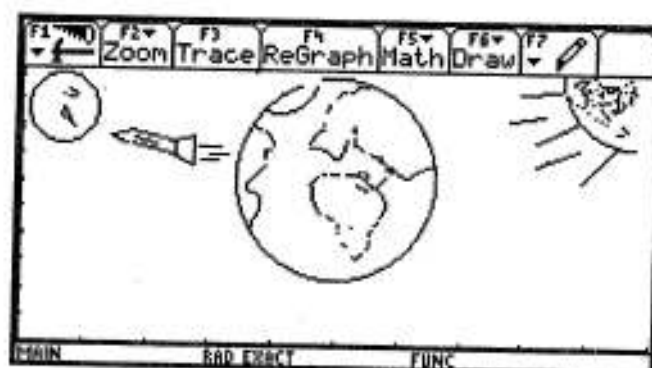
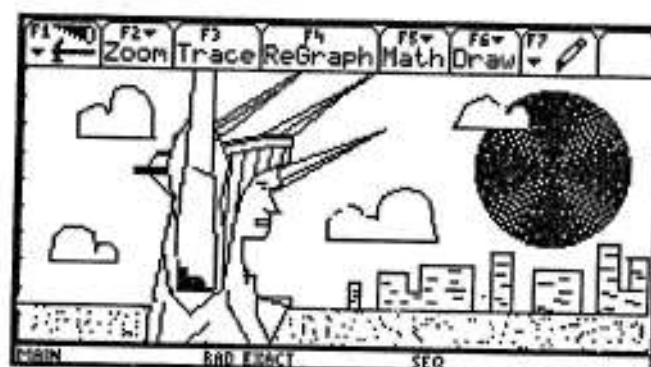


**INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**
Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon Montpellier cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 67.14.33.83 - 67.14.33.84
Fax : 67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr

Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles



**Pistes pour un
renouvellement**
Volume 1, côté cours.

Luc TROUCHE
Contributions de G. Drezen,
C. Faure et M. Noguès.

Juin 1996

Un même titre pour deux volumes

Petite chronologie...

Année scolaire 94/95. Texas Instrument annonce la sortie de nouvelles calculatrices, les TI-92, comportant, entre autres applications, un logiciel de calcul formel, Derive, et un logiciel de géométrie, Cabri.

La généralisation de tels outils dans les classes ne peut pas être sans effet sur l'enseignement des mathématiques...

D'où un intérêt assez vif pour ces calculatrices, en particulier parmi les équipes des IREM qui ont développé leur recherche autour de l'intégration des outils de calcul¹.

Un hasard, des nécessités

Intérêt partagé par le directeur du CRDP² de Montpellier : en Juin 95, J. Gaspari, propose d'équiper une classe de lycée en calculatrices TI-92, à titre expérimental.

Informé de ce projet par les Inspecteurs Régionaux de Mathématiques, Thierry Murgier et Daniel Boutet, je propose comme terrain d'expérimentation la classe de TS dont j'aurai la charge, à la rentrée suivante, au lycée Joffre.

Il reste à constituer une équipe de suivi : c'est possible, grâce à Dominique Guin, directrice de l'IREM³ de Montpellier, qui obtient des moyens horaires de la Direction des Lycées et Collèges (Ministère de l'Éducation Nationale) et du Groupe de Recherche Didactique (CNRS).

Le cadre était en place, pour un début de l'expérimentation en Septembre 1995.

Une machine, des acteurs

Il s'agissait donc d'évaluer l'effet des nouvelles calculatrices sur les processus d'apprentissage des mathématiques. Cela a nécessité un investissement important de tous les élèves d'une classe : il n'est pas évident d'apprendre à utiliser une machine complexe, d'accepter de se mettre en situation de recherche...

Les protagonistes essentiels de cette aventure sont donc les 34 élèves de T11S (option biologie) : Etienne, Elsa, Pierre, Julien, Tristan, Stéphanie, Sébastien, Alexandre, Caroline, Candice, Alice, Rachel, Patrice, Karen, Thierry, Erwan, Brigitte, Jérôme et Jérôme, Nikola, Aurélie, Guillaume, Hakim, Cécile, Christelle, Aline, Guilhem, Vincent, Cyril, Damien, Laurent, Fabienne, Michaël et Nathalie, qui ont tous accepté de jouer le jeu.

Un auteur, des auteurs

Les résultats de cette année expérimentale ont été réunis dans deux volumes :

¹ Entre autres, l'équipe Analyse de l'IREM de Montpellier, dont on trouvera les publications référencées dans la bibliographie, en fin de volume. Petite publicité légitime...

² CRDP : Centre Régional de Documentation Pédagogique.

³ IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

- le volume 1, **pistes pour un renouvellement** ("côté cours"), qui reprend le versant mathématique (éléments de cours, énoncés et correction des TP...) de l'expérimentation ;

- le volume 2, **bilan d'une expérimentation** ("côté jardins"), qui essaie de cerner l'évolution des élèves, l'appropriation de l'outil, les réussites partielles et les difficultés...

Il est clair cependant que les questions mathématiques et didactiques ne peuvent pas être aussi mécaniquement séparées. D'ailleurs on trouvera les deux aspects, d'une certaine façon, dans les deux volumes. Mais cette séparation partielle devrait permettre une lecture mieux organisée, un suivi plus facile du travail réalisé.

Au lecteur (à qui nous ne saurions trop conseiller de se procurer les deux volumes !...) d'opérer les allers-retours nécessaires !

Ces deux volumes sont écrits d'une seule plume : parce que j'étais au coeur du dispositif, comme professeur de la classe, et surtout parce que je bénéficiais de plus de temps, j'ai pu rédiger cours et TP, et consigner au fur et à mesure les observations de l'équipe.

Mais ce travail n'a été possible que parce qu'une équipe existait, composée de Maryse NOGUES, professeur de Mathématiques au Lycée Louis Feuillade de Lunel et Christian FAURE, professeur de Mathématiques au lycée Joffre de Montpellier (tous deux membres de l'équipe Analyse de l'IREM de Montpellier). A ce noyau initial s'est joint Gaëtan DREZEN, étudiant en didactique des disciplines scientifiques, dont le mémoire porte justement sur certains aspects de cette expérimentation. Enfin Dominique GUIN, directrice de l'IREM, a fait bénéficier l'équipe de ses critiques avisées, et a pu établir des passerelles avec les autres équipes travaillant sur le même thème.

Sans leurs critiques, leurs propositions (constructives !), leur relecture attentive des manuscrits, sans le travail collectif de cette année, ces documents n'auraient pas pu exister...

Un mot pour finir sur le titre donné à ces deux volumes : *Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles*. Le début est sans ambiguïté : je me place du point de vue des professeurs qui enseignent, ou sont intéressés par l'enseignement des mathématiques dans les sections scientifiques de lycée.

La suite du titre est plus discutable. J'aurais pu choisir *Enseigner les mathématiques avec un système de mathématique symbolique* (ce qui reste d'ailleurs en haut de page), en donnant à l'expression *Système de Mathématique Symbolique* le sens rappelé par J.-F. Canet [Canet, 1994] : "le terme *système de mathématiques symboliques* est utilisé pour définir les calculatrices et les ordinateurs offrant, dans un même environnement, des possibilités pour traiter des calculs numériques, des représentations graphiques, et des manipulations symboliques".

L'expression me paraissait cependant trop peu explicite pour la majorité des enseignants. L'expression "calculatrice graphique et formelle" me semble plus claire, pour le moment : elle fait référence à un objet connu, les calculatrices graphiques, et signale l'élément nouveau : le calcul formel.

D'où une solution de compromis : un titre, pour les spécialistes, en petit caractère en haut de page, et l'autre titre pour tous, en milieu de page. Utile introduction aux changements de points de vue !

Luc TROUCHE
Equipe ERES (Etudes et Recherches sur l'Enseignement Scientifique)
Université Montpellier II



Introduction

*Nous avons de diverses et curieuses Horloges,
et d'autres qui produisent des Mouvements Alternatifs...
Et nous avons aussi des Maisons consacrées aux Erreurs des Sens, où nous réalisons avec succès tout
genre de Manipulations, Fausses Apparitions, Impostures et Illusions.
Ce sont là, ô mon fils, les richesses de la Maison de Salomon.
Francis Bacon, cité par Umberto Eco, dans Le Pendule de Foucault.*

Enseigner...

Il n'y a pas qu'une façon d'enseigner les mathématiques. Heureusement !

Certains enseignants sont passionnés par l'histoire de leur discipline, d'autres par le développement de processus de recherche dans la classe, d'autres encore par l'approfondissement de la rigueur, etc. On pourrait poursuivre la liste, envisager des combinaisons d'intérêts divers...

L'important me semble, quelle que soit la conception que l'on a de notre métier, de considérer les élèves qui nous sont confiés comme agents actifs de leur propre apprentissage.

Cette idée n'implique pas "naturellement" d'intégrer les nouvelles calculatrices dans notre travail. Elle n'est cependant pas étrangère à cette intégration.

Nous vivons dans une société de l'image, et même de l'image virtuelle. Les calculatrices dont disposent nos élèves ne sont que l'ombre portée, dans nos classes, d'un phénomène beaucoup plus vaste. La confusion entre une fonction et la représentation qu'en donne une calculatrice n'est que le prolongement d'une confusion plus générale entre le monde, et l'image du monde.

N'y a-t-il pas là une responsabilité du professeur de mathématique d'éducation au regard, à la prise de distance avec l'écran, à la combinaison des différentes sources d'information ?

Philippe Quéau ⁴ écrit dans Télérama du 20 Octobre 1993 : "Il est aussi vital d'apprendre aujourd'hui à nos enfants - tous nos enfants - à manier les outils virtuels qu'il l'était, au XIX^{ème} siècle, d'apprendre l'arithmétique et la grammaire aux petits paysans. C'est à l'Education nationale que revient cette lourde tâche. Après, c'est trop tard".

Intégrer...

Ce sont ces idées générales qui ont guidé les expériences antérieures d'intégration de calculatrices graphiques dans les classes, et l'expérience qui s'est déroulée pendant l'année scolaire 1995/1996.

Que veut dire "intégration" ?

⁴ Directeur de recherche à l'Institut National de l'Audiovisuel, auteur de *Le Virtuel, vertus et vertiges*.

C'est un mot plus fort qu'il n'y paraît à première vue. Pour comprendre un mot, on peut essayer de faire un pas de côté, en considérant la classe de situations à laquelle il s'applique.

On parle par exemple "d'intégration des immigrés". Cela manifeste d'abord une situation d'"étrangeté" : on intègre ce qui est "en dehors". Cela manifeste aussi une conception (en principe) de l'action "faire rentrer à l'intérieur". Il n'y a pas qu'une façon en effet de "faire rentrer" :

- "l'assimilation", dont on parlait au temps des colonies, veut dire que l'étranger se fond (c'est à dire disparaît en fait) dans la collectivité ;
- "l'insertion" signifie qu'on n'est plus étranger à l'extérieur de la collectivité, mais que l'on est (toujours) étranger à l'intérieur de la collectivité ;
- l'intégration signifie au contraire, au moins dans son sens étymologique, qu'il y a mélange, que chacune des parties est transformée par l'apport de l'autre.

C'est cette conception qu'on tente de faire prévaloir ici. L'intégration d'un outil dans la classe change les conditions de l'enseignement, mais son intégration change aussi l'utilisation habituelle par les élèves de ces machines.

L'intégration, cela veut dire d'abord une présence permanente des calculatrices pour les élèves, et pour le maître, sous la forme d'une calculatrice rétroprojetable. Cela veut dire la combinaison permanente de l'écrit et de l'écran (cahier/ calculatrice pour l'élève, tableau/écran pour le maître).

Cela veut dire en fait bien plus. Les calculatrices utilisées, TI-92, possèdent, outre une application graphique, un logiciel de calcul formel, Derive, et un logiciel de géométrie, Cabri (le travail réalisé cette année ne s'est appuyé que sur Derive). Cela veut dire que la calculatrice réalise désormais ce qui était au coeur de nombreuses séances de Mathématiques (calcul de dérivées, de limites, résolution d'équations...).

Intégrer cet outil implique donc de redéfinir les équilibres entre apprentissages élémentaires, recherche, contrôle des résultats. Et même de redéfinir les programmes, ce qui est une autre histoire...

Combiner...

C'est dire que le travail engagé cette année soulève de nombreuses questions, sur lesquelles on dispose certes de quelques références :

- qu'est ce que prouver veut dire ? [Balacheff, 1987]
- quel est le statut des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques ? [Chevallard, 1992]
- comment organiser les allers-retours entre les différentes représentations d'un même objet, comment organiser le passage de l'outil à l'objet mathématique ? [Duval 1988, Douady 1986].

Mais il a fallu aussi improviser, ouvrir un certain nombre de pistes.

L'enseignement a été organisé cette année en trois volets :

- le cours lui-même (!).

La présence dans la classe des TI-92 a imposé un renouvellement dans sa structure même : au niveau du contenu prévu, mais surtout au niveau des adaptations nécessaires, à tout moment. Chaque surprise apparue à l'écran (et il y en eut de nombreuses...) imposait un détour théorique, qui constituait en fait un approfondissement de la notion abordée. On trouvera une illustration de cette démarche dans le chapitre 2 de ce volume, relatif au cours sur les intégrales ;

- les travaux pratiques.

Les élèves de la classe disposaient d'une heure supplémentaire, chaque semaine, pour un travail de recherche en équipe de deux. Il y eut 18 TP cette année. Les 10

premiers TP ont été traités avec des calculatrices graphiques, ce qui a permis de roder le dispositif, avant l'arrivée des TI-92. Le contrat a été négocié, et renégocié avec les élèves tout au long de l'année : il s'agissait pour eux de se pencher sur une question problématique, et de rédiger un rapport relatant échecs et succès, impasses et erreurs. Rien d'évident à cela ! On trouvera le texte des 18 TP, et le retour critique en classe, une semaine après, en forme de "Vues et changements de points de vues", dans le chapitre 4 de ce volume ⁵;

- un problème ouvert, dont le traitement nécessite du temps. Il a couru sur 3 mois. Quel allait être l'effet d'un outil puissant sur les stratégies des élèves ? On en parlera dans le chapitre 5...

Signalons enfin une difficulté particulière : la classe dans laquelle tout ceci s'est passé est une classe de Terminale. La question de l'examen final ne pouvait être éludée... Il a fallu d'abord persuader les élèves que ce qui était fait n'était pas inutile, et que le travail de recherche débouchait sur une compréhension plus profonde des choses. Il a fallu aussi distinguer soigneusement ce qui relevait du travail de recherche, avec ce que cela suppose de désordre, et ce qui relève du travail d'examen, avec ce que cela exige d'ordre. On trouvera dans le chapitre 3 les indications précises qui ont été données à ce sujet, autour de la résolution de problèmes "type bac".

D'une introduction à l'autre...

Ce volume s'ouvre sur un premier chapitre d'introduction de la machine dans la classe, qui constituera ainsi pour le lecteur une entrée naturelle dans le travail réalisé.

Rappelons qu'il s'agit d'un premier travail, qui demande à être complété, précisé, critiqué.

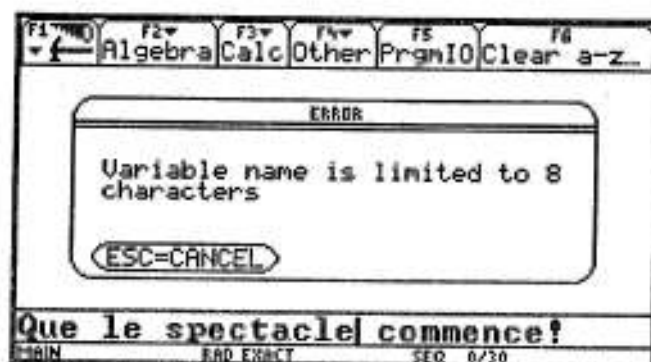
Mais s'il donne l'envie au lecteur de "passer à l'acte", ce sera une réussite : pour tester quelques unes des idées présentées ici, il suffit d'avoir (ou d'emprunter) une TI-92 rétroprojetable, d'apprendre à la découvrir, et de l'apporter en classe, au début de temps en temps, puis plus régulièrement. C'est la stratégie de l'immersion douce...

Et, à la différence de ce qui s'est passé pour les calculatrices graphiques, cela nous permettrait d'être en avance (un peu) sur nos propres élèves !

Prêts ?

On. Enter...

Luc TROUCHE
Juin 1996



⁵ On trouvera en particulier à propos du TP 14 quelques réflexions sur les problèmes de programmation. Comme c'est le seul endroit où il en sera question, il est bon que le lecteur intéressé sache où aller le trouver...



Sommaire

1.Introduction de la machine	p	9
2.Un cours "particulier"	p	19
3.Problèmes "type bac"	p	53
4.1, 2, 3, de nombreux TP	p	75
5.Un problème très ouvert	p	225

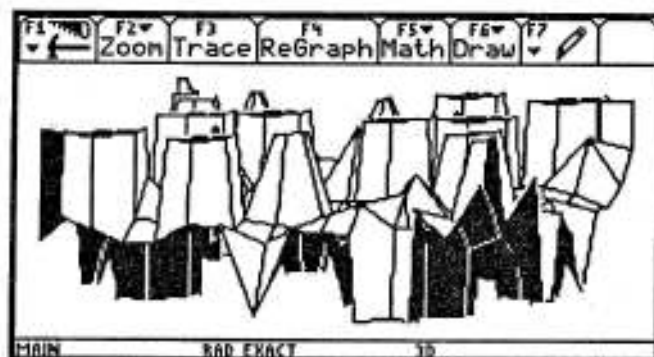
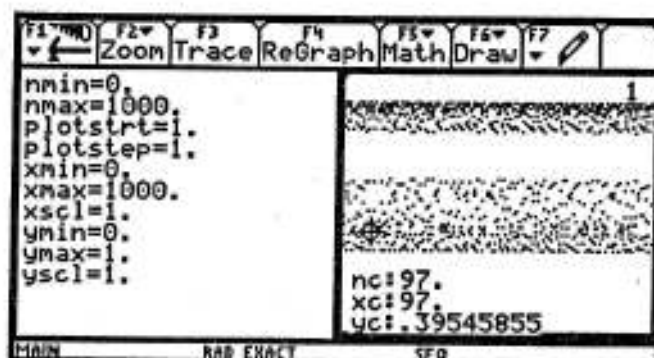


Illustration de la couverture
Jérôme MONNIER
Alexandre COHEN
Illustration de cette page
Rachel HOUSSIN





1. Introduction de la machine



On ne trouvera pas ici de "mode d'emploi" d'une TI-92..
Mais simplement une description des étapes de son
introduction dans la classe.
On trouvera dans la bibliographie d'utiles références
[Canet 1995, Fortin 1995, Kutzler 1995]



"Ces merveilleux fous volants,
dans leur drôle de machine..."

L'introduction de la TI-92 dans la classe s'est faite en deux temps :

- fin Novembre, on dispose de trois calculatrices, dont une rétroprojectable ;
- fin Décembre, chaque élève reçoit "sa" calculatrice.

Chronique d'une découverte mouvementée.

Des projets...

Mardi 28 Novembre, les 3 premières TI92 sont introduites dans la classe sous la forme suivante :

- je diffuse aux élèves un mode d'emploi allégé [Delgoulet, 1996];
- je mets à la disposition des élèves un dossier avec des articles de présentation de la machine ;
- chaque heure, six élèves disposent, par groupe de deux, d'une TI 92. Deux d'entre eux sont chargés de la conduite de la rétroprojectable ;

à la (dure) réalité

Bien entendu, les choses se passent rarement comme on imagine qu'elles se passeront. J'explique le dispositif aux élèves, je donne deux calculatrices à deux binômes, et j'installe la rétroprojectable. Hélas, le rétroprojecteur du lycée ne marche pas. Simultanément, un des binômes me signale qu'une des calculatrices ne marche pas non plus (faux contact).

Je décide de régler d'abord le problème du rétroprojecteur. Un élève va en chercher un autre : il ne marche pas non plus. Un troisième : pas plus de succès. Le CPE du bâtiment, appelé à l'aide, m'informe alors que les prises de courant ne fonctionnent pas dans la classe en question. Donc changement de classe (il est 8h30). Dans la nouvelle classe, les prises ne fonctionnent pas plus. Conjecture du CPE : aucune prise ne fonctionne à l'étage. Descente donc de la classe au rez-de-chaussée (il est 8h45). Un rétroprojecteur est installé : il ne marche pas plus. Nouvelle conjecture : c'est cette fois-ci le rétro qui est en panne. Un autre rétroprojecteur est amené. Miracle, il marche.

La tablette TI92 est alors placée, je m'apprête à dire deux mots de présentation. Un petit bruit sinistre "pop!" : c'est la lampe du rétro qui a rendu l'âme. Il est 9h. Fin de l'heure. Cela ressemble à un film burlesque, mais cela s'est passé ainsi...

Je décide d'en rester là pour la matinée, et reporte à l'après-midi l'introduction des machines. Cours sur les fonctions puissances $x \rightarrow x^a$, et dessin du "plumeau" que les élèves observent sur leur calculatrice graphique ordinaire.



Petit problème, un binôme a, dans la confusion, gardé une TI-92, la manipule, et commence à poser des questions sur son fonctionnement, ce qui ajoute au désordre d'ensemble...

L'après-midi (encore deux heures de cours), fonctionnement en travail dirigé : tout marche, la TI92 rétroprojetable aussi. J'indique que, tant que toutes les machines ne seront pas arrivées, on n'utilisera que l'application "graph", qui fonctionne comme sur les calculatrices habituelles, et pour le calcul, la touche "solve" et la touche qui dérive les fonctions, qui semble fasciner les élèves.

Premier exercice : Résolution de l'équation $2^x + 3^x + 4^x = 5^x$.

Première localisation de ce qui semble être une solution unique, entre 2 et 3, par observation du graphique. Ici, les TI 92 fonctionnent aussi bien que les autres machines. Puis mobilisation, pour la TI92, de la touche "solve", qui donne une unique solution (toutes les TI92 ont été placées en mode "Auto", je n'ai pas encore abordé les questions de calcul exact, ou approché). Question : est-ce que la réponse de la TI92 permet d'affirmer qu'il n'y a qu'une solution ? Perplexité, que je laisse en l'état. De toute façon, je suggère une étude théorique.

Tous les élèves étudient la fonction $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x - 5^x$. Emerveillement des élèves qui ont une TI 92 : ils obtiennent la dérivée de 2^x , $\ln 2 \cdot 2^x$. Le problème est évidemment qu'ils n'en font pas grand-chose ensuite...

Pour débloquer la situation, je suggère d'étudier $g(x) = \frac{f(x)}{5^x}$, pour remplacer la différence entre deux fonctions croissantes par la différence entre une fonction monotone et une constante. On étudie alors $g(x) = 0,4^x + 0,6^x + 0,8^x - 1$.

La somme de fonctions décroissantes est décroissante, on dispose ainsi d'une fonction strictement décroissante, et continue.

Nouvelle question : comment formuler la demande de limites pour la TI 92 ? Je suis entraîné plus loin que je ne le souhaitais. Les élèves ont vu la commande "limit", je donne la syntaxe, d'où le résultat. Je fais remarquer que les résultats du cours donnent aussi le résultat, et que c'est ce résultat qui devra être évoqué le jour du bac...

Bref, l'exercice se termine par l'évocation du théorème de la bijection, et la certitude ainsi d'avoir localisé l'unique racine de l'équation.

Deuxième exercice : Quel est le plus petit entier à partir duquel $1,01^n > n$ 1995 ?

On voit tout de suite que pour $n = 1$, l'inégalité est vérifiée, mais que tout de suite après, cela se gâte, et la fonction puissance semble dépasser de façon irrémédiable la fonction exponentielle. Les élèves savent qu'à terme, la fonction exponentielle devra reprendre le dessus. Suggestion : regarder sur la TI 92 où les courbes se recoupent. Hélas, la mobilisation de l'option "solve" ne donne qu'une solution, juste après 1, c'est-à-dire la solution que tout le monde avait "vu", et tout de suite...

Cette observation surprend, je crois, profondément la classe, et apporte une réponse à la question posée peu avant : "la nouvelle calculatrice donne-t-elle forcément toutes les solutions ?"

Retour au problème théorique. La suggestion de passer au logarithme vient assez naturellement, car les précédents TP avaient insisté sur ce changement de point de vue.

A nouveau théorème de la bijection, localisation grossière de la deuxième solution, défi lancé à la classe : quel est le plus petit entier qui répond à la question ? C'est un utilisateur d'une Casio graphique (Damien le bricoleur) qui trouve le premier, question d'habitude...

L'après-midi s'achève par une synthèse sur les fonctions exponentielles de base a , et une comparaison des fonctions puissances (qui recrutent parmi elles leur réciproque) et les fonctions exponentielles, qui recrutent leur réciproque parmi les fonctions logarithmes. Remarques sur les points cruciaux : (1, 1) pour les puissances, (0, 1) pour les exponentielles, (1, 0) pour les logarithmes.

Multitude de questions en fin de séance : peut-on relier la calculatrice à un ordinateur ? Deux calculatrices entre elles ? Y a-t-il un traitement de texte ? Pourra-t-on en disposer au bac ? Pendant l'épreuve de Physique ?...

Fin provisoire

Le lendemain, leçon sur les dénombrements. Fait remarquable : beaucoup d'élèves demandent à bénéficier d'une TI-92 pendant l'heure. Le cours aborde le calcul des arrangements. Recherche dans les différentes machines des procédures de calcul.

Très grande surprise des manipulateurs de TI 92 : la machine fait des calculs sur des lettres ... Deuxième surprise : la machine n'affiche pas les mêmes résultats que le professeur. Ainsi, pour $\frac{1}{n!} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{3}{(n+1)!}$, la TI 92 choisit comme dénominateur commun $n!$. Je pose la question : est-ce le même résultat ? La réponse n'est pas facile...

En conclusion de ces deux jours d'introduction, quelques remarques :

a) la machine suscite un réel intérêt, les élèves se disputent quasiment pour en disposer, et attendent impatiemment les machines dont ils pourront disposer complètement ;
b) les performances de la machine, surtout en ce qui concerne le calcul formel, surprennent beaucoup les élèves. Les premières observations que je fais, forcément très partielles, sont que cela semble créer, ou renforcer deux comportements :

- le résultat théorique donné (pour les limites par exemple) dispense d'une justification ;

- le résultat affiché (pour la résolution d'une équation) donne nécessairement la totalité de la réponse ;

c) les investigations rapides des élèves obligent d'aller plus loin que prévu dans le "dévoilement" des capacités de la machine ;

d) la multiplicité des questions posées, aussi bien techniques que mathématiques (identification de résultats affichés) font pression pour une dispersion et un éclatement des réponses.

Tout ceci impose un cadrage très précis des prochaines séances...

La semaine suivante, un bac blanc est prévu. Cela laisse une quinzaine de jours de réflexion avant l'arrivée de l'ensemble des calculatrices.

Nouveau rebondissement

Grèves lycéennes, puis grèves enseignantes. Pendant quasiment quinze jours, rupture du cours normal. Le bac blanc se déroule cependant normalement, entre deux grèves.. La grève s'arrête ...au moment où les machines arrivent.

Le 19 Décembre, les élèves reçoivent leur machine, avec le mode d'emploi volumineux. Pour donner une certaine solennité à la prise en charge individuelle, chaque élève remplit, et me remet le certificat ci-dessous :

Feuille de prise en charge

Montpellier, le... Décembre 1995

Je soussigné,, élève de la classe T11S du Lycée Joffre de Montpellier, demeurant à reconnaît avoir reçu en prêt ce jour une calculatrice Texas Instrument 92.

Je rendrai cette calculatrice dans le même état à Monsieur Trouche, professeur de Mathématiques de la classe, à la fin de cette année scolaire, et au plus tard le lendemain des épreuves du baccalauréat de Juin-Juillet 1996.

Puis s'installe un joyeux brouhaha. J'ai prévu de laisser les élèves découvrir eux-mêmes leur machine, avec des consignes assez floues : retrouver les différentes fonctions qui ont été présentées lors des séances avec la calculatrice rétroprojetable. En fait, l'exploration part dans tous les sens : les élèves les plus habiles programment des surfaces en trois dimensions, les plus filous essaient de taper un programme de jeu (Tétris), les plus rétifs en sont encore à identifier les touches essentielles, et à essayer de comprendre les messages que la machine leur renvoie.

Les questions sont multiples, partent dans tous les sens. Les élèves finissent l'heure surexcités... et le professeur épuisé.

Pour le lendemain, je leur demande de lire les feuilles de présentation de la TI-92 qui leur avaient été distribuées un mois plus tôt. Je leur déconseille de s'attaquer, pour le moment, au mode d'emploi officiel de la TI92, trop volumineux.

Reprise en main

Le lendemain, Mercredi 20 Décembre, deux constatations :

- les élèves ont tous leur calculatrice (ce qui constitue en soi un exploit : d'habitude, 2/3 de la classe porte sa calculatrice en classe) ;
- ils ont tous lu les feuilles de présentation, et savent retrouver assez facilement les fonctions essentielles de la machine.

Pour éviter la joyeuse pagaille de la veille, je distingue désormais 4 types d'utilisation de la machine :

- le type 0 : les machines sont fermées (pendant certaines phases de cours, ou de travaux de conjectures - ou de calculs- sans calculatrice) ;
- le type 1 : les machines fonctionnent, mais coordonnées avec la rétroprojetable. Les élèves exécutent donc les mêmes manipulations, et au même moment ;
- le type 2 : les machines sont en utilisation libre temporairement (exercice en période de cours) ;
- le type 3 : les machines sont en utilisation libre tout court (lors des TP, ou à la maison).

J'explique que ces distinctions sont strictes, et que c'est absolument nécessaire pour éviter la dispersion, et la perte en chemin des élèves les plus lents, et des élèves "vagabonds".

Je fixe ensuite le cadre d'utilisation de la machine, en insistant sur deux éléments :

- il n'y a pas d'utilisation de la machine indépendamment d'un travail de réflexion générale. Il faut donc combiner le travail machine et le travail papier/crayon. Cela nécessite une organisation spatiale, sur la table de travail, de la machine, et du cahier (ce qui n'est pas évident du fait du volume de la machine... et de la petitesse des tables). Je précise que c'est ce que je fais moi-même en combinant les résultats de la machine sur l'écran, et des écritures sur le tableau ;
- la machine aussi permet un travail d'interaction. On travaillera en général avec un écran partagé (gauche-droite, ce qui permet de bénéficier de deux petits écrans carrés). On pourra ainsi combiner des représentations différentes d'un même objet (graphique, tableau de valeur, formule pour une fonction par exemple).

On passe alors en travail type 1, pour une étude de suite. Les suites ont été introduites la veille en cours. Les élèves ont déjà rencontré les suites définies par leur terme général, et les suites définies par récurrence. Il ne s'agit pas ici d'avancer le cours, mais de familiariser les élèves avec l'utilisation de la calculatrice, en explorant des objets qui seront utiles pour les études théoriques à venir.

Escargots et compagnie

Je propose aux élèves l'étude des suites dites de Feigenbaum⁶, de la forme

$$u_0 = 0,1$$

$u_{n+1} = au_n (1 - u_n)$, avec a prenant successivement les valeurs 1, 6, puis 2, 5, et enfin 3, 6.

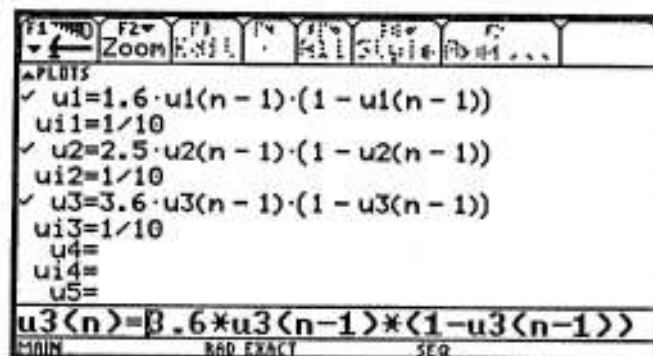
Je présente d'abord le mode Sequence (c'est-à-dire suite). Une difficulté de notation sérieuse : le constructeur a choisi de présenter le fichier de suites comme le fichier de fonction. Ainsi u_1 ne représente par u_1 , c'est à dire le premier terme de la suite u , mais représente la première suite du fichier. La première suite de Feigenbaum envisagée va donc s'écrire :

$$u_1(n) = 1,6 * u_1(n-1) * (1 - u_1(n-1)).$$

La sortie écran ne donne plus que $u_1 = 1,6 * u_1(n-1) * (1 - u_1(n-1))$, ce qui est assez difficile à interpréter par les élèves.

Quant au terme de rang 0, c'est pire, puisqu'il s'écrit $u_1 = 0,1$.

Les trois suites écrites donnent donc ceci :



Les élèves ont beaucoup de difficultés à rentrer ces expressions (en particulier la présence, ou non, du signe * (multiplié par) pose problème. Cependant le temps passé à éclaircir ces points ne paraît pas perdu :

- cela établit un parallèle tout à fait profitable entre suites et fonctions : $Y_1(x)$ a exactement la même signification que $u_1(n)$;
- cela établit une distinction tout aussi profitable entre indice et facteur : $u_1(n)$ ne contient pas de multiplication, $1,6 u_1(n)$ en contient une.

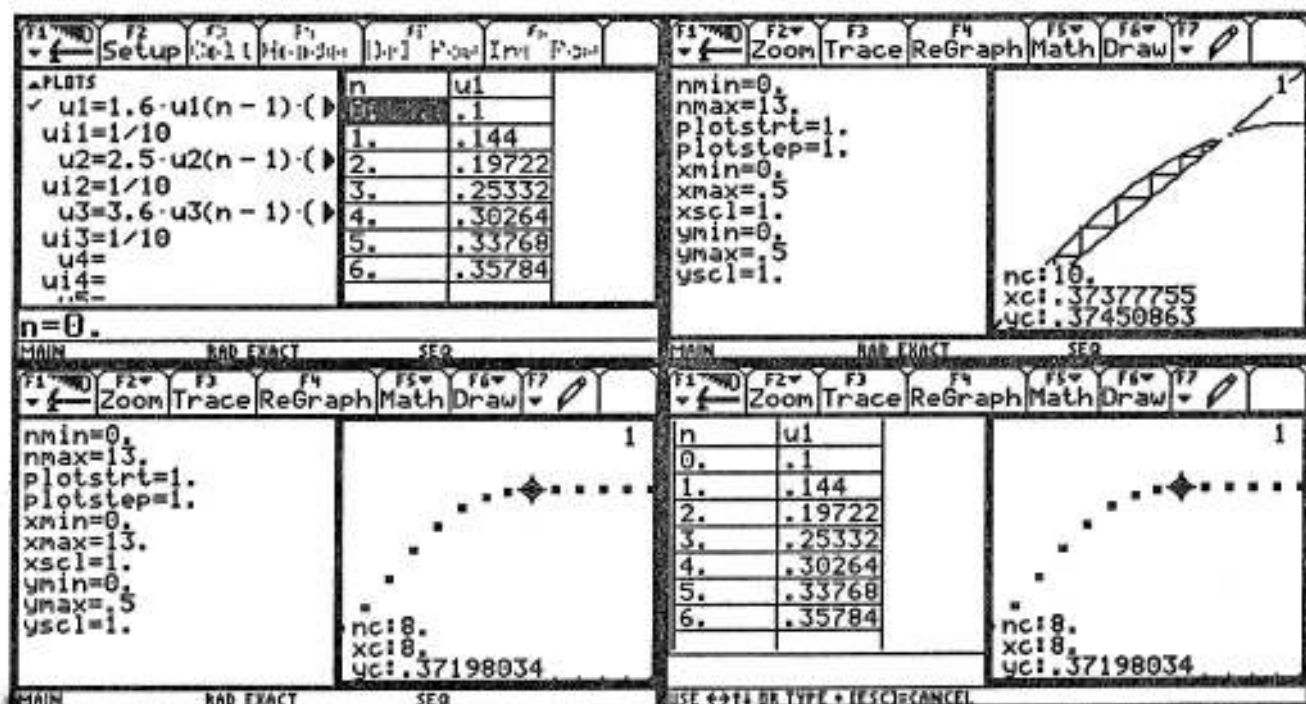
Je présente ensuite les différentes techniques d'observation du comportement des suites. On peut observer numériquement le comportement, de deux façons : en calculant, dans l'application initiale $u_1(10)$ si on veut le 10ème terme de la suite u_1 , ou en demandant un tableau de valeurs, pour lequel on peut choisir le premier terme, et le pas.

On peut observer graphiquement le comportement de la suite de deux façons : le mode Time affiche, pour une fenêtre donnée, les points de coordonnées $[n, u(n)]$. Le mode Web ("toile d'araignée") permet de visualiser, pour les suites récurrentes seulement (du type $u_{n+1} = f(u_n)$), la construction de la suite s'appuyant sur la courbe de la fonction f , et sur la droite d'équation $y = x$.

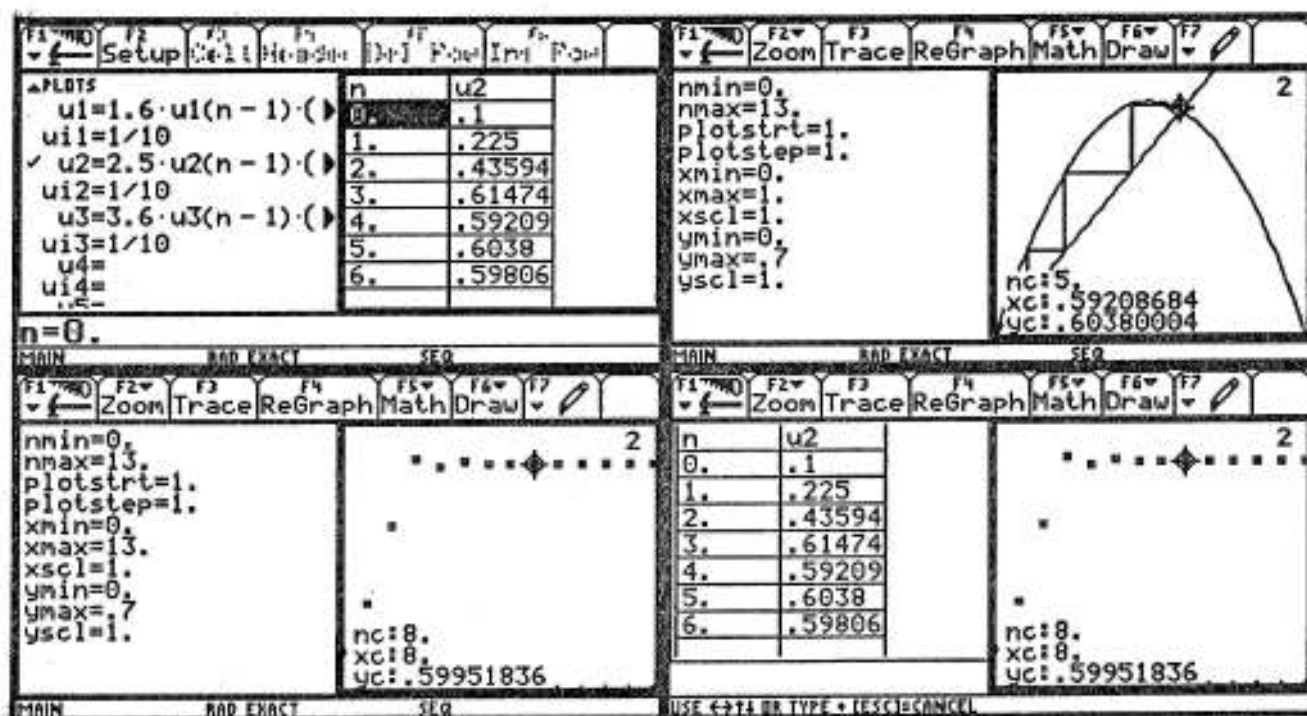
On passe alors à l'observation "type 1" : tout le monde suit et reproduit ce qui est fait sur le retroprojecteur.

Seule la première suite est sélectionnée, les autres sont mises "en sommeil".

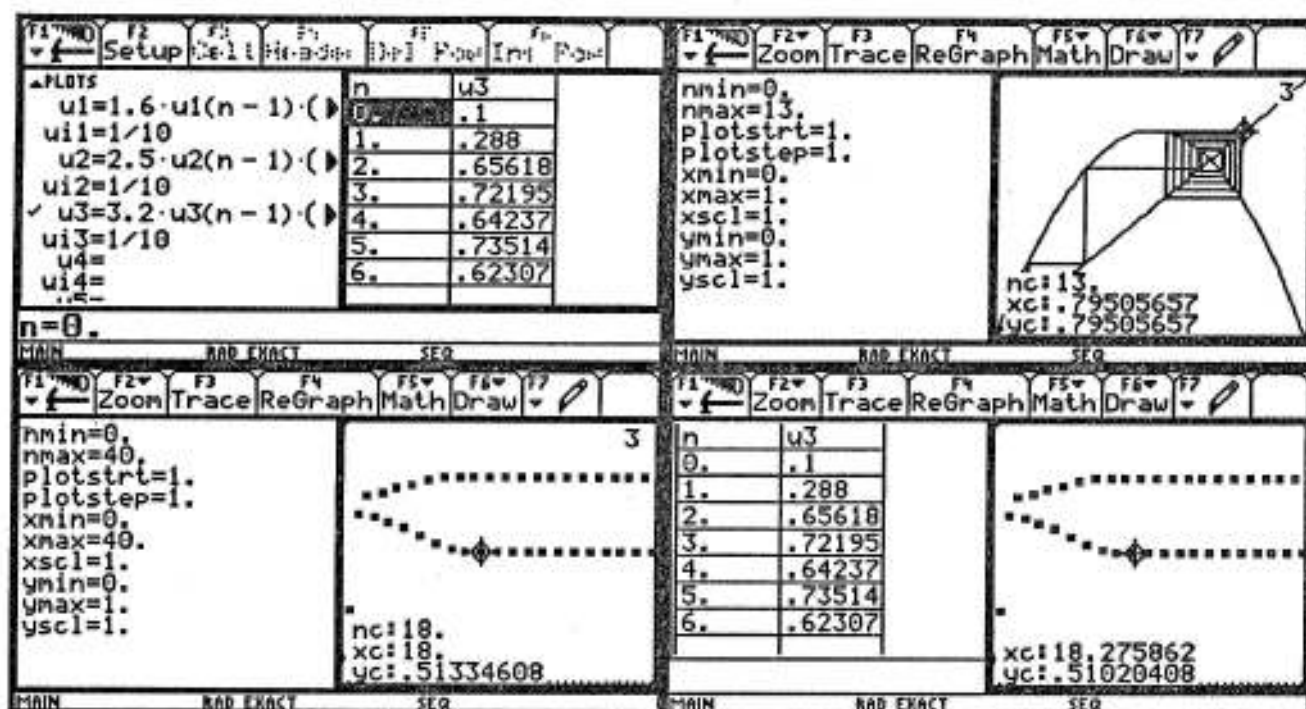
⁶ Sur ces suites, on pourra se reporter utilement à la brochure du groupe Analyse de l'IREM de Montpellier *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, 1993



On voit ci-dessus les différentes images obtenues par les élèves ; on imagine les interactions, les conjectures possibles, ainsi que les problèmes posés. Le travail coordonné fonctionne très bien, quelques élèves ont des problèmes de manipulation, et se font aider par leurs voisins. Le fait que tous les élèves aient la même calculatrice se révèle être un atout puissant. Il demeure cependant un écart important entre deux types d'élèves : ceux qui sont à l'aise dans la manipulation, et disposent ainsi de temps pour faire des conjectures, et les autres, qui se concentrent sur les tâches de manipulation de la machine. Ensuite, on passe en "travail de type 2". Les élèves sont appelés à reproduire les mêmes manipulations pour les deux suites restantes de Feigenbaum. Je passe dans les rangs pour dépanner. Mais tout se passe dans l'ensemble assez bien.



Enfin pour la dernière suite (avec $a = 3, 2$).



On peut voir ici, comme les différentes approches, en particulier graphiques, sont complémentaires...

Les questions ici sont nombreuses : que devient la suite ? Peut-on parler d'une double convergence ? La suite des termes pairs (respectivement impairs) va-t-elle devenir stationnaire à partir d'un certain moment ?

Toutes ces questions sont examinées, des réponses provisoires sont données, préparant un retour théorique plus approfondi à la rentrée.

Le cours s'achève là, avec un dernier rendez-vous pour le lendemain, Jeudi 21 Décembre, où aura lieu le premier TP (TP n°11) avec calculatrice TI 92, et en même temps dernier TP de l'année (se reporter au chapitre consacré au bilan des TP).

Comme travail de vacances, je distribue aux élèves une brochure de présentation de la TI92 assez légère (30 pages), rédigée par Bernard Kutzler (responsable de la diffusion du logiciel Derive, implanté sur la calculatrice) [Kutzler, 1995]. Les élèves ont pour mission de lire la brochure, calculatrice en main.

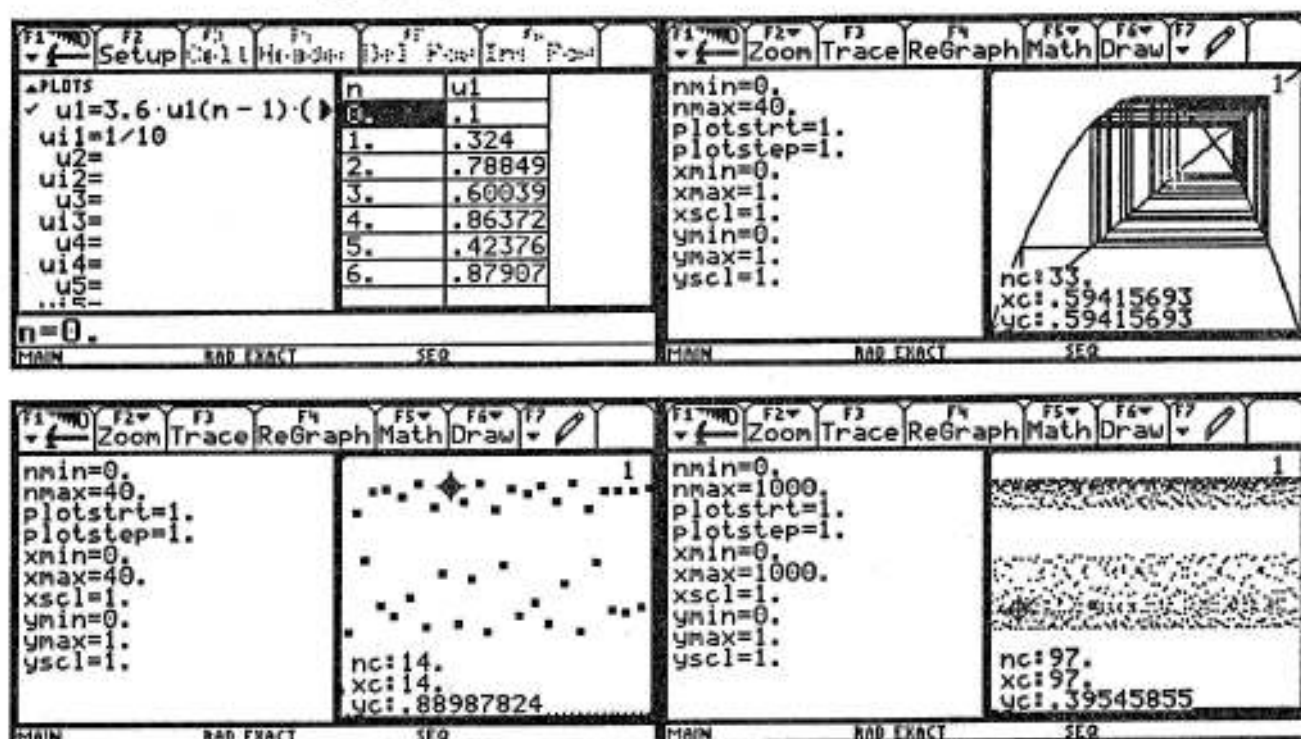
Ainsi prennent fin les formalités de prise en main de la calculatrice. J'en tire quatre leçons :

- un grand intérêt des élèves pour cette calculatrice ;
- une certaine facilité d'adaptation ; mais il faut rappeler que depuis le début de l'année, le travail est fait, en cours comme en TP, en intégrant les calculatrices graphiques (et plus récemment avec une calculatrice TI-92 rétroprojectable). Le terrain avait été bien préparé ;
- un immense confort pour le professeur de travailler avec des élèves qui sont tous dotés du même matériel ; l'uniformisation des consignes rend le cours plus facile ;
- une nécessité de revoir à peu près complètement la conception des cours, si l'on veut intégrer cette calculatrice avec une grande partie de ses potentialités. Ainsi, pour le cours sur les suites, si j'avais eu à temps ces machines, j'aurais commencé par un travail beaucoup plus long de conjectures, d'observations, de confrontation des observations graphiques et numériques...

C'est ce que je compte faire, pour le prochain "grand morceau théorique", le cours sur les intégrales, qui débutera fin Janvier.

Pour finir, une remarque : la prise en main des machines se fait aussi pour les professeurs animateurs... Lors de sa réunion du Jeudi après-midi qui suit, l'équipe de l'Irem qui suit l'expérience observe d'autres suites de Feigenbaum, et, comme les élèves, observe et conjecture..

Ci-dessous, quelques points de vue sur la suite de Feigenbaum avec $a = 3,6$.



Le dernier graphique, en mode Time, permet d'observer les valeurs des mille premiers termes de cette suite.

On peut faire une conjecture sur le regroupement des termes de rang pair (resp. des termes de rang impair) dans une bande, et une autre sur le fait que tout point de ces bandes serait valeur d'adhérence de la suite ...

A suivre, pour la validation, ou l'invalidation, de ces conjectures. Mais cela est une autre histoire, qui sort du cadre du travail de la classe.

Ce qui est assez étonnant, c'est que cette recherche, en fait, utilise des fonctionnalités de la machine qui existaient déjà sur les calculatrices graphiques ordinaires.

L'équipe d'enseignants qui découvre la machine, comme les élèves, récupère d'abord ses points de repère...

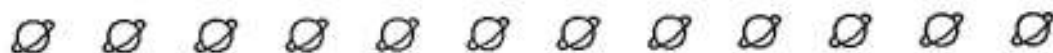
Ce n'est qu'après que les potentialités de calcul exact, de calcul formel, de la machine seront exploitées.

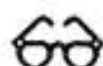
En particulier, pour les suites, nous n'avions pas noté dans les séances qui précèdent que la calculatrice fonctionnait en "mode approché". Ce qui peut entraîner des dérives importantes.

Ce sera justement le thème du TP n°14.

Mais pour le réaliser, il aura fallu prendre du recul, considérer la machine pour elle-même, avec ses atouts et ses faiblesses.

Cela demande du temps...

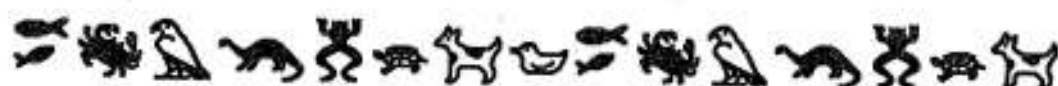




2. Un cours "particulier"

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} \right) dx \quad -\ln(2) + 1$					
$\int \left(\frac{x}{x+1} \right) dx \quad -\ln(x+1) + x$					
$\frac{d}{dx} (-\ln(x+1) + x) \quad \frac{-1}{x+1} + 1$					
$d(-\ln(\text{abs}(x+1)) + x, x)$					
MAIN	RAD EXACT	SEQ	3/10	BATT	

Le cours sur les intégrales
s'est déroulé en Février.
A cette époque, les élèves maîtrisaient à peu près
les principales fonctions de la calculatrice.
On lira dans ce chapitre quelques pistes de renouvel-
lement du cours qu'a permis l'intégration de la TI 92,
ainsi que quelques problèmes posés.



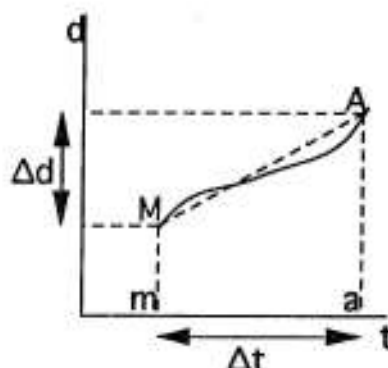
Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (En italique, les remarques relatives à l'utilisation de la calculatrice)

Introduction

Le cours est introduit par trois développements :

1. Sur le rapport entre vitesse, distance, et temps.

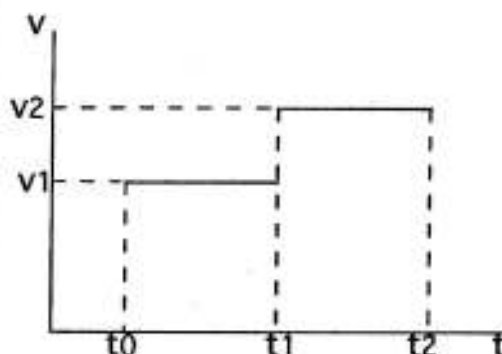
La distance parcourue étant exprimée en fonction du temps par une fonction $d(t)$, la vitesse moyenne entre les points M et A est définie par le rapport $\frac{\Delta d}{\Delta t}$. C'est aussi la pente de la corde (M, A).



On peut, si la fonction d est dérivable en m , définir aussi une vitesse instantanée en m , c'est $d'(m)$. C'est aussi la pente de la tangente à la courbe en M.

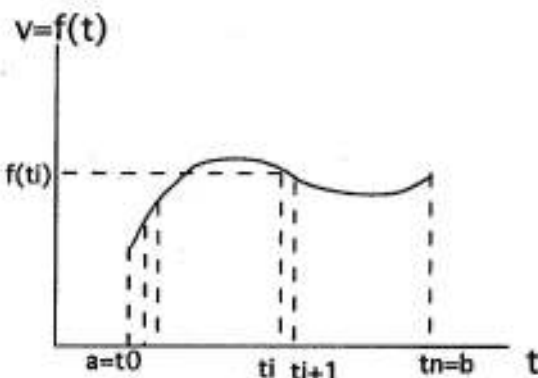
Comment faire si la vitesse est définie en fonction du temps, et si on veut connaître la distance parcourue ?

Si la vitesse est constante, ou constante par intervalles, pas de problème de calcul. La distance parcourue entre les temps t_0 et t_2 est égale à :
 $d = v_1 (t_1 - t_0) + v_2 (t_2 - t_1)$.



Que se passe-t-il si la vitesse n'est pas constante par intervalle, c'est-à-dire dans le cas général ?

On pourrait alors subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même amplitude. Sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, une valeur approchée de la distance parcourue est alors égale à :



$d_i = f(t_i) (t_{i+1} - t_i)$. On aurait alors une valeur approchée de la distance parcourue entre a et b en sommant toutes les valeurs approchées obtenues sur chacun des intervalles élémentaires.

On peut alors imaginer une situation de même nature que pour la dérivation : que se passe-t-il si le nombre de subdivisions tend vers $+\infty$, c'est à dire si l'amplitude des intervalles de temps élémentaires tend vers 0 ?

Intuitivement, on peut alors imaginer que la somme considérée, si elle admet une limite, va tendre vers l'aire de la surface "entre la courbe et l'axe des abscisses", et que ce nombre définira la distance parcourue entre a et b .

Premières conclusions, après cette présentation :

- on savait que $v = d'(t)$. L'expression de la distance en fonction de la vitesse nous ramène aussi au calcul infinitésimal ;
- de la même façon que la dérivation était liée à l'objet géométrique "tangente à une courbe", l'opération infinitésimale "inverse" semble être liée à l'objet géométrique "aire d'une surface".

2. Calcul d'une aire par recours au calcul infinitésimal.

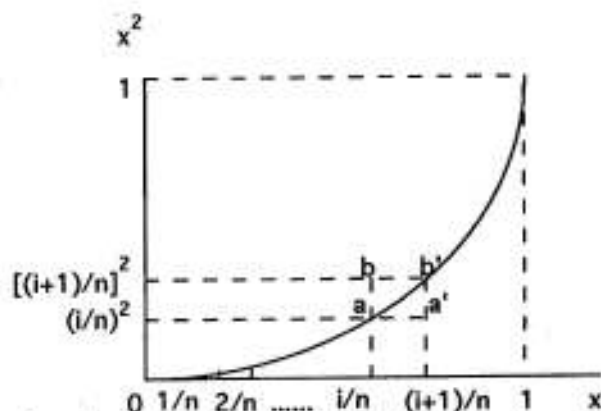
La possibilité de calculer une aire de cette façon va être testée ici, par un exercice qui fera utilement appel aux suites.

On veut calculer l'aire A de la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$.

On choisit une subdivision de $[0, 1]$ en n intervalles d'amplitude égale donc $\frac{1}{n}$.

Le nombre A cherché peut être encadré par deux nombres :

S_n est la somme des aires des rectangles qui bordent la courbe "par en dessous", T_n est la somme des aires des rectangles qui bordent la courbe "par en dessus".



$$\text{On a alors } S_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{i}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + (n-1)^2).$$

De la même façon, par simple décalage, on obtient :

$$T_n = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2).$$

D'où l'encadrement $S_n < A < T_n$, c'est-à-dire :

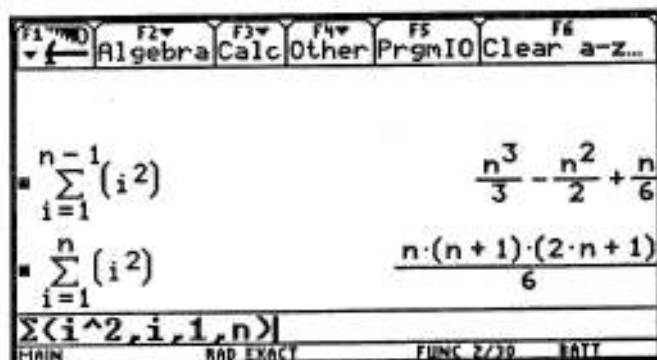
$$\frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + (n-1)^2) < A < \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2).$$

Avant que je ne l'aie suggéré, la majorité des élèves utilise la calculatrice pour obtenir une expression synthétique des deux sommes.

La "relation" à la machine entraîne un double travail :

- le premier, indispensable : exprimer correctement la commande. Cette exigence de correction syntaxique est tout à fait formatrice. Ainsi tous les élèves verbalisent : je fais la somme des "i carrés", de i égal 1 à i égal n. Le retour écran de la question permet une vérification de la syntaxe de la question posée.

Je constate pour les élèves un net progrès dans les écritures (moins de confusion entre la variable, la fonction, les bornes).



- deuxième travail, qui, lui, n'apparaît pas indispensable aux élèves : la vérification de la cohérence des résultats. Celui-ci est déclenché sous l'impulsion du maître... :
"la machine affiche des résultats assez différents pour les deux sommes. Est-ce normal ? Pourquoi un résultat est-il factorisé, et pas l'autre ? Que doit-il se passer si on substitue n à $n-1$ dans la première formule ?"
Bref, l'utilisation de la calculatrice pour obtenir ces sommes n'est pas un temps mort...

D'où le résultat $\frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) < A < \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

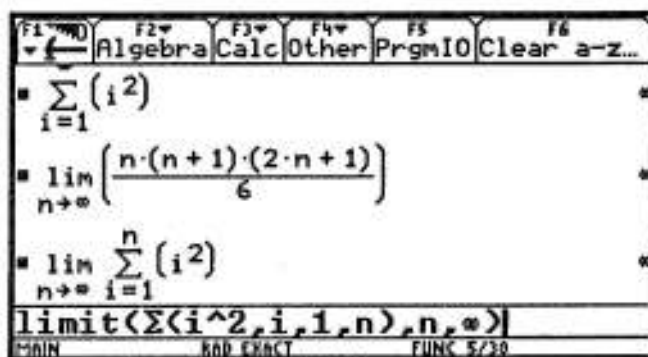
Les deux suites "encadrantes" ont même limite, $\frac{1}{3}$. D'où A est à la fois supérieur et inférieur à cette limite.

En conséquence, $A = \frac{1}{3}$.

La limite des deux suites est trouvée immédiatement par application du théorème sur les fonctions rationnelles. Cependant de nombreux élèves vérifient par utilisation de la calculatrice.

Deux façons de vérifier :

- la première consiste à sommer directement la série de 1 à $+\infty$;
- la deuxième consiste à chercher la limite de la somme de 1 à n , quand n tend vers $+\infty$, soit en considérant la formule découverte précédemment, soit en utilisant directement le signe somme.



On voit sur la copie d'écran ci-dessus les trois méthodes utilisées.

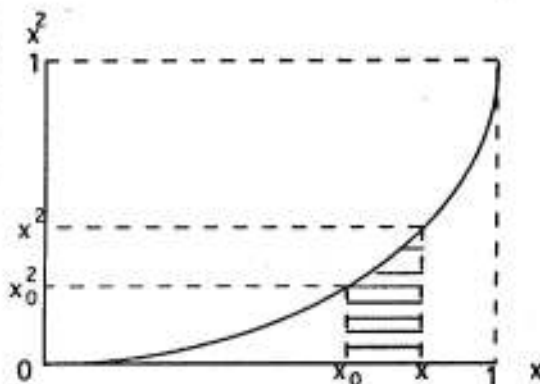
Il y a là une syntaxe, en particulier sous la dernière forme, particulièrement complexe, qui confronte l'élève à des questions théoriques (inversion de la limite et de la somme) assez délicates. De toute façon la relativité du caractère "variable " d'un objet apparaît clairement : " n " est d'abord fixe, puis variable..."

De façon assez nette, il apparaît aussi un changement du vocabulaire des élèves : la notion de "limite atteinte" est davantage exprimée. On lit plus : "la limite de telle suite est tel nombre" (ce qui correspond à la réponse de la machine) que "la suite tend vers telle limite" (ce qui correspond à l'observation d'un processus graphique, ou numérique, sur une calculatrice simplement graphique).

3. Où l'on retrouve le rapport entre le calcul d'aire, et "l'inversion de la dérivation"

Même objectif que précédemment, le calcul de A . On va faire un détour, pour obtenir plus que cela : on définit une fonction h , qui associe, à tout x positif, l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe, et la droite parallèle à l'axe des ordonnées ensemble des points d'abscisse x .

Ainsi $h(0) = 0$, et on recherche $A = h(1)$.
 $h(x) - h(x_0)$ est l'aire de la surface hachurée sur le dessin ci-contre.



Avec une stratégie comparable à celle de la question précédente, on encadre $h(x) - h(x_0)$
On obtient sans peine (pour $x > x_0$, on adaptera sans peine pour $x < x_0$)

$$(x - x_0) x_0^2 < h(x) - h(x_0) < (x - x_0) x^2$$

Ce qui peut se mettre sous la forme (avec $x \neq x_0$) :

$$x_0^2 < \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < x^2$$

Quand x tend vers x_0 , il est clair que x^2 tend vers x_0^2 . Le théorème des gendarmes
s'applique alors, et la limite de $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ existe, et est x_0^2 .

Ce qui prouve que h est dérivable, et $h'(x) = x^2$.

h est ainsi une primitive de la fonction "carrée". $h(x) = \frac{x^3}{3} + k$. Comme $h(0) = 0$, on doit

avoir $k = 0$. Pour finir $h(x) = \frac{x^3}{3}$. On retrouve bien $h(1) = \frac{1}{3}$. On a même plus, puisque
pour tout x (positif, pour le moment) on a l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la
parabole, et la droite ensemble des points d'abscisse x .

Cette introduction a permis de voir, sur un exemple, le rapport entre calcul d'aire, et
recherche de primitive. On va le reprendre dans le cas général. A l'inverse de la
démarche suivie dans les exemples, on va partir du calcul des primitives, pour en
arriver au calcul d'aire un peu plus tard.

I Première définition

a) Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a ; b]$

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$. On sait qu'elle admet une infinité de fonctions
primitives, définies "à une constante près". Soit F une de ces fonctions primitives. Le
réel $F(b) - F(a)$ ne dépend donc pas de la primitive choisie. On l'appelle intégrale de la
fonction f entre a et b .

Notation : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Remarques sur la notation :

- sur la forme "somme de $f(x)dx$ " : cela ne peut se comprendre qu'en référence au calcul
d'aire. Dans la deuxième partie de l'introduction, on a sommé des aires de rectangle
ayant une base de Δt , et une "hauteur" de $f(t)$, si on assimile la fonction, sur un
intervalle "petit" à une fonction constante. On effectue alors la somme de $f(t) \cdot \Delta t$.
Par passage à la limite, on en arrive à la somme de $f(x)dx$. De la même façon, dans le
calcul différentiel, on passe de Δx à dx . Cette notation se comprendra mieux à travers
les premiers calculs.

- l'élément différentiel dx indique quelle est la variable considérée. Son rôle est très
important : s'il y a, dans l'expression de la fonction, plusieurs lettres, il faut bien savoir
quelle est la variable, et quelles sont les constantes (pour le calcul de l'intégrale.)

b) Premiers calculs

Les exercices sont traités suivant deux modalités :

- machines fermées, on calcule, puis on vérifie ;
- on calcule d'abord avec la machine, et on essaie de retrouver l'origine du résultat.

Première modalité. Calculer, puis vérifier avec la machine :

$$\int_0^1 e^t dt \quad \int_0^1 e^u du \quad \int_0^1 e^u dt \quad \int_0^1 x \sin t dx \quad \int_0^1 x \sin t dt \quad \int_0^1 x \sin t dw$$

Deux remarques :

- les élèves travaillent assez vite, et la vérification, par soi-même, sur sa machine semble avoir un caractère assez formateur. En cas de non concordance, les élèves ont à leur charge de corriger ce qui doit l'être. Avant de passer à l'exercice suivant, on s'assure toutefois du consensus général sur les résultats obtenus !

- l'exigence syntaxique de la machine a aussi un caractère formateur tout à fait intéressant. Les élèves doivent distinguer la fonction, la variable, les bornes. On peut faire l'hypothèse que l'oubli dans les copies de l'élément différentiel "dt" sera plus rare....

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
$\int_0^1 (e^t) dt$					$e - 1$
$\int_0^1 (e^u) du$					$e - 1$
$\int_0^1 (e^u) dt$					e^u
$\int_0^1 (x \cdot \sin(t)) dt$					$(-\cos(1) + 1) \cdot x$
$f(x \cdot \sin(t), t, 0, 1)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 4/30					

Deuxième modalité : Observer un résultat donné par la machine, puis retrouver son "historique", c'est à dire le processus de sa fabrication. Il s'agit de "remonter la chaîne de fabrication".

Calculer $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$

On voit ci-contre qu'on a obtenu successivement :

- l'intégrale demandée ;
- puis une primitive de la fonction ;
- puis la dérivée de cette primitive, qui ne redonne pas la fonction de départ sous la même forme.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
$\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$					$-\ln(2) + 1$
$\int \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$					$-\ln(x+1) + x$
$\frac{d}{dx} (-\ln(x+1) + x)$					$\frac{-1}{x+1} + 1$
$d(-\ln(\text{abs}(x+1)) + x, x)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30					

On peut alors repartir dans l'autre sens, à condition de savoir exploiter convenablement ces résultats ! Cette capacité de la machine à délivrer plus d'informations que le résultat brut impressionne les élèves.

Calculer $\int_0^{\pi/4} \tan u du$

L'historique n'est pas toujours aussi facile à retrouver. Ainsi pour une primitive de $\tan x$...

Il faut mettre en oeuvre d'autres mécanismes de "reconnaissance de forme" : "que me rappelle $\ln |u|$?"

Mais c'est une primitive de $\frac{u'}{u}$ bien sûr !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
$\int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$					$\frac{\ln(2)}{2}$
$\int \tan(x) dx$					$-\ln(\cos(x))$
$\frac{d}{dx} (-\ln(\cos(x)))$					$\tan(x)$
$d(-\ln(\text{abs}(\cos(x))), x)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30 BATT					

c) Premier théorème.

Soit f continue sur $[a, b]$, et c élément de $[a, b]$. Alors la fonction F , définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en c .

Conséquence immédiate de la définition de l'intégrale.

Application : une nouvelle notation de la fonction logarithme.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Exercice : déterminer l'unique primitive de la fonction qui à x associe $|x|$.

Deux problèmes ici :

- un problème de syntaxe. Il faut distinguer la variable d'intégration, et la borne variable (on a choisi ci-contre la lettre p , inhabituelle, pour bien insister sur la relativité du choix) ;
- un problème d'analyse du résultat. Il faut bien distinguer deux cas pour comprendre...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_1^x \left(\frac{1}{t}\right) dt$					
					$\ln(x)$
$\int_0^x p dp$					
					$\frac{x \cdot x }{2}$
f(abs(p), p, 0, x)					
MAIN	NAB EXACT	FUNC 2/39	BATT		

Pour terminer cette partie, différents exercices de mise en pratique de ce qui précède..

En particulier le calcul de $\int_2^3 \frac{1}{t^2 - 1} dt$.

Et un rappel : avant toute "manoeuvre" d'intégration, veiller à ce que les objets manipulés aient un sens : pour que l'intégrale soit calculable, il suffit que la fonction soit continue sur l'intervalle d'intégration.

II Propriétés algébriques de l'intégrale.

a) Propriétés liées aux bornes.

Par application directe de la définition de l'intégrale, on dispose des propriétés suivantes

$$\int_a^a f(t) dt = 0 \qquad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

$$\int_b^a f(t) dt = \int_c^a f(t) dt + \int_b^c f(t) dt ,$$

et cela, quels que soient les réels a, b et c appartenant à un intervalle de continuité de la fonction f .

Remarque : cela rappelle évidemment les propriétés des vecteurs :

$$\vec{AA} = \vec{0} ; \quad \vec{AB} = -\vec{BA} \quad \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} . \text{ Ce n'est pas un hasard !}$$

Exercice : calculer $\int_0^3 (|2-t| + |1-t|) dt$.

On a intérêt ici à décomposer le calcul en utilisant la relation de Chasles. On se place sur des intervalles où on contrôle le signe de l'intérieur des valeurs absolues, c'est à dire sur $[0, 1]$, $[1, 2]$, puis $[2, 3]$.

La calculatrice donne la valeur de l'intégrale, et l'expression d'une primitive.

Pour comprendre ce qui se passe, il faut bien se placer sur des intervalles adéquats...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^3 (2-t + 1-t) dt$					
5					
$\int (2-t + 1-t) dt$					
$\frac{(t-2) \cdot -t+2 }{2} + \frac{(t-1) \cdot -t+1 }{2}$					
$f(\text{abs}(2-t) + \text{abs}(1-t), t)$					
MAIN		RAD EXACT		FUNC 2/10	

b) Linéarité de l'intégrale.

