèves qui détaillent la formule sont "tirés" vers un calcul détaillé de l'espérance mathématique, puisque les calculs sont vite faits par la machine.
Une remarque doit être faite au sujet des valeurs exactes : tous les élèves y ont recours désormais. Cela ne constitue pas nécessairement un gain pour la compréhension : ainsi Alice et Alexandre trouvent des probabilités égales à 5/2, 45/16, 15/8, par une mauvaise application de la formule de Bernoulli. Comme les résultats sont donnés sous forme fractionnaire, ils ne réalisent pas que ces probabilités sont supérieures à 1 (c'est du moins l'hypothèse explicative que je formule...).

<u>Pour la question b :</u>

40% des élèves calculent la probabilité pour une personne de faire 20 faces successifs ; on trouve ensuite un certain nombre de calculs fantaisistes :
- 15% des élèves donnent comme résultat 250 000. $\frac{1}{2^{20}}$ .Heureusement pour eux, cela ne dépasse pas 1 !
- 9% des élèves calculent la probabilité qu'un Montpelliérain exactement fasse 20 fois pile ;
- 6%, c'est à dire deux élèves, arrivent au résultat. Il est intéressant de voir par quels détours.

- Michaël considère que chaque Montpelliérain a deux possibilités : soit faire 20 fois face, soit non. Il applique alors la loi binomiale au tirage des 250.000 Montpelliérains. Il calcule alors la probabilité que soit 1, soit 2, ... soit 250000 montpelliérains obtiennent 20 faces successives. Et donne le calcul à faire à la machine. Il y a là un effet pervers de la machine déjà constaté : la faiblesse du coût des longs calculs empêche la recherche des raccourcis théoriques "naturels". Faiblesse de coût toute relative d'ailleurs, puisque devant la longueur de calcul de la machine, Michaël change son fusil d'épaule, et passe à l'évènement contraire. Mais c'est un bon élève, et ce changement de stratégie en cours de manoeuvre n'est pas à la portée de tous...

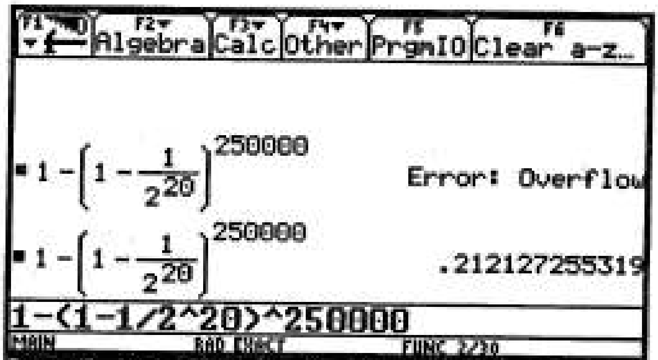
Remarque : par curiosité, j'ai laissé la machine suivre son cours, en mode approché : on obtient le message "internal error". Mystère !



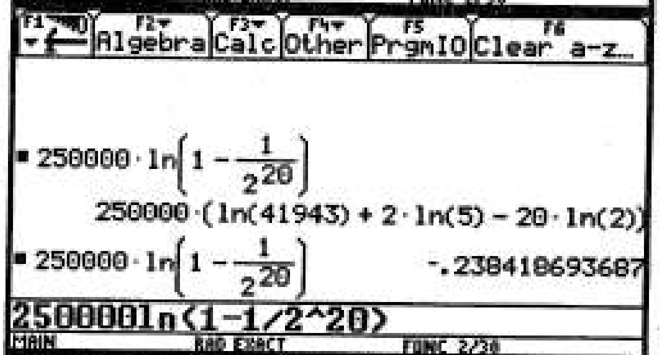
- Cyril arrive à la formule attendue plus directement, par un raisonnement tout à fait correct. Il rentre le calcul dans la machine, en mode exact : réponse Overflow. Il

passe alors en calcul approché... et la machine répond alors "justement". Il faut reconnaître que j'ai été pris au piège : en traitant l'exercice avant de la donner, j'étais persuadé, devant la réponse "overflow" de la machine, que le recours au logarithme était indispensable. Les 2 élèves qui sont arrivés jusque là ont contourné la difficulté.
Ce qui n'épuise pas le problème : que contrôle-t-on en calcul approché ?
On a précisément vu en TP les dérives possibles de ce type de calcul...
Je reviendrai donc dans la correction sur l'intérêt du passage au logarithme pour assurer la validité de la réponse.

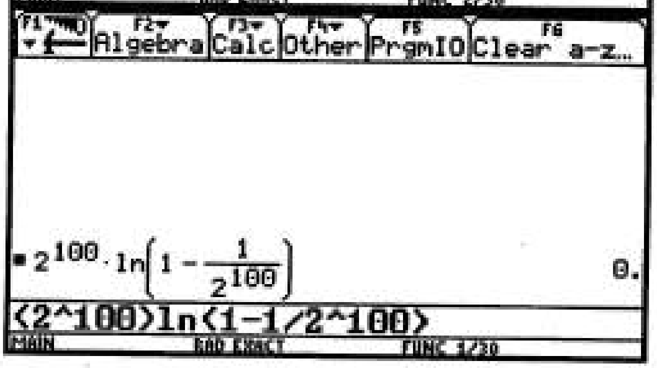
Les deux réponses obtenues par les élèves, en calcul exact, puis approché.



Le passage au logarithme évite la réponse overflow en mode exact. Cependant le réponse que l'on obtient n'est pas enthousiasmante...



Et le passage par les logarithmes n'est pas en lui-même une garantie: on voit ci-contre que le calcul approché ne donne pas ce qu'un développement limité tout simple nous donnerait sans peine (remarque pour initié...)



Exercice 2 (intégration par parties)

<u>Deux remarques générales :</u>

- la première sur la connaissance générale des conditions d'intégrabilité des fonctions. Celle-ci est assez floue. 40% des élèves évoquent le théorème "la fonction est continue sur l'intervalle d'intégration, donc elle est intégrable", 40% des élèves évoquent ce théorème avec des variantes (la fonction est définie, ou dérivable, ou strictement continue, voire positive...). Erreur dont on sait qu'elle est très persistante : 30% des élèves pensent que les bornes doivent être dans "le bon sens " (c'est-à-dire a < 1). Confusion habituelle entre intégrale et aire...

Remarque liée, sur les conditions d'application d'un théorème : alors que j'avais fortement insisté en classe sur la nécessité de justifier l'intégration par parties (par les"fonctions dérivables à dérivées continues"...), personne ne le précise ici. Il y a je pense une certaine responsabilité de la machine : les élèves, impatients de voir si la machine donne le résultat, puis stimulés par le contournement de la difficulté, négligent l'aspect théorique, qu'ils jugent sans doute inutile ("pourquoi justifier ce qui marche ?").

- une deuxième remarque sur l'utilisation de la calculatrice : la plupart des élèves sont très surpris de voir que la machine refuse de donner une primitive de la fonction, et de faire toute seule l'intégration par parties. Ceci apparaîtra dans les réponses à la question "qu'est-ce qui vous a surpris" (voir à la fin de ce bilan). Cette surprise était assez naturelle. L'élément positif est que les élèves n'ont pas mis la machine de côté, mais l'ont utilisée pour dériver les fonctions lors de l'intégration par parties. Signalons tout de même qu'une seule élève a cru bon de justifier le calcul de dérivées, en évoquant le théorème de dérivation des fonctions composées. Les autres ont simplement recopié le résultat donné par la machine. Cependant le but de l'exercice n'était pas de calculer des dérivées, mais bien plutôt de faire fonctionner le mécanisme d'intégration par parties, à deux coups ici.

De ce point de vue les résultats sont assez encourageants :
- 25% des élèves se sont trompés, en confondant produit et composition des fonctions, cos(lnx) et cosx.lnx ;
- 65% des élèves ont fait la première intégration par parties (aucun élève ne s'est trompé dans le "calcul" de dérivée) ;
- 56% des élèves ont fait la deuxième intégration par parties ;
- 53% des élèves ont trouvé I(a) (dont 12% avec une petite erreur de calcul).

Ces résultats auraient été probablement beaucoup plus faibles sans la TI-92, qui a joué ici un rôle d'auxiliaire tout à fait précieux.

Notons la maladresse de Julien, qui a recopié les résultats de la calculatrice sans opérer aucune simplification : dès la première intégration, les résultats deviennent alors d'une complexité inextricable !

Problème

On trouvera dans ce qui suit une nette différence de résultats entre ce que donne la machine (les dérivées, les limites), et ce qu'elle ne donne pas (l'établissement d'inégalités par exemple...). A l'intérieur de ce que la machine donne, il y a aussi une nette différence de statut entre ce que les élèves ont l'habitude d'établir (les dérivées : les résultats, lus sur la machine, sont en général justifiés précisément), et ce que les élèves ont l'habitude de traiter avec beaucoup de discrétion : le calcul de limites. Dans ce cas, les résultats sont souvent purement recopiés...

Pour ce qui concerne le calcul de dérivées, la machine a joué un rôle de tuteur efficace : plusieurs élèves s'y sont repris à plusieurs reprises pour trouver le "bon" résultat. Le fait de ne pas arriver à trouver (ou de ne pas chercher) une cohérence entre les résultats de la machine et ses propres résultats traduit en général des difficultés mathématiques importantes, ou un refus d'utiliser la machine... ou les deux !

- Rachel (scolaire) utilise la formule $\frac{u'v - uv'}{2}$ pour dériver un quotient. Elle renonce alors (et pour cause !)à trouver une cohérence entre ses résultats et les résultats de la machine ;
- Julien et Stéphanie (scolaires) se trompent dans le calcul de la dérivée, et n'utilisent pas la machine pour rectifier leur erreur (de signe) ;
- Sébastien (bricoleur) triche... il commence un calcul intégralement faux, et note comme résultat "naturel" le résultat de la machine.

Partie A

Calcul détaillé - et juste - de la dérivée	**90%**
Justification de la limite en +∞	**47%**

Etablissement de l'inégalité de b 40%

Remarques sur la justification des limites :

Il est délicat d'établir une frontière entre ceux qui donnent une justification acceptable, et les autres. Elsa écrit "la fonction exponentielle l'emporte sur toutes les fonctions puissances". Guilhem dit "e^x est beaucoup plus fort que x^n". Et enfin Jérôme M : "la fonction e^x est supérieure à la fonction x". J'ai estimé la réponse d'Elsa correcte, et les deux autres incorrectes. Mais la frontière est mouvante...

Cela relativise les appréciations plutôt optimistes de ceux qui estiment qu'un logiciel de calcul formel permet, en combinant processus et objet, de donner un sens à la notion de limite. Les choses sont beaucoup moins simples...

L'apprentissage est rempli de situations de type "schizophrénique", où coexistent deux représentations très différentes d'un même objet. Une limite peut être perçue alternativement, en fonction des besoins, comme le résultat d'un processus (avec toutes les idées de monotonie, de mouvement qui s'y rattachent), et comme un objet en soi, résultat d'une opération "machine". Cela n'est pas le gage de la construction d'une notion achevée...

Remarques sur les inégalités :

Les élèves en font soit trop peu (la fonction est positive aux deux bouts de l'intervalle, donc elle est positive tout le temps), soit trop, en utilisant la continuité, la stricte monotonie de la restriction de l'application à un intervalle donné, pour utiliser le théorème de la bijection. L'utilisation des données pertinentes (ici les variations des fonctions) est un exercice difficile de l'analyse, on le savait.

Partie B

Un seul élève, Jérôme L, (plutôt théorique), utilise un résultat de la question précédente ($e^x \neq x$) pour prouver que la fonction f est partout définie.

Calcul de dérivée détaillé	**82%**
Signe de la dérivée justifié	60%
Limite établie en $+\infty$	**63%**
Asymptote y = 1 tracée	90%
Asymptote y = 0 tracée	82%
Tangente horizontale en 1	50%
Dessin à l'échelle	82%
Inégalité	**28%**

Il y a plus de limite prouvée ici parce que quelques élèves ont réinjecté le résultat de la première question, après avoir factorisé le dénominateur de f. Notons aussi que deux élèves, ayant affaire à une fraction, ont utilisé la commande PropFrac, qui aidait aussi à la résolution du problème (l'une des élèves est Candice, jusque là réfractaire à l'utilisation de la machine).

A remarquer :

- une utilisation honnête de la machine : Cyril écrit " la limite de f est 1 (fait par la machine ! ") ;
- une utilisation astucieuse de la machine (mais sera-t-elle du goût de tout correcteur ?) : Jérôme L. calcule la dérivée avec la machine (aucun calcul intermédiaire). Il résout alors l'équation f ' (x) = 0, et trouve que la dérivée s'annule en 1. Puis il dit : "la dérivée est continue, donc pour connaître son signe, faisons f ' (a), avec a < 1, puis a > 1". Il calcule alors f ' (0), et f ' (2), en valeur exacte, puis approchée, et conclut. Il y avait plus

simple, bien sûr, mais cette méthode est correcte (Jérôme L. est un de ceux qui s'est le plus investi dans le "problème long") ;
- une utilisation calamiteuse de la machine : Aurélie (scolaire) calcule f (1). Elle trouve $\frac{e}{e-1}$, ce qui est correct, puis "simplifie" et obtient 1 - e, et fait un graphique avec 1-e positif... L'outil de vérification a été mal utilisé...

Partie C

Remarque qui n'a rien à voir avec la machine : on retrouve partout l'erreur logique classique (si G est une primitive de g, alors G ' = g - alors que c'est la proposition réciproque qui va être utilisée).

A propos de la machine, trois attitudes extrêmes :
- le recours direct et sans complexe à la machine : Jérôme L. demande à la calculatrice une primitive de g, et transforme à la main le résultat obtenu pour retrouver la forme de G. Le problème est que le calcul de primitive n'est pas justifié... Le contrat d'utilisation de la machine doit être clarifié.
- Rachel commence de la même façon, mais n'arrive pas à manipuler les expressions données par la machine : elle confond e^{-2x} et $e^{-2}.x$, et tout s'achève dans le désordre le plus total (elle note " pas le temps, à cause de la machine"). Phrase significative : la machine n'est pas ici dans un rôle d'auxiliaire. C'est un agent perturbateur.
- Sébastien (bricoleur) fait encore plus fort : il part de G, sans dériver, et se débrouille pour arriver, après des calculs sans sens, à g. La calculatrice assure ici du résultat, et le problème est de placer un certain nombre de maillons - à allure mathématique - entre le début et la fin. Il avait procédé de la même façon pour l'exercice 2.

Résultats :

Dérivée justifiée	**88%**
Intégration par parties détaillée et juste	69%
Intégration par parties détaillée et fausse	16%
Calcul de I_1	72%
Calcul de I_2 détaillé et juste	56%
Calcul de I_2 détaillé et faux	16%

Les erreurs dans la première intégration sont dues à un mauvais choix des deux facteurs (x et e^x, au lieux de x et e^{-x}).
Les erreurs dans le calcul de I_2 viennent du fait que de nombreux élèves n'ont pas récupéré le résultat de la première question. J'observe à nouveau ce phénomène, renforcé il me semble par la possession d'une machine puissante : la pression est forte pour en tirer un résultat immédiat, plutôt que de rechercher ailleurs, dans les références disponibles, les résultats antérieurs, des éléments de réponse. Les élèves qui procèdent ainsi sont donc conduits :
- soit à recommencer une nouvelle intégration par parties (on retrouve là l'idée que la disposition d'un engin puissant n'incite pas à choisir nécessairement les raccourcis...);
- soit à produire des théorèmes faux (pour 4 élèves, l'intégrale d'un carré est égale au carré de l'intégrale...).

Ce qui me frappe, c'est que la plupart des élèves ne "trichent" pas. Sauf les quelques cas signalés, si leur résultat ne coïncide pas avec celui de la machine, ils essaient de comprendre ce qui ne va pas, et, en désespoir de cause, ils gardent leur propre résultat. Ils opèrent ainsi un travail considérable d'aller-retour. Ainsi Cyril (un des élèves, bon pourtant, qui imagine que l'intégrale du carré est égale au carré de l'intégrale), note : " la machine m'a gêné dans un sens où les résultats de mes calculs ne correspondaient pas à ce qu'elle affichait (cf intégrales), ce qui m'a d'ailleurs surpris car j'étais sûr de mon calcul à la main".

L'hypothèse que je fais est que ce travail n'est pas perdu : quand on s'est affronté un certain temps à une contradiction - à un obstacle - on en mémorise d'autant plus profondément les enseignements...

Partie D

Analyse plus rapide : une minorité d'élèves a dépassé la première question.
Résultats :

Calcul de $S_n(x)$	66%
Encadrement de $f(x) - S_n(x)$	31%
Encadrement de $J - I_n$	34%
Encadrement de J	16%

On retrouve la grande difficulté à mettre en place des encadrements, surtout quand ceux-ci nécessitent de récapituler des résultats précédents...

Evaluation générale

La moyenne de la classe est 11,1, très supérieure à ce qu'elle est d'habitude (autour de 9). Mais c'est le premier bac blanc : c'est une épreuve très spécifique (les exercices sont en moyenne plus facile que les épreuves plus "localisées", la longueur de l'épreuve fait qu'il est possible de grapiller des points de-ci de-là...).
La comparaison avec les épreuves antérieures sans calculatrice est donc difficile...

Comment les élèves ont-ils analysé l'effet de la TI-92 ?
On rappelle les questions auquelles ils devaient répondre sur leurs copies en fin d'épreuve :
- en quoi la calculatrice m'a aidé ?
- en quoi la calculatrice m'a gêné ?
- en quoi la calculatrice m'a surpris ?

4 élèves n'ont pas répondu à ces questions : c'est sans rapport avec leur investissement dans l'expérience. Ce sont les élèves distraits, qui oublient à 12h les consignes données à 10h (ce sont les élèves qui ratent leur bus, oublient leurs affaires...). Les pourcentages qui suivent portent donc sur 28 élèves.

Il faut relativiser cependant la portée de ces considérations : il ne s'agit pas de résultats d'entretiens, certains élèves sont allés au plus court ("non, la machine ne me gêne pas") pour remplir le contrat (et avoir le point de bonus). Cependant, il me semble que la question, posée "à chaud", permet de recueillir un certain nombre d'informations utiles.

En quoi la calculatrice m'a-t-elle aidé ?

100% des élèves mentionnent la fonction d'aide de la calculatrice.
43% pour des vérifications (sans préciser) ;
43% pour le calcul d'intégrales ou de primitives ;
32% pour le calcul de dérivées ;
32% pour la vérification des graphiques ;
28% pour le calcul de limites.

Quelques observations :
- **le caractère graphique n'est plus dominant**. Mais il reste des traces des habitudes prises avec des calculatrices graphiques : Alice note comme aide "la vérification des limites (graphiquement)" ; Laurent note " j'ai pu aussi vérifier le graphique pour savoir si mon tableau de variation, (donc ma dérivée) était juste".
- **le mot "vérification" est a prendre dans le sens d'une action a priori, et a posteriori.** Laurent l'exprime très bien : " elle m'a énormément aidé lorsque j'avais

besoin de vérifier mes résultats, surtout sur les intégrales. Et j'avoue que souvent je regarde d'abord le résultat sur elle ce qui me met directement sur la voie". Il y a là une trace de l'activité des TP. Je l'ai constaté pendant le déroulement de l'épreuve lui même : il y a un aller retour entre observation/ calcul / vérification. Mais, pour les élèves, la seule attitude "avouable" reste le calcul "à la main", la calculatrice restant au second plan, donc intervenant en second lieu. D'où la phrase de Laurent : "j'avoue...".
- **cette fonction de prévision/ vérification est-elle une aide ? Pas forcément**. Il faut un niveau mathématique, et une maîtrise de la machine minimale, pour que cette fonction d'aide soit réelle. En témoignent les trois réactions ci-dessous :
- Michaël (rationnel, jusque là assez réticent) : "la calculatrice m'a permis une vérification active de mes résultats, ce qui est devenu un handicap temporel peu important" ;
- Stéphanie (scolaire) : "la calculatrice m'a montré des erreurs que je n'ai pas su retrouver. Donc elle m'a gêné par le fait que je me suis énervée, donc déconcentrée, elle m'a surprise par des messages bizarres, mais parce que la plupart du temps, c'était du à des erreurs de manipulation" ;
- Guilhem (théorique) : " je ne m'en suis pas beaucoup servi pendant l'interro, car j'estime ne pas savoir m'en servir assez bien pour éviter de perdre du temps".
Indépendemment du paramètre temps, dont on reparlera plus loin, il est clair que l'aide de la machine n'est pas la même pour tous...

En quoi la calculatrice m'a-t-elle gêné ?

36% des élèves déclarent qu'ils n'ont pas été gênés, 4% des élèves (ce qui fait 1 élève...) déclare qu'il a été moins gênés qu'avant, 10% des élèves ne répondent pas à cette question. J'estime que ce pourcentage de 36% est important, parce que la question était assez contraignante (on ne demandait pas "avez-vous été gêné ?", mais "en quoi avez-vous été gêné ? "). Cela témoigne sans doute d'une assez bonne adaptation à l'outil.
Il reste cependant 50% des élèves qui signalent avoir été gênés d'une certaine façon par la calculatrice.

Parce que la calculatrice les a retardés	21%
Parce que les résultats ne correspondaient pas	16%
Difficulté d'analyser les résultats	11%
Parce qu'elle ne donnait pas les résultats	7%

<u>La question du temps apparaît en effet essentielle :</u>
- pour des raisons de maîtrise insuffisante. Aline écrit "elle m'a gêné lorqu'avec la précipitation en faisant des erreurs de frappe j'effaçais tous les calculs et j'ai perdu du temps à recommencer mes calculs". Un seul élève revient encore à la calculatrice graphique, plus familière : Damien déclare : "il est à mon avis plus rapide, pour certains calculs, de le faire sur une autre machine" ;
- pour des raisons de sollicitations inutiles. Nathalie écrit : j'ai perdu trop de temps, surtout pour des calculs simples faisables à la main".
<u>En deuxième position, la question de la reconnaissance, ou non, des écritures</u>.
Elle est en effet essentielle, pour savoir si ses calculs sont validés, ou s'il faut tout remettre sur le chantier. C'est sur ce point que les élèves faibles avouent avoir été gênés : Sébastien dit par exemple "elle m'a embrouillé lors des résultats des dérivées et des primitives".

En quoi la calculatrice m'a-t-elle surpris ?

30% des élèves déclarent ne pas avoir été surpris, 70% des élèves déclarent avoir été surpris.
Parmi ceux-ci :
25% des élèves sont étonnés que la machine ne donne pas certains résultats ;
11% des élèves sont étonnés que la machine... donne des résultats différents des leurs ;

7% des élèves sont étonnés de la puissance de la machine.
Dans le même sens, Candice, plutôt réticente à l'utilisation de la machine : "elle m'a surpris dans le fait qu'elle m'a plus aidée que freinée, c'est toujours agréable".
En conclusion, on a bien l'impression que l'effet des TI-92 n'est pas uniforme, et dépend bien des caractéristiques cognitives des élèves concernés [19] :

- l'effet est très positif pour tous les élèves de type "rationnel" :

Michaël, Candice, peu intéressés par les calculatrices graphiques, se sont saisis des TI-92. Cela a d'ailleurs modifié leur comportement en "travail obligatoire" (en particulier les contrôles) : plus de conjectures, de vérifications partielles. Ce changement d'attitude n'est pas encore perceptible dans les TP : le travail dans ces séances n'apparaît pas encore, pour eux, d'une rentabilité suffisamment immédiate ;

- l'effet est aussi très positif pour les élèves de type "expérimentateur" :

Fabienne, Damien, bénéficient de leur investissement dans les TP. Ils contrôlent maintenant très bien les "mécanismes" de conjectures et vérifications. Alors qu'avec les calculatrices graphiques leur travail était un peu dispersé, là, la machine impose semble-t-il une rationalisation des démarches ;

- l'effet est plus contrasté sur les élèves "théoriques" :

Le contrat d'utilisation de la machine en contrôle n'est pas clair. Ainsi Jérôme L. relève les résultats donnés par la machine sans se donner la peine de les établir : il préfère réserver son temps aux questions de reflexion (établissement des relations d'inégalités par exemple), ou aux questions dont la machine ne donne pas les résultats. Guilhem procède de la même façon : il a été très intéressé par l'utilisation de la machine pour retrouver l'"historique" des calculs (cf le cours sur les intégrales). Il essaie ici de reproduire la même démarche. Déception, cela ne marche pas : "cela m'a gêné car elle n'a pas trouvé de primitives pour l'exercice 2. En cours, on remonte les étapes, ici je n'y suis pas arrivé avec la calculette".

Je dirais que la situation pour ces élèves est à l'envers des élèves "rationnels" : alors que pour ces élèves l'amélioration en contrôle était plus significative qu'en TP, pour les élèves "théoriques" l'amélioration en TP est plus claire qu'en contrôle. Mais, pour les trois types précédents, l'effet des TI-92 est positif, de façon assez incontestable. Il n'en est pas de même pour les deux autres types.

- pour le type scolaire, il y a une coupure nette :

- certains élèves, qui avaient un "bagage" mathématique suffisant, ont nettement bénéficié du nouvel outil. Ils évoluent vers un travail de type "rationnel" : les calculs, appuyés par des vérifications régulières, sont plus assurés. Du coup la maîtrise d'ensemble est meilleure. Aurélie déclare " la calculatrice m'a aidé pour les pbs A et B, lors des vérifications des dérivées et des graphiques. Elle m'a aussi aidé à l'exercice 2 pour vérifier I(a). Elle ne m'a ni gêné, ni surprise". On a du mal à reconnaître l'élève qui en Octobre ne savait pas se servir de sa Casio, et était à la traîne dans toutes les activités mathématiques (notons que Aurélie, Karen, sont aidées par la TI-92 dans ce contexte de contrôle. Mais en TP, l'éventail des possibles est encore trop vaste pour qu'elles se sentent à l'aise...).

- à l'inverse, d'autres élèves n'ont pas l'accumulation primitive de connaissances nécessaire pour comprendre ce qui se passe : savoir décoder un message de la machine, savoir opérer les conversions nécessaires. Stéphanie, Rachel, dans une moindre mesure Aline, ne sont pas aidées par la machine.

---

[19] comme le note l'équipe DIDIREM dans son rapport de 1996.

- pour le type "bricoleur", coupure aussi entre deux types d'élèves :

- pour certains élèves qui ont "joué le jeu", la manipulation régulière de la machine a entraîné des progrès certains. Pour comprendre les résultats affichés, comparer avec les résultats trouvés, un effort permanent est fait. Il est analysé souvent par eux comme une perte de temps, mais le gain en construction des connaissances paraît considérable. Pierre se dit gêné : " tendance à perdre du temps, certains résultats sont différents dans leur forme par rapport à ceux faits à la main, résultats inattendus (simplifiés, factorisés)". Alexandre : " elle m'a gêné et surpris pour certains résultats qu'elle donnait beaucoup trop développés. Mais elle m'a quand même plus aidé que ce qu'elle ne m'a surpris". Signalons que ce sont ces élèves qui se sont investis dans la recherche du "problème long", avec des productions souvent fausses, mais toujours originales, et témoignant d'un travail considérable. Ces élèves semblent évoluer vers un type "expérimentateur" ;
- à l'inverse, d'autres élèves "bricoleurs" ont estimé que l'investissement dans la TI-92 était beaucoup trop coûteux (par rapport à l'investissement nécessaire pour comprendre une calculatrice graphique). Ils se sont donc marginalisés, et, l'expérience avançant, ils ont du mal à reprendre pied. Sébastien ("la machine m'embrouille") est un bon exemple de ce type.

Il serait évidemment simpliste de croire que l'on peut ranger chaque élève dans telle ou telle case : on a choisi, pour illustrer chaque tendance, des individus "caricaturaux". Beucoup d'élèves de la classe se situent dans des zones intermédiaires. Ainsi Laurent, travaillant au départ comme Sébastien, essaie de reprendre pied (de façon assez cahotique) dans la classe. Il a fait à ce contrôle un travail bien meilleur que d'habitude. Mieux, c'est lui qui répond de la façon la plus précise aux questions d'évaluation posées en fin de course. J'ai déjà signalé qu'il "avouait" regarder sa machine en aval et en amont d'un calcul. Il "avoue" aussi : " la machine m'a gêné lors du calcul d'une intégrale car elle ne positionnait pas les signes de la même manière que moi. Alors à chaque fois je croyais avoir fait faux". Ces remarques témoignent d'un réel travail de reflexion, qui ne consiste pas à "s'arranger", comme Sébastien, pour "trouver pareil que la machine"...

La question " les élèves sont-ils avantagés avec cette machine ?" n'est pas ici essentielle. Par contre la question décisive, est sans doute :"dans ce type de contrôle, la présence d'une machine du type TI92 est-elle formatrice ?".
La réponse semble être " oui, pour la grande majorité des élèves".

C'est-à-dire que la machine les a contraint à une réflexion qu'ils n'auraient pas eue sans cet outil. Mieux, l'impression de perte de temps (pour comparer des expressions différentes, vérifier des calculs) n'est qu'une impression. Ce travail est tout à fait utile. Et en cas d'erreurs, la reflexion engagée prépare les rectifications ultérieures de la façon la plus efficace qui soit (cf les élèves qui ont "perdu" du temps pour établir que l'intégrale d'un produit était le produit des intégrales...).

Quant aux élèves qui restent sur le bord du chemin, il semble indispensable d'envisager un dispositif de réinsertion, du type "soutien". Celui-ci est nécessaire en général dans une classe. Avec un outil puissant comme la TI-92, il semble encore plus indispensable.

Quatrième contrôle réalisé avec la TI-92

Il s'agit du bac blanc du 12 Avril, commun aux 5 TS du lycée (option bio et physique) Echéance importante, puisque, pour la première fois, elle permet une comparaison entre des élèves qui travaillent avec, ou sans, TI-92.
Le sujet est dans la tradition des épreuves du bac : c'est en fait le sujet de Septembre 95, légèrement retouché par les professeurs de mathématiques des classes concernées.

Exercice 1 *(4 points)*

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne. On estime que <u>99% des pièces sont bonnes</u>. Sur chaque pièce, on effectue un test de qualité. <u>Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de 0, 995, et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0, 005</u>. <u>Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0, 990, et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0, 010</u>.

On note B l'évènement "la pièce est bonne", $\bar{B}$ l'évènement "la pièce est mauvaise" ,

T l'évènement "le test indique que la pièce est bonne", $\bar{T}$ l'évènement "le test indique que la pièce est mauvaise.

1. En utilisant les notations ci-dessus, donner la signification en terme de probabilités des phrases soulignées.

2. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\bar{B}\cap\bar{T})$, $p(B\cap\bar{T})$, $p(\bar{T})$ et $p(T)$.

3. On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

a) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne est $\frac{1}{3}$;

b) On tire au hasard successivement et avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente. Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce (on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près par excès de ce résultat).

Exercice 2 *(5 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -1$.

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique et placer A, B et C dans le plan.

2. a) Soit R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$. Donner sans justification la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

   b) Calculer l'affixe de l'image du point A par R et l'affixe de l'image de B par R; donner les résultats sous forme algébrique.

3. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_2+1}{z_1+1}$. En déduire la nature du triangle ABC.

4. a) Calculer l'affixe z_4 de l'image D du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Placer D sur le graphique.

b) Montrer que $z_4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})\, z_2$.

c) En déduire la longueur OD et la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OD})$.

PROBLÈME *(11 points)* **Partie A**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)^2e^{-x}$. Soit C la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que g' est du signe de $(1 - x^2)$. En déduire le sens de variation de g.

2. Montrer que a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Le but de cette question est de déterminer l'aire en cm^2 du domaine compris entre la courbe C et les droites d'équations respectives $x = -1$, $x = 1$, et $y = 0$.

On pose $I_1 = \int_{-1}^{1}(x+1)e^{-x}\,dx$ et $I_2 = \int_{-1}^{1}(x+1)^2e^{-x}\,dx$

a) Calculer I_1 (on pourra utiliser une intégration par parties) ;

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_2 = \frac{-4}{e} + 2I_1$.

c) En déduire l'aire cherchée (on en donnera la valeur exacte, puis une valeur arrondie à 10^{-2} près).

5. a) Prouver que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α et une seule ; prouver que α appartient à l'intervalle $[-2, -1]$;

b) Montrer que α vérifie la relation $\alpha = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{\alpha}{2}}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2, -1]$ par $f(x) = -1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$.

1. Etude de f a) Etudier les variations de f sur I.

b) En déduire que pour tout élément de I, f(x) appartient à I.

c) En déduire que, pour tout élément x de I, $|f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2e}}$. En déduire que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$.

d) On rappelle que $f(\alpha) = \alpha$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout élément de I, on a $|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

2. Approximation de α à l'aide d'une suite. Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = -\frac{3}{2}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+1}}$

d) Prouver que la suite (u_n) converge, préciser sa limite et déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près de u_{n_0} obtenue avec la calculatrice.

Bilan croisé de deux classes

Quelques commentaires d'abord.

Sur le sujet .

A la différence des contrôles précédents, l'énoncé de celui-ci n'a pas été conçu en fonction des TI-92. Il n'y a donc en principe ici aucun obstacle technique pour obtenir de la calculatrice les résultats des dérivées et des intégrales (pour le problème), ou des modules, arguments (exercice 2). On peut penser pour l'exercice 1 à une relative indépendance par rapport à l'outil de calcul (la possession d'une TI-92 ne devrait pas avoir d'influence sur le résultat).

Sur les groupes d'élèves comparés.

On va comparer ici les résultats de deux groupes d'élèves :
- la classe expérimentale (groupe 1), qui a travaillé avec des TI-92 (correction assurée par moi-même) ;
- un échantillon (groupe 2) de 35 copies, issues des autres TS ayant participé au bac blanc (corrigées par Christian Faure). Cet échantillon se compose de 11 élèves issus d'une TS option biologie, et de 24 élèves, issus de 2 TS option physique-chimie.

Les comparaisons devront être faites avec une relative prudence : les variables à considérer sont non seulement la possession, ou non, d'une TI-92 ([20]), mais encore le niveau des élèves, l'historique du cours (quelles sont les parties qui ont été traitées récemment, et de quelle façon...), la façon de corriger...
Sur le dernier point (la façon de corriger), on peut penser que les écarts seront assez minces : les deux correcteurs se connaissent bien, se sont mis d'accord sur un barême assez précis, et ont fait une analyse commune de ce qui était admissible, ou non.
Sur le niveau des classes, on se rappellera que la classe expérimentale est relativement faible (12 redoublants), et que les élèves des sections "biologie" sont en général plus faibles en mathématiques que les élèves de sections "physique-chimie". Dès qu'il sera question de note, on distinguera donc dans le groupe n°2 le sous-groupe A des biologistes.
Sur l'historique de la classe, on se souviendra que la classe expérimentale vient d'étudier les nombres complexes, et que le cours sur les probabilités date de trois mois. Il y a de plus chez les élèves le sentiment que, sur les complexes et en analyse, la machine peut représenter une aide importante, alors que, sur les probabilités, le bénéfice à espérer est assez relatif...

Sur l'analyse par les élèves de leur propre travail.

Comme lors du précédent bac blanc, il a été posé à la classe expérimentale les trois questions (en quoi la calculatrice m'a aidé, gêné, surpris ?). On en fera le bilan après la comparaison des deux groupes de copies.

Exercice 1 (probabilités conditionnelles)

25% des élèves dans le groupe 1 et 12% des élèves dans le groupe 2, n'ont pas abordé l'exercice 1. Cet écart s'explique sans doute par les remarques ci-dessus, portant sur l'historique du cours dans le groupe 1, et l'aide non attendue de la calculatrice TI-92. Vue la faible influence de la calculatrice, dans ce cas, sur les performances des élèves, on se contentera ici d'un simple récapitulatif des notes, et de quelques remarques.

---

[20] et encore sur ce point, il n'a pas été demandé la calculatrice utilisée pendant le contrôle par les élèves de l'échantillon : on peut faire cependant l'hypothèse qu'il s'agit de calculatrices simplement graphiques, hypothèse confirmée "en gros" par les surveillants du bac blanc.

	Groupe 1	Groupe 2A	Groupe 2 complet
Note (sur 8)	2, 26	4, 20	3, 87

On notera, contrairement à ce qui était prévu, que le groupe des biologistes du deuxième échantillon réussit mieux que le groupe des physiciens. De toutes façons, la classe expérimentale a des résultats plus faibles que le groupe 2.

Deux remarques à propos de l'influence, ou non, de la calculatrice :

- Jérôme M., élève catalogué comme scolaire, persiste à utiliser très peu sa calculatrice. Il se trompe ainsi dans plusieurs multiplications élémentaires ;
- à l'inverse, Patrice, classé plutôt comme bricoleur, n'utilise pas l'évènement contraire dans la question 3b pour calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce. Il est ainsi amené à calculer $\sum_{k=1}^{20} C_{20}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$. Le calcul est fait sans problème par la machine, et est donc donné, sous forme exacte. Comme dans les précédents contrôles, on constate ici un effet pervers de la disposition d'un outil puissant : il dispense de la recherche de raccourcis.

Signalons à ce sujet que Cyril, Michaël et Fabienne, qui étaient tombés dans ce travers les fois précédentes, ont correctement utilisé ici l'évènement contraire. Les enseignements ont été mémorisés.

Signalons enfin que, dans le groupe 2, un élève a tenté de faire le même calcul que Patrice. Mais, sans le secours d'un outil de calcul puissant, il n'a pas pu arriver à un résultat correct.

Exercice 2

Quelques remarques d'abord sur le groupe 1.

- Rachel, élève "scolaire", ne sait pas utiliser la TI-92 pour obtenir la forme trigonométrique d'un complexe donné sous forme algébrique. Elle écrit par exemple :

$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3})$. La machine n'est ici d'aucune aide...

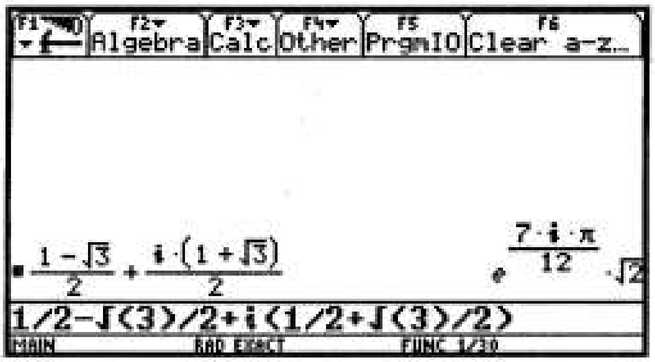
- Aline ne reproduit que ce que la machine donne directement : ainsi elle donne l'écriture trigonométrique correcte de z_1 et z_2 (qui est donnée par la machine), mais se trompe pour celle de z_3 (qui n'est pas donnée par la machine).

Elle écrit ainsi :$z_3 = -\cos 1 = e$, ce qui n'est pas très joli...

- Sébastien, élève bricoleur, ne sait faire aussi qu'une utilisation directe de la machine : il traite la question 1 (trouver module et argument de z_1), mais ne sait pas traiter la question 3 (trouver le module et l'argument de $Z = \frac{z_2 + 1}{z_1 + 1}$). Il fait le calcul à la main, et se trompe ;
- Pierre (bricoleur) maîtrise assez bien le secteur "complexe" de la TI-92. A la fin de l'exercice, il doit trouver module et argument de z_4. La logique de l'exercice voudrait que l'on utilise la relation démontrée : $z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} z_2$.

Il ne procède pas ainsi, et interroge directement la calculatrice.

L'utilisation de la calculatrice court-circuite ici une réflexion sur ce qui peut être réinvesti des résultats acquis antérieurement.



- A l'inverse, Cécile (plutôt "théorique") qui traite assez bien cet exercice, n'utilise pas la calculatrice pour vérifier ses calculs. Elle laisse ainsi une série d'erreurs de calcul dans les modules ou les arguments.

Mis à part ces quelques cas particuliers, on peut constater un progrès dans l'utilisation rationnelle de la machine, et les justifications des résultats avancés : ainsi Laurent, plutôt bricoleur, justifie tous les résultats (qu'il observe d'abord sur sa machine, comme il l'"avouait" à la fin du dernier bac blanc) avec beaucoup de soin.

Comparons maintenant les productions des groupes 1 et 2.

Dans la correction, on a distingué la justesse des réponses, et le caractère complet de la justification. La question était de savoir en effet si le fait de reporter le résultat affiché par la TI-92 dispensait d'en donner une justification.
Une distorsion apparaît en effet, mais uniquement au début, et à la fin de l'exercice.

	Groupe 1	Groupe 2
Résultat juste	88	94
Justification complète	78	94

Réponses (en pourcentage) à la question 1 de l'exercice 2.

	Groupe 1	Groupe 2
Résultat juste	25	41
Justification complète	18	41

Réponses (en pourcentage) à la question 4c de l'exercice 2.

Ce ne sont d'ailleurs pas les mêmes élèves qui produisent cette distorsion entre réponse juste, et justification :
- pour la première question, ce sont trois élèves plutôt faibles qui donnent simplement les résultats affichés par la machine, et ne vont pas plus loin dans l'exercice ;
- pour la dernière question, ce sont des élèves qui sont allés jusqu'au bout de l'exercice, et ont correctement justifié les premières réponses. Arrivés en fin de course, pris par le temps, ou ne voyant plus la cohérence de l'exercice (cf Pierre), ils se "contentent" de reproduire les réponses données par la machine.

Il s'agit donc de comportements relativement marginaux. Dans l'ensemble, il y a un bon aller-retour entre la calculatrice, et l'utilisation des résultats du cours. Ce qui fait que, globalement, les productions des deux groupes sont qualitativement assez proches.

Voyons pour finir sur le plan des notes :

	Groupe 1	Groupe 2A	Groupe 2 complet
Note (sur 10)	6, 5	5, 81	6, 71

Les résultats sont comparativement bien meilleurs pour le groupe 1 que lors de l'exercice sur les probabilités. La raison principale me semble être que les complexes viennent d'être étudiés. A la marge, comme on vient de le voir, quelques élèves ont pu récupérer quelques dixièmes de points par simple recopiage de leur écran.

Plus profondément, il y a sans doute une aide apportée par la calculatrice dans l'aller-retour (quand il est maîtrisé) entre l'écran et l'écrit. Mais c'est cela aussi que l'on juge lors d'une tel contrôle écrit...

PROBLÈME

Le problème porte sur le coeur du programme d'analyse de TS. On peut penser que l'ordre dans lequel le programme a été traité dans les différentes classes n'aura ici que peu d'importance.

Sur quelques questions significatives, comparons les deux groupes :

1. Le calcul de dérivées, et l'étude des variations des fonctions.

	Groupe 1	Groupe 2
Résultat juste	100	94
Justification complète	100	94
Signe de f' justifié	94	85

Réponses (en pourcentage) pour le calcul de dérivée.(A1)

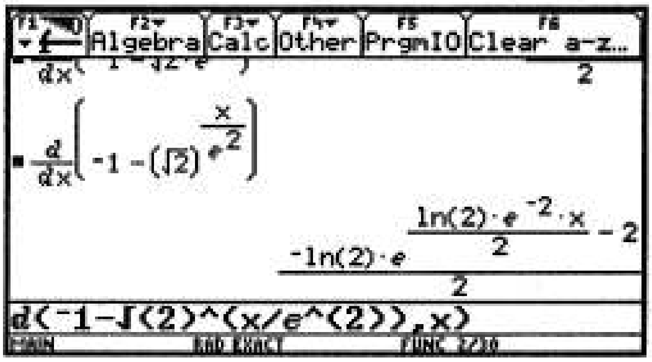
On constate que les résultats sont comparables. Cependant, l'utilisation de la TI-92 met en principe à l'abri d'une erreur de calcul. Dans les deux groupes, ceux qui donnent le résultat correct le justifient complètement. Et on assiste à une déperdition de même amplitude dans les deux groupes quand il s'agit de justifier le signe de la dérivée.

Il est important de noter que c'est seulement pour les fonctions simples que la TI-92 évite presque à coup sûr les erreurs de dérivation : pour les fonctions plus "complexes", l'exigence de correction syntaxique crée souvent des problèmes aux élèves faibles (ceux justement... qui ont des difficultés pour dériver une fonction!).

Ainsi, dans la question B2 (dérivée de g), pour Rachel :

Elle n'a pas rentré correctement la fonction g.

Résultat : la calculatrice renvoie une expression que Rachel est incapable d'analyser.



La justification des limites.

Dans l'énoncé, les limites de f (question A2) étaient données. Il s'agissait uniquement de les justifier.

	Groupe 1	Groupe 2
Limite en $-\infty$	85	91
Limite en $+\infty$	3	46

Réponses (en pourcentage) pour la justification des limites.(A2)

Il y a là une différence significative : pas pour la limite en $-\infty$, qui était facile à établir, mais pour la limite en $+\infty$, qui nécessitait de lever une forme indéterminée par transformation d'expression, et application d'un théorème de comparaison. C'est sans doute un effet pervers de la TI-92 : la difficulté de la recherche de limite est effacée par la possibilité d'obtention directe du résultat. Du coup la nécessité de la justification s'estompe...

La manipulation des valeurs exactes.

	Groupe 1	Groupe 2
Réponse juste	100	61

Réponses (en pourcentage) pour les valeurs exactes des extremums.(A3)

La différence est nette. Les élèves manipulant une TI-92 ont désormais l'habitude de travailler avec des valeurs exactes. Cela ne veut pas dire que cela correspond pour tous à l'approfondissement de la notion de nombre...

Ainsi Caroline donne-t-elle pour valeur approchée de $\frac{4}{e}$ ...2. Les valeurs exactes, pour ces élèves "scolaires" ont ainsi un statut proche d'une indéterminée, ou d'une inconnue, suivant le cas...

La courbe.

On constate des résultats similaires pour les élèves des deux groupes, qui sont tous dotés de calculatrices graphiques. Seul un élève dans chaque groupe se trompe, et donne une courbe fausse, effet manifestement de l'affolement de fin d'heure, ou de l'étourderie chronique...

Le calcul d'intégrale.

	Groupe 1	Groupe 2
Calcul juste	88	70
Justification correcte	66	70

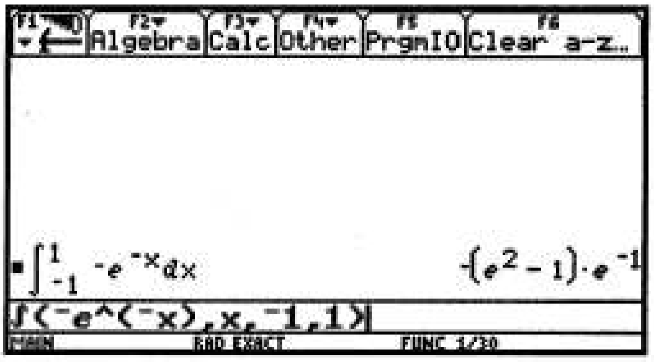
Réponses (en pourcentage) pour le calcul de I_1.(A5a)

Il y a là une différence réelle : les élèves disposant d'une TI-92 obtiennent plus facilement le résultat de l'intégrale, et un pourcentage non négligeable n'arrive pas à en donner une justification convenable.

On constate deux "effets pervers" de la machine :

- l'écriture de résultats justes, mais artificiellement compliqués, par recopiage des résultats de l'écran. C'est souvent le cas des élèves "bricoleurs", maîtrisant bien le fonctionnement de la calculatrice. Ainsi Patrice :

Drôle de résultat, pour une intégrale pourtant simple...
Patrice effectue correctement l'intégration par parties, mais donne les résultats intermédiaires en utilisant la TI-92, sans distance prise, d'où parfois ces résultats surprenants...



- la recherche de raccourcis, contournant les indications de l'énoncé. Ainsi Patrice, Jérôme L., Stéphanie, Rachel, tentent un calcul direct de I_2, avec une seule intégration par parties. Ils doivent alors trouver une primitive de $2(x + 1)e^{-x}$. Au lieu de reconnaître là le calcul de I_1, ils demandent le résultat à la calculatrice, qui le leur donne bien volontiers. Ils vérifient alors que l'on a bien la relation voulue entre I_1 et I_2, ce qui n'était pas vraiment le but du jeu !