On démontre sans peine que :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Application : triviale, intégrale de polynômes ; puis intégrales de fonctions demandant une certaine transformation :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x+3} dx \quad \int_0^{\pi/4} (\tan u)^2 du \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx \quad \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$$

Les observations des intégrales, ou des primitives, données par la machine, ne renseignent pas immédiatement, il faut réfléchir un peu...

Si une primitive de $(\tan x)^2$ est $\tan x - x$, c'est que la dérivée de $\tan x - x$ est $(\tan x)^2 + 1 - 1$.

Il suffit donc de remplacer $(\tan x)^2$ par $(\tan x)^2 + 1 - 1$, et le tour est joué !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^1 ((\tan(x))^2) dx$					
$\int ((\tan(x))^2) dx$					
$\tan(x) - x$					
$\int_0^1 \left(\frac{1}{e^x+1} \right) dx$					
$\ln\left(\frac{2}{e+1}\right) + 1$					
$\int \left(\frac{1}{e^x+1} \right) dx$					
$-\ln(e^x+1) + x$					
$f(1/(e^x+1), x)$					
MAIN		RAD EXACT		FUNC 4/10	

III Intégrale et mesure d'aire.

Il s'agit de généraliser ici ce qui a été vu dans l'introduction.

a) Intégrale, et aire du domaine défini par f continue et positive sur [a, b]

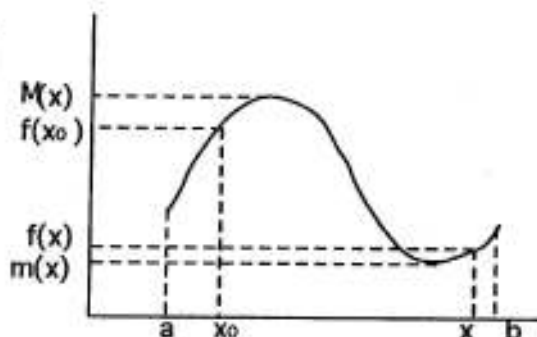
Remarque : notion d'aire supposée intuitive, basée sur l'aire des rectangles. On se situe ici dans un repère orthogonal, pas nécessairement orthonormé.

Définition : le domaine délimité par f continue et positive entre a et b est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) telles que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Comme dans l'introduction, on définit $h(x)$ comme étant l'aire du domaine délimité par f entre a et x .

On obtient sans peine :

$$m(x) < \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} < M(x), \quad m(x) \text{ et } M(x) \text{ étant les minimum et maximum de } f \text{ sur l'intervalle } [C, x] \text{ (la fonction } f \text{ étant continue, ces objets existent bien).}$$



Quand x tend vers x_0 , pour des raisons de continuité aussi, $m(x)$ et $M(x)$ tendent vers $f(x_0)$. Par application du théorème d'encadrement, la limite en x_0 de $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ est $f(x_0)$. On a ainsi $h'(x) = f(x)$. Comme $h(a) = 0$, h est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Par application du théorème 1, on peut affirmer que :

$$h(x) = \int_a^x f(t) dt. \text{ L'aire cherchée est donc } h(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Attention : cette aire est exprimée en unité d'aire, l'unité d'aire étant définie comme l'aire du "rectangle unité", basé sur les segments unités des deux axes.

Théorème 2.

L'aire du domaine défini par f continue et positive sur $[a, b]$, exprimée en unité d'aire, est $\int_a^b f(t) dt$.

Attention : l'intégrale est intrinsèque, alors que l'aire est liée au type de repère donné. Ainsi, si l'on veut calculer une aire en cm^2 , suivant les unités choisies, il faudra utiliser un coefficient correcteur pour passer de l'aire en "unité d'aire" à l'aire "en cm^2 ".

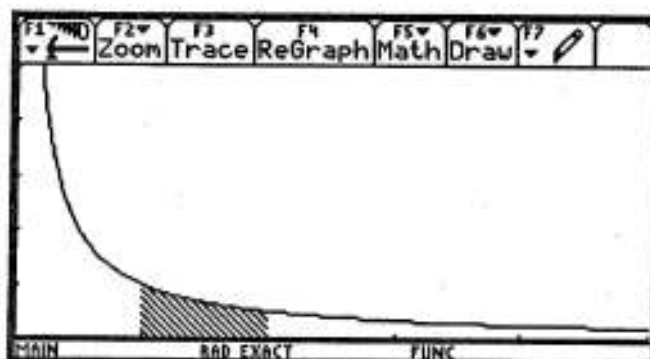
Applications et exercices

1. "Visualisation du logarithme" :

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2$$

C'est l'occasion ici de montrer le calcul d'intégrale dans l'application graphique, associé au hachurage de l'aire correspondante. Attention :

- il s'agit de calcul approché !
- le domaine est hachuré, même si la fonction n'est pas positive !



2. Calcul d'aire et asymptote

Soit $A(t)$ et $B(t)$ les aires des domaines limités par les fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ entre 1 et t .

Calculer $A(t)$ et $B(t)$, et les limites quand t tend vers $+\infty$.

On demande d'abord un calcul sans machine, suivi d'une vérification (aucune difficulté technique, ou nécessité de conjecture, ne justifie ici l'utilisation d'une calculatrice).

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^t = \ln t. \text{ D'où la limite de } A(t) \text{ en } +\infty \text{ est } +\infty.$$

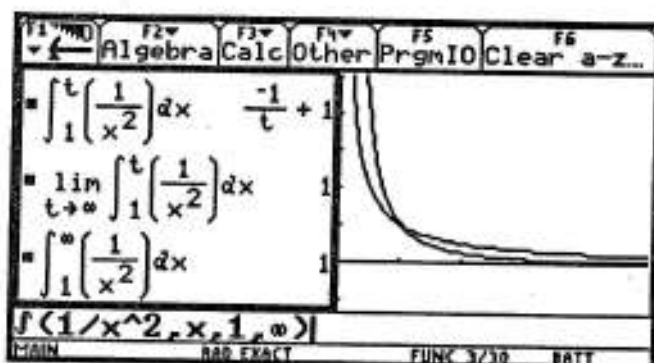
$$B(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1. \text{ D'où la limite de } B(t) \text{ en } +\infty \text{ est } 1.$$

Remarque : des phénomènes asymptotiques apparemment proches ne se traduisent pas semblablement par des "fermetures d'aire à l'infini" !

Vérification machine.

On le voit ci-contre, les différentes stratégies de vérification font manipuler des objets mathématiques qui ne sont pas identiques....

On peut imaginer que les élèves vont manipuler des intégrales impropres sans problème !

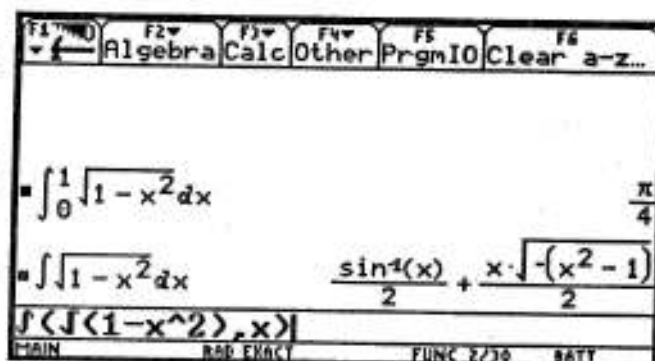


3. A partir de considérations d'aires, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Le calcul machine de l'intégrale ne pose pas de problème.

L'interprétation est plus délicate, surtout si l'on regarde la primitive suggérée !

Il faut bien suivre alors les conseils de l'énoncé.

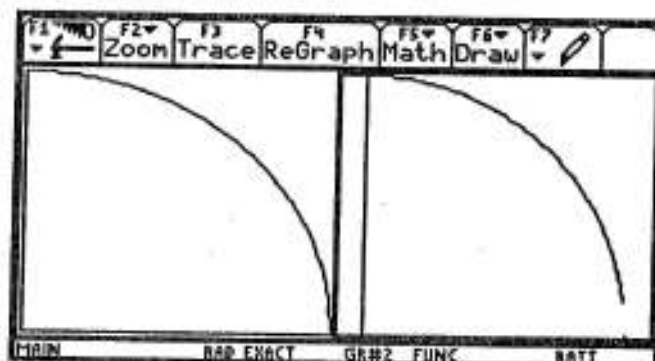


Puqu'on parle de considérations d'aires, on peut construire la courbe de la fonction envisagée sur $[0, 1]$. Eventuellement sans calculatrice, puisque l'on sait que c'est une fonction décroissante (par composition de fonctions), de dérivée nulle en 0 (puisque c'est une fonction paire, dérivable en 0, sa dérivée est nécessairement impaire et nulle en 0), avec une tangente verticale en 1, pour raison de limite de dérivée en ce point.

Vérification machine.

On a fait apparaître la courbe sur $[0, 1]$, à gauche dans une fenêtre $[0, 1] \times [0, 1]$, à droite dans un repère orthonormé.

Le non contact entre la courbe et l'axe des abscisses peut donner lieu à d'utiles discussions...



L'intérêt du repère orthonormé est qu'il indique davantage l'idée du cercle. C'est une idée qui peut venir aussi du croisement des résultats graphiques, et du résultat donné par la machine pour l'intégrale ("s'il y a π , le cercle n'est pas loin").

En effet, par élévation au carré, on a bien l'équation d'un cercle, d'où l'intégrale, égale au quart de l'aire du cercle.

Ceci ne donne pas d'indication immédiate pour le calcul de primitives, mais ceci est une autre histoire !

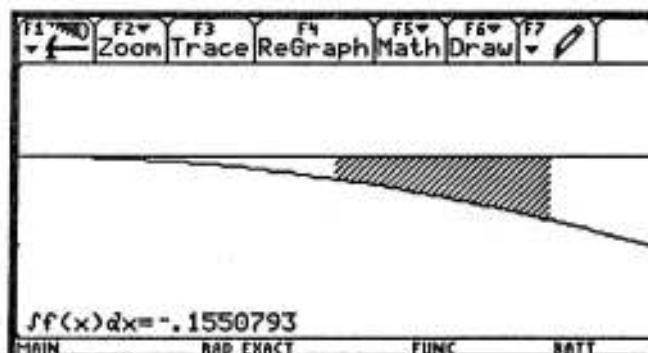
b) Cas où f est négative et continue sur $[a, b]$

On pose alors $g = -f$. L'aire du domaine délimité par g est égale, par symétrie orthogonale, à l'aire du domaine délimité par f . Le théorème précédent s'applique à g . Si on appelle A l'aire en question, on obtient :

$$A = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b -[f(t)] dt = - \int_a^b f(t) dt \quad (\text{par linéarité}).$$

Attention :

une aire est toujours positive. Se méfier des résultats de la machine qui, dans l'application graphique, donne des résultats pour l'intégrale qui ne correspondent pas toujours à l'aire du domaine hachuré.



Remarque 1 : faut-il le répéter, une aire est toujours positive.

Remarque 2 : attention à ce qui se passe si la fonction n'a pas un signe constant... Dans ce cas, si on veut faire des calculs d'aire, il faut décomposer l'intervalle d'intégration en intervalles où on contrôle le signe de la fonction.

c) Cas où $f \leq g$

La fonction $g - f$ est alors positive. L'intégrale de $(g-f)$ entre a et b donne l'aire du domaine délimité par les deux courbes (aire exprimée en unité d'aire).

Démonstration : on utilise m , minimum de f sur $[a, b]$. On a alors :

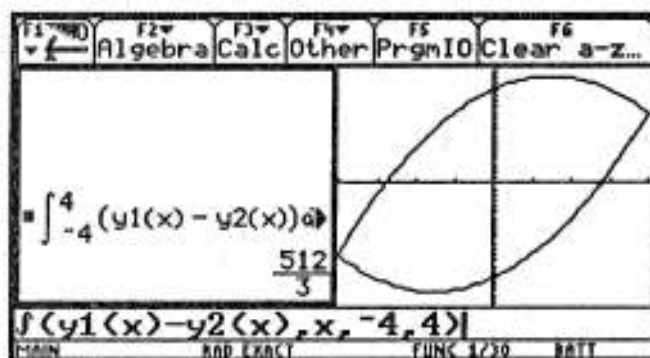
$$\int_a^b (g - f)(t) dt = \int_a^b (g(t) + m) dt - \int_a^b (f(t) + m) dt. \quad \text{On conclut à partir de considérations d'aire (les deux fonctions intégrées sont bien positives, du fait de l'ajout de } m).$$

Exemple :

Montrer que les deux paraboles d'équation $y = -x^2 + 3x + 16$ et $y = x^2 + 3x - 16$ délimitent une "boucle". Aire de la boucle.

Les deux coefficients du terme en x^2 étant de signe contraire, les paraboles sont de "convexité opposée". Comme elles se coupent en deux points, elles déterminent bien une boucle.

La calculatrice joue ici un simple rôle d'appoint, aussi bien pour la visualisation des courbes que pour le calcul exact de l'intégrale.



Exercice : les fonctions puissances x^a et $x^{1/a}$, pour $a > 1$, déterminent une boucle entre 0 et 1. Déterminer a pour que l'aire de cette boucle soit égale à k .

Il y a là quelques considérations implicites, que la résolution devra éclairer. Si a n'est pas rationnel, les deux fonctions devront être prolongées par continuité en 0. Quant à k , il est nécessairement dans l'intervalle $]0, 1[$.

Le calcul, à la main, est fait sans difficulté. C'est la vérification machine qui réserve une petite surprise :

La classe est surprise : que vient faire une limite ici ? La raison en est claire - après réflexion - : les fonctions "puissances réelles" ne sont pas nécessairement définies en zéro, ni même prolongeable par continuité.

On peut alors faire le calcul de limite, qui ici ne pose pas de problèmes particuliers...

Où reformuler la question, en indiquant la précision contenue dans l'énoncé : la puissance a est supérieure à 1.

Et l'on retrouve le résultat trouvé "à la main".

Top screenshot:
$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{a}} - x^a) dx$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x \cdot x^a}{a+1} + \frac{a \cdot x \cdot x^{\frac{1}{a}}}{a+1} \right) + \frac{a-1}{a+1}$$

$$f(x^{(1/a)} - x^a, x, 0, 1)$$

Bottom screenshot:
$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{a}} - x^a) dx \mid a \geq 1$$

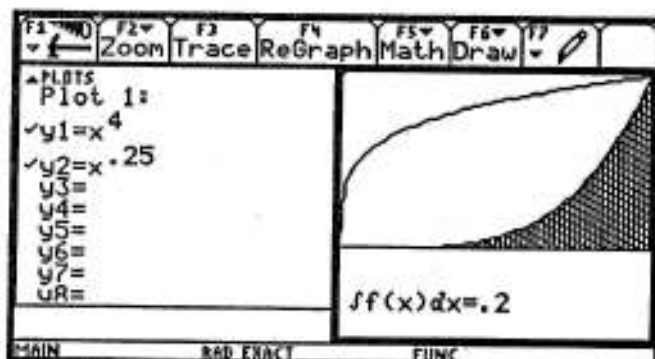
$$f(x^{(1/a)} - x^a, x, 0, 1) \mid a \geq 1$$

Il reste à résoudre l'équation $\frac{a-1}{a+1} = k$, ce qui donne sans peine $a = \frac{k+1}{1-k}$.

La considération des résultats ci-dessus donne les conditions pour que les objets aient un sens : k est une aire, donc positif, ainsi a doit être supérieur à 1 (ou inférieur à -1, mais alors on aurait un problème de prolongement par continuité, et la limite étudiée ci-dessus ne serait pas finie !). On trouve de même que k doit être dans $]0, 1[$.

Un petit coup de vérification, avec $a = 4$ on trouve $k = \frac{3}{5} = 0,6$.

L'aire du domaine déterminé par la première fonction entre 0 et 1 est 0,2 (valeur approchée). Pour raison de symétrie, l'aire de la boucle est $1 - 0,4 = 0,6$. Le compte est bon. Ce que l'on peut vérifier, en valeur exacte, dans l'application initiale.



d) Application aux fonctions paires, impaires, périodiques.

- Soit f impaire, définie et continue sur $[-a; a]$.

On a sans peine :

$$I(a) = \int_{-a}^a f(t) dt = F(a) - F(-a) \quad (\text{en notant } F \text{ une primitive de } f)$$

En dérivant, on obtient $I'(a) = f(a) + f(-a)$
(attention à la dérivation de $F(-a)$: il s'agit d'une fonction composée !)
Puis, comme f est impaire, $I'(a) = f(a) - f(a) = 0$.

Ainsi I est une fonction constante. D'où, pour tout a , $I(a) = I(0) = 0$

- Soit f paire, définie et continue sur $[-a, a]$.

On démontre de la même façon que :

$$I = \int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

- Soit f continue sur $\mathbb{R}$, de période T.

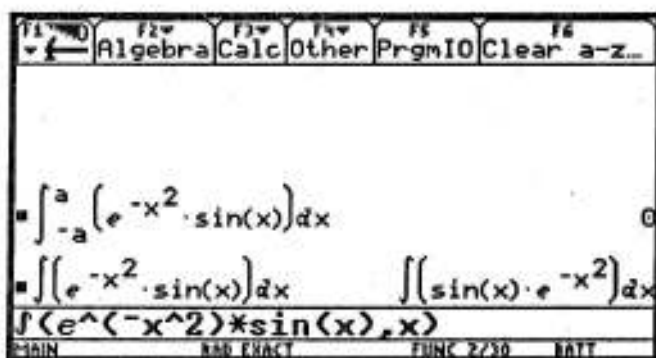
On a alors, pour tout a réel :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt.$$

Exercice 1

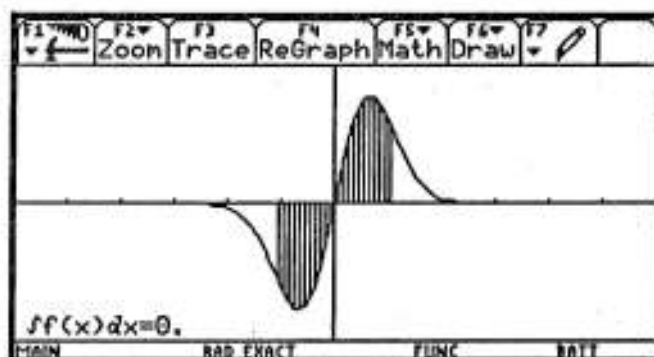
Calculer $\int_{-1}^1 e^{-x^2} \sin x dx$

C'est évidemment 0, puisque la fonction à intégrer est impaire.
Notons que la calculatrice le reconnaît aussi, mais qu'elle ne connaît pas de primitive de ladite fonction...



Résultat confirmé aussi dans l'application graphique.

Avec visualisation à la clé.
Mais en valeur approchée !

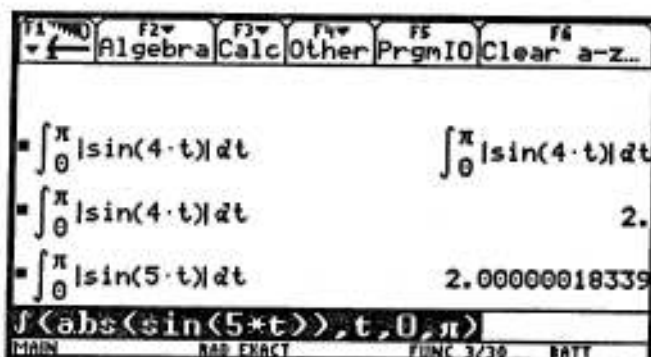


Exercice 2

Calculer $I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| dt$ (on trouvera cet exercice traité lors du TP 15)

Petit problème : la calculatrice refuse de donner une valeur exacte, ou approchée pour n général.

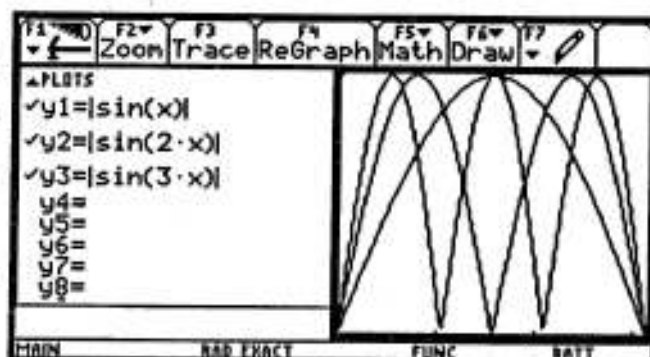
Pire, même pour des valeurs particulières de n , on n'obtient pas de valeurs exactes. Les valeurs approchées données par la machine sont 2 (pour $n = 4$), un peu plus de 2 pour $n = 5$, etc. Alors, quid ?



Le calcul laisse perplexé. C'est peut être le moment de faire jouer l'interaction avec le graphique...

Du désordre apparent, il faut arriver à extraire une cohérence :

- pour $n = 1$, une arche de sinuséide ;
 - pour $n = 2$, deux arches de sinuséide ;
 - pour $n = 3$, etc
- Il suffit peut-être d'intégrer "pour une seule arche" ?



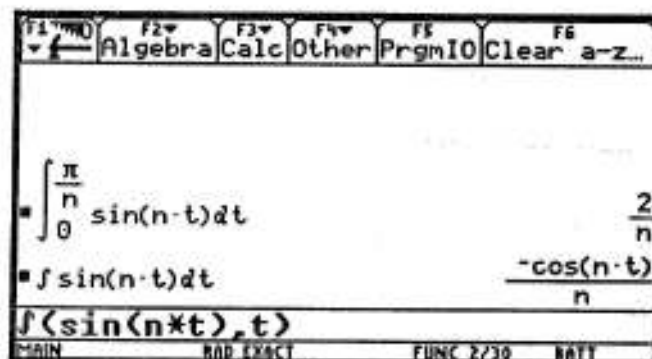
Et pour cela, on démontre que la fonction est périodique, de période $\frac{\pi}{n}$. Ce qui est immédiat : $|\sin n(x + \frac{\pi}{n})| = |\sin(nx + \pi)| = |-\sin(nx)| = |\sin(nx)|$

L'intervalle d'intégration contenant n périodes :

$$I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| dt = n \int_0^{\pi/n} \sin(nt) dt = n \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_0^{\pi/n} = -[\cos \pi - \cos 0] = 2.$$

La calculatrice veut alors bien répondre.

Mais reformuler la question a exigé un détour théorique, qui n'est rien d'autre qu'un retour aux fonctions de référence "valeur absolue", et "sinus".



IV Intégrale et relation d'ordre.

On va retrouver ici, d'une autre façon, les résultats établis au III : si $f \geq 0$, et $a \leq b$, alors

$I = \int_a^b f(t) dt$ est une aire, donc I est positif.

a) Intégrale d'une fonction positive sur $[a, b]$

Soit f continue et positive sur $[a, b]$, et F une primitive de f . On a alors :

$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$. Mais f est la dérivée de F , et f est positive. D'où F est croissante, et, comme $a \leq b$, on a $F(a) \leq F(b)$. D'où $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Théorème 3.

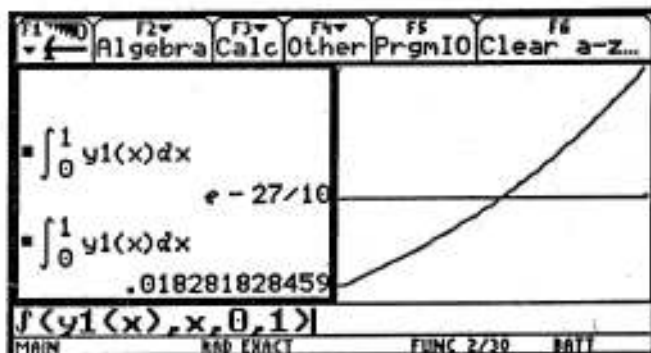
L'intégrale de a à b (avec $a \leq b$) d'une fonction continue et positive est un réel positif.

Attention aux horreurs usuelles :

- l'hypothèse $a \leq b$ est essentielle ;
- le théorème 3 n'admet pas de réciproque. Une fonction f peut très bien avoir une intégrale positive sur $[a, b]$, sans être elle-même positive sur tout cet intervalle.

Ainsi la fonction $e^x - 1,7$ est "plus longtemps" négative que positive sur $[0, 1]$. Et pourtant son intégrale est positive sur cet intervalle.

On "voit" bien les compensations, en terme d'aires, qui donnent ce résultat, et que l'on retrouvera quand on parlera de valeur moyenne d'une fonction.



Corollaire 1

Si une fonction est continue et négative entre a et b , $a \leq b$, alors l'intégrale de f entre a et b est négative.

Corollaire 2

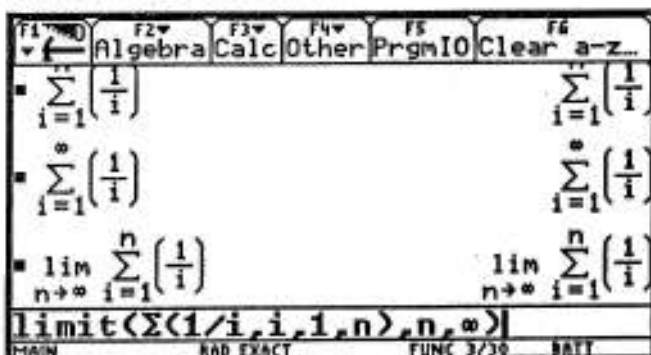
Si, entre a et b , $a \leq b$, la fonction f est inférieure à la fonction g , alors l'intégrale de f entre a et b est inférieure à l'intégrale de g entre a et b .

Exercice 1. Limite de la "série harmonique".

Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Quelle est la limite de cette suite ?

On constate que ce problème, qui a posé quelques difficultés dans l'histoire des mathématiques, et qui en pose pour les élèves en général, laisse la calculatrice "perplexe".

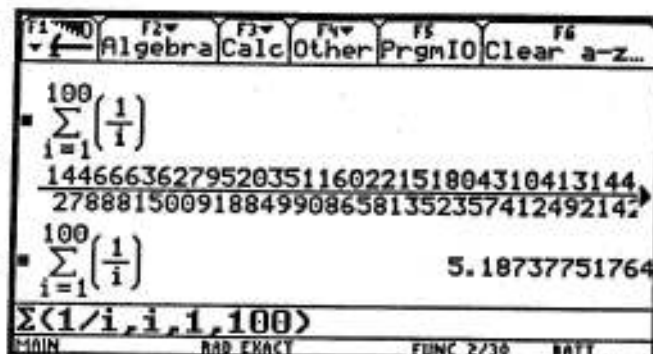
Ni réduction des sommes partielles, ni indication de la limite, quelle que soit la syntaxe de la question...



On peut faire alors quelques sondages, sous forme exacte, ou approchée.

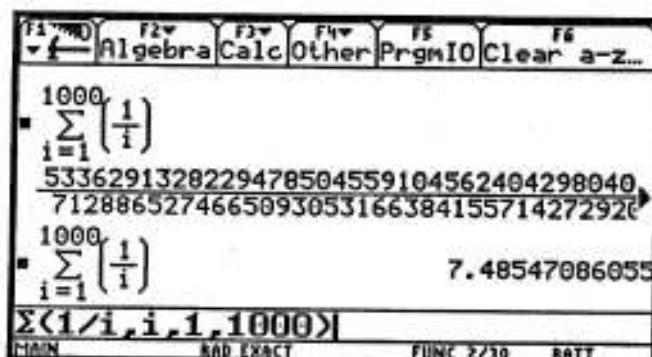
Une valeur approchée de S_{100} est 5,18.

Si on prospecte pour de plus grandes valeurs de n , ceci devient rapidement coûteux, en terme de temps !



On constate cependant que le calcul exact est beaucoup, beaucoup plus long que le calcul approché.

Par ailleurs, la croissance de la suite est extrêmement lente. L'observation permet-elle de trancher entre limite infinie et limite finie ?



Un détour théorique s'impose...

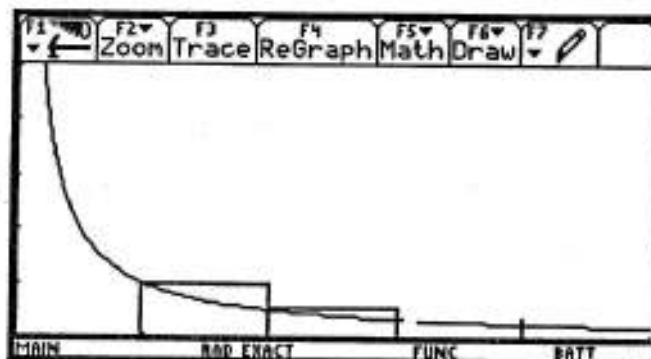
Comment introduire les intégrales ici ?

On peut penser à introduire la fonction $\frac{1}{x}$ (ce qui fait partie de stratégie de glissement du discret au continu, et réciproquement).

On "voit" ci-contre que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \int_1^4 f(t) dt$$

Ce que l'on peut généraliser sans difficulté.



Pour tout t de l'intervalle $[n, n+1]$: on dispose de $n \leq t$, donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{t}$, donc, par application du corollaire 2 : $\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$.

Le calcul des deux intégrales donne :

$$\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n.$$

Il est évidemment décisif ici de distinguer variable d'intégration, t , et constante, pour l'intervalle considéré, n .

L'utilisation de la calculatrice, par l'obligation de syntaxe, peut être tout à fait utile.

Le bon résultat est obtenu pour la première intégrale.

Pour la deuxième aussi. Cependant, le résultat doit être simplifié, en tenant compte du fait que n est positif !.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t} \right) dt$					
$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t} \right) dt$					
$\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$					
$f(1/t, t, n, n+1)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 2/30 BATT					

Par somme, on obtient alors $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$.

D'où, par application, des théorèmes de minoration, la limite de S_n égale à $+\infty$.

On a aussi là une idée de la vitesse de divergence de cette suite : à partir de quelle valeur de n est-on sûr que S_n sera supérieur à 1000 ?

Il suffit que $\ln(n+1)$ soit supérieur à 1000, c'est à dire que n soit supérieur à $e^{1000} - 1$. Cela fait évidemment beaucoup, et est un indicateur de la lenteur de divergence de cette suite.

La calculatrice veut bien donner une valeur approchée de $e^{1000} - 1$, mais refuse de donner une valeur approchée de la suite à ce niveau. Il est vrai que cela ferait beaucoup d'opérations... Le temps de calcul nécessaire, même avec un milliard d'opérations par seconde, dépasserait l'âge de l'univers...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$e^{1000} - 1$					
$e^{1000} - 1$					
$1.98 \cdot 10^{34}$					
$\sum_{i=1}^{1.98 \cdot 10^{34}} \left(\frac{1}{i} \right)$					
$\sum(1/i, i, 1, 1.98 \cdot 10^{34})$					
MAIN RAD EXACT FUNC 1/30 BATT					

Exercice 2

Etude de la suite d'intégrales définies par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$. Observations, conjectures, preuves.

Observons, observons...

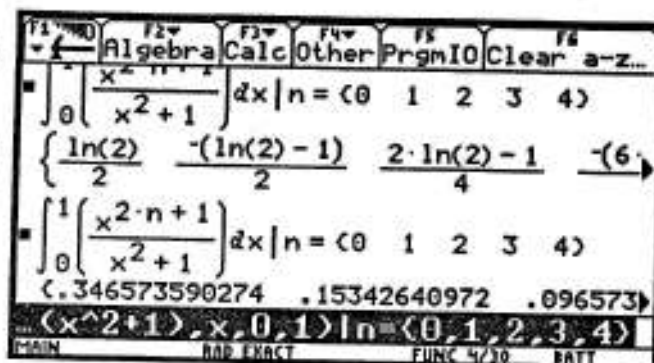
Le calcul de I_n ne donne rien avec la calculatrice.

On peut alors observer l'évolution de la suite, en donnant à n successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, 4...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^1 \left(\frac{x^{2 \cdot n + 1}}{x^2 + 1} \right) dx$					
$\int_0^1 \left(\frac{x^{2 \cdot n}}{x^2 + 1} \right) dx$					
$\ln(2)$					
$f(x^{(1)}/(x^2+1), x, 0, 1)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 2/30 BATT					

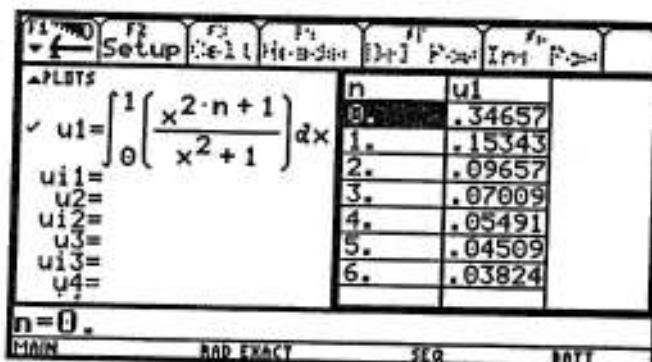
On peut rationaliser le procédé en définissant une liste.

Ci-contre, la machine donne les valeurs exactes, puis approchées, de I_n pour $n = 0, 1, 2, 3$ puis 4.



On peut améliorer la collecte des résultats en utilisant le fichier de suites, en rentrant notre suite, et en considérant une table de valeurs.

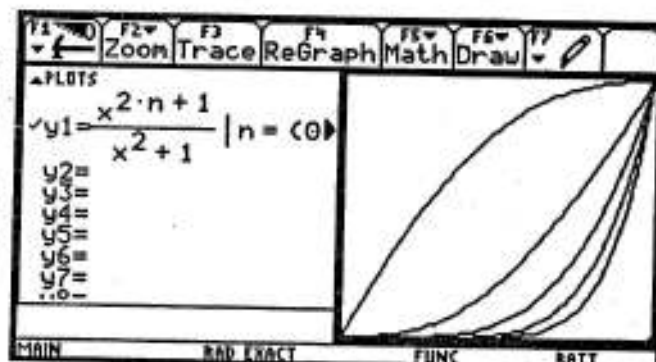
On n'a bien sûr ici que des valeurs approchées, mais les conjectures sont plus aisées sous cette forme.



On a bien l'impression que la suite est décroissante (et positive, ce qui paraît bien naturel). On peut, pour comprendre ce qui se passe, observer la situation graphiquement.

Dans le fichier de fonction, on a défini, à l'aide d'une liste, les fonctions, pour n entier variant de 0 à 4.

Les fonctions obtenues semblent croître de 0 à 0,5, et "s'écraser sur l'axe des abscisses", ce qui permet d'interpréter, en terme d'aire, la décroissance de la suite d'intégrales.



La suite semble bien décroître. Une question se pose cependant concernant sa limite. le fait que la fonction reste "accrochée" au point $(1, \frac{1}{2})$ peut sembler problématique. La suite, dans ces conditions, tend-elle vers 0 ?

Il faut essayer maintenant de prouver les éléments apparus dans l'observation.

- la suite est-elle vraiment positive ?

Il suffit d'appliquer le théorème 2. On intègre, entre 0 et 1, une fonction positive...

- la suite est-elle vraiment décroissante ?

Classiquement, on évalue $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} dx$.

On utilise la linéarité de l'intégration : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{x^2+1} dx$. La fonction à intégrer est négative sur l'intervalle $[0, 1]$. Application du corollaire 1, et conclusion. la suite est bien décroissante.

Si on dispose du théorème sur les suites décroissantes minorées (c'est le cas en TS option math, ce n'est pas le cas sinon), on peut conclure ici à la convergence de la suite vers un réel positif. Mais, même si on dispose de ce résultat, on peut aller plus loin, en cherchant "à quelle allure" la suite converge (et vers quoi...).

Que ferait un "expert" ? Il rechercherait peut être une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n , par exemple en faisant une intégration par parties.

On ne dispose pas encore ici du théorème d'intégration par parties. On peut alors aider à la formulation d'une conjecture :

- en faisant calculer les premiers termes de la suite ;
- en proposant de s'inspirer du calcul de $I_{n+1} - I_n$ pour trouver une relation simple entre I_{n+1} et I_n (si on remplace - par + on a une simplification intéressante...) .

Le calcul de I_1 peut être assisté par la machine qui donne une primitive de la fonction.

Le logarithme peut faire songer alors à une forme $\frac{u'}{u}$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} \right) dx \quad \frac{\ln(2)}{2}$					
$\int \left(\frac{x}{x^2+1} \right) dx \quad \frac{\ln(x^2+1)}{2}$					
$d(\ln(x^2+1)/2, x)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30 BATT					

Le calcul de I_2 peut être fait de la même façon.

On peut essayer la commande propFrac pour retrouver l'historique des calculs.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^1 \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right) dx \quad \frac{-(\ln(2)-1)}{2}$					
$\int \left(\frac{x^3}{x^2+1} \right) dx \quad \frac{-(\ln(x^2+1)-x^2)}{2}$					
$\text{propFrac} \left(\frac{x^3}{x^2+1}, x \right) \quad \frac{-x}{x^2+1} + x$					
$\text{propFrac}(x^3/(x^2+1), x)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30 BATT					

Et du coup, on peut itérer le processus, et constater une régularité intéressante : si on ajoute deux fonctions successives, le résultat, donc l'intégrale, est assez simple, puisque ne reste qu'une seule fonction puissance...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\text{propFrac} \left(\frac{x^3}{x^2+1}, x \right) \quad \frac{-x}{x^2+1} + x$					
$\text{propFrac} \left(\frac{x^5}{x^2+1}, x \right) \quad \frac{x}{x^2+1} + x^3 - x$					
$\text{propFrac} \left(\frac{x^7}{x^2+1}, x \right) \quad \frac{-x}{x^2+1} + x^5 - x^3 + x$					
$\text{propFrac}(x^7/(x^2+1), x)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30 BATT					

Un coup de calculatrice :

la machine veut bien simplifier l'expression, mais refuse de calculer l'intégrale, faute d'indication sur n.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z
$= \int \left(\frac{x^{2 \cdot n + 1}}{x^2 + 1} + \frac{x^{2 \cdot n + 3}}{x^2 + 1} \right) dx$			$\int (x \cdot x^{2 \cdot n}) dx$		
$= \int_0^1 \left(\frac{x^{2 \cdot n + 1}}{x^2 + 1} + \frac{x^{2 \cdot n + 3}}{x^2 + 1} \right) dx$			$\int_0^1 (x \cdot x^{2 \cdot n}) dx$		
$= \int_0^1 (x^{2 \cdot n + 1}) dx$			$\int_0^1 (x \cdot x^{2 \cdot n}) dx$		
$\int (x \cdot x^{(2 \cdot n)}, x, 0, 1)$					
MAIN	RAD AUTO	FUNC 3/30	BATT		

$$\text{On calcule alors la somme } I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2n+1} dx$$

$$= \frac{1}{2n+2} [x^{2n+2}]_0^1 = \frac{1}{2n+2}.$$

La vérification sur les premiers termes est immédiate.

On peut alors en déduire un encadrement de I_n , en usant à la fois de l'inégalité de décroissance ($I_{n+1} - I_n \leq 0$) et de l'égalité qui vient d'être établie.

$$\frac{1}{2n+2} = I_n + I_{n+1} \leq 2 I_n. \text{ D'où } I_n \geq \frac{1}{4n+4}$$

Le rôle particulier joué par l'un peut être joué par l'autre :

$$\frac{1}{2n+2} = I_n + I_{n+1} \geq 2 I_{n+1}. \text{ D'où } I_{n+1} \leq \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4(n+1)}$$

Par glissement d'indice, on obtient $I_n \leq \frac{1}{4n}$.

D'où pour finir :

$$\frac{1}{4n+4} \leq I_n \leq \frac{1}{4n}.$$

On a bien, par application du théorème d'encadrement, la limite de I_n égale à 0.

On a même mieux, puisque, par multiplication de la double inégalité ci-dessus par $4n$, on sait que $4nI_n$ a pour limite 1.

On dit que la suite (I_n) est "équivalente" à $\frac{1}{4n}$.

On peut observer cette "convergence lente" en programmant la suite I_n et la suite $\frac{1}{4n}$. On peut voir le lent rapprochement des deux suites.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Setup	Cell	Mode	Del	Pol
APLETS					
✓ u1 =	$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{x^2} \right)$	n	u1	u2	
u1 =		0.	.34657	undef	
✓ u2 =	$\frac{1}{4 \cdot n}$	1.	.15343	.25	
u2 =		2.	.09657	.125	
u3 =		3.	.07009	.08333	
u4 =		4.	.05491	.0625	
u5 =		5.	.04509	.05	
u6 =		6.	.03824	.04167	
n=0.					
MAIN	RAD AUTO	SEQ	BATT		

Avec une table de valeurs de 10 en 10, le mouvement s'accélère, évidemment.

Accélération en ce qui concerne le rapprochement des deux suites, pas en ce qui concerne le calcul qui est là extrêmement long (30mn)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Setup	Calc	Fix-Mode	Pol	Pow	In	Pow			
PLT5									
u1 = $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$	n	u1	u2						
u11 = $\frac{1}{4 \cdot n}$	0.	.34657	undef						
u12 =	10.	.02376	.025						
u13 =	20.	.01219	.0125						
	30.	.00819	.00833						
	40.	.00617	.00625						
	50.	.00495	.005						
	60.	.00413	.00417						
n = 0.									
MAIN	RAD	AUTO	SEQ	MODE					

La suite (I_n) se comporte comme la suite $(\frac{1}{4n})$. Mais l'encadrement obtenu est encore plus intéressant, puisqu'il nous donne, pour chaque terme de la suite une valeur approchée, et la qualité de l'approximation.

On sait par exemple que : $\frac{1}{4000004} < I_{1000000} < \frac{1}{4000000}$

Signalons que, si on voulait directement obtenir une valeur approchée de $I_{1000000}$ avec la calculatrice, celle-ci déclarerait forfait immédiatement : avec un bandeau "Illegal Instruction" sur le haut de la machine, celle-ci se bloque immédiatement.

On le comprend, si on imagine le calcul approché auquel la machine procède (voir les stratégies de calcul approché dans les paragraphes qui suivent) : la machine va devoir calculer $\frac{x^{2000001}}{x^2+1}$, pour des points de l'intervalle $[0, 1]$, par exemple pour $x = 0, 1$.

C'est-à-dire qu'il s'agira d'exprimer $10^{-2000001}$. Cela fait beaucoup pour une machine qui ne connaît pas d'exposant supérieur à 1000...

Le détour théorique nous donne ainsi un peu plus d'informations que le seul recours à la machine...

b) Inégalité de la moyenne

Soit f continue sur $[a, b]$, avec $a < b$ (inégalité stricte). Il existe donc m et M , minimum et maximum de f sur cet intervalle.

Pour tout t de $[a, b]$, on a donc : $m \leq f(t) \leq M$.

Par intégration, et application du corollaire 2 du théorème 3, on obtient :

$$\int_a^b m \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b M \, dt, \text{ c'est à dire : } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a).$$

Ce que l'on peut écrire aussi : $m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt < M$.

Théorème 4

Soit f continue sur $[a, b]$, $a < b$. Le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$ est compris entre le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

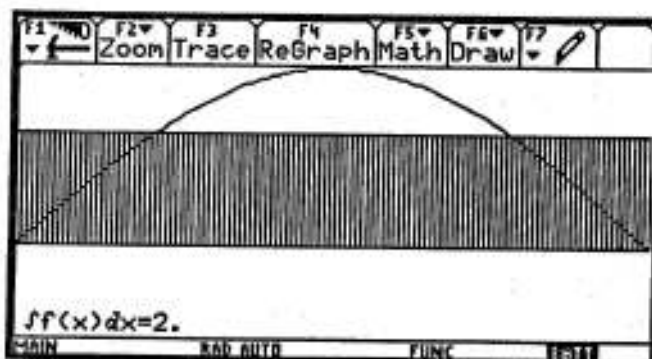
Définition : Ce réel est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Remarque 1. Cette formule traduit une extension de la définition discrète de "moyenne arithmétique" au domaine continu (une certaine prudence s'impose, à propos de cette remarque : le rapport entre Σ et $\int$ n'a rien de trivial...).

Remarque 2. Cette inégalité, résultat fondamental du cours d'Analyse de Terminale, n'est qu'une autre version de l'Inégalité des Accroissements Finis, autre résultat fondamental. Il suffit pour cela d'appliquer l'IAF à la fonction $h : x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$.

Remarque 3. Signification graphique pour une fonction positive : l'aire du rectangle de base $(b - a)$ et de hauteur $y = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est égale évidemment à $\int_a^b f(t) dt$. le calcul de la moyenne réalise ainsi une rectification de la courbe. On "rabote" les sommets pour combler les "fossés".

Ci contre la courbe de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.
La valeur moyenne de la fonction sur cet intervalle est $\frac{2}{\pi}$. L'aire du rectangle hachuré, de base π et de hauteur la valeur moyenne est précisément l'aire de l'arche de sinus.



Exercice

Prouver que la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[a, b]$ est égale à la pente de la corde passant par les points d'abscisse a et b .

c) Intégrale et valeur absolue.

- Si f est positive sur l'intervalle $[a, b]$, on a sans peine :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b f(t) dt.$$

- si f est négative sur $[a, b]$, on obtient le même résultat. En effet :

$$\int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|.$$

- si f n'a pas un signe constant, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en intervalles où le signe de f soit constant. Par exemple si f est négative sur $[a, c]$, puis positive sur $[c, b]$, on écrit :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \right| \text{ par application de la linéarité de l'intégrale.}$$

$$\text{Puis } \left| \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \right| \leq \left| \int_a^c f(t) dt \right| + \left| \int_c^b f(t) dt \right| \text{ par inégalité triangulaire.}$$

Et pour chacune des intégrales, on peut appliquer l'égalité précédente. D'où, pour finir :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

En conclusion de cette partie générale, quelques exercices variés :

Exercice 1.

Quelles sont les fonctions continues f qui vérifient, pour tout couple $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f^2(t) dt.$$

Une solution possible : on fixe a et on rend b variable.

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x f^2(t) dt.$$

deux fonctions égales ont leurs dérivées égales. D'où, pour tout x , $f(x) = f^2(x)$.
 $f(x)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, et comme f est négative...

Exercice 2.

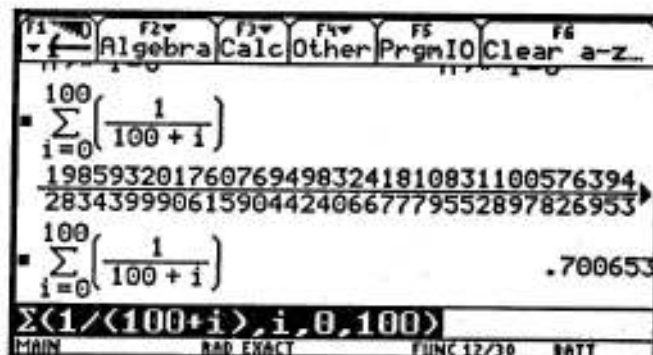
Etudier la limite de la suite :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

La calculatrice ne donne pas d'expression synthétique de S_n , pas d'indication pour la limite.

On ne peut avoir que des valeurs exactes, ou approchées, de termes particuliers de la suite.

Il faut avoir recours à un encadrement par des intégrales pour trouver la limite, ln 2.



Exercice 3

Rechercher des stratégies d'encadrement de $I = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{t} dt$.

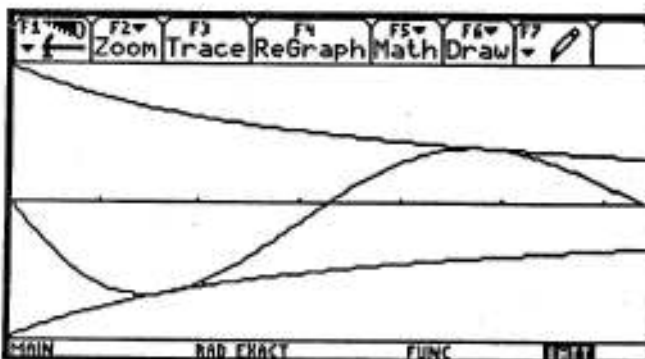
On constate que la calculatrice ne donne pas de valeur exacte de I mais une valeur approchée. On peut vouloir contrôler cette approximation, en utilisant les théorèmes d'encadrement, la relation de Chasles sur les bornes, etc. Les encadrements obtenus sont plus ou moins brutaux

- on peut encadrer t et laisser varier $\sin t$ (ou le contraire) sur tout l'intervalle d'intégration ;
- on peut s'adapter aux fluctuations de la fonction, en la considérant sur $[\pi, 2\pi]$, puis $[2\pi, 3\pi]$.

Cela correspond à des visions différentes des phénomènes.

Ici, on encadre f entre $1/x$ et $-1/x$.

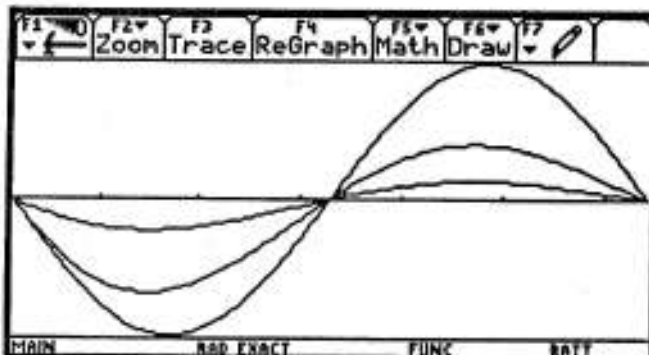
Le résultat, en terme d'intégrale, sera probablement assez grossier.



Ici, la fonction est encadrée entre $\sin x / \pi$ et $\sin x / (2\pi)$.

Une autre vision du monde...

Cela prépare les méthodes plus systématiques de calcul approché d'intégrales.



Petit complément au cours d'intégration

Après le cours, ont été étudiées différentes techniques d'intégration (recherche de primitives, transformation d'écritures, intégration par parties, calcul approché par la méthode des rectangles). Puis a été traité un premier problème d'application du calcul intégral : l'approximation de π par la méthode de Wallis.

A travers ces différentes activités, le calcul intégral est apparu comme un terrain privilégié pour changer de point de vue, pour considérer une fonction sous des angles différents. L'utilisation de la TI92 s'est révélée dans ces occasions assez commode. On traite ci-dessous une autre application du calcul intégral.

Introduction

On a vu que le calcul intégral, en particulier l'intégration par parties, permettait d'approcher d'aussi près que l'on voulait certains nombres importants, comme π .

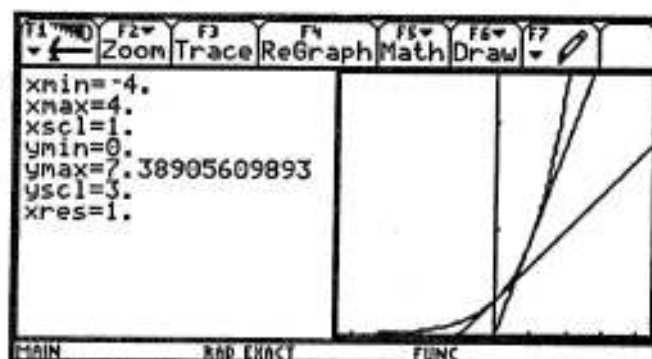
Nous allons voir ici que le calcul intégral permet aussi d'approcher certaines fonctions "d'aussi près que l'on veut", par des polynômes. A condition que ces fonctions ne soient pas trop cahotiques, sinon comment pourrait-on les approcher par des fonctions aussi régulières que des polynômes ? On supposera donc que les fonctions en question sont dérivables autant de fois qu'on le veut. La méthode que l'on va voir a été développée par un mathématicien anglais, Taylor (1685- 1731). On va l'étudier dans un cas particulier : la fonction exponentielle.

On va donc prouver que la fonction exponentielle peut-être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions polynômes, que l'on va explicitement construire. On se placera au voisinage de 0.

1. La fonction exponentielle, référence parmi les références

Il suffit d'évoquer la fonction exponentielle pour avoir en tête ses principales caractéristiques, en particulier graphiques :

Une vision possible d'une partie de la courbe de la fonction exponentielle, en repère ortho-normé, avec les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.



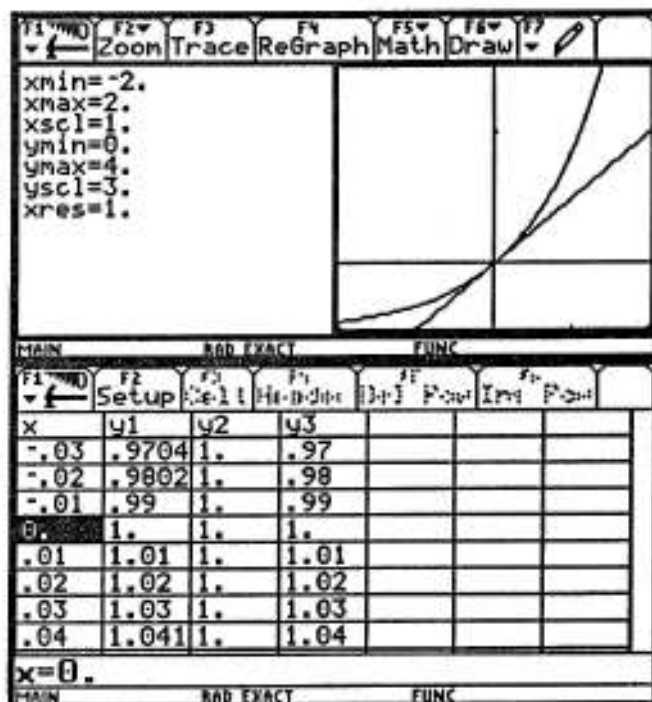
On sait en particulier que la droite d'équation $y = x+1$ est tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1. On dispose de deux informations importantes :

- * $e^x \geq x + 1$ (démonstré plusieurs fois dans des problèmes cette année) ;
- * la fonction affine $x+1$ est la meilleure approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0 (cf le cours sur la dérivation).

Mais c'est donc l'amorce de notre solution ! En effet, on veut approcher la fonction exponentielle, au voisinage de 0, par des polynômes.

Si on veut un polynôme de degré 0, c'est simple : on sait que, si x est proche de 0, e^x est proche de 1. Si on veut un polynôme de degré 1, on sait que, si x est proche de 0, e^x est proche de $1 + x$.

La fonction exponentielle entre -2 et 2, une première approche grossière au voisinage de 0 (par la fonction constante 1), et une approche un peu fine par la fonction tangente $x + 1$.



En Y1, la fonction exponentielle, en Y2 la fonction 1, en Y3 la fonction $x + 1$.

Question : peut-on trouver une approximation plus précise, avec un polynôme de degré 2 ? puis 3 ? etc.
Pour aller plus loin, il faut d'abord analyser de plus près les premières approximations établies.

2. Toujours contrôler les approximations.

Si a est proche de 0, quel est l'écart entre e^a et 1 ? Si a est proche de 0, quel est l'écart entre e^a et $1 + a$? (on prendra dans ce qui suit $a > 0$).
On dispose de deux outils (dans le cadre du calcul infinitésimal) : la dérivée, et l'intégrale.

- avec la dérivée.

Evaluons $e^a - 1$, c'est à dire $e^a - e^0$. Cette forme peut faire penser à l'inégalité des accroissements finis. En effet, sur l'intervalle $[0, a]$, la dérivée de la fonction exponentielle, c'est à dire la fonction exponentielle, est bornée entre 1 et e^a . D'où l'encadrement : $1(a) \leq e^a - 1 \leq e^a(a)$. (on rappelle que $a > 0$)

Evaluons maintenant $e^a - 1 - a$. Pour cela, écrivons que la dérivée de la fonction exponentielle, en 0, est égale à 1 : $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^a - e^0}{a - 0} = 1$, c'est à dire $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^a - 1}{a} = 1$, c'est à dire enfin $\frac{e^a - 1}{a} = 1 + \epsilon(a)$, où ϵ est une fonction qui tend vers 0 quand a tend vers 0.

Pour finir vraiment, on dispose de : $e^a - 1 = a + a \epsilon(a)$, c'est à dire $e^a - 1 - a = a \epsilon(a)$. Ainsi, l'utilisation de la dérivation ne nous donne qu'un encadrement, ou un renseignement "à la limite", sur l'écart entre la fonction exponentielle et ses différentes approximations.

On dispose en fait d'un autre théorème, à partir de la dérivation, qui nous permettrait d'aller plus loin, mais il n'est pas au programme de la classe de Terminale.

- avec l'intégrale.

On repart de $e^a - 1$, c'est à dire $e^a - e^0$. On reconnaît $[e^t]_0^a$, c'est à dire $\int_0^a e^t dt$.

Premier résultat donc, $e^a - 1 = \int_0^a e^t dt$, c'est à dire $e^a = 1 + \int_0^a e^t dt$

Peut-on à partir de là aller plus loin, et évaluer $e^a - 1 - a$? On peut songer à utiliser le premier résultat, en "coupant" l'intégrale en deux parties, à nouveau avec une intégration par parties.

$$\int_0^a e^t dt = [(t+k).e^t]_0^a - \int_0^a (t+k).e^t dt$$

$$\text{Avec } u(t) = e^t \quad \text{donc } u'(t) = e^t$$

$$v'(t) = 1 \quad \text{donc } v(t) = t + k$$

On a gardé une constante k pour ajuster au mieux le crochet (comme dans l'évaluation de l'erreur dans la méthode des rectangles). Regardons donc le crochet $[(t+k).e^t]_0^a$. On veut faire apparaître a . Il faut donc faire disparaître e^a , c'est à dire choisir $k = -a$.

$$\text{On a alors } \int_0^a e^t dt = [(t-a).e^t]_0^a - \int_0^a (t-a).e^t dt = a - \int_0^a (t-a).e^t dt$$

En recollant avec le premier résultat, on obtient :

$$e^a - 1 = a - \int_0^a (t-a).e^t dt, \text{ ou, en arrangeant un peu :}$$

$$\text{Deuxième résultat } e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t).e^t dt$$

Un coup d'oeil de simple vérification sur la machine.

Le résultat brut de l'intégrale doit être amélioré par la commande Expand pour obtenir l'expression souhaitée.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...

$$= \int_0^a ((a-t) \cdot e^t) dt$$

$$= \text{expand} \left(\int_0^a ((a-t) \cdot e^t) dt \right)$$

$$\text{expand}((a-t) \cdot e^t, t, 0, a)$$

3. Du germe à la généralisation

Puisque l'intégration par parties a permis de passer de l'approximation de degré 0 (la constante 1) à l'approximation de degré 1 (l'approximation affine $1 + a$), pourquoi ne pas poursuivre pour obtenir une approximation de degré 2?

On reprend $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t).e^t dt$, et on intègre par parties l'intégrale.

$$\int_0^a (a-t).e^t dt = \left[\left(at - \frac{t^2}{2} + k \right) \cdot e^t \right]_0^a - \int_0^a \left(at - \frac{t^2}{2} + k \right) \cdot e^t dt$$

$$\text{Avec } u(t) = e^t \quad \text{donc } u'(t) = e^t$$

$$v'(t) = a - t \quad \text{donc } v(t) = at - \frac{t^2}{2} + k$$

Comme précédemment, on va ajuster k pour que la crochet donne une expression polynômiale, sans exponentielle. Il suffit pour cela que $at - \frac{t^2}{2} + k$ s'annule quand t

prend la valeur a . On trouve $k = -\frac{a^2}{2}$

$$\text{D'où } \int_0^a (a-t) \cdot e^t dt = \left[\left(at - \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \cdot e^t \right]_0^a - \int_0^a \left(at - \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) e^t dt =$$

$$\frac{a^2}{2} + \int_0^a \frac{-2at + t^2 + a^2}{2} e^t dt = \frac{a^2}{2} + \int_0^a \frac{(a-t)^2}{2} e^t dt.$$

En recollant au deuxième résultat, on obtient :

Troisième résultat $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \int_0^a \frac{(a-t)^2}{2} e^t dt.$

Vérification immédiate.

Le résultat brut donné par la machine n'est guère engageant. Après l'application de la commande Expand cela va un peu mieux...

Peut-on aller plus loin ? On ne fera pas ici la démonstration par récurrence (à la portée du lecteur courageux) qui aboutira à :

Nième résultat : $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt.$

On a bien ainsi approché la fonction exponentielle par une fonction polynôme. L'écart entre les deux est donné par une intégrale, que l'on appelle le "reste intégral". Cette formule est appelée la formule de Taylor, avec reste intégral, appliquée à la fonction exponentielle. Ce résultat est d'ailleurs donné (partiellement) par la machine :

Dans l'application initiale, menu Calc, commande Taylor.

On doit indiquer la fonction, la variable, le degré du polynôme d'approximation, et enfin le voisinage du point où on se situe, ici 0.

On note que la calculatrice ne donne pas le résultat général : il ne faut pas rêver !

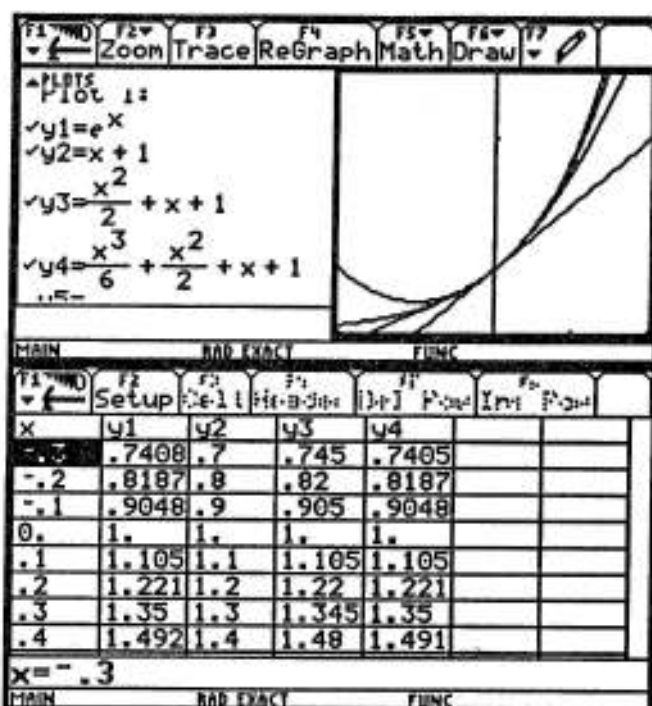
On peut aussi observer l'approche de la fonction exponentielle par ces polynômes, sur le plan numérique, et graphique.

Il restera ensuite à vérifier que, quand n tend vers $+\infty$, le polynôme "colle" bien à la fonction, c'est à dire que le "reste intégral" tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Observation graphique :

On a placé là les trois premiers "polynômes de Taylor".

Il faut observer les tracés les uns après les autres pour constater le rapprochement entre la fonction exponentielle et les polynômes successifs.



Observation numérique :

Le tableau de valeurs (entre -0,3 et 0,4, avec un pas de 0,1) est aussi éclairant.

4. Une vérification partielle...

Il reste à démontrer donc que le reste intégral tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On va d'abord le faire dans un cas particulier, et important, avec $a = 1$. Reprenons la formule générale de Taylor, avec $a = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

On pose $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$

On va démontrer que l'intégrale I_n tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouvera que la suite u_n tend vers e .

Cette intégrale est difficilement calculable. On va donc l'encadrer.

t étant compris entre 0 et 1 (intervalle d'intégration), il est clair que la fonction à intégrer est positive, donc l'intégrale I_n (les bornes étant dans le bon sens) aussi.

Voilà pour la minoration. Pour la majoration maintenant : $(1-t)$ est inférieur à 1. Donc

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} e^t dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t dt \leq \frac{1}{n!} [e^t]_0^1 = \frac{1}{n!} [e - 1].$$

Conclusion :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leq \frac{1}{n!} [e - 1]$$

Une application immédiate du théorème d'encadrement prouve que l'intégrale I_n tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On a même mieux, puisque cette inégalité nous permet de contrôler la convergence de la suite u_n vers e :

$$e - u_n = I_n \leq \frac{1}{n!} [e - 1] \leq \frac{2}{n!} \quad (\text{si on majore } e-1 \text{ par } 2 \text{ pour simplifier les choses}).$$

L'intégrale I_n est positive, donc la suite u_n est inférieure à e . Si on veut que u_n donne une valeur approchée de e à 10^{-5} par défaut (par exemple), il suffit que $\frac{2}{n!}$ soit inférieur

à 10^{-5} . Quelle valeur de n choisir ?

On peut utiliser le fichier de suites pour une réponse rapide :

Il suffit donc de prendre $n = 9$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27	F28	F29	F30	F31	F32	F33	F34	F35	F36	F37	F38	F39	F40	F41	F42	F43	F44	F45	F46	F47	F48	F49	F50	F51	F52	F53	F54	F55	F56	F57	F58	F59	F60	F61	F62	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75	F76	F77	F78	F79	F80	F81	F82	F83	F84	F85	F86	F87	F88	F89	F90	F91	F92	F93	F94	F95	F96	F97	F98	F99	F100	F101	F102	F103	F104	F105	F106	F107	F108	F109	F110	F111	F112	F113	F114	F115	F116	F117	F118	F119	F120	F121	F122	F123	F124	F125	F126	F127	F128	F129	F130	F131	F132	F133	F134	F135	F136	F137	F138	F139	F140	F141	F142	F143	F144	F145	F146	F147	F148	F149	F150	F151	F152	F153	F154	F155	F156	F157	F158	F159	F160	F161	F162	F163	F164	F165	F166	F167	F168	F169	F170	F171	F172	F173	F174	F175	F176	F177	F178	F179	F180	F181	F182	F183	F184	F185	F186	F187	F188	F189	F190	F191	F192	F193	F194	F195	F196	F197	F198	F199	F200	F201	F202	F203	F204	F205	F206	F207	F208	F209	F210	F211	F212	F213	F214	F215	F216	F217	F218	F219	F220	F221	F222	F223	F224	F225	F226	F227	F228	F229	F230	F231	F232	F233	F234	F235	F236	F237	F238	F239	F240	F241	F242	F243	F244	F245	F246	F247	F248	F249	F250	F251	F252	F253	F254	F255	F256	F257	F258	F259	F260	F261	F262	F263	F264	F265	F266	F267	F268	F269	F270	F271	F272	F273	F274	F275	F276	F277	F278	F279	F280	F281	F282	F283	F284	F285	F286	F287	F288	F289	F290	F291	F292	F293	F294	F295	F296	F297	F298	F299	F300	F301	F302	F303	F304	F305	F306	F307	F308	F309	F310	F311	F312	F313	F314	F315	F316	F317	F318	F319	F320	F321	F322	F323	F324	F325	F326	F327	F328	F329	F330	F331	F332	F333	F334	F335	F336	F337	F338	F339	F340	F341	F342	F343	F344	F345	F346	F347	F348	F349	F350	F351	F352	F353	F354	F355	F356	F357	F358	F359	F360	F361	F362	F363	F364	F365	F366	F367	F368	F369	F370	F371	F372	F373	F374	F375	F376	F377	F378	F379	F380	F381	F382	F383	F384	F385	F386	F387	F388	F389	F390	F391	F392	F393	F394	F395	F396	F397	F398	F399	F400	F401	F402	F403	F404	F405	F406	F407	F408	F409	F410	F411	F412	F413	F414	F415	F416	F417	F418	F419	F420	F421	F422	F423	F424	F425	F426	F427	F428	F429	F430	F431	F432	F433	F434	F435	F436	F437	F438	F439	F440	F441	F442	F443	F444	F445	F446	F447	F448	F449	F450	F451	F452	F453	F454	F455	F456	F457	F458	F459	F460	F461	F462	F463	F464	F465	F466	F467	F468	F469	F470	F471	F472	F473	F474	F475	F476	F477	F478	F479	F480	F481	F482	F483	F484	F485	F486	F487	F488	F489	F490	F491	F492	F493	F494	F495	F496	F497	F498	F499	F500	F501	F502	F503	F504	F505	F506	F507	F508	F509	F510	F511	F512	F513	F514	F515	F516	F517	F518	F519	F520	F521	F522	F523	F524	F525	F526	F527	F528	F529	F530	F531	F532	F533	F534	F535	F536	F537	F538	F539	F540	F541	F542	F543	F544	F545	F546	F547	F548	F549	F550	F551	F552	F553	F554	F555	F556	F557	F558	F559	F560	F561	F562	F563	F564	F565	F566	F567	F568	F569	F570	F571	F572	F573	F574	F575	F576	F577	F578	F579	F580	F581	F582	F583	F584	F585	F586	F587	F588	F589	F590	F591	F592	F593	F594	F595	F596	F597	F598	F599	F600	F601	F602	F603	F604	F605	F606	F607	F608	F609	F610	F611	F612	F613	F614	F615	F616	F617	F618	F619	F620	F621	F622	F623	F624	F625	F626	F627	F628	F629	F630	F631	F632	F633	F634	F635	F636	F637	F638	F639	F640	F641	F642	F643	F644	F645	F646	F647	F648	F649	F650	F651	F652	F653	F654	F655	F656	F657	F658	F659	F660	F661	F662	F663	F664	F665	F666	F667	F668	F669	F670	F671	F672	F673	F674	F675	F676	F677	F678	F679	F680	F681	F682	F683	F684	F685	F686	F687	F688	F689	F690	F691	F692	F693	F694	F695	F696	F697	F698	F699	F700	F701	F702	F703	F704	F705	F706	F707	F708	F709	F710	F711	F712	F713	F714	F715	F716	F717	F718	F719	F720	F721	F722	F723	F724	F725	F726	F727	F728	F729	F730	F731	F732	F733	F734	F735	F736	F737	F738	F739	F740	F741	F742	F743	F744	F745	F746	F747	F748	F749	F750	F751	F752	F753	F754	F755	F756	F757	F758	F759	F760	F761	F762	F763	F764	F765	F766	F767	F768	F769	F770	F771	F772	F773	F774	F775	F776	F777	F778	F779	F780	F781	F782	F783	F784	F785	F786	F787	F788	F789	F790	F791	F792	F793	F794	F795	F796	F797	F798	F799	F800	F801	F802	F803	F804	F805	F806	F807	F808	F809	F810	F811	F812	F813	F814	F815	F816	F817	F818	F819	F820	F821	F822	F823	F824	F825	F826	F827	F828	F829	F830	F831	F832	F833	F834	F835	F836	F837	F838	F839	F840	F841	F842	F843	F844	F845	F846	F847	F848	F849	F850	F851	F852	F853	F854	F855	F856	F857	F858	F859	F860	F861	F862	F863	F864	F865	F866	F867	F868	F869	F870	F871	F872	F873	F874	F875	F876	F877	F878	F879	F880	F881	F882	F883	F884	F885	F886	F887	F888	F889	F890	F891	F892	F893	F894	F895	F896	F897	F898	F899	F900	F901	F902	F903	F904	F905	F906	F907	F908	F909	F910	F911	F912	F913	F914	F915	F916	F917	F918	F919	F920	F921	F922	F923	F924	F925	F926	F927	F928	F929	F930	F931	F932	F933	F934	F935	F936	F937	F938	F939	F940	F941	F942	F943	F944	F945	F946	F947	F948	F949	F950	F951	F952	F953	F954	F955	F956	F957	F958	F959	F960	F961	F962	F963	F964	F965	F966	F967	F968	F969	F970	F971	F972	F973	F974	F975	F976	F977	F978	F979	F980	F981	F982	F983	F984	F985	F986	F987	F988	F989	F990	F991	F992	F993	F994	F995	F996	F997	F998	F999	F1000	F1001	F1002	F1003	F1004	F1005	F1006	F1007	F1008	F1009	F1010	F1011	F1012	F1013	F1014	F1015	F1016	F1017	F1018	F1019	F1020	F1021	F1022	F1023	F1024	F1025	F1026	F1027	F1028	F1029	F1030	F1031	F1032	F1033	F1034	F1035	F1036	F1037	F1038	F1039	F1040	F1041	F1042	F1043	F1044	F1045	F1046	F1047	F1048	F1049	F1050	F1051	F1052	F1053	F1054	F1055	F1056	F1057	F1058	F1059	F1060	F1061	F1062	F1063	F1064	F1065	F1066	F1067	F1068	F1069	F1070	F1071	F1072	F1073	F1074	F1075	F1076	F1077	F1078	F1079	F1080	F1081	F1082	F1083	F1084	F1085	F1086	F1087	F1088	F1089	F1090	F1091	F1092	F1093	F1094	F1095	F1096	F1097	F1098	F1099	F1100	F1101	F1102	F1103	F1104	F1105	F1106	F1107	F1108	F1109	F1110	F1111	F1112	F1113	F1114	F1115	F1116	F1117	F1118	F1119	F1120	F1121	F1122	F1123	F1124	F1125	F1126	F1127	F1128	F1129	F1130	F1131	F1132	F1133	F1134	F1135	F1136	F1137	F1138	F1139	F1140	F1141	F1142	F1143	F1144	F1145	F1146	F1147	F1148	F1149	F1150	F1151	F1152	F1153	F1154	F1155	F1156	F1157	F1158	F1159	F1160	F1161	F1162	F1163	F1164	F1165	F1166	F1167	F1168	F1169	F1170	F1171	F1172	F1173	F1174	F1175	F1176	F1177	F1178	F1179	F1180	F1181	F1182	F1183	F1184	F1185	F1186	F1187	F1188	F1189	F1190	F1191	F1192	F1193	F1194	F1195	F1196	F1197	F1198	F1199	F1200	F1201	F1202	F1203	F1204	F1205	F1206	F1207	F1208	F1209	F1210	F1211	F1212	F1213	F1214	F1215	F1216	F1217	F1218	F1219	F1220	F1221	F1222	F1223	F1224	F1225	F1226	F1227	F1228	F1229	F1230	F1231	F1232	F1233	F1234	F1235	F1236	F1237	F1238	F1239	F1240	F1241	F1242	F1243	F1244	F1245	F1246	F1247	F1248	F1249	F1250	F1251	F1252	F1253	F1254	F1255	F1256	F1257	F1258	F1259	F1260	F1261	F1262	F1263	F1264	F1265	F1266	F1267	F1268	F1269	F1270	F1271	F1272	F1273	F1274	F1275	F1276	F1277	F1278	F1279	F1280	F1281	F1282	F1283	F1284	F1285	F1286	F1287	F1288	F1289	F1290	F1291	F1292	F1293	F1294	F1295	F1296	F1297	F1298	F1299	F1300	F1301	F1302	F1303	F1304	F1305	F1306	F1307	F1308	F1309	F1310	F1311	F1312	F1313	F1314	F1315	F1316	F1317	F1318	F1319	F1320	F1321	F1322	F1323	F1324	F1325	F1326	F1327	F1328	F1329	F1330	F1331	F1332	F1333	F1334	F1335	F1336	F1337	F1338	F1339	F1340	F1341	F1342	F1343	F1344	F1345	F1346	F1347	F1348	F1349	F1350	F1351	F1352	F1353	F1354	F1355	F1356	F1357	F1358	F1359	F1360	F1361	F1362	F1363	F1364	F1365	F1366	F1367	F1368	F1369	F1370	F1371	F1372	F1373	F1374	F1375	F1376	F1377	F1378	F1379	F1380	F1381	F1382	F1383	F1384	F1385	F1386	F1387	F1388	F1389	F1390	F1391	F1392	F1393	F1394	F1395	F1396	F1397	F1398	F1399	F1400	F1401	F1402	F1403	F1404	F1405	F1406	F1407	F1408	F1409	F1410	F1411	F1412	F1413	F1414	F1415	F1416	F1417	F1418	F1419	F1420	F1421	F1422	F1423	F1424	F1425	F1426	F1427	F1428	F1429	F1430	F1431	F1432	F1433	F1434	F1435	F1436	F1437	F1438	F1439	F1440	F1441	F1442	F1443	F1444	F1445	F1446	F1447	F1448	F1449	F1450	F1451	F1452	F1453	F1454	F1455	F1456	F1457	F1458	F1459	F1460	F1461	F1462	F1463	F1464	F1465	F1466	F1467	F1468	F1469	F1470	F1471	F1472	F1473	F1474	F1475	F1476	F1477	F1478	F1479	F1480	F1481	F1482
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Autre technique, pour obtenir les 18 décimales souhaitées pour e : on applique la commande PropFrac à la fraction, après l'avoir multiplié par 10^{18} .