La résolution de l'équation $f(x) = 2$.

Les résultats sont ici comparables. Environ 50% des élèves, dans les deux groupes, utilisent les variations de la fonction f, et le théorème de la bijection correctement.

On peut déceler deux effets du travail réalisé cette année dans le groupe 1 :

- 4 élèves (1 seul dans le groupe 2) modifient l'équation, et traitent l'équation f(x) - 2=0, ce qui me semble être un effet de la stratégie de "changement de point de vue" souvent évoquée en TP ;
- un élève (Laurent le bricoleur) veut résoudre l'équation de façon algébrique. Il modifie l'équation de toutes les manières possibles (ce qui constitue d'une certaine façon un changement de point de vue... mais bien infructueux!). Dans cette recherche, il utilise de temps en temps la commande Solve de la calculatrice, mais sans succès (en valeur exacte).

Les variations de g.

Résultats comparables dans les deux groupes. Une remarque notable cependant : dans le groupe 1, 3 élèves (0 dans le groupe 2), plutôt théoriques, donnent les variations de g par simple considération des fonctions de référence en cause. On peut imaginer là aussi qu'il s'agit d'un effet différé des TP de l'année.

Inégalité des accroissements finis, et conséquences.

	Groupe 1	Groupe 2
Application de l'IAF	20	60
Majoration de $\|u_n - \alpha\|$	10	30
Détermination de n_0	15	20

Résultats des deux groupes sur la partie B

On constate au début des résultats meilleurs dans le groupe 2. Ils deviennent comparables dans la partie calculatoire. Cela ne semble pas du à l'utilisation de la TI-92, qui n'apportait pas là d'aide décisive, mais plutôt à la différence de niveau scolaire entre les deux groupes : les élèves "moyens" sont plus à l'aise dans les calculs que dans la manipulation de résultats théoriques généraux.

Sur l'ensemble du problème, deux remarques un peu plus synthétiques :

1 Sur le rapport entre les deux parties du problème :

	Groupe 1	Groupe 2
Moyenne partie A (sur 12)	7, 80	7, 56
Moyenne partie B (sur 10)	2, 56	3, 87

Comparaison des moyennes sur les deux parties du problème

Le déséquilibre relatif s'explique d'une part parce que la TI-92 a davantage aidé les élèves pour des calculs partiels dans la première partie que dans la deuxième partie, d'autre part pour les raisons de niveau scolaire évoquées plus haut..

2. Sur les stratégies de "pêche des points" :

Il était possible de sauter des questions pour traiter directement la fin du problème : l'application du théorème d'encadrement, en supposant établie l'inégalité de B2c, d'où la détermination du n_0 convenable. Il apparaît que personne n'a eu recours à ce grapillage, dans aucun des deux groupes. En fait, ce "grapillage" de points n'a rien d'évident : il nécessite de prendre du recul par rapport aux questions traitées, de lire l'énoncé "en diagonale", de récupérer rapidement les références nécessaires... Et en cela la possession d'outils de calcul puissant n'apporte pas d'aide particulière ! La TI-92 incite parfois à des petits raccourcis, on l'a vu plus haut, mais cela n'a rien à voir avec cette stratégie de "pêche de points"...

En conclusion, sur l'effet de l'utilisation de la TI-92 pour le traitement de ce bac blanc.

- pour les élèves "scolaires" ou "bricoleurs" trop faibles, l'effet est à peu près nul. Les difficultés de syntaxe rendent aléatoire l'utilisation de la machine ;
- pour les élèves "bricoleurs" qui maîtrisent à peu près le fonctionnement de la machine, il y a une tendance parfois non contrôlée à utiliser les résultats de la calculatrice sans justification ;
- pour la grande majorité des élèves, il y a désormais un aller-retour assez fructueux entre l'utilisation de la calculatrice et les calculs et justifications "à la main".

Bilan global des points.

	Groupe 1	Groupe 2A	Groupe 2 complet
Ex1 (sur 8)	2, 26	4, 20	3, 87
Ex2 (sur 10)	6, 5	5, 81	6, 71
Problème (sur 22)	10, 36	8, 16	11, 43
Total (sur 40)	19, 12	18, 17	22, 01

Sur le plan des points, si on conserve les hypothèses que le groupe 1 (TS biologie avec TI-92) et le groupe 2a (TS biologie sans TI-92) sont comparables sur le plan scolaire, et que les deux corrections sont équivalentes, on observe un léger gain de points pour les élèves travaillant avec TI-92.

Sur le plan statistique, l'écart n'est probablement pas significatif. Cependant l'observation des copies me fait penser qu'il n'est pas déraisonnable d'imaginer que la TI-92 permet ce gain de $\frac{1}{2}$ point (sur 20), par l'assurance qu'elle donne sur les calculs demandés, et les allers-retours qu'elle autorise.

Cela demanderait à être confirmé sur des échantillons plus importants, et avec une double correction, pour mieux contrôler les écarts...

Quel jugement portent les élèves sur l'effet de la calculatrice lors de ce bac blanc ?

Le contexte particulier d'un bac blanc "officiel" relativisait, pour les élèves, l'importance de cette question : impossible d'ajouter un point symbolique à ceux qui y répondaient (donc aucune rentabilité pour l'élève), impossibilité d'insister sur la consigne (la surveillance était assurée par d'autres professeurs).

D'où le taux assez faible de réponses : 61% des élèves de la classe (87% lors du dernier bac blanc). On donnera désormais les pourcentages par rapport au nombre d'élèves qui ont répondu à ces questions (entre parenthèses le rappel des résultats du dernier bac blanc).

1. En quoi la calculatrice m'a-t-elle aidé ?

100% des élèves répondent que la calculatrice les a bien aidé (100%) :

40% pour vérifier les calculs (43%)
40% pour les calculs d'intégrale (43%)
40% pour le calcul de dérivées (32%)
25% pour les complexes
15% pour les graphiques (32%)
15% pour "éviter de faire des fautes"
10% pour éviter de perdre du temps.

On retrouve des résultats semblables à ceux du précédent bac blanc (si on tient compte du fait que les complexes sont nouveaux, et du fait qu'il n'y avait pas ici de limites à calculer : elles étaient données par l'énoncé...).

Pour une analyse plus fine des évolutions, on peut comparer les réponses de certains élèves aux deux bacs blancs :

	Dernier bac blanc	Ce bac blanc
Stéphanie (scolaire)	"La calculatrice m'a montré des erreurs que je n'ai pas su retrouver. Donc elle m'a gêné par le fait que je me suis énervée, donc déconcentrée, elle m'a surprise par des messages bizarres, mais parce que la plupart du temps, c'était dû à des erreurs de manipulation"	"La calculatrice m'a aidée surtout pour les complexes. Elle m'a permis de bien vérifier mes résultats, et pour une fois elle ne m'a pas vraiment surprise, et elle ne m'a pas gêné non plus"
Guilhem (théorique)	"Je ne m'en suis pas beaucoup servi pendant l'interro, car j'estime ne pas savoir m'en servir assez bien pour éviter de perdre du temps"	"Pas gêné, pas surpris, aidé pour les intégrales et les dérivées"

Il est clair qu'il y a une nette amélioration dans l'appropriation de l'outil...

A regarder de plus près ce que disent les élèves, on peut observer des différences dans la mise à contribution de l'outil de calcul :
- pour les élèves de type "théorique", la calculatrice "donne à voir" les objets mathématiques, pour les élèves plus "bricoleurs", la calculatrice a un rôle d'auxiliaire de calcul. Cécile (théorique) :" cela m'a beaucoup aidée pour le problème, afin de visualiser la suite et l'intégrale". Pierre (bricoleur) : "aide pour la vérification intégrales et nombres complexes" ;
- pour certains élèves de type "bricoleurs", il y a un temps important passé sur la calculatrice. Pour les élèves de type "rationnel", il y a une prise de distance avec l'outil. Alexandre (bricoleur) : "je pense que la calculatrice m'a beaucoup servi, même si parfois je tardais à reconnaître le résultat". Cyril (rationnel) : "je ne m'en suis pas trop servi. J'ai pu simplement vérifier mes résultats grâce à elle, comme pour les intégrales et les graphiques";
- pour des élèves de type "expérimentateur", l'habitude des changements de points de vue fait que la calculatrice est un outil de contrôle efficace : pour Damien, "la calculatrice m'a évité de faire des fautes graves et bêtes". Alors que pour certaines élèves de type "scolaire", on sent que la perplexité ne débouche pas toujours sur les rectifications nécessaires : pour Rachel, "surpris dans certains résultats (mais erreur de ma part), j'ai recommencé certains calculs".

2. En quoi la calculatrice m'a-t-elle gêné ?

	Dernier bac blanc	Ce bac blanc
Avouent une gêne	54	30
Affirment "aucune gêne"	36	45
Pas de réponse	10	25

15% sont gênés par les réponses inattendues (32%)
10% par les écritures des complexes
10% par la perte de temps (21%)
Là aussi un net progrès il me semble :

- la difficulté d'analyser les écritures me paraît naturelle, surtout sur les complexes, pour lesquelles il n'y a pas encore eu suffisamment "d'entraînement". Christelle déclare ainsi : "pour les complexes, pas assez grande familiarité avec la machine" ;
- quant à la question de la gestion du temps, elle me paraît caractéristique de l'investissement des élèves dans l'expérimentation. Ainsi Julien, qui a accepté (un peu tard...) le cadre des TP, déclare-t-il : "la calculatrice ne m'a pas ralenti, sur ce coup là" (sic). De même, Jérôme L. :"la calculatrice m'a aidé à ne pas perdre trop de temps". Par contre, Nikola, qui demeure assez réticent, écrit :"je m'en sers pour vérifier les plus petits résultats donc cela entraîne une perte de temps". Et Rachel : "gênée par le manque de temps, car je passe parfois trop de temps sur la calculatrice..."

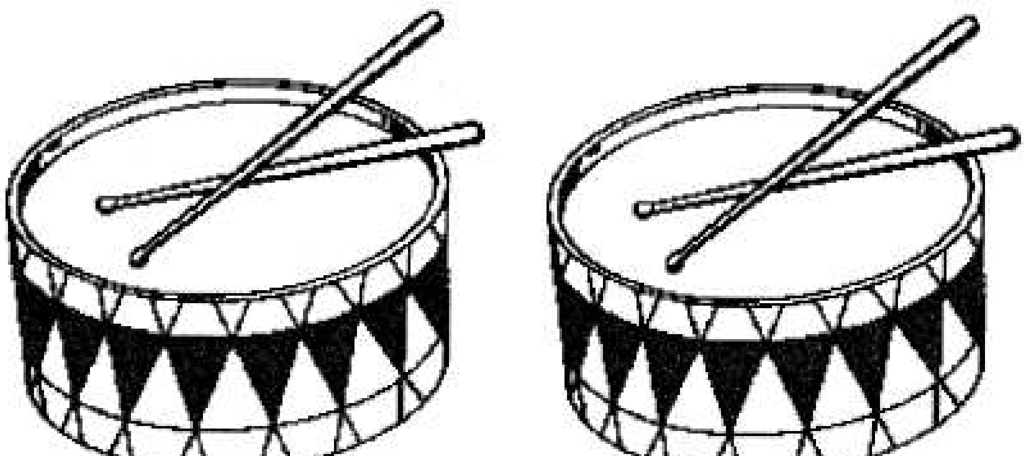
3. En quoi la calculatrice m'a-t-elle surpris ?

	Dernier bac blanc	Ce bac blanc
Avouent une surprise	70	15
Affirment "aucune surprise"	30	50
Pas de réponse		35

Sans aller jusqu'à l'emphase de Tristan ("la TI-92 ne m'a pas surpris car elle n'a plus de secret pour moi"...), on peut souligner que tous les élèves qui répondent à cette question indiquent une amélioration de leur compréhension du fonctionnement de la calculatrice, et de leur aptitude à combiner les différentes sources d'information qui sont à leur disposition.

Quelques éléments de conclusion après ce survol des appréciations des élèves.
- on peut estimer que la quasi-totalité des élèves de la classe estime savoir utiliser de façon convenable la calculatrice lors des contrôles scolaires ;
- il faut relever que pour en arriver là, il a fallu quelques mois d'entraînement (lors du dernier bac blanc, on en était pas encore là !). Il n'y a rien de naturel dans l'intégration d'outils de calculs puissants, en cours, comme au bac !
- le fait que les élèves soient désormais en confiance avec la TI-92 n'indique pas que cet outil sera un atout important le jour du bac : on a vu plus haut que l'écart n'est pas très significatif entre les élèves qui ont composé avec, et sans, calculatrice...
- le fait que les élèves estiment savoir utiliser leur calculatrice dans le cadre de traitement de problèmes "type bac" ne donne pas d'indication à propos de l'influence de cet outil sur la construction des notions mathématiques fondamentales (la notion de limite en particulier). Mais ceci est une autre histoire.

Disons pour conclure qu'il semble possible d'intégrer un outil de calcul comme la TI-92 dans une classe de Terminale, à la fois comme outil de recherche (c'était le cadre des TP, ou du "problème long"), et comme "auxiliaire de calcul" (c'était le cadre des bacs blancs).



Un bilan croisé : évolution des notes/ évolution du type de travail

Après avoir observé l'évolution du travail
dans les activités de recherche (TP), et dans
les interrogations écrites,
un bilan croisé s'impose...

Bilan croisé.

Il y a trop de notes...
Amadeus, Milos Forman

Un récapitulatif...

Petit récapitulatif croisé des notes, et du travail réalisé en TP. On trouvera ci-contre un tableau des notes de l'ensemble de la classe : les notes du 1^{er} semestre, puis les notes des 4 contrôles qui viennent d'être commentés, suivies de la note du 2ème semestre.

Pour chaque élève, on a noté le n° du groupe de TP, puis le type de travail auquel on peut le rattacher (T, R, S, B ou E pour Théorique, Rationnel, Scolaire, Bricoleur, ou Expérimentateur), enfin un indicateur de l'investissement dans les TP :

- 1 si l'investissement a été bon (ce qui est attesté par la rédaction des TP, le travail sur le problème long...) ;
- 3 si l'investissement a été mauvais (ce qui est attesté par l'absenteïsme lors des TP, ou les déclarations lors des différents questionnaires : "cela ne sert à rien"...) ;
- 2 sinon (investissement moyen).

Il est certain que l'indication du type de travail est assez subjective, dès lors que n'ont pas été indiqués les critères précis qui permettent de ranger un élève dans telle ou telle catégorie. Il règne donc une certaine imprécision sur ce point. Disons qu'il s'agit du recoupement des informations multiples qu'un professeur peut avoir sur sa classe, démultipliées par toutes les observations accumulées dans le cadre de l'expérimentation. Et que ces croisements multiples sont aussi recoupés avec les appréciations des différents observateurs dans la classe. On parlera de subjectivité contrôlée...

Pour faciliter la lecture, les élèves ont été regroupés par binôme, et on a commencé par les 5 binômes qui ont été observés à travers les bilans des différents TP.

Qui montre des évolutions significatives de notes...

On distingue une corrélation certaine entre l'investissement dans le travail de recherche et l'évolution des notes.

Les élèves que nous avons suivi de près (Cécile, Michaël, Caroline, Fabienne), font des progrès significatifs (même Caroline : sa note de semestre ne doit pas cacher l'évolution régulière de Janvier à Avril (de 3, 5 à 11). Par contre le groupe bricoleur (Laurent et Alexandre) stagne, faute de travail suivi (dans les TP, et en classe). On note aussi que les décrochages qui se sont produits à l'intérieur des binômes sont aussi des décrochages repérables dans les notes : au départ, la coopération est équilibrée, ensuite souvent prend le dessus celui qui a l'autorité scolaire la plus importante (ce n'est pas toujours le cas : on remarquera en bas de tableau, dans le groupe 16, que c'est Hakim qui avait les notes les plus faibles en début de semestre, et que c'est lui qui progresse de plus. C'était aussi l'élément moteur du binôme).

Il y a une exception dans cette corrélation : Christelle, qui travaille avec Fabienne, voit un léger recul de sa moyenne. Cela est dû à un petit repli personnel au cours du trimestre (on note une absence lors du bac blanc de Mars) : le travail en classe n'explique pas tout... Heureusement !

A l'autre bout de la chaîne, on notera que les élèves qui ont refusé le cadre des TP ont souvent des notes en baisse. On peut bien sûr se demander ce qui est l'effet, et ce qui est la cause... Notons toutefois que le refus des TP a été en général préalable à la baisse de notes... Phénomène assez naturel finalement : soit on est en osmose avec le projet en cours, et on avance avec le groupe, soit on se met "en dehors du coup", et on regarde les autres évoluer !

NOM	Gro	Typ	Inv	Moy	C 6	C7	C8	C9	Moy
				1° sem	Janvier	Février	Mars	Avril	2°sem
Cécile	**5 bis**	**T**	**1**	**10,5**	14	13,5	15	12,5	**14,5**
Stéphanie	**5 bis**	**S**	**3**	**6**	6	5,5	6	7	**6,5**
Michaël	**2**	**R**	**1**	**15,25**	12	17	20	17	**18,0**
Candice	**2**	**S/R**	**3**	**9**		7,5	8	9	**8,5**
Caroline	**13**	**S**	**1**	**10**	3,5	6	10,5	11	**9,0**
Rachel	**13**	**S**	**2**	**5**	6	5,5	4,5	4,5	**5,0**
Laurent	**4**	**B**	**3**	**6,25**	4	5	9,5	7	**6,8**
Alexandre	**4**	**B**	**3**	**8**	7,5	9	10	8,5	**9,0**
Fabienne	**14**	**E**	**1**	**14,5**	10	14	18	16	**16,0**
Christelle	**14**	**E**	**1**	**11,5**	9	13		9	**10,5**
Guilhem	**1**	**T**	**2**	**9,5**		6	12	7,5	**9,0**
Julien	**1**	**S**	**3**	**8**	6	4	6,5	7,5	**6,2**
Cyril	**10**	**R**	**1**	**10,25**	6,5	10,5	16	15	**13,0**
Patrice	**10**	**B/R**	**1**	**10**	7,5	10	11	11	**10,5**
Damien	**5**	**B/E**	**1**	**11,25**	7	11	14	12	**12,0**
Etienne	**5**	**B**	**2**	**8**	5	5	12	4	**7,0**
Vincent	**11**	**T**	**1**	**8,25**	6,5	10,5	13	12	**11,6**
Jérôme L.	**11**	**T**	**1**	**10**	7	10	8,5	10	**9,6**
Elsa	**12**	**R**	**1**	**11,25**	11	15	14	12,5	**13,5**
Guillaume	**12**	**S/R**	**1**	**5,5**	7,5	5	9,5	3	**6,5**
Karen	**7**	**S/R**	**1**	**7,5**	6,5	8,5	12	14,5	**11,5**
Aline	**7**	**S**	**2**	**5,75**	5	6,5	9	7	**7,5**
Pierre	**8**	**B/R**	**1**	**7,75**	6,5	10	11,5	11,5	**10,5**
Sébastien	**8**	**B**	**3**	**7**	3	6,5	5	6,5	**5,5**
Tristan	**15**	**B/E**	**2**	**7,5**	7	7,5	13	8	**9,5**
Nathalie	**15**	**B/E**	**2**	**7,5**	5	4,5	9	9,5	**8,0**
Alice	**9**	**R**	**2**	**12,75**	12	13	11,5	11,5	**12,0**
Brigitte	**9**	**S/R**	**2**	**11,5**	9		12,5	9	**10,5**
Nikola	**6**	**R**	**3**	**11,5**	7	10	14	9,5	**10,6**
Jérôme M.	**6**	**S**	**3**	**9**	2	10	5,5	9,5	**7,5**
Hakim	**16**	**B/E**	**1**	**6,5**	8,5		12,5	10	**11,0**
Erwan	**16**	**R**	**3**	**11,75**	7,5	5,5	13,5	11	**10,0**
Aurélie	**3**	**S**	**2**	**9,5**	6,5		13	7	**9,5**
Thierry	**3**			**4,5**					
Moyenne				**9**	7,2	9	**11,25**	**9,8**	**9,9**

Et de comportement.

La plupart des élèves ont changé de comportement de façon significative pendant l'année. Pour certains, on peut même repérer un changement qualitatif :

- soit par un investissement personnel dans la recherche, et un travail très approfondi. C'est le cas de Pierre (de bricoleur à rationnel), de Karen (de scolaire à rationnel), de Damien (de bricoleur à expérimentateur).

On voit que cela ne profite pas nécessairement au partenaire de l'équipe. Il y peut même y avoir un sérieux décrochage, dû à des raisons très diverses (marginalisation scolaire, et/ou problèmes personnels) ;

- soit par un effet d'entraînement, dans un groupe qui est tiré par un élément moteur. C'est le cas d'Aurélie et de Candice, qui travaillent régulièrement avec Michaël, et bénéficient de ses vertus de "pédagogue", ou de Patrice, qui bénéficie de la collaboration avec Cyril. L'élément moteur influence aussi le type de travail réalisé ;

- soit enfin par une coopération équilibrée entre deux élèves travaillant de la même façon, et avec un même investissement régulier, au sein d'un groupe (Alice et Brigitte, Tristan et Nathalie).

Des effets différés... et fragiles.

Certains éléments ne sont pas visibles dans le tableau précédent.

<u>- la chronologie des faits.</u>

Les progrès réalisés dans le travail des TP ont eu en général des effets différés pour les résultats scolaires. Il a fallu le temps du transfert de l'assurance acquise, des connaissances enregistrées, des méthodes de travail découvertes.

Mais la "marginalisation scolaire" aussi a été visible d'abord en TP : il est plus facile, dans une classe en "activité autonome", de voir les maillons faibles, que dans une classe qui écoute un cours (même si le cours sollicite des réactions des élèves). En situation de TP, le professeur bénéficie d'un recul qui n'est pas possible quand il "fait"cours.

Les TP ont bien été un baromètre pour chaque élève, annonçant, à l'avance, les résultats de chacun...

<u>L'assurance des progrès réalisés.</u>

On n'acquiert pas en un an de nouvelles habitudes de travail, profondément ancrées.

On a pu réaliser que, dès qu'un élève (pour des raisons de fatigue, d'angoisse...) se mettait à travailler "en pilotage automatique", les habitudes de travail anciennes reprenaient le dessus.

Les progrès enregistrés ne sont confirmés que quand les élèves travaillent "en mode contrôlé" [Houdé 1995].

De ce point de vue, il serait intéressant de comparer les résultats de cette expérimentation d'une année avec ceux d'une expérimentation se déroulant sur tout un cycle scolaire (par exemple de la seconde à la Terminale).

Une piste pour des expérimentations du même type, les années à venir.

4. Enquêtes et filatures

Enquêtes et filatures

Dans des investigations du genre de celles-ci, on commet assez fréquemment cette erreur, de limiter l'enquête aux faits immédiats et de mépriser absolument les faits collatéraux ou accessoires. C'est la détestable routine des cours criminelles de confiner l'instruction dans le domaine du relatif apparent.
Baudelaire, trad E. Poe, Histoires grotesques et sérieuses.

Trois types de questionnaire

Plusieurs types de questionnaires ont été soumis aux élèves en cours d'année :

- un questionnaire national, visant à faire "l'état des lieux" avant l'expérimentation ;

- un questionnaire d'évaluation générale de l'expérimentation, donné en fin de période avec les calculatrices graphiques, puis en fin de période avec les TI-92 ;

- un questionnaire plus technique ("baromètre"), visant à faire le point sur la maîtrise plus pratique de l'outil.

Ce n'est pas le seul endroit où l'on a accès à la représentation que se font les élèves de leur propre travail : à la fin des deux derniers contrôles scolaires de l'année (cf partie 3), les questions "la machine vous a-t-elle aidé ? Gêné ? Surpris ?" sont aussi des éléments d'informations précieux à cet égard.

Et un regret.

Pour avoir une vision plus pointue de cette représentation, il aurait fallu procéder à des entretiens avec certains élèves, en début et en fin d'année. Cela n'a pas été possible : en début d'année, parce que les contraintes techniques de mise en place de l'expérimentation n'ont pas laissé l'espace nécessaire à ces entretiens, et en fin d'année, parce que les contraintes du baccalauréat approchant ont trop absorbé les élèves eux-mêmes.

En l'état, le matériel rassemblé dans cette partie du "côté jardins" permet tout de même de se faire une petite idée du regard que les élèves portent sur eux-mêmes, sur l'expérimentation dans laquelle ils ont été immergés, et sur l'évolution de ce regard.

4a. Questionnaire national

Prévu pour être proposé aux élèves avant l'expérimentation, il l'a été en fait en Décembre, avant l'arrivée des TI-92, mais après trois mois de travail intégrant les calculatrices graphiques.
Les élèves ne peuvent donc pas être considérés comme "vierges" relativement à cette intégration dans la classe.

S'agissant d'un questionnaire national, il serait intéressant de croiser les réponses avec celles des autres classes engagées dans l'expérimentation (en tenant compte du fait qu'il s'agit dans ce cadre de la seule classe de Terminale) ; ce sera fait à une autre occasion.

Questionnaire national

31 élèves sur 34 étaient présents ce jour là. Certaines questions ont été rajoutées, par rapport au questionnaire national initial, pour faire certaines comparaisons entre l'année dernière et cette année : ces questions sont codées avec (b) ou (c).

Tous les élèves possèdent une calculatrice graphique et programmable :
10 Texas Instrument (2 TI81, 7 TI 82, 1 TI 85)
21 Casio (1 Casio 6800, 3 Casio 7000, 1 Casio 7500, 7 Casio 7800, 2 Casio 8500, 1 Casio 8700, 4 Casio 8800, 2 Casio 9900).

29 élèves sur 31 possédaient avant une autre calculatrice : pour 15 d'entre eux, il s'agissait d'une calculatrice non graphique (Casio 82 ou 180) . Pour les 14 autres, il s'agissait d'une calculatrice graphique de capacité inférieure (on note un glissement vers TI : seuls 4 élèves avaient une TI auparavant).

A partir de maintenant, les réponses se font en pourcentage des présents .
En italique, les commentaires.

5. Sexe

Filles 39 **Garçons 61**

7. Depuis combien de temps avez-vous votre calculatrice ?

Moins de 2 mois : 6 Moins d'un an : 19 **Plus d'un an : 75**

L'année dernière, si vous aviez une calculatrice, l'utilisiez-vous :

13. En classe	Jamais : 3	Parfois : 42	**Souvent : 55**
14. A la maison	Jamais : 10	Parfois : 32	**Souvent : 58**

Cette année, si vous avez une calculatrice, l'utilisez-vous :

13b. En classe	Jamais : 0	Parfois : 0	**Souvent : 100**
14b. A la maison	Jamais : 3	Parfois : 29	**Souvent : 68**

Cette année, tous les élèves ont bien conscience d'utiliser la calculatrice souvent en classe.
Cela entraîne aussi une progression, mais moins spectaculaire, à la maison.
On notera aussi que, alors que, dans la plupart des enquêtes, les élèves utilisent davantage leur calculatrice à la maison qu'en classe, cette année la situation est inversée.

Utilisez-vous votre calculatrice actuelle	**Jamais**	**Parfois**	**Souvent**
15. Pour faire des calculs numériques	0	29	**71**
16. Pour tracer des graphiques	0	3	**97**
17. Pour programmer	32	**58**	10
18. Avec des mémoires ?	26	**55**	19
19. Avec des formules ou programmes que vous avez entrés dans votre machine ?	16	**65**	19

20. Pouvez-vous citer des exemples de formules et programmes que vous avez entrés dans votre calculatrice ?
Dans l'ordre : **résolution des équations du second degré (58)**, formules de math (29), programmation des valeurs d'une fonction (19), formules de physique (19), suites récurrentes (6), dichotomie , résolution de systèmes et calcul approché d'intégrales (3).

Pour la très grande majorité des élèves, la programmation se ramène à très peu de choses, pour la totalité, il s'agit de programmes recopiés sur des copains ou le mode d'emploi. Notons qu'aucun élève n'évoque des programmes de jeu (hors contrat ici, mais quelques élèves ont bien des jeux dans leur machine...)

Sur votre calculatrice graphique, utilisez-vous:	Jamais	Parfois	Souvent
21.Le zoom ?	16	**48**	36
22.La commande Trace ?	6	29	**65**
23.La commande Range (ou Window) ?	0	0	**100**
23b.D'autres commandes... Table			19
Plot			9

Résultat sans doute des activités menées en classe : les élèves ont surtout travaillé le "fenêtrage", c'est à dire la commande "Range". A noter que les élèves possédant une TI-82 évoquent tous l'utilisation de la commande "Table", fortement sollicitée aussi.

24. Pensez-vous bien connaître les possibilités de votre calculatrice ?
Oui : 26 **Non : 74**

Il y a peut être là l'effet de mes rengaines : "dire que l'on connaît bien un objet empêche d'en découvrir d'autres potentialités, et appauvrit en fait son utilisation..."

25. Avez-vous appris l'année dernière à vous servir de votre calculatrice surtout :
Avec le prof : 19 **Manipulant : 77** Mode d'emploi : 35 Copains : 55

Les élèves n'ont pas considéré les réponses commes exclusives les unes des autres.

26. Avez-vous eu en classe, les années précédentes, des séances spécialement consacrées aux calculatrices ?
Oui : 16 **Non : 84**

Qu'il n'y ait pas eu de séances spécifiques ne signifie pas qu'il n'y ait pas eu d'apprentissage avec le professeur, comme on le constatera en comparant les réponses aux questions 25 et 26.

25b. Avez-vous appris cette année à vous servir de votre calculatrice surtout :
Avec le prof : 98 Manipulant : 55 Mode d'emploi : 13 Copains : 13

Déplacement attendu des réponses vers la gauche. L'apprentissage est intégré cette année, à la fois sous contrôle du professeur, et dans l'action.

25c. Que pensez-vous avoir appris cette année avec le professeur :
Dans l'ordre : **tout ce qui concerne le fenêtrage (48)**, la familiarisation avec l'outil (19), la précision (6), la découverte de nouvelles commandes (6), les tableaux de valeur (6).

Deux élèves ont répondu : "j'ai tout appris sur les calculatrices, je ne m'en était jamais servi avant". Un élève facétieux a répondu qu'il avait appris cette année ... le *programme de TS. Mises à part ces particuliarités, il est significatif à nouveau que l'étude du fenêtrage se distingue ici.*

27. Les professeurs de math doivent-ils faire une initiation aux calculatrices ?

Oui : 90 Non : 10

28. Si vous avez répondu "oui", précisez ce qu'à votre avis les professeurs doivent apprendre à leurs élèves, si vous avez répondu "non", expliquez pourquoi.
Trois élèves ont répondu "non". La première, hostile aux calculatrices, ne donne pas d'explications. Le deuxième (nouvel arrivé dans la classe) répond "à mon avis, il est plus important de faire le programme que de perdre du temps sur les calculatrices car tout le monde a un mode d'emploi". Le troisième, Nikola, réticent à l'expérimentation : "car l'informatique ne fait pas marcher le cerveau, les gens ne savent même plus faire 2+2".
Les élèves qui ont répondu oui, et qui ont précisé pourquoi, disent, dans l'ordre :
les fonctions principales (48), la programmation (29), la lecture graphique (13).
Rachel répond : "on doit nous apprendre à tirer le plus de renseignement possible de la calculatrice pour résoudre un exercice, ou plutôt pour nous aider à le résoudre".

Il y a en fait une ambiguïté dans la question : les élèves ont parfois compris "qu'est-ce qu'un professeur, en général, doit apprendre à ses élèves sur la calculatrice?", d'autres ont compris "qu'est-ce qu'on souhaite encore apprendre cette année sur la calculatrice ?", ce qui n'est pas tout à fait pareil. Quant à la programmation, on a vu plus haut qu'elle se résume au désir d'enregistrer dans sa calculatrice des routines simplifiant les calculs usuels.

29. Est-ce que votre calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants pour vous ?

Oui : 65 Non : 35

30. Si oui, pouvez-vous en donner un ou plusieurs exemples ?
Dans l'ordre, **les paradoxes graphiques (26)**, les exemples des TP (23), le manque de précision (6).

En fait, tous les élèves font référence aux exemples de tracés inattendus rencontrés dans les TP.

31. Est-ce que votre calculatrice vous a parfois entraîné à commettre des erreurs ?

Oui : 61 Non : 34

32. Si oui, pouvez-vous en donner un ou plusieurs exemples ?
Dans l'ordre, viennent **les erreurs d'interprétation de l'image (29)**, les erreurs dues à une mauvaise manipulation (19), les erreurs dues à l'imprécision de la machine (6).

Dans les erreurs d'interprétation de l'image sont regroupées les erreurs dues à l'oubli de racines se trouvant hors de l'écran, les erreurs dues à l'oubli du caractère discret des représentations graphiques... Les erreurs dues à une mauvaise manipulation regroupent les erreurs classiques ("j'étais en degré au lieu d'être en radian", "j'avais mal programmé la fonction..."). Il est significatif là aussi que les erreurs relevées viennent d'abord d'une mauvaise interprétation de l'image. : dans les enquêtes réalisées dans des classes "normales" [Trouche 1992], les élèves mettent d'abord en avant les erreurs de manipulation de la machine, puis les erreurs dues à l'"imprécision de la machine" (ce qui est en effet assez imprécis...).

33. Vérifiez-vous les résultats affichés par votre calculatrice ?

Jamais : 3 Parfois : 26 **Souvent : 71**

34. Comment ? Donnez un ou plusieurs exemples.
Dans l'ordre viennent **le calcul à la main (65)**, refaire la même action machine (16), faire une autre action machine pour vérifier la cohérence (10), vérifier la cohérence théoriquement (6).

Par le calcul à la main, il ne s'agit bien sûr pas de refaire les multiplications... Si une fonction apparaît croissante sur la machine, la vérification passe par le calcul de la dérivée. Une "autre action machine pour vérifier : une fonction apparaît croissante, je trace la courbe de la fonction dérivée pour vérifier". "Vérifier la cohérence théoriquement ": les élèves évoquent les ordres de grandeur, ou les fonctions de référence.

Parmi les phrases suivantes, cochez la case correspondant à votre opinion.	Pas du tout d'accord	Plutôt pas d'accord	Plutôt d'accord	Tout à fait d'accord	Sans opinion
35. La calculatrice me fait gagner du temps.	0	0	**65**	25	10
36. La calculatrice m'aide à résoudre mes problèmes.	6	10	**58**	19	7
37. La calculatrice me permet de vérifier mes résultats.	0	0	29	**65**	6
38. La calculatrice m'aide à préparer mes contrôles.	**23**	19	19	16	**23**
39. La calculatrice me fait perdre du temps.	**52**	29	0	0	19

Ambiguïté de la question 38 : beaucoup d'élèves préparent les contrôles ... en rentrant des formules dans les calculatrices. Ambiguïté aussi de la question 36 : plusieurs élèves ont noté en marge "ça dépend des problèmes"....

39b. Certaines de ces réponses ont-elles évolué par rapport à l'année dernière ? Si oui, lesquelles, et pourquoi ?
Oui : 26 **Non : 45** Sans réponse : 29

Les élèves qui étaient déjà favorables à l'utilisation des calculatrices répondent évidemment que leur opinion n'a pas changé... Ceux qui répondent que leur opinion a changé évoquent les réponses aux questions 35, 36 et 37.

40. Avez-vous utilisé avant cette année votre calculatrice durant un contrôle ?
Jamais : 0 Parfois : 3 **Souvent : 97**

41. Pourquoi ?
Les élèves évoquent **le calcul (35)**, les graphiques (26), l'aide - en général - (23), les vérifications (19).
Laurent note "car c'est un support aussi important qu'une feuille, c'est un moyen de vérifier tout en apportant des connaissances" ; Erwan écrit :"pour vérifier mes résultats et parfois orienter ma démarche".

42. Que pensez-vous de l'utilisation de la calculatrice aux contrôles ? Etes-vous :
Pour : 74 Contre : 0 Ca dépend : 26

Il est possible qu'il y ait là l'influence d'une autre de mes rengaines : "pour certaines tâches, la calculatrice est inutile : à quoi servent des bazookas pour la chasse aux papillons ?". Candice, qui répond "ça dépend", explique : "car l'emploi abusif de la *calculatrice ne permet pas de prendre du recul par rapport aux résultats, mais permet en revanche de faire des calculs plus complexes".*

43. Pourquoi ?
Dans l'ordre :
- **la rapidité des calculs (26) ;**
- **l'aide - en général - (26) ;**
- les vérifications (23) ;
- la justesse des résultats (10).

Pierre répond : "il faut utiliser les moyens technologiques actuels afin de permettre une meilleure intégration dans la société".

44. Utilisez-vous la calculatrice dans d'autres matières ?
Oui : 100 Non : 0

45. Si oui, lesquelles ?
Physique : 100 Biologie : 35 Hist-Géo : 6

Deux élèves, considérant que c'est une matière, répondent "des jeux".
Quant à l'aide apportée en Histoire- Géographie, on peut être un peu sceptique : s'agit-il "de pompes"?
Un regret enfin : alors que tous les élèves utilisent leurs calculatrices en Physique, le professeur y est résolument hostile : cette année, pas de synergie à espérer.

Avez-vous utilisé avant cette rentrée scolaire un logiciel :	Jamais	Une ou 2 fois	De 3 à 10 fois	Plus de 10 fois	Lequel ou lesquels ?
46. De traitement de texte ?	**51**	31	15	3	Framework, Word
47. De mathématiques ?	**80**	17	0	3	Mathex, Mathloo
48. De dessin ?	**42**	23	16	19	Degas élite, Paint Shop
49. Un tableur ?	**80**	17	0	3	Excel
50. Un jeu informatique ?	19	10	3	**68**	Jeux de console
51. D'autres logiciels ?	**68**	3	3	26	Logiciels de musique

Il faut noter que beaucoup d'élèves signalent s'être servi de tel ou tel logiciel, mais ont oublié le nom, ou donnent des noms fantaisites (Window, Dos...).

52. Y a-t-il un ordinateur chez vous ?
Oui : 42 **Non : 58**
L'utilisez-vous ?
Oui : 30 Non : 12

Ces dernières réponses se rapportent évidemment à ceux qui ont un ordinateur...

Chez-vous y a-t-il des personnes utilisant	Parents	Frères ou soeurs
53. Une calculatrice scientifique	13	**32**
54. Un ordinateur	**35**	32

55. Avez-vous suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique ?
Oui : 13 **Non : 87**

56. Pour apprendre des mathématiques, les ordinateurs sont-ils, à votre avis :
Dangereux: 6 **Sans effet : 48** Utiles : 32 Sans opinion : 14

57. Précisez vos raisons

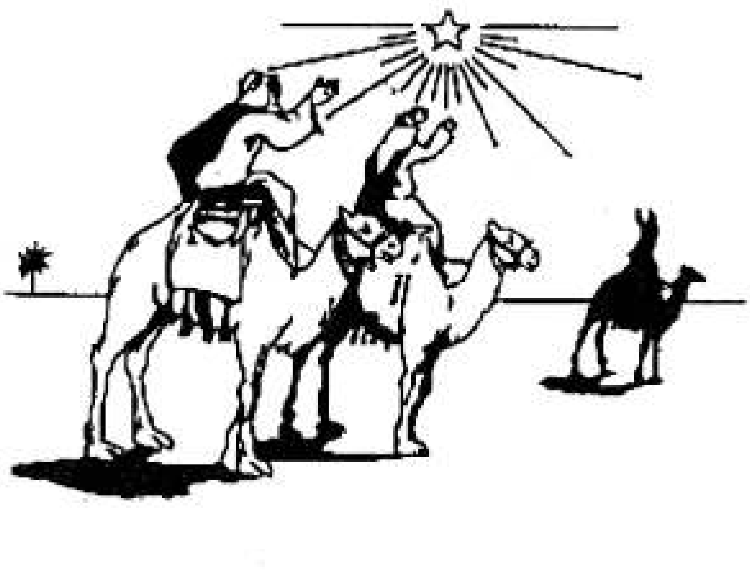
Il y a ceux qui estiment les ordinateurs **dangereux** :
- pour Karen, "il y a perte de la vraie valeur des math" ;
- pour Julien, "on est poussé à ne plus trop utiliser sa tête".

Il y a ceux qui estiment qu'ils sont **utiles** :
- pour Sébastien, "ils peuvent nous donner de bonnes applications" ;
- il y a les pragmatiques : Akim, pour qui "ça permet d'aller plus vite" ;
- et les enthousiastes : pour Jérôme, "l'ordinateur, c'est l'avenir", pour Guillaume "l'an 2000 est l'ère de l'informatique"

Et puis il y a ceux qui jugent les ordinateurs **sans effet**. Certaines réponses sont définitives :
- pour Alexandre, "ils ne peuvent pas faire les problèmes à notre place" ;
- Rachel remarque : "il vaut mieux avoir un professeur, sinon on ne comprend rien" ;
- pour Cécile : "aucun intérêt pour l'informatique".

D'autres témoignent d'une **perplexité** certaine :
- Alice demande "qu'est-ce qu'un logiciel de math ?";
- Erwan dit "je ne connais pas l'usage que l'on peut faire d'un ordinateur pour les mathématiques" ;
- Guilhem : "je ne connais pas les ordinateurs" ;
- Damien est encore plus vague : "je ne sais pas exactement".

Seules, deux élèves font le lien entre calculatrices et ordinateurs :
- Nathalie, pour qui "les ordinateurs sont beaucoup plus perfectionnés que les calculatrices et permettent des calculs plus complexes" ;
- et Christelle, pour le mot de la fin :
"Les ordinateurs sont de grandes calculatrices ! Les ordinateurs peuvent nous aider à comprendre les calculatrices et vice-versa, mais sont tous deux en tous cas très utiles pour l'avenir."



4b. Questionnaire d'évaluation générale

Ce questionnaire, visant à cerner l'opinion des élèves sur tous les aspects de l'expérimentation (TP, cahiers de recherche, rôle et intérêt de la calculatrice), a été proposé à la classe une première fois le 26 Octobre, après un mois et demi de travail avec les calculatrices graphiques, et une deuxième fois le 14 Mai, après 4 mois de travail avec les TI-92.
On trouvera donc, dans les pages qui suivent, le texte du questionnaire, puis, successivement, les deux bilans.
Pour une compréhension plus fine des choses, de nombreux commentaires d'élèves viendront appuyer les bilans chiffrés des questionnaires, plus synthétiques, mais souvent moins précis.
Pour finir, on observera de plus près les réponses des 5 élèves représentatifs de notre typologie.

Premier bilan	**Nom**

Après deux mois de classe, et 6 TP par équipe de deux, un premier bilan...

A *Depuis le début de l'année, le professeur de mathématiques a eu souvent recours à une calculatrice rétroprojetable dans le cadre du cours.*

A1 Cela a-t-il changé quelque chose pour vous ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

A2. Avez-vous jugé cela comme une aide pour la compréhension ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

A3. Avez-vous jugé cela comme une perte de temps ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

A4. Faites éventuellement des suggestions pour l'amélioration du dispositif de cours.

B *Chaque semaine des TP sont l'occasion d'un travail de recherche en groupe.*

B1. Ces séances vous ont-elles intéressé ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B2. Cochez les cases correspondant à votre appréciation de chaque TP :

n° du TP	Très intéressant	Intéressant	Inutile	Ennuyeux	Surprenant
1					
2					
3					
4					
5					
6					

B3. Que pensez-vous du fait de travailler par groupe ?

Intéressant Inutile Ennuyeux

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B4. Que pensez-vous de cette activité de recherche ?

Intéressante Inutile Ennuyeuse

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B5. Que pensez-vous de ce travail de recherche utilisant des calculatrices ?

Intéressant Inutile Ennuyeux

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B6. Que pensez-vous de la réalisation des rapports de recherche par chaque groupe ?

Intéressante Inutile Ennuyeuse

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B7. Est-ce que votre conception des rapports de recherche a évolué entre le TP1 et le TP 6 ?

Oui Non Sans opinion

Si oui, en quoi ?

B8. Que pensez-vous de la présence d'observateurs pendant les séances de TP ?

Intéressante Inutile Ennuyeuse

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B9. Comment jugez-vous le travail de votre propre groupe pendant ces TP ?
Cochez les cases correspondant à votre réponse. On peut ajouter des qualificatifs...

	Travail d'équipe	Rapides	Efficaces	Scolaires	Bricoleurs	Observateurs	Méthodiques
Oui							
Non							
?							

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

B10. Faites éventuellement des suggestions pour l'amélioration du dispositif TP.

C. *De façon générale (si l'on considère l'ensemble du dispositif cours / TP)...*

C1. Ce type de travail particulier a-t-il modifié votre point de vue sur les mathématiques ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

C2. Ce type de travail particulier a-t-il modifié votre point de vue sur les calculatrices ?

Oui Non Sans opinion

Pourquoi ? (vous pouvez évoquer un fait, ou un évènement, qui illustre votre réponse)

D. *Pour finir, un point de vue sur vous même...*

D1. Comment jugez-vous vos résultats en mathématiques...

Bons Moyens Médiocres

Commentaire éventuel :

D2. Comment ces résultats évoluent-ils ?

En hausse Stables En baisse

Commentaire éventuel :

D3 Comment jugez-vous votre aptitude à utiliser une calculatrice ?

Bonne Moyene Médiocre

Commentaire éventuel :

D4 Comment cette aptitude évolue-t-elle ?

En mieux Stable En pire

Commentaire éventuel :

E1.. Il y a peut -être une question qui n'a pas été posée, et à laquelle vous auriez aimé répondre... C'est le lieu et le moment :

↑ *Panneau d'expression libre.* ↑

Bilan n°1. Réponses et analyse

32 élèves présents (un absent)
Toutes les réponses sont en pourcentage des élèves présents.

Questions A (effet d'un cours avec calc. rétroprojetable intégrée)

Question	Oui	Non	Sans Opinion
A1 : Cela a-t-il changé quelque chose pour vous ?	88	9	3
A2 : Aide pour la compréhension ?	97	0	3
A3 : Perte de temps ?	0	94	6

Réponse très largement majoritaire : l'aide à la compréhension que constitue un cours assisté par une calculatrice rétroprojetable. Quelques phrases significatives :

"une explication donnée à partir d'un graphique identique pour tous les élèves est beaucoup plus claire", "on voit les réponses de suite, on est dirigé vers la réponse", "c'est plus pratique : lorsque le professeur explique, on voit bien ce dont il veut parler et on suit sur le rétroprojecteur", "c'est plus compréhensible, lorsqu'on a la courbe devant nous : le professeur peut s'expliquer tout en illustrant, en montrant telle ou telle partie de la courbe au lieu d'en parler devant un tableau vierge".

Questions B (portant sur les TP du Jeudi)

Question	Oui	Non	Sans Opinion
B1 : Ces séances vous ont-elles intéressés ?	69	12	28

A noter : certains élèves ont répondu à la fois oui et non, en expliquant que certains TP les avaient intéressés, les autres non. Quelques phrases significatives :

Les contre, ou mitigés :

"Il y a eu des moments où ça n'avançait pas", "les corrections sont intéressantes mais j'avoue que malgré la compréhension apportée par la calculatrice lors du cours, l'utilisation de cette dernière ne me fascine pas énormément".

Les pour :

" on apprend à maîtriser sa calculatrice", "c'est une nouvelle approche des fonctions", "cela nous apporte des petits plus, sur des points de cours", "il y a des moments où on n'avançait pas", "les TP de recherche permettent un travail d'équipe intéressant", "on se prend vite au jeu, et le temps passe plus vite", "parfois on arrive à buter sur des questions, et on n'a pas de coup de main, et donc on bloque, et on perd du temps, car les profs passent sans nous indiquer de pistes", " ça nous permet d'acquérir une méthode de recherche car nous avons aucune expérience de recherche", "on découvre des choses, des propriétés de la calculatrice, et on peut librement exposer ses idées sans avoir peur de se ramasser un zéro ! C'est le caractère expérimental qui m'intéresse", "ces recherches sont intéressantes, car elles permettent de faire des recherches en équipe, et d'échanger des opinions".