On obtient alors la division "en nombres entiers", et donc la partie entière du quotient (on retrouve le même résultat que précédemment).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\frac{6613313319248080001}{2432902008176640000} \cdot 10^{18}$					
$\frac{40364461177051269537353515625}{14849255421}$					
$\text{propFrac}\left(\frac{40364461177051269537353515625}{14849255421}\right)$					
$2718281828459045235 + \frac{5045546690}{14849255421}$					
$\dots 269537353515625 / 14849255421 \rangle$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 2/30			

Le contrôle de la précision nous assure que, même si on calcule un terme de la suite "plus loin", la 18ème décimale ne sera pas affectée : essayons avec u_{30} .

On a calculé u_{30} , puis multiplié ce nombre par 10^{18} , puis pris la partie entière du résultat.

On retrouve les mêmes décimales (heureusement!)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\sum_{i=0}^{30} \left(\frac{1}{i!} \right)$					
$\frac{55464002213405654539818183437977}{20404066139399312202792960000000}$					
$\text{propFrac}\left(\frac{5546400221340565453981818343}{20404066139399312202792960000}\right)$					
$2718281828459045235 + \frac{3589516305994461}{9962922919628570}$					
$\dots 3993122027929600000000 \times 10^{18} \rangle$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 2/30			

On peut toutefois se poser la question : est-ce que, en appliquant la même technique à la valeur approchée de e donnée directement par la machine, on ne pourrait pas trouver ces 18 décimales ? Essayons...

La réponse est non : on ne gagne qu'une décimale (59 à la fin au lieu de 6). Mais les zéros donnés ensuite... sont faux.

L'utilisation des intégrales a bien permis d'obtenir de la machine plus qu'elle ne donnait "spontanément".

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
e^1					
2.71828182846					
$\text{iPart}(2.718281828459 \cdot 10^{18})$					
2718281828459000000					
$\text{iPart}(2.718281828459 \times 10^{18}) \rangle$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 2/30			

On peut par cette technique obtenir une précision plus grande encore, en allant plus loin. Ce qui finira par prendre du temps... Et ce n'est pas forcément indispensable, pour ce qu'on a à faire, en Terminale, de e .

Cependant, la recherche de l'information la plus grande sur un objet (mathématique, ou autre), avec les algorithmes les plus performants, est un ressort important de l'activité scientifique, et de l'activité tout court !

Ainsi, si on considère la suite $v_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}$, le lecteur curieux pourra constater que la convergence de cette suite vers e est beaucoup plus rapide que la convergence de la suite u_n vers e . Simple observation, car il resterait à prouver bien sûr que cette suite converge bien vers e , et que la convergence est effectivement plus rapide...

5. Puis une vérification plus générale

(lecture facultative, mais crayon à la main...)

Ce que l'on a fait pour $a = 1$, peut-on le reproduire pour a quelconque ?

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!} e^t dt = u_n + I_n$$

Peut-on prouver que l'intégrale I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$?

On sait que, sur l'intervalle d'intégration, $0 \leq t \leq a$.

Donc $0 \leq a - t \leq a$. Donc $0 \leq (a - t)^n \leq a^n$.

Ce qui donne
$$0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!} \int_0^a e^t dt = \frac{a^n}{n!} [e^t]_0^a = \frac{a^n}{n!} (e^a - 1).$$

C'est à dire
$$0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!} (e^a - 1).$$

Si on prouve que $\frac{a^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est gagné.

C'est évidemment le cas si a est strictement compris entre -1 et 1 . On a au numérateur une suite géométrique qui converge vers 0 (théorème fondamental des suites géométriques), et au dénominateur une suite qui tend à l'évidence vers $+\infty$. Le quotient tend (doublement, pourrait-on dire...) vers 0.

Si $a = 1$, le problème a déjà été traité. Si $a = -1$, le lecteur avisé comprendra qu'il n'y a pas de problème.

Que se passe-t-il sinon ? On va traiter le problème dans le cas où $a > 1$ (si $a < -1$, le lecteur, toujours aussi avisé, pourra passer à la valeur absolue...). Coup d'oeil machine :

La machine ne donne pas directement la limite de $\frac{a^n}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$. Par contre, si on précise que a est strictement supérieur à 1, elle donne la limite 0. Et si a est inférieur strictement à -1 , $-a$ est alors strictement supérieur à $+1$, et on est ramené au cas précédent.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right)$					
undef					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right) a > 1$					
0					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right) a < -1$					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-a)^n \cdot (-1)^n}{n!} \right)$					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right) a < -1$					
0					
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^n}{n!} \right) a < -1$					
0					

A condition de savoir interpréter la réponse de la machine !

Essayons maintenant d'établir ce résultat "à la main".

On a alors $\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$. Pourquoi cette fraction devrait-elle tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$?

Prenons un peu de recul :

- les facteurs du numérateur sont constants, toujours égaux à a ;
- les facteurs du dénominateur deviennent de plus en plus grand.

Mais, c'est bien sûr ! A partir d'un certain moment, les facteurs du dénominateur vont finir par dépasser, et "écraser" a de leur supériorité !

Mettons ceci en forme.

On appelle A la "partie entière" de a , c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à a (si $a = \sqrt{2}$, $A = 1$; si $a = 4,537$, $A = 4$, etc...). On pose alors, pour être sûr de dépasser a , $N = A + 1$.

Revenons alors à notre quotient, en choisissant $n > N$ (ce qui arrivera bien, puisque n tend vers $+\infty$).

On aura alors $\frac{a^n}{n!} = \frac{a.a.a.a \dots a.a.a \dots a.a.a.a}{1.2.3 \dots (N-1).N.(N+1) \dots n}$. On coupe cette fraction en deux :

$\frac{a^n}{n!} = \frac{a.a \dots a.a.a}{1.2.3 \dots (N-1)} \cdot \frac{a.a.a \dots a.a}{N(N+1) \dots n}$. Le premier quotient est constant.

Intéressons-nous au deuxième :

$$\frac{a.a \dots a.a}{N(N+1) \dots n} = \frac{a}{N} \cdot \frac{a}{N+1} \dots \frac{a}{n}.$$

On a bien sûr : $\frac{a}{N} > \frac{a}{N+1} > \dots > \frac{a}{n}$.

D'où : $\frac{a.a \dots a.a}{N(N+1) \dots n} < \left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}$

(attention au dénombrement des facteurs !)

Or $a < N$. Donc $0 < \frac{a}{N} < 1$. Donc $\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

Pour finir :

$$0 < \frac{a.a \dots a.a}{N(N+1) \dots n} < \left(\frac{a}{N}\right)^n \left(\frac{a}{N}\right)^{-N+1}.$$

Application du théorème d'encadrement, et fin :

$\frac{a^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Conclusion finale, pour tout réel a (vous pouvez le tester pour une ou deux valeurs)

e^a est la limite de la suite $1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$.

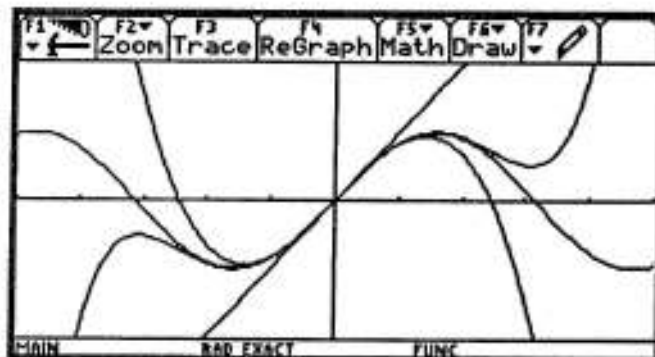
Petit défi

On peut reproduire la méthode de Taylor, appliquée à la fonction sinus. Ce n'est pas très compliqué. Il suffit d'essayer...

Et on pourra vérifier le résultat obtenu en consultant le menu Calc, commande Taylor, de la TI92, ou en vérifiant graphiquement que la famille de polynômes obtenue approche bien la fonction sinus.

Le "plumeau" des 3 premiers polynômes approchant la fonction sinus au voisinage de 0.
Esthétique, non ?

Le polynôme de degré 1 est, pour cause de tangente, la fonction qui à x associe x .



3. Problèmes "type bac"

F1	F2	F3	F4	F5	F6
$\frac{1}{x}$	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$x \rightarrow \infty$				$x \rightarrow \infty$	$\int x \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) dt$
$y_1(x)$					$\int_x^{2 \cdot x} \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) dt$
$\frac{d}{dx}(y_1(x))$					$\frac{2}{\ln(2 \cdot x)} - \frac{1}{\ln(x)}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x)$				$\lim_{x \rightarrow \infty}$	$\int_x^{2 \cdot x} \left(\frac{1}{\ln(t)} \right) dt$
limit(y1(x), x, ∞)					
F1 F2 F3 F4 F5 F6					
MODE F1 F2 F3 F4 F5 F6					
F1 F2 F3 F4 F5 F6					
F1 F2 F3 F4 F5 F6					

A plusieurs reprises, une correction détaillée de problèmes "classiques" est donnée aux élèves, après qu'ils y aient eux-mêmes réfléchi :

Il est essentiel en effet que les élèves distinguent clairement l'activité de recherche, de l'activité de "contrôle". Dans le premier cas, on relate les phases de tâtonnement, les erreurs rectifiées, dans le deuxième cas, on attend une rédaction "lisse".

Cette distinction est décisive pour le bac !



Un premier problème, classique, donné en contrôle en classe.

Une suite (w_n) est définie par la donnée de $w_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$W_{n+1} = 4 - e^{-W_n}$$

- 1) Décrire le comportement apparent de cette suite, en reproduisant les deux graphiques habituels et une table des valeurs approchées des premières valeurs.
- 2) On appelle f la fonction qui à x associe $f(x) = 4 - e^{-x}$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule racine sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera λ .
- 3) Si la suite (w_n) converge, quelles peuvent être les limites possibles ? Étudier les variations de f . Que peut-on en conclure pour les variations de la suite (w_n) ?
- 4) Montrer ensuite que la suite est croissante majorée.
- 5) Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $I = [1, \lambda]$. Montrer que pour tout x appartenant à I , $f(x)$ est compris entre 0 et 0,5. En déduire alors les inégalités : $0 \leq \lambda - w_{n+1} \leq 0,5(\lambda - w_n)$, puis $0 \leq \lambda - w_n \leq 0,5^n(\lambda - 1)$. Que peut-on en conclure pour la limite de la suite (w_n) ? A partir de quelle valeur de n est-on sûr d'avoir un écart entre λ et w_n inférieur à 10^{-100} ?

Il s'agit donc d'étudier la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 4 - e^{-w_n}$

Prologue

Avant toute manipulation, tout calcul, considérer l'objet mathématique de deux points de vue :

- quel type de suite est-ce ?

C'est une suite définie par récurrence, du type $w_{n+1} = f(w_n)$. On dispose de résultats importants sur ce type de suite (à ne pas confondre avec les suites définies par leur terme général !):

- si la fonction f est strictement croissante, la suite est strictement monotone ;
- si la suite est convergente, alors elle converge vers une des racines de l'équation $x = f(x)$.

- cet objet est-il toujours défini ?

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, si w_n existe, alors w_{n+1} existe aussi. Et comme w_0 existe bien, on peut affirmer que la suite est définie pour tout n .

1. On peut alors observer le comportement des premiers termes de la suite.

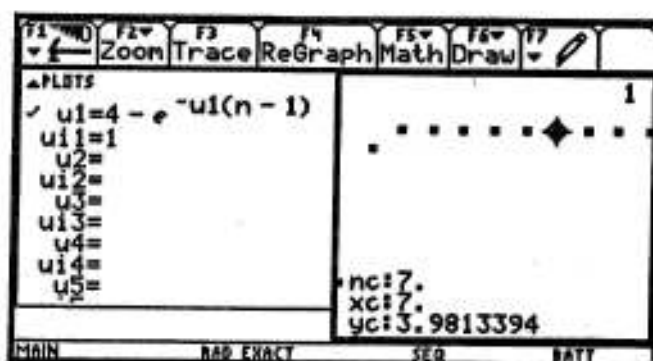
L'observation est toujours liée à des conjectures, au moins implicites...

Il semble que la suite est croissante, et convergente.

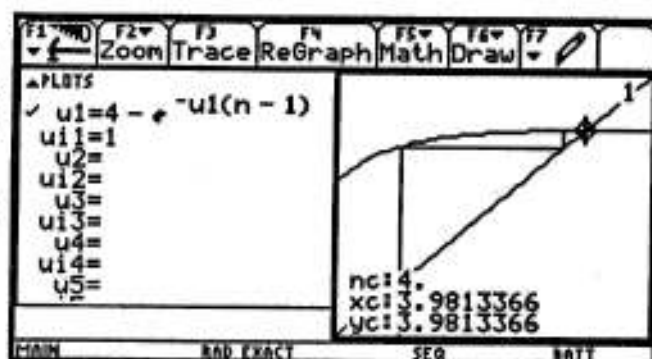
Mais vers quoi ?

F1	F2	F3	F4	F5	F6																
Setup	Del	Prn	Del	Prn	Prn																
▲PLOTS ✓ $u1=4 - e^{-u1(n-1)}$ u1=1 u2= u12= u3= u13= u4= u14= u5=			<table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>u1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.</td> <td>1.</td> </tr> <tr> <td>1.</td> <td>3.6321</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td>3.9735</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td>3.9812</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td>3.9813</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td>3.9813</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td>3.9813</td> </tr> </tbody> </table>			n	u1	0.	1.	1.	3.6321	2.	3.9735	3.	3.9812	4.	3.9813	5.	3.9813	6.	3.9813
n	u1																				
0.	1.																				
1.	3.6321																				
2.	3.9735																				
3.	3.9812																				
4.	3.9813																				
5.	3.9813																				
6.	3.9813																				
n=0.																					
MAIN			END EXACT																		
			SEQ																		
			BATT																		

La table de valeur indique une quasi-stabilisation un peu au dessus de 3,98 ;
(ce qui ne veut pas dire 4 !)



Et d'ailleurs le graphique Web nous rappelle que, si convergence il y a, cela ne peut être que vers une des solutions de l'équation $x = f(x)$, c'est à dire ici $x = 4 - e^{-x}$, et 4 peut difficilement être une solution de cette équation !



2. Montrer que l'équation $x = 4 - e^{-x}$ a une solution et une seule sur $\mathbb{R}^+$

Redisons le avec force, une telle question ne se traite pas "à la machine", mais appelle une réponse théorique. Il s'agit ici d'étudier la fonction g , qui à x associe :

$g(x) = x - 4 - e^{-x}$. On dispose de $g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$.

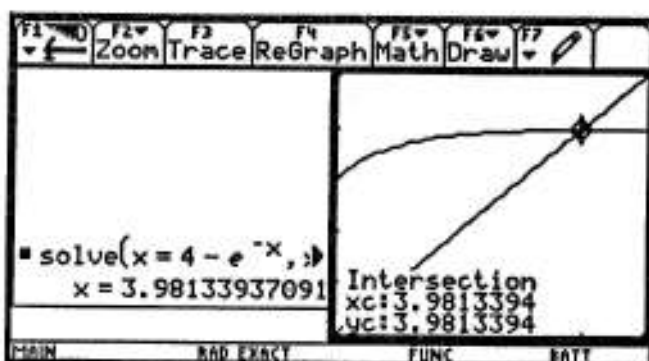
Par ailleurs $g(0) = -3$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$).

Théorème : la fonction g , continue et strictement croissante, définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [-3, +\infty[$.

0, élément de l'ensemble d'arrivée, a donc un antécédent λ et un seul dans $\mathbb{R}^+$.

On peut évidemment jeter un coup d'oeil, aussi bien graphique que dans l'application initiale, pour se rassurer. On retrouve une valeur approchée de λ qui ne nous étonnera pas (voir l'observation de la suite ci-dessus).

On constatera à nouveau que dans l'application initiale on dispose de plus de précision que dans l'application graphique.



3) Si la suite (w_n) converge, quelles peuvent être les limites possibles ? Étudier les variations de f . Que peut-on en conclure pour les variations de la suite (w_n) ?

La question contenait un petit piège : nous n'avons pas encore démontré que tous les termes de la suite sont positifs. Aussi, en toute rigueur, l'application du théorème ne peut nous dire que la chose suivante : si la suite converge, elle ne peut converger que vers une des solutions de l'équation $x = f(x)$ sur $\mathbb{R}$. Or, sur $\mathbb{R}$, rien ne nous dit que cette

équation n'a qu'une solution (en fait, elle en a deux...). Restons donc prudents - et rigoureux :

Si la suite converge, elle ne peut converger que vers une des solutions de l'équation $x = f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs on démontre sans peine que f est strictement croissante (via la dérivée par exemple). Donc la suite (w_n) est strictement monotone. Et comme w_1 est strictement plus grand que w_0 , **on peut en déduire que la suite (w_n) est strictement croissante.** Donc tous les termes de la suite sont supérieurs à w_0 . Donc a fortiori ils sont tous positifs.

On peut alors améliorer le résultat précédent : si la suite (w_n) converge, elle ne peut converger que vers une des solutions de l'équation $x = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$. Or on a démontré qu'il n'y avait qu'une seule solution de cette équation sur cet intervalle !

Donc si la suite (w_n) converge, elle ne peut converger que vers λ (ce qui ne prouve pas encore qu'elle converge !).

4) Montrer ensuite que la suite est croissante majorée.

Nous avons déjà montré qu'elle était croissante. On pourrait démontrer qu'elle est majorée par 4, puisque la fonction f est majorée par 4. On peut aussi faire plus fin : on va démontrer que la suite est majorée par λ .

C'est vrai pour w_0 . Supposons la propriété vraie pour w_n .

On aurait alors $w_n < \lambda$. On peut appliquer f , strictement croissante, aux deux membres de cette inégalité : $f(w_n) < f(\lambda)$, c'est à dire $w_{n+1} < \lambda$. La propriété est vraie à l'ordre 0, elle est récurrente, donc elle est vraie pour tout terme de la suite.

5) Montrer que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $I = [1, \lambda]$. Montrer que pour tout x appartenant à I , $f'(x)$ est compris entre 0 et 0,5. En déduire alors les inégalités : $0 \leq \lambda - w_{n+1} \leq 0,5 (\lambda - w_n)$, puis $0 \leq \lambda - w_n \leq 0,5^n (\lambda - 1)$.

Que peut-on en conclure pour la limite de la suite (w_n) ? A partir de quelle valeur de n est-on sûr d'avoir un écart entre λ et w_n inférieur à 10^{-100} ?

La suite est croissante, donc tous ses termes sont supérieurs à w_0 , c'est à dire à 1. Vu la majoration déjà établie, on peut bien affirmer que tous les termes de la suite sont dans $[1, \lambda]$.

$f'(x) = 1 + e^{-x}$. La dérivée de f est de toutes façons positive. Si, de plus, x est dans l'intervalle $[1, \lambda]$, alors $f'(x)$ sera inférieur à e^{-1} ($x > 1$ implique $e^{-x} < e^{-1}$).

Or $e^{-1} < \frac{1}{2}$ (car $e > 2...$).

Pour finir on a bien, quelque soit x dans $[1, \lambda]$, $0 < f'(x) \leq 0,5$.

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis dans cet intervalle.

Rappelons précisément le contenu de ce théorème⁷ sous sa forme n°1 (pour la forme n°2, avec des valeurs absolues, voir le cours) :

- Soit une fonction f , dérivable sur un intervalle I , et telle que, pour tout x de I ,
$$m \leq f'(x) \leq M$$

⁷ Ce théorème est un des résultats fondamentaux du cours de terminale. Il doit être retenu par coeur, sous ses deux formes. Avant de l'appliquer dans un problème, il faut le citer in extenso, et montrer que l'on est bien dans les conditions nécessaires à son application.

- soient x et y , éléments de I , tels que $x \leq y$,
(ce sont là les conditions d'applications)

on a alors la double inégalité suivante :
 $m (y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M (y - x)$.

Ici, on prendra $I = [1, \lambda]$. On a alors $m = 0$, et $M = 0,5$.

On a démontré que tous les termes de la suite w_n étaient dans l'intervalle I . On peut alors appliquer l'IAF à w_n et λ (puisque ils sont tous deux dans I , et que $w_n \leq \lambda$).

On a alors : $0 \leq f(\lambda) - f(w_n) \leq 0,5 (\lambda - w_n)$.

Or $f(\lambda) = \lambda$ (c'est ainsi que l'on a défini λ ...), et $f(w_n) = w_{n+1}$, par définition.

D'où l'inégalité voulue.

$$0 \leq \lambda - w_{n+1} \leq 0,5 (\lambda - w_n)$$

On réécrit ces inégalités pour $n = 0$, puis 1...

$$0 \leq \lambda - w_1 \leq 0,5 (\lambda - w_0)$$

$$0 \leq \lambda - w_2 \leq 0,5 (\lambda - w_1)$$

.....

$$0 \leq \lambda - w_{n-1} \leq 0,5 (\lambda - w_{n-2})$$

$$0 \leq \lambda - w_n \leq 0,5 (\lambda - w_{n-1})$$

On multiplie ces n inégalités membre à membre (tout ici est strictement positif). On simplifie, et on obtient :

$$0 \leq \lambda - w_n \leq 0,5^n (\lambda - w_0)$$

Comme $w_0 = 1$, on a bien la double inégalité cherchée.

$$0 \leq \lambda - w_n \leq 0,5^n (\lambda - 1).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'encadrement : la suite $(\lambda - w_n)$ est comprise entre 0 et une suite qui tend vers 0 (en effet la suite $0,5^n$ est une suite géométrique dont la raison $-0,5$ est comprise strictement entre -1 et 1 : elle converge donc vers 0).

La suite $(\lambda - w_n)$ converge donc vers 0, ce qui équivaut à dire que (w_n) converge vers λ .

Pour que la différence $\lambda - w_n$ soit inférieure à 10^{-100} , il suffit que $0,5^n (\lambda - w_0)$ soit inférieur à $(\lambda - w_0)$.

Problème : on ne connaît pas λ . On va alors utiliser un encadrement de ce nombre :

$f(3) > 3$, et $f(4) < 4$. D'où $3 < \lambda < 4$.

D'où $2 < \lambda - w_0 < 3$. Ainsi, pour que $0,5^n (\lambda - w_0)$ soit inférieur à 10^{-100} , il suffit que $3 \cdot 0,5^n$ soit inférieur à 10^{-100} .

Un petit coup de logarithme, et c'est bon :

$3 \cdot 0,5^n < 10^{-100}$ équivaut à $n \cdot \ln(0,5) < -100 \ln 10 - \ln 3$. Ce qui équivaut à :

$$(\text{attention, } \ln 0,5 \text{ est négatif ! }) \quad n > \frac{-100 \ln 10 - \ln 3}{\ln 0,5}$$

Enfin on trouve que le plus petit n (entier !) vérifiant cette inégalité est $n = 334$.

Remarque 1.

On ne peut pas vérifier cela avec notre calculatrice. Une précision de cet ordre est d'ailleurs exorbitante.

On aurait pu se fixer des objectifs plus raisonnables : à partir de quel rang est-on sûr que l'écart entre w_n et λ est inférieur à 10^{-10} ?

Une inéquation du même type que tout à l'heure nous conduit à : $n > \frac{-10 \ln 10}{\ln 0,5}$, c'est à dire $n = 34$, plus petit entier convenable à coup sûr.

Une observation de la table nous montre qu'à partir du rang 9 on bénéficie déjà d'une précision de 10^{-13} .

Il est donc important de dissocier condition nécessaire et condition suffisante : ce que l'on a prouvé ci-dessus, c'est que pour avoir une précision de 10^{-10} il suffit d'aller au rang 34 (il suffit, mais il ne faut pas...)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
←	Setup	Cell	Header	1)1	P>0	Int	P>0
				n	u1		
				5.	3.9813		
				6.	3.9813		
				7.	3.9813		
				8.	3.9813		
				9.	3.9813		
				10.	3.9813		
				11.	3.9813		
				■ solve(x = 4 - e ^{-x} , x)			
				x = 3.98133937091			
				u1(n)=3.9813393709113			
				MIN	MAX	EXACT	SEG
							BATT

Remarque 2.

On peut noter dans la fenêtre ci-dessus que la suite nous donne pour λ une précision plus grande que la résolution de l'équation dans l'application initiale. A condition qu'il n'y ait pas de dérapage dans les calculs approchés que fait la machine... (cf TP 14).

Remarque 3.

On constate dans le tableau de valeurs qu'à partir du rang 9 la suite semble stationner. Il faut être conscient du fait que ce n'est qu'une apparence. En fait la suite continue de croître, mais cette croissance est imperceptible pour la calculatrice, et donc pour nous.

Remarque 4.

On constatera enfin que dans la rédaction de ce devoir on a plus fait appel aux théorèmes du cours qu'aux résultats de la calculatrice. Il ne faut pas confondre les genres :

- en TP, la calculatrice est un outil de recherche, d'observation, de vérification ;
- en contrôle (et le jour du bac en particulier) le travail de recherche est assez limité. Votre travail est guidé par des questions successives, dont les réponses font appel aux théorèmes, aux exercices déjà traités. La calculatrice a davantage là un rôle de vérification. Et ce n'est pas rien, grâce au calcul exact. Pour les dérivées, les primitives, les intégrales, les résultats numériques, cela est bien utile. Mais tout doit être établi, justifié, "à la main".



Un deuxième problème, difficile, traité en classe (Bac C, Bordeaux, 1985)

Il s'agit ici de voir en particulier ce que peut faire la machine, et ce qu'elle ne fait pas, de telle façon qu'un recul nécessaire soit pris...

L'énoncé

Etude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. Démontrer que, pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $I =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$,
l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$ est définie ($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

On considère l'application f définie sur $I \cup \{0\}$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \quad \text{si } x \neq 0$$

et $f(0) = 0$.

2. Démontrer que f est dérivable sur I et que, pour tout x élément de I :

$$f'(x) = \frac{\ln \frac{x}{2}}{(\ln 2x) \cdot (\ln x)}$$

Déterminer le sens de variation de f .

3. a) Démontrer que, pour tout x élément de I , $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$;

b) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

c) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. On considère l'application g définie sur $]0, 1]$ par $g(t) = 2 - 2t + \ln t$.

De l'étude des variations de g (sens de variation et limites aux bornes de l'intervalle de définition), déduire l'existence d'un unique nombre a élément de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(a) = 0$,
et justifier que pour tout nombre réel t élément de $[a, 1]$, on a : $\ln t \geq 2t - 2$.

Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que, pour tout x élément de $[a, \frac{1}{2}]$,

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}. \text{ En déduire la limite de } f(x) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } \frac{1}{2}.$$

5. Démontrer que, pour tout nombre réel t élément de $[1, +\infty[$, $\ln t \leq t - 1$. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

6. a) Résumer dans un tableau l'étude des variations de f ;

b) On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner l'allure de la courbe (C) en précisant la tangente en 0 et les droites asymptotes.

1. Etudions d'abord les conditions d'existence de f.

* On peut considérer d'abord le problème théoriquement.

Pour $x = 0$, pas de problème, $f(x) = 0$. Ailleurs, f est définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$.

Considérons d'abord la fonction à intégrer : $\frac{1}{\ln t}$ est définie pour x strictement positif (logarithme oblige), et $x \neq 1$ (pour cause de dénominateur, on doit avoir $\ln t \neq 0$). Le domaine de définition de $\frac{1}{\ln t}$ est donc $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Cette fonction, continue sur chacun de ces deux intervalles, y est donc intégrable.

Pour que $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$ existe, il faut que l'intervalle d'intégration $[x; 2x]$, soit compris dans un des deux intervalles où $\frac{1}{\ln t}$ est continue :

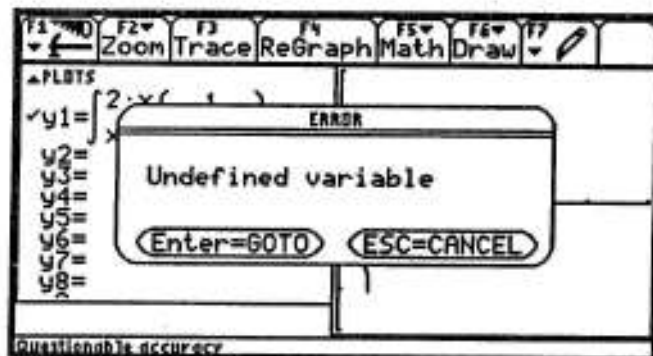
- soit $[x; 2x]$ inclus dans $]0, 1[$, c'est à dire $0 < x \leq 2x < 1$, c'est à dire $0 < x < \frac{1}{2}$;
- soit $[x; 2x]$ inclus dans $]1, +\infty[$, c'est à dire $1 < x < 2x$.

Au total, puisque $f(0)$ existe, le domaine de définition de f est $[0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$.

* On peut aussi observer les résultats donnés par la calculatrice.

La fonction f a été rentrée en Y1. Le graphique se trace sans problème sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ (à peu près...), puis le message Undefined variable apparaît.

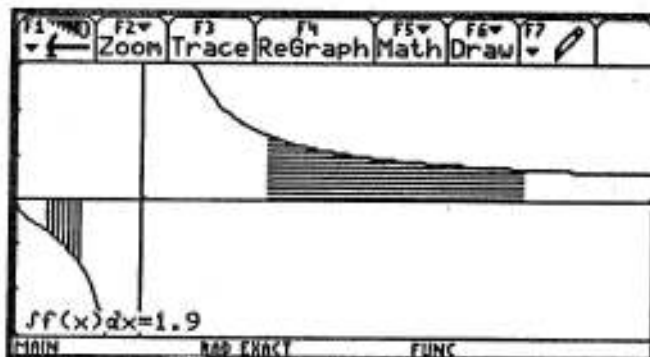
Pourquoi ?



Pour comprendre ce qui se passe, on a toujours intérêt à en revenir à l'origine des phénomènes constatés, c'est à dire ici à la fonction qui est intégrée, $\frac{1}{\ln t}$.

On a hachuré ici $\int_{0,25}^{0,5} \frac{1}{\ln t} dt$, c'est à dire $f(0,25)$, et $\int_2^4 \frac{1}{\ln t} dt$, c'est à dire $f(2)$.

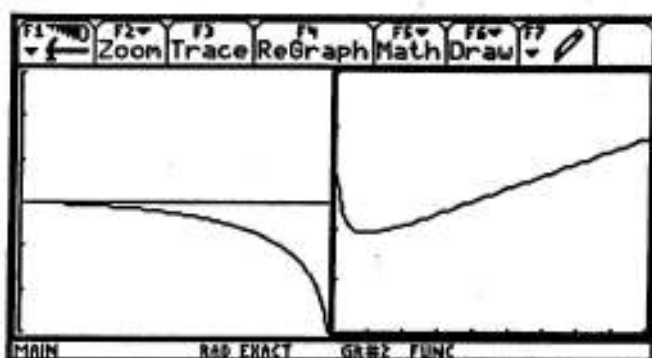
On comprend alors que, si x est entre 0,5 et 1, alors $2x$ est supérieur à 1, et l'intervalle $[x, 2x]$ comprend la valeur interdite 1. La machine refuse alors de calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$. D'où le message...



On peut alors contourner la difficulté en étudiant la fonction f sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}[$, puis sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Sur la fenêtre de gauche, la fonction f , tracée sur $[0; 0,49]$ (avec $[-3, 3]$ pour les y).
Sur la fenêtre de droite, la fonction f , tracée sur $[1, 1, 10]$ (avec $[0, 5]$ pour les y).

On a restreint un peu les intervalles ($0,49$ au lieu de $0,5$) pour ne pas avoir de problème de définition aux bornes.



On peut alors faire un graphique à la main pour récupérer toute l'information "d'un seul tenant".

NB : on peut commencer par le travail théorique pur, ou commencer par l'observation de la machine. L'important est de ne pas perdre de temps le jour de l'examen. Penser à :
- établir des ponts entre les deux types de travail (quand on travaille papier/crayon, se demander "comment cela doit se traduire pratiquement ?" ; quand on regarde la machine, se demander "qu'est ce que j'observe indique, comme propriétés possibles des objets étudiés ?") ;

- engranger toutes les informations pour la suite du problème : il est clair par exemple que les graphiques obtenus ci-dessus donnent des indications pour les variations de f , pour ses limites. Des indications seulement, qui sont nécessairement partielles (qui peuvent éventuellement induire en erreur...). C'est l'étude théorique qui permettra de trancher.

Mais ce travail d'observation, dans un temps raisonnable, n'est jamais inutile : il permet par exemple ici de bien distinguer la fonction $\frac{1}{\ln t}$ et la fonction f , ce qui est essentiel pour la suite du problème...

2. Etude de la dérivée de f sur I (c'est à dire sur l'intervalle de définition de f , sauf en 0).

Pour faire l'inverse de la question précédente, commençons par poser la question à la machine.

On trouve une première forme de dérivée, que l'on modifie via la commande Factor.

On retrouve bien le résultat demandé. Ce qui ne nous apporte pas d'information particulière...

En fait, ce qui est intéressant, c'est le premier résultat, qui est probablement une étape dans les calculs intermédiaires.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\ln(2 \cdot x)} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

$$\text{factor} \left(\frac{2}{\ln(2 \cdot x)} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x) \cdot \ln(2 \cdot x)}$$

Passons alors au calcul "à la main".

Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ (qui existe sur chacun des intervalles de I , puisque cette

fonction y est continue). On a alors $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$. Mais F est une primitive, donc elle est dérivable. Donc la dérivée de f est la différence des dérivées de $F(2x)$ et de $F(x)$.

Pour la dérivée de $F(x)$, pas de problème : F est une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ donc $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$.
Pour la dérivée de $F(2x)$, il faut faire attention : il s'agit d'une fonction composée. La dérivée est donc égale à $2F'(2x) = \frac{2}{\ln 2x}$.

Au total $f'(x) = \frac{2}{\ln 2x} - \frac{1}{\ln x}$ (on retrouve bien le résultat machine, ce qui est assez rassurant...).

On réduit au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2\ln x - \ln 2x}{\ln x \cdot \ln 2x} = \frac{\ln(x^2) - \ln 2x}{\ln x \cdot \ln 2x} = \frac{\ln \frac{x^2}{2x}}{\ln x \cdot \ln 2x} = \frac{\ln \frac{x}{2}}{\ln x \cdot \ln 2x}.$$

On voit qu'on a du appliquer ici les propriétés fondamentales du logarithme : elles sont indispensables pour établir de façon rigoureuse les résultats proposés.

Pour obtenir le sens de variation de f sur I , il suffit d'étudier le signe de cette dérivée. Le sens de variation s'étudie sur un intervalle. Il faut donc distinguer deux cas :

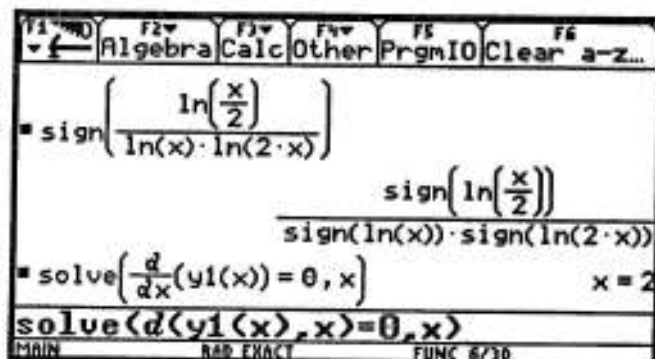
- si x appartient à $]0, \frac{1}{2}[$, alors x , $2x$ et $\frac{x}{2}$ sont dans l'intervalle $]0, 1[$. Donc les logarithmes de ces trois nombres sont négatifs, et la dérivée est négative.
(petit coup d'oeil sur le graphique de f obtenu précédemment : c'est bien cohérent).

- si x appartient à $]1, +\infty[$, alors x et $2x$ sont tous deux strictement supérieurs à 1, et leur logarithme est strictement positif. Il suffit d'étudier alors le signe de $\ln \frac{x}{2}$. C'est positif si et seulement si $\frac{x}{2}$ est supérieur à 1, c'est à dire si x est supérieur à 2 (nul pour $x = 2$, négatif si x inférieur à 2).

Petit coup d'oeil aussi sur le graphique de f sur cet intervalle : c'est cohérent. Pour l'étude du signe de f' , il est en général bien plus efficace de faire une étude papier/crayon (de toutes façons, c'est ce qui sera demandé au bac !). Cependant, la machine peut là aussi donner un certain nombre d'informations :

Si on demande le signe de f' , la calculatrice répond que c'est le produit des signes de chacun des facteurs. Ce qui ne nous renseigne pas beaucoup.

Par contre, si on demande pour quelle valeur de x la dérivée s'annule, il y a confirmation que c'est pour $x = 2$.



3. Etude locale en zéro et en $+\infty$

Pour l'étude des encadrements, la calculatrice donne assez peu d'information en général. Réfléchissons un peu : la fonction f est définie à l'aide d'une intégrale. Et on veut encadrer f : l'inégalité de la moyenne s'impose !

Pour tout t compris entre x et $2x$, la fonction logarithme étant croissante,

$$\ln x \leq \ln t \leq \ln 2x, \text{ ce qui donne, pour } x \neq 1, \frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}.$$

On peut intégrer sur chacun des intervalles $]0, \frac{1}{2}[$ et $]1, +\infty[$ où f est définie :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln 2x} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln x} dt$$

Ce qui donne : $\frac{1}{\ln 2x} (2x - x) \leq f(x) \leq \frac{1}{\ln x} (2x - x)$, qui aboutit bien à l'inégalité

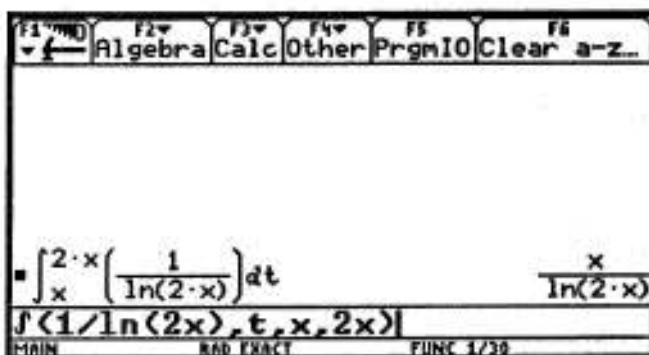
souhaitée : $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$.

Remarque : il ne doit pas y avoir confusion entre les bornes, et la variable d'intégration : pour le calcul de $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln 2x} dt$, $\frac{1}{\ln 2x}$ joue le rôle d'une constante, puisque la variable d'intégration est t . En cas de doute, un coup d'oeil à la machine :

Au delà de la complexité apparente due à la multiplicité des lettres, il s'agit d'une intégration élémentaire :

$$\int_a^b k dt = k \cdot (b - a)$$

k étant une constante pour l'intégration, c'est à dire ne dépendant pas de la variable d'intégration.



L'exploitation de cette inégalité va nous permettre de préciser le comportement de la fonction en 0 et en $+\infty$.

D'abord en zéro.

Les fonctions $\frac{x}{\ln 2x}$ et $\frac{x}{\ln x}$ ont même limite, 0, quand x tend vers 0 (aucune indétermination là dedans...). D'où, par application du théorème d'encadrement : la fonction f admet une limite, quand x tend vers 0, et cette limite est 0.

On dispose ainsi de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Or, par définition, $f(0) = 0$. Cela traduit que la fonction f est continue en 0.

Par ailleurs, en divisant par x strictement positif l'inégalité obtenue, on obtient :

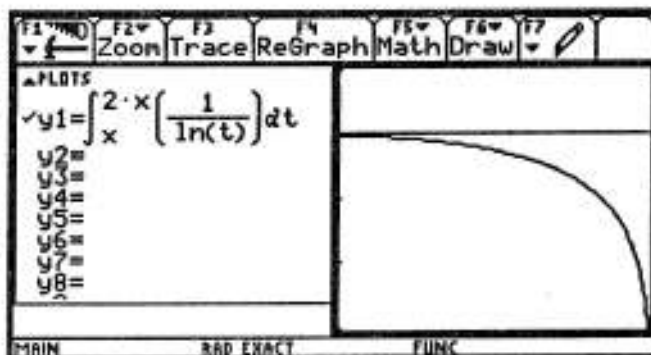
$\forall f(1; \ln 2x) \leq \forall f(f(x); x) \leq \forall f(1; \ln x)$. Une même application du théorème d'encadrement prouve que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Ce que l'on peut écrire :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Cela traduit la dérivabilité de f en zéro, et $f'(0) = 0$. Il existe donc une tangente "horizontale", c'est à dire de pente nulle, à la courbe en zéro.

Un coup d'oeil sur le graphique pour contrôler cela.

La fenêtre est $[0; 0,49]$ pour les x , afin éviter les problèmes de non définition en 0,5. Pour les y , la fenêtre est de $[-3; 1]$.

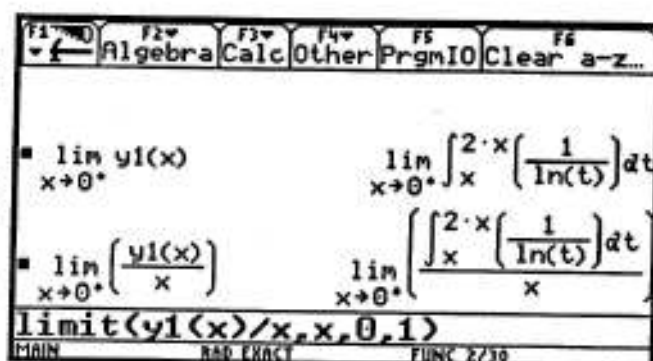
On observe la continuité en 0, et la tangente "horizontale" à la courbe en ce point



Notons que la machine ne donne pas la limite de la fonction en 0, ni la limite de $\frac{f(x)}{x}$.

La définition de la fonction n'est sans doute pas assez explicite pour la TI-92.

Le détour théorique, par les inégalités, était inévitable !



Voyons maintenant le comportement de f en $+\infty$.

On repart de l'inégalité $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$.

On sait, par application d'un théorème fondamental du cours (ne pas dire "à cause du formulaire"...), que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, avec $\frac{\ln x}{x} > 0$ pour $x > 1$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$, ce qui ne nous donne aucune information pour la limite de $f(x)$. Utilisons alors l'inégalité de gauche :

$\frac{x}{\ln 2x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\ln 2x}$. Il suffit de remplacer $2x$ par X pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln 2x} = +\infty$, ce qui prouve ici que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

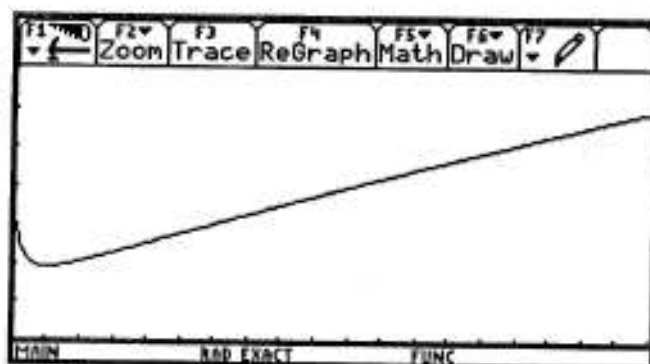
En divisant alors l'inégalité par x strictement positif, on obtient comme précédemment : $\frac{1}{\ln 2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$. Que se passe-t-il quand x tend vers $+\infty$? Une nouvelle application du théorème d'encadrement prouve que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0. Cela traduit que la courbe admet, au voisinage de $+\infty$, une "branche parabolique d'axe horizontal" (comme pour la fonction $\sqrt{x}$, ou la fonction $\ln x$).

Un coup d'oeil sur le graphique.

Cette branche parabolique n'tait pas évidente sur le graphique construit au départ (x variant entre 1,1 et 10).

Elle apparaît davantage sur le graphique ci-contre, x variant entre 1,1 et 20.

Mais on n'aura jamais d'image de l'infini sur un écran !



4. Etude de la fonction au voisinage de $\frac{1}{2}$

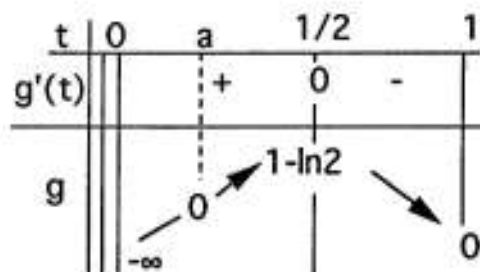
L'inégalité $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$ que l'on a utilisé jusqu'ici est maintenant impuissante :

$$\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{x}{\ln 2x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{x}{\ln x} = -\frac{1}{2 \ln 2}$$

Le théorème d'encadrement est ici de peu d'utilité : les gendarmes ne "serrent" aucun voleur... Il faut trouver autre chose.

L'énoncé suggère l'utilisation de la fonction g , telle que $g(t) = 2 - 2t + \ln t$, sur l'intervalle $]0, 1]$.

$g'(t) = -2 + \frac{1}{t} = \frac{-2t+1}{t}$, qui est strictement positif sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$, strictement négatif sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Ce qui donne les variations de g .



La fonction g est-elle strictement croissante et continue sur $]0, \frac{1}{2}]$. La restriction de g à cet intervalle réalise donc une bijection (théorème) de $]0, \frac{1}{2}]$ sur son image.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty ; \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln 2 \text{ (strictement positif).}$$

La fonction g s'annule donc une fois et une seule, pour une valeur a appartenant à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$.

Sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$, la fonction g est strictement décroissante. Comme $g(1) = 0$, la fonction g est positive sur cet intervalle.

Le tableau de variation de g indique clairement que, pour tout t appartenant à $[a, 1]$, $g(t) \geq 0$, c'est à dire $2 - 2t + \ln t \geq 0$. D'où l'inégalité souhaitée : $\ln t \geq 2t - 2$.

On en tire, pour t élément de $[a, 1]$ (il faut exclure 1, pour ne pas diviser par 0...) :

$$\frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2t - 2}$$

Si x appartient à l'intervalle $[a, \frac{1}{2}[$, alors $2x$ appartient à l'intervalle $[a, 1]$

On peut donc "intégrer l'inégalité" obtenue entre x et $2x$ (les bornes étant dans "le bon sens").

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln x} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{2t - 2} dt, \text{ c'est à dire } f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t - 1} dt.$$

On reconnaît pour l'intégrale de droite une forme $\frac{u'}{u}$.

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{1}{t - 1} dt = \frac{1}{2} [\ln |t - 1|]_x^{2x} = \frac{1}{2} [\ln (2x - 1) - \ln (x - 1)] = \frac{1}{2} \ln \frac{2x - 1}{x - 1}$$

Attention au traitement des valeurs absolues...

Même en précisant que x est inférieur à $\frac{1}{2}$, la calculatrice ne donne pas une simplification optimale de l'intégrale. Mais, à la main, un calcul élémentaire permet de conclure !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\int_x^{2 \cdot x} \left(\frac{1}{t-1} \right) dt \quad \ln \left(\frac{ 2 \cdot x - 1 }{ x - 1 } \right)$					
$\int_x^{2 \cdot x} \left(\frac{1}{t-1} \right) dt \mid x < .5 \quad \ln \left(\frac{- 2 \cdot x - 1 }{x - 1} \right)$					
$\int(1/(t-1), t, x, 2 * x) \mid x < .5$					
MAIN END EXACT FUNC 2/30					

On a ainsi une majoration de f sur l'intervalle $[a, \frac{1}{2}]$:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1-2x}{1-x}$$

Lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ (par valeurs inférieures), $\frac{1-2x}{1-x}$ tend vers $0+$, et le logarithme tend vers $-\infty$. Par majoration, $f(x)$ tend aussi vers $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = -\infty$. D'où l'existence d'une asymptote d'équation $x = \frac{1}{2}$. Ce que l'on vérifie facilement sur un des graphiques déjà apparus. *Attention à la syntaxe des limites !*

- avec les valeurs absolues, il est inutile de préciser "limite à gauche" (évidemment, à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$, il se passe la même chose) ;

- sans valeur absolue, il faut préciser limite à gauche de $\frac{1}{2}$ (évidemment, à droite de 1, il n'y a rien).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\lim_{x \rightarrow .5} \ln \left(\frac{ 2 \cdot x - 1 }{ x - 1 } \right)$					
$\lim_{x \rightarrow .5} \ln \left(\frac{2 \cdot x - 1}{x - 1} \right)$					
$\lim_{x \rightarrow .5^-} \ln \left(\frac{2 \cdot x - 1}{x - 1} \right)$					
$\text{it}(\ln((2x-1)/(x-1)), x, .5, -1)$					
MAIN		RAD EXACT		FUNC 3/30	

5. Etude de la fonction au voisinage de 1.

On dispose de $\ln t \leq t - 1$.

L'établissement de cette inégalité est immédiat : il suffit d'étudier par exemple la fonction $\ln t - t + 1$. On rappelle que c'est une inégalité fondamentale : elle traduit que la courbe de la fonction logarithme est sous la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 (se reporter au cours, refaire la démonstration en cas du moindre doute sur ce point).

Donc, en particulier, pour t élément de $]1, +\infty[$, $\ln t \leq t - 1$ (on exclut 1 pour pouvoir inverser cette inégalité, ce qui suppose que les deux membres ne s'annulent pas et soient de même signe. Ce qui est bien le cas ici).

D'où $\frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{t-1}$. Et, comme précédemment, par intégration : $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \geq \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt$

. Et, pour finir, $f(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}$ (on a supprimé les valeurs absolues, en tenant compte du fait que x est strictement supérieur à 1).

Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, $\frac{2x-1}{x-1}$ tend vers $+\infty$, son logarithme aussi. Par application du théorème de minoration, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Et existence d'une asymptote d'équation $x = 1$.

L'étude théorique s'arrête là.

On laisse au lecteur le soin de résumer tous les résultats dans un tableau de variation (attention, entre $\frac{1}{2}$ et 1, il n'y a rien) : variations, et limites.

Puis un graphique soigné s'impose : asymptotes et points cruciaux doivent être placés avec précision. Le point crucial ici est le point d'abscisse 2, et d'ordonnée $f(2)$ (valeur approchée à 10^{-2} près par défaut : 1,92) : c'est un minimum local (ne pas oublier de tracer en ce point une tangente de pente nulle). Fin du problème.



**Un troisième problème, plus facile,
traité en classe** (Bac C, Amérique du N., 1994)
Corrigé par Maryse Noguès

L'énoncé (Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul)

Partie A Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x$.

1. Etudier les variations de g_n . Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
2. a) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
- b) Montrer que : $1 \leq \alpha_n < e^2$.
- c) Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$.

Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n . En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

3. En utilisant 2c), calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Partie B Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On appelle C la représentation graphique de f et C_0 la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. Vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$. Que peut-on en déduire pour C ?
5. Préciser les positions relatives de C et C_0 .
6. Dessiner C et C_0 .

Partie C Etude de la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n})$.

1. Soit $J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} dx$.

- a) Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

- b) En déduire J .

2. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$. En utilisant les variations de f sur $[1, +\infty[$,

montrer que $\frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(1 + \frac{k+1}{n})$.

3. En déduire que $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$, puis : $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Partie A. Etude des solutions de l'équation de l'équation $g_n(x) = 0$

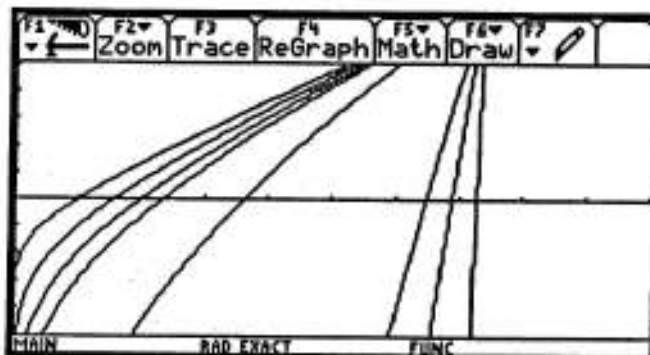
Avant de se lancer, repérer l'objectif de cette partie : il s'agit de l'étude des solutions de l'équation $g_n(x) = 0$ (l'énoncé précise qu'il n'y en a qu'une, α_n pour tout n) et ensuite déterminer la limite de la suite (α_n) .

1. Il est assez rapide et intéressant d'avoir un aperçu des courbes représentatives de g_n pour différentes valeurs de n .

Pour $n = \{1, 2, 3, 4, 10, 100, 200, 1000\}$ on obtient sur $[0,10] \times [-5,5]$ les graphes ci-contre.

On a sans problème :

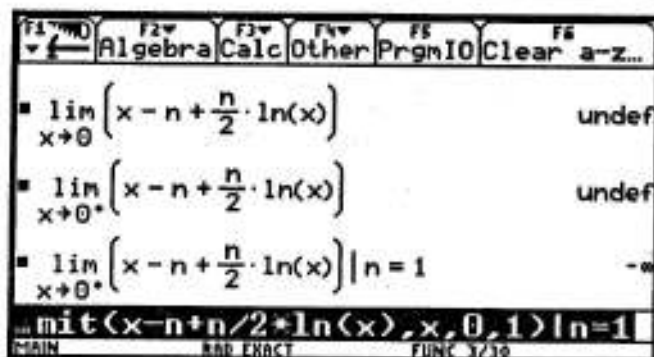
$g'_n(x) = 1 + \frac{n}{2x}$ qui est strictement positif pour $x \in]0, +\infty[$ puisque $n > 0$, donc pour tout n , g_n croît.



Pour la limite en 0, pas de problème non plus, $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = -\infty$.

Mais attention la calculatrice refusera de confirmer votre réponse si on ne précise pas en 0^+ et pour une valeur particulière de n .

Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$, pas de problème non plus et cette fois-ci la calculatrice confirmera votre réponse.



2. a) Pour tout n , g_n continue strictement croissante est donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, ce qui assure l'existence d'un réel unique α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

b) Pour établir que $1 \leq \alpha_n < e^2$, il suffit donc d'évaluer

$$g_n(1) = -n+1 \leq 0 \text{ si } n \geq 1$$

$$\text{et } g_n(e^2) = e^2 > 0.$$

On applique donc à nouveau le théorème précédent sur l'intervalle $[1, e^2]$ et comme $0 \in [-n+1, e^2]$, intervalle image (avec 0 qui peut être égal à $-n+1$ si $n = 1$), on a bien : $1 \leq \alpha_n < e^2$.

c) $g_n(\alpha_n) = 0$ se traduisant par $\alpha_n - n + \frac{n}{2} \ln(\alpha_n) = 0$, il n'est pas difficile d'en conclure que $\ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n} \alpha_n$. Cette dernière égalité permet ainsi d'écrire :

$$g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{n+1}{2} \ln(\alpha_n), \text{ c'est à dire } g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{n+1}{2} \left(2 - \frac{2}{n} \alpha_n \right)$$

$$\text{ou encore } g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - \frac{n+1}{n} \alpha_n = -\frac{1}{n} \alpha_n.$$

L'encadrement $1 \leq \alpha_n < e^2$ assure que $\alpha_n > 0$; comme $-\frac{1}{n} < 0$, on a donc $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
Comme g_{n+1} est bijective de $[\alpha_n, e^2]$ sur $[g_{n+1}(\alpha_n), e^2]$ et $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$ l'antécédent de 0 par g_{n+1} est donc $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

3. L'inégalité $1 \leq \alpha_n < e^2$ permet d'obtenir $2 - \frac{2}{n} e^2 < 2 - \frac{2}{n} \alpha_n \leq 2 - \frac{2}{n}$,
soit $2 - \frac{2}{n} e^2 < \ln(\alpha_n) \leq 2 - \frac{2}{n}$

Le théorème d'encadrement des limites permet alors de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = 2$.

On peut ainsi déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$, puisque par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(\alpha_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e^2.$$

La calculatrice ne vous permettra pas d'établir tous ces résultats, ni d'affirmer que la suite (α_n) est croissante. Ici vous pourrez seulement vérifier par exemple que :

$g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} (2 - \frac{2}{n} \alpha_n) = -\frac{1}{n} \alpha_n$ en entrant par exemple a à la place de α_n . L'utilisation de solve dans l'application principale ne vous donnera pas non plus d'indication sur les valeurs exactes des solutions.

Même pour $n = 1$, où la solution 1 est assez facile à voir ($x-1+\frac{1}{2}\ln x = 0$), elle ne donne pas la valeur en mode exact, seulement en mode approché.

Par ailleurs la convergence vers e^2 est assez lente (voir le premier schéma où l'on a représenté g_{1000}). En mode approché, il faut demander de résoudre $g_{1000}(x) = 0$ pour obtenir une valeur "proche" de e^2 .

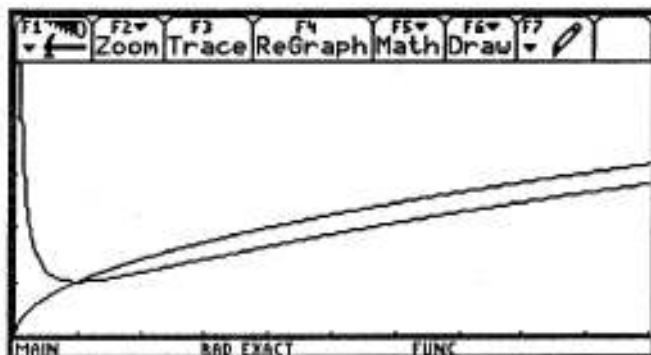
Mais ceci est un énoncé de bac, et en fait il suffit de "suivre" les indications données.

Partie B. Etude de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par
 $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

Il s'agit ici d'étudier la fonction f en utilisant la fonction auxiliaire g_1 de la première partie. En anticipant un peu sur l'énoncé on a représenté simultanément f et $\sqrt{x}$ sur $]0, 10] \times [0, 5]$.

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ sans problème, numérateur qui tend vers $+\infty$ et dénominateur vers 0 par valeurs positives.
(Résultat undef avec la calculatrice si on ne précise pas 0^+).

Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, il y a par contre une indétermination mais la calculatrice donne le résultat, $+\infty$.



Il s'agit donc d'établir celui-ci : on écrit f sous la forme $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

En effectuant le changement de variable $X = \sqrt{x}$ on a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X}$

= 0 (résultat du cours), ce qui permet d'établir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Dérivée de f .

Le résultat est donné dans l'énoncé, la calculatrice donne la forme :

$f'(x) = \frac{\ln(x) + 2(x-1)}{4x^{3/2}}$ qui correspond bien à $\frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ à condition de diviser par 2

numérateur et dénominateur, et de transformer $x^{3/2}$ en $x\sqrt{x}$.

Pour établir ce résultat par le calcul, il suffit maintenant de procéder méthodiquement à

partir de $\frac{(2 - \frac{1}{x})2\sqrt{x} - (2x - \ln x) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$ (attention, donner le jour du bac seulement le

résultat donné par la machine, sans justifications ou calculs intermédiaires ne suffira pas !)

3. Les résultats de la première partie nous donnent le signe de $g_1(x)$ (se souvenir que $\alpha_1 = 1$), et ainsi les variations de f , décroissante sur $]0, 1[$ croissante sur $[1, +\infty[$ avec une tangente horizontale au point $(1, 1)$.

4. La forme utilisée précédemment $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ permet d'écrire :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$ (voir 1).

Ainsi les courbes C et C_0 sont asymptotes en $+\infty$.

5. L'étude du signe de $f(x) - \sqrt{x} = -\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ permet de dire que C est au dessus de C_0 sur $]0, 1[$ puisque on a alors :

$$0 < \sqrt{x} < 1, \text{ soit } \ln(\sqrt{x}) < 0 \text{ et donc } -\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} > 0;$$

La seule difficulté de cette partie est le calcul de la dérivée et aussi peut être d'établir la limite de f en $+\infty$. La calculatrice donne les résultats sans problème, reste à les justifier un jour de bac... De toute façon l'énoncé donnant lui même la réponse pour f' , on pourra toujours poursuivre les questions. Quant aux courbes C et C_0 , elles sont bien asymptotes mais se rapprochent lentement l'une de l'autre : on peut vérifier en faisant

résoudre par la calculatrice $-\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = -10^{-1}$ que l'écart entre C et C_0 sera inférieur à

10^{-1} si $x > 1280$ (à l'unité près). Pour un écart inférieur à 10^{-2} il faut que $x > 418967$.

Conclusion : ne pas représenter deux courbes qui sur votre feuille se "toucheraient" presque ! Pour $x = 5$ par exemple, avec une unité de 2cm, l'écart entre les 2 courbes est d'environ 7mm.

Partie C. Suite, intégrale et aire.

Il s'agit de trouver dans cette partie la limite d'une suite (U_n) dont le terme général est une somme définie à partir de f (dans le cours d'intégration revoir la limite de la série

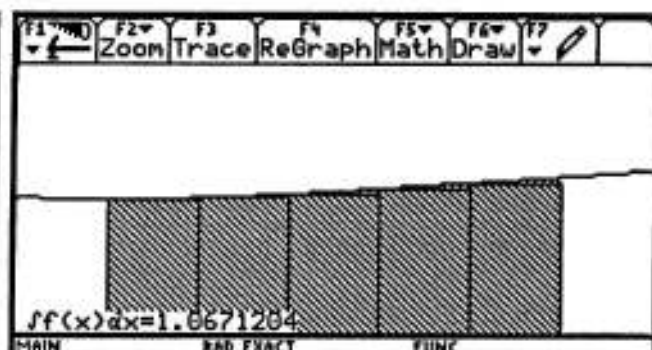
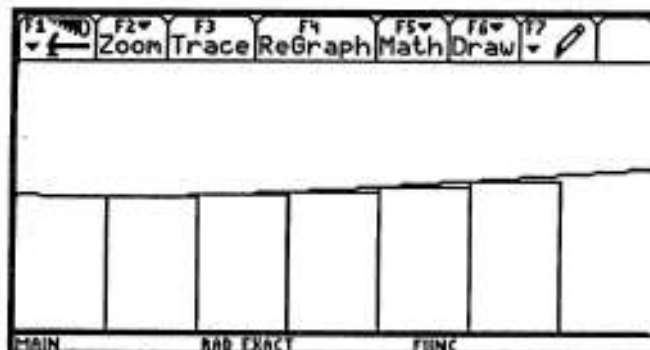
harmonique !). La dernière question donne la réponse : $J = \int_1^2 f(x) dx$.

Pour bien comprendre cela il faut penser ici en terme d'aire et interpréter

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right), \text{ et } J, \text{ comme des aires.}$$

Les deux schémas suivants permettent de "voir" comment l'aire des rectangles qui correspond à U_n (on a pris $n = 5$) tend vers l'aire du domaine limité par f et (Ox) sur $[1, 2]$ c'est à dire J .

Le résultat sera établi par encadrement.



1. a) Calcul de $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

La calculatrice donne $\sqrt{x} (\ln x - 2)$ pour primitive de $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$. Reste donc à établir ce résultat.

On pose $u(x) = \ln x$ d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$
 $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $v(x) = \sqrt{x}$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \left[\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x} \right]_1^2 = \left[\sqrt{x} (\ln x - 2) \right]_1^2$$

$$= \sqrt{2} (\ln 2 - 2) + 2$$

$$b) J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x}} dx - \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx.$$

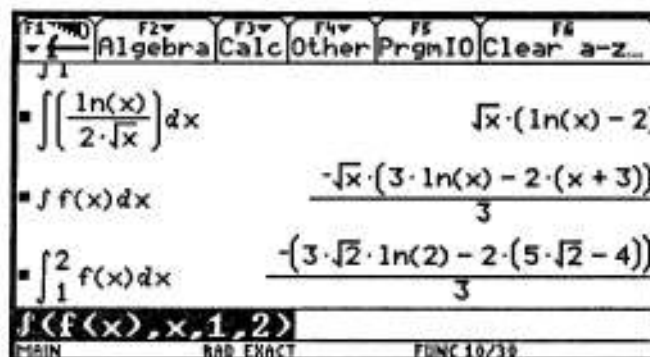
$$\text{or } \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{Et ainsi } J = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \sqrt{x} (\ln x - 2) \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} (\ln 2 - 2) + 2)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{10}{3} - \ln 2 \right) - \frac{8}{3}$$

On pourra comparer avec la forme donnée par la calculatrice.



2. On a déjà montré que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc, si k entier tel que : $0 \leq k \leq n-1$, pour tout $x \in [1 + \frac{k}{n}; 1 + \frac{k+1}{n}]$, on aura

$$f(1 + \frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(1 + \frac{k+1}{n}) \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n}) \leq \int_{1 + \frac{k}{n}}^{1 + \frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(1 + \frac{k+1}{n})$$

(application de l'inégalité de la moyenne sur un intervalle d'amplitude $\frac{1}{n}$)

3. En sommant la dernière égalité pour k de 0 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n}) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(1 + \frac{k+1}{n})$$

On notera que le membre de droite s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n})$.

Cette double inégalité peut alors s'écrire : $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$

(il manque à U_n le terme correspondant à $k = n$ dans le premier membre et celui correspondant à $k = 0$ dans le dernier membre de l'inéquation précédente)

Il est assez immédiat d'écrire la dernière inégalité sous la forme :

$$J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$$

et d'obtenir par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = J$ (puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2)}{n} = 0$).

On peut observer les valeurs approchées données par la calculatrice pour U_{100} et J .

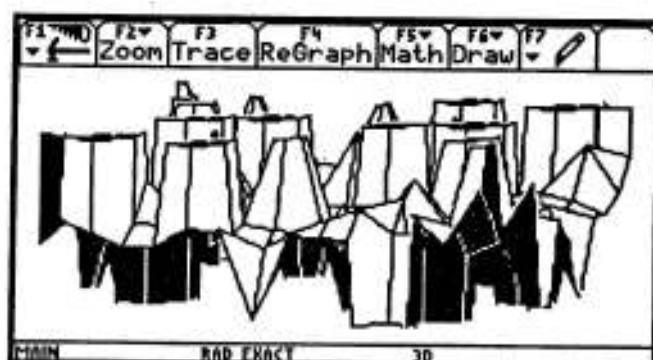
F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{100} \cdot f\left(1 + \frac{k}{100}\right) \right)$					1.067968127
$\int_1^2 f(x) dx$					$\frac{-(3 \cdot \sqrt{2} \cdot \ln(2) - 2 \cdot (5 \cdot \sqrt{2} - 4))}{3}$
$\int_1^2 f(x) dx$					1.067120398
$J(f(x), x, 1, 2)$					
MAIN	MODE	FIX	DRG	FUNC	7/30

Il n'y a pas de difficultés pour les questions 2 et 3 de cette partie, il s'agit "d'un jeu d'écriture". Les résultats pour J sont donnés par la calculatrice, leur forme n'est pas forcément celle que vous leur donneriez.

Cette partie est très "claire" si l'on interprète ce qu'il faut faire en terme d'aire, l'énoncé ne le suggère pas, il faut donc y penser.



1, 2, 3, de
nombreux TP...



Il faut co-or-don-ner....

Un élément essentiel de l'intégration des outils de calcul

Un cadre particulier

On trouvera ci-après le texte des 18 TP qui ont jalonné l'année. Ce sont des travaux de recherche qui ont été choisis en fonction de plusieurs critères :

- ils préparent, ou permettent d'approfondir des éléments essentiels du cours de TS ;
- chaque TP présente une question problématique, dont la résolution ne peut pas venir d'une évocation mécanique du cours ;
- tous les élèves, quelque soit leur niveau, peuvent aborder le travail donné ;
- chaque TP peut donner matière à des prolongements théoriques qui permettent de poursuivre éventuellement la réflexion ;
- la calculatrice, d'abord graphique, puis formelle, donne des indications qui peuvent influencer sur le travail réalisé ;
- les TP ne sont pas isolés les uns des autres, mais ils se croisent et s'entrecroisent tout au long de l'année.

Il s'agit donc de coordonner les résultats issus du calcul papier / crayon, des observations de la machine, des TP antérieurs...

On présentera pour chaque TP l'énoncé, le cadre dans lequel il s'inscrit, et des pistes de résolution. Celles-ci s'organiseront, à partir de l'arrivée des TI-92, c'est à dire à partir du TP 11, dans un développement intitulé "Vues et changement de points de vue sur le TP n°..."

Une organisation particulière

A la lecture de certains énoncés, on sera peut-être étonné de la difficulté (ou parfois de la simplicité...) du travail proposé. On peut se poser la question : des élèves vont-ils vraiment se mobiliser sur de telles questions ?

Il faut réaliser que tout cela n'a pas été immédiat : l'investissement dans ces TP a été un processus.

Dès le début de l'année, il a été convenu qu'une heure par semaine serait réservée à cette activité. Les élèves ont constitué des groupes de 2 (plus de 2 était exclu, du fait de la petitesse des écrans, qui implique une certaine "intimité" des échanges). Chaque binôme avait à rédiger un rapport de recherche pendant le TP.

Les professeurs de l'équipe de suivi de l'expérimentation assistaient aux TP, mais ne répondaient pas directement aux questions posées par les élèves : leur rôle était plutôt d'aider à reformuler les questions, à faire le point sur l'état de la recherche.

La mise au point de ce contrat n'a pas été chose facile :

- le rôle d'un professeur n'est-il pas de répondre aux questions ?
- la rédaction d'un devoir de mathématique ne consiste-t-elle pas à justifier les résultats en gommant les phases de recherche (et encore plus les tâtonnements et les erreurs ...) ?
- réussir en mathématiques, n'est-ce pas trouver les réponses aux questions posées ?

Bref, pendant tout un temps, il est apparu que les mathématiques des TP étaient des mathématiques à l'envers : des énoncés insensés, des professeurs muets, une rédaction en forme de torchon.

Et puis, peu à peu, la curiosité s'est éveillée, une certaine cohérence, ou complémentarité, est apparue entre le cours, les TP, les devoirs à la maison.

Mais on ne peut pas dire que le contrat s'est progressivement installé. Cela a été l'objet de renégociations permanentes, de redéfinitions partielles.

On trouvera tout cela dans le Volume 2 (bilan d'une expérimentation).

Mais il faut avoir ces éléments en tête quand on lit les différents TP.

Cela veut dire aussi que tel ou tel TP ne peut pas être proposé tel quel à une classe donnée : à situations différentes, dispositifs différents. Il faut réfléchir à l'état de la classe, aux traditions établies, au contrat passé en début d'année...

Et surtout, il faut éviter il me semble de travestir un cours ordinaire en TP... "Je pose une question, je laisse réfléchir 5 minutes, et je donne la réponse".

L'art des TP, c'est l'art de laisser du temps au temps.

Le mieux, il me semble, est d'instaurer une tradition progressive dans la classe : 15mn, puis 30 mn de réflexion, d'installer des habitudes de travail en groupes de deux (toujours les mêmes si possible), de laisser mijoter le problème une semaine dans la classe, de montrer l'intérêt de changer de méthode, de point de vue, de signaler que la découverte d'impasses fait partie aussi de la construction de la "géographie" d'un problème...

Bref, il vaut mieux dire : "je vais tenter l'expérience sur l'année", plutôt que "je vais tenter l'expérience une fois cette année".

Pour suivre ce qui va suivre...

On trouvera pour chaque TP un énoncé (heureusement!), puis une description sommaire du cadre de travail (le thème mathématique, la question problématique, les objectifs pédagogiques, et les hypothèses de déroulement). Le mot hypothèse n'est pas idéal : en fait il traduit une partie des observations réalisées effectivement cette année. Mais il n'est pas dit que la reproduction du TP dans une autre classe entraîne les mêmes comportements. D'où le mot hypothèses...

On trouvera dans ces hypothèses des expressions un peu curieuses : élèves de type bricoleur, théorique, rationnel, scolaire, expérimentateur. Il ne s'agit pas là de pure invention langagière... Cela s'inscrit dans une typologie des comportements observés, que l'on trouvera détaillée dans le Volume 2.

Enfin on trouvera à la fin des premiers TP, réalisés sans TI-92, un paragraphe intitulé "variantes" : qu'aurait-on pu imaginer comme autre problème, sur le même thème, avec une TI-92 ? Ou qu'aurait changé la présence d'une TI-92 pour la réalisation de ce TP ?

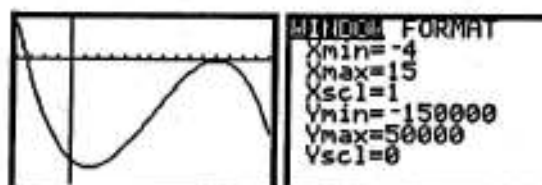
Libres variations sur thème imposé...

Bonne lecture, crayon et machine en main.

Il est tout à fait probable que, dans les changements de points de vue évoqués, certains nous aient échappé. Merci d'avance pour tous les compléments (ou rectificatifs!).



TP n°1



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves⁸

TP n°1.

Soit P le polynôme qui, à tout x réel associe :

$$P(x) = -121011 - 14290,1989x + 5601,73023x^2 - 300,56003x^3 + 0,03x^4$$

1. Déterminer les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On veut résoudre maintenant "expérimentalement" l'équation $P(x) = 0$.

Pour cela, vous utiliserez votre calculatrice graphique, les résultats de la première question, et vos connaissances générales sur ce type de fonctions...

Vous reproduirez précisément sur feuille les graphiques apparus sur l'écran de votre machine et qui ont été utilisés dans la résolution (préciser à chaque fois la fenêtre d'affichage)

- Combien de solutions semble avoir cette équation ?
- Quel encadrement donne votre calculatrice pour chacune d'entre elles ?

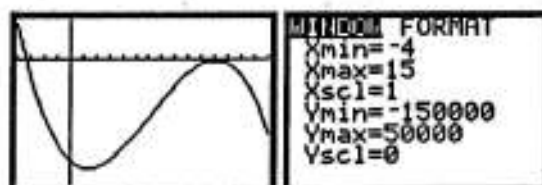
3. Utilisez les résultats obtenus à la question 1 et 2 pour donner une estimation de l'allure générale de la courbe de P.

4. Prouver les résultats observés en revenant sur l'étude théorique de l'équation $P(x) = 0$.

2. Le cadre de travail

Le thème. Il y a là un thème principal, l'étude des limites, et un thème secondaire, la résolution des équations.

La question problématique. Il y a contradiction apparente entre la limite annoncée en $+\infty$, et la représentation graphique que donne la machine pour la fonction sur une fenêtre "raisonnable" :



L'objectif pédagogique. Il est en fait double :

- sur le plan théorique, il s'agit de donner un fondement moins approximatif à la notion $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Une fonction qui réalise cela est une fonction qui prendra des valeurs aussi grandes que l'on veut dès que x sera suffisamment grand. Et donc, ici, une fonction qui sera positive (et le restera) à partir d'une certaine valeur de x.
- sur le plan de la machine, il s'agit d'organiser les premiers aller-retour entre apparences (éventuellement trompeuses) et résultats théoriques. Ce qui suppose une organisation des apparences (le choix d'une fenêtre adéquate n'est pas évident...), et une

⁸ Il est extrait de la brochure 1995 de l'Equipe Analyse de l'IREM de Montpellier *Des fonctions et des graphes*.

organisation de ses propres connaissances. C'est cet objectif qui explique le choix d'un énoncé vague : "combien de solutions semble avoir cette équation"...

Hypothèses de déroulement. Si on laisse le temps au temps (ce qui est absolument indispensable dans ce type d'activités), et si on laisse la discussion se dérouler librement entre les élèves, on pourra voir apparaître plusieurs types de comportement :

- certains élèves diront peut-être que, ici, c'est x^3 qui dicte sa loi, parce qu'il a un coefficient beaucoup plus fort que celui de x^4 . Donc, en fait, la fonction f aurait pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$;

- certains élèves diront peut-être que "la machine fait n'importe quoi" ;

- d'autres annonceront peut-être sans problèmes des résultats contradictoires.

Mais la plupart auront sans doute de grandes difficultés à choisir une fenêtre qui permette de "voir" quelque chose...

3. Le retour critique en classe

Quelques pistes à emprunter, en fonction des réponses des élèves, des questions soulevées pendant le TP...

- **du point de vue théorique** : retour sur les limites de polynômes.

$$P(x) = -121011 - 14290,1989x + 5601,73023x^2 - 300,56003x^3 + 0,03x^4 =$$

$$0,03x^4 \left(1 - \frac{300,56003}{0,03x} + \frac{5601,73023}{0,03x^2} - \frac{14290,1989}{0,03x^3} - \frac{121011}{0,03x^4} \right).$$

L'intérêt n'est pas seulement ici de redonner la démonstration usuelle (la parenthèse tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$), mais de lui donner un fondement numérique. Ainsi on peut utiliser cette forme pour répondre à la question : "à partir de quelle valeur de x est-on sûr que le polynôme deviendra - et restera - positif ?". Il est clair qu'il suffit de choisir x tel que l'on ait simultanément :

$$\frac{300,56003}{0,03x} < \frac{1}{3} ; \quad \frac{14290,1989}{0,03x^3} < \frac{1}{3} ; \quad \frac{121011}{0,03x^4} < \frac{1}{3}$$

Ce qui donne $x > 30\,056$. L'utilisation de la calculatrice permet de vérifier que le résultat est atteint, mais que celui-ci n'est pas optimal.

- **du point de vue technico-mathématique** : retour sur le fenêtrage.

La factorisation ci-dessus permet de donner un sens à l'expression : "un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré", et est utile pour choisir une fenêtre adaptée à la représentation graphique d'un polynôme donné. Si la plage choisie pour x est $[-1000; 1000]$, on pourra commencer par sélectionner -en première approche- une plage de $[-0,03.1000^4; +0,03.1000^4]$ pour les y .

On pourra d'ailleurs comparer, dans une telle fenêtre, la courbe du polynôme P et celle de $0,03x^4$. La confusion est assez troublante.

Cette stratégie de cadrage est assez efficace. Cependant, elle a des effets pervers : elle peut entraîner une confusion avec la notion de courbes asymptotes. Si les polynômes P et $0,03x^4$ "se ressemblent", c'est que leurs courbes sont asymptotes... Il n'est pas inutile d'insister sur la différence des deux fonctions qui, à l'évidence, ne tend pas vers 0.

- **du point de vue des rapports entre ce qui se voit, et ce qui est vrai** : ce n'est pas pareil...

Il est décisif de montrer, dès ce premier TP, l'importance de prendre du recul sur les l'observation. Ce recul est d'autant plus nécessaire qu'il s'agit ici de limites infinies, et que la calculatrice ne "gère" ni l'infiniment grand, ni l'infiniment petit. Ainsi, si la "remontée" du polynôme s'était faite trop loin pour les capacités de calcul de la machine, on n'aurait pas pu l'observer. Cependant, cela n'aurait pas remis en question le fait que cette remontée existe... La classe de TS, avec l'introduction des fonctions

logarithme et exponentielle permettra de "voir" de telles situations. On peut déjà observer une fonction du type $\sqrt{x} - 10000\sin x$. Cette fonction est supérieure à $\sqrt{x} - 10000$ et a donc pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Cependant, on ne pourra même pas la voir "renter dans les nombres positifs et y rester" puisque la plupart des calculatrices graphiques ne calculent pas les sinus au delà de 10^{10} ...

- du point de vue du problème lui-même : on pourra enfin étudier en détail, par dérivations successives les variations de P , pour préparer le TP suivant.

4. Variantes...

Fonction des objectifs d'apprentissage

Le travail réalisé ici est lié aux objectifs d'apprentissage du moment : la notion de limite infinie. A un autre moment de l'année, ce TP pourrait être orienté autrement :

- on pourrait s'attacher au rapport entre le degré du polynôme, et le nombre de ses racines. En récupérant les résultats acquis en classe de Première, on pourra prouver que le nombre de racines est inférieur ou égal au degré (orientation "algébrique", liée à la factorisation d'un polynôme) ;
- on pourrait s'intéresser à la question des zéros multiples : à quelles conditions a-t-on une racine double, triple ? (orientation "analytique", liée à la dérivation) ;
- on pourrait localiser les racines en utilisant les suites géométriques⁹. On prouve ainsi que les racines (si elles existent !) se trouvent nécessairement dans l'intervalle $] -A, A[$,

où $A = \text{Max}(\frac{|a_i|}{|a_n|}) + 1$, a_n étant le coefficient du terme de plus haut degré, et les a_i les autres coefficients. On constatera d'ailleurs que cela donne un résultat beaucoup moins fin que la méthode indiquée au début ($A = 4\,033\,700$, au lieu de $30\,056$). Les méthodes les plus sophistiquées ne sont pas forcément les meilleures...

Fonction des outils utilisés.

Ce TP est proposé pour un travail à partir de calculatrices simplement graphiques. Si les élèves avaient possédé à ce moment les TI-92, le travail aurait du être orienté différemment...

Le polynôme P a été rentré dans le fichier de fonction, en Y1.

La machine donne l'ensemble des zéros du polynôme (en valeurs exactes), le factorise, donne ses limites, sa dérivée...

NB : quand une ligne se termine par une petite flèche, cela signifie qu'il faut aller récupérer une partie de l'information avec le curseur "à droite" de l'écran.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\blacksquare$ solve($y1(x) = 0, x$) $x = 10000$ or $x = \frac{11001}{1000}$ or $x = 11$ or $x = \rightarrow$					
$\blacksquare$ factor($y1(x) = 0, x$) $(x - 10000) \cdot (x - 11) \cdot (3 \cdot x + 10) \cdot (1000 \cdot x - 1) \cdot$ 100000					
$\blacksquare$ lim $y1(x)$ $x \rightarrow \infty$					
$\blacksquare$ limit($y1(x), x, \infty$)					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30					

Alors, ne reste-t-il rien à faire ? Non, bien sûr. Simplement le problème se déplace.

⁹ BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE, 1994, *Activités mathématiques pour les sections scientifiques de lycée*, IREM de Montpellier.

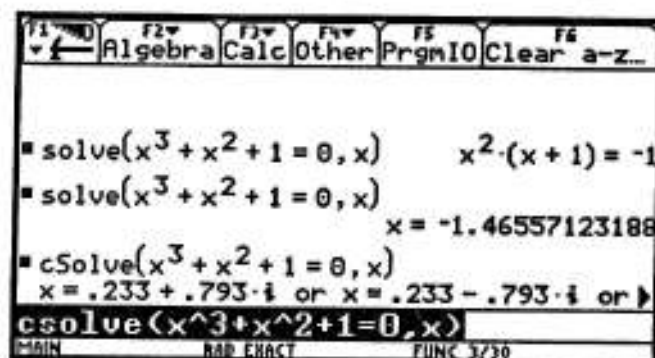
- on peut garder le même polynôme, et travailler sur différentes représentations graphiques (cf TP 2) ;
- on peut modifier les coefficients du polynôme. La calculatrice ne pourra sans doute plus déterminer les valeurs exactes des racines (elle a pu les déterminer toutes ici parce qu'elles étaient rationnelles). Elle travaillera alors en valeur approchée (cf TP 11) ;

En valeur exacte, la calculatrice renvoie seulement l'équation, en la transformant (ce qui peut inciter des élèves à décider que -1 est solution...).

En valeur approchée, et en mode réel, une solution.

En valeur approchée, et en mode complexe, trois solutions.

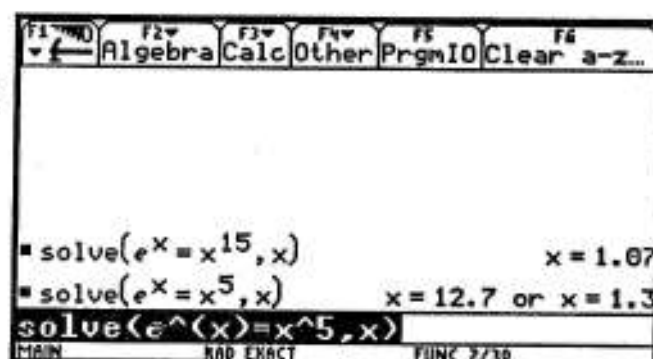
Il faut réfléchir à la formulation de la demande...



- on peut travailler sur des équations pour lesquelles la calculatrice, non seulement ne donne pas de valeurs exactes, mais encore ne donne pas le nombre de racines attendu en valeurs approchées (cf TP 17).

Ces deux équations ont théoriquement le même nombre de solutions.

En valeur approchée, la calculatrice détecte une solution pour l'une, et deux solutions pour l'autre.

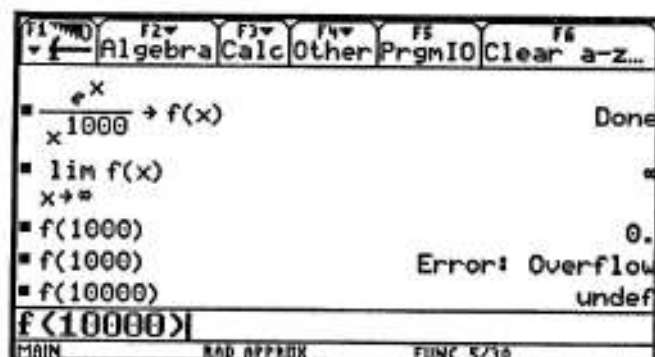


Ces exercices sont d'autant plus nécessaires que la disposition d'outils puissants ne donne pas naturellement un fondement plus solide aux notions enseignées, ici la notion de limite.

La machine annonce bien que la fonction ici définie a comme limite $+\infty$.

Mais les valeurs attribuées aux images des "grands nombres", suivant le mode de calcul, sont 0, "indéfinies", ou "dépassement de capacité".

On voit toutes les confusions possibles...



Nouveaux temps, nouvelles mœurs. Nouveaux outils, nouveaux problèmes...

Mais ces déplacements d'activités ne sont pas nouveaux : qui enseigne aujourd'hui les algorithmes d'extraction de racine carrée dans les collèges (ou les lycées) ?





TP n°2



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

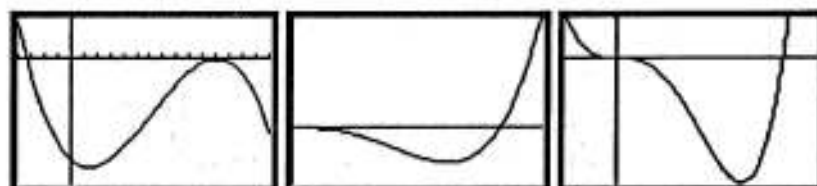
TP n°2

On reprend le polynôme P qui, à tout x réel, associe :

$$P(x) = -121011 - 14290,1989x + 5601,73023x^2 - 300,56003x^3 + 0,03x^4$$

On connaît désormais les limites et les variations de ce polynôme (décroissant-croissant-décroissant-croissant).

1. Déterminez des fenêtres pour lesquelles la machine donne successivement chacune des trois représentations graphiques ci-contre (ou une représentation de même "allure").



2. On veut maintenant déterminer le plus précisément les racines de P .

- donnez, en utilisant votre machine, un encadrement le plus précis possible pour chacune d'entre elles ;

- pouvez-vous alors déterminer la valeur exacte de chacune d'entre elles ?

(si oui, expliquer précisément pourquoi il s'agit bien d'une valeur exacte)

2. Le cadre de travail

Il s'agit d'un TP de "reprise" d'activité. Il s'agit de voir d'abord si les apprentissages du dernier TP concernant l'adaptation de la fenêtre graphique ont été mémorisés. Et ensuite d'aller plus loin dans la résolution de l'équation.

Le thème.

Distinction valeur exacte, valeur approchée.

La question problématique.

Les différentes commandes de la calculatrice graphique (Trace, Intersection, Zéro) sont-elles fiables ?

Si la machine annonce $P(a) = 0$, peut-on affirmer que a est racine de P ?

L'objectif pédagogique.

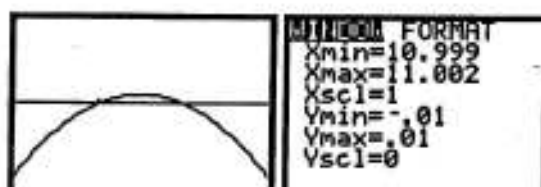
Il s'agit de développer les attitudes de contrôle de la machine :

- sur le plan graphique (ne pas prendre les fenêtres au hasard, choisir ce que l'on va voir en fonction des objectifs du problème) ;

- sur le plan numérique : le résultat annoncé est-il exact ? Quelle est la qualité de la valeur approchée ?

Les hypothèses de déroulement.

- Plusieurs activités ayant été données sur les questions de fenêtrage, en particulier sur l'ajustement des fenêtres pour les fonctions polynômes (équivalentes au terme de plus haut degré), et les variations du polynôme P ayant été vues en classe (le tableau de variation de la fonction reste inscrit... au tableau noir pendant tout le TP), on peut espérer que les élèves sauront identifier les intervalles adéquats pour obtenir les graphiques souhaités.
- Aucune indication n'est donnée sur un décolllement éventuel des deux racines proches de 11. On peut penser que seuls les élèves ayant une bonne maîtrise du zoom pourront effectuer la séparation.



Il s'agit en fait là plus que d'une compétence purement technique : il faut avoir compris aussi que, pour une étude locale, il ne faut plus déterminer la fenêtre en se réglant sur le terme de plus haut degré (ce qui donnerait ici $-100 < y < 100$...), et ne permettrait pas de voir grand chose...

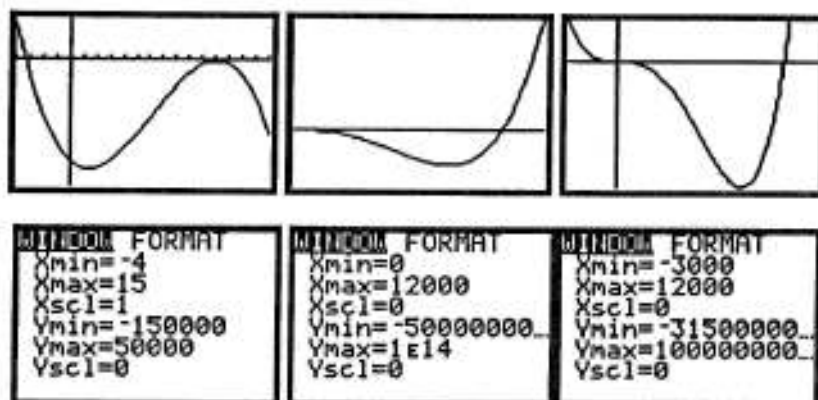
Enfin on peut émettre l'hypothèse que les élèves, dans une logique d'étanchéité formule/graphique, ne reviendront pas au calcul pour justifier l'exactitude supposée des racines déterminées par encadrements successifs.

3. Retour critique en classe

A nouveau sur le fenêtrage

De nombreuses questions peuvent être abordées, qui seront reprises lors du TP 8 : quels sont les critères pertinents qui permettent de choisir une fenêtre (points cruciaux, variations de la fonction, ...) ? Il vaut mieux éviter le hasard, et travailler avec le tableau de variations sous les yeux...

Pour information, les fenêtres qui ont donné les graphiques proposés aux élèves :

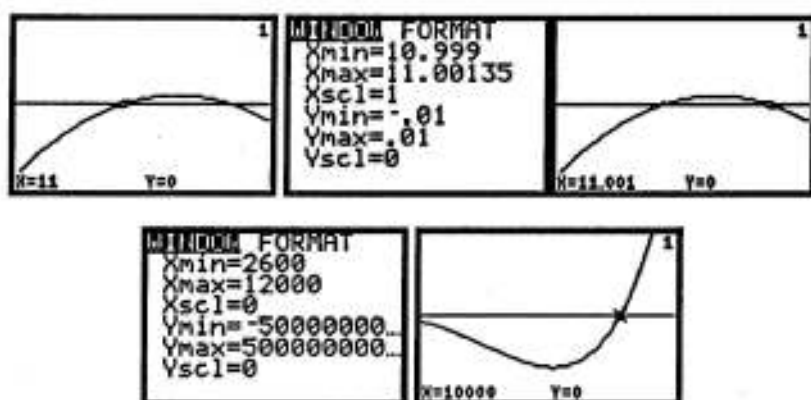


Y a-t-il unicité de la fenêtre correspondant à une représentation donnée ? Y a-t-il une meilleure représentation ? Il faut aussi compter avec le fait que les élèves n'ont pas tous la même calculatrice, que certains modèles disposent de fonction d'ajustement automatique "des y aux x". Les questions sont nombreuses, aussi bien en TP qu'en retour en classe. Il faut les sérier, en reprendre au vol, en laisser pour un autre TP...

Une nouvelle question, décisive : valeur exacte, ou valeur approchée ?

Et, question subsidiaire, combien y a-t-il de racines ?

L'utilisation de la calculatrice, combinée au tableau de variation de la fonction, permet une localisation des racines. Il se peut même que certaines fenêtres fassent tomber "pile" sur les racines¹⁰. Mais l'obtention d'un zéro par la calculatrice permet-elle d'affirmer que la racine trouvée est exacte ?



Répondre à cette question suppose que l'on s'intéresse aux capacités de la machine : elle peut gérer des plages de 12 chiffres. Dans ces conditions, pour contrôler la fiabilité du résultat $P(11) = 0$, il faut "mesurer" la longueur des nombres en cause dans les opérations successives. Pour $P(-10/3)$, on peut contourner la difficulté des nombres rationnels non décimaux en réduisant au même dénominateur, et en évaluant -avec la machine- le numérateur, etc.

Avec une pincée d'algèbre ou d'analyse.

Une fois déterminée la valeur exacte d'une racine, on pourra éventuellement suggérer une factorisation, pour "alléger" le degré du polynôme. A la question : "la courbe est-elle tangente à l'axe des abscisses au point 11 ?", on pourra répondre par une allusion à la dérivation...

L'essentiel étant de reprendre les pistes ouvertes par les élèves pendant le TP, et de ne pas se laisser enfermer dans un travail avec la seule calculatrice, mais de faire jouer toutes les inter-actions possibles entre la théorie et le calcul machine.

4. Variantes...

Il ne faudrait pas que s'ancre l'idée chez les élèves que, avec un peu de discernement et d'astuce, on peut obtenir les valeurs exactes des racines de tout polynôme :

- on localiserait les racines avec la calculatrice ;
- on aurait l'idée d'éventuelles valeurs exactes (ce qui s'est passé dans le TP n°2 : -3, 3333... c'est forcément $-10/3$!) ;
- et on vérifierait que ces valeurs sont bien exactes avec un calcul à la main "assisté par la machine"...

C'était le cas pour le polynôme du TP, il serait bon de donner d'autres exemples où on ne peut qu'encadrer les racines, à l'aide par exemple du "théorème de la bijection".

¹⁰ Pour obtenir ces situations "rares", il faut forcément réfléchir un peu, et faire quelques calculs basés sur le nombre de pixels de l'écran (cf TP n°6)

La calculatrice ne peut se prononcer que sur l'égalité de deux expressions qu'elle peut évaluer. Or, elle ne connaît pas la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{16})$...

Que vont faire alors les élèves pour vérifier la correction de leur calcul ? Il vont comparer les valeurs approchées de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et du nombre trouvé.

Hélas, trois fois hélas, les valeurs approchées ne coïncident pas !

Qu'en conclure ?

Calculator screen showing the comparison of $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ and $\frac{\sqrt{\sqrt{2+2+2}}}{2}$. The result is $2.E-14$, indicating they are not equal.

On est là au coeur du problème. Bien entendu si des valeurs approchées de a et b sont différentes, on ne peut pas en conclure que a et b sont différents (si on ne connaît pas la qualité de l'approximation). De la même façon, si des valeurs approchées de a et b sont égales, on ne peut jamais en conclure que a et b sont égaux.

Première demande, en mode exact
le logiciel, on l'a vu, n'identifie pas le cosinus.

Deuxième demande, en mode approché : l'égalité est aussi refusée par la machine.
La machine n'identifie-t-elle que les nombres dont elle sait que les valeurs exactes coïncident ?

Calculator screen showing $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ compared to $\frac{\sqrt{\sqrt{2+2}}}{2}$ in approximate mode. Both comparisons result in 'false'.

Pas tout à fait, comme on le voit ci-contre : on change la forme du cosinus.

Première demande, en mode exact
Le logiciel nie l'égalité

Deuxième demande, en mode approché :
Là, l'égalité est validée....

Calculator screen showing $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ compared to $\frac{\sqrt{\sqrt{2+2}} + 1}{2}$ in approximate mode. The first comparison is 'false' and the second is 'true'.

On peut en conclure que, pour la machine, les deux nombres ont des valeurs approchées égales. Mais il est tentant (c'est d'ailleurs ce qui reste affiché !) d'en conclure que deux objets qui ont les mêmes valeurs approchées sont égaux...

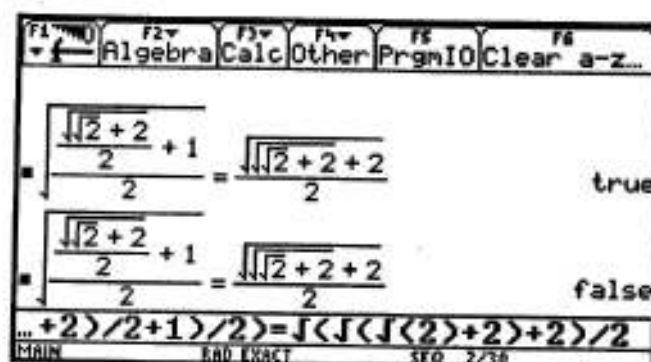
D'où une extrême vigilance nécessaire dans l'analyse des résultats !

Mais nous ne sommes pas au bout de nos peines, comme on va le voir ci-dessous.

Résumons nous : suivant les valeurs approchées calculées, la machine affirme, ou non, qu'il s'agit de nombres égaux (en valeurs approchées !).

Il est alors tentant de comparer les expressions différentes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ traitées par le logiciel.

C'est ici l'apothéose : la machine déclare que, en valeur exacte, les deux nombres sont égaux. Mais, en valeur approchée, elle déclare qu'ils sont inégaux !



On comprend la racine (sic) de ces errements apparents :

- en valeur exacte, le logiciel procède par identification de forme. Les deux expressions sont alors identifiées comme deux représentants différents du même nombre ;
- en valeur approchée, l'algorithme de calcul appliqué -séparément- aux deux nombres débouche, pour cause de dérapage, sur deux nombres qui diffèrent par leur dernière décimale. Le logiciel déclare alors que les valeurs approchées ne sont pas les mêmes...

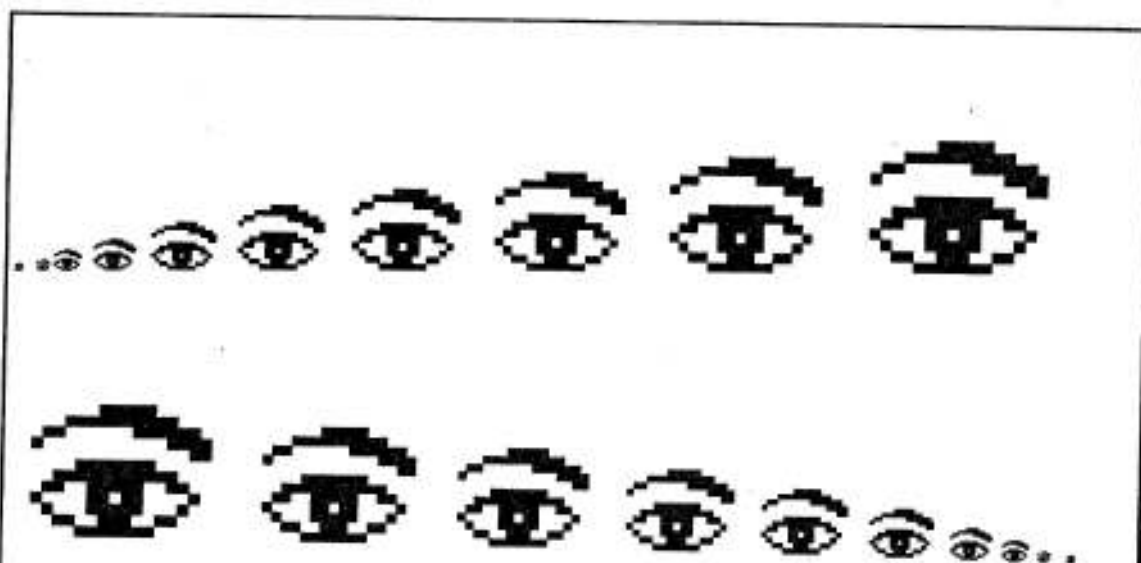
Tout ceci est bien cohérent, mais à partir d'un cadre théorique qui suppose que les notions de valeur exacte et de valeur approchée sont clairement comprises. Ce qui n'est pas le cas de nos élèves, qui sont là pour l'apprendre !

Organiser un travail de recherche, ou de discussion, avec eux autour du petit drame ci-dessus n'est pas sans doute pas inutile pour opérer ce partage essentiel "exact/approché" !

Remarque : le même phénomène se produit simplement avec l'égalité $1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$.

Vrai pour la machine en calcul exact, faux en calcul approché...

On pourra trouver d'utiles prolongements à ces réflexions dans [Canet 1995, Fortin 1995].

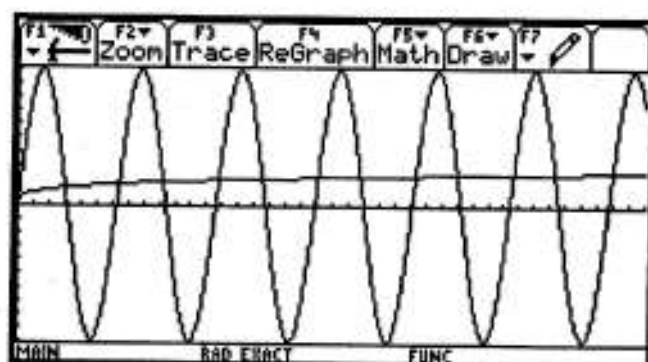


A l'occasion de cette réflexion sur exact/approché, ouverture exceptionnelle d'un espace réservé à la culture (et à l'art). Dessin (anonyme), et citation de Henri Michaux :

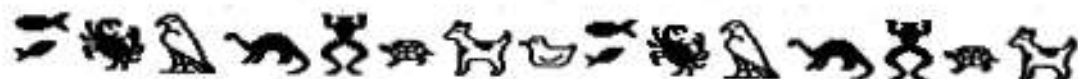
"Surtout ne pas vouloir grand. Le grand est l'ennemi mortel de l'infini"



TP n°3



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°3.

Première modalité

On considère l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10\sin x$, sur $\mathbb{R}^+$.

Quelle est sa plus petite solution ?

Donnez un encadrement à 10^{-5} près de sa 10^{ème} solution, de sa 100^{ème} solution, puis de sa 1000^{ème} solution.

On précisera la méthode choisie, les fenêtres utilisées pour "cerner" le phénomène, on n'hésitera pas à faire des dessins pour illustrer ses réponses.

Cette équation a-t-elle un nombre fini, ou infini, de solutions ?

Si c'est un nombre infini, pourquoi ?

Si c'est un nombre fini, combien de solutions ?

On justifiera avec soin les réponses à ces questions.

Deuxième modalité

On considère l'équation $\sqrt{\sqrt{x}} = 10\sin x$, sur $\mathbb{R}^+$.

Cette équation a-t-elle un nombre fini, ou infini, de solutions ?

Si c'est un nombre infini, pourquoi ?

Si c'est un nombre fini, combien de solutions ?

On justifiera avec soin les réponses à ces questions.

Quelle est la plus petite solution de cette équation ?

Donnez un encadrement à 10^{-5} près de sa 10^{ème} solution, de sa 100^{ème} solution, puis de sa 1000^{ème} solution.

On précisera la méthode choisie, les fenêtres utilisées pour "cerner" le phénomène, on n'hésitera pas à faire des dessins pour illustrer ses réponses.

2. Le cadre de travail

On présente ci-dessus deux variantes d'un même problème. Il peut être utile pour le professeur de tester l'influence de cette "variable didactique" liée à la forme de l'énoncé : vaut-il mieux d'abord prendre du recul sur un problème (modalité 2), ou l'aborder "par le petit bout de la lorgnette", en considérant d'abord quelques cas particuliers, pour s'appropriier l'ensemble de la situation (modalité 1) ?

D'ailleurs, pour chaque TP, il peut être utile de réfléchir aux variables sur lesquelles le professeur peut jouer. Pour ce TP par exemple, on pourrait tester $100\sin x$ au lieu de $10\sin x$, la fonction $\ln x$ au lieu de la fonction $\sqrt{\sqrt{x}}$, etc.
Mais revenons à ce TP, ainsi rédigé, sous ses deux versions.

Le thème.

Il s'agit encore de l'étude des limites infinies.

La question problématique.

Une fonction à croissance très lente peut-elle "sortir d'une bande" donnée à l'avance ?
C'est à dire une fonction à croissance lente peut-elle tendre vers $+\infty$?

Les objectifs pédagogiques.

Sur le plan théorique, ce TP sera l'occasion de poursuivre le travail de définition engagé lors du TP 1 : une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est une fonction qui finira par dépasser définitivement tout réel préfixé.

Sur le plan pratique, ce TP sera l'occasion de revenir sur les stratégies de fenêtrage : pour voir ce que l'on veut voir, on ne peut compter ni sur le hasard, ni sur le déplacement laborieux le long de la courbe. On ne peut ni tout voir, ni voir au hasard, il faut du discernement. Et c'est l'objet d'une réflexion, et d'un calcul préalable.

Sur le plan technologique, ce sera l'occasion de voir de premières "aberrations" de l'écran. Alors qu'avec les fonctions polynômes, les précédents TP avaient été l'occasion de voir qu'avec une bonne fenêtre, les variations de la fonction apparaissaient clairement "dans leur globalité", là, la discrétisation de l'écran pourra faire apparaître des pseudo-périodes difficilement compréhensibles pour ceux qui n'en auraient pas encore rencontrées.

Hypothèses de comportement.

On peut faire l'hypothèse que les élèves auront du mal à se détacher des modèles primitifs sur les limites (une fonction à croissance trop lente ne peut pas tendre vers $+\infty$) et sur les dénombrements (beaucoup de racines, c'est sans doute une infinité de racines...)

On peut faire l'hypothèse que les élèves essaieront beaucoup de bricolage avant de se résoudre à prendre du recul sur la machine, et de réaliser que le détour théorique n'est pas une perte de temps. Là, comme dans d'autres domaines, c'est souvent ceux qui vont à contre courant qui arrivent les premiers...

3. Le retour critique en classe

On pourra envisager plusieurs points, en fonction des réalisations des élèves :

- une équation peut se traiter sous plusieurs formes : on peut traiter le problème sous la forme $\sqrt{\sqrt{x}} = 10 \sin x$, ou sous la forme $\sqrt{\sqrt{x}} - 10 \sin x = 0$. Sous la deuxième forme on gagne des fonctions de référence, ce qui aide au traitement du problème ;

- on a toujours intérêt à faire un dessin à la main, même sommaire ; un tel tracé permet souvent de récupérer des informations, de réveiller des références de cours (plus enfouies quand on se contente de pianoter sur un clavier, et de fixer un écran) ;

- il est souvent utile de regarder ce qui se passe "aux bornes", c'est à dire aux frontières du domaine d'étude. La considération des limites permet de se ramener à un intervalle borné, ce qui est une simplification considérable du problème, même si l'intervalle en question est vaste $[0, 10\ 000]$.

Une fois vu tout cela, le problème est désossé.

On peut alors fixer une nouvelle fois le cadre théorique concernant les limites infinies, et traiter le problème dans les détails :

- il faut trouver un système de numérotation des solutions. Se déplacer sur le graphique pour compter celles-ci relève du délire maniaque pour rechercher la 100ème solution. Quant à la millièème... Il suffit de "voir" (puis de prouver!) qu'il y a deux solutions entre 0 et π , puis deux solutions entre 2π et 3π , etc.

- il faut localiser la dernière solution, pour en déduire le nombre de solutions.

4. Variantes...

En fait les variantes imaginables si les élèves avaient disposé de TI-92 pour ce TP ne sont pas si éloignées que cela de ce qu'ils ont pu faire avec des simples calculatrices graphiques. On ne considère ici qu'une question : quelle est la plus grande solution, sachant qu'au delà de 10000, il n'y en a plus, et qu'avant 10000 il y a (sauf éventuellement au bord) 2 solutions par tranche de 2π ?

En valeur exacte, la calculatrice retourne l'équation sans la résoudre. En valeur approchée, que fait-elle ?

Elle indique 3 solutions (en valeur approchée) pour l'équation ...

Si on précise que l'on cherche les solutions supérieures à 9900, elle répond qu'il n'y en a pas.

Si on précise que l'on recherche les solutions supérieures à 3000, elle répond qu'il n'y en a qu'une...

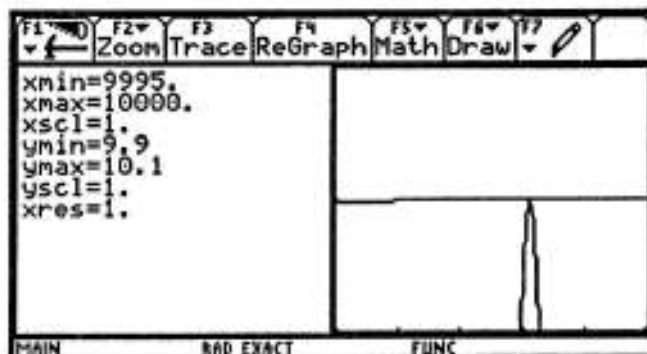
F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
					false
■ solve($\sqrt{x} - 10 \cdot \sin(x) = 0, x$)					
4385613 or x = 6.44318895171 or x = 3.00					
■ solve($\sqrt{x} - 10 \cdot \sin(x) = 0, x$) x ≥ 9900					
false					
■ solve($\sqrt{x} - 10 \cdot \sin(x) = 0, x$) x ≥ 3000					
x = 3709.3256					
... (<J(x)>)-10*sin(x)=0, x) x ≥ 3000					
MAIN	NO EXACT	FUNC 6/30			

Il est clair que quand on travaille en valeur approchée, les résultats avec la TI-92 sont aussi fiables qu'avec une calculatrice graphique ordinaire !

Un coup d'oeil sur l'application graphique, au voisinage de 10000 :

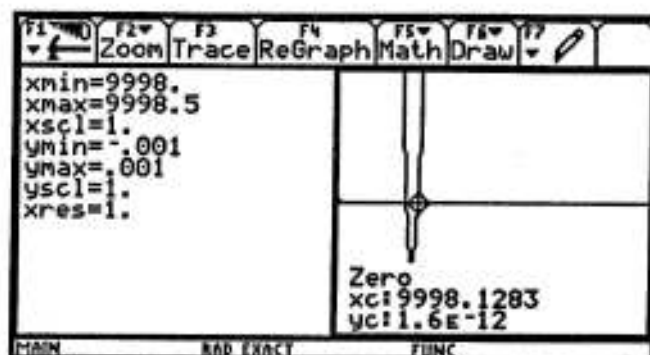
On a tracé là la fonction racine, et la fonction sinus (on a épargné au lecteur les premiers ajustement de la fenêtre...)

Le doute existe : coupe, coupe pas ?



Pour lever l'ambiguïté, on peut modifier la fenêtre, ou modifier la fonction. On choisit ci-dessous de modifier les deux, en considérant la différence entre la racine et le sinus.

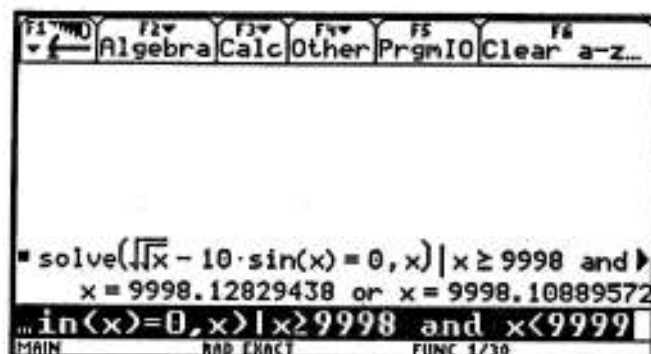
On voit là deux intersections avec l'axe des abscisses, et une valeur approchée d'une des deux solutions par la mobilisation de la commande graphique "zéro".



On peut alors revenir à l'application initiale, en reformulant la demande.

On a précisé le cadre de la résolution de l'équation, en précisant que l'on recherchait les solutions comprises entre 9998 et 9999.

La calculatrice consent alors à donner les valeurs approchées des deux plus grandes solutions cherchées !



On notera que l'on dispose, dans l'application initiale, d'une précision plus grande que dans l'application graphique.

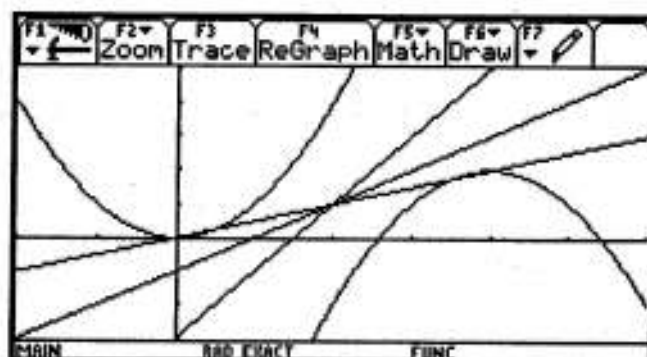
En conclusion de ce travail avec une calculatrice TI-92 : le travail, ici, sur le fond, est le même qu'avec une calculatrice graphique classique. C'est à dire que le texte du TP n'aurait pas besoin d'être retouché.

Simplement la diversité des applications sur cette machine, leur puissance, permet de faire jouer plus facilement le changement de cadre de résolution du problème. Ce qui est, dans ce genre de recherche, tout à fait décisif.

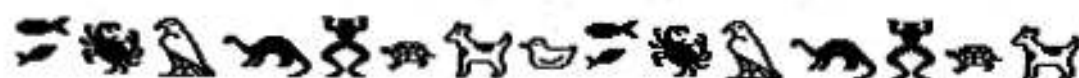




TP n°4



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

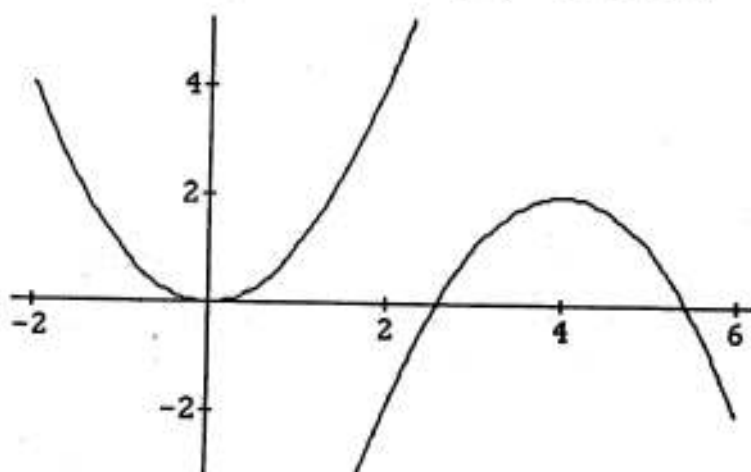
TP n°4

On se propose de tracer la, ou les, tangentes communes aux deux paraboles d'équation :

$$P_1 : y = x^2$$

et

$$P_2 : y = -x^2 + 8x - 14$$



1. Observer les deux courbes sur votre écran. Combien imaginez-vous de tangentes communes ? Essayez par une succession d'essais corrigés de déterminer l'équation de droite(s) approchant la ou les droite(s) cherchées.

On précisera bien sûr les équations successives obtenues, et les méthodes de vérification utilisées.

2. Déterminer l'équation d'une tangente D_a en un point de P_1 d'abscisse a , et l'équation d'une tangente D_b en un point de P_2 d'abscisse b .

A quelle condition portant sur a et b ces deux tangentes sont-elles parallèles ?

Vérifier votre résultat en prenant $a = 1$, en calculant b pour que D_a et D_b soient parallèles, et en observant les deux paraboles et les deux droites ainsi obtenues sur votre écran.

3. Supposons la condition de parallélisme de D_a et D_b réalisée. A quelle condition supplémentaire ces droites sont-elles confondues ? Calculer alors les valeurs de a et de b qui vérifient les deux conditions.

4. Déterminer alors les équations des tangentes communes aux deux paraboles, vérifier que cela convient bien en observant le tracé des paraboles et de ces droites, et confronter ces résultats aux résultats expérimentaux de la première question.

5. Les droites solutions se coupent en un point particulier. Était-ce prévisible ?

2. Le cadre de travail

Le thème du TP reprend une idée du Bac S 1995 (tangente commune aux courbes des fonctions exponentielle et logarithme), dans un cadre simplifié.

Le thème.

Dérivées et tangentes.

La question problématique.

Une tangente commune est évidente. La deuxième tangente, qui oblige à sortir du cadre de l'épure, sera-t-elle vue ?

Les objectifs pédagogiques.

L'énoncé de ce TP et du TP suivant, sont assez différents, dans leur esprit, de l'ensemble des autres TP. Il s'agit de contraindre les élèves :

- à faire des aller-retour entre observation et validation ;
- à rédiger de façon plus complète leur rapport de recherche.

Pour ce TP, il s'agira de plus :

- de développer l'aptitude à associer droites et équations de droites (c'est le but des "essais corrigés" de la première question) ;
- de développer l'aptitude à sortir des fenêtres standards, pour imaginer ce qui peut se passer "ailleurs".

Hypothèses de déroulement.

S'agissant d'équations de droites, avec deux coefficients variables, on peut s'attendre à des compétences assez limitées des élèves, et à une recherche quasiment aléatoire de solutions "approchantes" dans la première question.

S'agissant de tangentes, et encore plus de tangentes communes, on peut s'attendre à des difficultés nombreuses des élèves : en particulier l'idée que la droite des sommets est une candidate possible de tangente commune n'est pas à exclure...

3. Le retour critique en classe

Il est important d'insister sur la rationalisation des démarches. En fait deux questions complémentaires peuvent être posées en abordant un problème (ce qui suppose de prendre un certain recul...)

- en quoi le problème donné se rattache-t-il à une classe de problèmes connus ? Ce qui permettrait de lui appliquer une solution générale adaptée à cette classe reconnue ;
- en quoi le problème donné présente-t-il des spécificités qui autorisent une résolution particulière ?

Et ceci doit être fait dès le départ.

- sur le plan graphique.

Ce problème de tangentes communes peut faire penser à un problème déjà rencontré par les élèves : celui du bac, pour les redoublants, ou celui de la recherche des tangentes communes à deux cercles (qui se traite en général en seconde). La question des cercles peut ici être légitimement évoquée : il s'agit de tangentes communes à deux coniques "extérieures". Il y a bien une solution générale à ce type de problème !

La réflexion sur le caractère particulier du problème peut faire ressortir l'existence d'un centre de symétrie : les paraboles, disposant du même coefficient pour le terme carré, sont isométriques. Les tangentes communes doivent donc passer par ce centre de symétrie, de coordonnée (2, 1). Elles ont donc une équation du type $y = ax + 1 - 2a$.

On peut alors ajuster beaucoup plus facilement des solutions potentielles en faisant pivoter les droites autour de I, c'est à dire en faisant varier a .

On doit cependant insister aussi sur l'impossibilité de valider graphiquement qu'une droite donnée est tangente à la courbe. Même avec des zooms d'une violence extrême. L'infini, de loin comme de près, ne se voit pas. Il faut en venir au calcul.

- sur le plan des calculs.

Avant d'embrayer sur le traitement du problème suggéré par l'énoncé, on peut indiquer que celui-ci n'est pas unique :

- on aurait pu s'appuyer justement sur l'existence d'un centre de symétrie I, rechercher les tangentes à la première parabole issues de I. Ces deux tangentes auraient alors été "automatiquement" tangentes aussi à la deuxième parabole ;

- on aurait pu aussi écrire l'équation d'une tangente quelconque à la première parabole, puis chercher l'intersection de cette droite avec la deuxième parabole. le problème se ramenait alors à chercher dans quelles circonstances cette intersection était réduite à un point.

Quand on dispose de plusieurs stratégies, il n'est pas inutile de les comparer, du point de vue de leur efficacité, de leur rapidité, de leur caractère esthétique...

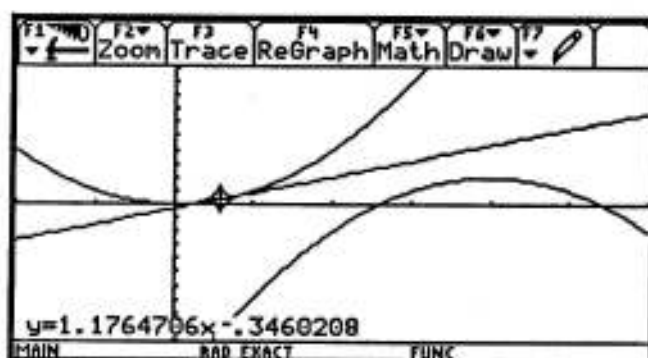
Ce n'est pas la méthode préconisée par l'énoncé qui arrive en tête !

4. Variantes...

Avec une TI-92, on peut commencer par une exploration graphique, comme suggéré par l'énoncé.

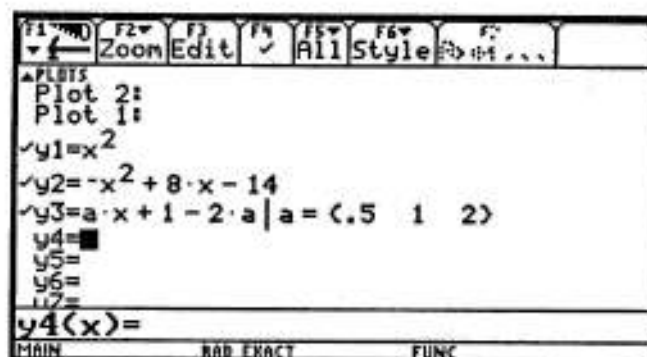
Une commande de l'application graphique ("Tangente") permet de déplacer un point sur une des courbes.

A l'endroit choisi, la machine trace la tangente, et indique l'équation (en valeur approchée) correspondante. Ceci permet en fait une politique de recherche par rectifications successives.



On le voit, il n'y a pas là interaction entre équation de droite, et forme graphique. Tout se passe alors au niveau du graphique. Procéder autrement, par exemple en étudiant le faisceau de droites passant par le centre de symétrie I, requiert un niveau d'expertise supérieur.

L'intérêt de cette stratégie est qu'elle met en évidence le rôle de a, coefficient directeur de la tangente, et qu'elle prépare les calculs ultérieurs.



Il suffit ensuite de chercher l'équation des tangentes à une parabole passant par un point donné.

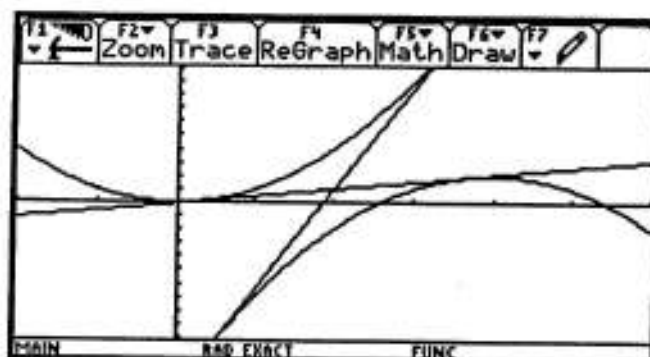
Pour prouver que les tangentes trouvées seront alors "automatiquement" tangentes à l'autre parabole, on peut avoir recours à des explications générales (conservation de la qualité des contacts par une isométrie), ou simplement vérifier par le calcul que cela marche bien.

x représente l'abscisse d'un point de contact d'une tangente issue de I (centre de symétrie) à la parabole représentant $x \rightarrow x^2$.

Deux points de contact possibles, donc deux tangentes.

$\text{solve}(1 - x^2 = 2 \cdot x \cdot (2 - x), x)$
 $x = -(\sqrt{3} - 2) \text{ or } x = \sqrt{3} + 2$
 $\text{solve}(1 - x^2 = 2x \cdot (2 - x), x)$

Validation graphique, "pour voir".
Mais seule la vérification numérique donnera une assurance certaine, par résolution de l'équation.



Pour conclure

1. On pourra constater que cette méthode de recherche de tangentes communes a un domaine de validité assez limité : il est nécessaire que les deux courbes se correspondent par une symétrie centrale.
On peut poursuivre en donnant des situations qui ne soient pas de ce type. Ce sera le cas du prochain TP.
2. Ce problème, traité avec une TI-92, ne permet pas d'atteindre un des objectifs fixés : instaurer des aller-retour entre forme de l'équation et forme de la courbe (ici une droite). Pour atteindre cet objectif, on pourrait songer à un autre type de problème un peu plus complexe (par exemple recherche d'une parabole tangente à trois droites données [Trouche 1995]).

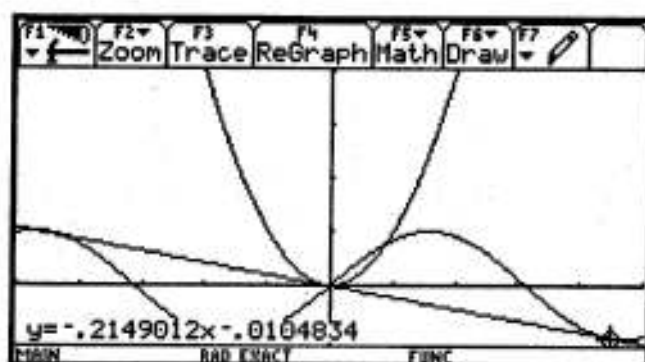
Il faut ainsi à chaque fois vérifier qu'il n'existe pas de commande sur la calculatrice permettant de court-circuiter l'activité elle-même...

Ce qui nécessite une certaine connaissance de l'outil !





TP n°5



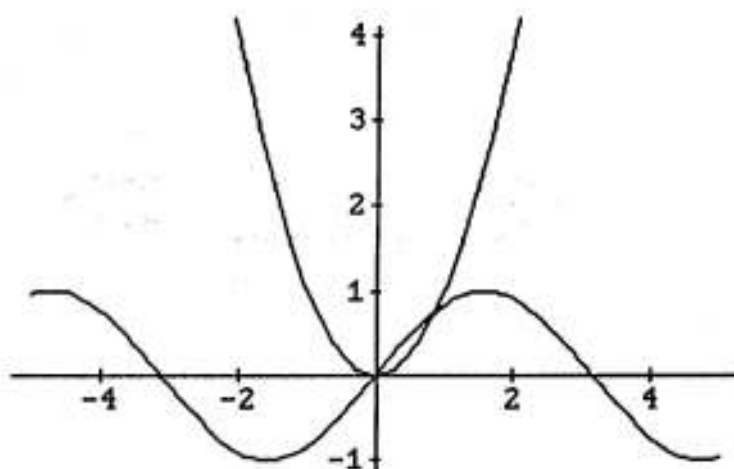
TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°5

On se propose de chercher les tangentes communes à la parabole P d'équation $y = x^2$, et à la sinusoïde S représentant la fonction $x \rightarrow \sin x$.



1. Combien de tangentes communes imaginez-vous ? Pourquoi ?

Pour déterminer leurs équations, on reproduit la méthode utilisée lors du dernier TP :

2. Déterminer l'équation d'une tangente D_a en un point M de P d'abscisse a et l'équation d'une tangente D_b en un point N de S d'abscisse b.

A quelle condition portant sur a et b ces deux tangentes sont-elles parallèles ?

Vérifier vos résultats en prenant $b = -0,25$ puis en calculant a pour que D_a et D_b soient parallèles, et en observant les deux courbes et les droites ainsi obtenues sur votre écran. Reproduisez sommairement cette configuration sur votre feuille.

3. A toute tangente D_a à P correspond-il une, ou des, tangente(s) D_b parallèle(s) ?

Réciproquement, à toute tangente D_b à S correspond-il une, ou des, tangente(s) D_a parallèle(s) ? Justifier précisément vos réponses, et illustrez les par un dessin.

4. Supposons la condition de parallélisme de D_a et D_b réalisée. A quelle condition supplémentaire ces droites sont-elles confondues ? Montrer alors que b doit être solution de l'équation :

$$\cos^2 b - 4b \cos b + 4 \sin b = 0$$

5. Déterminer alors une valeur approchée à 10^{-5} près de la plus grande solution négative de l'équation qui précède. Déterminez alors les équations de la tangente commune correspondante aux deux courbes, vérifier que cela convient bien en observant le tracé des courbes et de cette droite.

2. Le cadre du travail

Ce TP se situe dans la continuité du précédent. Cependant, il y a de nouveaux éléments, théoriques, et pratiques :

- pas de résolution "exacte" possible ;
- pas de symétrie entre les deux courbes : à toute tangente à la sinussoïde correspond une et une seule tangente à la parabole, alors qu'à toute tangente à la parabole correspond soit aucune, soit une infinité de tangentes "soeurs" ;
- il existe cependant des symétries... mais qui ne sont pas d'une aide particulière (symétrie de la parabole par rapport à l'axe des ordonnées, symétrie de la sinussoïde par rapport à l'origine).

Le thème.

On retrouve à la fois bien sûr la question des dérivées et des tangentes, mais aussi celle d'une confrontation de fonctions à limite infinie, et de fonctions bornées (les dérivées respectives des fonctions carrée et sinus).

La question problématique.

Y a-t-il un nombre fini, ou infini, de tangentes communes ? Les points de contact s'accumulent pour la fonction sinus à l'infini, et pour la parabole au voisinage de 0 : a-t-on alors "assez de place" pour une infinité de solutions ?

Les objectifs pédagogiques.

- plus encore que lors du dernier TP, la réalisation de celui-ci impose des "visions larges", des tracés sur papier, des sorties de l'épure...
- sur le plan théorique, il s'agira de transposer les résultats des précédents TP (résolution d'équation, fonction bornée et fonction non bornée, tangentes communes), dans une situation nouvelle, et plus riche.

Hypothèses de déroulement.

Devant la difficulté de mise en forme du problème, on peut s'attendre à diverses manœuvres d'évitement de la difficulté :

- de nombreux élèves ne dépasseront pas le stade du "bricolage" sur la machine ;
- beaucoup d'élèves réintroduiront dans le problème la symétrie du dernier TP ;

On peut s'attendre à ce que les élèves qui ont obtenu l'équation demandée en cherchant une résolution algébrique, pour une formulation explicite de b.

De façon générale, même si l'énoncé de ce TP est assez guidé, on peut s'attendre à une certaine perplexité des élèves... Que cette perplexité débouche sur une attitude de recherche active, ou sur un désarroi passif, dépendra de la dynamique de la classe, de l'acceptation, ou non, du contrat proposé par le professeur...

3. Le retour critique en classe

Il est intéressant de commencer la correction du TP par une discussion ouverte en classe sur le nombre de tangentes communes : noter les arguments des uns et des autres, toujours instructifs ("si on va trop loin, les tangentes ne pourront plus être distinguées de l'axe des abscisses"...), les schémas explicatifs. S'il n'y a pas de consensus, on peut laisser la question ouverte : l'étude théorique qui suit donnera la réponse, et il sera tout à fait instructif de réexaminer alors les arguments des uns et des autres !

La condition de parallélisme du tangente à la parabole en a, et d'une tangente à la sinusoïde en b s'écrit $2a = \cos b$. Il est utile d'insister sur le recul nécessaire devant toute équation : l'existence de b suppose $-0,5 \leq a \leq 0,5$. D'où la dissymétrie du problème : pour un b donné, il n'existe qu'un a convenable. Pour un a donné, il existe soit aucune solution, soit une infinité. Pas de demi-mesure pour les points de contact. Pour les tangentes, si : il n'existe que deux tangentes à la sinusoïde de pente 0...

Il est utile aussi de montrer que ces résultats numériques ont leur traduction graphique naturelle. C'est l'occasion de faire quelques graphiques, montrant le faisceau des tangentes à la parabole qui ont des tangentes parallèles sur la sinusoïde.

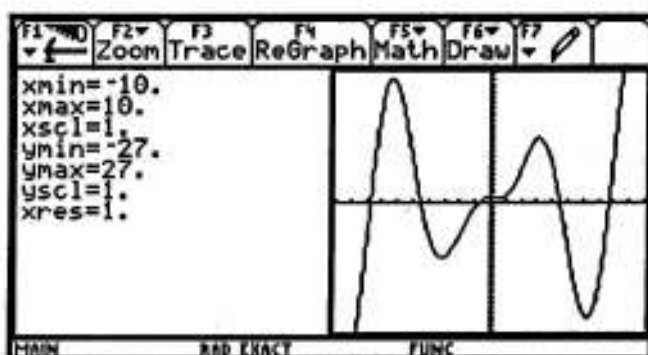
L'équation donnant une condition nécessaire pour qu'un b convienne n'est pas difficile à obtenir.

$$f(b) = \cos^2 b - 4b \cos b + 4 \sin b = 0$$

Mais elle laisse le problème ouvert : y a-t-il un nombre fini ou infini de solutions pour b ?

La fonction f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique...

Comment dans ces conditions pouvoir récupérer des informations sur le nombre (et même l'existence !) du nombre de solutions ?

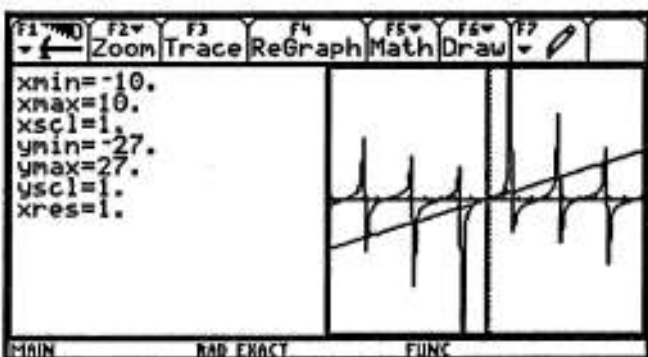


On peut songer à transformer l'équation, en regroupant les fonctions du même type. En notant que $\cos b = 0$ n'est pas possible (un cosinus et un sinus ne peuvent pas être simultanément nuls...), l'équation devient :

$$\frac{1}{4} \cos b + \tan b = b$$

On y voit un peu plus clair (avec une interprétation du graphique liée aux fonctions de référence cosinus, tangente, et linéaire). On ne peut pas cependant exclure des réactions d'élèves intrigués par l'interruption des brins de courbe sur l'écran (cf TP suivant !)

Soit $g(x) = \frac{1}{4} \cos x + \tan x$



Pour des raisons de limites, la fonction g parcourt $\mathbb{R}$ sur chaque intervalle du type

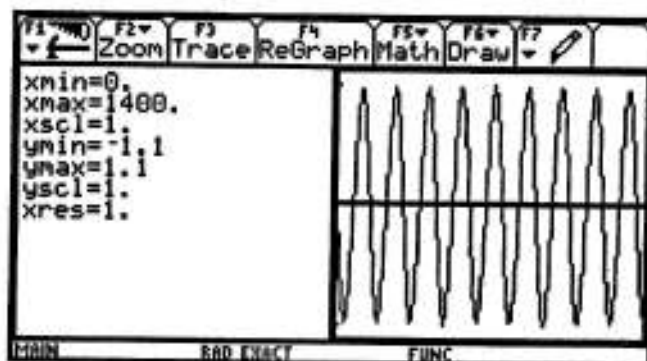
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$. Elle rencontre donc la fonction affine au moins une fois sur chacun de

ces intervalles. Par ailleurs, la dérivée de $\frac{1}{4} \cos x + \tan x$ est $-\frac{1}{4} \sin x + 1 + \tan^2 x$. Partout où c'est défini, c'est positif. Cela nous renseigne-t-il sur le nombre de solutions existant sur chaque intervalle ? Question ouverte, en guise de conclusion...

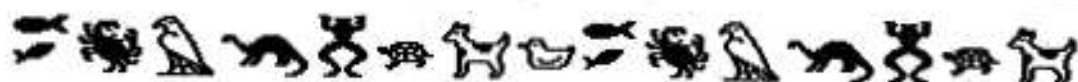
Remarque : peu de changements semblent nécessaires pour ce TP avec des TI-92.



TP n°6



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°6

Observer la courbe de la fonction $f : x \rightarrow \sin x$ sur les intervalles successifs suivants : $[0 ; n]$, en faisant varier n entre 590 et 610.