Question B2

n° du TP	Très intéressant	Intéressant	Inutile	Ennuyeux	Surprenant
1	6	47	3	34	10
2	9	54	6	28	3
3	0	28	3	50	16
4	22	47		9	16
5	19	53	9	0	16
6	22	31	0	13	63

A noter : l'accident du TP 3, jugé ennuyeux. Le TP 6, sur les "images paradoxales" a surpris, ce qui est bien normal... A partir du TP 4, il y a stabilisation des "satisfaits". Et aussi des insatisfaits. Un noyau de 3 ou 4 élèves juge les TP inutiles, ou ennuyeux.

Question	Intéres-sant	Inutile	Ennu-yeux
B3 : Que pensez-vous du fait de travailler en groupe ?	97	0	3
B4 : Que pensez-vous de cette activité de recherche ?	94	6	
B5 : Que pensez-vous d'un travail avec les calculatrices ?	94	0	6
B6 : Que pensez-vous des rapports de recherche ?	53	3	47

C'était prévu : il n'y a pas consensus sur les rapports de recherche. Un élève a même indiqué que c'était à la fois inutile et ennuyeux. Cependant, une évolution se dessine, comme on le verra ci-dessous .

Question	Oui	Non	Sans opinion
B7 : Evolution des rapports de recherche ?	75	19	9

Les explications d'évolution sont intéressantes :
"Oui, car on s'explique de plus en plus", "on marque plus de trucs", "on marque plus nos erreurs, et nous illustrons plus", "je voyais mieux ce qu'il fallait chercher et donc rédiger", "ma méthode a évolué car je ne fonce plus tête baissée sur le problème, je regarde de quoi traite le problème et je discute avec mon équipe", "on marque plus ce qui nous fait évoluer dans la recherche, on note plus les niveaux de l'évolution, les étapes".

Question	Interes-sant	Inutile	Ennu-yeux
B8 : Que pensez-vous de la présence d'observateurs ?	53	40	17

Comme pour les rapports de recherche, pas de consensus sur les observateurs. C'est une réponse attendue... Les élèves attendent d'eux une aide directe, alors que les observateurs ne donnent pas les réponses, mais ne peuvent que pousser à la formulation des questions, à l'explicitation des démarches...
"Je trouve qu'ils n'aident pas beaucoup", "ils peuvent apporter une aide précieuse à la compréhension des TP", "ils nous aiguillent plus ou moins", "ils ne nous aident pas mais nous posent des questions sur ce que l'on pense, c'est bizarre et inutile, puisque généralement cela ne nous fait pas avancer", "ils nous mettent sur la bonne voie et nous demandent souvent un approfondissement", "parce que ils ne nous renseignent pas, au contraire ils nous induisent en erreur en nous faisant douter", "déconcentration intense et stress du regard derrière l'épaule", "elle ne nous aide pas vraiment ! Eventuellement

une remarque mais qui laisse une trop grande incertitude sur la véracité ou la fausseté d'une question traitée".

B9. Comment jugez-vous le travail de votre propre groupe pendant ces TP ?

	Travail d'équipe	Rapides	Efficaces	Scolaires	Bricoleurs	Observateurs	Méthodiques
Oui	94	22	19	22	85	70	34
Non	3	66	19	38	9	6	25
?	3	12	62	34	6	16	34

*Il ressort de cette autodescription une image assez nette du travail de TP : un travail d'équipe, qui fait appel à l'observation, et au bricolage, assez lent et peu scolaire.
Il est significatif que les qualificatifs qui soulèvent la perplexité concernent l'efficacité, et la méthode : on se demande si on est efficace, et si on dispose vraiment d'une méthode de recherche.*

Questions C (portant sur le dispositif d'ensemble)

Question	Oui	Non	Sans opinion
C1 : Changement de point de vue sur les math ?	25	53	22
C2 : Changement de point de vue sur les calculatrices ?	72	22	6

Le résultat sur les calculatrices était attendu. Petite déception sur l'évolution du point de vue sur les math. Cependant, il y a quelques explications à ce résultat :

- certains élèves motivés répondent non "parce qu'ils ont toujours aimé les math" ;
- d'autres qui s'investissent dans les TP, pensent que c'est à côté des math "normales" : "les TP, c'est bien, mais les math restent toujours les math"; "je ne vois pas trop le rapport entre les TP et le cours, mais les exercices faits aident à la compréhension du cours" ;
- certains élèves qui ont jugé (question A1) qu'il y avait amélioration pour la compréhension, répondent non, parce que les mathématiques sont un monde très vaste qui reste complexe";
- ceux qui répondent oui évoquent la découverte de la recherche : "j'ignorais qu'on pouvait faire appel à des méthodes de recherche...", " je commence à constater que les math c'est pas abstrait, des chiffres et des lettres, mais une science qui se ramène à quelque chose de concret".

Questions D (auto-évaluation)

Question	Bons	Moyens	Médiocres
D1 : Comment jugez-vous vos résultats en math ?	0	44	56
D2 : Comment ces résultats évoluent-ils ?	28	56	16
D3 :Comment jugez-vous votre aptitude à la calculatrice?	9	56	35
D4 : Comment cette aptitude évolue-t-elle ?	88	12	0

*Confirmation du caractère assez faible de la classe en mathématique (12 redoublants): le jugement des élèves sur eux mêmes est en général lucide. Le sentiment de progresser est encore trop faible. Par contre, le progrès concernant la manipulation des calculatrices est flagrant. Heureusement !
Il reste à oeuvrer pour que ce progrès se généralise...*

Bilan n°2. Réponses et analyse

Après 9 mois de travail avec calculatrice graphique, puis TI-92, un dernier bilan. Inutile de reproduire ici le questionnaire, qui est quasiment le même que celui relatif au premier bilan. Indiquons simplement les modifications intervenues :
- en B2, on ne parle plus des 6 premiers TP, mais on demande : notez 6 TP qui vous ont marqué, avec l'appréciation qui s'y rattache (les différents TP ont été rappelés au tableau) ;
- on a rajouté deux questions, après la question B5, la première relative à l'appréciation des "Vues et changements de points de vue", distribués en guise de correction des TP à chaque élève, la deuxième relative au problème long (ces deux éléments sont en effet apparus après le premier questionnaire).

Questionnaire passé le 14 Mai. 31 présents (2 absents). On donne entre parenthèse, pour rappel et comparaison, les résultats du bilan n°1.

Questions A (effet d'un cours avec calc. rétroprojetable intégrée)

Question	Oui	Non	Sans Opinion
A1 : Cela a-t-il changé quelque chose pour vous ?	(88) **94**	(9) **6**	(3)
A2 : Aide pour la compréhension ?	(97) **91**	**3**	(3) **6**
A3 : Perte de temps ?		(94) **90**	(6) **10**

Globalement, les résultats restent comparables, avec un petit déplacement notable : ceux qui, dans le premier questionnaire, jugeaient que la rétroprojetable n'étaient pas une aide pour la compréhension, ou étaient réservés sur la perte de temps, étaient les élèves plutôt faibles. Dans le deuxième questionnaire, cette minorité est plutôt composée d'élèves "sans problèmes", qui n'ont pas besoin d'un dispositif particulier pour comprendre...

Les arguments "pour" sont beaucoup plus variés que lors du premier bilan, sur plusieurs plans.
<u>- le plan "apprentissage de la manipulation générale de la TI-92".</u>
"Pour trouver les bonnes instructions, et les bonnes commandes, étant donné la grande complexité de la TI-92" ; "plus de facilités à comprendre les manipulations de la machine" ; "cela permet de visualiser ce qu'il faut faire si on n'y arrive pas" ; "c'est beaucoup plus facile à apprendre à se servir d'une calculatrice lorsqu'on voit quelqu'un faire" ; "on a pu s'en servir comme modèle quand on trouve sur notre calculatrice quelque chose d'incohérent on peut le vérifier" ; "il est nécessaire de bien maîtriser le langage de la machine pour en faire une bonne utilisation" ;
<u>- le plan "vérification" des calculs.</u>
"Parce que lorsqu'on fait des erreurs de calcul, on peut vérifier où est l'erreur" ; "méthodes pour les calculs sur machine (dérivées, limites)";
<u>- le plan "vision" des objets mathématiques.</u>
"Visualisation des courbes et des fonctions" ; "dans le menu graphique, plein d'outils permettent de comprendre la courbe" ; "pour matérialiser certaines parties du cours (suites notamment" ; "cette technique a renforcé les visions générales des problèmes, de courbes, cela faisait une illustration du cours" ; "mémoriser les fonctions de référence plus vite" ; "vision exacte de la courbe exacte (et non dessinée approximativement) et du cours" ;
<u>- le plan meta-mathématique.</u>

"ça m'a permis de mieux suivre en cours" ; "toute aide à la compréhension est un gain de temps" ; "d'autres points de vue, d'autres objectifs apparaissent" ; "le cours devient plus joyeux" ; "il faut prendre le temps de comprendre" ; "car c'est un approfondissement qui permet de prendre du recul vis à vis des math".

Questions B (portant sur les TP du Jeudi)

Question	Oui	Non	Sans Opinion
B1 : Ces séances vous ont-elles intéressés ?	(69) **61**	(12) **6**	(28) **32**

Là aussi, des élèves ont répondu à la fois oui et non, en fonction des TP. De façon significative, les élèves non intéressés lors du premier bilan étaient des élèves plutôt scolaires, alors qu'aujourd'hui ce sont les élèves bricoleurs (Laurent et Sébastien) . Leur motif : "on étudie des problèmes qui ne tomberont pas au bac..."

Arguments des "sans opinion"...
"C'était selon les TP, certains étaient trop complexes" ; "en fait les premières questions étaient intéressantes, puis après cela devenait absurde car inaccessible" ;
Arguments des "oui"
"Elles m'ont permis de mieux connaître la calculatrice" ; "je pense que les TP améliorent les facultés à raisonner sur un problème, qui fut souvent assez compliqué" ; "certaines m'ont apporté des méthodes qui serviront dans les problèmes"; "rechercher en commun, mise en commun des idées, c'est plus sociable" ; "le travail en équipe permet de connaître les idées de l'autre, la façon de réfléchir sur un problème" ; "on a approché le côté expérimental des mathématiques, le côté recherche était très intéressant".

Question B2 : Notez 6 TP qui vous ont marqué, avec l'appréciation qui s'y rattache.

Récapitulatif en nombres de réponses (et pas en pourcentage)

n° du TP	Très intéressant	Intéressant	Inutile	Ennuyeux	Surprenant
1		1			
2					
3		1			
4	1				1
5	1	4			
6		1	2	1	6
7		3	1		
8	1	2	1		
9	4	6		3	1
10	2	3		2	1
11		3	1	2	
12	3	10	2	3	
13	1	8	2	1	
14	2	5	1	6	
15	4	8		3	2
16	2	9	3	3	1
17	3	7	3	3	1
18	3	8	2	3	2
Nb de réponses	(25) **27**	(83) **79**	(7) **18**	(43) **30**	(40) **15**

En comparaison avec le précédent questionnaire, les réponses sont du même type : en moyenne chaque élève évoque un TP très intéressant, 2 TP intéressants, et 2 TP inutiles ou ennuyeux (les élèves ont évoqué en moyenne 5 TP).
On constate moins de TP "surprenants" : au fil de l'année, l'habitude d'un travail un peu différent s'installe.
Les TP les plus évoqués sont les derniers, traités avec les TI-92 (ce sont aussi les plus frais en mémoire). Parmi ceux-ci, un seul se distingue : le TP 14 (comparaison calcul exact/ calcul approché, à propos des suites) : c'est lui qui a le plus ennuyé, et le moins intéressé. Alors que, pour l'équipe d'animation, c'est lui qui avait le plus intéressé.
Là aussi, question de point de vue...

Question	Intéressant	Inutile	Ennuyeux
B3 : Que pensez-vous du fait de travailler en groupe ?	(97) **88**	**6**	(3) **6**
B4 : Que pensez-vous de cette activité de recherche ?	(94) **88**	(6) **3**	**6**
B5 : Que pensez-vous d'un travail avec les calculatrices ?	(94) **88**	**3**	(6) **6**
B6 : Que pensez-vous des rapports de recherche ?	(53) **61**	(3) **13**	(47) **13**

B3. Sur le fait de travailler en groupe, il y a une évolution dûe à la pratique : ceux qui apprécient ce type de travail le justifient davantage que lors du premier bilan.. Et les réponses négatives sont la sanction d'un échec du groupe.

Négatif :
"Pas assez de concentration sur les TP" ; "pas le même niveau, pas la même vitesse de travail" ; "je préfère travailler seule au rythme qui me convient sans avoir besoin de dire à l'autre ce qu'il doit chercher" ; "les deux individus ne fournissent pas le même travail".

Positif :
"On peut comparer nos réponses, et s'expliquer mutuellement" ; "on contribue à un échange d'idées qui permet d'avancer plus vite" ; "des techniques différentes sont mises en commun ; j'ai remarqué que, lorsque je bloquais, Vincent apportait des solutions, et inversement" ; "le travail avec Michaël : impressionnant" ; "la vie sociale apporte toujours quelque chose. L'être humain est fait pour vivre en société, c'est pour cela que nous en sommes arrivés là".
Pour les questions B4 et B5, on retrouve les appréciations générales des réponses à B1 (appréciation générale des TP). Deux remarques cependant, significatives de ce qu'a apporté le travail avec les calculatrices :
"On se sert de la calculatrice avec plus de discernement ; on est passé d'un travail sur la machine à un travail avec la machine comme aide" ; "les TP nous ont appris à manipuler simultanément la TI-92 et la recherche à la main".

B6. Sur les rapports de recherche, on observe la constitution d'un consensus (forte diminution des "ennuyeux", progression des "intéressant").

Les "plutôt contre" le justifient assez peu ("cela prend du temps", "on est comme des dactylos") ;

Les raisons des "pour" sont évoquées plus précisément :
"Pour voir l'ensemble des solutions" ; "ces rapports sont observés par un prof qui peut alors nous conseiller pour d'autres recherches" ; "ils montrent notre façon de réfléchir, les méthodes utilisées, notre évolution par rapport aux TP" ; "elle aide parfois à se rendre compte des erreurs" ; "elle a obligé le groupe à s'investir dans le travail" ; "mise en ordre de la recherche personnelle" ; "cela apprend à exposer par écrit ce que l'on pense, et c'est la première fois que j'en faisais de ce genre".

Question	Oui	Non	Sans opinion
B7 : Evolution des rapports de recherche ?	(75) **68**	(19) **13**	(9) **17**

Les explications d'évolution sont là aussi intéressantes :

"Rédaction plus complète, mieux rédigée" ; "plus détaillée" ; "je les trouvais ennuyeux, mais en relisant on s'aperçoit de leur utilité" ; "au début je voulais uniquement marquer les choses vraies, après j'ai tout marqué, même le faux" ; "je pense que ces derniers sont plus complets, mieux organisés que les premiers" ; "meilleure présentation de notre voie de recherche" ; "on écrit de plus en plus les différentes étapes de la recherche au fil des TP, ce qui laisse apparaître les problèmes, donc ce qu'il faut corriger" ; "maintenant, je pense avoir plus de méthode" ; "j'ai fini par comprendre les mécanismes de la recherche" ; "sur la conception : distinguer deux parties, brouillon - remarques, et réponses".

Question	Intéressant	Inutile	Ennuyeux
B8 : Que pensez-vous de la présence d'observateurs ?	(53) **77**	(40) **9**	(17) **9**

Il y a un net "progrès" dans l'intégration des observateurs : c'est sans doute dû à la fois à une meilleure compréhension de ce qu'est une recherche, et à une évolution de l'action des observateurs, plus "inductrice" (cf bilan des TP), comme en témoignent les commentaires suivants :

Appréciations positives :

"Ils prennent le temps, ils nous aident sans nous juger" ; "ils nous montrent d'autres voies de recherche, et plus simplement, ils étaient là dès qu'on avait un problème" ; "ils peuvent nous guider pour la suite du problème, ils sont très sympathiques en plus" ; "aide et prise de conscience des erreurs" ; "ils nous aident à voir des choses qui permettent de mieux comprendre le sens du TP ; "quand on bloque, ils nous mettaient + ou - sur la voie sans dévoiler la solution" ; "ils nous dirigeaient parfois dans nos recherches" ;

Appréciations mitigées :

"aide lorsqu'on est bloqué, critique assez ennuyeuse tout de même" ; "intéressante lorsqu'ils nous expliquent ou nous aident, mais des fois, on attend longtemps" ; "quelques fois cela m'a aidé, surtout au démarrage, mais j'ai trouvé cela gênant d'être observé" ; "ils ne nous aident que très rarement".

Appréciations négatives :

- "Ils vous harcèlent" ;
- "ils me perturbent, ils nous tournent autour comme des bêtes curieuses, sans nous donner aucune indication, en nous narguant et en notant nos moindres faits et gestes" ; - "analyse de nos réactions et de nos raisonnements sur le vif, je n'aime pas trop celà. Je préfère être incompris que disséqué"...

Trois appréciations franchement négatives : les deux premières, d'élèves qui n'ont pas accepté le processus de recherche, la troisième, d'un élève (Michaël) qui n'aime pas être remis en cause...

B9. Comment jugez-vous le travail de votre propre groupe pendant ces TP ?

	Travail d'équipe		Rapides		Efficaces		Scolaires		Bricoleurs		Observateurs		Méthodiques	
Oui	(94)	**74**	(22)	**32**	(19)	**35**	(22)	**48**	(85)	**61**	(70)	**61**	(34)	**49**
Non	(3)	**19**	(66)	**65**	(19)	**16**	(38)	**23**	(9)	**23**	(6)	**16**	(25)	**26**
?	(3)	**6**	(12)	**6**	(62)	**48**	(34)	**26**	(6)	**13**	(16)	**16**	(34)	**25**

Il y a toujours une perplexité sur la définition des qualificatifs. Il aurait fallu en demander la définition aux élèves... Dans le questionnaire, on demandait de donner un fait, ou un évènement illustrant la réponse. Très peu d'élèves ont utilisé cette possibilité. Ceux qui l'ont fait révèlent cependant une assez bonne compréhension des qualificatifs:

"Dans un TP, la solution était "e", et on a trouvé 2, 7. Donc observateur et bricoleur".

Ceci dit, l'évolution des réponses témoigne d'un approfondissement de la recherche : comme pour la question B3, on constate que cela a provoqué l'éclatement de certains groupes. Il y a aussi un travail plus rapide, plus efficace, plus scolaire ("on est plus souvent proche du cours"), moins bricoleur ("on cherche moins au hasard"), et donc plus méthodique...

Trois nouvelles questions étaient posées dans ce bilan (par rapport au bilan n°1).

B5b. A propos des corrections des TP distribuées une semaine après ("Vues et changements de points de vue")...

Question : Les avez-vous utilisées ?	Beaucoup	Un peu	Pas du tout.
	6	71	23

Question : Comment les avez-vous jugées ?	Intéressantes	Inutiles	Ennuyeuses
	74	10	16

Il est clair que l'utilisation des "vues et changements de points de vue" nécessitait un investissement important. Ceux qui ne l'ont pas fait évoquent le temps ("elles font à peu près 10 pages, c'est long !", "l'explication en cours était suffisante, la reprendre chez soi était difficile par manque de temps"), ou la complexité ("trop théorique"). On trouve enfin deux arguments opposés : le goût pour la recherche : "une correction n'est pas intéressante, le TP, la recherche, l'est, pas la correction", ou la seule préoccupation du bac :"je ne vois pas à quoi cela sert pour le bac".
Parmi ceux qui apprécient, on évoque l'apprentissage calculatrice ("elle nous aide à avoir une meilleure manipulation de la calculatrice"), la forme des corrections ("parce que tout était très bien détaillé", "car elles sont simples de compréhension"), la rectification des erreurs ("nous permet de voir les erreurs et de mieux les comprendre"), la question des méthodes ("ça apporte une méthode de recherche que l'on ne trouve pas dans les exercices normaux").

B5c.

Que pensez-vous de l'activité de recherche autour du problème long ?	Intéressante	Inutile	Ennuyeuse
	45	13	39

On voit assez nettement que c'est un point sur lequel il n'y a pas eu vraiment consensus.

Les raisons des réticents sont liées parfois à l'utilité de la chose ("je ne vois pas l'utilité de chercher de telles courbes", "je ne vois pas la relation avec la préparation au bac"), au temps nécessaire ("trop long", "il faut avoir beaucoup de temps pour y travailler", "je ne me suis pas beaucoup investie, je n'ai donc pas beaucoup avancé"), la complexité non maîtrisable ("ennuyeuse dans le fait de chercher au hasard des fonctions sans jamais trouver les bonnes", "je n'ai rien compris dès le début").
Des remarques mitigées témoignent cependant d'un investissement certain dans la recherche, mais d'une difficulté à l'organiser : "intéressant, mais assez long", "intéressant, mais laborieux", "intéressant, mais on se lasse vite lorsqu'on ne parvient pas à améliorer son travail", "inutile parce qu'il y avait énormément de choses à prendre en compte lors de la recherche", "recherche originale, même s'il m'est arrivé de la trouver très ennuyeuse quand on arrive pas au résultat cherché au bout d'un long moment de recherche", "inutile, mais cela nous a permis de connaître de nombreuses fonctions".
On finit par les "pour", qui apprécient l'intérêt pour l'apprentissage lui-même ("c'est un bon entrainement pour le bac"), le cadre du travail ("bonne idée, de soumettre un problème pendant l'année !", "c'est peu banal, l'intérêt était de répondre à des contraintes pour arriver à un but déterminé"), le sens donné à la discipline ("là encore, on cerne mieux le sens des math !").

Questions C (portant sur le dispositif d'ensemble)

Question	Oui	Non	Sans opinion
C1 : Changement de point de vue sur les math ?	(25) **58**	(53) **26**	(22) **16**
C2 : Changement de point de vue sur les calculatrices ?	(72) **71**	(22) **29**	(6)

A propos du changement de point de vue sur les math d'abord.

On notait dans le dernier bilan la faiblesse des changements de points de vue sur les math. Force est de constater que, en une année, les choses ont bien bougé !

Deux élèves ont signalé que leur point de vue n'a pas changé... parce que les math les ont toujours intéressé. Et tous ceux qui indiquent un changement de point de vue indiquent un changement positif. On arrive donc à 2/3 de la classe qui ont en fin d'année une opinion positive, ou transformée positivement, de la discipline. Ce n'est pas mal !

Les raisons évoquées sont :
- très générales : "il m'a permis de voir une autre adaptation des mathématiques" ;
- parfois liées à l'aspect concret : "mathématique plus vivante, plus d'intérêt, moins abstrait", "c'est moins théorique, donc plus intéressant" ;
- liées aux questions de méthode : "nouvelle méthode, plus intelligente, d'approcher les math", "la méthode de résolution de problèmes", "cela m'a donné un esprit méthodique et mathématique qu'il me fallait encore acquérir" ;
- liées à la recherche : "ce n'est pas seulement une matière avec des règles que l'on connaît. Côté recherche pratiquement ignoré jusqu'à maintenant", "la recherche autour des math est plus intéressante que le simple apprentissage en cours (leçons, exos)" ;
- liées à la compréhension générale : "cela peut être très simple, comme très compliqué", "les mathématiques sont une matière très vaste et très intéressante", on a une meilleure approche, plus en profondeur, de chaque leçon".

A propos du changement de point de vue sur les calculatrices.

Les résultats sont globalement les mêmes que lors du premier bilan. C'est à dire que ce qui a changé le rapport aux calculatrices, ce n'est pas le passage des calculatrices graphiques aux TI-92, mais l'intégration des calculatrices dans le travail de la classe (cours et TP). Cependant les arguments évoquent souvent la puissance de la TI-92.