1. Que pensez-vous des 21 graphiques obtenus ?

(on pourra aussi comparer, pour des fenêtres égales, les graphiques donnés par deux modèles différents de calculatrice)

2. Pouvez-vous tracer une esquisse de la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0 ; 600]$?

3. Pouvez-vous donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 600]$?

4. Pouvez-vous donner un encadrement, à 10^{-5} près, de la plus grande racine de cette équation sur cet intervalle ?

2. Le cadre de travail

Le thème.

Mise en évidence de l'écart irréductible entre les objets mathématiques, et leur représentation par la calculatrice.

La question problématique.

Comment se fait-il qu'une fonction aussi simple que la fonction sinus soit traitée de façon aussi étrange par la calculatrice ? Sur certaines plages, pourtant de grande amplitude, il apparaît des phénomènes de "relaxation" de la sinusoïde assez surprenants...

Les objectifs pédagogiques.

Il s'agit ici de développer une attitude qui ne soit pas de simple défiance vis à vis des tracés obtenus par la calculatrice, mais de contrôle de ceux-ci : sur l'intervalle considéré, pour la fonction étudiée, n'y a-t-il pas des effets particuliers, attendus ou observés, de la discrétisation du tracé ?

Hypothèses de comportement.

C'est la première fois que sont mis en évidence pour les élèves des tracés paradoxaux de la calculatrice. On peut s'attendre à des comportements très divers :

- un comportement plutôt ludique des élèves "bricoleurs" qui s'amuseront à faire apparaître les tracés les plus divers... sans chercher l'explication des phénomènes ;
- un comportement résigné des élèves plutôt "faibles" : "cette machine est encore plus complexe que je ne l'imaginais. C'est à n'y rien comprendre..." ;

- un comportement plutôt méprisant de certains "bons élèves classiques" : "on savait que des calculatrices, ce n'était pas très sérieux ! Une preuve de plus".

Tous ces comportements ont ceci de commun qu'ils contournent la nécessité d'une explication rationnelle. Relancer l'activité des élèves dans le sens d'une tentative de compréhension des phénomènes peut s'avérer nécessaire...

3. Le retour critique en classe

La question des tracés paradoxaux a été traitée dans de nombreux ouvrages ¹¹.

Elle se pose d'ailleurs exactement dans les mêmes termes pour une calculatrice graphique "ordinaire", et pour l'application graphique de la TI-92.

L'expérience prouve qu'il ne suffit pas de dire "ce phénomène se produit parce qu'il y a discrétisation du continu, nécessaire matériellement pour éclairer des points sur un écran composé d'un certain nombre de pixels". L'illusion d'une fidélité de l'écran, et au delà de la machine, a la vie dure...

D'où la nécessité de multiplier les angles de vue paradoxaux, non pas pour l'émerveillement des élèves, mais comme autant de défis pour la compréhension.

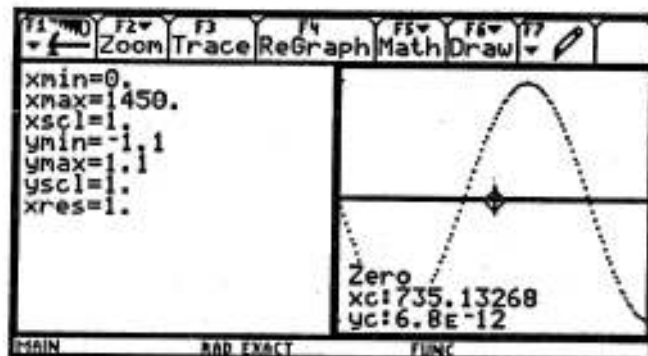
Quelques pistes donc pour relancer l'intérêt des élèves, susciter de nouvelles questions...

1. Le recours aux options graphiques... pour dévoiler les illusions du graphisme :

Avec la commande "zéro"

La fonction sinus a été tracée sur un intervalle qui fait apparaître une "pseudo-période".

La commande graphique "zéro" détecte une racine de f sur un intervalle que la courbe apparente ne laissait pas imaginer...

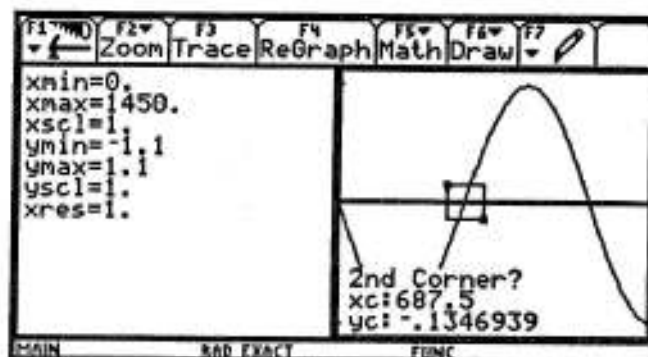


Autre possibilité, avec le zoom.

La fonction sinus, toujours sur le même intervalle.

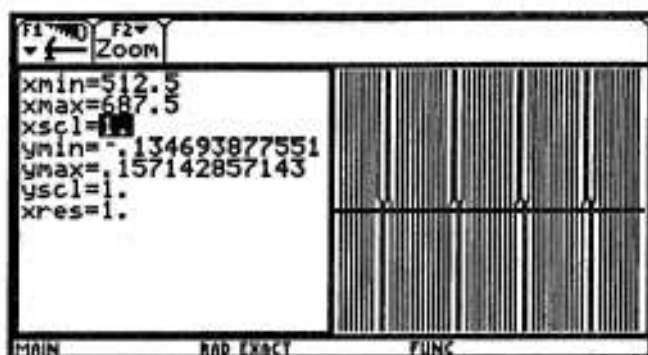
On a sélectionné une partie de la "courbe" grâce à la commande zoom box.

Que va-t-on obtenir en agrandissant cette portion ? Voir page suivante pour la surprise...



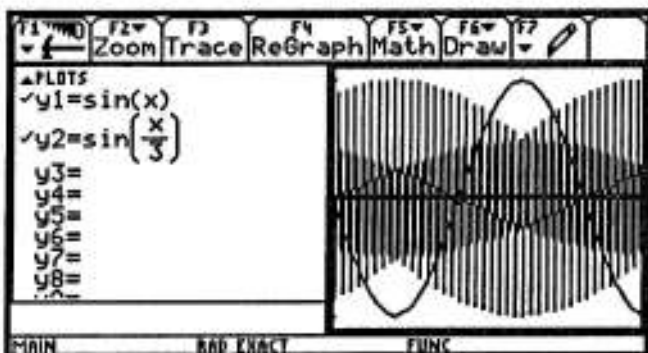
¹¹ Citons (on est jamais mieux servi que par soi-même) BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE, 1995, *Arithmétique, le retour*, dont est extraite la feuille diffusée aux élèves (cf fin de TP).

De l'ordre (apparent) naît le désordre... ou plutôt une nouvelle apparence de l'ordre.



2. La comparaison des "pseudo-périodes" de fonctions proches.

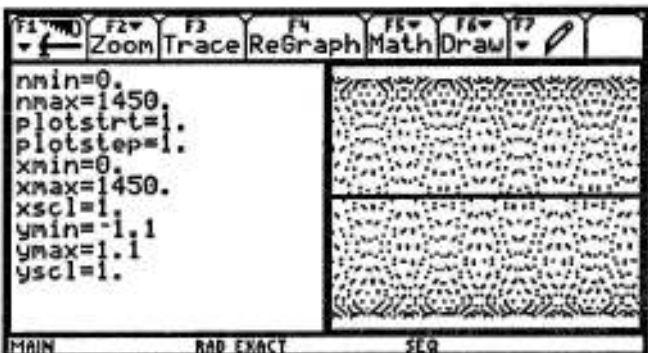
Comment se fait-il que la fonction $\sin \frac{x}{3}$, qui a une période 3 fois plus longue que la fonction sinus, ait un comportement plus frénétique ? Pourquoi ceci ne se reproduit-il pas pour la fonction $\sin \frac{x}{2}$?



3. La comparaison entre le tracé des suites, et celui des fonctions.

Voilà la représentation graphique de $\sin n$, sur le même intervalle que celui qui a été choisi pour représenter la fonction sinus dans les fenêtres ci-dessus.

Comment se fait-il que le graphique, qui devrait être plus "pauvre", extraction du précédent, soit en fait plus "complet" ?



4. Le lancement de nouveaux défis. (en vrac !)

- Peut-on obtenir des représentations graphiques de la fonction sinus qui soient des droites ?
- Des graphiques non périodiques ?
- L'observation d'un graphique "pseudo-périodique", associée à la connaissance de la fenêtre choisie pour représenter la fonction, peuvent-elles permettre de connaître le nombre de pixels de l'écran ?

Fin provisoire de cette réflexion sur image et magie (qui, c'est bien connu, ont mêmes lettres [Debray 1992]). Ou plutôt sur la fausse magie des images fausses !

Suite de la réflexion lors du TP 7.



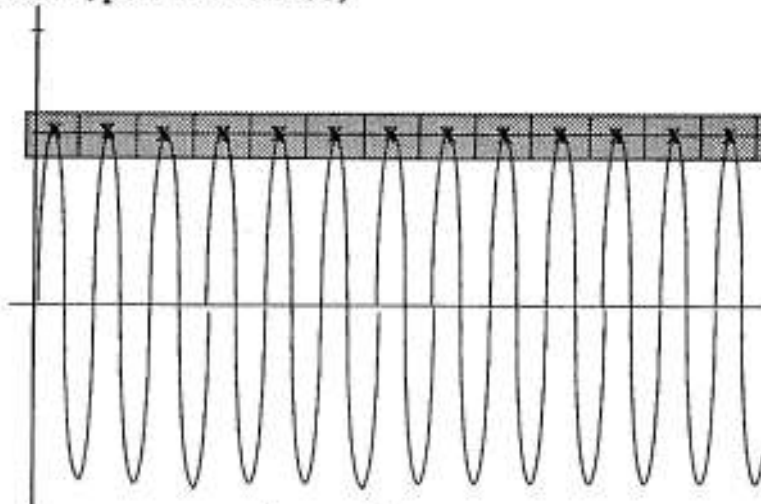
Comment fonctionne le traçage des courbes ?

L'algorithme de traçage en mode DOT est le suivant, pour une TI81 (95 pixels en longueur, 63 pixels en hauteur) :

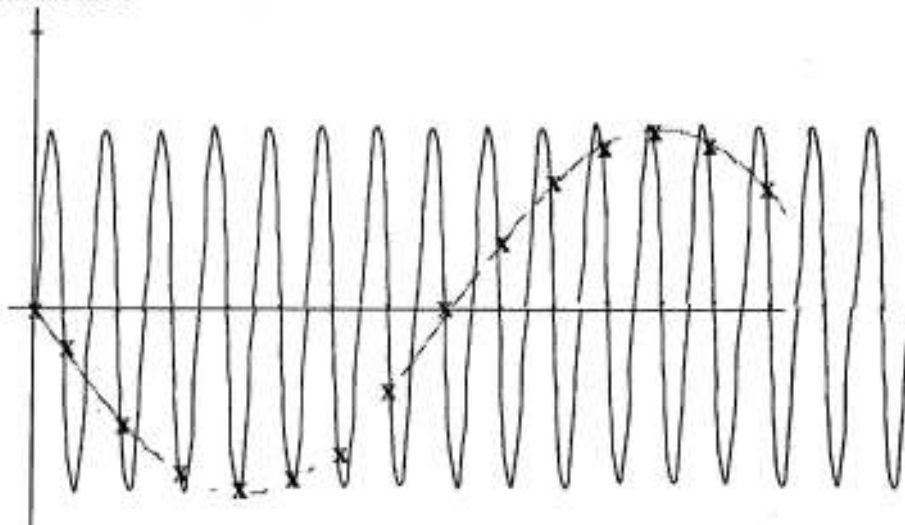
<i>{un fenêtrage et une fonction F sont donnés}</i>	
POUR i := 0 JUSQU'À 95 FAIRE	(Pour chaque colonne de la matrice,
$X := X_{\min} + i * \frac{X_{\max} - X_{\min}}{95};$	(Calculer la valeur de X correspondante
$Y := F(X);$	(Calculer l'image de X par F
$j := 63 * \frac{Y - Y_{\min}}{Y_{\max} - Y_{\min}}; \text{ARRONDIR}(j)$	(Calcul de la ligne correspondant à Y
ALLUMER-PIXEL(i;j);	(Action sur la mémoire écran et intervention du gestionnaire d'écran

- On peut faire apparaître des situations surprenantes :

1) Pour un pas de calcul $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{N} = 2\pi$ la fonction sin est représentée par une droite $y = 0$. Ici on a : $X_{\min} = \pi/2$; $X_{\max} = \pi/2 + 2\pi * N$ (N étant le nombre de pixels "horizontaux" ; pour TI 81 : N=95)

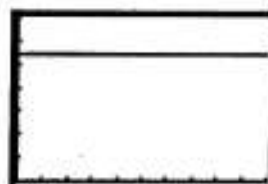


2) Pour un pas de calcul $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{N-1} = 2\pi$, la fonction sin est représentée par une pseudo-sinusoïde :



_____ TP n°7

WINDOW	FORMAT
Xmin=0	
Xmax=1e99	
Xscl=1e98	
Ymin=0	
Ymax=7	
Yscl=1	



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°7

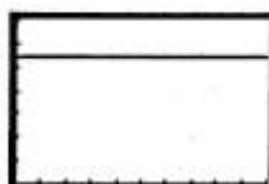
On se propose, comme lors du précédent TP, d'analyser les représentations graphiques que donne une calculatrice pour une fonction donnée, dans des fenêtres données.

Il s'agit de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Observer la représentation graphique que donne votre calculatrice pour cette fonction, sur une fenêtre donnée. Reproduisez le dessin, en justifiant le choix de la fenêtre.
2. Etudier les variations de f (domaine de définition, sens de variation, limites). Les résultats vous paraissent-ils cohérents avec les observations de la première question ?
3. Une calculatrice TI 82 donne pour cette fonction le graphique suivant (pour x variant entre 0 et 10^{99}). Ce graphique est-il celui que vous attendiez ? Comment l'expliquer ?

```

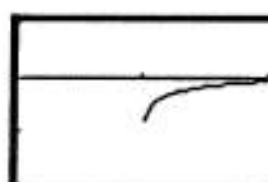
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=1E99
Xscl=1E98
Ymin=0
Ymax=7
Yscl=1
    
```



4. La même calculatrice donne les graphiques suivants pour f , au voisinage de $x = 1$. Ces graphiques sont-ils ceux que vous attendiez ? Comment les expliquer ?

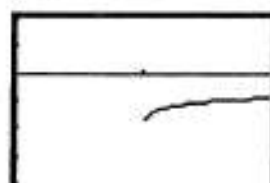
```

WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=5
Yscl=5
    
```



```

WINDOW FORMAT
Xmin=.99
Xmax=1.01
Xscl=1
Ymin=-20
Ymax=10
Yscl=5
    
```



2. Le cadre de travail.

Le thème.

Encore le contrôle des graphiques de la calculatrice, mais dans un contexte davantage lié au cours actuel : la fonction logarithme est au centre du cours d'analyse de TS.

La question problématique.

Là où on n'attend pas d'asymptote (sur $[0, 10^{99}]$), en apparaît une...

Et là où une asymptote est légitimement espérée (au voisinage de 1), on n'en obtient qu'un moignon !

Les objectifs pédagogiques.

Comme pour le précédent TP, il s'agit de prendre du recul sur les images observées, et d'exercer un contrôle actif de celles-ci. Plus précisément, les compétences visées :

- pour un intervalle donné sur les x , savoir adapter "au mieux" le choix des y ;
- comprendre l'importance d'un "petit" déplacement des x dans le choix de la fenêtre, en particulier pour l'apparition, ou la disparition, de pseudo-asymptotes.

Hypothèses de comportement.

On devrait voir apparaître les mêmes comportements d'évitement du problème que lors du précédent TP. S'agissant d'une fonction vue récemment en classe, on peut penser que de nombreux élèves auront tendance à se réfugier dans des calculs habituels (dérivée, limites...), sans chercher à justifier les fenêtres prises, et sans chercher à comprendre les raisons précises des tracés que délivre la machine.

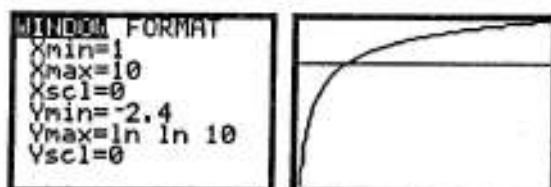
Cependant le retour au TP précédent, l'évocation du schéma explicatif distribué à cette occasion, devrait permettre d'ouvrir quelques pistes...

3. Le retour critique en classe

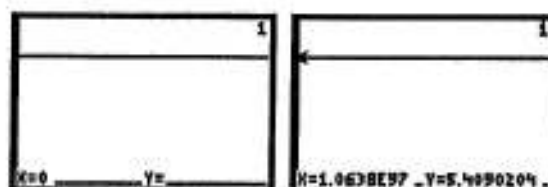
Il est décisif d'insister sur une idée simple : aucune fenêtre n'est le fruit du hasard...

- tout choix de fenêtre est le résultat d'une première étude de la fonction, même sommaire. Par exemple, pour la fonction $\ln x$, toutes les informations, domaine, variations, et limites, peuvent être obtenues sans calcul...

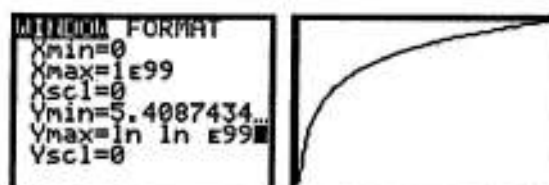
- il y a des exigences d'économie de l'écran : ainsi, pour la fonction $\ln x$, pourquoi la tracer sur $[0, 10]$, si elle est définie à partir de 1 ? Voilà pour les économies sur les x . Et pour les y , si on décide de tracer la fonction sur $[1, 10]$, il faut choisir y variant de $\ln(1 + \frac{10}{95})$ jusqu'à $\ln 10$ (si on a 95 points de calcul). Ainsi tous les points de calcul sont sur l'écran, et il n'y a pas de place perdue !



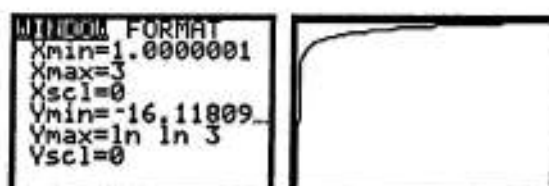
Cette réflexion sur les points de calcul permet de comprendre la représentation de la fonction sur la fenêtre $[0, 10^{99}]$: la machine traçant environ 100 points sur l'écran, le premier point de calcul va être 10^{97} ...



Ainsi l'écran délivre une image d'une fonction qui croît de $\ln \ln 10^{97}$ jusqu'à $\ln \ln 10^{99}$, c'est à dire à peu près de 5,4 à 5,43. Si on veut récupérer une image plus habituelle de cette fonction, il suffit de prendre comme plage pour les y : $[5,4 ; 5,43]$, comme en témoigne le graphique ci-dessous.



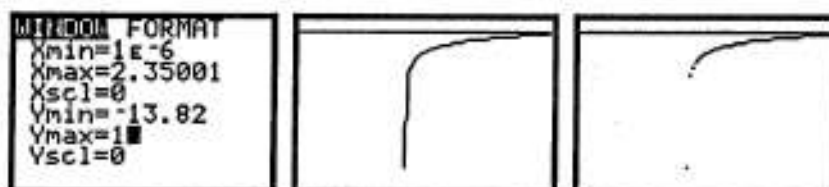
Enfin, pour la quatrième question, on peut tout à fait faire apparaître une courbe descendant davantage le long de son asymptote en faisant partir la fenêtre des x d'un point qui est proche de 1 : $1,0000001$ par exemple :



Plus délicat, si on veut partir de 0, pour faire apparaître le phénomène au centre de l'écran, il faut "s'arranger" pour que cette valeur de x soit un point de calcul pour la machine, ce qui demande un petit calcul...

Il y a plusieurs stratégies possibles. Le plus simple est de faire d'abord en sorte que 1 soit un point de calcul au centre de l'écran : une fenêtre $[0 ; 2,35]$ convient pour la TI 82. Cela nous assure d'un pas de $\frac{2,35}{94} = 0,025$. Le premier point de calcul étant 0, on "tombera" bien sur 1 après un certain nombre de pas de 0,025...

Et puis, on fait un pas de côté de 0,000001 pour X_{min} et X_{max} . On a ainsi une translation de tous les points de calcul de 0,000001, et on est assuré d'avoir un point de calcul pour $x = 1,000001$, comme en témoignent les copies d'écran ci-dessous.



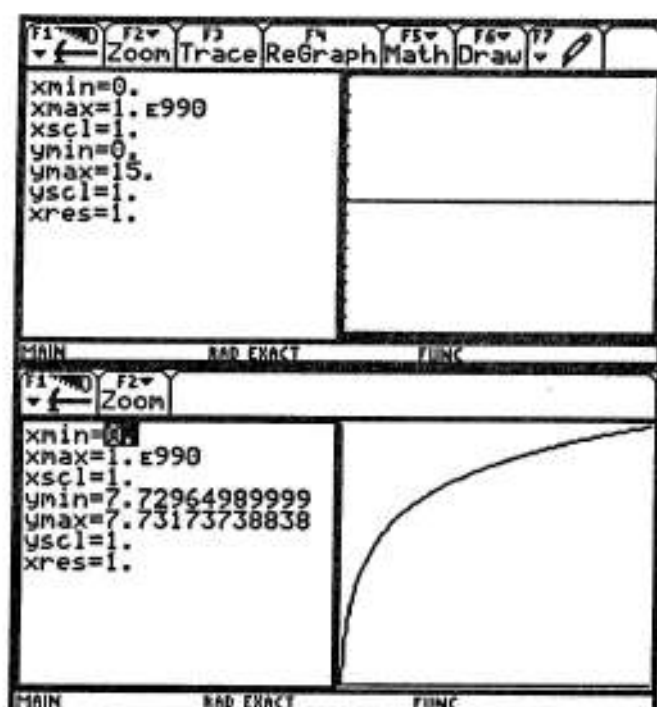
NB : on a pris comme Y_{min} -13,82 car $\ln \ln 1,000001$ est égal à -13,81551... On est assuré ainsi qu'on ne "perd" aucun point en bas de l'écran.

4. Variantes...

Que devient ce TP avec une TI-92 ?

Une partie du problème est automatiquement résolue : une commande du menu Zoom, appelée ZoomFit, ajuste automatiquement la fenêtre, pour les y, en prenant pour Ymin le minimum de la fonction (déterminé en valeur approchée à partir des points de calcul de l'écran), et pour Y max le maximum de f calculé dans les mêmes conditions.

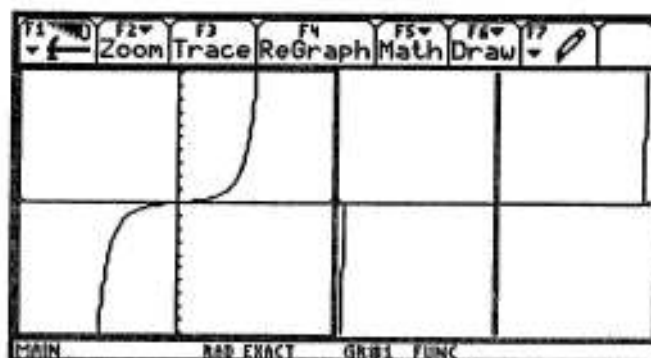
La commande ZoomFit fait donc passer automatiquement au graphique ci-contre, avec rectification du "Window".



L'existence d'une telle commande déplace alors le problème. On peut alors orienter le TP dans une autre direction :

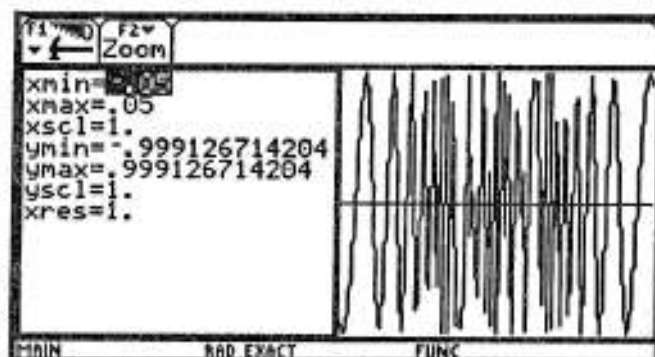
Question générale : Y a-t-il une "meilleure représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné ? Et si oui, est-elle obtenue par la commande ZoomFit ?

On voit ci contre deux représentations graphiques de la fonction $\frac{x}{(x^2 - 1)^{10}}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. A gauche, on a choisit une plage de $[-10, 10]$. A droite, on a appliqué la commande d'ajustement ZoomFit. Quel est le "meilleur" graphique ?



Une question technique : ZoomFit sélectionne-t-elle maximum et minimum de la fonction ?

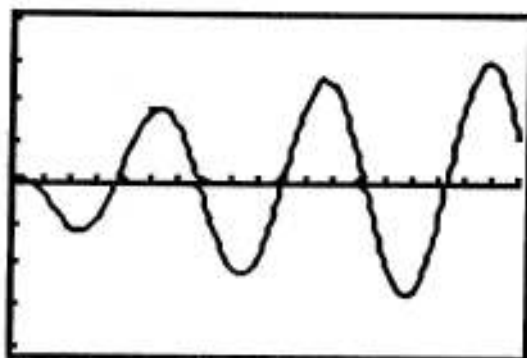
Ci-contre une représentation graphique de $\sin(\frac{1}{x})$ sur l'intervalle $[-0,05, 0,05]$, à laquelle on a appliqué la commande ZoomFit. On notera que le maximum et le minimum de la fonction sinus ne sont pas exactement ceux attendus !



Et d'autres pistes, à la discrétion du lecteur inventif !



TP n°8



TP rédigé par Gaëtan DREZEN
dans le cadre de son DEA.

TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

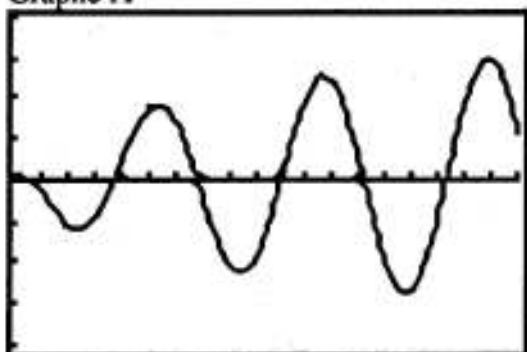
TP n°8

Attention : la première question se traite sans calculatrice ! 
La calculatrice pourra être utilisée une demi-heure après le début du TP 

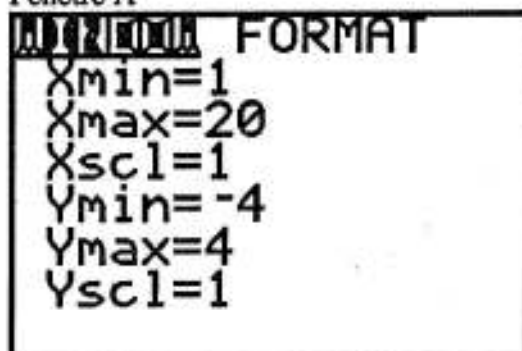
Présentation : Quand le paysage dépend du belvédère

On propose trois représentations graphiques, telles qu'elles apparaissent sur l'écran d'une calculatrice, en précisant chaque fois la fenêtre :

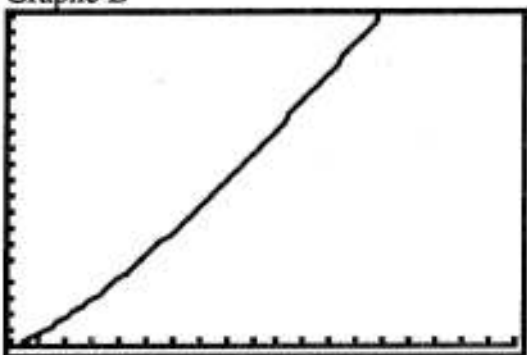
Graphe A



Fenêtre A



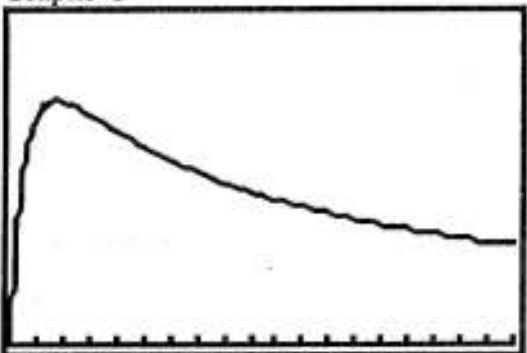
Graphe B



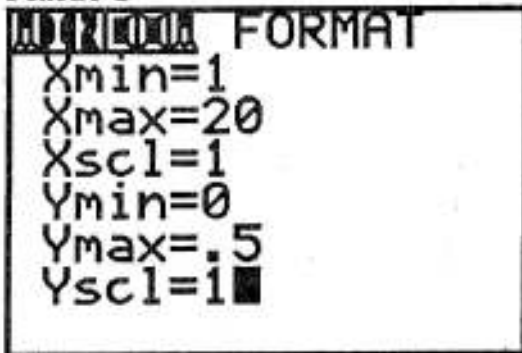
Fenêtre B



Graphe C



Fenêtre C



Première épreuve : *Quand le futur impétrant doit se jeter à l'eau*

On sait que les trois représentations appartiennent à des fonctions qui sont définies par les expressions ci-dessous :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------------|-------------------------|
| [1] $x \ln x$ | [2] $x^2 \ln x$ | [3] $\frac{\ln x}{x}$ | [4] $\frac{\ln x}{x^2}$ |
| [5] $\frac{\cos x}{\ln x}$ | [6] $\frac{\sin x}{\ln x}$ | [7] $(\ln x)(\cos x)$ | [8] $\ln(\cos x)$ |

Il faut associer, SANS UTILISER LES CALCULATRICES, chaque représentation graphique à la fonction qui peut lui correspondre.

Vous direz, pour chacune des 8 fonctions proposées, pourquoi vous pensez possible, ou non, une association avec A, B, ou C.

Pour les fonctions orphelines, vous tracerez des ébauches de représentation graphique. Attention, on ne vous demande pas d'étudier théoriquement les variations de chacune de ces fonctions, mais simplement d'utiliser les caractères des fonctions de référence que vous connaissez bien (ln, cos, carré...) pour "deviner" l'allure générale des courbes en question.

Deuxième épreuve : *Quand on peut saisir la bouée.*

Vous vérifiez vos propositions grâce à la calculatrice.

Vous donnerez alors éventuellement la nouvelle association "graphique $\longleftrightarrow$ fonction " que la calculatrice vous permet de faire.

Attention, si vous vous êtes trompés lors de la première question, n'effacez pas vos réponses précédentes... Mais essayez de comprendre pourquoi vous vous êtes trompés...

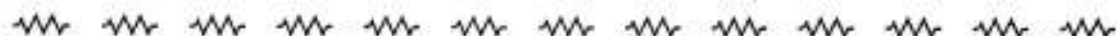
Troisième épreuve : *Quand l'île au trésor sort de la brume.*

Les trois fonctions représentées en A, B et C ayant été identifiées, donner et justifier votre choix de Ymin et Ymax dans chaque cas.

A) $X_{\min} = 0$ $X_{\max} = 1$ $Y_{\min} = \dots$ $Y_{\max} = \dots$	B) $X_{\min} = 0$ $X_{\max} = 1$ $Y_{\min} = \dots$ $Y_{\max} = \dots$	C) $X_{\min} = 0$ $X_{\max} = 1$ $Y_{\min} = \dots$ $Y_{\max} = \dots$
---	---	---

Quatrième épreuve : *Quand on déterre le trésor.*

Pour terminer, tracer avec soin des représentations graphiques des fonctions présentées dans les cadres B et C, en justifiant précisément le choix du repère et le tracé effectué.



2. Le cadre du travail

C'est le seul TP de l'année pendant lequel les calculatrices sont partiellement exclues. Il était prévu comme un TP de transition entre calculatrices graphiques, et calculatrices formelles. Mais celles-ci sont arrivées un peu plus tard que prévu...

Le thème.

Etude générale des fonctions (limites, variations, représentation graphique, combinées)

La question problématique.

Quels sont les critères pertinents permettant d'associer courbes et équations ?

Les objectifs pédagogiques.

Développer l'aptitude à changer de registre de représentation d'une fonction, à faire des aller-retour (donc dans les deux sens...) entre courbes et équations.

Prendre du recul par rapport à la calculatrice, pour développer les attitudes de contrôle : le graphique observé est-il le graphique attendu ? Contient-il les informations déjà connues ? En donne-t-il d'autres ?

Installer des objets qui feront référence commune dans la classe.

Enfin, la question 3 devrait être l'occasion de voir si les élèves savent ajuster au mieux une fenêtre, c'est à dire s'ils réinvestissent les enseignements des deux précédents TP.

Hypothèses de déroulement.

Il y a changement brusque de contrat : jusqu'à présent, les TP étaient organisés autour de la nécessité d'intégrer les outils de calcul. Ici ceux-ci sont exclus...

On peut formuler l'hypothèse que, devant ce changement de contrat, des élèves seront un peu perdus. Il y aura peut-être la tentation de laisser passer le temps jusqu'à ce que les calculatrices soient à nouveau autorisées...

On peut imaginer aussi que, s'agissant de reconnaissance de fonctions, il y aura déploiement de stratégies très différentes, allant de la dérivation au calcul "point par point". On peut émettre l'hypothèse que les comportements les plus experts consisteront à faire interagir les différents registres d'étude (limites, fonctions de référence...).

3. Le retour critique en classe

Il est décisif de fixer des critères élémentaires d'association entre courbes et fonctions, et de le faire à travers une discussion avec la classe, en faisant en même temps le point sur l'efficacité de chacun des critères lors de la réalisation du TP. Il n'y aura pas forcément consensus sur le meilleur critère...

Quelques points de repère. Dans cette situation, on peut :

1. analyser le graphique donné, ce qui suppose :

a) des observations préalables (quelle fenêtre a été choisie pour les x et les y ?

Le repère est-il orthonormé ? Sinon quel est le rapport entre les unités des deux axes, pour pouvoir envisager les pentes des tangentes. ?..) ;

b) des conjectures : sur le domaine de f (la fonction semble être définie sur tel intervalle, problèmes apparents en tel ou tel point) ;

sur la continuité et la dérivabilité de la fonction (sous toutes réserves de lecture graphique : la machine ne donne pas accès à l'infiniment petit)
Points anguleux apparents ?

sur les intersections de la courbe avec les axes ;

sur le maximum, minimum, le signe, de la fonction ;

sur les variations ;
sur les limites (sous toutes réserves... le graphique donne peu
d'indications sur ce qui se passe en dehors des "limites" de l'épure) ;
sur des valeurs particulières éventuelles repérées pour f .

2. analyser la formule algébrique des fonctions données : (là il ne s'agit plus de conjectures...).

Pour des raisons d'économie de résolutions, on s'appuie si possible sur les fonctions de référence.

domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f ;
intersections de la courbe avec les axes du repère ;
maximum, minimum, signe de la fonction ;
variation de la fonction par combinaison des fonctions de référence, chaque fois que c'est possible ;
valeurs particulières prises pour x ;
limites.

Il ne reste plus qu'à croiser les informations... Bien évidemment, l'ordre dans lequel cela se fera n'est pas immuable. Souvent, un indice déterminant apparaît (on peut développer la métaphore de l'enquête policière), et c'est à partir d'un premier rapprochement que tout s'organise. En fonction des autres tests, le suspect sera déclaré coupable, ou innocent.

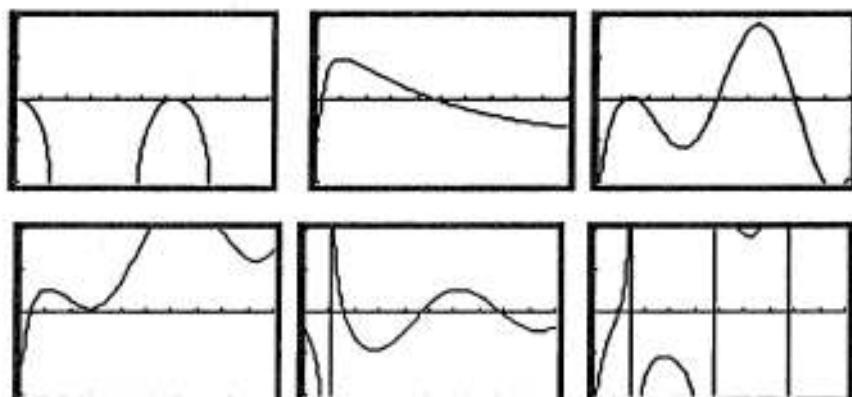
Mais jusqu'à la fin du TP, tout suspect sera présumé non coupable... C'est à dire que l'on fait des premiers rapprochements entre courbes et formules, que l'on pourra éventuellement remettre en cause.

4. En piste !

En application immédiate, on peut proposer un petit travail d'association :

FORMAT
Xmin=0
Xmax=10
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1

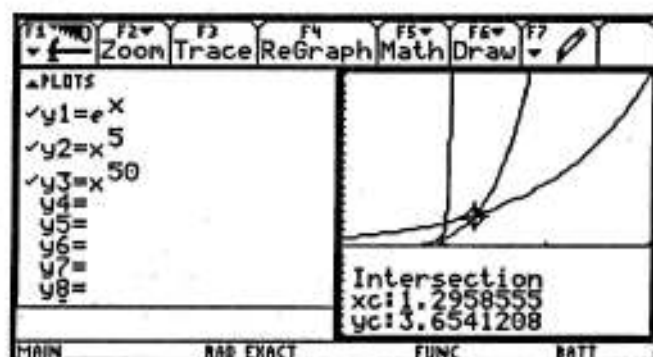
Relativement à la fenêtre ci-contre, une calculatrice TI 82 propose les 6 courbes suivantes pour les fonctions qui à x associent respectivement $\ln x \cdot \cos x$, $\ln(\cos x)$, $\cos(\ln x)$, $\ln x + \cos x$, $\frac{\ln x}{\cos x}$, $\frac{\cos x}{\ln x}$. Associer à chaque fonction son graphique, en justifiant ses choix (sans calculatrice !)



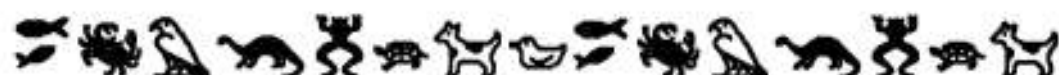
Remarque : il est probable que les travaux des élèves seront bien mieux organisés que lors du TP. Mais c'est une règle assez générale : les conseils, quand ils sont frais, sont en général bien exploités !

Il faudra voir plus tard si les enseignements d'aujourd'hui seront réinvestis !

TP n°9



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°9

A. On se propose de résoudre l'équation $e^x = x^5$. Il s'agit donc d'établir avec rigueur le nombre de solutions de cette équation, et de donner les valeurs exactes, ou un encadrement de chacune d'entre elles.

En général, pour résoudre un tel problème, diverses méthodes d'approche sont possibles :

- étude directe de l'équation ;
- transformation de l'équation ;
- étude d'une fonction, ou de deux fonctions ;
- transformation des fonctions ;
- représentations graphiques ;
- utilisation de la calculatrice...

A vous de voir ici ce qui convient le mieux. Comme d'habitude, on demande de noter dans le cahier de recherche, au fur et à mesure, toutes les méthodes utilisées. S'agissant de représentations graphiques, on reproduira précisément le dessin, en justifiant le choix du repère, ou, pour un dessin issu de la calculatrice, le choix de la fenêtre.

B. Même question, avec l'équation $e^x = x^{50}$.

2. Le cadre du travail

Thème.

La fonction exponentielle, et la comparaison avec les fonctions puissances. En fait, il s'agit d'un thème plus large, qui donnera le cadre de ce TP, du TP suivant, et du TP 17 : les rapports entre exponentielle, logarithme, et puissances.

La question problématique.

Les calculatrices ne donnent pas la seconde racine positive de l'équation $e^x = x^{50}$.

N'y en aurait-il qu'une ?

Ce TP, par ailleurs, ressemble au premier TP de l'année, où la plus grande racine positive d'un polynôme se trouvait "très loin". Elle existait nécessairement pour des raisons de limite. C'est le même problème ici.

L'objectif pédagogique.

Développer différentes approches de résolution d'équation (changement de fonctions, différence de fonction...), mais en gardant au poste de commande la connaissance des attributs de chacun des objets (ici les théorèmes de comparaison exponentielle/puissances).

Les hypothèses de déroulement.

- La première hypothèse est que les groupes qui mémorisent les leçons des TP devraient considérer le problème sous divers angles : en effet lors du dernier TP de résolution problématique d'équation $\sqrt{x} = \sin x$, il avait été vu que l'on pouvait considérer la différence des fonctions, ou l'égalité des fonctions de référence, qui donnaient toutes deux des informations intéressantes ;

- La deuxième hypothèse est que les élèves "scolaires" ne réinvestiront pas le résultat du cours dans le TP. Leur calculatrice ne leur montrera que les "petites" racines de l'équation. Et comme ils ne sauront pas transformer l'équation pour la résoudre, via l'étude des fonctions, ils en resteront à la description des solutions vues à l'écran ;

- La troisième hypothèse est que les groupes ayant opéré un changement de point de vue pour la première équation, auront tendance à reproduire cette technique telle quelle pour la deuxième équation, sans retour à la forme exponentielle. Du coup, ils ne verront pas la solution négative de cette équation ;

3. Le retour critique en classe

On insistera avec profit sur la nécessité (ou la possibilité...) de faire des choix.

Premier choix : on peut traiter directement une équation, ou faire le détour par l'étude d'une fonction : si les expressions sont "du même genre", on peut parfois factoriser (polynômes, fonctions trigo...) ; quand on ne peut pas, on étudie les fonctions en présence. En fait, en procédant ainsi, on enrichit la question, on traite une question plus large, pour revenir ensuite à un problème plus précis : connaissant les variations générales des fonctions, on pourra savoir quand elles s'annulent.

Si on étudie des fonctions, on a alors **un nouveau choix à faire** : on peut étudier deux fonctions, ou une différence de fonctions. On peut toujours exploiter les deux pistes, surtout si on dispose de fonctions de référence.

La visualisation des variations est importante, pour émettre des conjectures, mais ne vaut pas pour preuve ! : e^x et x^{50} ont clairement un point commun (au moins !) . On le retrouve d'ailleurs par la visualisation de $e^x - x^{50}$. On peut d'ailleurs reproduire les graphiques qui ont permis ces conjectures .

Mais ces conjectures n'ont de sens que si l'on se pose deux questions :

i) **qu'est-ce qui se passe hors des limites de l'épure ?** L'étude rapide de la limite en $+\infty$ de $e^x - x^{50}$ permet de trancher la question. Cela veut dire que les fonctions en présence font référence. Quand on voit une fonction exponentielle et une fonction puissance "côte à côte", on pense tout de suite à leur force comparée, **même si cela n'apparaît pas sur l'écran.**

ii) **puis-je justifier théoriquement ce que je vois ?** L'observation graphique ne donne aucune certitude. La plupart du temps, il faudra utiliser ici le théorème de la bijection.

On peut alors changer de fenêtre pour essayer de voir au-delà (en adaptant toujours le fenêtrage des y au fenêtrage des x, ce qui est lié aux fonctions en présence !). Ce fenêtrage exige un peu de persévérance, et de technique... ;

On doit enfin revenir à l'étude des variations de la fonction . Si cette étude pose problème, on peut transformer la fonction. Mais attention, toute transformation d'équation, ou de fonction doit s'accompagner de la question : est-ce que, en faisant

cela, je n'ajoute pas, ou je ne supprime pas, des solutions. Il y a un intérêt supplémentaire à passer de l'exponentielle au logarithme : on a là une croissance beaucoup plus lente. La machine est davantage épargnée...

En conclusion, il n'y a pas un ordre plus légitime qu'un autre dans une recherche. Certains préféreront regarder d'abord leur calculatrice pour voir ce qui se passe, émettre des conjectures, etc... D'autres se lanceront d'emblée dans des calculs. Mais ce qui est décisif, c'est de faire des allers-retours entre les outils de calcul, et les preuves théoriques.

4. Variantes...

Variantes d'énoncé.

Le déroulement d'un TP, on ne le dira jamais assez, dépend, entre autres choses, du texte de l'énoncé. Au lieu de l'équation $e^x = x^{50}$, on pourrait donner l'équation $e^x = x^{25}$. Les élèves ne seraient pas alors attirés par la racine négative, et il y aurait une dissymétrie entre la première équation, $e^x = x^5$ (deux solutions), et la deuxième équation, $e^x = x^{50}$ (une seule solution "évidente"), qui aurait incité les élèves à davantage de circonspection. Tout ceci est affaire de choix du professeur, de dosage de la difficulté.

Le dilemme est toujours le même :

- un problème sur lequel on a beaucoup réfléchi donnera matière à apprentissage plus profond qu'un problème simple ;
- un problème sur lequel il faut trop réfléchir décourage facilement les élèves les moins convaincus.

Il faut trouver le juste milieu !

Ou variantes de machine...

On trouvera dans le TP 17 un travail, réalisé avec les TI-92, qui se situe dans le prolongement de celui-ci.

On notera cependant dès maintenant que la TI-92 ne résout pas le problème posé par ce TP :

En mode exact, elle retourne simplement l'équation.

En mode approché, elle ne retourne que deux solutions !

Si on lui demande les solutions supérieures à 100, elle répond qu'il n'y en a pas...

Si on lui demande les solutions supérieures à 200, elle consent enfin à livrer la racine manquante !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z
■ solve($e^x = x^{50}, x$) $e^x - x^{50} = 0$					
■ solve($e^x = x^{50}, x$) x = 1.02062220279 or x = -.98057946687					
■ solve($e^x = x^{50}, x$) x ≥ 100 false					
■ solve($e^x = x^{50}, x$) x ≥ 200 x = 282.115898749					
solve($e^{(x)} = x^{50}, x$) x ≥ 200					
MAIN RAD EXACT FUNC 4/30					

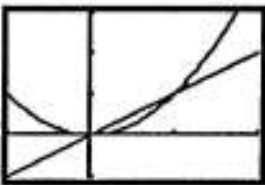
Un outil, aussi perfectionné qu'il soit, reste un outil.
Morale de l'histoire et fin.

Enfin, pas tout à fait : on lira dans les pages qui suivent une copie des transparents qui ont servi à la correction en classe du TP. A toutes fins utiles !

Comment résoudre l'équation $f(x) = g(x)$? (transparent commenté aux élèves)

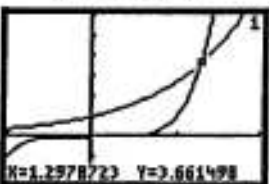
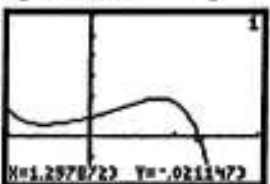
A. Etude d'équation, ou étude de fonction ?

Exemple : $x^2 = x$

$x^2 - x = 0$ $x(x - 1) = 0$	
------------------------------	--

B. Etude d'une fonction, de deux fonctions ?

Exemple : $e^x = x^5$

$e^x = x^5$ 	$e^x - x^5 = 0$ 
---	--

C. Conjectures, ou preuves ? Que dire :

"Il semble bien que l'équation a, sur $[0, 3]$, une solution égale, à peu près, à 1.29 ".....	Ou "l'équation a une seule solution sur $\mathbb{R}$. C'est vrai, je le vois"?
---	---

D. Deux questions essentielles

Qu'est-ce qui se passe en dehors de l'écran ? (Penser aux fonctions de référence)	Puis-je prouver théoriquement ce que je vois ? (Penser au théorème de la bijection)
---	---

E. Un premier outil du chercheur : changer de point de vue.

Avec la calculatrice :
changer de fenêtre.

Le choix des plages doit
peu au hasard.

On voit parce que l'on sait
ce que l'on va voir...

Attention, le changement
de fenêtre peut supprimer
des solutions, et ne donne
jamais la garantie de tout
voir...

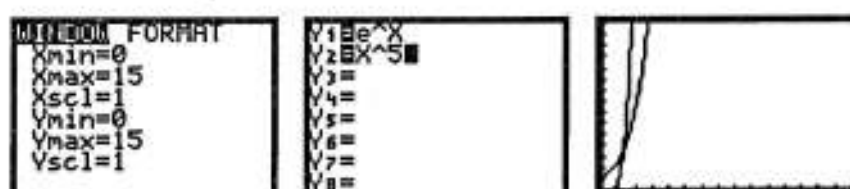
Avec le calcul :
changer de fonction

Ce changement doit peu au
hasard. On le fait parce que
les fonctions nouvelles sont
plus "simples" à étudier.

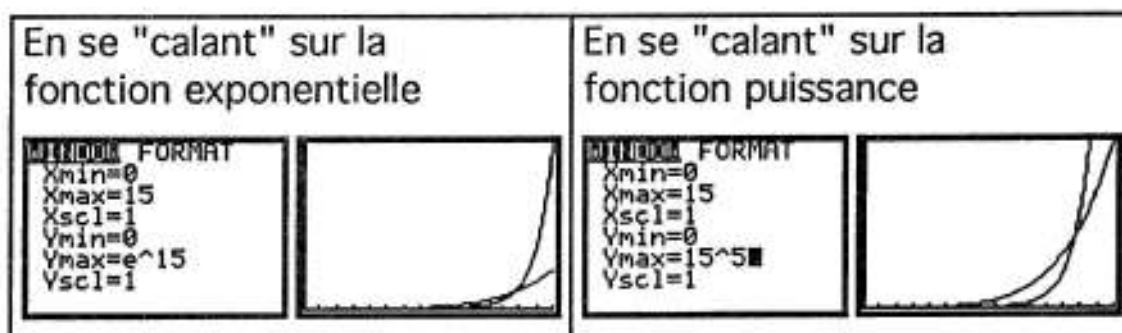
Attention : le changement
de fonction peut ajouter
des solutions parasites, ou
supprimer des solutions
vraies...

$x = 2$, et $x^2 = 4$, ce n'est pas
pareil...

Exemple, pour notre problème : on connaît les
fonctions de référence, nécessairement il y a une
seconde racine positive. On regarde :



On peut d'abord changer la fenêtre :



On peut aussi garder la fenêtre, et changer les fonctions...

On garde les deux fonctions de départ, et on les soustrait...



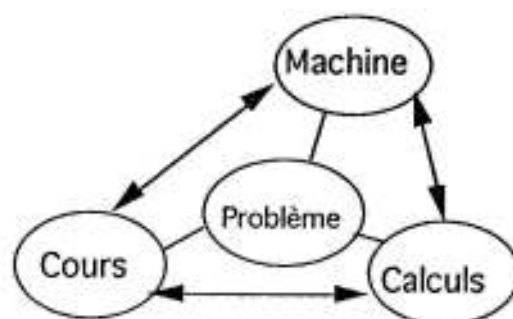
On change les deux fonctions de départ...



On change les deux fonctions de départ, et on les soustrait...

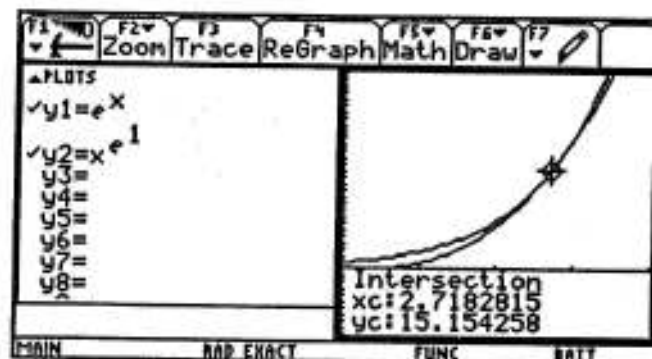


F. Un deuxième outil du chercheur :
faire des allers-retours entre les phases
"expérimentales" et les phases de preuves

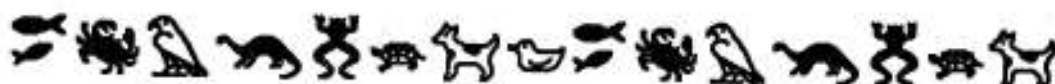




TP n°10



TP traité avec des calculatrices graphiques.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°10

On se place dans tout ce qui suit sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Nous avons vu la semaine dernière que les courbes des fonctions $x \rightarrow x^5$ et $x \rightarrow x^{50}$ rencontraient deux fois la courbe de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}^+$.

Par ailleurs, on sait que la droite représentant la fonction $x \rightarrow x$ ne rencontre pas la courbe de la fonction exponentielle.

1. Y a-t-il d'autres fonctions puissances dont la courbe ne rencontre pas celle de la fonction exponentielle ? Si oui lesquelles ?
2. Y a-t-il une (ou des) fonction(s) puissance(s) dont la courbe rencontre une fois et une seule la courbe de la fonction exponentielle ? Si oui, laquelle (ou lesquelles) et pourquoi ?
3. Que peut-on en conclure pour les courbes des fonctions puissances et celle de la fonction logarithme ?

2. Le cadre de travail

Le thème

Il recouvre celui du TP précédent. Avec un point nouveau, essentiel : celui de dérivée, ou de tangente.

La question problématique.

Y a-t-il une situation intermédiaire entre la situation de coupure de l'exponentielle par les fonctions puissances en deux points, et la situation d'intersection vide ? (la question problématique se pose en fait pour les exposants positifs ; pour les exposants négatifs, la situation est assez claire).

Les objectifs pédagogiques.

En plus d'une familiarisation avec les fonctions puissances d'exposant réel, il s'agit ici d'apprendre à inventorier les cas de façon exhaustive, à classer ceux-ci en fonction des caractéristiques visées (nombre d'intersections avec la fonction exponentielle). Comme pour les précédents TP, l'aller-retour entre observation et validation est souhaité...

Les hypothèses de déroulement.

Les élèves commençant à avoir l'habitude de la recherche "libre", et la question étant assez stimulante, l'activité de la classe devrait être assez riche.

Les élèves bricoleurs considéreront peut-être la question comme un défi, et tenteront de trouver, à coups de zoom, un exposant réalisant un contact tangent, en contournant la validation théorique ; les élèves plus scolaires seront peut-être tentés de réinvestir "à répétition" le dernier TP : étude de l'équation $e^x = x^2$, puis de l'équation $e^x = x^3$, etc... Les élèves expérimentateurs devraient trouver ici un terrain d'explorations multiples.

N.B. A partir de ce TP, les corrections sont données sous la forme de Vues et changement de points de vues, commentés, puis distribués à la classe.

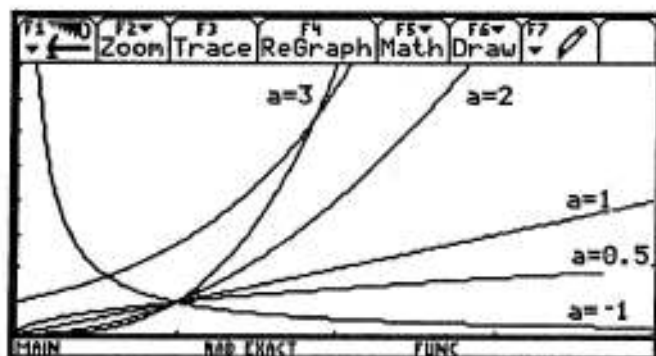
Vues et changements de points de vue sur le TP 10

A partir de ce TP, les séances "d'institutionnalisation" se font avec l'aide de la TI92 rétroprojectable. Cela s'inscrit dans le cadre de l'immersion douce dans la manipulation de ce matériel de type nouveau.

On n'abordera donc pas tous les points problématiques (d'ailleurs, est-ce possible ?), mais, à chaque fois, quelques-uns. Comme pour le précédent TP, on insiste ici beaucoup sur l'importance du "changement de point de vue", sur la comparaison des avantages et inconvénients des diverses stratégies.

Observations et conjectures...

On peut commencer par observer la position relative de la courbe de la fonction exponentielle, et des courbes des fonctions puissances d'exposant $-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$. (Ces exposants n'ont pas été pris tout à fait au hasard : on a en principe en tête le "plumeau" des fonctions puissances !)



Conjectures découlant de

l'observation de e^x et x^a :

- si l'exposant de la fonction puissance est négatif, sa courbe coupe une fois et une seule la courbe de la fonction exponentielle ;
- si l'exposant est égal à deux, pas d'intersection ;
- si l'exposant est égal à 3, deux intersections ;
- que se passe-t-il pour les exposants entre 2 et 3 ?

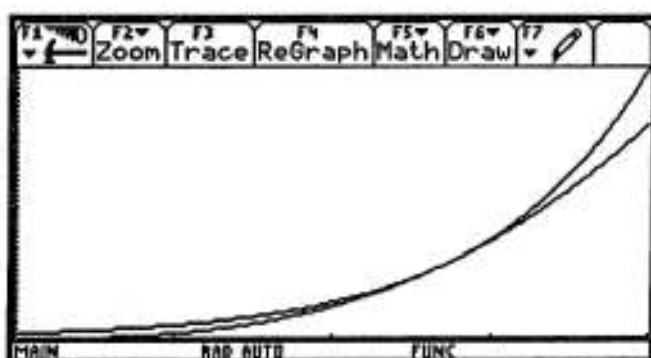
On peut alors essayer d'affiner ces observations (cependant, il faut songer à l'équilibre des plages de travail, observations, conjectures, preuves...), ou essayer de définir une stratégie générale...

1ère stratégie : où l'on s'inspire du TP précédent

On cherche le nombre de solutions de l'équation $e^x = x^a$ pour $x > 0$. On sait que l'on va devoir étudier une fonction. On passe au logarithme pour faciliter cette étude (par dérivation, le logarithme partira...). Soit l'équation $x = a \cdot \ln x$, et l'étude de la fonction

$f(x) = x - a \cdot \ln x$. On dispose de $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$. Deux cas de figure :

- si $a < 0$, la dérivée est strictement positive. La fonction f croît donc strictement de $-\infty$ à $+\infty$. Comme f est continue, le théorème de la bijection s'applique, et f s'annule une fois et une seule. Confirmation de la première conjecture.
- si $a > 0$, la dérivée s'annule pour $x = a$. L'étude de son signe montre que la fonction f admet un minimum pour $x = a$, et ce minimum strict est égal à $a - a \cdot \ln a = a(1 - \ln a)$. Si ce minimum est strictement positif, c'est à dire pour $a < e$, la fonction f ne s'annulera jamais ; si ce minimum est nul, c'est à dire pour $a = e$, la fonction f s'annulera une fois exactement ; si ce minimum est strictement négatif, c'est à dire pour $a > e$, la fonction f (qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 ou $+\infty$) va s'annuler deux fois.



Vérification :

- on trace la courbe de la fonction exponentielle, et celle de la fonction x^e . Elles semblent bien se rencontrer en un point, avec de plus une tangente commune ;
- en effet, pour $x = e$, les fonctions e^x et x^e coïncident (évidemment), et leurs dérivées e^x et ex^{e-1} aussi. Cette remarque aboutira à la stratégie 4.

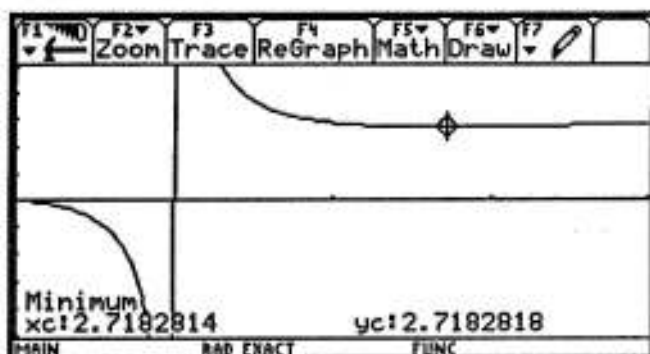
2ème stratégie : où l'on améliore la précédente.

On s'intéresse à l'équation $x - \ln x = 0$. On peut alors songer à isoler le paramètre. En supposant x différent de 1 (ce qui n'est pas gênant, puisque pour $x = 1$, les fonctions exponentielles et puissances peuvent difficilement se rencontrer...), l'équation devient $\frac{x}{\ln x} = a$. On choisit alors de considérer la fonction $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ (dont l'étude est laissée au soin du lecteur).

Résoudre le problème revient à étudier le nombre d'intersection entre la courbe de g , et une droite "horizontale" d'équation $y = a$.

L'étude montre que, pour $x > 1$, la fonction admet un minimum égal à e (obtenu pour $x = e$). Bien entendu, la calculatrice peut être mise à contribution pour l'établir. Mais attention à ce que la machine dit, ou ne dit pas !

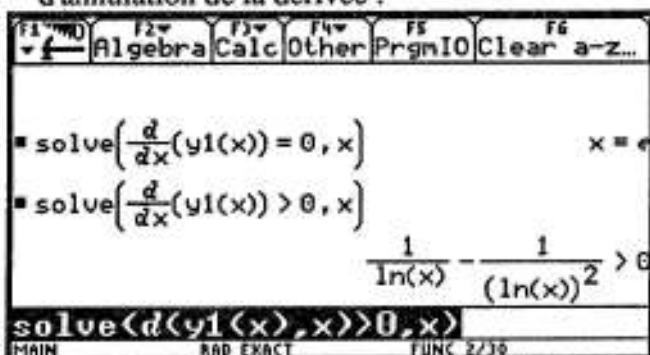
- si on reste dans l'application graphique, la calculatrice donnera une valeur approchée du minimum :



Dans l'application graphique de la TI92, la calculatrice donne le résultat en valeur approchée, même si on est en mode "calcul exact", indiqué sur la ligne du bas de l'écran. Il est regrettable d'ailleurs que coexistent sur le même écran "exact", et une valeur approchée...

On peut bien sûr conjecturer que ce minimum ressemble bien à e , mais cela reste une conjecture...

- par contre, si on revient dans l'application initiale, on obtient la valeur exacte d'annulation de la dérivée :

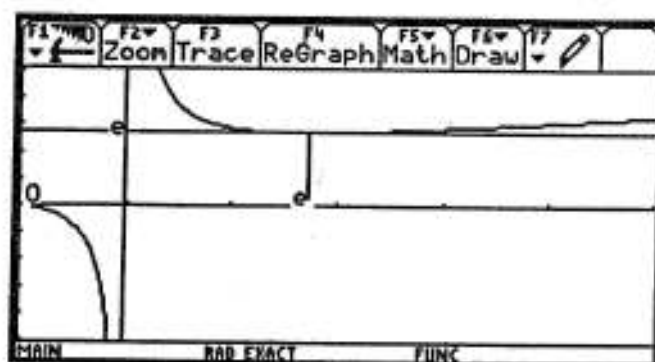


La fonction $\frac{x}{\ln x}$ a été mise dans le

fichier de fonction en **y1**

On observe que la calculatrice veut bien dire que la dérivée s'annule pour $x = e$, mais ne dit pas quand la dérivée est positive : elle renvoie simplement le message (en calculant tout de même la dérivée de la fonction, mais sous une forme qui n'est pas habituelle !)

Une fois établies, avec ou sans l'aide de la machine, les variations de la fonction, on en revient à l'étude de l'équation $\frac{x}{\ln x} = a$.



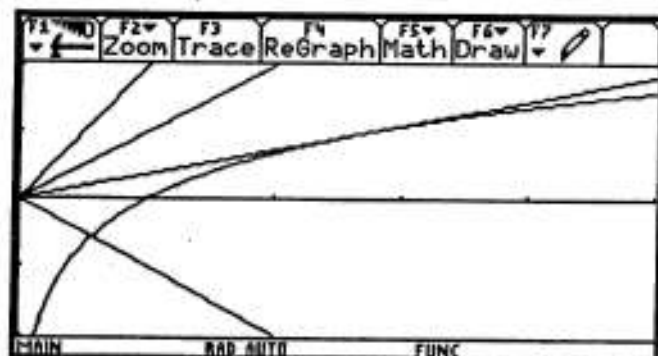
Résultats

- si $a < 0$, l'équation a toujours une solution.
- aucune intersection pour $0 < a < e$
- une seule intersection pour $a = e$
- deux intersections pour $a > e$

3ème stratégie : où l'on modifie la précédente.

Revenons à l'équation $x - a \ln x = 0$. On aurait pu aussi faire le choix de se ramener à des fonctions de référence, en étudiant l'équation $\ln x = \frac{x}{a}$ (ce qui suppose avoir éliminé le cas $a = 0$). Le problème revient ainsi à étudier les intersections entre la fonction $\ln$, et les droites passant par l'origine.

L'intérêt de ce point de vue est que l'on peut repérer ici une situation familière : on sait (en principe) que la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point $(e, 1)$ passe par l'origine, avec comme pente $\frac{1}{e}$.



Pour les droites issues de l'origine de pente $\frac{1}{a}$:

- si les pentes sont supérieures à $\frac{1}{e}$, donc si $a < e$, pas d'intersection ;
- pour $\frac{1}{a} = \frac{1}{e}$, une intersection ;
- pour $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e}$, deux intersections ;
- pour $\frac{1}{a} < 0$, une intersection.

Intérêt de cette méthode : bonne visualisation, retour à une situation de référence. Par contre, pour prouver ce que l'on voit... il vaudrait mieux revenir à la stratégie 2...

4ème stratégie : où l'on revient à la tangente.

Reprenons le problème au point de départ, c'est à dire l'étude de la position relative de la courbe exponentielle et des courbes puissances.

Les observations de départ pouvaient conduire à penser qu'il y avait parfois une intersection vide (pour x^2 par exemple), parfois une intersection réduite à deux points (pour x^3 par exemple), et parfois une situation "intermédiaire", ainsi définie : la courbe d'une certaine fonction puissance rencontre la courbe de la fonction exponentielle en un seul point, et, en ce point, les deux courbes sont tangentes, c'est à dire ont une tangente commune. Comment procéder ?

Supposons que cette situation existe.

Soit x l'abscisse du point unique de contact, et a l'exposant de la fonction puissance en question.

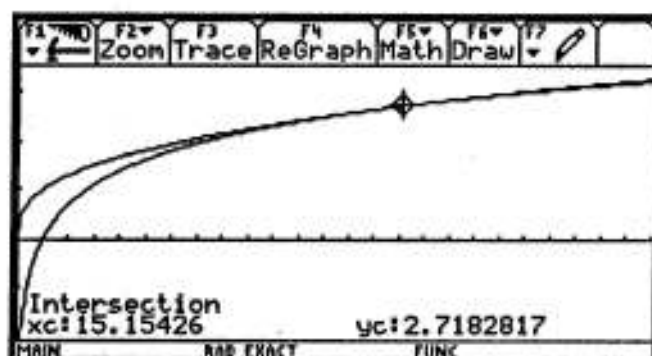
On devrait avoir simultanément : $e^x = x^a$ et $e^x = ax^{a-1}$. Il s'agit d'un système à résoudre. Par division, on a immédiatement $x = a$, ce qui amène à l'équation $e^a = a^a$, c'est à dire $a = e$.

Il reste à vérifier que cet exposant convient, ce qui ne pose pas trop de problèmes...

Comparaison avec les autres méthodes : ici on trouve d'emblée l'existence d'une configuration particulière, où les courbes se coupent en un point, avec tangente commune. Donc des résultats plus riches, pour cette situation particulière, qu'avec la stratégie n°2. Par contre, on n'a pas les résultats pour les autres fonctions puissances... Même si on peut conjecturer que, pour $0 < a < e$, donc avant la situation de tangence, les courbes de la fonction puissance ne coupent pas celle de la fonction exponentielle, ceci n'a pas été prouvé ici... Notons que, sous des formes différentes, toutes les méthodes mettent en valeur une situation limite, qui est une situation tangente (stratégie 1, 2 et 3 : droite tangente à une courbe, stratégie 4 : courbes tangentes)

Dernier changement de point de vue, et conclusion.

La fonction exponentielle a comme réciproque la fonction logarithme, la fonction x^e a comme réciproque la fonction $x^{1/e}$.

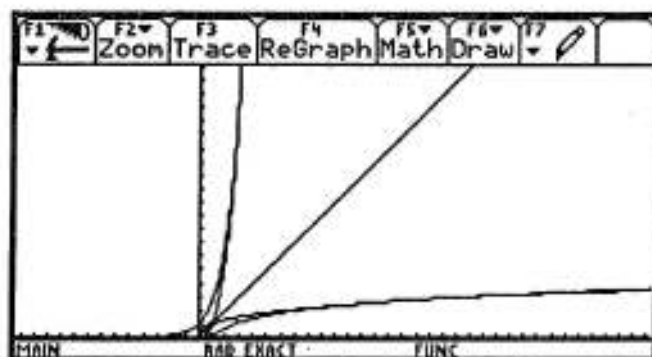


Il suffit de transférer les résultats obtenus antérieurement : tout se fait par symétrie (en repère orthonormé !) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Les courbes se coupent bien en un point unique de coordonnées (e^e, e) .

Fin provisoire. Il est tout à fait possible qu'il y ait d'autres stratégies, découlant d'autres points de vue sur la question.

Terminons sur une remarque de type graphique : si on veut jeter un coup d'oeil sur l'ensemble de la situation, c'est à dire, en repère orthonormé, les courbes de la fonction exponentielle, de la fonction logarithme, des fonctions puissances x^e et $x^{1/e}$, et la "première bissectrice, sur des plages qui permettent de "voir" les points de tangente, on est bien déçu : on ne voit pas grand chose.



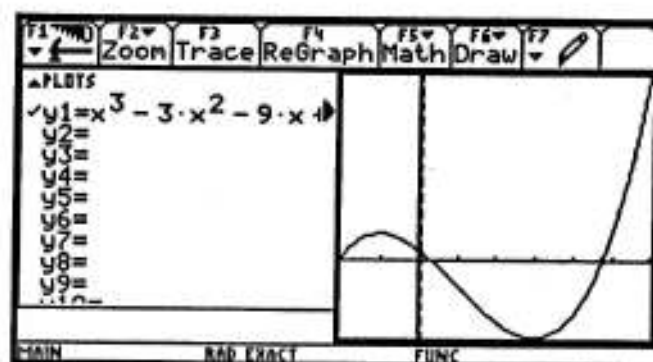
Ce qu'on gagne en vision générale, on le perd en précision.

Comme le dit Jean-Luc Godard, "une image juste, c'est juste une image..."

Morale de l'histoire, et fin.