Ceux dont le point de vue n'a pas changé recouvrent deux catégories ; ceux qui étaient hostiles, et le sont restés, et ceux qui avaient déjà, avant l'expérimentation, une idée des outils de calcul cohérente avec ce qui a été fait cette année :
" elles doivent rester un outil dont l'utilisation est laissée à la pertinence de l'élève", "ces TP nous montrent que les calculatrices ne sont pas infaillibles", "utiles, mais avec de grosses limites, même si les TI-92 sont très performantes", "je n'aime toujours pas les calculettes ; néanmoins, après avoir travaillé sur la TI-92, il me sera très difficile de m'en passer".
Ceux dont le point de vue a changé donnent des appréciations positives sur le travail de l'année.
- Certains évoquent l'appropriation de l'outil : "j'ai beaucoup plus de facilité à utiliser n'importe quelle machine graphique maintenant", "la calculatrice utilisée et les calculatrices en général sont si performantes qu'il est difficile de pouvoir les utiliser à leur maximum. Dommage", "je les trouvais presque inutiles, alors que maintenant elles me paraîssent presque indispensables", "elles sont enfin utiles", "elles sont impressionnantes, et bien utiles", "je ne pensais pas qu'elles puissent autant servir", "je ne connaissais pas les capacités de telles calculatrices".
- Certains évoquent le rôle des calculatrices pour faire des mathématiques, ou de la recherche : "les calculatrices prennent une part de plus en plus importante dans les mathématiques", "avant, on ne se servait des calculatrices que pour des calculs, or, avec la TI-92, on acquiert une véritable méthode de recherche".
- Certains évoquent une nouvelle compréhension du statut même de l'outil : "je sais mieux utiliser la calculatrice, et je sais aussi quand il faut s'en passer", "il ne faut s'en servir que pour vérifier ou conjecturer, ce n'est pas elle qui va réfléchir le jour du bac à ma place", "je voyais la machine comme un outil, maintenant c'est une aide", "ce n'est pas une simple boîte qui donne des résultats, qui arrive à tout faire !".

Questions D (auto-évaluation)

Question	Bons	Moyens	Médiocres
D1 :Comment jugez-vous vos résultats en math ?	**20**	(44) **48**	(56) **32**
D2 :Comment ces résultats évoluent-ils ?	(28) **39**	(56) **39**	(16) **19**
D3 :Comment jugez-vous votre aptitude à la calculatrice?	(9) **35**	(56) **52**	(35) **13**
D4 :Comment cette aptitude évolue-t-elle ?	(88) **87**	(12) **10**	**3**

Pas de commentaires des élèves accompagnant leurs réponses. Ceux qui précédaient suffisaient sans doute.

L'évolution des réponses entre les deux bilans est cependant plus que significative. Alors que la classe n'est pas considérée comme une bonne classe, il y a un net progrès dans l'évaluation par les élèves eux-mêmes de leur niveau (scolaire, et quant à la calculatrice), et de l'évolution de ce niveau.

Changement en profondeur du rapport d'une grande partie des élèves de la classe aux mathématiques, et au savoir en général, aux outils de calcul, et aux outils en général, évolution positive de l'idée qu'ils ont de leurs propres capacités, c'est probablement là que se situe le succès de cette année expérimentale.

Enseigner en TS avec des calculatrices comprenant un système de mathématique symbolique, volume 2
IREM de Montpellier, page 237

Auto-évaluation et typologie.

On va observer ici ce que les élèves "type", suivis lors des bilans des TP, disent d'eux-mêmes.

On suivra donc dans ce qui suit les réponses de :

Cécile	**(type 1 , théorique) ;**
Michaël	**(type 2 , rationnel) ;**
Caroline	**(type 3, scolaire) ;**
Laurent	**(type 4, bricoleur) ;**
Fabienne	**(type 5, expérimentateur).**

Intérêt pour la recherche en TP

Celui-ci sera mesuré par les réponses à B1 et B2. On notera pour chaque élève, et chaque bilan, la réponse à la question "Ces séances vous ont-elles intéressé ?" (Oui, non, ou sans opinion), et le nombre de réponses correspondant aux qualificatifs accordés à chaque TP : TI (très intéressant), Inté (intéressant), Inut (inutile), E (ennuyeux), S (surprenant).

Cécile	Int ?	TI	Inté	Inut	E	S
Bilan 1	SO		2		3	1
Bilan 2	Oui	1	5			

Michaël	Int ?	TI	Inté	Inut	E	S
Bilan 1	SO		3		1	2
Bilan 2	Oui	1.	2	1	2	

Caroline	Int ?	TI	Inté	Inut	E	S
Bilan 1	SO		3		2	1
Bilan 2	Oui		3		2	1

Laurent	Int ?	TI	Inté	Inut	E	S
Bilan 1	SO		3	1		2
Bilan 2	Non	2		1	1	1

Fabienne	Int ?	TI	Inté	Inut	E	S
Bilan 1	SO		4		1	1
Bilan 2	Oui	1	3		2	

On remarque une évolution d'ensemble positive, sauf pour Laurent.

Plus précisément, on note que ce sont les élèves de type théorique ou expérimentateur qui ont été le plus intéressés par les TP (avec même une évolution positive). Il y a un équilibre intérêt/ désintérêt pour les élèves rationnels ou scolaires. Pour Laurent, l'arrivée des TI-92 modifie la donne. Soit Laurent fait l'effort de compréhension nécessaire, et cela devient "très intéressant", soit il ne le fait pas, et le TP perd tout intérêt...

Auto-évaluation du travail du groupe en TP :

On note ici les réponses à la question B9. L'évaluation que les élèves font de leur propre travail n'est pas loin de l'évaluation faite par le professeur...

Les élèves avaient trois possibilités de réponse (oui, non, ?).

Certains utilisent la case pour noter une appréciation personnelle.

Cécile	Equipe	Rapide	Efficace	Scolaire	Bricoleur	Observ.	Méthod.
Bilan 1	Oui	Non	?	Non	Oui	?	Non
Bilan 2	Non	Non	?	Oui	Non	Oui	Oui

Michaël	Equipe	Rapide	Efficace	Scolaire	Bricoleur	Observ.	Méthod.
Bilan 1	Oui	Oui	Non	?	Oui	Oui	Non
Bilan 2	Oui	Oui	?	Non	?	?	Oui

Caroline	Equipe	Rapide	Efficace	Scolaire	Bricoleur	Observ.	Méthod.
Bilan 1	Oui	Non	?	?	Oui	Oui	Oui
Bilan 2	ça dép.	Non	ça dép.	Oui	Oui	ça dép.	ça dép.

Laurent	Equipe	Rapide	Efficace	Scolaire	Bricoleur	Observ.	Méthod.
Bilan 1	Moyen	Moyen	?	?	Oui	?	?
Bilan 2	?	?	?	Oui	Oui	Oui	?

Fabienne	Equipe	Rapide	Efficace	Scolaire	Bricoleur	Observ.	Méthod.
Bilan 1	Oui	Non	Non		Oui		Oui
Bilan 2	Tendu	Non	ça dép.	Oui	Non	ça dép.	Oui

<u>- Concernant le travail d'équipe :</u>

Les seules équipes qui ont vraiment fonctionné sont celles de Michaël (qui <u>explique</u> à sa co-équipière), et celle de Fabienne (l'adjectif "tendu" choisi dans le deuxième bilan traduit la vivacité des échanges).

Il y a eu décrochage entre les deux élèves dans le groupe de Cécile, qui explique : "je préfère travailler seule, au rythme qui me convient sans avoir besoin de dire à l'autre ce qu'il doit chercher".

Dans le groupe scolaire et dans le groupe bricoleur, les échanges n'ont jamais été très développés : Caroline et Rachel échangent souvent ... leur perplexité, et Laurent et Alexandre sont trop absorbés par leur calculatrice...

<u>- Concernant la rapidité :</u>

Seul Michaël estime, justement, aller vite. Les bricoleurs avaient l'illusion, au début de l'année, d'aller relativement vite. Ils ont vite déchanté, avec une évolution des sujets, et des matériels, donnant plus de place aux questions théoriques générales. Les autres élèves ont le sentiment de ne pas aller vite : certains par goût pour la réflexion (Cécile) ou la discussion (Fabienne), d'autres par impossibilité de surmonter un certain nombre de difficultés (Caroline) .

<u>- Concernant l'aspect scolaire :</u>

Terme forcément ambigü. Pour les élèves, il signifie en général "qui a rapport au cours de math". De ce point de vue, il est significatif que, pour tous les élèves sauf pour Michaël, ce rapport se soit affirmé au cours de l'année. Pour Michaël, on assiste à l'évolution inverse : au début de l'année, il a abordé un TP comme une activité "scolaire" comme une autre. En cours d'année, il développe l'aspect recherche, ce qui pour lui, en fait une activité moins "scolaire".

<u>- Concernant les aspects bricoleurs, observateurs, méthodiques.</u>

C'est l'aspect le plus important sans doute, mais aussi le plus délicat à analyser. L'analyse des réponses suppose d'estimer ce qui se rapporte à l'activité proposée (les TP, c'est du bricolage), et à sa propre activité. Cela suppose aussi, on l'a déjà souligné, de savoir ce que chaque élève met derrière chaque adjectif. Pour estimer cela, des questions complémentaires, orales, aux élèves concernés, ont été nécessaires, et permettent d'avancer les commentaires suivants :

Pour **Cécile**, l'activité mathématique en général relevait du bricolage. C'est d'ailleurs cet aspect de puzzle, d'assemblage d'idées, qui l'intéressait dans la mise en oeuvre des TP. Elle découvre cette année la nécessité de l'observation et de la méthode. Elle note :"cela m'a donné un esprit méthodique et mathématique qu'il me fallait encore acquérir".

Pour **Michaël**, ce sont les TP qui relevaient en début d'année du bricolage, et à la rigueur, de l'observation. Il découvre pendant l'année l'intérêt de la recherche, et la nécessité pour cela d'une méthode (autre que le traitement linéaire de questions imposées). Il note dans le 2ème bilan ce qui l'a intéressé :"approfondissement de nouveaux problèmes".

Pour **Caroline**, il y avait l'illusion, en début d'année, que le travail de TP relevait du bricolage, mais que l'observation était naturelle, et la méthode aussi (cela voulait dire : "faire comme pendant les interrogations écrites"). Lors du deuxième bilan, ne reste plus que le qualificatif "bricoleur". Caroline est beaucoup plus circonspecte pour l'observation et la méthode : ce n'est pas si facile d'observer, et une méthode de recherche ne consiste pas à "refaire comme en classe"...

Pour **Laurent**, il y a évolution du bricolage pur, à un bricolage reposant sur l'observation. Mais il ne distingue pas de progrès dans la compréhension d'ensemble, dans la méthode de recherche. Premier bilan : "certains TP me paraissent trop compliqués. Je ne sais pas à quoi cela sert". Deuxième bilan :"exercices trop compliqués, ne servant apparemment pas au bac".

Pour **Fabienne**, il y a le sentiment au début de l'année que la recherche est une sorte de bricolage, qui faut mettre en forme (ce serait cela "la méthode"). Au cours de l'année, la recherche s'approfondit, l'investigation est mieux organisée (on parle de difficultés d'observations, alors qu'avant elle allait de soi). Intérêt des TP : "on comprend mieux le sens des math, et les leçons auxquelles se rapportent les TP". Le lien avec un contexte de cours est désormais assez naturel.

Evolution du rapport avec les calculatrices

"Ce type de travail a-t-il modifié votre point de vue sur les calculatrices ?"

	Bilan 1	Bilan 2
Cécile	**Sans opinion.**	**Non**. Je n'aime toujours pas plus les calculettes. Cependant, après avoir travaillé sur la TI-92, il me sera très difficile de m'en passer.
Michaël	**Non**. Pas besoin.	**Non**. Utile, mais avec de groses limites, même si la TI-92 est performante.
Caroline	**Oui**. Ca m'a appris beaucoup de choses sur l'utilisation de la machine.	**Oui**. J'ai beaucoup plus de facilités à utiliser n'importe quelle machine graphique maintenant.
Laurent	**Oui**. Je ne connaissais pas les capacités de ma calculatrice avant les TP (nombre de pixels).	**Oui**. Je ne connaissais pas les capacités de telles calculatrices.
Fabienne	**Oui**. Plus facile d'utiliser la calculatrice après les TP.	**Non**. La calculatrice utilisée est si performante qu'il est difficile de l'utiliser à son maximum.Dommage.

On remarque les résistances de Cécile et Michaël à reconsidérer leur position vis à vis des calculatrices. Mais une évolution apparaît avec l'arrivée des TI-92.

Laurent se situe sur le plan la découverte des capacités de la machine ;

Caroline se situe sur le plan de la manipulation de la machine.

Pour ces deux points de vue, la considération en classe des calculatrices graphiques, comme l'introduction des TI-92, ont représenté un changement important.

Fabienne, elle, se situe sur le plan de l'intégration de la machine dans un travail mathématique : l'utilisation des calculatrices graphiques, dans un processus de recherche, est simple. Par contre, la TI-92 est plus difficile à intégrer...

Evolution du rapport avec les mathématiques

"Ce type de travail a-t-il modifié votre point de vue sur les mathématiques ?"

	Bilan 1	Bilan 2
Cécile	**Oui**. Les mathématiques semblent moins abstraites.	**Oui** Cela m'a donné un esprit méthodique.
Michaël	**Non.**	**Oui**. Mathématiques plus vivantes, plus d'intérêt, moins abstrait.
Caroline	**Non.**	**Non.**
Laurent	**Sans opinion.**	**Oui**. Les mathématiques sont une matière très vaste et très intéressante.
Fabienne	**Non.** Toujours aussi dur !.	**Oui**. La recherche autour des math est bien plus intéressante que le simple apprentissage en cours (leçons, exos).

Cécile, type théorique, a tout de suite repéré dans le cadre de travail proposé une possibilité de renouvellement de point de vue. Michaël (type théorique), Laurent, type bricoleur, Fabienne, type expérimentateur, ont mis un peu plus de temps, pour des raisons différentes :

- pour Michaël, il a fallu le temps de réaliser que le travail de recherche mené en TP permettait aussi de faire des mathématiques mais de façon différente ;
- pour Laurent, il a fallu le temps de réaliser que l'utilisation "intelligente" d'un outil de calcul nécessitait de s'intéresser aux mathématiques, et donc de les découvrir sous un nouveau jour. Mais son commentaire même indique qu'il estime être loin d'une certaine maîtrise théorique : "les mathématiques sont une matière très vaste...". Il découvre l'étendue de territoires nouveaux... ;
- pour Fabienne, il a fallu le temps de réaliser que "l'art des TP" pouvait utilement être réinvesti dans l'activité mathématique ordinaire.

Caroline, scolaire, n'a pas changé de point de vue. Ce n'est pas faute de travail, ou de bonne volonté. Mais l'importance de l'effort réalisé, tant pour comprendre le fonctionnement de la machine, que pour s'insérer dans une recherche lors des TP, l'a empêchée de prendre le recul nécessaire, pour considérer le nouveau décor, et se constituer une autre image des mathématiques.

Mais cet effort n'a pas été vain : on a pu voir (fin du chapitre 3) que des progrès scolaires, importants, ont eu lieu. Seulement, il n'y a pas nécessairement simultanéité entre les progrès dans les résultats, les changements de comportement, et la conscience de ces changements !

En conclusion, on peut dire que cette auto-évaluation des élèves entre en résonnance avec la typologie dont ils sont d'une certaine façon, "porteurs"...

4c. Questionnaire plus technique, lié aux TI-92.

Un premier questionnaire (baromètre n°1) a été rempli par les élèves le 7 Févier, un deuxième, identique, le 9 Avril.

Baromètres TI-92

*A deux reprises dans l'année, un questionnaire est donné aux élèves pour suivre l'évolution de l'apprentissage, de la familiarisation avec la TI-92.
Par rapport aux questionnaires précédents, on notera qu'il est plus "technique", lié à l'outil lui même, plus qu'à la nature du travail fait en classe.*

Baromètre TI-92 n°...

1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?

Très bien	Plutôt bien	Plutôt mal	Très mal

2. Consultes-tu le mode d'emploi ?

Beaucoup	Régulièremt	Parfois	Jamais

Si oui, quelles rubriques ?

3 . Par rapport aux calculatrices graphiques que vous manipuliez avant, comment jugez-vous les TI-92 :

	Bien mieux	Plutôt mieux	Moins bien	Bien pire
Utilité				
Convivialité				
Lisibilité				

4. Qu'est- ce qui te plaît le plus sur cette machine ?

5. Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?

6. Comment juges-tu l'utilité de la TI-92 :

	Très utile	Utile	Inutile	Très inutile
En cours				
En TP				
En contrôle				
A la maison				

7. Qu'as-tu rentré en mémoire (programmes et informations diverses)

8. Commentaires.

Baromètre TI-92 n° 1

31 élèves présents, réponses en pourcentage de l'effectif présent.
Le questionnaire est rempli le 7 Février, au lendemain du contrôle n°7.

1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?

Très bien	Plutôt bien	Plutôt mal	Très mal
6	65	23	6

Réponses plutôt encourageantes, après un mois d'utilisation. Deux élèves estiment se débrouiller très mal avec la machine. Ce sont deux élèves réfractaires à l'expérimentation (déjà réfractaires à ce qui était fait au premier trimestre avec les calculatrices simplement graphiques).

2. Consultes-tu le mode d'emploi ?

Beaucoup	Régulièremt	Parfois	Jamais
3	16	61	20

Si oui, quelles rubriques ?
Un peu tout : 20 *(ce sont les élèves qui consultent régulièrement, ou beaucoup, le mode d'emploi)*
Programmation 23
Fonction 10
Suites 10
Plus d'élèves que ce que j'imaginais consultent le mode d'emploi. On arrive à 40% de l'effectif total qui s'intéresse à la programmation.
Il n'y a pas de corrélation évidente entre la consultation du mode d'emploi, et la familiarisation avec la machine : parmi les 7 élèves qui ne consultent jamais le mode d'emploi, 4 estiment plutôt bien se débrouiller avec la machine, 2 plutôt mal, et un très mal.

3. Par rapport aux calculatrices graphiques que vous manipuliez avant, comment jugez-vous les TI-92 :

	Bien mieux	Plutôt mieux	Moins bien	Bien pire
Utilité	74	26		
Convivialité	43	36	14	7
Lisibilité	74	20	6	

Pas de rapport direct entre la convivialité, et la familiarité avec l'outil. C'est là que la difficulté d'apprentissage pèse le plus. On en verra les raisons à la question 4.

4. Qu'est- ce qui te plaît le plus sur cette machine ?

(Les élèves ont fourni parfois plusieurs réponses)

Le calcul de dérivées **35**
Le calcul de limites **29**
Le calcul exact **23**

Ce qui arrive en tête concerne le calcul formel. Un seul élève évoque la programmation, 2 élèves le traitement de texte (pour "les pompes" j'imagine...), 3 élèves évoquent la taille de la mémoire.
Plusieurs élèves évoquent l'ergonomie de la machine : pour 1 élève la possibilité de retrouver des calculs antérieurs, pour 1 élève l'affichage mathématique conforme (le "pretty print"), pour 2 élèves le partage d'écran, pour 2 élèves la grandeur de l'écran.
3 élèves évoquent les possibilités de vérification, ce qui fait sans doute référence au calcul exact. Seulement 4 élèves évoquent l'application graphique, normal, puisque ce n'est pas nouveau pour eux.
Pour terminer, une citation de Damien : " On a l'impression que cette machine n'a aucune limite, on peut faire tout ce que l'on veut."
Une impression d'infaillibilité qui sera justement relativisée par le TP 14...

5. Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?

De loin arrive en tête :
La taille (ou le volume) 45
Puis :
La trop grande complexité 16
Guilhem déclare " trop grande complexité, trop de fichiers, je m'y perds !"
L'exigence de syntaxe 16
Fabienne : " la moindre faute de syntaxe est prise en compte par la machine", ou Christelle : ""toujours syntax error !"
La lenteur graphique 10
Cécile : "moins bonne maniabilité des graphiques (se déplacer sur une courbe pour visualiser des coordonnées : lenteur et fixité de la fenêtre)"
Pour 13% des élèves, tout va bien.
Pour Guillaume, " la machine semble idéale".
A l'inverse, pour Caroline, qui perd beaucoup de temps à intégrer les "routines" de manipulation, " elle n'est pas du tout intuitive".

6. Comment juges-tu l'utilité de la TI-92 :

	Très utile	Utile	Inutile	Très inutile
En cours	24	66	7	3
En TP	52	45		3
En contrôle	48	48	4	
A la maison	16	52	26	6

Les TP arrivent en tête, ce qui est bien normal, ils sont faits pour cela...
Le résultat moins important en cours (pour le "très utile") est du peut-être au fait que l'on a pas précisé s'il s'agissait de la calculatrice personnelle de l'élève, ou de la calculatrice rétroprojetable du maître.

7. Qu'as-tu rentré en mémoire (programmes et informations diverses)

Formules de physique 45
Problème long 26
Rien 26
Programme fonctions 23
Jeux 19
Informations diverses (!) 6
Agenda 3

Si on tient compte du fait que ceux qui ont rentré uniquement la figure relative au problème long n'ont pas rentré grand chose, cela fait 40% des élèves qui n'ont pas utilisé les possibilités de stockage de la machine.

Il serait intéressant de demander dans le prochain sondage l'utilisation qui a été faite du cable de liaison inter-machine.

8. Commentaires.

Les commentaires étaient libres...

52% des élèves n'utilisent pas cette liberté.

Les 48% restants se partagent en trois parties égales :

- il y a ceux qui confirment leurs résistances (16%):

Fabienne "je pense que l'on s'en sert un peu trop", Karen "je pense qu'on passe beaucoup de temps à l'utilisation de la machine et en TP", Nikola "on ne fait plus assez d'applications en cours", Christelle "il y a plus de machine que de cours", Stéphanie "elle ne laisse pas beaucoup de place pour la recherche personnelle".

- il y a les satisfaits (16%) :

Sébastien "'c'est une très bonne calculatrice qui a beaucoup d'avantages", Jerôme "c'est une très bonne calculatrice, avec beaucoup d'avantages pour la compréhension, la justesse des calculs", Guillaume "machine très utile", Alexandre "cette calculatrice me sert beaucoup dans certains problèmes", Hakim "très pratique et très impressionnante".

- il y a les intermédiaires, qui sont inquiets, ou aimeraient en savoir davantage (16%) :

Guilhem "je la trouve assez compliquée. Elle est longue à maîtriser", Cyril "je me demande si on va pouvoir utiliser parfaitement cette machine avant le bac", Jérôme "sur la machine il y a beaucoup de choses, mais il faudrait des heures de cours pour la maîtriser (petit problème de mémoire)", Laurent "on devrait prendre une semaine pour que on puisse bien maîtriser la calculatrice. Comme cela on pourrait par la suite faire plus d'exercice en cours", Cécile "j'aimerais un cours où vous proposiez la programmation d'un jeu (par exemple) afin de se "performer" dans ce domaine".

En conclusion, provisoire. Les réponses témoignent qu'une majorité de la classe est acquise à l'expérience.
On distingue des tendances contradictoires : la difficulté de prise en main de la TI-92 fait que certaines résistances se renforcent ; en même temps, des élèves, sceptiques devant les calculatrices graphiques, s'investissent à fond avec ces nouvelles machines.
La difficulté, pour le prof, est d'entraîner, et de faire progresser, tout le monde....
La difficulté, pour l'observateur, est d'être à la fois juge et partie...

Baromètre TI-92 n° 2

25 élèves présents, seulement... Explication assez simple : le questionnaire est rempli le 9 Avril, veille d'un bac blanc commun à toutes les TS du lycée.
Les résultats sont donnés en pourcentage de l'effectif présent (entre parenthèse, pour comparaison, les résultats au précédent baromètre relatifs aux mêmes 25 élèves, pour que la comparaison soit pertinente).

1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?

Très bien	Plutôt bien	Plutôt mal	Très mal
8 (8)	76 (64)	16 (20)	0 (8)

Il y a une amélioration générale de la maîtrise de l'outil. Ce sont les mêmes 2 élèves qui estiment très bien se servir de la machine : Patrice et Pierre, dont on a parlé à propos des solutions proposées au problème long. Pour les deux élèves estimant se débrouiller très mal avec la machine lors du premier baromètre, il y a un déplacement "d'une case à gauche".

2. Consultes-tu le mode d'emploi ?

Beaucoup	Régulièremt	Parfois	Jamais
0 (0)	12 (16)	56 (64)	32 (20)

Il y a un petit tassement dans la consultation du mode d'emploi : cela s'explique par la familiarisation plus grande avec la machine. Ceux qui ne consultent plus le mode d'emploi sont ceux qui le consultaient pour des manipulations élémentaires vues en classe, et qu'ils avaient oubliées. Ceux qui le consultent toujours sont ceux qui font un usage intensif de la calculatrice.

Si oui, quelles rubriques ?
Un peu tout : 16
Programmation 24
Fonction 4
Suites 4
Un élève (Jérôme M., celui qui a fait le premier dessin en couverture) indique : j'utilise le mode d'emploi à propos de tout ce qui n'est pas au programme (texte, géométrie, programmation). Un cas à part : il n'utilise que très peu la calculatrice en classe. C'est un élève de type "scolaire" pour lequel l'intégration de l'outil a eu lieu d'une certaine façon, mais pas dans le cadre souhaité...

3. Par rapport aux calculatrices graphiques que vous manipuliez avant, comment jugez-vous les TI-92 :

	Bien mieux	Plutôt mieux	Moins bien	Bien pire
Utilité	88 (68)	12 (28)	0 (4)	
Convivialité	44 (36)	44 (40)	12 (20)	0 (4)
Lisibilité	68 (72)	28 (24)	4 (4)	

Net progrès pour la perception de l'utilité de la machine, progrès sensible pour la convivialité. Stabilité pour la lisibilité. Interrogés, les élèves répondent : "il y a un écran plus grand, mais comme on a beaucoup plus d'informations, cela ne suffit pas toujours...".

4. Qu'est- ce qui te plaît le plus sur cette machine ?

(Les élèves ont fourni parfois plusieurs réponses)

La possibilité de vérifications	**25**
Le calcul d'intégrales	**25**
Le calcul exact	**20**
Le calcul de limites	**20**
Le calcul de dérivées	**20**

On retrouve à peu près le même éventail de réponses que lors du précédent baromètre : 3 élèves évoquent la taille de l'écran, 2 élèves évoquent la possibilité de retrouver à l'écran les calculs antérieurs, deux élèves le "Pretty Print", qui permet de contrôler l'entrée des formules, 2 élèves l'utilité pour le traitement de problèmes mathématiques complexes. On retrouve aussi l'évocation des capacités graphiques, mais à un moindre niveau, puisque cela ne caractérise pas la TI-92 par rapport aux calculatrices graphiques antérieures.

5. Qu'est-ce qui te plaît le moins sur cette machine ?

Par rapport au précédent baromètre, on retrouve beaucoup moins de critiques.
Arrive cependant encore en tête :
La taille (ou le volume) **24**
Puis :
La trop grande complexité **12**
L'exigence de syntaxe **8**
Christelle : ""toujours Sequence Set Up !" *Ce qui signifie une erreur d'entrée dans le fichier de suite. On avait signalé en effet la difficulté pour les élèves d'écrire les suites avec la syntaxe TI-92....*
La lenteur graphique **8**
Deux élèves signalent la lenteur du curseur dans l'application graphique.
L'ergonomie **8**
2 élèves critiquent la disposition des touches : ce sont deux élèves ayant l'habitude de travailler sur un clavier d'ordinateur.

Une critique nouvelle, formulée par deux élèves, et liée sans doute au TP 14 :
Vincent : "en suite, elle traite en mode approché" ;
Damien : "parfois elle donne des réponses absurdes, car elle "dérape", et il ne faut pas en tenir compte".
Caroline réitère la même critique que la dernière fois : "la machine n'est pas du tout intuitive".
Alexandre fait un reproche qui n'en est pas forcément un : "ce qui se passe, c'est que parfois on attend tellement de cette machine que quand elle se "trompe" on est déçu"...

6. Comment juges-tu l'utilité de la TI 92 :

	Très utile		Utile		Inutile		Très inutile	
En cours	32	(24)	60	(68)	8	(4)	0	(4)
En TP	84	(48)	16	(48)			0	(4)
En contrôle	48	(44)	52	(52)	0	(4)		
A la maison	20	(12)	72	(60)	8	(24)	0	(4)

On remarque une stabilité des résultats en ce qui concerne les contrôles, un léger progrès en cours, un progrès plus sensible à la maison, et un progrès très net en ce qui concerne l'utilité jugée de la TI-92 en TP.

La TI-92 apparaît ainsi plus comme un outil de recherche, que comme "utilitaire" pour réussir les contrôles scolaires...
Ce qui était bien le but du jeu !

7. Qu'as-tu rentré en mémoire (programmes et informations diverses)

Formulaire	**56**
Problème long	**24**
Rien	**28**
Programme fonctions	**16**
Jeux	4
Agenda	4
Dessins	4

C'est le même panorama que lors du précédent baromètre.

8. Commentaires.

J'avais précisé pour ce baromètre 2 : **Notez ici l'évolution de votre perception de la machine depuis le dernier baromètre.**

24% des élèves ne font aucun commentaire.

C'est une abstention très inférieure au dernier baromètre, mais cela s'explique par la précision du commentaire demandé : il s'agissait ici de noter une évolution, ce qui est plus précis qu'un commentaire libre, et donc vague...

Il est tout à fait remarquable que tous les élèves, sauf une, qui répondent à cette question signalent une amélioration de leur "relation" avec la TI-92.
On peut distinguer plusieurs niveaux dans cette amélioration :

2 élèves (Erwan et Michaël) signalent simplement une amélioration : une flèche vers le haut...

7 élèves signalent une plus grande aisance dans la manipulation de la calculatrice :
(ce qui relève de la familiarisation avec l'outil)
- Pierre : "évolution positive : on se débrouille de mieux en mieux avec le calcul pile-poil" *(allusion sans doute au calcul exact, via les "Guignols de l'info"...)* ;
- Tristan : "je pense m'en servir un peu mieux, et l'utiliser plus souvent" ;
- Sébastien : "à force de l'utiliser, j'arrive à être beaucoup plus à l'aise" ;
- Caroline : "j'ai plus de facilité pour utiliser la machine" ;
- Patrice : "plus de facilité d'utilisation" ;
- Brigitte : "meilleure manipulation" ;
- Guillaume : "je me sens plus à l'aise".

6 élèves évoquent l'utilité de la calculatrice pour faire des mathématiques :
(ce qui relève plutôt de l'appropriation de l'outil)
- Elsa : "je sais mieux m'en servir, elle m'encombre moins, elle me paraît presque indispensable" ;
- Alexandre : "je pense savoir mieux m'en servir, et de ce fait elle m'est plus utile" ;
- Karen : "elle est utile pour vérifier les calculs, et pour quelqu'un qui aime la programmation" ;
- Jérôme L. : "je pense que j'aurais du mal à m'en passer l'année prochaine" ;

- Vincent : "C'est un bon outil de travail et de vérification" ;
- Cyril : "Grande utilité pour les résultats en intégrales, complexe... Bilan plus que positif".

Enfin 3 élèves semblent indiquer une certaine transformation de leur rapport aux mathématiques, ou à certaines parties du cours :

- Aline : La machine m'a appris à approfondir et à mieux comprendre les calculs comme par exemple les limites, les suites" ;
- Damien : "Avec le temps, elle devient de plus en plus intéressante" *(c'est parce que je vois travailler Damien en TP que je range son appréciation dans cette catégorie...)* ;
- Cécile : "Meilleure appréhension du problème. Méthode et anticipation dans la recherche".

Il est sans doute difficile de distinguer précisément les deux dernières catégories d'appréciations. Une chose me semble cependant à peu près se dégager : ce sont les deux dernières catégories d'élèves qui ont le plus "profité" de l'expérimentation. Il n'est pas indifférent de dire simplement "je sais mieux me servir de la machine", ou de dire "une meilleure utilisation de la machine me permet de faire telle ou telle chose...". L'utilisation de la machine n'est pas une fin en soi !

Une dernière remarque sur la seule élève qui indique comme seul commentaire : "pas de changement". Il s'agit de Candice, tout à fait réticente au départ de l'expérimentation. Toutes ses réponses, lors de ce baromètre n°2 sont pourtant plus positives :
1. Comment estimes-tu te débrouiller avec la TI-92 ?
Elle passe de "Très mal" à "Plutôt mal".
2. Consultes-tu le mode d'emploi ?
Elle passe de "Jamais" à "Parfois".
3. Par rapport aux calculatrices graphiques que vous manipuliez avant, comment jugez-vous les TI-92 ?

Utilité	: elle passe de "Plutôt mieux" à "Bien mieux";
Convivialité	: elle passe de "Plutôt mieux" à "Bien mieux";
Lisibilité	: elle reste à "Bien mieux".

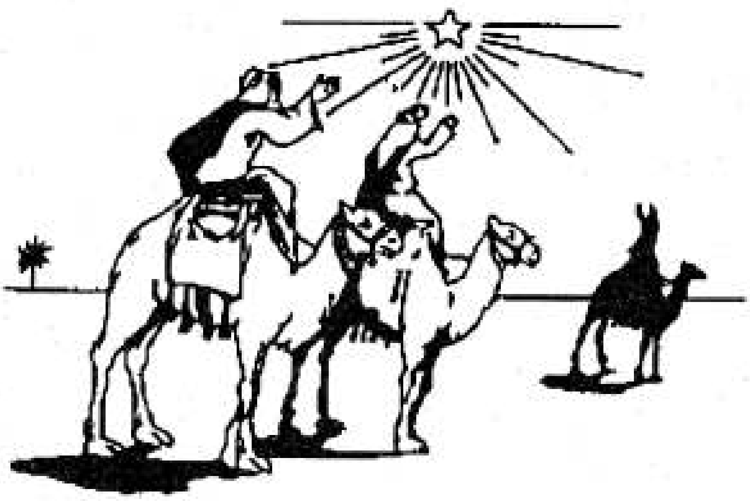
6. Comment juges-tu l'utilité de la TI-92 ?

En cours	: elle passe de "Très inutile" à "Très utile";
En TP	: elle passe de "Très inutile" à "Très utile";
En contrôle	: elle passe de "Inutile" à "Utile";
A la maison	: elle reste à "Inutile" .

Deux constatations :
- c'est évidemment à la maison, hors de la pression du contrat de la classe, que les changements seront les plus longs à intervenir ;
- il y a toujours un écart entre une évolution, et la conscience de cette évolution : Candice a clairement évolué, sur à peu près tous les points, mais elle signale cependant "pas de changements...".

En conclusion, ce deuxième baromètre indique de façon à peu près générale un progrès dans la familiarisation avec la TI-92, et de façon importante un progrès dans l'appropriation de l'outil pour faire des mathématiques.

5. Les observations ...des observateurs



Observer, donc.

Si, entre les visites chez le dentiste de telle femme,
et les démarches à la Préfecture de tel homme,
apparaissaient des coïncidences trop régulières
pour que le hasard seul les expliquât,
des observatrices expertes dégageaient aussitôt les lois
de ces variations concomitantes.
A. Maurois, Le Cercle de famille.

Puisque l'on a beaucoup parlé de changement de points de vue dans ces deux volumes, il était naturel de terminer par des analyses croisées de l'expérimentation.

On lira donc dans les pages qui suivent les contributions de Gaëtan Drezen, Christian Faure et Maryse Noguès.

Chacun d'entre eux a noté ce qui lui apparaissait comme marquant du point de vue du fonctionnement de l'équipe, ou du travail de la classe, ou du cadre mathématique...

Il n'y a donc pas à attendre de ces contributions les réponses aux mêmes questions.

Il s'agit d'éclairages différents, et donc, de toutes façons, complémentaires.

Ces éclairages sont marqués par l'histoire de chacun.

- Gaëtan Drezen est arrivé dans cette expérimentation presque par hasard, au détour d'un mémoire de didactique. Il n'avait donc ni l'expérience d'un enseignement de mathématique dans une classe de Terminale, ni l'expérience d'une prise en compte des outils de calcul dans un processus d'enseignement. C'est donc d'un oeil assez neuf qu'il a découvert ce type de travail, et qu'il a tenté d'en tirer des leçons pour ce qui concerne les objets mathémétiques, et les actions que l'on peut exercer sur eux.

- Maryse Noguès et Christian Faure avaient au contraire une expérience (relativement!) ancienne d'une intégration des calculatrices dans le cours de mathématique [21]. Membres, avec l'auteur de ces lignes, de l'équipe Analyse de l'IREM de Montpellier, ils ont rédigé un certain nombres de documents ([1993, 1994, 1995, 1996]) relatifs à cette intégration, et ont animé des stages de formation pour les enseignants du second degré.

De plus, ils avaient aussi en charge cette année une Terminale S, et ont ainsi pu faire d'utiles comparaisons entre la classe expérimentale et la leur [22].

Dernier survol de l'année donc, en ordre dispersé.

---

21 Il serait d'ailleurs intéressant de comparer la démarche expérimentale des équipes qui ont travaillé cette année à l'intégration des TI-92 dans des classes de lycée : certaines équipes avaient une tradition plutôt "informatique", d'autres plutôt "calculatrice". Il semble bien que ce ne soit pas tout à fait le même travail qui ait été réalisé dans les deux cas. A voir de plus près !

22 Il n'y a cependant pas eu de protocole précis de comparaison des classes qui a été mis en place. Les comparaisons seront donc tout à fait empiriques. Mais c'est déjà un premier pas !

Point de vue de Gaëtan Drezen

Gaëtan Drezen est étudiant en didactique des Mathématiques, enseignant vacataire à l'Université de Montpellier III.

Exercice difficile, que celui de présenter en quelques lignes les impressions les plus saillantes retenues au fil d'une année scolaire, ou plutôt de deux trimestres et quelques, d'observation.

L'observateur s'observe...

Tout d'abord, pour relativiser mon propos, et pour que l'on comprenne mieux ce qui a pu le plus retenir mon attention, il peut être intéressant de rapidement brosser le portrait de l'observateur que j'étais en début d'année scolaire.

Etudiant dans le cadre d'un D.E.A. de Didactique des Disciplines Scientifiques, je me suis vu proposer par Dominique GUIN, en tant que directrice de mon mémoire [Drezen 1996], de participer à cette expérimentation.

A bien y penser, l'observateur que j'étais avait un double statut de candide que je vais de ce pas expliciter.

Tout d'abord, je me suis retrouvé participant aux réunions de "débriefing" lors de repas se déroulant la plupart des midis des jours de TP.

Cet exercice, où l'échange d'impressions, d'idées, était de rigueur tranchait avec mes habitudes d'enseignant où, hormis lors des conseils de classe, j'étais rôdé à une pratique en solitaire de l'enseignement, et ce depuis plus d'une douzaine d'années.

La deuxième rupture, et où encore je portais un regard néophyte, a été la réflexion centrée sur l'usage des calculatrices en cours de mathématiques.

Elevé à la règle à calculs et peu soucieux de veille technologique, je pratiquais plutôt, pour prolonger la métaphore nycthémérale, une certaine somnolence technologique.

Quelle ne fut pas ma double surprise de prendre conscience de visu que depuis un certain nombre d'années, des enseignants avaient pour pôle principal de recherche et réflexion l'usage de la calculatrice dans leur enseignement des mathématiques et, de plus, au sein d'équipe de travail !

C'est donc un être quelque peu sclérosé qui s'est vu "parachuté" observateur dans un contexte fleurant bon l'innovation pédagogique.

... pour mieux observer la classe...

De par mon profil, j'ai été vraiment à même de comprendre les réticences que certains élèves manifestèrent dès le début de l'expérimentation.

Au fur et à mesure des TP et de ma propre "conversion" quant à l'intérêt d'une prise en compte des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques, j'ai observé les résistances que j'ai pu déceler.

Elles s'exprimèrent, tout d'abord, sous la forme d'une pétition de principe chez les quelques ultras qui avaient décrété le travail orienté calculatrices comme peu digne d'intérêt.

L'autre grande catégorie de résistance apparut lorsque certains élèves eurent des difficultés (souvent par manque de pratique) à surmonter les obstacles spécifiques à l'usage des calculatrices, notamment la maîtrise de leur fonctionnalités et des allers retours entre le registre papier/crayon et le registre machine.

... et le dispositif expérimental.

C'est avec ces diverses situations problèmatiques que l'expérimentation a dû s'inscrire.

Le premier grand mérite, à mon sens, dans la gestion de l'expérimentation a été la lucidité et la mise à plat systématique des problèmes par l'équipe à laquelle je me suis peu à peu intégré.

D'autre part, l'enseignant a mis en place un environnement institutionnalisant l'expérimentation.

Cette crédibilité s'est instaurée au détour de quelques initiatives symboliques ou pragmatiques qui ont permis ainsi l'intégration des calculatrices en immergeant leur usage par certaines habitudes balisant la piste de leur apprentissage.

La tenue d'un cahier de TP pour chaque binôme a participé à la ritualisation de la pratique, tout en lui conférent un caractère de rigueur.

Un deuxième repère prégnant a été la reprise systématique en classe, avant chaque nouveau TP, du TP précédent.

Chaque élève pouvait ainsi retrouver, de façon anonyme, les erreurs qu'il avait pu commettre. La présentation, sous forme de transparents, avec comme seule consigne d'écouter avec attention, puisqu'un polycopié distribué à la fin de l'heure résumait tout ce qui avait été dit, a semblé être un heureux compromis pour permettre un suivi systématique sans pression.

Dans le même esprit, les corrections et commentaires faits par l'enseignant sur les cahiers de TP évitaient toujours de dévaluer le travail des élèves. Cela grâce à des phrases qui, lorsque le travail n'était pas satisfaisant, interrogeaient les élèves sur le pourquoi de la non-utilisation de telle méthode ou point de vue pour résoudre et justifier telle question.

Ainsi c'est plus l'activation de la prise de conscience au quotidien qui était sollicitée, pour contrer les dysfonctionnements des savoirs et savoir-faire, que la tentative de grande remise en question qui aurait été déstabilisante pour l'élève concerné.

Une expérimentation "sur le fil du rasoir".

Durant toute l'année, l'enseignant a dû utiliser une marge de manœuvre assez étroite.

En effet, d'un côté il y avait le risque d'une expérimentation marginale à laquelle ne se seraient intéressés que quelques "spécimens" d'élèves bricoleurs, ou expérimentateurs, pour reprendre la terminologie de l'enseignant ; bref, uniquement ceux dont les seuls goûts personnels auraient servi de support de motivation.

De l'autre côté, pesait la menace d'une expérimentation rigide, de laquelle se seraient exclus tout d'abord les fortes têtes rétives dès le début, puis, selon une dynamique "en dominos", tous les élèves qui auraient rencontré à un moment ou à un autre des difficultés, que ce soit d'ordre purement scolaire ou d'ordre psychologique.

A chaque fois, l'expérimentation aurait pu servir d'exutoire à toutes les frustrations qu'un élève lambda peut subir, durant une année critique d'examen, à un âge critique de la vie.

Pour contrer cette fragilité latente, il a fallu que l'enseignant crée l'espèce d'évidence que l'usage des calculatrices graphiques ou formelles était bel et bien incontournable dans l'intérêt de chacun.

Ce credo s'est construit aussi chez les élèves, en ce qui concerne les calculatrices formelles, par une certaine marginalisation que les élèves des autres classes, ne possédant pas un pareil outil de calcul, ont peut-être créée.

Cette petite "mise à l'écart" a certainement joué dans une attitude globale positive, vis-à-vis de la TI-92, où la classe s'est serré les coudes, faisant fi des remarques quelquefois peu amènes des élèves d'autres classes.

C'est grâce à une cohérence globale de l'intégration de l'outil que les élèves ont pu résister à ce type de déstabilisation de certains élèves extérieurs à la classe.

Pour résumer, la cohérence de l'enseignant a servi, par un rôle de contrefeux, à garantir la cohésion de la classe.

Point de vue de Maryse Noguès

Maryse Noguès est professeur de Mathématiques au lycée Louis Feuillade de Lunel, et participe à l'équipe "Analyse" de l'Irem de Montpellier.

A propos de l'expérimentation pour l'intégration des TI 92 dans une classe de TS, et en tant que participante au groupe de recherche, les remarques que je pourrais faire sont de divers ordre.

Du côté de l'appropriation de l'outil.

En premier lieu, par rapport à l'outil lui même, inconnu pour moi jusqu'à 2 à 3 semaines avant que les élèves n'en disposent eux-mêmes, le travail d'appropriation de celui-ci ne s'est pas fait d'une façon immédiate.

La découverte de certaines fonctionnalités passe la consultation du mode d'emploi mais aussi par les remarques et les échanges que nous avons entre enseignants (et aussi avec nos autres collègues du groupe Analyse). Parfois l'un de nous arrive avec un résultat surprenant, et nous essayons de comprendre quel processus est mis en jeu par la machine. L'idée que la calculatrice peut faire beaucoup de choses m'entraîne aussi parfois à chercher des possibilités qu'elle n'a pas :

- à propos du traitement des listes par exemple, je voulais à un moment donné la faire fonctionner comme un véritable tableur... ;.
- la forme donnée pour certains calculs même assez simples ne me convenant pas (simplifications non faites par exemple), j'ai essayé au début, de bien des façons d'arriver à ce que je souhaitais, sans succés ; depuis j'ai renoncé, je prends les formes données en me disant que certaines choses ne sont pas prévues...

Nous avons travaillé essentiellement sur le programme de TS, je n'ai ainsi pas du tout utilisé les possibilités géométriques de la calculatrice (Cabri), même pour moi personnellement (en fait je préfère utiliser celui-ci sur mon ordinateur), par contre j'ai exploré un peu plus les possibilités de représentation en trois dimensions et écrit quelques programmes.

Du côté de l'observation de la classe.

Par rapport à la classe elle-même et au travail des élèves, mes remarques porteront seulement sur les quatre groupes que j'ai observés lors des séances de TP.

Les élèves de ces groupes travaillent de façon différente et manipulent de façon différente leur calculatrice, mais depuis le début de l'année, je ne sens aucune réticence réelle par rapport à celle-ci dans ce cadre de travail (les TP). Les questionnaires qui leur ont été donnés au cours de l'année peuvent permettre d'apprécier plus précisément leur position. En cours d'année, les élèves de ces groupes deviennent de plus en plus familiers, leur fonctionnement de groupe, leur attitude par rapport aux TP, et leurs méthodes de recherche aussi.

Vincent du groupe 11 par exemple, assez réticent au début par rapport à ce nouveau professeur, semble prendre un peu plus d'assurance en fin d'année et donner plus facilement ses propres réponses sans se reférer à son binôme.

Tristan du groupe 15 a de bonnes idées, mais il faut lui rappeller fréquemment que l'on peut aussi parfois écrire... En fin d'année, il parvient de temps en temps à rédiger une partie du rapport dont il laisse habituellement la charge à sa camarade.

Rachel et Caroline, du groupe 13, qui ont mis un temps très long à apprendre à utiliser leur calculatrice, même pour des fonctionnalités de base, deviennent plus sûres d'elles et, malgré leur travail toujours très linéaire, obtiennent davantage de résultats.

Dans le groupe 12, Elsa est toujours l'élément moteur, avec une démarche qui suit de très près la chronologie proposée par l'énoncé.

Mise à part Rachel, qui en fin d'année est absente quelques fois, tous les élèves de ces quatre groupes manifestent un intérêt certain pour les séances de TP. Ils organisent toutefois leur travail et leur recherche différemment au fur et à mesure que le temps passe. Par exemple, Jérôme du groupe 11 utilise de façon assez intensive sa calculatrice (c'est un de ceux qui à appris le plus rapidement à la manipuler au début), Tristan semble la manipuler plutôt comme pour en jouer, pour les autres c'est plutôt parce ce que cela fait partie du contrat, et que cela peut aider.

L'évolution du comportement de ces élèves en cours d'année face à ce nouvel outil, et par rapport au cours de mathématique lui-même (cf. "enquêtes et filatures") me semble par ailleurs être liée également à la structure complète de l'expérimentation : utilisation d'une retroprojetable lors des cours, TP où un temps de recherche est donné avec demandes de conjectures et de validations.

Du côté de la comparaison avec ma propre classe.