TP n°11



Il s'agit du premier TP traité avec les TI-92

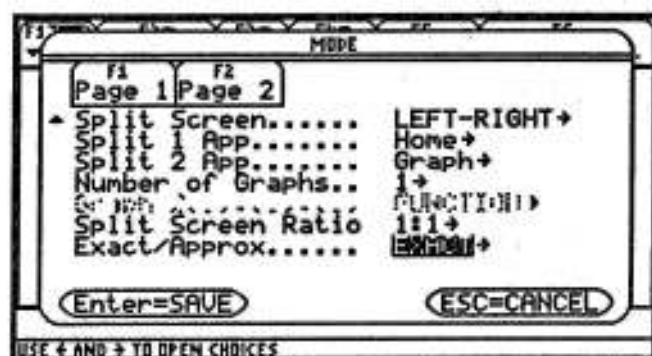
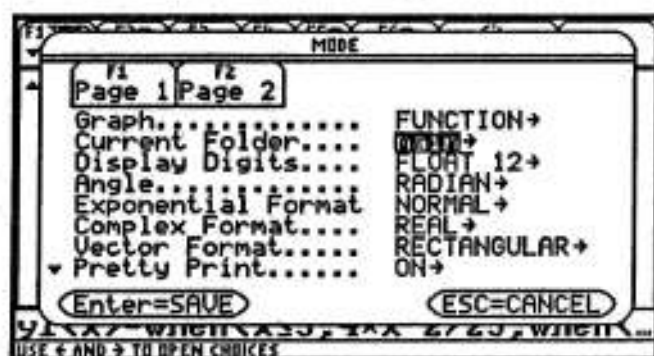


1. Le travail donné aux élèves

TP n°11 du Jeudi 21 Décembre

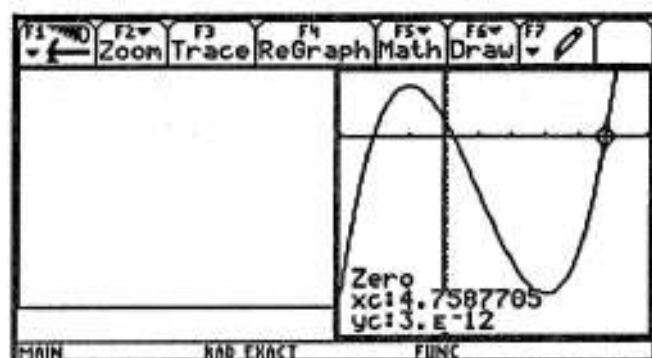
C'est le premier TP fait avec les TI-92. Le travail est donc assez guidé, beaucoup d'indications techniques sont données.
C'est la stratégie de l'immersion douce...

Régler d'abord le mode de fonctionnement de la calculatrice (touche "mode" en haut à droite) : cette touche est essentielle, en particulier pour l'organisation de l'écran (partagé en deux, ou non : split, ou full), pour l'affichage des nombres (combien de décimales disponibles : display digits), et surtout pour le mode de calcul (exact, ou approché). Vous devez obtenir les deux pages ci-dessous.

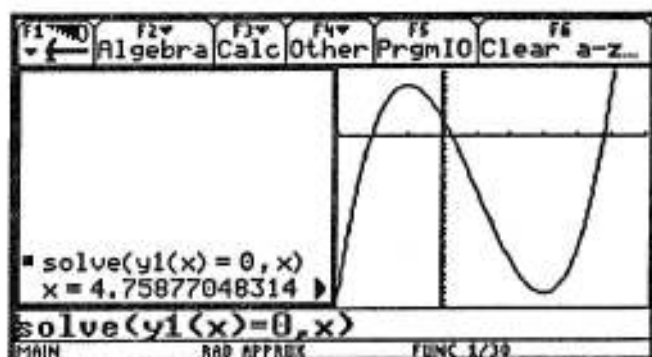


1. Rentrer dans le fichier de fonction (touche verte Y) en Y1 la fonction f qui à x associe $x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ (cette fonction a été étudiée dans le contrôle n°3).

Choisissez une fenêtre (Window) qui permette d'obtenir l'allure de la courbe ci-contre.
En utilisant l'option Math de l'application graphique (F5), localiser les trois racines de l'équation $f(x) = 0$



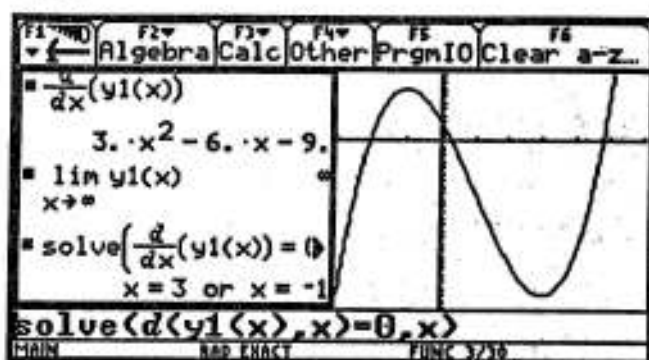
2. Repasser dans l'application initiale (Home). Utiliser alors l'option solve du menu Algebra pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, d'abord en calcul exact, puis en calcul approché.
(Attention, l'existence d'une petite flèche en fin de ligne indique qu'il y a d'autres résultats affichés, que l'on peut atteindre en se déplaçant avec le curseur)
Comparer les résultats obtenus dans la question 1 et la question 2.



3. Repasser en mode calcul exact.

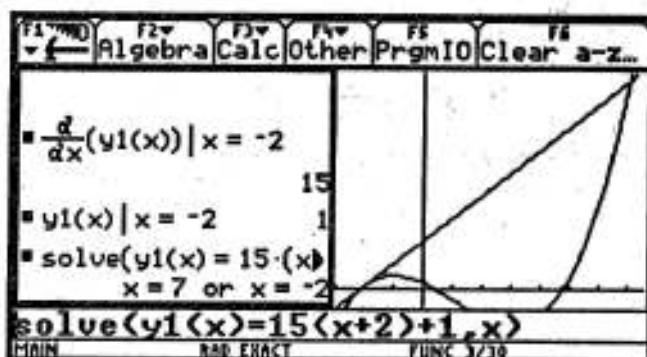
- Calculer alors la dérivée de la fonction f (menu calcul (F3), ou touche jaune, superposée à la touche 8 du clavier numérique. Syntaxe : $d(y1(x), x)$)
- Calculer les limites de f en $+\infty$ ou $-\infty$. Syntaxe : $\lim(y1(x), x, \infty)$.
- Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. On peut recopier l'expression de f' , on utilise à nouveau la touche de dérivation (voir écran ci-contre : attention à la syntaxe !).

L'écran garde les traces des calculs effectués.



4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2. Rentrer cette fonction en Y2. Etudier l'intersection de cette tangente avec la courbe. Changer la fenêtre graphique pour faire apparaître cette intersection.

Généralisation : déterminer l'équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse a . Etudier alors l'intersection de cette tangente avec la courbe. Conclusion ?



2. Le cadre du travail

Le texte du TP reprend pour partie l'énoncé d'un contrôle écrit donné en début d'année. Le sujet est classique, l'objectif n'est pas ici de réaliser une recherche, mais plutôt d'apprendre à fournir un travail "assisté" par la calculatrice.

Le thème

Intersection d'une courbe avec ses tangentes

La question problématique

La tangente coupe-t-elle toujours la cubique, même quand sa pente paraît beaucoup plus forte que ce que l'on peut voir de la cubique ?

Les objectifs pédagogiques.

En premier lieu une première familiarisation avec l'outil. C'est pourquoi le travail donné est assez simple, pour permettre une immersion douce...

En deuxième lieu le développement des "visions larges". Ce n'est pas parce que une droite et une courbe semblent ne pas se couper qu'elles ne se coupent pas... Il faut y voir de plus près (c'est à dire ici de plus loin...).

Les hypothèses de déroulement.

Deux éléments se conjugueront sans doute pour empêcher de voir l'intersection lointaine entre la courbe et sa tangente :

- c'est la première fois que les élèves manipulent la machine. Ils seront sans doute absorbés par cette découverte ;
- il est bien connu qu'une tangente est une droite qui ne "touche" la courbe qu'en un point...

Vues et changements de points de vue sur le TP 11

Sur quelques problèmes théoriques soulevés par ce TP. La forme de ce retour est un peu particulière, prise en main des TI-92 oblige.

Quatre points importants.

Sur l'utilisation des potentialités de la machine

Désormais, certaines erreurs de calcul sont évitables : dès lors qu'une fonction est rentrée dans le fichier des fonctions, par exemple dans y1, celle-ci peut être utilisée pour des calculs d'image, de dérivée, etc. Le calcul de $f(-2)$ est alors immédiat (ceci dit pour les élèves qui ont fait le calcul "à la main", et se sont trompés...).

Les commandes de la machine doivent aussi être utilisées rationnellement :

- pour la recherche des limites d'un polynôme du troisième degré, on n'aura pas besoin d'utiliser la commande correspondante de la machine ! (dans ce TP, ce qui est suggéré servait à une première découverte de ces commandes, et n'a pas de caractère routinier!);
- pour rechercher des valeurs approchées des racines dans l'application graphique, pourquoi se déplacer laborieusement avec Trace, alors que l'option "zéro" donne très rapidement le résultat, et avec une précision bien supérieure ?

Tout cela nécessite de bien connaître la machine, d'en explorer les potentialités, et donc de ne pas se réfugier dans des vieilles routines, rassurantes mais peu performantes.

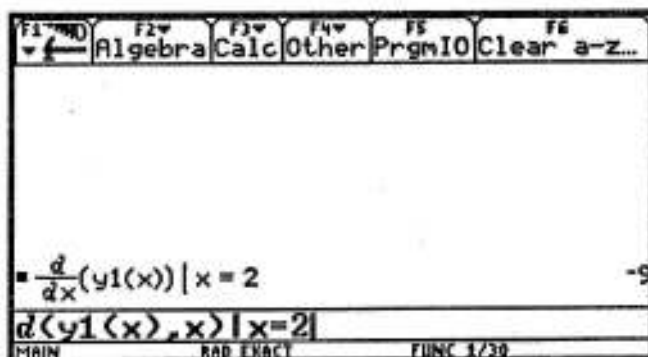
Sur l'écriture des résultats

Il est important d'attirer l'attention des élèves sur les différents types d'écriture qu'il faut désormais gérer :

- l'écriture mathématique usuelle (et seule admissible lors d'un contrôle !);
- l'écriture d'entrée dans la machine (celle que l'on rentre dans la ligne de calcul);
- l'écriture de sortie d'écran (le "pretty print").

Ainsi, pour la dérivée de la fonction f au point -2 , on trouvera les écritures suivantes :

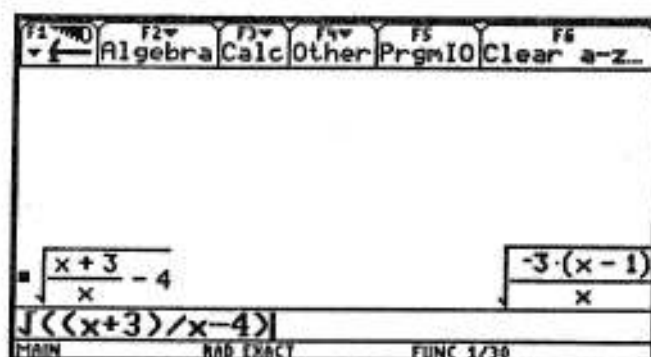
- $f'(-2)$
- $d(y1(x), x) | x=-2$
- $\frac{d}{dx}(y1(x)) | x=-2$.



Il importe de différencier clairement la première écriture des deux autres. En particulier dans un devoir de mathématiques, et plus encore le jour du baccalauréat, seule la première écriture est admissible.

Cependant, ces écritures admissibles, et le "pretty print", sont en général très proches. Cela permet une vérification à l'écran de ce que l'on a écrit dans la ligne d'entrée de la calculatrice. Il est important d'avoir le réflexe d'opérer de telles vérifications systématiquement : une parenthèse est vite oubliée !

Il faut vérifier que ce qui est renvoyé par la machine correspond bien à ce qui devait être rentré en machine (c'est là qu'apparaissent les fautes de parenthésage) ;



On peut s'interroger aussi sur la transformation opérée automatiquement par la calculatrice :

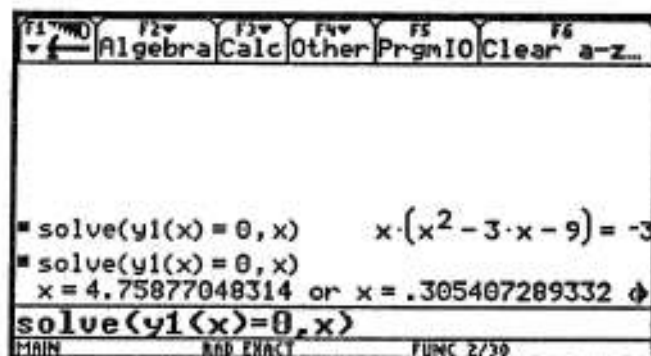
- d'où vient-elle ?
- quelle est la forme la plus intéressante pour le calcul ?

Sur l'écart valeur exacte, valeur approchée

Les élèves seront probablement surpris que la machine refuse de donner les valeurs exactes des solutions. Un mot d'explication n'est pas inutile "La plupart" des équations (mises à part les équations polynomiales de degré inférieur à 5), n'ont pas des solutions s'exprimant simplement à l'aide des fonctions "usuelles". Pour les équations polynomiales de degré 2, 3, 4, existent des formules générales de résolution. Cependant, le constructeur a choisi de ne pas programmer ces formules, pour des raisons (sans doute) de format d'écran, et de complexité d'écriture.

Surprise, la machine en calcul exact renvoie l'équation elle-même avec une pseudo-factorisation qui risque d'induire en erreur plus d'un élève étourdi !

En calcul approché, on trouve trois racines (attention, la petite flèche en bout de ligne indique l'existence d'une troisième racine à aller chercher avec le curseur !).



NB. L'énoncé suggère d'utiliser le menu "mode" pour passer du calcul exact au calcul approché, et réciproquement. Ceci est fait pour familiariser les élèves avec l'utilisation de ce menu, et pour insister sur l'importance de ce choix conscient (calcul exact, ou approché). En fait, il sera ensuite plus commode de rester toujours en calcul exact, et de demander une valeur approchée quand c'est nécessaire en utilisant la combinaison de touches "diamant/enter". Par ailleurs, il est décisif d'insister sur le fait que l'application graphique ne donne que des valeurs approchées, que ce soit pour la résolution d'équations, le calcul de dérivées, d'intégrales... et ceci, même si le bandeau d'écran indique "calcul exact".

Revenons aux valeurs approchées données par la machine (on notera que l'on bénéficie d'une plus grande précision dans l'application initiale que dans l'application graphique).

En mode approché, il n'y a aucune raison que la calculatrice donne les valeurs exactes des solutions d'une équation. Mieux, on est sûr, pour des raisons liées au nombre de décimales des calculs partiels, que 0,3054072893 n'est pas une solution de l'équation

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0.$$

Il peut être utile de donner l'une des solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 - 9x + 3 = 0$, telle que la donne le logiciel Mathematica (ou telle qu'on peut la calculer soi-même !) :

$$x = 1 + \frac{4}{(4+4i\sqrt{3})^{1/3}} + (4+4i\sqrt{3})^{1/3}.$$

La résolution est faite via les nombres complexes, mais la solution est réelle. Il faut un travail supplémentaire pour faire apparaître des expressions réelles connues : cette solution est $(1 + 4 \cos \frac{\pi}{9})$. On reconnaît la valeur approchée 4,758770... Mais ces deux nombres ne sont pas égaux !

Par ailleurs, on peut préciser que, si une solution d'une équation du troisième degré est "simple", c'est-à-dire entière, ou rationnelle, la TI 92, se ramenant à une équation du second degré, résout alors sous forme exacte (ceci pouvant s'étendre à des équations polynomiales de degré supérieur). Les exemples suivants peuvent être donnés aux élèves, pour étude immédiate :

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$x^3 - 2x^2 - 9 = 0.$$

$$45x^3 + 42x^2 - 138x + 9 = 0.$$

$$0,03x^4 - 300,56003x^3 + 5601,73023x^2 - 14290,1989x - 121011 = 0.$$

On notera que ce dernier polynôme est celui du TP 1, qui avait donné du fil à retordre aux élèves. Les racines étant entières ou rationnelles, la résolution exacte est faite par la machine sans problème (en fait, il faut quand même du temps, ce qui peut sembler normal vue l'ampleur des coefficients !).

Enfin, on peut se donner des exemples de résolution, en demandant à la machine de développer (via l'option expand) des produits de polynômes du premier degré, puis en recherchant les zéros des polynômes obtenus (une sorte de travail en boucle). Si on construit ainsi un polynôme du troisième degré avec trois racines irrationnelles "simples", du type $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})$, la calculatrice ne retrouve pas les valeurs exactes des racines, mais par contre en donne des valeurs approchées (avec un temps de travail extrêmement long).

Justification mathématique

L'introduction de la TI-92 risque d'atténuer la nécessité des preuves. Raison de plus pour insister systématiquement, au début, sur ce point !

Le fait que la machine ne donne, en valeur approchée, que trois solutions ne permet absolument pas d'affirmer qu'il n'y a que trois solutions. On verra des exemples où la calculatrice ne détecte pas toutes les solutions.

La seule preuve est d'ordre mathématique : une équation du troisième degré a au plus 3 solutions. Pour les localiser, étude des variations de la fonction, et application du théorème de la bijection.

Fin du TP

La quatrième question est traitée. L'intérêt de la machine apparaît ici assez spectaculairement, ainsi que la nécessité d'indiquer, lors de la résolution d'une équation, ce qu'est l'inconnue, distinguée ici d'un éventuel paramètre.

On prouve ainsi que la tangente à une cubique rencontre toujours la cubique en un autre point... sauf si les deux points sont confondus, ce qui donne le point d'inflexion, c'est à dire un point de contact d'ordre trois.

On notera que l'équation de la tangente à la cubique au point d'abscisse a est rentrée sans aucun calcul en $y2$.

On pourrait aussi expliciter $f'(a)$ et $f(a)$ par un calcul annexe, et un copié-collé, ce qui a été fait en $y3$.

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator interface with the following content:

- Top menu: F1 (MODE), F2 (ZOOM), F3 (EDIT), F4 (ALL), F5 (STYLE), F6 (FORMAT), F7 (I/O), F8 (LINK), F9 (DEBUG), F10 (TEST), F11 (MATH), F12 (PRGM), F13 (PLOT), F14 (DRAW), F15 (FILL), F16 (GOTO), F17 (PLOT), F18 (DRAW), F19 (FILL), F20 (GOTO).
- Y1 = $x^3 - 3x^2 - 9x + 3$
- Y2 = $\left(\frac{d}{dx}(y1(x)) \mid x=a \right) \cdot (x-a) + y1(a)$
- Y3 = $(3 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 9) \cdot (x-a) + a^3 - 3 \cdot a^2 - 9 \cdot a + 3$
- Y4 =
- Y5 =
- Y6 =
- Y7 =
- Y4(x) =
- Bottom status bar: MAIN, RAD EXACT, FUNC.

Les deux méthodes présentent leurs avantages et leurs inconvénients : la première méthode est plus rapide, mais fait travailler en aveugle : elle ne permet pas une écriture simple (c'est à dire aux normes d'un devoir habituel) de l'équation de la tangente en question.

Résolution de l'équation.

On notera qu'il a fallu bien sûr préciser quelle était l'inconnue, et que les solutions ne sont pas données sous la forme la plus simple qu'on aurait pu envisager !

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator interface with the following content:

- Top menu: F1 (MODE), F2 (ZOOM), F3 (EDIT), F4 (ALL), F5 (STYLE), F6 (FORMAT), F7 (I/O), F8 (LINK), F9 (DEBUG), F10 (TEST), F11 (MATH), F12 (PRGM), F13 (PLOT), F14 (DRAW), F15 (FILL), F16 (GOTO), F17 (PLOT), F18 (DRAW), F19 (FILL), F20 (GOTO).
- Algebra menu: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clear a-z...
- Equation: $\text{solve}(y1(x)=y2(x), x)$
- Result: $x = -(2 \cdot a - 3) \text{ or } x = a$
- Equation: $\text{solve}(y1(x)=y2(x), x)$
- Bottom status bar: MAIN, RAD EXACT, FUNC 1/39.

On obtient pour finir l'intersection voulue. La cubique, et une de ses tangentes, se rencontrent toujours en deux points (le point de contact, et un autre point) sauf... si ces deux points sont confondus. Ce qui se produit si et seulement si $-(2a-3)$ est égal à a , c'est à dire si $a = -1$.

On peut finir par observer ce que ce point a de particulier, la tangente à la courbe en ce point, la position de cette tangente par rapport à la courbe, le rôle de la dérivée seconde.

Bref, la routine !

Résolution de l'équation $f''(x) = 0$.

On retrouve sans surprise le point d'inflexion.

The screenshot shows the TI-84 Plus calculator interface with the following content:

- Top menu: F1 (MODE), F2 (ZOOM), F3 (EDIT), F4 (ALL), F5 (STYLE), F6 (FORMAT), F7 (I/O), F8 (LINK), F9 (DEBUG), F10 (TEST), F11 (MATH), F12 (PRGM), F13 (PLOT), F14 (DRAW), F15 (FILL), F16 (GOTO), F17 (PLOT), F18 (DRAW), F19 (FILL), F20 (GOTO).
- Algebra menu: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clear a-z...
- Equation: $\text{solve}\left(\frac{d^2}{dx^2}(y1(x)) = 0, x\right)$
- Result: $x = 1$
- Equation: $\text{solve}(d(y1(x), x, 2) = 0, x)$
- Bottom status bar: MAIN, RAD EXACT, FUNC 1/39.

Le calcul par la machine de la dérivée nième d'une fonction est justement le thème du TP suivant. Habile transition, et fin de ce TP.



TP n°12

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	Prgm10	Clear a-z...

$$d_x^n (e^x \cdot (x^2 + x + 1))$$

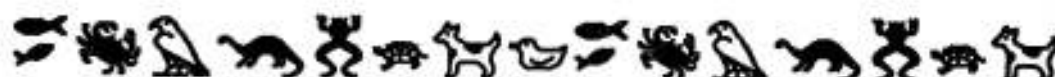
$$= \frac{d^2}{dx^2} (e^x \cdot (x^2 + x + 1))$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot e^x + 2 \cdot (2x + 1) \cdot e^x + 2 \cdot e^x$$

$$d(e^x \cdot (x^2 + x + 1), x, 2)$$

MAIN RAD EXACT SEQ 2/10

TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°12

- Déterminer la dérivée 1ère, 2ème, 3ème...ième de la fonction f , qui à x associe $f(x) = e^x \cdot (x^2 + x + 1)$.
- Généralisation : pouvez-vous déterminer la dérivée 1ère, 2ème, 3ème...ième de la fonction g , qui à x associe $g(x) = e^x \cdot (ax^2 + bx + c)$?

Indications :

Écriture mathématique :

La dérivée n ème de f est notée $f^{(n)}$ (les parenthèses sont indispensables, pour ne pas confondre dérivée n ème, et puissance n ème) ;

Écriture TI92 :

- ne pas oublier de vider les mémoires numériques avant le début du TP (Commande F6 dans l'application initiale), pour ne pas laisser traîner des contenus divers dans les mémoires a , b et c , utilisées ici ;
- ne pas oublier le signe x ("multiplié") dans le calcul formel : ainsi, pour dériver f , il faut taper le signe "multiplié" entre e^x et la parenthèse du polynôme ;
- pour obtenir la dérivée n ème d'une fonction f avec la TI92, la syntaxe est $d(f(x), x, n)$, n étant nécessairement un nombre entier ;
- on peut obtenir si l'on veut une forme factorisée de la dérivée en utilisant la commande factor du Menu Algebra, dans l'application initiale (Home) ;

Cahier de recherche :

- ne pas oublier : sur la page de gauche, les recherches, les copies d'écran, la syntaxe TI-92, le brouillon... sur la page de droite la rédaction du rapport.
- noter scrupuleusement toutes les commandes effectuées, même celles qui n'ont pas donné de résultat, ou qui n'ont pas donné le résultat attendu.

Remarque "technico-mathématique" : l'énoncé suggérait l'utilisation de la commande "factor" du menu Algebra. En fait, il aurait été plus opportun de dire : "on pourra transformer l'expression de la dérivée obtenue en utilisant les commandes Factor, ou Expand, du menu Algebra".

La différence n'est pas mince, comme on le voit ci-contre : en haut la forme "brute" de la dérivée 3ème, puis la forme obtenue par Factor, puis la forme obtenue par Expand. Suivant la forme observée, ce ne sont pas les mêmes régularités qui apparaissent !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$(x^2 + x + 1) \cdot e^x + 3 \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot e^x + 6 \cdot e^x$					
factor $\left(\frac{d^3}{dx^3} (y1(x)) \right)$ $(x + 2) \cdot (x + 5) \cdot e^x$					
expand $\left(\frac{d^3}{dx^3} (y1(x)) \right)$ $x^2 \cdot e^x + 7 \cdot x \cdot e^x + 10 \cdot e^x$					
expand $(d(y1(x), x, 3))$					
MAIN	END	EXACT	FUNC 3/10		

On réalise ce genre de problème une fois que le TP est passé. Défaut d'analyse, sans doute...

Mais l'expérience prouve aussi qu'il est impossible de tout prévoir.
Heureusement !

2. Le cadre du travail

Le thème.

Dérivées successives de fonctions de référence (exponentielle et polynômes).

Les questions problématiques.

La calculatrice refuse de donner une formule pour la dérivée nième de la fonction.

Comment reformuler la, ou les, questions, permettant de découvrir la réponse ?

Une multiplicité d'observations concordantes vaut-elle preuve ?

Les objectifs pédagogiques.

Il s'agit là d'un premier travail de recherche avec un outil de calcul formel.

Il faut donc combiner recherche d'informations, organisation de celles-ci, recherche de régularités, conjecture de résultat général, réfutation éventuelle, preuve générale (objectif méthodologique).

Sur le plan mathématique, l'occasion est bonne pour reprendre le raisonnement par récurrence.

Les hypothèses de déroulement

Sur le plan de la recherche, la nouveauté de l'outil devrait permettre une activité soutenue de la classe, avec sans doute moins de traces écrites que lors du travail avec les calculatrices graphiques.

On devrait assister au déploiement d'attitudes caractéristiques du travail des élèves :

- les élèves plutôt bricoleurs vont accumuler les résultats pour des valeurs particulières de n . "A force", ils auront peut-être l'idée du résultat général. Mais pour eux, la nécessité de la validation de cette conjecture est peu apparente : "puisque la formule est vraie pour toutes les valeurs de n que je peux imaginer, elle est vraie pour tout n !";
- les élèves plutôt scolaires auront du mal à organiser les informations successives. La découverte de la conjecture est dans ces conditions assez difficile...
- les élèves plutôt rationnels trouveront assez rapidement la formule générale, et aborderont sans doute une démonstration par récurrence ;
- les élèves plutôt expérimentateurs auront tendance à combiner des calculs à la main, des calculs à la machine, l'accumulation des résultats sous différentes formes ayant "quasiment" valeur de preuve ;
- les élèves plutôt théoriques pourront voir dans les dérivées successives l'amorce d'une régularité, en chercheront les raisons dans quelques calculs à la main : peut-être pourront ils ainsi comprendre pourquoi les dérivées successives sont toujours de la même forme (exponentielle multipliée par un polynôme). La compréhension du phénomène vaudra peut-être alors démonstration...

Vues et changements de points de vue sur le TP 12

Comme après le TP 10, il s'agit ici de montrer les différentes stratégies possibles de traitement de ce problème, et au-delà de définir une problématique de recherche.

Préambule : apprendre à voir.

Il s'agit d'illustrer ici un leitmotiv : on se sait pas parce que l'on voit, mais on voit parce qu'on sait ce que l'on va voir. Autrement dit, quand on prospecte, on a toujours une petite idée de ce que l'on veut voir, on ne cherche pas (ou rarement) au hasard. On peut utiliser la machine pour dériver, ou dériver à la main. Les deux méthodes peuvent apporter des informations intéressantes : avec la machine, cela va vite, et on peut accumuler à peu de frais de nombreux résultats. A la main, on va moins vite, mais on voit mieux les mécanismes qui aboutissent au résultat obtenu.

1. A la machine d'abord.

On peut dériver toute la fonction, ou dériver par morceaux (dans ce dernier cas, on disposera de fonctions plus simples).

a) Si on dérive toute la fonction, on peut observer les résultats bruts, ou observer les résultats factorisés (commande Factor), ou observer les résultats développés (commande Expand)

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen. At the top, the function menu is open, showing options: F1:Y=, F2:Algebra, F3:Calc, F4:Other, F5:PrgmIO, and F6:Clear a-z. The main display area shows the expression $(x^2+x+1)e^x + (2x+1)e^x$. Below this, the command $\text{expand}\left(\frac{d}{dx}\left(e^x \cdot (x^2+x+1)\right)\right)$ is entered. The result $x^2 \cdot e^x + 3 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot e^x$ is shown. At the bottom, the command $\text{expand}(d(e^{(x)} \cdot (x^2+x+1), x, 1))$ is entered. The status bar at the bottom shows "MAIN", "RAD EXACT", and "FUNC 3/30".

On obtient ainsi une série de résultats que l'on doit récapituler de façon organisée sur feuille, pour pouvoir en tirer d'utiles enseignements.

Ordre de dér.	Résultat brut	Avec Factor	Avec Expand
n = 1	$(x^2+x+1)e^x + (2x+1)e^x$	$(x+1)(x+2) e^x$	$x^2 e^x + 3x e^x + 2 e^x$
n = 2	$(x^2+x+1)e^x + 2(2x+1)e^x + 2e^x$	$(x^2+5x+5) e^x$	$x^2 e^x + 5x e^x + 5 e^x$
n = 3	$(x^2+x+1)e^x + 3(2x+1)e^x + 6e^x$	$(x+2)(x+5) e^x$	$x^2 e^x + 7x e^x + 10 e^x$
n = 4	$(x^2+x+1)e^x + 4(2x+1)e^x + 12e^x$	$(x^2+9x+17) e^x$	$x^2 e^x + 9x e^x + 17 e^x$
n = 100	$(x^2+x+1)e^x + 100(2x+1)e^x + 9900e^x$	$(x^2+201x+10001) e^x$	$x^2 e^x + 201x e^x + 10001 e^x$

Il faut ensuite observer, pour essayer de trouver une régularité :

- il est d'abord remarquable que l'on obtient "toujours" (pour tous les exemples traités) le produit de la fonction exponentielle, et d'un trinôme du second degré ;
- il s'agit alors de trouver la forme générale des trois coefficients de ce trinôme. Pour le terme carré, cela semble être 1. Pour le terme en x , cela semble être ..., pour le terme constant, cela pourrait bien être...

Bref, au terme de ce premier round d'observation, il y a ceux qui ont une idée de la formule générale, et ce qui n'ont pas encore trouvé. Ceux là peuvent passer au paragraphe (b), ou alors à quelques calculs à la main pour voir ce qui se passe concrètement.

b) Au lieu de dériver toute la fonction, on peut la décomposer en somme de fonctions (puisque la dérivée d'une somme est la somme des dérivées...), et voir ce qui se passe pour chacun des termes, c'est à dire pour $x^2 e^x$, $x e^x$ et e^x . Pour le dernier terme, pas de problème... Pour les deux autres, cela revient à reproduire à chaque fois l'étude précédente. On en laisse le soin à nos lecteurs attentifs...

2. Quelques calculs à la main.

Même pour ceux qui ont une idée de la formule générale, il est utile de comprendre d'où elle provient.

Il est peu utile de redériver ici f (la machine l'a fait), mais il est par contre utile de comprendre ce qui se passe si on dérive une fonction de la forme $(x^2 + mx + p) \cdot e^x$, puisqu'il semble qu'on a toujours une fonction de ce type...

Soit donc $h(x) = (x^2 + mx + p) \cdot e^x$, on obtient

$h'(x) = (x^2 + mx + p) \cdot e^x + (2x + m) \cdot e^x$, c'est à dire :

$h'(x) = [x^2 + (m + 2) \cdot x + m + p] \cdot e^x$

Ainsi, le coefficient de x^2 reste 1; le coefficient de x a été augmenté de 2; le coefficient constant est la somme du coefficient de x et du coefficient constant précédents.

On peut alors jeter un coup d'oeil au tableau établi à la machine, et vérifier que ce phénomène se produit bien à chaque coup.

Plusieurs stratégies sont alors possibles. Ceux qui ont conjecturé la formule peuvent passer directement à la deuxième stratégie, les autres doivent passer à la stratégie suivante...

Première stratégie : où l'on trouve et prouve à la fois...

On vient de prouver que, si une fonction est de la forme $(x^2 + mx + p) \cdot e^x$, alors sa dérivée est aussi de la forme $(x^2 + m'x + p') \cdot e^x$. Comme f est précisément de cette forme, toute ses dérivées successives ont la même forme. C'est une preuve par récurrence. On reviendra avec précision sur cette méthode de démonstration dans la partie 2.

On sait désormais que la dérivée nième de f , c'est à dire $f^{(n)}$, s'écrit :

$f^{(n)}(x) = (x^2 + b_n x + c_n) \cdot e^x$, les coefficients b_n et c_n dépendant de l'ordre de la dérivation.

On sait même plus, en fonction de ce qui a été établi ci-dessus :

$$b_{n+1} = b_n + 2$$

$$c_{n+1} = b_n + c_n$$

Pour b_n , cela prouve directement que c'est un terme d'une suite arithmétique de raison 2, et de base b_0 , c'est à dire 1. Le cours sur les suites nous apprend alors que :

$b_n = b_0 + nr = 1 + 2n$. Petit coup d'oeil sur le tableau des premiers résultats : cela marche !

Pour les coefficients c_n maintenant.

Petit calcul en cascade :

$$c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$$

$$c_{n-1} = b_{n-2} + c_{n-2}$$

.....

$$c_4 = b_3 + c_3$$

$$c_3 = b_2 + c_2$$

$$c_2 = b_1 + c_1$$

(Attention, b_1 et c_1 sont les coefficients de la dérivée première, c'est à dire de f' .)

On ajoute ces égalités membre à membre, et, après élimination des termes de la suite c_n , on retombe sur un résultat connu : la somme des termes d'une suite arithmétique.

$$\text{Ainsi } c_n = b_{n-1} + b_{n-2} + \dots + b_3 + b_2 + b_1 + c_1 = \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2} + c_1$$

$$\text{D'où } c_n = \frac{(3+1+2(n-1))(n-1)}{2} + 2 = n^2 + 1$$

Petit coup d'oeil sur le tableau des résultats : Bon Dieu, mais c'est bien sûr !

Deuxième stratégie : où l'on prouve ce que l'on trouve...

On se place désormais dans le cas où le cri Eureka a été poussé ¹² : l'observation des premiers termes donne l'idée que la formule pourrait bien être :

$$f^{(n)}(x) = [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x$$

Attention : avoir montré que la formule est exacte pour quelques valeurs de n ne prouve en aucun cas qu'elle est toujours vraie.

L'Histoire (des mathématiques) est ainsi pleine de conjectures qui étaient tellement vraies... qu'elles étaient fausses.

Un exemple : une conjecture de Fermat, qui, emporté par son tempérament de Gascon, déclara que tout les nombres de la forme $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ étaient premiers.

Fermat ne disposait pas des moyens de calcul d'aujourd'hui...

Il est simple de voir avec une TI 92 que la conjecture de Fermat, vraie jusqu'à l'indice 4, s'écroule pour 5 :

$$F_5 = 2^{(2^5)} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
factor(4294967297) 641·6700417 factor($2^{2^5}+1$) 641·6700417 factor($2^{2^{2^5}}+1$)					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 2/10			

On voit ci-dessus que la calculatrice factorise F_5 aussi bien sous la forme puissance, que sous la forme développée. On peut d'ailleurs regarder ce que donne la calculatrice pour les nombres de Fermat suivants. On verra qu'elle met de plus en plus de temps à répondre, avant de déclarer forfait, pour cause de dépassement de capacité (pour F_{11}) ¹³

¹² Il semble que la première stratégie relève plutôt d'un travail sans outil de calcul formel. Cette deuxième stratégie, qui consiste à partir d'une conjecture formulée, est plus naturelle pour qui travaille avec une TI92.

¹³ Il faut environ une semaine à un gros ordinateur pour déterminer si un nombre de 1000 chiffres est premier ou non. Ce qui donne les techniques actuelles assez sophistiquées de cryptographie.

Prudence donc. Même avec les moyens de calcul dont on dispose aujourd'hui, on ne peut encore rien dire de nombreuses conjectures. Par exemple la conjecture de Goldbach : tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. On peut le prouver sur tous les exemples que l'on voudra bien prendre, mais la multiplication des exemples n'épuise pas la généralité de la formule.

Cela doit nous inciter à beaucoup de modestie. Il faut prouver qu'une propriété est vraie toujours, et l'avoir prouvé sur quelques valeurs (même si "quelques" est "beaucoup"...) ne prouve rien pour les autres valeurs, c'est à dire ne prouve pas la conjecture.

Comment alors prouver ici notre conjecture ? S'agissant :

- d'une propriété dont l'expression est supposée (c'est la conjecture !) ;
 - d'une propriété indiquée sur un entier naturel ;
 - d'une propriété vérifiée pour les premières valeurs de n...
- le raisonnement par récurrence s'impose (presque !).

Son principe, pour prouver une propriété P_n :

- on prouve que la propriété est vraie "au départ" (au rang 0, ou 1, ou 2... le plus tôt possible...) ;
- on démontre ensuite qu'elle est récurrente, c'est à dire que si elle vraie à l'ordre n, alors elle est vraie à l'ordre n+1.
- on peut alors affirmer que, par hérédité, la propriété est vraie pour tout n supérieur à l'indice de vérification du départ (0, ou 1, ou 2...).

Ici, la première étape est déjà franchie : la propriété conjecturée est bien vraie à l'ordre 1, 2, 3... (puisque ce sont ces résultats de départ qui ont donné l'idée de la conjecture...). Il reste à prouver que cette propriété est récurrente, c'est à dire héréditaire.

Supposons donc que la propriété est vraie à l'ordre n, c'est à dire que :

$$f^{(n)}(x) = [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x.$$

Pour avoir la dérivée (n+1)ième, il faut dériver la dérivée nième.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1].e^x + [2x + 2n+1].e^x \\ &= [x^2 + (2n+3)x + n^2 + 2n+2].e^x. \\ &= [x^2 + (2n+3)x + (n+1)^2 + 1].e^x \end{aligned}$$

On constate que cette expression traduit bien la propriété à l'ordre n+1. Donc la propriété est bien récurrente.

On peut affirmer désormais que la formule est vraie pour tout n.

Une question théorique peut se poser cependant : peut-on utiliser la machine à ce stade de la démonstration, pour passer du rang n au rang (n+1) ?

La machine peut certes être utilisée en guise de vérification :

The screenshot shows a TI-89 calculator interface. At the top, there are function keys: F1, F2, F3, F4, F5, F6. Below them are menu options: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clear a-z. The main display area contains the following text:

$$= \text{factor} \left(\frac{d}{dx} \left((x^2 + (2 \cdot n + 1) \cdot x + n^2 + 1) \cdot e^x \right) \right)$$

$$(x^2 + (2 \cdot n + 3) \cdot x + n^2 + 2 \cdot n + 2) \cdot e^x$$

Below the equations, the text **factor** is highlighted in a black box. At the bottom of the screen, there are status indicators: MAIN, RAD, FRAC, and FUNC 1/230.

Cependant, on ne peut pas se dispenser d'un calcul à la main : imaginons qu'une erreur de programmation ait été implantée dans la machine. La machine aurait ainsi induit une erreur dans les premiers calculs de dérivée, cette erreur aurait induit une conjecture, et si on vérifie cette conjecture avec la machine... la même erreur se reproduisant, la machine affirmera que la conjecture est récurrente.

Autrement dit, on aura ainsi montré que le virus est héréditaire...

Pour sortir de ce cercle infernal, il faut bien, à un moment ou à un autre, reprendre (quand c'est possible) le contrôle des opérations. Ce qui suppose un calcul à la main, sous le contrôle des règles usuelles de dérivation.

Troisième stratégie : où l'on fait un large détour théorique... pour trouver un raccourci de calcul.

On peut prendre du recul sur l'exercice donné. En fait, il s'agit de dériver successivement le produit de deux fonctions, u et v , avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + x + 1$. Pourquoi ne pas voir ce que cela donne en général ?

$$(u.v)' = u'v + u.v'$$

$$(u.v)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(u.v)^{(3)} = \dots = u^{(3)}v + 3u^{(2)}v' + 3u'v'' + uv^{(3)}$$

A nouveau une conjecture éclate aux yeux : on retrouve quelque chose qui ressemble d'assez près au binôme de Newton !

Ainsi, la dérivée n ème du produit $u.v$ serait :

$$(u.v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + \dots + C_n^{n-1} u^{(1)} v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)}$$

On démontrerait cette formule par récurrence (exactement sur le même modèle que pour le binôme de Newton). Cette formule porte de nom de Leibniz, contemporain de Newton (l'un est allemand, l'autre est anglais).

Pourquoi cette formule est-elle bien utile ici ? Mais parce qu'il s'agit de la dérivée du produit de deux fonctions qui ont un comportement simple : la dérivée de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même, et la dérivée d'un polynôme est un polynôme de degré inférieur (de 1). Ainsi, si on calcule les dérivées successives d'un polynôme, on arrivera nécessairement à 0.

Conclusion : avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + x + 1$, on a les dérivées successives de u qui sont égales à u , et les dérivées successives de v qui sont nulles à partir de l'ordre 3.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (u.v)^{(n)} &= C_n^0 u v + C_n^1 u v^{(1)} + C_n^2 uv^{(2)} \\ &= e^x (x^2 + x + 1) + n.e^x (2x + 1) + \frac{n(n-1)}{2} e^x (2) \\ &= e^x [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1] \end{aligned}$$

Un grand détour pour un petit calcul...

Conclusion, et fin.

Il ne reste plus qu'à utiliser ce qui précède pour traiter la deuxième question du TP.

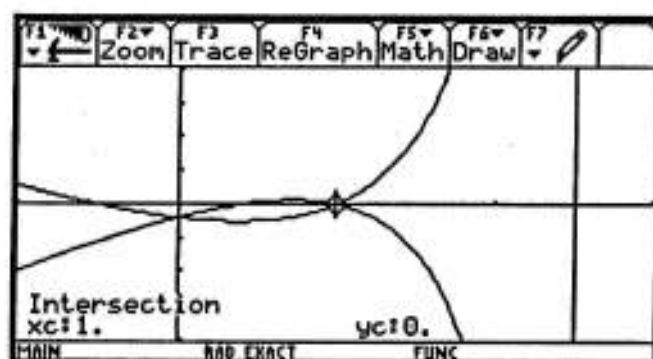
Ce n'est pas une étape à négliger : la possibilité, ou non, de réinvestir le résultat d'un exercice pour un exercice du même genre permet de savoir si on a compris, ou non, la, ou les méthodes découvertes... Ceci est laissé à la sagacité du lecteur.

NB : on pourra, en guise d'ouverture finale, montrer que la commande $d(f(x), x, -n)$ aboutit à la détermination d'une primitive n ème. A condition bien sûr que n soit entier. Ou s'intéresser aux zéros des dérivées successives, et à leur entrelacement...

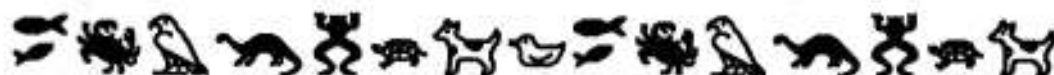
L'imagination au pouvoir !



 _____ **TP n°13**



TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°13

On veut étudier les courbes des fonctions f_m , qui à x associent :

$$f_m : x \rightarrow f_m(x) = \frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x - 5}$$

On note C_m la représentation graphique de la fonction f_m .

- y a-t-il des points communs à toutes les courbes C_m ? Lesquels ?
- y a-t-il des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m n'admet aucun extremum ? Lesquelles ?

- choisir une valeur de m pour laquelle la fonction f_m admet des extremums. Faire alors l'étude complète de cette fonction (sens de variation, "points cruciaux", asymptotes...), se terminant par un graphique précis et soigné.

Indications relatives à la TI92

- penser à effacer les mémoires numériques avant de commencer le travail, pour ne pas laisser dans la mémoire m des valeurs parasites ;
- penser à noter le signe "multiplié" entre deux lettres (par exemple entre m et x^2) ;
- on pourra utiliser, pour obtenir une autre forme de la fonction, la commande `propFrac` du menu Algebra dans l'application initiale : celle-ci, ici, opère la division du numérateur par le dénominateur, et donne ainsi le résultat sous la forme $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

NB. Il s'agit d'un exercice extrait d'un livre de mathématique de TS (Dimathème, exercice 82 page 36).

Remarque technico-mathématique.

La calculatrice, en mode "réel", effectue les calculs dans $\mathbb{C}$ et les présente dans $\mathbb{R}$.

Ainsi le logiciel calcule-t-il la dérivée, et détermine les racines de celles-ci en fonction de m .

La simplification opérée automatiquement par $\sqrt{x}$ induit l'idée que la dérivée ne s'annule pas si x est négatif, ce qui est bien sûr faux...

Et d'ailleurs la machine calcule les racines trouvées pour $m = -4$. Pas de problème pour elle, en posant $\sqrt{-4} = 2i$.

En revanche, pour les élèves, il y a des chances que ce ne soit pas aussi simple !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\frac{d}{dx}(y1(x)) \quad \frac{2 \cdot m \cdot x^2 - 10 \cdot m \cdot x + 5 \cdot m + 6}{(2 \cdot x - 5)^2}$					
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(y1(x)) = 0, x\right)$					
$x = \frac{\sqrt{3 \cdot (5 \cdot m - 4)} + 5 \cdot \sqrt{m}}{2 \cdot \sqrt{m}} \quad \text{or} \quad x = \frac{-\left(\sqrt{3 \cdot (5 \cdot m - 4)}\right)}{2 \cdot \sqrt{m}}$					
$\text{solve}(d(y1(x), x) = 0, x)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 2/30					
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\frac{\sqrt{3 \cdot (5 \cdot m - 4)} + 5 \cdot \sqrt{m}}{2 \cdot \sqrt{m}} \mid m = -4 \quad \frac{3 \cdot \sqrt{2} + 5}{2}$					
$\frac{3 \cdot (5 \cdot m - 4) + 5 \cdot \sqrt{m}}{2 \cdot \sqrt{m}} \mid m = -4$					
MAIN RAD EXACT FUNC 1/30					

2. Le cadre de travail.

Le thème.

Recherche d'extremum.

La question problématique.

Il s'agit de l'étude d'une famille de fonctions, dépendant d'un paramètre m . En même temps on étudie l'influence de m sur la forme des courbes (c'est à dire que m "varie"), et on étudie chaque fonction pour elle même (avec m constant). Cette distinction variable/paramètre est tout à fait délicate pour un élève qui, en TS, n'y est pas particulièrement préparé...

Les objectifs pédagogiques.

Un objectif fondamental : apprendre à définir les contours des objets mathématiques manipulés (f est fonction de quoi ?). La machine devrait aider à cette définition (en exigeant de préciser par rapport à quoi on dérive par exemple !) ;

Un objectif lié au cours : préciser le rapport entre l'existence d'extremum local et la nullité de la dérivée (condition suffisante, condition nécessaire ?) ;

Un objectif lié à la manipulation de la machine : multiplier les interactions entre courbes et équations, entre application initiale et application graphique. La recherche des intersections des courbes, comme la recherche des extremums devrait se prêter naturellement à ces allers-retours.

Un objectif lié à la compréhension des mécanismes de calcul : les résultats affichés pour m négatif devraient donner des attitudes plus vigilantes à l'avenir. Mais la compréhension profonde ne pourra intervenir qu'après l'étude des complexes !

Un objectif lié aux contrôles scolaires à venir (le bac par exemple) : apprendre à étudier une fonction complètement, en utilisant la calculatrice, mais en validant chaque résultat (dérivée, limites...) de façon scolairement acceptable. Cet objectif en fait n'est pas atteignable lors du TP lui même : on ne peut pas concilier en 1h les exigences de recherche, et de rédaction propre. Mais ce peut être réalisable après la correction, lors d'une reprise personnelle du problème.

Hypothèses de déroulement.

Une première hypothèse, forte : le travail qui s'est déroulé pendant 3 mois à partir des calculatrices graphiques pèsera sans doute pour traiter le problème à partir de l'application graphique. C'est à dire en observant de nombreux éléments de la famille de fonction pour des valeurs de m différentes. Ce qui permet de traiter une partie du problème. En particulier on peut envisager l'intersection de deux courbes, puis vérifier que "toutes" les autres courbes (en fait toutes les autres courbes testées), passent par ces points...

Une deuxième hypothèse, liée au travail dans l'application initiale : les élèves ont été fascinés, lors de la prise en main de la calculatrice, par le calcul automatique des dérivées, et la résolution automatique d'équation, les dispensant -pensaient-ils- de vérifications. Il est probable qu'ils imagineront que la dérivée ne s'annule pas pour x négatif, sur la foi des résultats affichés par la machine.

Vues et changements de points de vue sur le TP 13

Deux précisions en introduction :

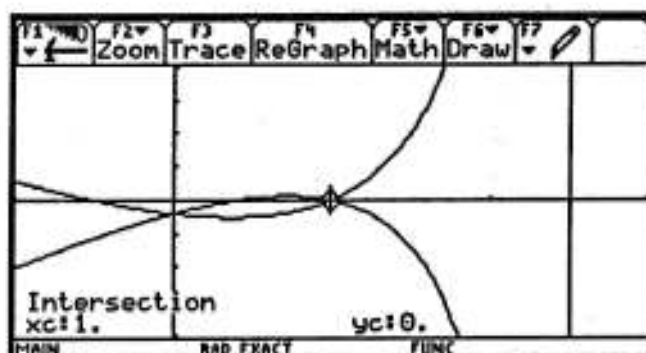
- ce problème a été abordé lors du premier devoir-maison au début de l'année. On pourra se reporter à la correction pour plus d'informations ;
- dans tout ce qui suit, il faut distinguer le rôle des lettres m et x : m étant fixé, la fonction f_m est une fonction de la variable x .

NB : dans la correction, on distinguera clairement vérification, et preuve.

1. Points communs à toutes les courbes C_m .

On peut commencer de façon expérimentale, en traçant deux courbes correspondant à des choix particuliers de m (ici -4 et 5), en observant les intersections.

Mais il reste alors à prouver qu'il s'agit bien de points communs, et que ce sont bien les seuls...



Mais deux remarques à ce sujet :

- il est tout à fait maladroit d'utiliser ici la commande Zoom, alors que la commande Intersection donne un résultat beaucoup plus rapide !
- il faut se rappeler que l'application initiale donne, quand c'est possible, des solutions exactes, et, sinon, des valeurs approchées plus précises qu'avec l'application graphique! Il était donc plus efficace de revenir dans l'application initiale, en rentrant en Y1 et Y2 deux fonctions avec des valeurs différentes du paramètre, et en lançant ensuite la commande Solve ($Y1(x)=Y2(x)$, x).

L'intérêt de l'application initiale ("Home") est aussi que le type de travail que l'on peut y faire est très proche du travail théorique attendu.

En effet, si l'on veut traiter le problème général dans l'application initiale, on va rentrer en Y1 et Y2 des fonctions relatives à des valeurs quelconques du paramètre :

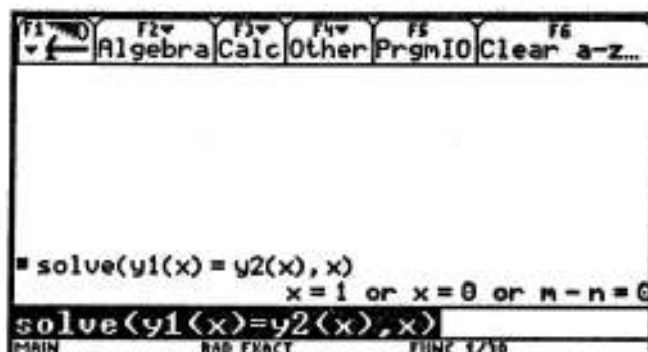
Cela suppose d'avoir effacé au préalable les mémoires numériques, de telle façon que la calculatrice ne traite pas les fonctions pour des valeurs particulières des paramètres m et n .

Par contre, si, ultérieurement, on veut étudier des courbes particulières, il suffira d'affecter telle ou telle valeur dans la

mémoire m (avec la commande STO du clavier).

Attention, si on pose $m = n + 1$, on ne résout qu'une partie du problème : on ne traite pas les valeurs du paramètre (et il y en a beaucoup !) qui sont situées entre m et $m+1$!
On travaille donc ici avec deux paramètres quelconques m et n .

On résout alors l'équation dans l'application initiale.
La machine donne sans problème les points communs aux deux courbes, et précise même que, si $m = n$, on a une situation particulière... qu'il faut analyser : pour $m = n$, les deux fonctions sont égales, et les courbes sont confondues.



Cette résolution machine, dans l'application initiale, donne, avec une simple transposition, la résolution "papier / crayon" attendue :

$\frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x - 5} = \frac{nx^2 - (n+2)x + 2}{2x - 5}$ équivaut, à l'intérieur du domaine de définition des fonctions, à :

$mx^2 - (m+2)x + 2 = nx^2 - (n+2)x + 2$, c'est à dire à $x.(m - n).(x - 1) = 0$.

On obtient bien le résultat attendu : cette égalité est vérifiée indépendamment du paramètre si et seulement si x est égal à 0 ou 1.

Attention : ce que l'on vient de faire n'est pas une vérification du résultat machine... C'est la **preuve** du résultat cherché. C'est la machine qui en est une vérification...

Autre méthode possible :

On peut se demander pour quels couples (x, y) l'égalité $\frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{2x - 5} = y$ est vérifiée pour tout m (ce qui est la traduction algébrique de la proposition géométrique : le point M , de coordonnées (x, y) , appartient à toutes les courbes C_m).

On peut mettre l'égalité sous la forme : $mx^2 - (m+2)x + 2 = y(2x - 5)$, ou encore :

$m(x^2 - x) - 2xy - 2x + 5y + 2 = 0$.

On veut ainsi que le polynôme en m soit nul pour tout m . C'est vrai si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire :

$x^2 - x = 0$, et $-2xy - 2x + 5y + 2 = 0$.

La première équation donne $x = 0$ ou $x = 1$, la deuxième équation permet de déterminer les valeurs de y correspondantes.

Il reste une dernière vérification à faire : dans le cours du calcul, on a modifié la forme de l'équation, en supprimant le dénominateur. Il faut donc s'assurer que les valeurs de x trouvées sont bien dans le domaine de définition. C'est bien le cas.

2. Problèmes d'extremum.

Extremum local, ou global ?

On peut se poser la question : s'agit-il d'extremum local, ou global ? Ce qui conduit à rechercher les limites de la fonction, et va nous faire envisager les cas particuliers décisifs ici.

- En $\pm\infty$, la limite de cette fonction rationnelle est celle "du rapport des termes de plus haut degré". Pas de problème pour le dénominateur : le terme de plus haut degré est $2x$.

Mais au numérateur ? Une analyse superficielle fait envisager que le terme de plus haut degré est mx^2 . Mais si $m = 0$? Le terme de plus haut degré est alors ... 2. D'où deux cas de figure à envisager :

$m > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ (c'est la limite de $m \frac{x}{2}$)

$m < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ (c'est encore la limite de $m \frac{x}{2}$ avec m négatif)

$m = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -1$ (La fonction f est alors égale à $\frac{-2x+2}{2x-5}$)

Remarque : on a rentré f_m en Y1.

La calculatrice, fort logiquement, refuse de donner une limite à la fonction en $+\infty$. Refus renouvelé si on ajoute la précision "sachant que $m = 0$ ".

Pour avoir une réponse, il faut préalablement entrer la valeur voulue dans la mémoire m , puis demander la limite.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
X→w ((cosn(x))					
■ lim y1(x)					undef
x→w					
■ lim y1(x) m = 0					undef
x→w					
■ 0 → m					0
■ lim y1(x)					-1
x→w					
limit(y1(x), x, w)					
MAIN MOD EXACT FUNC B/20					

- En $\frac{5}{2}$: le dénominateur tend vers 0. Une réponse trop rapide, donc fausse, serait que la fonction tend vers $\pm\infty$. Tout dépend du comportement du numérateur ! Si x tend vers $\frac{5}{2}$, le numérateur tend vers $\frac{15m}{4} - 3$. C'est à dire, si $m = \frac{4}{5}$, vers 0... Il y a donc deux cas de figure à considérer :

$m \neq \frac{4}{5}$: alors la limite de f en $\frac{5}{2}$ est $\pm\infty$ (suivant limite à droite ou à gauche) ;

$m = \frac{4}{5}$: on a alors $f(x) = \frac{4x^2 - 14x + 10}{10x - 25}$. Mais on peut envisager une simplification de la fraction. En effet, si le numérateur s'annule pour $x = \frac{4}{5}$, c'est que l'on peut factoriser $(x - \frac{4}{5})$, ou plus simplement $(5x - 4)$. On peut faire la division à la main, ou avec la machine. On trouve $f(x) = \frac{2(x-1)}{5}$. Mais, attention, cette fonction n'est pas définie pour $x = 5/2$ pour cause de domaine de définition général de f , qui se fixe avant toute simplification. Ce que l'on vérifie sur la machine, après avoir affecté $5/2$ dans m :

La machine fournit alors une expression simplifiée de la fonction. Mais elle précise bien que $\frac{5}{2}$ n'a pas d'image...

Tout ce que l'on peut faire, c'est étudier la limite de la fonction en ce point, qui est finie (obtenue en prolongeant la fonction par continuité, air connu...)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
4/5 → m					
■ y1(x)					$\frac{2 \cdot (x-1)}{5}$
■ y1(5/2)					undef
■ lim y1(x)					3/5
x→5/2					
limit(y1(x), x, 5/2)					
MAIN MOD EXACT FUNC 4/20					

Ainsi ce détour par les limites nous indique la présence de deux cas particuliers (pour $m = 0$ et $m = \frac{4}{5}$). Et nous prouve aussi que, quel que soit m , la fonction n'est ni majorée, ni minorée. On ne peut donc pas espérer trouver des extremums globaux pour f . Il ne peut y avoir que des extremums locaux.

Comment repère-t-on des extrema locaux ?

Revenons d'abord sur la définition d'un extremum local, par exemple d'un maximum local.

La fonction f admet un maximum local en a (élément du domaine de définition) si et seulement si il existe un "voisinage" de a tel que : pour tout x de I , $f(x) \leq f(a)$.

Comment repérer ces points ? Cela dépend essentiellement de la nature du domaine de définition de f , et de la nature de la fonction f . Si la fonction f est dérivable, ce qui est le cas ici, et si elle est définie sur des intervalles ouverts, ce qui est le cas ici (le domaine est $] -\infty, +\frac{5}{2}[$ et $]-\frac{5}{2}, +\infty[$), alors on dispose du théorème suivant :

La fonction f admet un extremum local en a si et seulement si la dérivée de f s'annule en a , avec changement de signe.

NB: si les conditions ne sont pas réunies, le théorème ne fonctionne pas :

- si la fonction n'est pas dérivable : la fonction valeur absolue admet un minimum (absolu) en 0, alors qu'elle n'est pas dérivable en 0;
- si l'intervalle n'est pas ouvert : la fonction $x \rightarrow x^2$, considérée sur l'intervalle fermé $[3, 4]$, admet un minimum en 3, alors que sa dérivée ne s'annule pas en ce point ;
- si la dérivée ne change pas de signe : la fonction $x \rightarrow x^3$ n'a pas d'extremum local en 0, alors que sa dérivée s'y annule (mais elle n'y change pas de signe !).

Ici, il n'est pas indispensable de multiplier l'observation de courbes C_m pour repérer la présence ou non d'extremum. L'utilisation du théorème est très efficace. On va donc calculer la dérivée de f , et voir dans quelles conditions elle peut, ou non, s'annuler. On a tout intérêt à calculer la dérivée à la main, et à vérifier le résultat avec la machine. De même pour la recherche d'éventuelles racines de la dérivée.

Pas de surprise pour le calcul de la dérivée.

Par contre l'expression de ses racines réserve quelques surprises...

Pour comprendre ce qui se passe, il faut en revenir au problème lui-même, et considérer la forme de la dérivée de f :

la dérivée de f s'annule si et seulement si son numérateur est nul (avec toujours x différent de $5/2$, pour cause de numérateur).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$= \frac{d}{dx}(y1(x)) \quad \frac{2 \cdot m \cdot x^2 - 10 \cdot m \cdot x + 5 \cdot m + 6}{(2 \cdot x - 5)^2}$					
$= \text{solve}\left(\frac{d}{dx}(y1(x)) = 0, x\right)$					
$x = \frac{\sqrt{3 \cdot (5 \cdot m - 4)} + 5 \cdot \sqrt{m}}{2 \cdot \sqrt{m}} \quad \text{or} \quad x = \frac{-(\sqrt{3 \cdot (5 \cdot m - 4)} + 5 \cdot \sqrt{m})}{2 \cdot \sqrt{m}}$					
$\text{solve}(d(y1(x), x) = 0, x)$					
MAIN RAD FRAC FUNC 2/30					

Pour le numérateur, deux cas de figure :

- soit $m = 0$, et donc $f'(x) = \frac{6}{(2x-5)^2}$; dans ce cas, la dérivée ne peut pas s'annuler, pas

d'extremum donc (ceux qui oublient d'étudier d'abord ce cas de figure ont ensuite des surprises avec l'étude d'un trinôme du second degré... qui n'en est pas un !) ;

- soit $m \neq 0$, et le numérateur de f' est un trinôme du second degré. Pour qu'il ne puisse pas s'annuler, il faut que son discriminant soit strictement négatif.

$$\Delta = 12m \cdot (5m - 4)$$

Conclusion :

- si m est dans l'intervalle $] 0; \frac{4}{5} [$ (tiens, on retrouve les valeurs particulières rencontrées dans l'étude des limites !), la dérivée de f ne peut pas s'annuler, et la fonction n'a pas d'extremum local ;
- si $m = \frac{4}{5}$, on a vu qu'alors $f(x) = \frac{2(x-1)}{5}$, avec $x \neq \frac{5}{2}$. Pas d'extremum donc.
- si m est dans l'intervalle $] -\infty, 0[$ ou $] \frac{4}{5}, +\infty[$, alors le discriminant est strictement positif, la dérivée s'annule deux fois (avec changement de signe).

Ses racines sont :

$$x' = \frac{10m - \sqrt{12m(5m-4)}}{4m} \text{ et } x'' = \frac{10m + \sqrt{12m(5m-4)}}{4m}.$$

On peut simplifier par 2, ce qui donne

$$x' = \frac{5m - \sqrt{3m(5m-4)}}{2m} \text{ et } x'' = \frac{5m + \sqrt{3m(5m-4)}}{2m}$$

Une rapide comparaison avec les solutions indiquées par la machine montre que celle-ci a opéré une simplification tout à fait illicite par $\sqrt{m}$, ce qui pourrait laisser supposer que quand m est strictement négatif, la dérivée ne peut pas s'annuler, ce qui n'est pas le cas ! Une fois de plus, cela montre que tout résultat de la machine doit être - à chaque fois que faire se peut - contrôlé !

3. Etude d'une fonction particulière.

On prendra ici (pourquoi pas ?) $m = 1$.

L'expression de f est alors $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 5}$.

Limites

On a vu les principaux résultats dans la partie précédente.

Les théorèmes connus sur les limites permettent de répondre sans difficultés.

Pour la vérification machine, on rappelle la syntaxe pour limite à droite, limite à gauche :

- on rajoute +1 (pour limite à droite)
- on rajoute -1 (pour limite à gauche).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
■	lim y1(x)				
	x→∞				
■	lim y1(x)				
	x→-∞				
■	lim y1(x)				
	x→5/2+				
■	lim y1(x)				
	x→5/2-				
limit(y1(x), x, 5/2, -1)					
MAIN RAD EXACT FUNC 5/30					

- Pour le voisinage de $\frac{5}{2}$, c'est fini : on dispose d'une asymptote "verticale", plus exactement parallèle à l'axe des ordonnées ;

- Pour le voisinage de $\pm \infty$, la question reste ouverte : quelle est l'allure de la courbe ? La fonction étant le rapport d'un polynôme du deuxième degré et d'un polynôme du

premier degré, on peut penser qu'elle va se comporter à l'infini "comme un polynôme du premier degré". Ce que l'on vérifie en faisant la division des deux polynômes.

La commande propFrac donne le résultat voulu, qu'il reste à analyser :

$$f(x) = \frac{3}{4 \cdot (2x-5)} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \text{ d'où :}$$

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4 \cdot (2x-5)}, \text{ d'où :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)] = 0.$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
1 → m					
y1(x)					
propFrac(y1(x))					
$\frac{x^2 - 3 \cdot x + 2}{2 \cdot x - 5}$					
$\frac{3}{4 \cdot (2 \cdot x - 5)} + \frac{x}{2} - 1/4$					
propFrac(y1(x))					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/30					

On a bien (en $+\infty$ et $-\infty$) une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$. Comme la différence entre $f(x)$ et cette fonction affine est : $f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4 \cdot (2x-5)}$, on sait en plus que pour $x > \frac{5}{2}$, la courbe est au dessus de l'asymptote, pour $x < \frac{5}{2}$, la courbe est au-dessous de l'asymptote.

Variations

La calculatrice va ici jouer à la fois le rôle de vérificateur et d'auxiliaire de calcul. Le dosage entre les deux est délicat.

Pour le calcul de la dérivée, il vaut mieux procéder à la main, et vérifier à la machine : il s'agit là d'un calcul essentiel. La machine est ici dans le rôle de vérificateur.

Par contre, pour le calcul des racines de la dérivée, on peut ici faire confiance à la machine. Elle est ici dans un rôle d'auxiliaire.

De même pour le calcul des images des racines de f' , aussi bien en valeur exacte qu'en valeur approchée, on peut se reposer sur la machine.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\frac{d}{dx}(y1(x))$					
$\frac{2 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 11}{(2 \cdot x - 5)^2}$					
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(y1(x)) = 0, x\right)$					
$x = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} \text{ or } x = \frac{-(\sqrt{3} - 5)}{2}$					
solve(d(y1(x)), x)=0, x)					
MAIN RAD EXACT FUNC 2/30					
F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(y1(x)) = 0, x\right)$					
$x = \frac{\sqrt{3} + 5}{2} \text{ or } x = \frac{-(\sqrt{3} - 5)}{2}$					
$y1\left(\frac{\sqrt{3} + 5}{2}\right)$					
$\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$					
$y1\left(\frac{\sqrt{3} + 5}{2}\right)$					
1.86602540378					
y1((J(3)+5)/2)					
MAIN RAD EXACT FUNC 4/30					

Il vaut mieux se concentrer sur la correction de la rédaction : la dérivée est du signe de son numérateur. C'est un trinôme du second degré à discriminant strictement positif. Il a donc deux racines distinctes. Il est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines, du signe opposé à l'intérieur.

D'où le tableau de variation : attention, ne pas oublier le domaine de définition !

	$-\infty$	x'	$5/2$	x''	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	$f(x')$	$-\infty$	$f(x'')$	$+\infty$	$+\infty$

On peut écrire à côté les valeurs particulières, pour ne pas surcharger le tableau de variation. On distinguera à chaque fois valeurs exactes, et valeurs approchées. Pour ces dernières, on précisera la qualité de l'approximation : ici on donnera à chaque fois les valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut.

$$x' = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \quad (\text{valeur approchée } 1,63) \quad f(x') = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \quad (\text{valeur approchée } 0,13)$$

$$x'' = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \quad (\text{valeur approchée } 3,36) \quad f(x'') = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \quad (\text{valeur approchée } 1,86)$$

Avant de commencer la représentation graphique, on doit se demander s'il n'y a pas d'autres points "cruciaux" : cela dépend de la fonction, du contexte... Ici, on peut penser aux points déterminés dans la première question : les points communs à toutes les courbes, de coordonnées $(0; -\frac{2}{5})$ et $(1; 0)$; ce sont en plus les intersections de la courbe avec les axes.

On pourra utilement placer ces deux points, avec leurs tangentes.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{25}$
1	0	$\frac{1}{3}$

Courbe

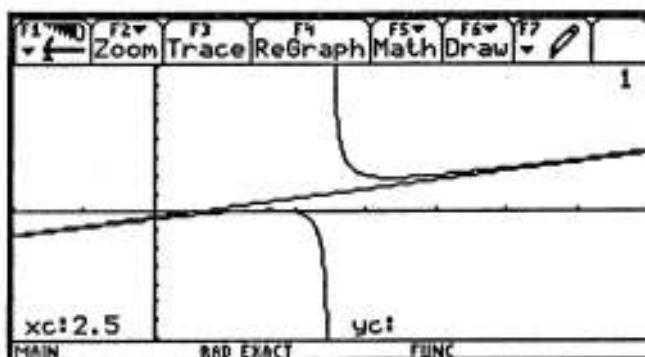
On laisse la courbe aux soins du lecteur. Précisons tout de même les étapes de la confection :

- il faut d'abord choisir un cadrage adapté aux variations de la fonction (ici, l'intersection des deux asymptotes, qui joue un rôle particulier, doit se trouver à peu près au centre de la représentation graphique) ;
- il faut ensuite placer les asymptotes, les points cruciaux (extremums, intersections avec les axes...) avec les tangentes ;
- et enfin tracer avec soin la courbe.

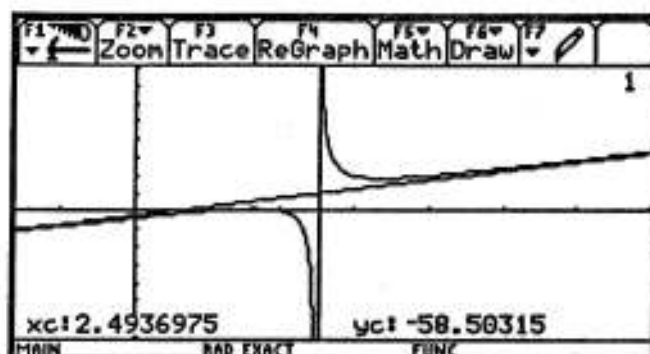
On rappelle que ce qui compte, et donnera des points, ce sont les propriétés de la fonction que le graphique permet de repérer (et pas du tout le simple recopiage de l'écran !).

A propos de courbe / machine, on se rappellera que l'"asymptote verticale" n'apparaît pas nécessairement :

si 2,5 est un point de calcul pour la machine, ce qui est le cas ci-contre, la calculatrice (avec Trace) signale simplement que 2,5 n'a pas d'image.



Par contre si 2, 5 n'est pas un des 120 points de calcul de l'application graphique, la calculatrice reliera le point "le plus haut", et le point "le plus bas", ce qui donnera l'impression d'une asymptote verticale.



Observations diverses

Pour terminer, on peut se demander si le graphique ne fait pas apparaître des propriétés nouvelles, que l'étude théorique n'avait pas décelé.

Il semble bien que l'intersection des deux asymptotes soit un centre de symétrie (ce qu'un expert savait dès le départ : la courbe est en fait une hyperbole, elle a deux asymptotes, et un centre de symétrie à l'intersection de celles-ci. Mais ceci est seulement au programme de l'option math des TS).

Ce point I a pour coordonnées $(\frac{5}{2}, 1)$.

Pour démontrer cette symétrie, on peut faire un changement de repère, et démontrer que la nouvelle fonction obtenue est impaire.

On peut aussi démontrer que les points A et B de la courbe d'abscisse $(\frac{5}{2} - x)$ et $(\frac{5}{2} + x)$ sont symétriques par rapport à I.

Pour cela, on calcule :

$f(\frac{5}{2} - x)$, $f(\frac{5}{2} + x)$, on calcule le milieu des deux ordonnées.

C'est bien l'ordonnée de I.

C'est gagné.

Pour finir, trois leçons :

- essayer de distinguer ce que l'on peut déléguer à la machine (la machine est alors un auxiliaire de calcul) et ce que l'on doit faire soi-même (la machine permet alors de vérifier) ;

- garder toujours le contrôle général des opérations, ce qui suppose de n'être pas collé à l'écran, mais de garder de la hauteur par rapport au problème : est-ce que la question a déjà été traitée en cours, est-ce que des exercices proches ont été vus, quel est le sens du problème, connaît-on plusieurs méthodes... ;

- distinguer très soigneusement les "écritures machines", et les écritures mathématiques "normalisées", qui sont les seules admissibles le jour du bac !



☆ TP n°14

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
←	Zoom	Fix	→	Math	2nd	3rd	4th	5th	6th
$u1 = u1(n-1) + u1(n-2)$ $u11 = \left\{ \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2} \quad 1 \right\}$ $u2 = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}^n$ $u12 = 1$ $u3 =$ $u13 =$ $u1(n) = u1(n-1) + u1(n-2)$									
MAIN RAD FRAC DEG MODE									

TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°14

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \text{ et } u_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} u_n.$$

Que dire de son sens de variation ? De sa limite ? (On prouvera les résultats annoncés !)
A partir de quel rang est-t-on sûr que la valeur absolue de u_n sera inférieure à 10^{-10} ? A

10^{-1000} ? 2. On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1, v_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, et $v_{n+2} =$
 $v_{n+1} + v_n$.

Programmez séparément les deux suites sur votre calculatrice, et observez leur évolution conjointe dans une table de valeur, avec un pas de 1. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

3. Observer une table de valeurs avec un pas de 10, puis regardez les valeurs affichées pour u_{500} et v_{500} . Interprétation ? ?

Indications relatives à la TI92

Pour programmer une suite récurrente à deux pas (ici v_n), on procède ainsi :

On rentre en U2 par exemple la relation de récurrence, en exprimant $U_2(n)$ en fonction de $U_2(n-1)$ et de $U_2(n-2)$.

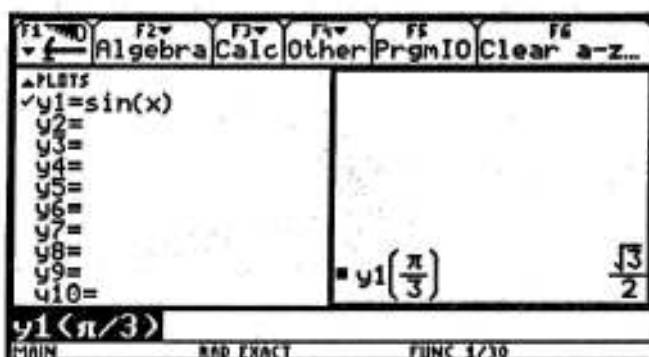
Les deux termes initiaux sont rentrés sous la forme $\{ v_1, v_0 \}$ (attention à l'ordre !).

NB. L'idée du TP est extraite du livre d'Analyse de l'IREM de Strasbourg, page 297 (1983, *Mathématiques, Terminales C et E, Analyse et Statistiques*, ISTR).

Remarque technico-mathématique.

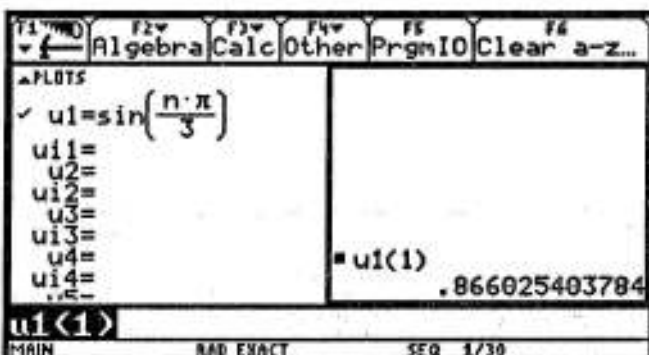
En mode exact, le fichier de fonctions fonctionne... en mode exact.

Ce qui semble une vérité de La Palisse !



Petit problème : en mode exact (cf le bandeau d'état, en bas de l'écran), le fichier de suites fonctionne... en mode approché.

Exit La Palisse, et arrivent les problèmes !



2. Le cadre du travail.

Le thème.

Etude des suites récurrentes, et des suites définies par leur terme général. Problème du passage d'un mode de définition à un autre.

La question problématique.

Deux suites dont on démontre, ou dont on est supposé avoir démontré, qu'elles sont égales, ont des comportements différents pour n grand. Et même très différents, puisque l'une converge vers 0, ce qui est conforme à la théorie, et l'autre diverge vers $-\infty$, ce qui est nettement plus dérangeant.

Les objectifs pédagogiques

Un objectif fondamental : montrer, dans l'action, l'écart entre valeur exacte, et valeur approchée : une petite différence peut avoir de grandes conséquences...

Ce TP devrait avoir le rôle, sur la question calcul exact/ calcul approché, qu'a eu le TP à propos des tracés de la fonction sinus, sur la question discret / continu.

Un objectif important : montrer l'importance du recul par rapports aux objets manipulés, l'importance de garder "à portée d'esprit" les éléments de référence. La suite donnée au début du TP est une suite géométrique, qui doit être reconnue, et qui doit être pourvue de tous ses attributs usuels ;

Un objectif annexe : le retour sur le raisonnement par récurrence.

Quelques hypothèses de déroulement.

On peut penser que les élèves "bricoleurs" vont observer les deux suites sous toutes les coutures (tableau de valeur, différents graphiques...) sans identifier la suite géométrique, et sans se prononcer sur l'égalité, ou non, des deux suites en présence. La machine est ici objet d'émerveillement...

Les élèves de type "scolaire" vont tenter d'utiliser la calculatrice pour "voir" l'objet du problème. Mais ils ont en général beaucoup de difficultés à rentrer une suite dans le fichier de suites, à sélectionner la bonne fenêtre pour voir un graphique convenable... La machine est ici objet de perplexité...

Les élèves de type "rationnels" vont sans doute identifier d'emblée la suite géométrique, vont prouver l'égalité des deux suites. Le traitement différent des deux suites par la calculatrice ne va pas les "questionner" : "même les machines puissantes ne sont pas fiables, rien ne vaut le calcul à la main"....

Les élèves expérimentateurs vont peut-être accumuler les renseignements sur la première suite, avant de réaliser que c'est une suite géométrique...

Les élèves plus théoriques identifieront sans doute sans peine la suite géométrique, évoqueront rapidement la récurrence, pour se concentrer sur ce qui pour eux est l'essentiel : la question problématique du TP. Comment des objets égaux peuvent avoir des représentations différentes ?

Et peut-être d'autres comportements encore ?

Vues et changements de points de vue sur le TP 14

Une remarque de fond

On aura en tête, pour comprendre ce qui se passe, que l'application graphique, comme l'application "tableau de valeurs" fonctionnent sur la TI 92 en mode "calcul approché".

Une remarque technique

Dans le calcul intervient à de nombreuses reprises le nombre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pour éviter de le réécrire à chaque fois, on pourra le rentrer dans une mémoire numérique, "a" par exemple, en valeur exacte. L'application "tableau de valeurs" utilisera une valeur approchée de a, mais si on appelle a dans l'application initiale, on bénéficiera de sa valeur exacte.

Pour ne pas travailler en aveugle, on pourra aussi évaluer une valeur approchée de a ...

On pourra aussi travailler avec un écran partagé, pour croiser éventuellement des informations d'origines différentes

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...

$\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$	$-.61803398875$
$\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2} \rightarrow a$	$\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$

-(J(5)-1)/2→a					
MAIN		RAD EXACT		SEQ 2/30 BATT	

1. Où l'on reparle de suites géométriques.

On demande d'abord d'analyser la suite $u_0 = 1$, et $u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_n$ du point de vue de son comportement global (son sens de variation) et de son comportement local à l'infini (sa limite).

On peut bien sûr commencer par jeter un coup d'oeil sur l'évolution de ses premiers termes.

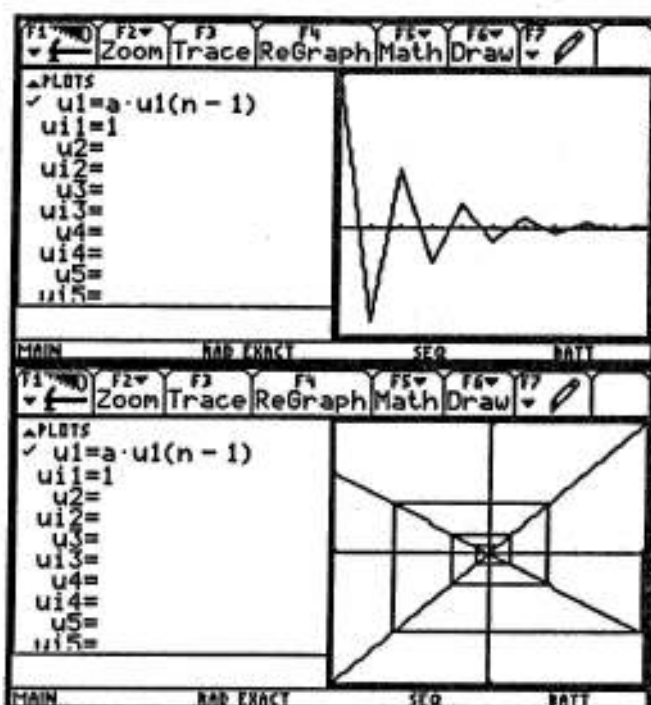
Pour cette observation, il vaut mieux d'ailleurs commencer par un tableau de valeurs.

On est ainsi sûr que des termes, par défaut de cadrage, ne nous échapperont pas...

F1	F2	F3	F4	F5	F6																
←	Setup	Cell	Fit-B:300	Plot	Intr Plot																
▲PLOTS ✓ u1=a·u1(n-1) u1=1 u2= u12= u3= u13= u4= u14= u5= u15= <table border="1"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>u1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.</td><td>1.</td></tr> <tr><td>1.</td><td>-.618</td></tr> <tr><td>2.</td><td>.38197</td></tr> <tr><td>3.</td><td>-.2361</td></tr> <tr><td>4.</td><td>.1459</td></tr> <tr><td>5.</td><td>-.0902</td></tr> <tr><td>6.</td><td>.05573</td></tr> </tbody> </table>						n	u1	0.	1.	1.	-.618	2.	.38197	3.	-.2361	4.	.1459	5.	-.0902	6.	.05573
n	u1																				
0.	1.																				
1.	-.618																				
2.	.38197																				
3.	-.2361																				
4.	.1459																				
5.	-.0902																				
6.	.05573																				
n=0.																					
MAIN		RAD EXACT		SEQ BATT																	

En plus, le tableau de valeurs nous permet de cadrer convenablement le graphique : en Time, si on veut voir les 10 premiers termes de la suite, on choisit une fenêtre de $[0, 10]$ pour les x , et de $[-0,7; 1]$ pour les y . Le mode "Line" permet de voir nettement comment on passe d'un terme au suivant.

Avec le mode Web, on verra le processus de construction de la suite, qui s'appuie ici sur une fonction affine décroissante. La fenêtre, identique pour les x et les y est du type $[-1, 1]$. Ne pas oublier d'actionner la commande Trace, pour voir la construction de la suite !



Mais est-il nécessaire, pour une suite aussi simple, de déployer un tel arsenal ?

Les moyens d'investigation de la TI 92 permettent de formuler des conjectures pour des objets complexes, dont on ne peut a priori cerner les contours. Mais pour faire $5 + 2$, ou étudier une fonction affine, ou une suite de référence, point n'est besoin de tels détours.

Il y a deux types de suites qui doivent être reconnus en TS du premier coup d'oeil : les suites géométriques, et les suites arithmétiques. Celle-ci est géométrique, puisque le rapport de deux termes consécutifs est égal à un nombre constant, a .

L'application des théorèmes du cours nous dit immédiatement trois choses :

- les termes de la suite ont des signes qui alternent (comme toutes les suites géométriques de raison négative) ;
- la suite converge vers 0 (comme toutes les suites géométriques dont la raison est strictement comprise entre - 1 et 1. C'est le théorème fondamental des suites géométriques...) ;
- on connaît l'expression de son terme général en fonction de son rang :

$$u_n = u_0 a^n = a^n$$

Cela présente l'intérêt de bénéficier de la valeur exacte des termes de la suite.

On le voit ci-contre : si on appelle $u1(10)$, on a recours au fichier de suites, donc à une valeur approchée.. Par contre, dans l'application initiale a^{10} donne une valeur exacte, que l'on peut développer grâce à Expand.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$u1(10)$					
a^{10}					
$expand(a^{10})$					
$expand(a^{10})$					
MAIN RAD EXACT SEQ 3/30 BATT					

A partir de quel rang est-on sûr que la valeur absolue de u_n sera inférieure à 10^{-10} ?

A 10^{-1000} ? Là aussi, la possession d'engins de calculs puissants ne dispense pas de réfléchir un peu...

$|a^n| \leq 10^{-10}$ équivaut à $n \cdot \ln |a| \leq -10 \ln 10$. Attention :

- ne pas oublier la valeur absolue. Comme a est négatif, on aurait un petit problème pour l'utilisation des logarithmes...

- ne pas oublier que $|a|$ est inférieur à 1. Donc le logarithme est négatif, et, quand on divise les deux membres de l'inégalité par $\ln |a|$, on doit en changer le sens...

$$\text{D'où } n \geq \frac{-10 \ln 10}{\ln |a|}.$$

C'est là, et seulement là, que la calculatrice intervient. On trouve (n'oublions pas que n est un entier !) : $n = 48$. On peut éventuellement vérifier en calculant u_{47} et u_{48} , mais les choses sont ici si simples que ce n'est peut être pas indispensable...

Pour savoir quand la valeur absolue de u_n passera sous 10^{-1000} , on a intérêt à utiliser les propriétés du logarithme...

Sinon la calculatrice refuse de faire le calcul...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
Error! Overflow					
$\ln(10^{-1000})$					
$\ln(a)$					
$-1000 \cdot \ln(10)$					
$\ln(a)$					
$-1000 \cdot \ln(10)$					
$\ln(a)$					
$-1000 \ln(10) / \ln(\text{abs}(a))$					
4784.97196678					
MAIN RAD EXACT SEQ 5/10 BATT					

2. Où l'on reparle de Fibonacci.¹⁴

On considère maintenant la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 1, v_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ et } v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

On appelle ce type de suite, où tout terme s'exprime comme somme des deux termes précédents (affectés éventuellement de coefficients) une suite de Fibonacci.

Attention, pour la définition de cette suite, définie en U2 : le terme de rang n est exprimé en fonction des termes de rang $(n-1)$ et $(n-2)$.

Les deux suites semblent bien coïncider.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Calc	Hi-B-Di	Int	Pow	Int
PLT5					
$u1 = a \cdot u1(n-1)$					
$u1 = 1$					
$u2 = u2(n-1)$					
$u2 = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$					
$u3 =$					
$u4 =$					
$u5 =$					
$u6 =$					
$n = 0$					
MAIN RAD EXACT SEQ BATT					

Prouver l'égalité des deux suites suppose de mettre en oeuvre une récurrence "à deux étages" :

- les deux suites coïncident bien aux rangs 0 et 1.
 - supposons alors que les suites coïncident aux rangs n et $n+1$, c'est à dire que $v_n = a^n$, et $v_{n+1} = a^{n+1}$ (on use bien sûr du fait que la première suite est géométrique).
- Il faut alors prouver que la propriété se propage au rang suivant, c'est-à-dire que

¹⁴ Léonard de Pise, ou Fibonacci (v.1170 - v.1250), sans doute le plus grand mathématicien de tout le Moyen Age chrétien. En voyageant en Algérie, en Egypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile, il va établir un pont entre les connaissances des Grecs, des Arabes, et des savants italiens de la Renaissance. Ouvrage de référence : Liber abaci, le livre des abaques. Déjà, les problèmes du calcul...[Dahan, 1982]

$$v_{n+2} = a^{n+2}.$$

Par définition $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n = a^{n+1} + a^n = a^n (a + 1)$.

Pour que cela marche, il faut que $a + 1 = a^2$, c'est à dire que "a" soit une des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Tout lecteur normalement constitué le démontrera sans peine.

Résumons-nous : les deux suites coïncident pour les deux premiers termes. Et si elles coïncident pour deux termes successifs, elles coïncident aussi pour le suivant. On a bien démontré ainsi que les deux suites coïncident "à tous niveaux", les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

3. Où le grain de sable apparaît...et fait boule de neige.

Dès le rang 30, il apparaît que les suites se séparent (en fait l'écart apparaît plus tôt, si l'on regarde de près : déjà, au rang 10, on observe la différence)

Et l'écart se creuse de plus en plus...

Jusqu'à exploser : on a alors l'impression que la première suite tend vers 0 (ce qui est bien normal), et que la deuxième suite, en théorie égale à la première, diverge vers $-\infty$ (ce qui est moins normal...)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
n	u1	u2			
0.	1.	1.			
10.	.00813	.00813			
20.	.00007	.00007			
30.	5.4E-7	5.3E-7			
40.	4.4E-9	-5.E-7			
50.	4.E-11	-6.E-5			
60.	3.E-13	-.008			
u1(10)-u2(10)					
2.841E-13					
u1(10)-u2(10)					
MAIN RAD EXACT DEG 1/10 BATT					
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Setup	Cl	Header	Int	Ind	P
n	u1	u2			
0.	1.	1.			
100.	1.E-21	-1.8E6			
200.	2.E-42	-1.E27			
300.	2.E-63	-1.E48			
400.	3.E-84	-9.E68			
500.	...	-7.E89			
600.	...	...			
u1(n)=3.2075975642345E-105					
MAIN RAD EXACT DEG 1/10 BATT					

D'où vient que deux suites, en théorie égales, ont des destins aussi différents ? Doit-on remettre en cause la démonstration de l'égalité, ou l'observation des différences ?

Il n'y a pas de réponse générale à cette question générale, hélas :

- parfois l'observation des phénomènes permet de déceler des erreurs théoriques dans le raisonnement, la logique de la démonstration ;
- parfois le raisonnement permet de remettre en question le résultat d'observations expérimentales.

Il est toujours utile de réfléchir sur l'écart entre les phénomènes attendus, et les phénomènes observés.

Il faut trouver une explication rationnelle.

4. Une petite différence, et ses grandes conséquences.

On l'a souligné au début, le tableau de valeurs, et le fichier de suites, ne gèrent que des valeurs approchées.

Ainsi les calculs ne sont pas faits avec $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, qui est un nombre irrationnel (que ne connaît pas une machine qui fait du calcul approché), mais avec $(a + e)$, e étant un nombre d'autant plus petit (en valeur absolue) que la machine est précise.

Quelles sont les conséquences de cette approximation pour le calcul des deux suites ?

- la suite u_n va être définie en fait par $(a + e)^n$. Pas de problème : on peut espérer que "e" est suffisamment petit pour que $(a + e)$ reste compris entre -1 et 0. La suite converge ainsi sans difficulté vers 0.
- la suite v_n va être définie par $v_0 = 1$, $v_1 = a + e$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$

Dans ces conditions, les deux suites ne vont plus coïncider. Pour le prouver, deux méthodes :

Une méthode générale :

Classique : on recherche une expression du terme général de la suite v_n .
La méthode qui suit est souvent utilisée pour étudier les suites de Fibonacci.

1. Y a-t-il des suites géométriques (w_n) de raison q qui vérifient $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$?

On aurait alors $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$

Soit, en simplifiant par q^n (en supposant q différent de 0) : $q^2 = q + 1$.

On trouve ainsi deux valeurs de q convenables :

$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (surprise, on retrouve a), et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (que l'on appellera b).

Toutes les suites géométriques de raison a ou b vérifient la relation $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$.
Par somme, la suite $w_n = x.a^n + y.b^n$ vérifie aussi cette relation (x et y étant deux réels quelconques). Autrement dit, tout terme de cette suite est la somme des deux termes précédents (comme pour la suite v_n)

2. Mais alors, si on trouve des réels x et y tels que $w_0 = v_0$ et $w_1 = v_1$, c'est à dire si les deux suites coïncident sur les deux premiers termes, comme elles sont définies par la même relation de récurrence, elles coïncideront sur tous leurs termes...

$$\begin{array}{ll} w_0 = v_0 & \text{donne} \quad x + y = 1 \\ w_1 = v_1 & \text{donne} \quad xa + yb = a + e \end{array}$$

$$\text{On en tire sans peine } x = \frac{a - b + e}{a - b} \text{ et } y = \frac{e}{b - a}.$$

D'où l'expression de la suite w_n , donc de la suite v_n :

$$v_n = x.a^n + y.b^n = \frac{a - b + e}{a - b} a^n + \frac{e}{b - a} b^n.$$

On notera que, si la machine faisait du calcul exact, on aurait $e = 0$, ce qui donnerait bien $v_n = a^n$, ce que l'on a établi lors de la question 2 du TP.

Mais ici, ce n'est pas le cas. Donc, pour la machine, la suite v_n est la somme d'une suite géométrique de raison a , et d'une suite géométrique de raison b .

Le nombre a , on le sait, est compris entre -1 et 0. Donc la première suite géométrique tend vers 0.

Mais le nombre b est supérieur à 1... Donc la deuxième suite géométrique tend vers $-\infty$ (car le premier terme est négatif). Et ce, dès que "e" est différent de 0.

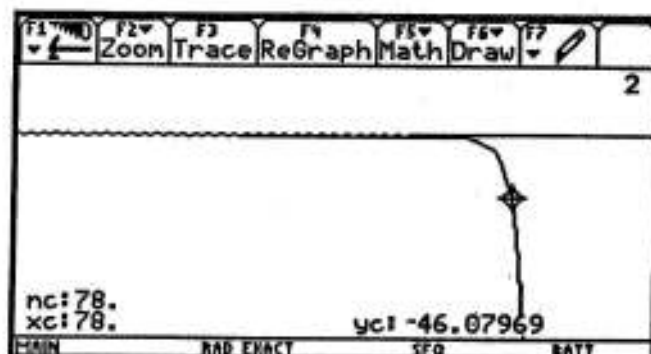
Une méthode plus subtile (trouvée par Maryse Noguès) :

Considérons la suite définie par $v_0 = 1$, $v_1 = a + e$ et $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$
On a ainsi $v_2 = a + 1 + e = u_2 + e$; $v_3 = 2a + 1 + 2e = u_3 + 2e$.
On démontre sans peine par récurrence que $v_n = u_n + f(n).e$, où $f(n)$ est une fonction de n , strictement croissante, à valeurs entières... Ainsi $f(n)$ tend nécessairement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. La limite de u_n est connue, c'est 0. Donc la suite v_n tend vers $+\infty$, ou $-\infty$, suivant le signe de e . Ici, c'est manifestement $-\infty$.

Autrement dit, toute machine qui fait du calcul approché, aussi précise soit-elle, présentera toujours ce même phénomène.

Une dernière vue du phénomène
en mode Time.

Alors que la première suite
poursuit son aplatissement sur
0, la deuxième suite diverge
violemment.



Retenir de tout cela que, dès que l'on fait du calcul approché, on est tributaire des mécanismes d'approximation de la machine. $\sqrt{2}$ n'est plus $\sqrt{2}$, mais un nombre décimal "proche" que la machine lui substitue.

On voit tout ce que l'on a à gagner à faire du calcul exact.
Surtout sur les suites, où les erreurs se cumulent... à l'infini.

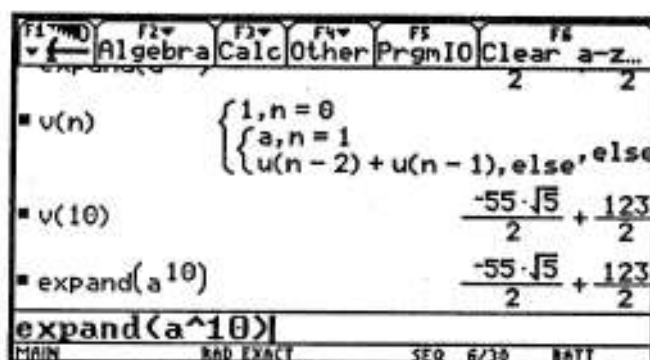
5. Peut-on contourner cette difficulté ?

Plusieurs possibilités pour cela :

- on peut d'abord définir la suite de telle façon qu'elle soit relativement insensible à de petits "dérapages" numériques. Ainsi, on a démontré ici que les suites (u_n) et (v_n) sont égales. Comme la calculatrice gère beaucoup mieux la suite (u_n) , pour calculer le 100ème terme, on utilisera la suite (u_n) et non pas la suite (v_n) !
C'est d'ailleurs un travail théorique très important de trouver l'expression la meilleure d'un objet mathématique pour son traitement par un outil de calcul quelconque (calculatrice, ou ordinateur).

- si on ne trouve pas d'expression plus simple de la suite, on peut aussi la définir dans l'application initiale de la TI92, qui va faire du calcul exact (voir sur ce point le mode d'emploi page 27-3)

On a défini la suite v dans
l'application initiale.
On a alors accès à la valeur
exacte de $v(10)$.
On peut d'ailleurs vérifier que
cette valeur coïncide avec a^{10} .



On pourrait bien sûr se demander : pourquoi, si c'est si simple, le constructeur de la machine n'a-t-il pas programmé les suites en calcul exact ? Le problème est que le calcul exact, avec ce type d'algorithme, est très coûteux, en temps de calcul. Essayez de calculer $v(20)$ avec le programme ci-dessus, vous le constaterez vous-mêmes (30mn de calcul)! Et d'ailleurs, pour $v(50)$, la calculatrice refuse le travail, faute de mémoire.

Le calcul exact, c'est bien, mais c'est difficile (et parfois impossible...)
On n'a rien sans rien !

Morale de l'histoire, et fin (provisoire)

6. Retour sur la programmation "exacte" des suites

(partie écrite par Christian FAURE)

En fait, la remarque qui termine le paragraphe précédent ("le calcul exact est très coûteux, en temps de calcul"), doit être relativisée : le nombre d'opérations (et donc le temps de calcul) dépend de la procédure de programmation choisie.

Le constructeur de la TI-92 a choisi un algorithme récursif, particulièrement lourd en nombre d'opérations. Un algorithme itératif aurait été beaucoup plus rapide, comme on va le voir ci-dessous.

Cette partie, d'explications générales, n'est pas à destination des élèves. Mais un peu de recul n'est pas mauvais, pour les élèves, comme pour les professeurs!

On s'intéresse donc ici à une suite du type :

$$(v_n) \begin{cases} v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ v_0 = ; v_1 = ; \end{cases}$$

Les termes de cette suite peuvent, sur la TI92 (et autres machines supportant la récursivité), être calculés soit par un algorithme récursif ¹⁵, soit par un algorithme avec une boucle d'itération.

Les coûts de calcul (c'est à dire les durées des calculs et la place mémoire) seront radicalement différents dans un cas et dans l'autre.

MÉTHODE RÉCURSIVE :

$\{v_0 \text{ et } v_1 \text{ sont donnés, on appelle la fonction } v \text{ avec une valeur de } n\}$

fonction $v(n : \text{entier}) : \text{réel} ;$ $\{v \text{ prend un entier, retourne un réel}\}$
 début
 si $n = 0$ alors retourner v_0
 sinon si $n = 1$ alors retourner v_1
 sinon retourner $v(n-1) + v(n-2)$; $\{ \text{les deux appels récursifs} \}$
 fin.

¹⁵ Se dit d'un algorithme qui fait une auto référence (i.e. :qui s'appelle lui-même)

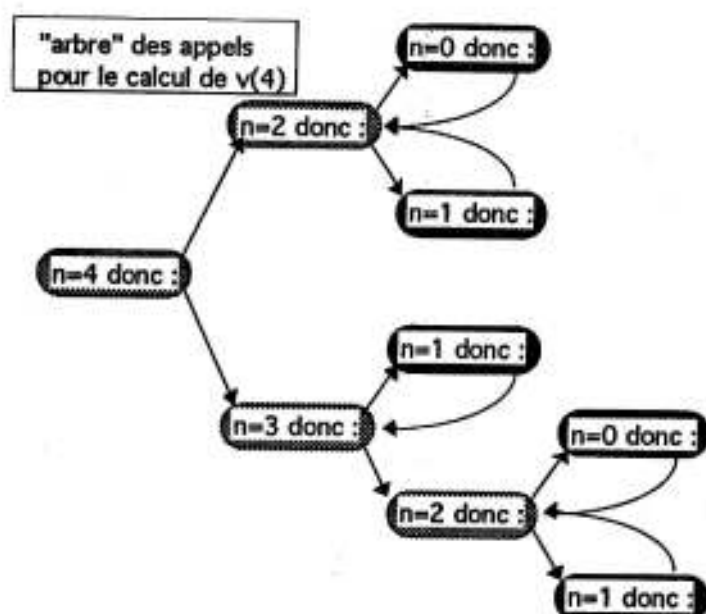


fig 1

Pour calculer $v(4)$, le programme s'appelle lui-même deux fois pour calculer $v(3)$ et $v(2)$.

Puis de nouveau, deux appels ... quand le programme arrive à une "feuille" ($n=1$ ou $n=0$) de cet arbre il remonte les valeurs au nœud qui a fait l'appel. Le nœud peut alors effectuer le calcul avec les deux valeurs récupérées et, à son tour, remonte la valeur obtenue au nœud qui l'a appelé.

- Le nombre d'appels suit donc une loi exponentielle.
Une formalisation à l'aide d'une suite permet d'exprimer $N(n)$, le nombre d'appels nécessaires au calcul de v_n .

On a $N(n+2) = 2 + N(n+1) + N(n)$
(2 appels + ceux du calcul de v_{n+1} + ceux du calcul de v_n)

- Cette suite peut aussi s'exprimer par $N(n) = (1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) a^n + (1 + \frac{\sqrt{5}}{5}) b^n - 2$

(Comme pour les équations différentielles linéaires N est la somme d'une solution particulière (-2), et de $\alpha a^n + \beta b^n$, a et b étant les zéros de $X^2 - X - 1$ Les valeurs initiales $N(0) = N(1) = 0$ donnent les coef α et β : $\alpha = (1 - \frac{\sqrt{5}}{5})$ et $\beta = (1 + \frac{\sqrt{5}}{5})$).

- On obtient après quelques calculs de $N(n)$ et quelques mesures de durée¹⁶:
(les unes en mode exact les autres en mode approx) :

valeurs de n	8	10	12	14	16	18	20
$N(n)$; nombre d'appels	66	176	464	1218	3192	8360	21890
d(n) temps calcul de v_n (exact)	4 s	9 s	24 s	62 s	167 s	443 s	1200 s
d(n) temps calcul de v_n (approx)	4 s	9 s	22 s	58 s	154 s	408 s	1080 s

¹⁶ Mesures sur TI 92 en mode «exact» puis en mode «approché»

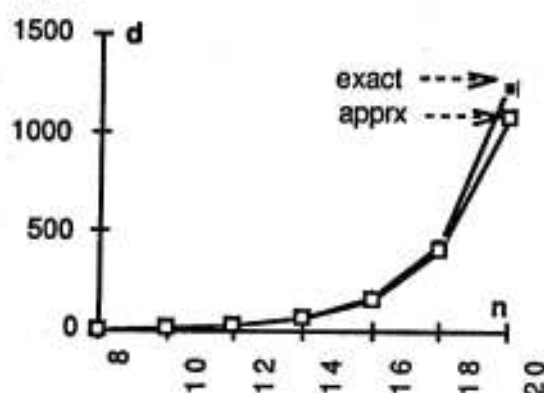


fig 2
Durée en fonction de n

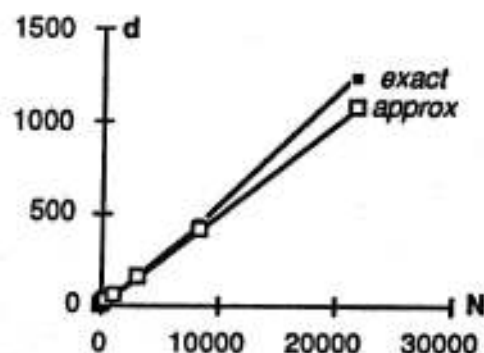


fig 3
Nombre d'appels en fonction de durée

- Les représentations statistiques mettent bien en évidence:
 - La corrélation exponentielle entre n et d (durée)
 - La corrélation linéaire¹⁷ entre N et d
- On obtient :

	mode EXACT	mode APPROX
$n \rightarrow d$ (Régr. exponentielle)	$d \approx 0,079 * 1,61^n$ coef. corrélation : 0,9997	$d \approx 0,083 * 1,60^n$ coef. corrélation : 0,9995
$N \rightarrow d$ (Régr. linéaire)	$d \approx 0,0547N - 4$ coef. corrélation : 0,99990	$d \approx 0,0493N - 1,4$ coef. corrélation : 0,99999

- Le fait de calculer en mode «approché» ou «exact» ne change rien au fait fondamental : l'algorithme de calcul de (v_n) est exponentiel et les mesures sont très proches.
- D'autre part, un algorithme récursif nécessite un stockage des résultats intermédiaires (un "empilage" des résultats dont le nombre est lui aussi exponentiel) d'où un coût en place mémoire ; la TI 92 limite le nombre d'appels récursifs à 50.

MÉTHODE ITÉRATIVE :

{ p et q sont initialisés avec v_0 et v_1 qui sont donnés, on appelle v avec une valeur de $n > 1$ }
fonction v(p,q : réels ; n : entier) : réel;

```

local : i,r;
début
    pour i:= 2 jusqu'à n faire
        r:= p+ q;          {calcul de  $v_{i+2}$ }
        p:=q;              {transferts ..}
        q:=r;
    retourner r;
fin.
```

¹⁷ Les temps d'affichages, non négligeables pour les petites valeurs de n, introduisent une "ordonnée à l'origine"

- Ici la boucle est effectuée $n - 2$ fois, on dit que cet algorithme est en $O(n)$; en clair, sa durée d'exécution sera proportionnelle à n (les coef. de proportionnalité dépendants de la machine ..). Quelques mesures :

valeur de n	20	50	200	1000	1500	2000
temps de calcul (m : exact)	4 s	8 s	30 s	170 s	300 s	480 s
temps de calcul (m : approx)	2 s	3 s	10 s	49 s	73 s	100 s

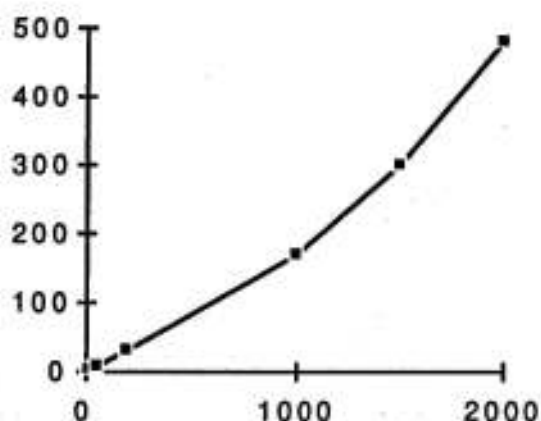


fig 4
Temps de calcul , mode EXACT

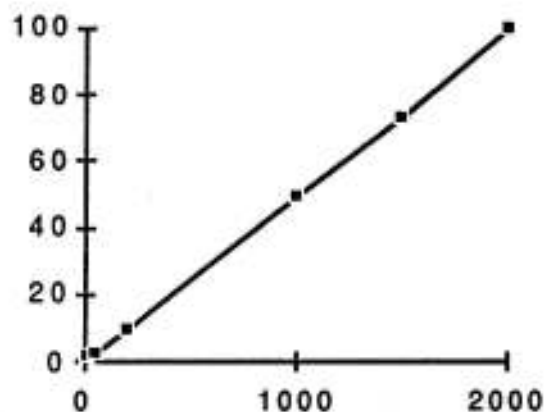


fig 5
Temps de calcul mode APPROX

- En mode APPROCHÉ , on a un temps de calcul proportionnel à n , comme prévu, mais on constate une légère divergence entre mesures et prévisions pour ce qui concerne le mode EXACT.
- On peut raisonnablement avancer une explication : les objets manipulés par l'algorithme en mode APPROCHÉ sont de taille constante (5, 8 ou 10 octets selon le format des nombres) d'où la proportionnalité prévue alors qu'en mode EXACT, l'algorithme manipule des objets de plus en plus grands (en terme d'encombrement mémoire) et donc de plus en plus longs à traiter.
- Pour évoquer le coût en mémoire, l'algorithme avec boucle d'itérations ne nécessitera pas un empilage de valeurs intermédiaires hors celles de p et q (dont les tailles peuvent cependant devenir considérables en mode EXACT !)
- La différence d'efficacité des deux algorithmes est considérable tant en temps calcul qu'en occupation mémoire.

Voici un petit tableau qui peut convaincre de ne pas suivre l'algorithme proposé par la documentation de la TI 92 (page : 27-3) (algorithme proposé afin de contourner la surprenante impossibilité de faire du calcul exact avec les suites définies par l'éditeur

de suites (les $u_i(n)$ obtenues par Y= editor...)

n	20	25	50	100	200
durée (récursif)	20 mn	3h	60 ans	10^{12} ans	xxxxxx
durée (itération)	2 s	2 s	3 s	6 s	10 s

On comprend dans ces conditions que le constructeur précise que, pour le calcul des suites en mode exact, on ne peut pas faire de calcul au delà du 50ième terme...La réflexion est affaire de patience, mais, tout de même...

NB : on n'est pas rentré ici dans les détails des détails.

Certains logiciels (Mathematica par exemple) traitent en mode itératif un algorithme récursif, c'est à dire qu'ils "dérécursivent".

Ce n'est évidemment pas le cas de la version de Derive implantée sur les TI-92.



Espace de conjecture réservé au lecteur : que représente le dessin ci-contre ?

Une allégorie ☐

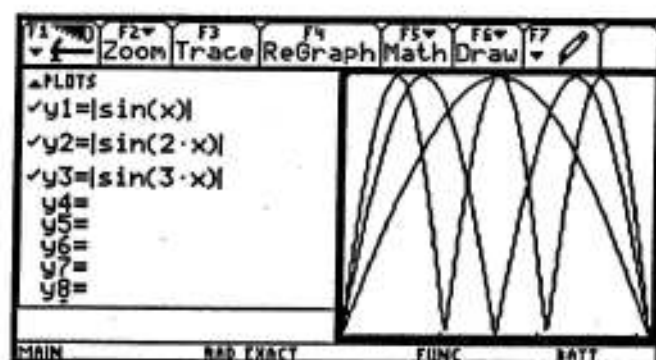
Une occupation d'espace de bas de page ☐

Elève attendant le calcul en mode exact du 49^e terme d'une suite récurrente sur une TI-92 (avec un algorithme récursif)

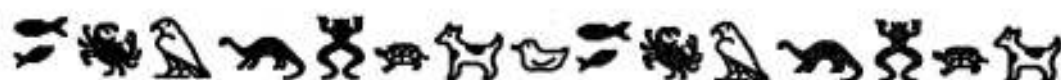
(Cochez la case qui semble convenir)



TP n°15



TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°15

Le but du TP est le calcul de $I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Comme d'habitude, plusieurs méthodes d'approche sont envisageables :

- calcul direct dans le cas général ;
- observation numérique, ou graphique, des premiers termes de cette suite ;
- conjectures diverses, suivies des preuves ou réfutations...

On précisera avec soin les différentes pistes empruntées, et les résultats partiels engrangés.

Remarque technico-mathématique.

La calculatrice refuse de donner un résultat général pour l'intégrale proposée.

Les élèves vont donc se livrer à un certain nombre de manipulations... qui peuvent réserver des surprises.

Première surprise : comme primitive de $|\sin x|$, la machine donne $|\sin x|.x$.

Deuxième surprise, la demande reformulée reçoit comme réponse... la question elle-même. Quant aux primitives de $|\cos x|$, elles sont incompréhensibles pour tout élève de bonne volonté. Alors, quid ?

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int \sin x dx$ $\sin x .x$					
$\int \sin(x) dx$ $\int \sin(x) dx$					
$\int \cos(x) dx$					
$\sin(x) \cdot \text{sign}(\cos(x)) - \frac{\text{mod}(2 \cdot x - \pi, 2 \cdot \pi) - 2}{\pi}$					
$f(\text{abs}(\cos(x)), x)$					
Warning: Memory Full; simplification might be incomplete					

Le pire serait de dire : c'est à n'y rien comprendre... Or donc essayons de comprendre.

La première surprise se dévisse simplement : il y a eu une erreur d'entrée. Au lieu d'écrire $|\sin(x)|$, on a écrit $|\sin x|$. Le logiciel a alors interprété $|\sin x|$ comme une chaîne de caractères représentant une nouvelle variable, indépendante donc de la variable d'intégration, qui est ici x . Donc $|\sin x|$ est une constante, relativement à l'intégrale. D'où, comme primitive $|\sin x|.x$. Exactement de la même façon que nous aurions attribué à k une primitive égale à kx . Sauf évidemment que l'on se représente plus facilement une constante sous l'étiquette " k " que sous l'étiquette " $|\sin x|$ ". Le changement de point de vue se niche parfois où on ne l'attendait pas...

Passons à la deuxième surprise : le logiciel annonce comme primitive de $|\cos(x)|$ (dont la syntaxe est correcte) la fonction $g(x) = \sin(x) \cdot \text{sign}(\cos(x)) - \frac{\text{mod}(2x - \pi, 2\pi) - 2x}{\pi}$

L'expression $\text{mod}(2x - \pi, 2\pi)$ signifie le reste de la division de $(2x - \pi)$ par 2π . Ce n'est donc pas la mesure principale de $2x - \pi$, mais sa mesure dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. ce qui apporte déjà, sur un sujet sensible (les angles), un élément de complexité supplémentaire. Ainsi, si par exemple x est dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, on aura $2x$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ et donc $\text{mod}(2x - \pi, 2\pi) = 2x + \pi$. Et ainsi $g(x) = \sin(x) - 1$.

Tout ceci pour prouver qu'une primitive de $|\cos x|$ sur $[0, \pi/2]$, c'est à dire une primitive de $\cos x$, est $\sin x - 1$...

On comprendra que dans ces conditions, il vaut mieux, en première lecture, faire l'impasse sur de telles écritures dans une séance de TP !

Plus précisément :

- à propos de la première "surprise", toute la clarté doit être faite lors des séances de travail. Cette affaire de syntaxe est trop importante pour que l'on puisse se contenter de différer une explication ;

- par contre, pour la deuxième "surprise", on peut suggérer aux élèves soulevant le problème de revenir au sujet du TP, en réservant une explication complète pour un moment plus calme (on peut aussi donner cette question comme sujet de réflexion, en donnant des références dans le mode d'emploi).

Tout ce qui précède montre qu'il est préférable d'avoir fait le tour le plus complet possible des différentes manipulations relatives au problème, avant d'aborder le TP...

2. Le cadre du travail.

Le thème.

Le calcul d'intégrale, sous ces différentes facettes. S'agissant d'une fonction clairement positive, les questions de calcul d'aire prennent une certaine importance.

La question problématique.

Toutes les intégrales, évaluées en calcul approché, sont presque égales. Le sont-elles tout à fait ?

Les objectifs pédagogiques.

Objectif principal : faire jouer les différentes représentations possibles d'une intégrale, choisir parmi celles-ci celle qui sera plus pertinente pour la résolution du problème.

Ces changements de représentation permettront de solliciter de nombreuses facettes de la machine (application graphique, suites, fonctions, application initiale en calcul exact, ou approché...).

Objectif secondaire : apprendre à reformuler un problème, à le décomposer en problèmes élémentaires plus simples (ici décomposer l'intervalle d'intégration en intervalles plus petits sur lesquels on contrôle le signe de la fonction).

Objectif permanent : apprendre à considérer la nature des objets manipulés (comme lors du TP 12 sur la famille de fonctions à paramètre). Qu'est ce qui varie, la variable d'intégration, ou l'indice de la suite ? Tout dépend de la facette de l'objet mathématique que l'on considère...

Hypothèses de déroulement.

On peut penser que la diversité des approches possibles du TP provoquera un éparpillement des actions.

De même la nouveauté des objets étudiés (l'intégrale est la découverte de la classe de TS relative au calcul infinitésimal) devrait entraîner, dans l'action, de nombreuses confusions (suite rentrée dans le fichier de fonctions, ou le contraire).

Vues et changements de points de vue sur le TP 15

On essaiera comme d'habitude de donner ici un certain nombre de pistes de résolution.
Comme d'habitude, la liste n'est pas exhaustive...

Il s'agit donc de calculer $I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| dt$.

Prologue

Indispensable, même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

La fonction f_n , qui à x associe $|\sin(nt)|$, est continue sur $\mathbb{R}$, et donc sur l'intervalle d'intégration $[0, \pi]$. Donc I_n est définie pour tout n . Mieux, comme une valeur absolue est positive, et que les bornes sont "dans le bon sens", ces intégrales sont toutes positives. Mieux encore, comme la fonction f_n est bornée entre 0 et 1, l'intégrale, par application de l'inégalité de la moyenne, est comprise entre 0 et π .

Observations numériques

On peut commencer par observer les résultats donnés par la calculatrice.

D'abord en calcul exact :

- donne-t-elle une valeur exacte pour I_n ?
- donne-t-elle une primitive pour f_n ?
- donne-t-elle une valeur exacte pour I_1, I_2, I_3 , c'est-à-dire pour des valeurs particulières de n ?
- donne-t-elle des primitives pour des valeurs particulières de n ?

Peine perdue : en calcul exact, la calculatrice ne donne rien.

On a d'ailleurs posé quelques questions inutiles : si la machine ne donne pas d'intégrale, c'est qu'elle ne sait pas déterminer de primitive...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
$\int_0^{\pi} \sin(n \cdot x) dx$					
$\int \sin(n \cdot x) dx$					
$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$					
$\int \sin(x) dx$					
$f(\text{abs}(\sin(x)), x)$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 4/30	BATT		

Ensuite en calcul approché :

Le calcul approché donne des résultats qui laissent subsister une interrogation :

- la suite oscille-t-elle autour de deux ?
- est-elle stationnaire, avec une oscillation due au calcul approché ?

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	
$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$					
$\int_0^{\pi} \sin(2 \cdot x) dx$					
$\int_0^{\pi} \sin(3 \cdot x) dx$					
$\int_0^{\pi} \sin(5 \cdot x) dx$					
$f(\text{abs}(\sin(5x)), x, 0, \pi)$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 4/30	BATT		

On peut regarder un peu plus systématiquement les valeurs prises par la suite en rentrant I_n dans le fichier de suite, et en regardant une table de valeurs.

La table semble donner 2 tout le temps. Mais attention, si on se promène avec le curseur dans la table, on voit que ce n'est pas tout à fait 2...

Il y a un arrondi pour que le nombre en question puisse rentrer dans la case correspondante.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Setup	Cell	Header	Plot	Plot
PLT1					
u1 = $\int_0^\pi \sin(n \cdot x) dx$	n	u1			
u11 =	1.	2.			
u2 =	2.	2.			
u12 =	3.	2.			
u3 =	4.	2.			
u13 =	5.	2.			
u4 =	6.	2.			
u14 =	7.	2.			
u1(n)=2.0000001833863					
MAIN	RAD EXACT	SEQ	EDIT		

Les résultats affichés peuvent faire pencher plutôt du côté du caractère stationnaire de la suite, mais en restant très prudent...

De toutes façons, on ne peut pas passer trop de temps à observer le comportement de la suite sur ses premiers termes (surtout que le calcul est assez long...). Il faut passer à une résolution générale, en tentant de comprendre les réponses, ou l'absence de réponse, de la machine.

Première idée : étudier les variations de la suite I_n .

La suite I_n apparaît stationnaire. Si on démontre que c'est bien le cas, il suffira de calculer I_1 , et tous les termes suivants seront égaux !

Montrer que la suite est stationnaire revient à prouver que $I_{n+1} = I_n$.

C'est à dire $\int_0^\pi |\sin((n+1)t)| dt = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$.

On peut essayer de transformer I_{n+1} pour aboutir à I_n .

Dans le menu Algebra, la commande 9 permet de transformer $\sin((n+1)x)$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z
tExpand(sin((n+1)*x))					
sin(x)·cos(n·x) + cos(x)·sin(n·x)					
tExpand(sin((n+1)*x))					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 1/20	BATT		

On arrive ainsi à $I_{n+1} = \int_0^\pi |\sin x \cos(nx) + \cos x \sin(nx)| dt$.

Le problème se pose alors pour aller plus loin : la valeur absolue d'une somme est inférieure à la somme des valeurs absolues. On aura du mal à prouver par cette méthode l'égalité $I_{n+1} = I_n$. Impasse provisoire, et changement de point de vue.

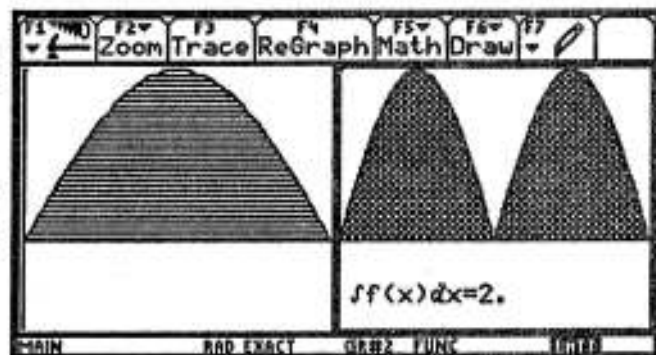
Deuxième idée : raisonner sur les aires.

C'est une idée assez naturelle, puisque les fonctions que l'on considère ici sont positives. Les intégrales sont donc égales à des aires de surfaces.

S'agissant de fonctions de référence (valeur absolue, et sinus), les choses devraient être assez simples... Voyons un peu :

A gauche, la fonction $|\sin x|$, à droite la fonction $|\sin 2x|$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

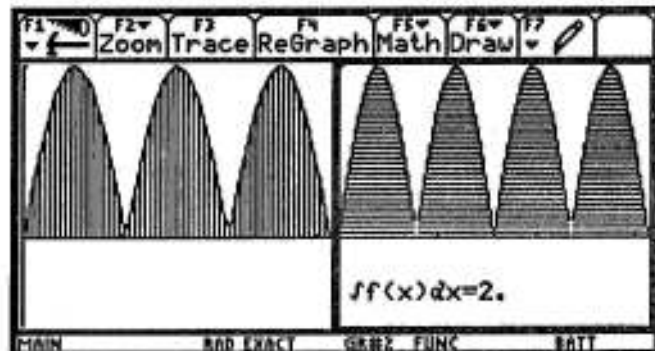
La calculatrice donne à chaque fois le même résultat pour l'aire hachurée, c'est à dire pour les intégrales recherchées.



N.B. : si on veut obtenir un écran partagé, avec un graphique dans chaque fenêtre, il faut le sélectionner dans le menu MODE (Mode, F2, Split Screen : Left-Right, puis Number of Graph : 2)

Encore une observation graphique, pour à gauche, la fonction $|\sin 3x|$ à droite la fonction $|\sin 4x|$ sur l'intervalle $[0, \pi]$

Toujours le même résultat.



Ces graphiques peuvent donner l'idée de couper l'intervalle d'intégration en intervalles plus petits, liés au nombre d'arches :

- Pour f_1 , entre 0 et π , une seule arche. Donc on intègre directement sur tout l'intervalle. Mais sur cet intervalle, la fonction sinus est positive. Donc pour le calcul de I_1 , on peut se passer de la valeur absolue $I_1 = \int_0^{\pi} \sin(t) dt = [-\cos t]_0^{\pi} = 2$

- Pour f_2 , entre 0 et π , deux arches. Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ la fonction $\sin(2x)$ est positive. Puis elle est négative entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Donc on peut calculer $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin(2t) dt =$
 $[-\frac{1}{2} \cos(2t)]_0^{\pi/2} + [-\frac{1}{2} \cos(2t)]_{\pi/2}^{\pi} = 2$ (primitive de $\sin(ax) : -\frac{1}{a} \cos(ax)$).

On pourrait continuer longtemps comme cela.

L'idée qui peut alors venir est que, à l'ordre n , on a n arches de sinusoides, de même aire, et que cette aire est précisément $\frac{2}{n}$, ce qui expliquerait que la suite soit stationnaire.

Voyons pour f_n . La fonction détermine n arches sur $[0, \pi]$. Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{n}]$, la fonction est positive. Doù :

$$\int_0^{\pi/n} |\sin(nt)| dt = \left[-\frac{1}{n} \cos(2n) \right]_0^{\pi/n} = \frac{2}{n} . \text{ Cela marche bien...}$$

Un coup d'oeil sur quelques calculs machines :

On vérifie ainsi le résultat, pour l'intégrale, comme pour une primitive.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z
$\int_0^{\pi/n} \sin(n \cdot x) dx$					
$\int \sin(n \cdot x) dx$					$\frac{-\cos(n \cdot x)}{n}$
$f(\sin(n \cdot x), x)$					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 2/10	BATT		

On pourrait être tenté de s'arrêter là, en concluant que l'aire de la première arche est $\frac{2}{n}$, qu'il y a n arches, donc l'intégrale cherchée est 2.

Il est toutefois préférable de mettre cela en forme, en exhibant clairement les propriétés des fonctions qui permettent de conclure ici : il s'agit bien sûr de la périodicité des fonctions en présence.

Troisième idée : raisonner sur les variations des fonctions.

On veut ainsi prouver que tous les arches d'une même fonction sont "équivalentes".

C'est-à-dire que la fonction f_n est périodique, de période $\frac{\pi}{n}$. Ce qui est immédiat :

$$|\sin n(x + \frac{\pi}{n})| = |\sin(nx + \pi)| = |-\sin(nx)| = |\sin(nx)|$$

L'intervalle d'intégration contenant n périodes, on utilise le résultat du cours :

$$\int_0^T f(t) dt = \int_T^{2T} f(t) dt . \text{ D'où } \int_0^{nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt . \text{ Ainsi :}$$

$$I_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)| dt = n \int_0^{\pi/n} \sin(nt) dt = n \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \right]_0^{\pi/n} = -[\cos \pi - \cos 0] = 2.$$

On a bien prouvé le résultat attendu.

Mais la réponse a exigé un petit détour théorique, du côté des fonctions de référence (sinus et valeur absolue), et du côté des résultats du cours sur les intégrales (intégrale et aire pour une fonction positive, intégrale et fonctions périodiques).

Dans ces conditions, la calculatrice garde son rôle d'observation numérique ou graphique, de vérifications partielles pour les calculs de primitives, ou d'intégrales.

Mais elle ne peut indiquer le démarche à suivre, ni même donner d'emblée le résultat demandé...

Quatrième idée : revenir à des objets plus simples.
(hors programme)

On veut calculer $I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$. Et si on se ramenait simplement à la fonction sinus, en expulsant le paramètre n hors de l'intégrale ?

Pour cela, on fait un changement de variable, en posant $u = nt$. Si cela est hors programme, c'est que cela pose deux types de problème :

- un problème technique : il faut faire le changement de variable non seulement dans la fonction, mais aussi dans les bornes, et l'élément différentiel ;
- un problème théorique : on ne peut pas faire n'importe quel changement de variable : il doit être compatible avec les "formalités" d'intégration.

Sur ce deuxième point, pas de problème ici : le changement de variable $u = nt$, de type fonction linéaire, est assez "simple".

Sur le premier point :

- les bornes de l'intégrale, pour la variable t , sont $t = 0$, et $t = \pi$. On aura donc, comme $u = nt$, les bornes pour u : $u = 0$, et $u = n\pi$.
- De $u = nt$, on tire $du = n dt$. (ou $\frac{du}{dt} = n$).

Par report dans l'intégrale, on obtient :

$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt = \int_0^{n\pi} |\sin u| \frac{du}{n} = \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin u| du.$$

On voit peut-être mieux ici que la fonction $|\sin u|$ a une période de π .

D'où $I_n = n \cdot \frac{1}{n} \int_0^\pi |\sin u| du = n \cdot \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin u du$ (puisque sinus est positive sur cet intervalle).

$$\text{Et enfin } I_n = n \cdot \frac{1}{n} \cdot 2 = 2.$$

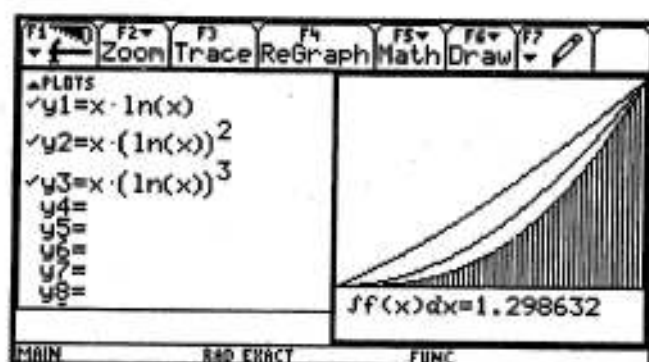
A retenir de ce dernier point de vue :

- on gagne en simplicité à se ramener à des objets mathématiques plus simples (La Palisse dixit...)
 - les formalités de changement de variable dans une intégrale n'ont rien d'évident : ce développement avait pour but de le montrer. De plus, elles ne sont pas au programme de la classe de Terminale.
- A éviter donc !





TP n°16



TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°16

Le but du TP est l'étude de $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, et $I_0 = \int_1^e x dx$

Comme d'habitude, plusieurs méthodes d'approche sont envisageables :

- calcul direct dans le cas général ;
- observation numérique, ou graphique, des premiers termes de cette suite ;
- étude du sens de variation de la suite ;

On pourra aussi, à l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n-1} , et en déduire un encadrement de I_n . On précisera avec soin les différentes pistes empruntées, et les résultats partiels engrangés.

2. Le cadre du travail

Le thème.

Reprise du thème du précédent TP. Mais cette fois-ci la suite d'intégrales n'est pas stationnaire.

La question problématique.

Est-ce qu'une suite positive qui décroît, et se "rapproche" de zéro, converge vers 0 ?

Les objectifs pédagogiques.

Premier objectif. Apprendre à choisir la représentation de l'objet permettant de traiter au mieux une question :

- pour avoir une idée du sens de variation de la suite, il est plus clair d'observer des valeurs approchées que des valeurs exactes ;
- pour comprendre pourquoi elle décroît, il est plus facile d'observer la suite des fonctions $x(\ln x)^n$ entre 1 et e que d'essayer de trouver le terme général de la suite ;
- pour prouver la décroissance de la suite, il est plus facile d'utiliser la linéarité de l'intégrale que d'utiliser la relation de récurrence issue de l'intégration par parties, etc.

Deuxième objectif. Apprendre à combiner égalités et inégalités pour en déduire un encadrement.

Hypothèses de comportement

Contrairement au précédent TP, la calculatrice donne ici les valeurs exactes des termes successifs de la suite. Cela peut inciter les élèves, comme pour le TP 12, à accumuler les résultats exacts pour essayer de trouver une régularité, conjecturer une formule générale exacte pour I_n , et conclure à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Sauf que là, le problème est plus résistant...

On peut penser que, concernant la distinction des objets "intégrale" et "suite", les leçons du précédent TP seront mémorisées, le travail mieux organisé entre les différentes représentations des objets.

Vues et changements de points de vue sur le TP 16

On montrera ici les ressemblances, et les différences de ce problème avec celui traité dans le TP précédent.

Il s'agit donc de calculer $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

Prologue

Indispensable, même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

La fonction f_n , qui à x associe $x(\ln x)^n$, est continue sur $\mathbb{R}$, et donc sur l'intervalle d'intégration $[1, e]$. Donc I_n est définie pour tout n . Mieux, comme entre 1 et e la fonction f_n est positive et que les bornes sont "dans le bon sens", ces intégrales sont toutes positives. Mieux encore, comme la fonction f_n est croissante entre 1 et e (comme produit de deux fonctions croissantes et positives x et $(\ln x)^n$), on dispose de l'inégalité suivante, pour tout x de l'intervalle $[1, e]$:

$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(e)$ c'est à dire : $0 \leq f_n(x) \leq e$.

D'où, par application de l'inégalité de la moyenne, en intégrant f_n entre 0 et 1 :

$0 \leq I_n \leq e \cdot (e - 1)$.

Comme pour le TP 15, ces premières remarques ne sont pas une perte de temps : elles permettent de cadrer et de contrôler partiellement les observations qui vont suivre.

1. Observations numériques

On peut commencer par observer les résultats donnés par la calculatrice.

D'abord en calcul exact :

- donne-t-elle une valeur exacte pour I_n ?
- donne-t-elle une primitive pour f_n ?
- donne-t-elle une valeur exacte pour I_1, I_2, I_3 , c'est à dire pour des valeurs particulières de n ?
- donne-t-elle des primitives pour des valeurs particulières de n ?

En fait, si elle sait calculer la valeur exacte de l'intégrale, c'est qu'elle sait déterminer des primitives...

La calculatrice ne donne pas la valeur de I_n mais par contre elle veut bien donner la valeur exacte de l'intégrale pour des valeurs particulières de n (à la différence de ce qui se passait dans le TP 15)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z
$\int_1^e x \cdot \ln(x) dx$					$\frac{e^2}{4} + 1/4$
$\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2 dx$					$\frac{e^2}{4} - 1/4$
$\int_1^e x \cdot (\ln(x))^{10} dx$					$\frac{1919 \cdot e^2}{8} - \frac{14175}{8}$
$\int (x \cdot (\ln(x))^{10}) \cdot x \cdot 1 \cdot e^{(1)}$					
MAIN ADD EXACT SEQ 5/10					

On a alors deux choix possibles :

- on peut essayer de calculer soi-même les premières intégrales,

- ou alors poursuivre l'observation numérique, et graphique.

Dans le premier cas, on passe directement à la partie 4, dans le deuxième cas, on lit ce qui suit...

On peut émettre la conjecture que la suite u_n est décroissante.

Attention : il s'agit ici de valeurs approchées, et on ne voit là que les premiers termes de la suite...

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
←	Setup	Cell	Header	Plot	Plot	Plot	Plot
$u_1 = \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n$				n	u1		
u1=				0.	3.1945		
u2=				1.	2.09726		
u3=				2.	1.5973		
u4=				3.	1.2986		
u5=				4.	1.0973		
u6=				5.	.95137		
u7=				6.	.84042		
u1(n)=				2.0972640247325			
MAIN				RAB EXACT		SEQ	

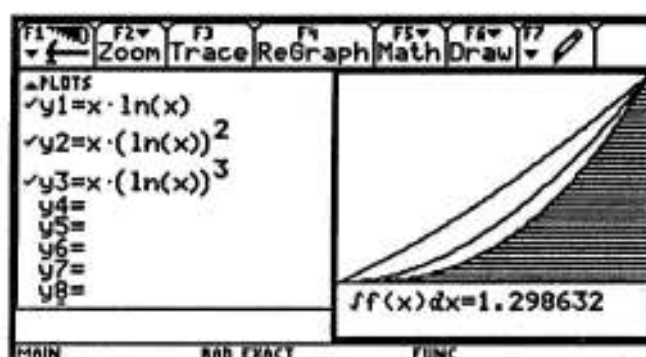
On peut regarder des valeurs de la suite un peu plus loin, mais attention, ces prospections sont très coûteuses en temps...

Les termes de la suite se rapprochent de zéro. De là à dire que la suite converge vers 0, il y a une marge...

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
Setup	Cell	Header	Plot	Plot	Plot	Plot	Plot
$u_1 = \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n$			n	u1			
u1=			0.	3.1945			
u2=			10.	.57483			
u3=			20.	.32244			
u4=			30.	.22431			
u5=			40.	.17202			
u6=			50.	.13951			
u7=			60.	.11734			
u1(n) = .13951377845481							
MAIN		RAB EXACT		SEQ			

2. Observations graphiques

On observe là les représentations graphiques de f_1 , f_2 et f_3 dans une fenêtre liée aux bornes des intégrales, et à la croissance des fonctions : intervalle $[1, e]$ pour les x et pour les y .



L'intégrale de f_3 , fonction positive sur $[1, e]$, correspond à l'aire hachurée. On peut comparer le résultat obtenu avec celui que donne le tableau de valeurs ci-dessus (on sait que l'on dispose d'une précision moins grande dans l'application graphique).

Les courbes des fonctions successives semblent "s'aplatir" sur l'axe des abscisses. Cela s'explique assez facilement : quand x est dans l'intervalle $[1, e]$, $\ln x$ est dans l'intervalle $[0, 1]$. Donc la suite $(\ln x)^n$ est décroissante, et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Et $x(\ln x)^n$ aussi... On a bien, pour x dans $[1, e]$, $f_n(x)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

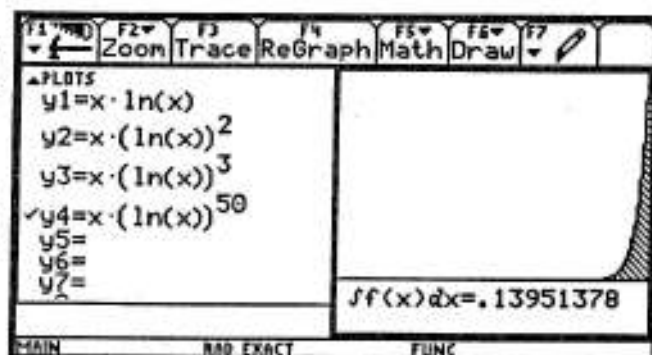
Notons bien que cela ne vaut plus pour $x = e$, car alors $\ln x$ prend la valeur 1, et donc $f_n(e) = e$, quel que soit n .

Cet "applatissage" des fonctions explique la décroissance apparente de la suite d'intégrales.

Pour terminer, un dernier coup d'oeil, "un peu plus loin", pour la fonction f_{50} .

On voit là la représentation graphique de f_{10} , et l'aire hachurée correspondant à l'intégrale I_{10} .

On retrouve bien l'"applatissement" de la courbe sur l'axe des abscisses, avec le point d'accrochage (e, e) .



Dans le cadre d'un TP d'une heure, les observations numériques et/ou graphiques qui précèdent ne doivent pas excéder 15mn. Elles permettent de se faire une petite idée du phénomène étudié. Pour économiser le temps, les deux membres d'un groupe de TP peuvent travailler dans un cadre de complémentarité : l'un observe la suite numérique, l'autre observe la suite de fonctions, et on met en commun les enseignements des deux types d'observation...

On peut maintenant passer à l'étude du sens de variation de la suite I_n (ce qui revient à mettre en forme les remarques émises lors de l'étude graphique), ou passer au calcul des premiers termes de la suite.

3. Sens de variation de la suite.

La linéarité de l'intégration rend commode l'étude du signe de $I_{n+1} - I_n =$

$$\int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x(\ln x)^n dx = \int_1^e x(\ln x) \cdot [\ln x - 1] dx.$$

Comme x est dans l'intervalle $[1, e]$, x et $\ln x$ sont positifs, mais $\ln x$ est inférieur à 1, c'est à dire à 1. Donc la fonction à intégrer est négative. Donc, les bornes étant dans le bon sens, l'intégrale est négative. Ainsi $I_{n+1} - I_n$ est négatif, et la suite des intégrales est bien décroissante.

4. Calcul des intégrales.

Calculer des intégrales suppose, en règle générale, de calculer des primitives...

Voyons ce que donne la calculatrice :

La calculatrice avait donné sans difficulté (observation numérique) les intégrales demandées, en valeur exacte. Elle sait donc calculer les primitives, qui prennent assez vite des formes assez longues.

The screenshot shows a calculator window with the following content:
 Top bar: F1 (left arrow), F2 (Algebra), F3 (Calc), F4 (Other), F5 (PrgmIO), F6 (Clear a-z).
 Main display:
 $\int (x \cdot \ln(x)) dx = \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$
 $\int (x \cdot (\ln(x))^{10}) dx = x^2 \cdot (4 \cdot (\ln(x))^{10} - 20 \cdot (\ln(x))^9 + 90 \cdot (\ln(x))^8 - \dots)$
 Bottom bar: F1 (left arrow), F2 (Algebra), F3 (Calc), F4 (Other), F5 (PrgmIO), F6 (Clear a-z).
 Status bar: "MAIN", "RAD EXACT", "SOL 2/39".

Même si l'énoncé ne l'indiquait pas, on pourrait songer ici à une intégration par parties :

$x(\ln x)^n$ est le produit d'une fonction à primitive simple (x) et d'une fonction à dérivée (relativement) simple : $(\ln x)^n$.

On rappelle que l'intégration par parties s'applique à deux fonctions dérivables, et à dérivées continues, ce qui est bien le cas ici.

Essayons pour $I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx$

$$u' = x \quad u = \frac{x^2}{2}$$

$$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$$

D'où $I_1 = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$. On retrouve bien le résultat de la primitive donnée par la machine, et de l'intégrale trouvée au début du TP.

(Attention, il y a une infinité de primitives, définies à une constante près, pour une fonction continue donnée. On aurait donc pu trouver une primitive "décalée d'une constante" par rapport à la primitive donnée par la calculatrice...)

On peut alors appliquer la même technique d'intégration par parties à $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$

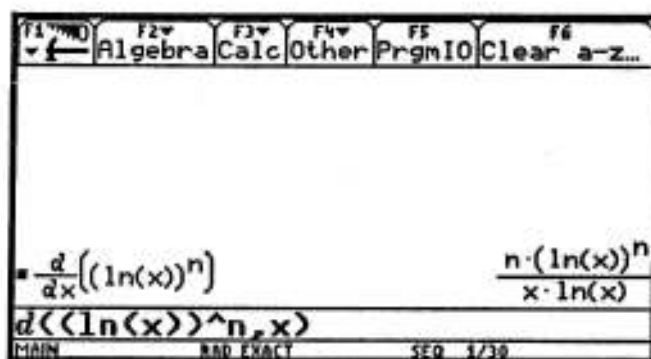
$$u' = x \quad u = \frac{x^2}{2}$$

$$v = (\ln x)^n \quad v' = \frac{1}{x} \cdot n(\ln x)^{n-1}$$

Attention à la dérivée de $(\ln x)^n$: il s'agit de la dérivée d'une fonction composée, de la forme u^n . La dérivée est ("évidemment"...) $nu^{n-1} \cdot u'$.