A titre comparatif, même si cela ne peut être fait que de façon très sommaire ici, dans ma propre classe de TS où certains TP ont été repris (mais sans TI-92) mes élèves ont dit apprécier surtout le temps qui leur était donné pour la recherche. C'est bien la structure même du TP où "du temps est laissé au temps", pour reprendre une expression de l'auteur, qui est en cause.

Par ailleurs, ce qui peut sembler intéressant aux enseignants ne l'est pas forcément pour les élèves : ainsi le TP (n°14) sur la suite géométrique/de Fibonacci suscite comme remarque finale que la partie d'observations sur la calculatrice n'est pas très intéressante... puisque de toutes façons on a déjà prouvé que les deux suites sont égales !

La rédaction de l'énoncé du TP lui même est aussi un élément moteur pour susciter, ou non, la recherche des élèves ; ainsi le TP n°16 dont l'énoncé très sommaire : étude de la suite $I_n = \int_1^e x\,(\ln x)^n\,dx$ où $n \to \mathbb{N}^*$, oblige les élèves à se poser et poser la question de ce qui est pertinent dans une étude de suite. Pour certains élèves, qui le disent lors du compte rendu fait lors de la séance suivante, c'est seulement cet exercice non guidé sur les suites qui leur a fait prendre conscience de ce que l'on pouvait rechercher et donc d'établir des liens dans leur recherche. Bien sûr, certains d'entre eux sont aussi gênés par cette approche non guidée, et leurs résultats sont maigres. Mais il reste que, de façon significative, c'est bien seulement à travers une recherche de ce type que peut se construire, au moins pour certains élèves, une notion ou un concept.

Du côté de la recherche elle-même.

Enfin, en tant que membre du groupe de recherche, mon rôle d'observateur a laissé aux soins du responsable de la classe l'organisation de la celle-ci, et la cohérence des sujets proposés. Il s'agissait plutôt, à travers nos discussions de groupe, d'essayer de mettre au point la forme des sujets, afin qu'ils s'inscrivent le mieux possible dans la logique de notre recherche. Ces discussions prolongeaient celles du groupe IREM, et donnaient parfois d'autres modes de représentation personnelle ("vues et changements de points de vue").

Par rapport aux élèves, la typologie mise en place (même si parfois insatisfaisante quand aux termes utilisés) m'a aussi permis d'établir des parallèles avec certains de mes propres élèves.

L'intégration des calculatrices dans une classe, la mise au point d'exercices spécifiques, sont certainement trop laborieuses et complexes pour pouvoir être réalisés de façon complétement autonome par un seul enseignant, aussi pour conclure, on pourrait reprendre une phrase d'élève à propos du travail en groupe : "on contribue à un échange d'idées qui permet d'avancer plus vite".

Point de vue de Christian Faure

Christian Faure est professeur de Mathématiques au lycée Joffre de Montpellier, et participe aussi à l'équipe "Analyse" de l'Irem.

Une conviction.

J'ai abordé cette expérience avec la conviction que les mathématiques, au lycée, peuvent être un domaine privilégié pour un apprentissage clef : apprendre à chercher, avec les attributs nécessaires de cet apprentissage (curiosité, créativité, sens critique...) et ceci sans renoncer à un aspect essentiel des mathématiques : la démonstration.

Ma thèse était que, les calculatrices modernes, par la puissance et la convivialité qui en font un "petit laboratoire personnel à la disposition de chaque élève", pouvaient servir ces mathématiques .

Mais, pour poursuivre dans cette métaphore du "laboratoire" : les clefs ne peuvent pas être laissées aux élèves sans apprentissage, et l'aspect "personnel" laisse craindre de nombreux risques de dérive .

A la fin de cette première année, je pense que cette expérimentation a servi cette thèse du "laboratoire". Je renvoie à l'étude d'évolution que l'on a pu lire dans ce volume : elle révèle une typologie d'élève, des comportements et leur évolution au sein de chaque type, une évolution d'ensemble relative à la perception des mathématiques.

Une étude comparative des comportements et des performances entre un groupe d'élèves dans un environnement intégrant l'outil calculatrice, et un autre groupe où l'utilisation de la calculatrice serait laissé marginale, pourrait être un autre axe de recherche (difficile à conduire, son protocole est déjà un problème en soi...).

Des impressions.

Par une réserve certes pas dirigée vers cette expérimentation, mais dictée par un minimum de rigueur, je n'évoquerai d'abord que les impressions les plus générales que m'ont laissé une quinzaine de séances comme observateur de quatre «binômes» :

- tout d'abord celle d'une bonne adhésion des élèves à cette expérimentation. Les données n'étaient pourtant pas simples : une classe de niveau plutôt faible avec une perception des mathématiques très variable, souvent négative, et qui doit se mettre dans la situation inconfortable du doute, de la recherche ....
- celle de comportements oscillant fortement du renoncement à l'enthousiasme, révélant tous les vieux démons de l'esprit :
  - "l'alchimiste", prêt à toutes les manipulations donnant l'illusion d'une compétence ;
  - "le mystique", balayant tous les doutes par «c'est dû aux approximations» (en d'autre temps c'était dû au diable !) ;
  - "le défaitiste" pour qui les bornes de l'entendement sont déjà dépassées (un matériel remarquable pour un collègue de philo exposant sur la méthode expérimentale !) .
- celle d'une bonne compétence pour manipuler ces machines et, plus important à mon sens que cette compétence manipulatoire, une excellente adaptabilité : les élèves ont su passer des TI-82 aux TI-92 en très peu de temps. On peut bien augurer de futures adaptations qui seront exigées d'eux ;
- celle, très positive, d'une grande autonomie devant des questions sortant du format classique : des initiatives sont prises (pas toutes bonnes certes !) mais je n'ai jamais entendu (le lamentable) «je ne sais pas, j'ai jamais fait ce genre d'exo» ;

Quelques certitudes.

Certaines données de l'étude d'évolution, des actions de formation et ma participation à l'élaboration de certaines phases de l'expérimentation, me laissent quelques certitudes :

- dans cette classe la perception de l'activité mathématique a fortement évolué ;
- la présentation, devant des collègues, de quelques uns de ces sujets a rencontré un vif intérêt ;
- les énoncés des TD doivent être fortement pensés, tant sur le fond que sur la forme.

Cela génère une charge de travail sans commune mesure avec une banale liste d'exercices d'application plus ou moins directe.

Une typologie des TP.

Ces sujets de TD, support de l'expérimentation, méritent une analyse. Celle ci n'est pas facile, car s'y mêlent plusieurs attributs . Je relève :

- Les objets manipulés sont {connus / nouveau}
- Ils sont étudiés dans un contexte { classique / étrange}
- Les propriétés des objets sont {connues / nouvelles}
- Le spectre des questions est {centré , large}

TI-82	TP n° 1 TP n° 2 TP n° 3 TP n° 4 TP n° 5 TP n° 6	• objets : <u>connus</u> • Contexte : <u>étrange</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>centrées</u>	—>des fonctions élémentaires : sin , poly, $\sqrt{\ }$ —>Ces objets étaient étudiés sous des angles inhabituels : coef. bizarres, fenêtrages extrêmes , questions non standard sur les tangentes .... —>problèmes de racines, de tangentes, d'intersections ...
	TP n°8	TP de synthèse ?	
	TP n°7 TP n°9 TP n°10	• Objets : <u>nouveaux</u> • Contexte : <u>étrange</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>centrées</u>.	—>ln, exp ... —>Des fenêtrages extrêmes ... —>racines, variations ..
TI-92	TP n°11	TP de prise en main	
	TP n°12	• Objets : <u>connus</u> • Contexte : <u>classique</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>centrées</u>.	—> exp , polynômes sont connus —> quoique : dériver n fois !? .. —> dérivée de u × v et de exp ..

TI-92	TP n°13 TP n°14	• Objets : <u>connus</u> • Contexte : <u>classique</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>larges</u>	—> fonction rationnelle, suites —> intersection, variation , limites, égalité de suites ...
	TP n°15 TP n°16	• Objets : <u>nouveaux</u> • Contexte : <u>étrange</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>larges</u>	—> Calcul intégral —> suites + intégrales —> suite ? intégrale ? pas de question précise : "étudier .."
	TP n°17	• Objets : <u>connus</u> • Contexte : <u>étrange</u> • Propriétés : <u>connues</u>. • Questions : <u>centrées</u>	—> c'est l'outil (TI 92)qui crée un contexte étrange
	TP n°18	• Objets : <u>nouveaux</u> • Contexte : <u>étrange</u> • Propriétés : <u>nouvelles</u>. • Questions : <u>centrées</u>	—> complexes —> suites dans C —> calcul dans C, non ordre.. —> convergence

Cette description partielle sinon sommaire peut servir de base de réflexion pour l'amélioration de ces sujets sinon pour l'élaborations de nouveaux .

Une piste de recherche.

On peut aussi tenter de croiser ce tableau avec la typologie des comportements des élèves mise en place dans ce volume, afin de valider cette typologie, ou d'isoler l'effet de chacun des attributs-variables attachés au TP :

	théorique	*rationnel*	*scolaire*	*bricoleur*	*expérimentateur*
TP 12	bon travail d'induction	induction correcte mais pas de capacité à généraliser	peu d'efficacité inductive	beaucoup de manipulations—> induction et même inductions abusives	Travail papier & travail machine —> conjecture & demo. Capacité de généralisation
TP 14	approche par analogies	Identifie les objets Distance avec toute problématique issue de l'outil	lenteurs dans la phase de production de conjectures	grande efficacité dans les expérimentations menées sans stratégies. Perte du sens	Aptitude à changer de pt de vue. Conjecture & démo. Capacité à croiser les résultats

Affaire à suivre...

Conclusion

La certitude n'est jamais achevée ;
les fondations ne sont jamais trouvées.
Mais, dans le domaine des mathématiques,
l'art de la raison transforme chaque progrès de la rigueur
en un accroissement du contenu.
[Lakatos, 1974]

C'est sur cette citation que s'achevait le premier volume "côté cours".

Au terme de ce deuxième volume, on est tenté d'appliquer la même citation à la didactique des mathématiques...

De premiers résultats, partiels...

Mettre en évidence les conditions, puis les conséquences, de l'intégration de nouveaux outils de calcul dans le cours de mathématiques, a imposé de comprendre, ou de tenter de comprendre, les ressemblances, et les différences, dans les comportements des élèves.

La mise en forme d'une typologie a nécessité, tout au long de l'année, de creuser plus profond, à la fois du point de vue théorique ("la pensée logico-mathématique"), et du point de vue de l'observation des élèves "sur le terrain".

Une certaine validité de la typologie est attestée par le suivi du travail, en particulier par tous les TP qui ont jalonné l'année. On a observé aussi, à travers le filtre de cette typologie, diverses productions scolaires, ou des questionnaires. On n'a pas ainsi épuisé, bien entendu, toutes les sources d'information...

On aurait pu relever par exemple, à fin d'analyse, le contenu des mémoires des machines rendues en fin d'année. Nul doute que celui-ci aurait été instructif ! Deux dessins illustrent la première page des deux volumes : ils ont été relevés, presque par hasard, sur les machines de deux élèves. Ils sont tout à fait révélateurs de l'idée qu'ils se font de la calculatrice :

- pour Jérôme M., la statue de la liberté , sévère, se détachant sur un ciel orné d'un magnifique soleil noir. Jérôme, élève plutôt "scolaire", explique que la calculatrice est l'illusion d'une aide, comme la statue de la liberté est l'illusion de la démocratie...
- pour Alexandre, une fusée qui décolle vers la lune. Alexandre, plutôt "bricoleur", a eu pendant tout un temps l'illusion que la calculatrice allait régler tous ses problèmes, et lui permettre de "décoller" aussi...

Plus sérieusement (quoique les deux rapprochements ci-dessus n'aient rien de fortuits...), la typologie construite a permis de suivre les évolutions de près, de lever certains obstacles, ou en tous cas de mieux comprendre l'origine des résistances.

Eléments d'une longue marche...

Ce suivi de très près des élèves a bien montré que de nombreux aspects restaient encore à étudier :

- les élèves plutôt bricoleurs observés cette année étaient des garçons ; les élèves plutôt expérimentateurs des filles. Y a-t-il une différence, et si oui de quelle nature, entre la prise en compte par les filles et par les garçons des outils de calcul ? Et, plus généralement, dans la façon de faire des mathématiques ?
- certains élèves avaient un ordinateur à la maison, d'autres vivaient dans un milieu très critique vis à vis des "écrans" (pas de télé à la maison par exemple) ; y a-t-il un effet dans le fonctionnement en classe ?
- quel aurait été l'effet "horizontal" d'une intégration de la calculatrice, pas seulement en mathématique, mais dans plusieurs disciplines ?

- quel serait l'effet "vertical" d'une intégration de la calculatrice sur plusieurs années, par exemple sur tout un cycle scolaire ?

De façon plus générale, on a noté cette année, chez de nombreux élèves, un changement des rapports aux mathématiques, et ,plus profondément, une évolution des rapports au savoir. Y a-t-il eu une manifestation de cette évolution dans les autres matières ?

Répondre à cette question supposerait que de prochaines expérimentations impliquent non seulement une équipe de professeurs de mathématiques travaillant sur une ou plusieurs classes, mais aussi une équipe de professeurs de plusieurs disciplines travaillant dans la même classe. Ce que l'on appelle en général une équipe pédagogique...

Des conditions institutionnelles.

Ceci débouche sur une question naturelle, à la fin d'une expérimentation, et qui a trait à sa possible transposition dans une autre classe.

Le travail de cette année a supposé l'attribution d'une heure supplémentaire à une classe de TS, et la constitution d'une équipe de trois professeurs de mathématiques. C'est dire qu'il semble difficile de transposer telle quelle l'organisation mise en place (TP, problème long, questionnaires de contrôle) dans une classe "standard"...

Par contre, l'utilisation coordonnée des deux volumes peut contribuer à la constitution d'un "système d'exploitation didactique" [Chevallard 1992] des calculatrices graphiques et formelles.

Ainsi les professeurs intéressés pourront-ils tenter une expérience d'intégration progressive des calculatrices formelles, en utilisant les thèmes de travail donnés dans le volume 1, et en utilisant le volume 2, soit pour préparer les séances de travail avec les élèves (pour anticiper les pistes possibles, les impasses prévisibles, les difficultés à surmonter), soit pour en faire le bilan (en situant les travaux de ses propres élèves par rapport à ceux de la classe expérimentale).

Il reste bien sûr des problèmes matériels, et institutionnels, à régler :

- la question des matériels est réelle. La majorité des élèves ne disposera pas avant quelques années d'une calculatrice "graphique et formelle". Mais cette difficulté peut être contournée par l'utilisation d'une calculatrice rétroprojetable, par l'achat d'un lot de calculatrices par l'établissement...

- les questions institutionnelles sont tout aussi réelles. Les démarches individuelles ne permettront pas de faire l'économie d'une réflexion, et de décisions, concernant l'évolution de l'enseignement des mathématiques, sur le plan des programmes, de l'organisation de la classe, des examens...

Mais cette évolution des "mathématiques à enseigner", nécessaire, n'est sans doute pas un préalable à une évolution de l'enseignement des "mathématiques d'aujourd'hui".

Ces deux volumes sont dans ce sens une invitation à "cultiver son jardin". Du point de vue mathématique, ou didactique. Mais ces deux points de vue, pour un enseignant, sont-ils dissociables ?

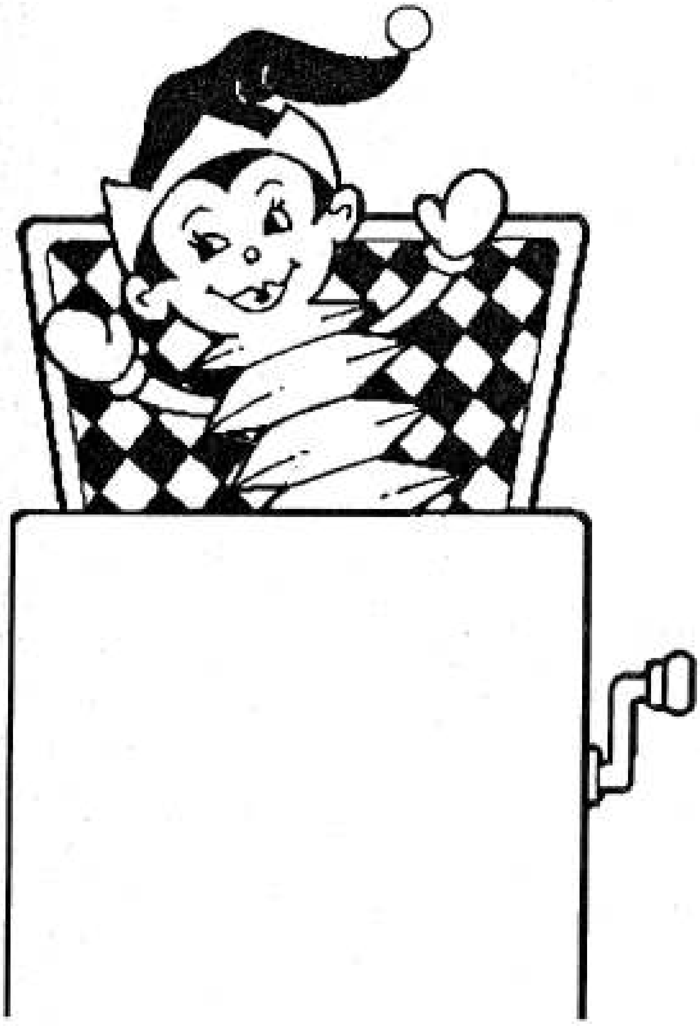
L'intégration des outils de calcul n'aura finalement été qu'un prétexte, ou une occasion, pour poser les problèmes généraux de l'enseignement des mathématiques. Evelyne Barbin [Barbin 1995] cite Henri Lebesgue : "Pour un mathématicien, calculer, c'est raisonner, c'est analyser plus profondément les faits géométriques sous-jacents ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus voir que des symboles".

De façon peut-être paradoxale, on a essayé ici de montrer que l'intégration des outils de calcul pouvait permettre de ne laisser ni aux symboles, ni à la machine, "le soin de raisonner à sa place", et pouvait mettre la raison au poste de commande, afin "d'analyser plus profondément les faits" observés.

Bref (fin de la métaphore du jardin), cette intégration peut contribuer à faire, de tout élève, un mathématicien en herbe...

Luc Trouche, le 1er Juin 1996.

Bibliographie



Repères bibliographiques

ALDON G., 1995, *Une voiture à la Derive,* Repères-Irem n°21.

ARTIGUE M., 1995, *Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques,* Repères-IREM n°19, pp 77-108

ARTIGUE M.,1995, *Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement, in Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur,* Guin, Nicaud et Py, Eyrolles, Paris.

BALACHEFF N., 1987, *Processus de preuve, et situation de validation,* Educational Studies in Mathematics 18, pp 147-176.

BARBIN E., 1995, *Saisir l'irrationnel : Dire, Montrer, Faire toucher, Tenir,* Revue de l'APMEP n°400.

BARON M., ROBERT A., 1993, *Métaconnaissances en I.A., en E.I.A.O., et en didactique des Mathématiques,* Cahier de Didirem (numéro spécial), IREM, Université Paris VII.

BERNARD, FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE, 1995, *Des fonctions et des graphes* , IREM de Montpellier.

BERNARD, FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE, 1995, *Arithmétique, le retour,* IREM de Montpellier.

BERNARD, FAURE, NOGUÈS, TROUCHE, 1996, *L'intégration des outils de calcul dans la formation initiale des maîtres,* Rapport de recherche IUFM/MAFPEN, IREM de Montpellier.

BRUILLARD E. et alii, 1995, *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes,* Les Dossiers de l'Ingénierie Educative, n°19, Mars 1995, CNDP.

CANET J.-F., 1994, *Exemple d'utilisation d'un Système de Mathématique Symbolique,* Mémoire de DEA, IREM de Montpellier

CANET J.-F., 1995, *Outil de calcul symbolique et enseignement des mathématiques,* Hypothèses, Bulletin scientifique du secondaire de Texas Instrument, n°8.

CANET J.-F., DELGOULET J., GUIN D., TROUCHE L., 1996, *Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir,* Repères-IREM n°24.

CHABERT J.-L., et alii, 1994, *Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce,* Belin.

CHEVALLARD Y., 1992, *Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques,* in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques, PUF.

Commission Inter-Irem Epistémologie et Histoire des Mathématiques, 1982, *La rigueur et le Calcul,* Cedic.

Commission Inter-Irem Mathématique et Informatique, 1994, *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques,* Actes de l'Université d'Été, Irem de Caen.

DAHAN-DALMEDICO A., PFEIFFER J., 1982, *Routes et dédales,* Axes

DIDIREM, 1996, *Impact de l'Intégration de systèmes de calcul symbolique dans l'enseignement sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire,* Rapport de recherche, Université Denis Diderot, Paris 7.

DEBRAY R., 1992, *Vie et mort de l'image, une histoire du regard en Occident,* Gallimard.

DOUADY R., 1986, *Jeux de cadre et dialectique outil-objet,* RDM 7-2, pp 5-31.

DREZEN G., 1996, *Recherche statistique orientée objets d'une typologie d'élèves utilisateurs de calculatrices graphiques et à système formel,* Mémoire de DEA, Université de Montpellier II.

DUVAL R., 1988, *Graphiques et équations : l'articulation de deux registres*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1, pp 235-253, IREM de Strasbourg.

FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE, 1993, *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, IREM de Montpellier.

FORTIN P, 1995, *Calcul formel, mythe ou réalité*, document d'accompagnement de la TI-92, Texas Instrument.

HIRLIMANN A. et alii, 1994, *Enseignement des Mathématiques et Logiciels de Calcul Formel*, Bureau des innovations pédagogiques et des technologies nouvelles, Ministère de l'Education Nationale.

HOUDE, MIEVILLE, 1993, *La pensée logico-mathématique*, PUF.

HOUDE O., 1995, *Rationalité, développement, et inhibition, Un nouveau cadre d'analyse*. PUF.

Hypothèses, 1995, Bulletin Scientifique du Secondaire de Texas Instrument, n°8.

IREM Strasbourg, 1983, *Mathématiques, Terminales C et E*, Istra.

KUNTZ G., 1993, *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, Repères-Irem n°11.

KUTZLER B., 1992, *The Future of Teaching Mathematics*, The International Derive Journal, John Berry Editor, Plymouth.

KUTZLER B., 1995, *Présentation de la TI-92*, Documents d'accompagnement de la TI-92, Texas Instrument.

LAKATOS I., 1976, *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Edition française 1984, Hermann

LELONG-FERRAND, ARNAUDIES, 1977, *Analyse, Tome II*, Collection U, Dunod.

MEINADIER, 1991, *L'interface utilisateur*, DUNOD

NOGUES M., 1993, *Le concept de fonction*, Mémoire de DEA, Montpellier II, IREM de Montpellier

NOUAZÉ Y., 1995, *Mathématiques et Calculatrices*, Premiers Cycles Universitaires, Ellipse.

OVAERT J.-L. et VERLEY J.-L., 1983, *Analyse, Volume I*, Cedic Nathan.

PITRAT J., 1990, *Metaconnaissance, Futur de l'Intelligence Artificielle*, Hermès.

POLYA G., 1962, *La découverte des Mathématiques*, Traduction française 1967, Dunod.

QUEAU P., 1993, *Le virtuel, vertus et vertiges*, Champ Vallon / INA.

ROBERT A., 1993, *Eléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices en 1ère S et Terminale C et E*, Repères-Irem n°11.

STRANSKY J., 1992, *Macintosh Uti Nec Abuti, Calculer*, Apple Computer France.

THEODOR R., 1989, *Initiation à l'Analyse Numérique*, Masson

TROUCHE L., 1992, *Calculatrices graphiques, Statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA, IREM de Montpellier.

TROUCHE L., 1995, *E pur si muove*, Repères-IREM, n°20.

TROUCHE L., 1996, *Masques* , Repères-IREM spécial Analyse n°23.

VEB Bibliographisches Institut, 1975, *Mathematics at a Glance*, Leipzig.