La calculatrice permet aussi de réaliser les calculs partiels de l'intégration par parties : mais elle ne donne pas forcément la forme attendue !

Il faut savoir interpréter, et réaliser les simplifications nécessaires !



$$D'où \quad I_n = \left[(\ln x)^n \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x(\ln x)^{n-1} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \cdot I_{n-1}.$$

Tous les calculs partiels peuvent être assistés si l'on veut par la calculatrice, mais ce n'est pas forcément indispensable...

On dispose ainsi de la relation $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \cdot I_{n-1}$.

On a donc une relation en cascade, qui nous permet de calculer I_2 à partir de la valeur de I_1 (exacte) déjà calculée :

$$I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1$$

On peut ainsi avoir la valeur exacte des termes successifs de la suite sans avoir besoin de calculer de nouvelles intégrales : il suffit d'appliquer, à répétition, la relation de récurrence.

Mais on a du mal à calculer directement la valeur de I_n , c'est à dire à obtenir le terme général de cette suite, à partir de sa définition par récurrence.

Avant d'exploiter davantage cette relation de récurrence, on peut vérifier rapidement que le résultat trouvé est convenable, en comparant les valeurs prises par cette suite avec celles déjà trouvées pour les premiers termes de I_n .

On a besoin pour rentrer la suite récurrente de calculer son premier terme :

$$I_0 = \int_1^e x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

On retrouve en u1 la forme initiale de la suite étudiée.

On a rentré en u2 la forme récurrente que l'on vient d'établir.

Les résultats concordent bien. Cependant, rappelons nous qu'il s'agit de valeurs approchées (cf le TP 14) : si on fait la différence entre les deux suites au rang 5, il y a déjà un petit écart...

F1 F2 F3 F4 F5 F6 Zoom Exit 1/x 1/y 1/z 1/w									
PLBTS u1 = $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^n \, dx$ u1 = u2 = $\frac{e^2}{2} - \frac{n \cdot u2(n-1)}{2}$ u2 = $\frac{e^2}{2} - 1/2$ u1(n) = f(x*(ln(x))^n, x, 1, e^1)									
MAIN RAD FRAC SEQ F1 F2 F3 F4 F5 F6 Algebra Calc Other PrgmIO Clear a-z									
n	u1	u2							
0.	3.195	3.195							
1.	2.097	2.097							
2.	1.597	1.597							
3.	1.299	1.299							
4.	1.097	1.097							
5.	.9514	.9514							
6.	.8404	.8404							
u1(5) - u2(5)									2.1E-13
u1(5) - u2(5)									
MAIN RAD FRAC SEQ									

5. Où l'on combine égalité et inégalité.

Récapitulons les résultats obtenus jusqu'ici : on dispose d'une relation d'inégalité entre I_n et I_{n-1} (c'est la décroissance de la suite), et d'une relation d'égalité entre I_n et une

fonction de I_{n-1} (c'est celle que l'on vient d'obtenir : $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$).

On a déjà rencontré une situation semblable en cours, à propos de la suite

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} \, dx.$$

En combinant l'égalité et l'inégalité, on va pouvoir obtenir, non pas la valeur exacte du terme général (ce serait trop beau...), mais un encadrement de celui-ci.

On dispose de :

$$I_n \leq I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$$

On peut privilégier I_{n-1} , en remplaçant I_n par sa valeur en fonction de I_{n-1} dans l'inégalité. On obtient alors :

$$\frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1} \leq I_{n-1}, \text{ c'est à dire } \frac{e^2}{n+2} \leq I_{n-1} \text{ (relation 1)}$$

On peut faire le choix inverse, en privilégiant cette fois-ci I_n :

On dispose de :

$$I_n \leq I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n} \cdot I_n$$

On remplace alors I_{n-1} par sa valeur en fonction de I_n dans l'inégalité. On obtient alors :

$$I_n \leq \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n} \cdot I_n, \quad \text{c'est à dire} \quad I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \quad (\text{relation 2}).$$

On veut encadrer I_n . La relation 1 permet d'obtenir, à partir d'un renseignement sur I_{n-1} , un renseignement sur I_n . Il suffit de faire un "glissement d'indice". La formule est vraie pour tout n , donc on peut, à bon droit, remplacer n par $n+1$. La relation 1 devient alors :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n. \quad \text{En combinant avec la relation 2, on obtient bien l'encadrement voulu :}$$

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

Ce résultat nous donne, par application du théorème d'encadrement, la convergence de la suite I_n vers 0.

Il nous donne même plus, puisque l'on dispose d'une estimation de chaque terme de la suite.

6. Vérification, synthèse et défi.

Vérifions d'abord, sur les premiers termes, qu'il n'y a pas d'erreur grossière...

Les trois suites ont été rentrées
"dans l'ordre".

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Edit	All	Style	Axes...		
PLOTS						
u1 = $\frac{e^2}{n+3}$						
u11 = $\int_1^{e^1} (x \cdot (\ln(x))^n) dx$						
u12 =						
u3 = $\frac{e^2}{n+2}$						
u3(n) = $e^2 / (n+2)$						
MAIN RAD EXACT DEG						

On observe bien le rangement des
trois suites dans l'ordre annoncé.
L'écart entre les deux suites
"encadrantes" se resserre :
normal, puisque l'écart est égal à :

$$\frac{e^2}{n+2} - \frac{e^2}{n+3} = \frac{e^2}{n^2 + 5n + 6}.$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Setup	Cell	Hi-Lo	Plot	Font	Int	Font
n	u1	u2	u3			
0.	2.463	3.195	3.695			
1.	1.847	2.097	2.463			
2.	1.478	1.597	1.847			
3.	1.232	1.299	1.478			
4.	1.056	1.097	1.232			
5.	.9236	.9514	1.056			
6.	.821	.8404	.9236			
7.	.7389	.753	.821			
n=0.						
MAIN RAD EXACT DEG						

On peut présenter pour finir le résultat sous la forme d'une estimation, ou d'un encadrement :

- Une estimation :

De l'inégalité $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ on peut tirer, par multiplication par n ,

$n \cdot \frac{e^2}{n+3} \leq n \cdot I_n \leq n \cdot \frac{e^2}{n+2}$. D'où, par nouvelle application du théorème d'encadrement, la convergence de la suite $n \cdot I_n$ vers e^2 . On dit alors que la suite I_n est équivalente, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{e^2}{n}$. Cela nous donne une estimation des termes de la suite pour des grandes valeurs de n .

Ainsi, on peut dire qu'une valeur approchée de I_{1000} est $\frac{e^2}{1000}$. On gagne en simplicité, par rapport à l'encadrement, mais on perd en précision, parce que cela ne nous dit pas quelle est la qualité de l'approximation ;

- Un encadrement :

On peut conserver l'encadrement $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ comme résultat final.

Ce qui donne pour I_{1000} : $\frac{e^2}{1003} \leq I_{1000} \leq \frac{e^2}{1002}$, ou, sous forme décimale ,

$0,007\,366\,955 \leq I_{1000} \leq 0,007\,374\,308$ (attention à la dernière décimale donnée, qui doit être par défaut à gauche, et par excès à droite). On ne connaît donc avec certitude que les 4 premières décimales de I_{1000} : $0,007\,3$.

Terminons par un défi pour le lecteur attentif : on a signalé que la formule de récurrence $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \cdot I_{n-1}$ ne permettait pas d'obtenir facilement une expression du terme général de cette suite.

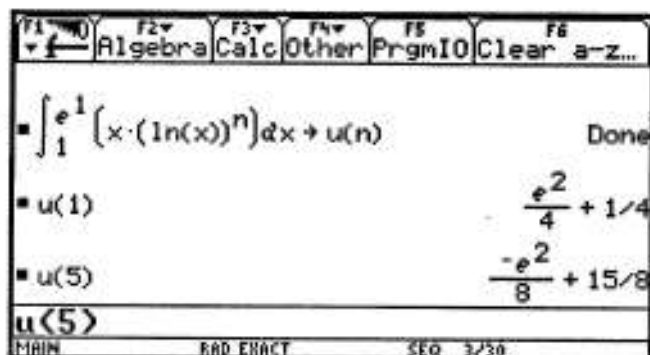
Cependant, la considération de la formule, des premiers terme de la suite, et un raisonnement par récurrence élémentaire, indiquent que I_n est de la forme $a_n + b_n \cdot e^2$, où a_n et b_n sont des rationnels (et même des entiers divisés par des puissances de 2).

En remplaçant I_n et I_{n-1} par cette expression dans la relation de récurrence, on obtient, par identification : $a_n = -\frac{n}{2} \cdot a_{n-1}$, c'est à dire, en écrivant les égalités successives en cascade, $a_n = (-\frac{1}{2})^{n+1} n!$.

Pour b_n , un calcul "en cascade" donne $b_n = \sum_{k=0}^n (-\frac{1}{2})^k \frac{n!}{(n-k)!}$.

Pour la valeur de a_n , c'est bon...
(en tous cas pour les deux termes de la suite calculés en valeur exacte !).

Il reste à trouver une forme plus simple pour b_n .
Question pour amateurs éclairés...



Fin du défi, et donc fin, provisoire, du TP.





TP n°17

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\blacksquare$ solve($e^x = x^{10}, x$) $x = 35.7715206396$ or $x = 1.11832559159$ $\diamond$					
$\blacksquare$ solve($e^x = x^{100}, x$) $e^x - x^{100} = 0$					
$\blacksquare$ solve($e^x = x^{100}, x$) $x = 1.01015271985$ or $x = -.99014738436$					
solve($e^{(x)} = x^{100}, x$)					
MAIN		RAD EXACT		FUNC 3/30	

TP traité avec les TI-92.



1. Le travail donné aux élèves

TP n°17

On se propose ici d'étudier les équations $e^x = x^{10n}$, n étant un entier strictement positif. (la première équation est donc $e^x = x^{10}$, la deuxième est $e^x = x^{20}$, etc.).

1. Combien de solutions a chacune de ces équations ? (prouvez votre réponse !)
2. Pouvez-vous donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut des solutions de la première, de la deuxième, de la troisième, de la dixième équation ?
3. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur le comportement des suites de solutions quand n augmente ?
4. Pouvez-vous démontrer certaines de ces conjectures ?

Ce TP reprend, en les reformulant, les questions posées dans le TP 9 (mais à ce moment là, les élèves ne disposaient pas des TI-92).

2. Le cadre de travail

Le thème

Etude comparée des fonctions exponentielles, puissances, et logarithme.

En fait, c'est le dernier TP d'analyse de l'année, et il recouvre une bonne partie du programme de TS.

Les questions problématiques.

L'énoncé a été choisi pour faire émerger deux questions principales :

- y a-t-il toujours une "grande" solution positive (alors que pour $n = 2$, la calculatrice ne signale plus qu'une solution positive) ? ;
- comment organiser les résultats sous forme de "suites" de solutions (l'énoncé est volontairement vague sur ce point) ?

Les objectifs pédagogiques.

Se familiariser encore et toujours avec les fonctions de référence.

S'entraîner encore et toujours à faire varier les représentations d'un même objet (ici une équation), prendre de la distance avec les résultats "bruts" de la calculatrice (surtout quand ceux-ci sont donnés en calcul approché).

Apprendre à organiser la complexité pour en faire ressortir des régularités (pour le comportement des suites de solution).

Dès la formulation de conjectures, se poser le problème de la preuve, de la collecte de premiers jalons de démonstration.

Les hypothèses de déroulement

Le rapprochement avec le TP 9 peut inciter les élèves à ne traiter la question que sur $\mathbb{R}^+$ (ce qui traduit aussi d'autres difficultés : l'idée qu'une fonction puissance n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, l'idée que le passage aux logarithmes conserve l'ensemble des solutions...). Mais globalement, en fin d'année, le paysage doit sembler familier aux élèves, et l'activité devrait être soutenue...

Vues et changements de points de vue sur le TP 17

Ce TP a un rapport assez proche avec le TP 9 : il s'agissait alors de résoudre l'équation $e^x = x^{10}$ puis l'équation $e^x = x^{50}$. Mais, à cette époque, on ne disposait pas encore des TI 92...

Ces machines constituent-elles un progrès pour la résolution de ce problème ? Ou au contraire induisent-elles des idées fausses ?

En tous cas, elles ne dispensent pas de réfléchir, c'est à dire de prendre du recul sur la question, d'établir des passerelles avec des problèmes déjà traités, de faire référence à des résultats fondamentaux du cours d'analyse.

C'est ce que nous allons voir ici.

Il s'agit ici d'étudier les équations $e^x = x^{10n}$, n étant un entier strictement positif.

Prologue

Indispensable, même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

Il s'agit ici de prendre du recul sur l'énoncé (après l'avoir bien lu...), pour récapituler éléments d'information immédiatement disponibles et stratégies possibles.

* Domaine d'étude. Les deux fonctions en présence sont définies sur $\mathbb{R}$. L'équation doit donc être étudiée sur tout cet intervalle. A l'évidence 0 ne vérifie pas l'équation, donc 0 n'est pas solution.

* Fonctions de référence. La fonction exponentielle est bien connue (vous devez l'avoir en tête, avec tous ses attributs). La fonction qui à x associe x^{10n} est une fonction puissance d'exposant entier et pair. Cette fonction est donc paire (sa représentation graphique est aussi parfaitement connue).

* Stratégies. On ne peut pas résoudre cette équation par factorisation, ou par d'autres procédés algébriques. On doit donc étudier des fonctions, et pour cela, on a beaucoup de choix possibles (voir TP 9) : transformer les fonctions en présence, les soustraire pour n'en avoir qu'une seule, et étudier les circonstances où celle-ci s'annule...

* Théorèmes de référence. Il s'agit de comparer ici des fonctions puissances et la fonction exponentielle. On sait que l'on dispose d'un théorème fondamental à ce sujet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Après avoir fait le point, c'est à dire situé le TP dans un contexte (et pour un problème de bac il faudra faire pareil...), on peut rentrer dans le vif du sujet.

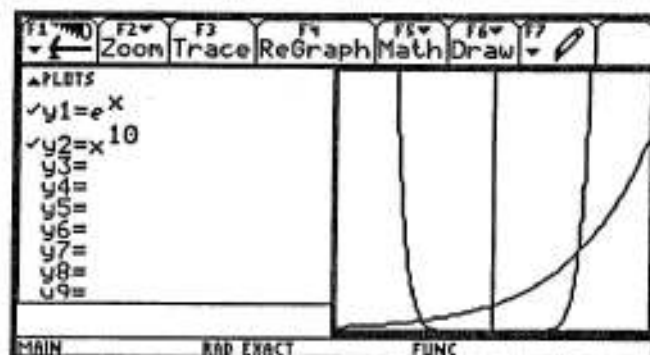
1. Voir

Cette partie n'est pas indispensable. On peut passer directement à l'étude théorique. Mais il me semble que, à condition de ne pas y passer trop de temps, ce peut être utile pour croiser les informations obtenues avec les souvenirs et les références évoquées ci-dessus.

On va considérer les premières équations, avec un point de vue graphique, et un point de vue algébrique : on rappelle que, s'agissant de résolution d'équations, on dispose de plus de précision dans l'application initiale que dans l'application graphique.

Première équation : $e^x = x^{10}$

On retrouve sans surprise les courbes de référence de la fonction exponentielle et de la fonction puissance. Deux solutions de l'équation apparaissent à l'évidence. Malgré les apparences, on sait, pour des raisons de limite, que la fonction exponentielle va "repasser au dessus de la fonction puissance", ce qui donnera nécessairement une troisième solution.



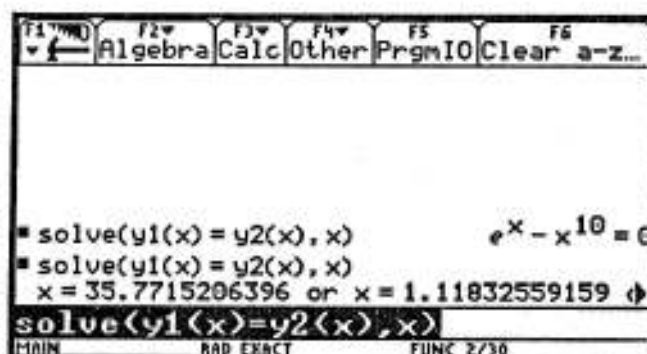
La troisième solution attendue peut être obtenue ici :

- par retour à l'application initiale ;
- par modification du point de vue graphique.

Commençons par le recours à l'application initiale :

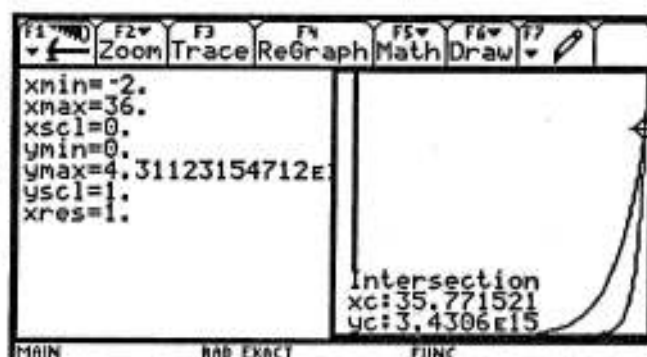
Evidemment, si on demande une résolution exacte, la machine avoue son impuissance, et retourne l'équation elle-même.

Si on demande des valeurs approchées des solutions, la machine en renvoie bien trois (la flèche en bout de ligne indique la troisième solution, qui est la solution négative.

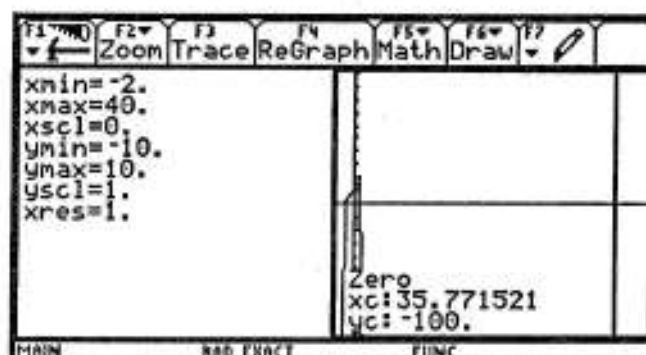


On peut aussi modifier soit la fenêtre, soit les fonctions, soit l'équation, pour faire apparaître la troisième solution :

On a gardé les mêmes fonctions en Y1 et Y2. Mais on a changé la fenêtre (en utilisant les résultats donnés par l'application initiale...). La troisième solution apparaît bien, mais les deux autres, pourtant présentes sur l'écran, sont indiscernables...

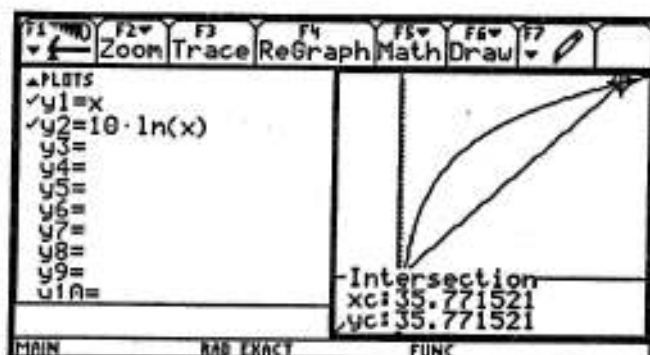


On a placé en Y1 la différence entre la fonction exponentielle et la fonction puissance. Apparaissent bien là les trois solutions, à l'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses. Mais les pentes sont très brutales, ce qui donne des écarts importants : l'application graphique donne une valeur approchée de la troisième solution avec comme image 100 !



On peut modifier enfin les fonctions en présence, par passage au logarithme. Mais attention, on perd là les solutions négatives !

On retrouve là les deux solutions strictement positives, avec une fenêtre plus modeste, et des fonctions à "croissances raisonnables". Mais on perd la solution négative...

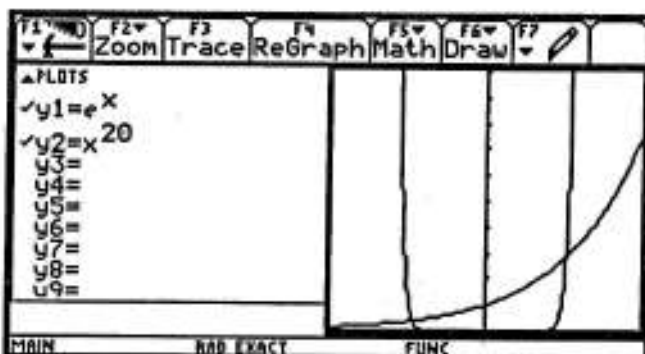


Tous ces points de vue, dans un TP, n'ont pas à être systématiquement exploités. Cela prendrait trop de temps... Mais il est bon de les avoir en tête, pour pouvoir choisir celui qui est le plus commode, ou le plus pertinent. On va voir dans ce qui suit que la sélection du point de vue pertinent est souvent décisive...

Deuxième équation : $e^x = x^{20}$

La panorama n'a pas changé. On note que la fonction puissance "s'applatit" davantage sur l'axe des abscisses au voisinage de zéro.

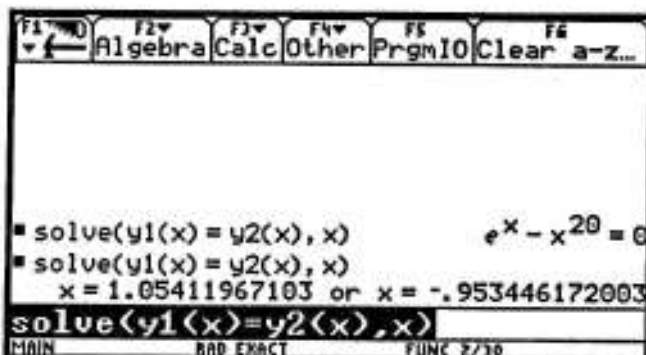
Mais il n'y a pas de raison pour laquelle le nombre de solutions devrait changer...



Pour faire apparaître la troisième solution, on peut procéder comme pour la première équation.

Surprise ! La machine ne donne plus que les deux solutions "évidentes" en valeur approchée.

N'y aurait-il plus de troisième solution ?



On est là à un moment tout à fait crucial de l'utilisation d'un outil de calcul. C'est là que la croisément avec les résultats de référence est décisif. Il y a nécessairement une troisième solution, pour cause de théorème de comparaison des fonctions exponentielles et des fonctions puissances. La machine ne donne pas la valeur approchée de cette solution, probablement pour cause de dépassement de capacité de calcul...

Dans cette situation, on a trois possibilités :

- on peut reformuler la question, pour la calculatrice, dans le même cadre ;
- on peut formuler la même question, pour la calculatrice, dans un autre cadre ;
- on peut laisser la machine, et faire un calcul "à la main".

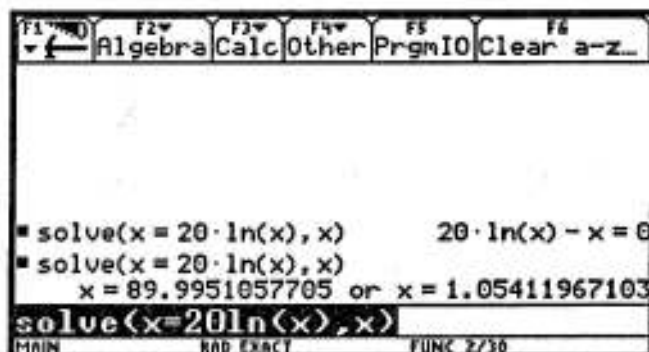
En fait, la coupure entre ces trois stratégies n'est pas nette : reformuler la question implique bien de réfléchir, c'est à dire de faire un détour théorique...

Passons cependant en revue ces diverses stratégies :

- on peut reformuler la question, en restant dans l'application initiale. Il nous manque une solution strictement positive, donc on peut passer aux logarithmes. L'équation devient alors $x = 20 \ln x$.

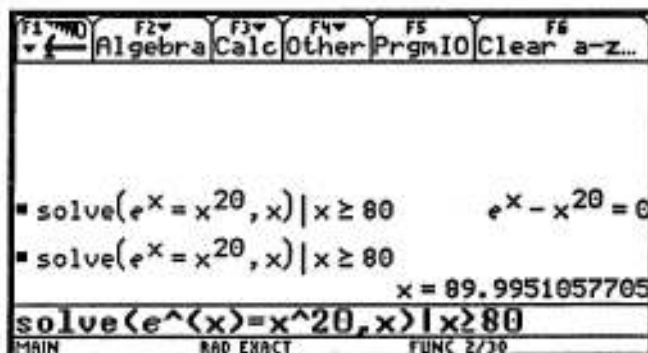
A nouveau refus de répondre en valeur exacte.

En valeur approchée, par contre, on retrouve la "petite" solution positive déjà trouvée, et la "grande" qui nous manquait....



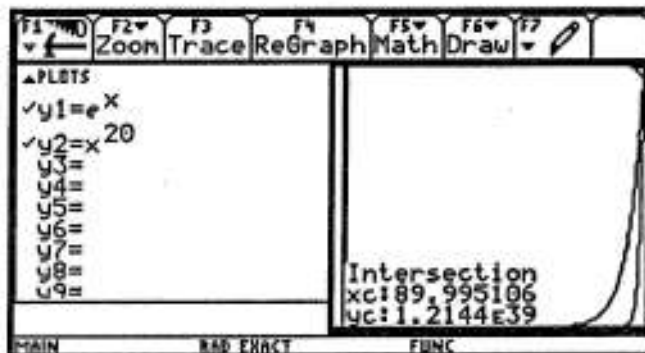
Cette valeur approchée de la troisième solution nous permet alors de reformuler la même question que tout à l'heure, mais en la précisant :

En précisant que l'on recherche les racines supérieures à 80, les algorithmes de recherche activés par la calculatrice sont sans doute plus performants : la preuve, ils détectent bien la solution recherchée.



- deuxième stratégie : poser la même question à la calculatrice, mais dans un autre cadre, par exemple le cadre graphique.

La calculatrice donne dans le cadre graphique la troisième solution. Mais, ne rêvons pas : si elle le fait, c'est parce que la bonne fenêtre a été sélectionnée, et cela a été fait parce que on avait déjà une petite idée de l'intervalle dans lequel se trouvait la solution manquante...



Ainsi, ce qui permet d'obtenir les bonnes réponses de la machine, c'est la faculté de poser les bonnes questions. Et cette faculté découle de la maîtrise du cadre théorique.

On en arrive donc tout naturellement à la troisième stratégie, de contrôle théorique des opérations.

2. Prouver

On va vite, parce que cela a été déjà vu (cf TP 9 et 10).

On peut étudier l'équation sous la forme $f_n(x) = e^x - x^{10n} = 0$.

On dispose de $f_n'(x) = e^x - 10nx^{10n-1}$. Sur $\mathbb{R}^-$, cette dérivée est strictement positive (somme d'un réel strictement positif et d'un réel positif). La fonction f_n est donc croissante strictement sur cet intervalle. Comme elle est aussi continue, la restriction de f_n à $\mathbb{R}^-$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f_n(\mathbb{R}^-) =]-\infty, 1]$. La fonction s'annule donc une fois et une seule en un point que l'on va appeler a_n . On peut même localiser plus précisément ce nombre :

$f_n(-1) = e - 1$, qui est strictement négatif ;

$f_n(0) = 1$, qui est strictement positif (!).

Donc la fonction s'annule en un point a_n compris strictement entre -1 et 0.

Sur $\mathbb{R}^+$, c'est un peu plus compliqué, parce que la dérivée de f_n n'a pas un signe constant, et qu'il est assez délicat d'étudier ce signe. Qu'à cela ne tienne, puisque on est sur $\mathbb{R}^+$ (et même sur $\mathbb{R}^{+*}$: 0 n'est pas racine...), on peut user du logarithme. L'équation $e^x = x^{10n}$ devient sur cet intervalle $x = 10n \cdot \ln x$.

Comme il est plus commode d'étudier une fonction que deux fonctions (bis repetita...), on va étudier la fonction $g_n(x) = x - 10n \cdot \ln x$. On a sans peine :

$g_n'(x) = 1 - 10 \frac{n}{x} = \frac{x - 10n}{x}$. Cette dérivée est du signe de $x - 10n$.

Elle s'annule pour $x = 10n$. La dérivée (fonction affine croissante) est donc strictement négative sur $]0, 10n[$, et strictement positive sur $]10n, +\infty[$. La fonction admet donc un minimum global égal à $g_n(10n) = 10n(1 - \ln 10n)$. Ce minimum global est strictement négatif (on rappelle que n est un entier supérieur à 1).

Enfin la limite de la fonction en 0 est $+\infty$ (aucune indétermination).

La limite en $+\infty$ pose un petit problème. Pour le résoudre, il suffit de mettre x en facteur. On a alors $g_n(x) = x(1 - 10n \frac{\ln x}{x})$. Quand x tend vers $+\infty$, la fonction tend vers $+\infty$ (chacun connaît la limite de $\frac{\ln x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$...)

Remarque : tout ceci a été fait sans faire appel à la calculatrice. Les calculs sont en fait suffisamment simple pour pouvoir être faits directement.

On peut simplement jeter un coup d'oeil sur la machine pour contrôler les résultats. Mais, comme on le verra ci-dessous, les choses ne sont pas toujours aussi simples qu'on l'imaginerait...

Tous ces résultats, assez élémentaires, sont donnés par la calculatrice sans peine... sauf la limite en 0. Pourquoi ?

Il faut préciser en effet à la machine que n est strictement positif (si n était négatif, la limite serait $-\infty$).

Le logiciel est impitoyable : il exige une précision de tous les instants. !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z
x					
y1(10·n)					
-10·n·(ln(10·n) - 1)					
lim y1(x)					
x→∞					
lim (x - 10·n·ln(x))					
x→0+					
lim (x - 10·n·ln(x)) n > 0					
x→0+					
limit(x-10n*ln(x),x,0,1) n>0					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 6/30			

On synthétise les résultats, dans un tableau de variations :

x	0	b_n	$10n$	c_n	$+\infty$
g'_n			0		
g_n		$+\infty$	$10n(1 - \ln 10n)$	$+\infty$	

En appliquant le théorème de la bijection à la restriction de la fonction aux intervalles $]0, 10n[$ et $]10n, +\infty[$, on retrouve bien les deux autres racines de l'équation b_n et c_n .

Localisation de ces racines :

- $g_n(1) = 1$, donc b_n est compris entre 1 et $10n$;
- c_n est plus grand que $10n$.

3. (Re) voir.

On demande dans l'énoncé d'étudier l'évolution des solutions des équations successives. On dispose avec la calculatrice de valeurs approchées, que l'on va relever, comme demandé par l'énoncé, avec une précision de 10^{-5} près par défaut (attention au sens de l'arrondi, suivant qu'il s'agit d'un nombre négatif, ou positif...)

La calculatrice ne donne les valeurs approchées des trois solutions que pour la première équation.

Pour les suivantes, comme on l'a déjà vu, la calculatrice ne donne que les valeurs approchées des deux plus petites solutions.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
x = 35.7715206396 or x = 1.11832559159					
■ solve($e^x = x^{20}$, x)					
x = 1.05411967103 or x = -.953446172003					
■ solve($e^x = x^{30}$, x)					
x = 1.03510567451 or x = -.968240583308					
■ solve($e^x = x^{100}$, x)					
x = 1.01015271985 or x = -.99014738436					
solve($e^x = x^{100}$, x)					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 4/30			

Comme on l'a déjà fait dans le premier paragraphe, pour la plus grande solution, qui est positive, changement de point de vu, et passage aux logarithmes.

Cela nous permet au passage de croiser les résultats avec les résultats obtenus précédemment pour la valeur approchée de la racine b_n , obtenue par les deux méthodes..

Cela correspond bien...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
■ solve(x - 10·ln(x) = 0, x)					
x = 35.7715206396 or x = 1.11832559159					
■ solve(x - 20·ln(x) = 0, x)					
x = 89.9951057705 or x = 1.05411967103					
■ solve(x - 30·ln(x) = 0, x)					
x = 150.398691301 or x = 1.03510567451					
■ solve(x - 100·ln(x) = 0, x)					
x = 647.277512439 or x = 1.01015271985					
solve(x - 100ln(x) = 0, x)					
MAIN	RAD EXACT	FUNC 4/30			

Cela pose d'ailleurs un petit problème : peut-on se fier aux valeurs approchées données par la calculatrice ? Le problème est complexe, en l'absence de connaissance de l'algorithme de calcul implanté dans la machine.

Disons que, quand il y a concordance entre l'étude théorique (on sait qu'il y a trois racines, et on les a localisées) et les données de la machine, on peut estimer que les valeurs approchées sont convenables, avec deux réserves :

- prudence sur la dernière décimale, qui résulte nécessairement d'un arrondi, ou d'une troncature ;
- prudence si on fait un calcul à partir d'une valeur approchée ; on a vu dans le TP 14 qu'il pouvait y avoir un effet boule de neige du calcul approché : ce n'est plus alors la dernière décimale qui est la seule suspecte, mais toutes les décimales !

Equation	Valeur appr. de a_n	Valeur appr. de b_n	Valeur appr. de c_n
$e^x = x^{10}$	- 0, 912 77	1, 118 32	35, 771 52
$e^x = x^{20}$	- 0, 953 45	1, 054 11	89, 995 10
$e^x = x^{30}$	- 0, 968 25	1, 035 10	150, 398 69
$e^x = x^{100}$	- 0, 990 12	1, 010 15	647, 277 51

Valeurs approchées des solutions, à 10^{-5} près par défaut.

Remarque 1 : ce n'est pas parce que ce sont des valeurs approchées qu'elles doivent être relevées... approximativement ! On doit les noter en donnant le degré de précision, c'est à dire en fait un encadrement de chacune des solutions ;

Remarque 2 : si on veut pouvoir formuler des conjectures, il faut présenter les résultats sous forme claire et ordonnée (rappelez-vous le TP n°12 sur le calcul des dérivées successives d'une fonction !).

4. Conjecturer.

Pas facile, de conjecturer un résultat général à partir de l'observation... C'est plus simple de répondre à la question "montrer que...". Et pourtant, l'activité mathématique (et scientifique en général) c'est souvent cela : trouver des régularités, une loi générale, trouver un ordre dans le désordre. Ce n'est pas facile, mais il y a un principe à respecter, et qui aide bien :

Il faut considérer tout résultat dans son contexte, c'est à dire

1. "enveloppé" de toutes les propriétés qui ont été déjà établies :

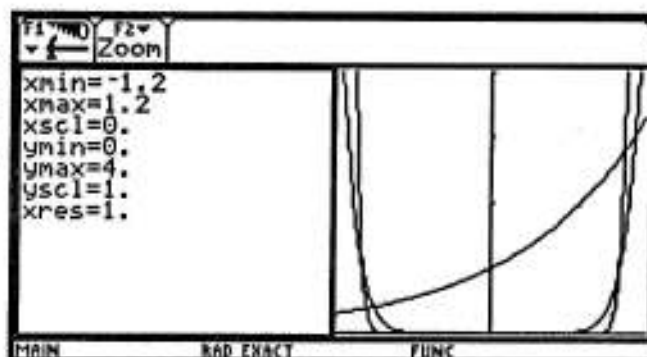
- pour a_n : $-1 \leq a_n \leq 0$
- pour b_n : $1 \leq b_n \leq 10n$
- pour c_n : $10n \leq c_n$.

2. enrichi si possible de plusieurs points de vue :

Le tableau ci-dessus donne un point de vue numérique (succession de valeurs approchées. Mais on dispose aussi d'un point de vue graphique :

On n'a choisi ici de ne visualiser que les deux premières racines, en traçant la courbe de la fonction exponentielle, et les courbes des fonctions puissances x^{10} et x^{30} .

On "voit" donc a_1 et b_1 , a_3 et b_3



Il faut alors synthétiser les différentes informations. La confrontation du tableau numérique, des encadrements, et du graphique indiquent (après réflexion, bien sûr...) :

- la suite a_n semble décroissante, et converger vers -1 ;
- la suite b_n semble décroissante, et converger vers 1 ;
- la suite c_n semble croissante, et tendre vers $+\infty$.

Ces résultats ne sont pour le moment que simples conjectures... mais en fait, bien souvent, on sent qu'ils sont vrais parce que l'on sait pourquoi ils sont vrais. C'est à dire que la conjecture est parfois très proche de la preuve.

Ainsi, pourquoi annonce-t-on que la suite c_n semble diverger vers $+\infty$?

Parce que les valeurs prises deviennent de plus en plus grandes ? Ce serait une mauvaise raison : une suite peut être strictement croissante, sans avoir pour limite $+\infty$!

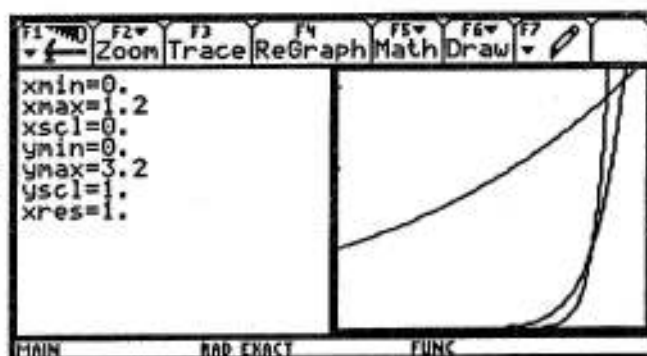
La raison qui arrache la conviction, c'est que c_n est minorée par $10n$. Et $10n$ tend bien vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$... Par application du théorème d'encadrement, on peut affirmer que c_n diverge vers $+\infty$. La preuve est faite. Il reste à prouver le reste.

5. (Re) prouver.

Commençons par le sens de variation des trois suites.

- Pour la suite b_n

On a représenté ici la fonction exponentielle, et les fonctions puissances x^{10} et x^{20} , sur un intervalle qui permette de visualiser b_1 et b_2 .



Observons ce qui se passe sur le graphique ci-dessus, à la lumière de nos connaissances générales.

Les deux courbes des fonctions puissances se croisent au point (1, 1). Après ce point, c'est la fonction puissance d'exposant le plus grand qui prend le dessus. C'est donc elle qui rencontrera la première la courbe de la fonction exponentielle. Donc $b_2 < b_1$.

Est-ce une démonstration rigoureuse ? Presque... Tout y est, il suffit de mettre en forme:

- b_2 est l'abscisse du point où la courbe de la fonction x^{20} rencontre pour la première fois la courbe de la fonction exponentielle après 1. On a donc $e^{b_2} = b_2^{20}$.
- b_1 est l'abscisse du point où la courbe de la fonction x^{10} rencontre pour la première fois la courbe de la fonction exponentielle après 1. On a donc $e^{b_1} = b_1^{10}$.
- pour tout x de l'intervalle $]1, b_2[$, on a $x^{10} < x^{20} < e^x$.

Donc on ne peut pas avoir $x^{10} = e^x$. Donc b_1 n'appartient pas à cet intervalle. Comme est supérieur à 1, on a nécessairement b_1 supérieur à b_2 .

Ce qui a été fait pour b_1 et b_2 pourrait tout aussi bien être fait pour deux termes successifs de cette suite. Cette suite est donc décroissante.

- pour les suites a_n et c_n .

On démontrerait par des méthodes analogues que la première suite est décroissante, et la deuxième suite est croissante. Démonstration laissée au lecteur.

6. Aller plus loin (facultatif).

Les lignes qui suivent pour ceux qui ont bien assimilé ce qui précède, et qui veulent aller plus loin, c'est à dire avoir la preuve de l'ensemble des conjectures.
Pour ceux qui sont un peu fatigués (fatigue légitime, s'ils ont repris tout le TP stylo en main, et machine en action), passer directement au paragraphe 7...

Il reste donc à étudier le comportement de ces suites à l'infini.

On a déjà démontré que la suite c_n tendait vers $+\infty$. Quid des deux autres suites ?

Alors que la chose se "voit" assez bien (quand l'exposant augmente, la courbe de la fonction puissance ressemble de plus en plus à la lettre U ; à la limite, les intersections avec la courbe de la fonction exponentielle vont se faire à "la verticale" de -1 et 1), une preuve rigoureuse est difficile à construire, faute d'outil théorique adéquat...

Méthode 1

On a en effet besoin d'avoir recours à un théorème, important, mais qui n'est pas au programme de la TS (option bio). Ce théorème (au programme seulement de l'option math en TS) dit que :

Si une suite est décroissante, et minorée par A, alors elle converge vers un réel supérieur ou égal à A. (de même, si une suite est croissante, et majorée par A, elle converge vers un réel inférieur ou égal à A).

On sait que la suite b_n est décroissante, et minorée par 1. Donc la suite converge vers un réel b , supérieur ou égal à 1.

On aimerait bien que ce soit 1... Imaginons ce qui se passerait si b était strictement supérieur à 1. On a $e^{b_n} = b_n^{10^n}$. Que se passe-t-il quand n tend vers $+\infty$?

* e^{b_n} tend vers e^b ;

* comme la suite est décroissante, $b_n \geq b > 1$

donc $b_n^{10^n} \geq b^{10^n}$. Mais b^{10^n} est une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1. Donc elle diverge vers $+\infty$, et par conséquent, $b_n^{10^n}$ tend aussi vers $+\infty$.

Résumons nous : si b est supérieur strictement à 1, alors e^{b_n} tend vers e^b , et $b_n^{10^n}$ tend vers $+\infty$. Or ces deux suites sont égales ! C'est donc parfaitement impossible.

Ainsi b ne peut pas être strictement supérieur à 1. Comme on savait que b était supérieur à 1, la seule possibilité est que b soit égal à 1.

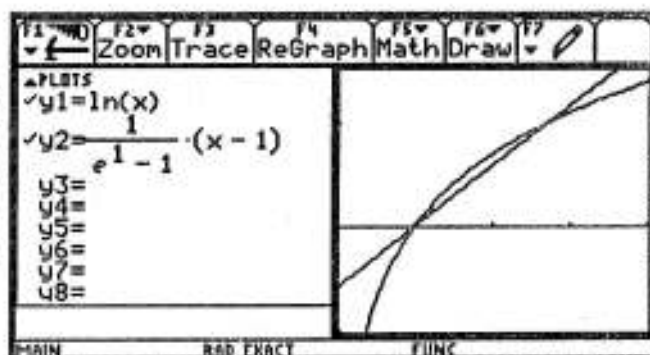
Méthode 2 (idée de Christian Faure).

En fait, on peut se dispenser du théorème évoqué ci-dessus, et de la démonstration un peu délicate qui l'accompagne. Comment ? Par une stratégie d'encadrement, "bien sûr" ! Et un recours, encore, aux fonctions, et configurations, de référence.

Il est clair que b_n est dans l'intervalle $]1, e[$. De l'équation, $e^{b_n} = b_n^{10^n}$ on se ramène à

$$b_n = 10^n \ln b_n, \text{ et enfin } \frac{b_n}{\ln b_n} = 10^n.$$

Une démonstration élémentaire
(par étude de la différence des
deux fonctions par exemple),
s'appuyant sur des considérations
graphiques élémentaires,
montre(rail) que : pour tout x de
 $]1, e[$, $\ln x < \frac{1}{e-1}(x-1)$.



D'où l'inégalité $\frac{x}{\ln x} < \frac{(e-1)x}{x-1}$.

On récupère alors l'égalité qui définit la suite $\frac{b_n}{\ln b_n} = 10n$.

D'où $10n < \frac{(e-1)b_n}{b_n-1}$. On en tire sans peine $b_n < \frac{10n}{10n-e-1}$.

Pour finir, on a la double inégalité $1 < b_n < \frac{10n}{10n-e-1}$.

Ce qui permet de conclure, quand n tend vers l'infini...

On prouverait, en s'inspirant d'une des deux méthodes qui précède, que la suite a_n converge vers -1 .

Fin de la démonstration, et repos.

7. Revenir sur les lieux du crime.

On pourrait se poser la question : pourquoi avoir choisi d'étudier l'équation $e^x = x^{10n}$, et pas l'équation plus simple $e^x = x^n$, avec un exposant entier positif ?

Poser la question, c'est y répondre :

- que se passerait-il si l'exposant était impair ? On n'aurait pas de racine négative à l'équation ! (voir le TP 9)

- que se passerait-il si l'exposant était inférieur à 3 ? On n'aurait qu'une racine positive à l'équation ! (voir le TP 10)

Le fait de prendre des exposants multiples de 10 supprime ces cas particuliers. On a ainsi toujours 3 solutions... De plus, prendre des exposants qui vont de 10 en 10 permet de coïncider rapidement la machine : dès l'exposant 20, elle ne "voit" plus la racine la plus grande, ce qui oblige à un effort de réflexion supplémentaire.

Bref, aucun sujet n'est innocent, en TP, comme au bac. L'essentiel est de rester vigilant, et de mobiliser ses connaissances, et son agilité d'esprit !

Une occupation utile de l'espace restant : les 1000 premières décimales de $\sin 2$.

0.90929742682568169539601986591174484270225497144789026837897301153096730154078354462
012668892495938030996789674239948626128095310867532812027002033974677378284837931019
696699774984357047516517548098734245516884866266599397842058560483528737652460663019
429655921188458358194895013349986918835827100625452967334980513265003744042450761680
167910319685805146878857325993342565353067756813595608309664941346792028203582117791
184044147624387895428254325020151094098796588868215365498624677527558174517358463926
297917475386198690514589488689421613422054069260859968356260178396578495986517540826
129790113102390083830540763013919155878945205362018674218942488913945903005547182653
405449969852773826454207701979904056481309757254275250297051053708077926458363633571
390527727830417140072121068750111036588845280430877918465503297783733292205439285115
781268862136402969896931347618369159044482892413606257372293773002107399646656931854
692344622970251538992566676464480731096997241756480639840744876671096269



TP n°18

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...

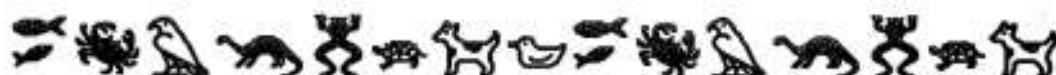
$$z(2) = \frac{5 \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1))}{4 \cdot \sqrt{2}} + 5/4 \cdot i$$

$$z(2) = e^{i \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)} \right)} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{(\sqrt{2} + 2)}}{2}$$

z(2)

MAIN RAD EXACT FUNC 3/30

Dernier TP de l'année, traité avec TI-92



1. Le travail donné aux élèves

TP n°18

On considère la suite complexe définie par :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) \quad (\text{où } |z_n| \text{ représente le module de } z_n)$$

$$z_0 = 5 + 5i$$

Etudier l'évolution de cette suite.

Notations : on appellera x_n et y_n les parties réelles et imaginaires de z_n , r_n et a_n le module et l'argument principal de z_n , et M_n l'image de z_n (M_n a donc pour coordonnées x_n et y_n).

Indication :

- on peut représenter graphiquement la suite des points M_n , en utilisant le fichier de suites. On rentre en u1 la suite x_n , en u2 la suite y_n . Dans le Menu F7 (Axes), on choisit CUSTOM, et on sélectionne pour X Axis : u1, et pour Y Axis : u2.

Ainsi, en graphique, apparaîtront les points de coordonnées x_n et y_n , c'est à dire les points M_n . Et on trouvera, dans la table de valeurs, les valeurs approchées des termes successifs des suites (x_n) et (y_n) ;

- on peut aussi travailler en mode exact, en restant dans l'application initiale, avec la syntaxe : $\text{When}(n=0, z_0, \frac{1}{2}(z(n-1) + |z(n-1)|)) \text{ STO } z(n)$

2. Le cadre de travail

Le thème.

Les complexes, et les suites.

La question problématique.

Quelles sont les méthodes d'étude qui peuvent être transférées des réels aux complexes?

Les objectifs pédagogiques

Faire jouer à propos des complexes (qui s'y prêtent bien) toute la panoplie des changements de représentation :

- forme algébrique, ou exponentielle ;
- observation numérique, ou graphique ;
- travail en calcul exact, ou calcul approché.

Apprendre à trier l'information, et à faire des choix de démonstration ("qu'est-ce-que je peux démontrer à peu de frais, en quoi cela me servira-t-il pour la suite...")

Les hypothèses de déroulement

Ce TP arrive en fin d'année, et son abord n'est pas immédiat. Pour obtenir une information de la TI-92, il faut d'abord faire un effort de reformulation :

extraire partie réelle et partie imaginaire, pour utiliser le fichier de suite (mais on disposera alors de deux suites "entre-mêlées" ;

-ou programmer la suite dans l'application initiale, ce qui n'est pas "naturel" pour les élèves.

Relancer l'activité ne sera peut-être pas inutile...

Vues et changements de points de vue sur le TP 18

Premier TP sur les complexes, et dernier TP de l'année...

Avec les complexes, on dispose d'un terrain pour lequel les changements de points de vue sont nombreux.

Raison de plus pour trier l'information, prendre du recul, aller à l'essentiel...

Il s'agit ici d'étudier ici la suite :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|) \quad (\text{où } |z_n| \text{ représente le module de } z_n)$$

$$z_0 = 5 + 5i$$

Prologue

On peut commencer par prendre un peu de recul "géométrique", pour situer les différents éléments du problème, et surtout comprendre comment se fait le passage d'un terme de la suite au suivant.

On voit dans le schéma ci-dessous (en repère orthonormé), le point M_n d'affixe z_n , avec les différents attributs de ce complexe (partie réelle et imaginaire, module et argument).

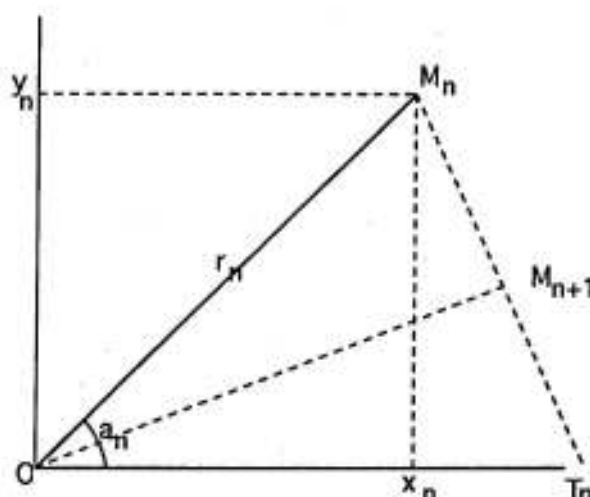


Schéma n°1

Où est M_{n+1} , l'image de z_{n+1} ? On dispose de la relation $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$, qui traduit le fait que M_{n+1} est le milieu de M_n et du point T_n , image de $|z_n|$.

Où est ce point T_n ? Il a pour affixe $|z_n|$, qui est un réel positif. Donc ce point est sur l'axe des abscisses, et son abscisse est égale au module de M_n , c'est à dire à r_n . T_n est donc sur le cercle de centre O passant par M_n .

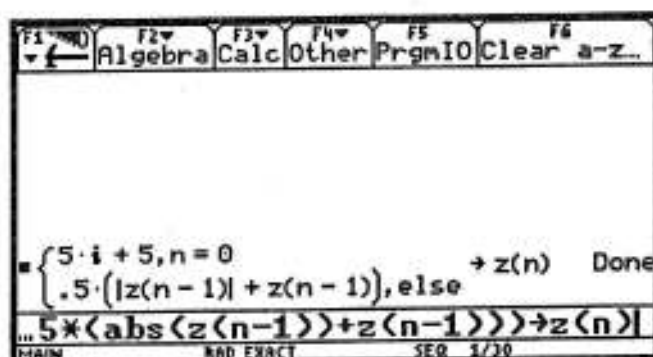
On remarquera que le triangle $OM_n T_n$ est isocèle. M_{n+1} étant le milieu de $M_n T_n$, la droite OM_{n+1} , médiane, est aussi hauteur de ce triangle.

On peut ne pas voir tout cela tout de suite, mais, comme d'habitude, il n'est pas inutile de réfléchir au cadre général du problème avant de passer à des observations plus partielles. C'est le cadre général de passage d'un terme à l'autre qui va permettre d'ailleurs de donner un sens aux observations partielles qui vont suivre.

1. Quand la même suite prend deux formes différentes

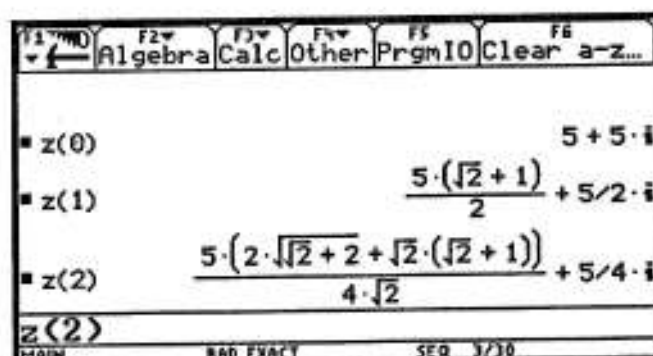
On peut commencer par programmer la suite en calcul exact.

On a utilisé la notation $z(n)$ pour définir la suite. On aurait évidemment pu avoir recours à n'importe quelle autre lettre. Mais enfin, s'agissant de complexes, autant garder les notations de l'énoncé...



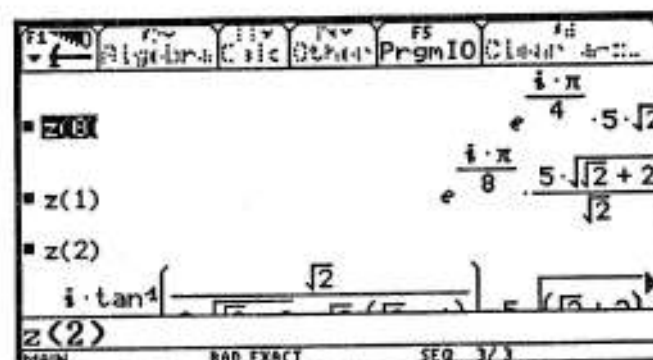
On va pouvoir alors avoir les premières valeurs de la suite, sous forme algébrique, ou exponentielle, suivant le mode choisi.

En mode Rectangular, on obtient l'écriture algébrique des termes successifs. La partie imaginaire reste raisonnable. Mais l'expression de la partie réelle enflé vite, et les calculs deviennent vite longs.



Chaque observation doit être accompagnée d'une petite réflexion : il semble bien que la partie imaginaire est à chaque fois divisée par deux, c'est à dire que l'on aurait là une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Est-ce normal ? Un petit coup d'oeil au schéma 1 devrait donner une réponse à cette question...
Passons au mode Polar, pour avoir l'expression exponentielle des termes successifs de la suite :

Pour $z(0)$ et $z(1)$, les résultats sont à peu près simples. On remarque au passage que l'argument principal de $5 + 5i$ est $\frac{\pi}{4}$, ce qui se conçoit assez facilement. Cela se complique pour $z(2)$. Retrouve-t-on trace des résultats supposés sous la forme algébrique ?



L'argument de $z(1)$ est la moitié de celui de $z(0)$. Pour $z(2)$, l'expression de l'argument n'est pas particulièrement transparente...

Avant d'aller plus loin, retour au schéma de départ, que l'on va compléter un peu.

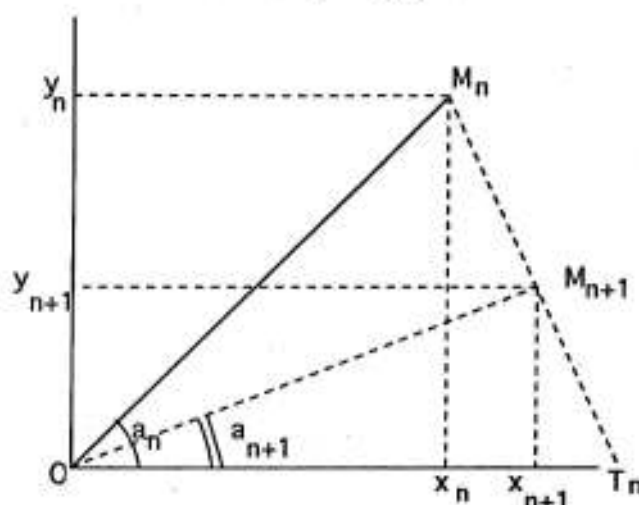


Schéma 2

Le triangle OM_nT_n est isocèle, et M_{n+1} est le milieu de M_nT_n .
Pour des raisons géométriques élémentaires :

* $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$ (Théorème de Thalès, sur la projection des milieux) ;

* $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$ (Dans un triangle isocèle, la médiane principale est aussi bissectrice).

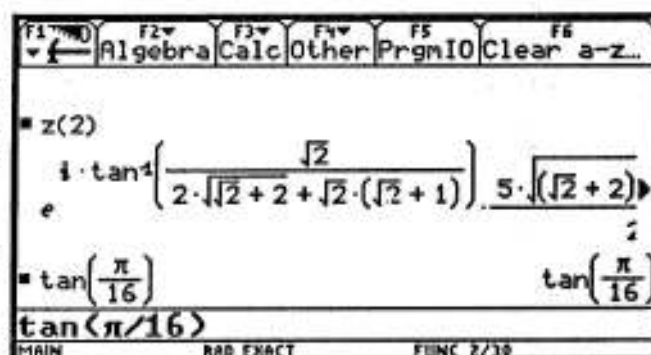
La suite des parties imaginaires est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Et la suite

des arguments principaux aussi. Ce qui fait que l'argument principal de z_2 est $\frac{\pi}{16}$.

Or la calculatrice ne nous a pas donné ce résultat :

La machine nous donne pour argument de $z(2)$ un angle dont la tangente est égale à (lire l'écran ci-contre !).

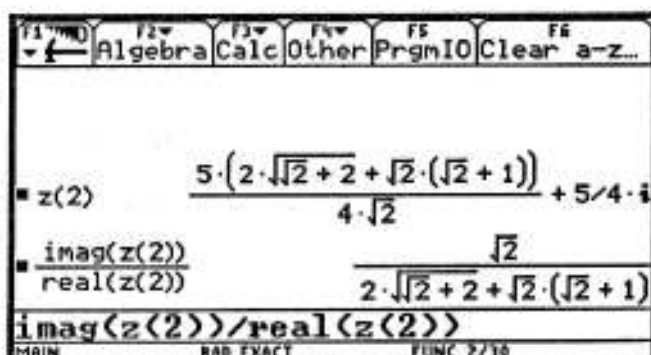
Pour la bonne raison qu'elle ne connaît pas la tangente de $\frac{\pi}{16}$



Peut-on retrouver la tangente de $\frac{\pi}{16}$?

C'est tout simple : il suffit de passer en mode complexe Rectangular.

La valeur de $z(2)$ nous permet de retrouver, par quotient de la partie imaginaire et de la partie réelle la tangente recherchée.



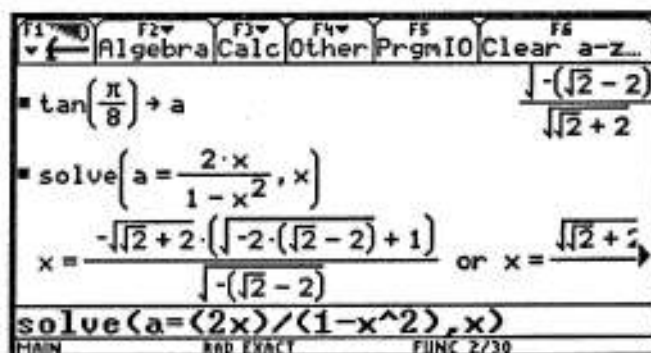
Une remarque concernant les capacités de la TI-92. Elle ne donne pas la tangente de $\frac{\pi}{16}$ mais donne la tangente de $\frac{\pi}{8}$. Or on connaît la formule $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$. Donc :

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{2\tan \frac{\pi}{16}}{1-\tan^2 \frac{\pi}{16}}. \text{ Ainsi la tangente recherchée est-elle une solution de l'équation :}$$

$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{2x}{1-x^2}$$

On a rentré $\tan \frac{\pi}{8}$ dans la mémoire a pour alléger l'écriture.
Puis la calculatrice résout l'équation.

Il ne reste plus qu'à comprendre pourquoi il y a deux racines, et à identifier celle qui convient...



The screenshot shows the TI-92 calculator interface. At the top, the function keys F1 through F6 are visible. The main screen displays the equation $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = a$ and the command $\text{solve}\left(a = \frac{2 \cdot x}{1 - x^2}, x\right)$. The solution is shown as $x = \frac{-\sqrt{2} + 2 \cdot (\sqrt{-2 \cdot (\sqrt{2} - 2)} + 1)}{\sqrt{-(\sqrt{2} - 2)}} \text{ or } x = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - 2}$. At the bottom, the command $\text{solve}(a=(2x)/(1-x^2), x)$ is entered.

Fin de la digression sur le calcul des arguments par la machine. Dès qu'on parle angle, les choses se compliquent !

Revenons aux suites mises en évidence par la machine. Pour les parties imaginaires et les arguments, on a pu constater que les résultats étaient assez simples.

Quant aux parties réelles et aux modules, contentons-nous de constater pour le moment que c'est moins évident...

2. Quand d'une suite naissent deux suites

L'utilisation du fichier de suite nécessite de passer de l'étude d'une suite complexe à l'étude de deux suites réelles : la suite (x_n) des parties réelles, et la suite (y_n) des parties imaginaires des termes de la suite (z_n) .

On dispose déjà de $z_0 = 5 + 5i$, c'est à dire $x_0 = y_0 = 5$.

Puis $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$. En remplaçant z_n par $x_n + iy_n$, et en calculant son module, on obtient :

$x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + iy_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$, c'est à dire, en identifiant partie réelle et partie imaginaire :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n).$$

On retrouve bien le caractère géométrique de la suite (y_n) .

Par application des théorèmes du cours, on peut donc dire que la suite (y_n) est une suite décroissante, qui converge vers 0. Ce qui prouve au passage que la suite (z_n) , si elle converge, converge nécessairement vers un nombre réel (puisque sa partie imaginaire serait nulle).

On peut constater aussi le caractère assez compliqué (évitons désormais le mot "complexe"...) de la suite (x_n) .

On peut passer à l'écriture des deux suites dans le fichier de suites, pour bénéficier d'un autre point de vue sur la suite (x_n) . La suite (x_n) sera rentrée en u1, et la suite (y_n) en u2.

Les deux suites sont rentrées.

Ne pas oublier de sélectionner en F7 la commande CUSTOM, pour que l'application graphique trace les points M_n , de coordonnées $u1(n)$ et $u2(n)$, c'est à dire x_n et y_n .

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
←	Zoom	Edit	✓	All	Style	Axes...
u1 = .5 * (u1(n-1) + sqrt((u1(n-1))^2 + (u2(n-1))^2)) u11 = 5 u2 = .5 * u2(n-1) u12 = 5 u3 = u13 = u4 = u14 = u5 = u3(n) = MAIN RAD EXACT SEQ						

On va pouvoir alors bénéficier de deux points de vue sur ces suites : un point de vue graphique, et un point de vue numérique, en valeurs approchées. Commençons par le point de vue numérique.

On retrouve sans peine les caractères de la suite des parties imaginaires (y_n) .

Quant à la suite des parties réelles, (x_n) , elle paraît croissante, et semble avoir une croissance qui "ralentir".

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
←	Setup	Cell	Header	Del	Pos	Int
n	u1	u2				
0.	5.	5.				
1.	6.0355	2.5				
2.	6.2842	1.25				
3.	6.3457	.625				
4.	6.3611	.3125				
5.	6.3649	.15625				
6.	6.3659	.07813				
7.	6.3661	.039063				
u2(n) = .0390625						
MAIN RAD EXACT SEQ						

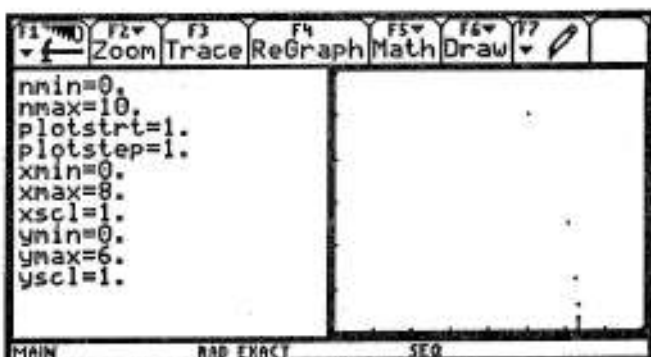
Un coup d'oeil un peu plus loin semble indiquer que la suite (x_n) converge.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
←	Setup	Cell	Header	Del	Pos	Int
n	u1	u2				
52.	6.3662	1.E-15				
53.	6.3662	6.E-16				
54.	6.3662	3.E-16				
55.	6.3662	1.E-16				
56.	6.3662	7.E-17				
57.	6.3662	3.E-17				
58.	6.3662	2.E-17				
59.	6.3662	9.E-18				
u1(n) = 6.366197723677						
MAIN RAD EXACT SEQ						

Un point de vue graphique maintenant :

On a fait le choix de points "fins" (commande Dot) pour mieux distinguer les points successifs.

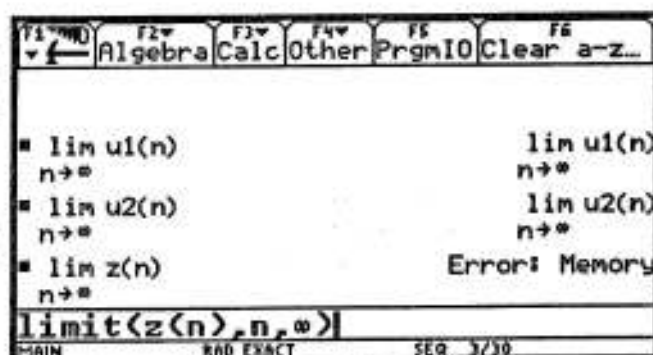
La suite des points M_n semble bien "percuter" l'axe des abscisses.



La calculatrice peut-elle nous donner une indication sur la limite des suites en présence?

Les suites u_1 et u_2 sont définies en valeur approchée, donc la calculatrice refuse de se prononcer sur leur limite !

Quant à la suite $z(n)$, pas de réponse, pour cause de saturation de mémoire...



3. Le difficile choix des armes...

Récapitulons.

- Si on choisit l'écriture algébrique, on dispose de deux suites récurrentes, définissant les parties réelles et imaginaires :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n)$$

- Si on choisit l'écriture exponentielle, on dispose de la suite des arguments principaux :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n)$$

On avait déjà constaté que la suite (y_n) et la suite (a_n) étaient géométriques, de raison $\frac{1}{2}$.

Donc $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot a_0 = \frac{a}{2^n}$ (a_0 , l'argument principal de z_0 , est égal à $\frac{\pi}{4}$. Pour alléger l'écriture, on le notera a)

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot y_0 = \frac{5}{2^n}$$

Il nous manque la suite des modules ! Pour cela, revenons au schéma 2, amélioré.

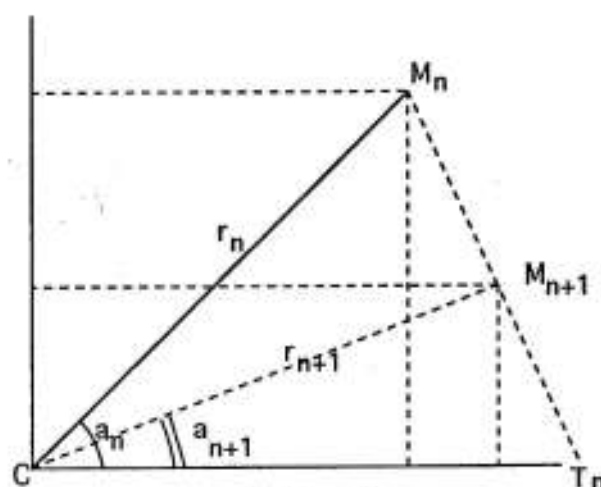


Schéma 3

On va calculer le module r_{n+1} en fonction du module r_n , dans le triangle rectangle $OM_{n+1}T_n$. On rappelle que OT_n est égal à r_n .

On a alors $r_{n+1} = r_n \cos(a_{n+1}) = r_n \cos \frac{a}{2^{n+1}}$

Récapitulons une dernière fois :

Ecriture algébrique	Ecriture exponentielle
$x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$ $y_n = \frac{5}{2^n}$	$a_n = \frac{a}{2^n}$ $r_{n+1} = r_n \cos \frac{a}{2^{n+1}}$

Quelle écriture choisir pour aller de l'avant ?

Les deux donnent des informations utiles :

- de l'écriture $x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2})$ on tire, par une récurrence simple, que x_n est

toujours positif. De l'inégalité triviale $x_n^2 + y_n^2 \geq x_n^2$, on tire donc $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq x_n$,

puis $x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq 2x_n$, puis $\frac{1}{2} (x_n + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \geq x_n$;

On a bien établi que $x_{n+1} \geq x_n$, c'est à dire que la suite des parties réelles est croissante.

- de l'écriture $r_{n+1} = r_n \cos \frac{a}{2^{n+1}}$ on tire que la suite des modules est décroissante (on

obtient r_{n+1} en multipliant r_n par un cosinus compris entre 0 et 1).

Mais qu'en est-il des limites des deux suites ?

L'étude de la suite (x_n) apparaît délicate. Essayons la suite des modules, en commençant... par le départ, pour essayer de déterminer une expression du terme général en fonction de n .

$$r_1 = r_0 \cos \frac{a}{2}$$

$$r_2 = r_1 \cos \frac{a}{2^2}$$

$$r_3 = r_2 \cos \frac{a}{2^3}$$

.....

$$r_{n-1} = r_{n-2} \cos \frac{a}{2^{n-1}}$$

$$r_n = r_{n-1} \cos \frac{a}{2^n}$$

En multipliant toutes les inégalités membre à membre, la plupart des modules se simplifient (ils sont tous non nuls), et on obtient :

$$r_n = r_0 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \cos \frac{a}{2^4} \dots \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^n}$$

Petit problème : quand n augmente, on a de plus en plus de facteurs qui sont de plus en plus proches de 1. La tendance du processus n'est pas évidente à deviner...

4. Où l'on découvre le sinus cosinophage...

Pour se débarrasser de cette ribambelle de cosinus, on va utiliser la formule

trigonométrique bien connue : $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$, ou $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin(2a)$.

Commençons par un calcul partiel.

$$r_1 = r_0 \cos \frac{a}{2} ; r_2 = r_1 \cos \frac{a}{2^2} ; r_3 = r_2 \cos \frac{a}{2^3}$$

En multipliant les trois égalités membre à membre, et en simplifiant, on obtient :

$r_3 = r_0 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3}$. On multiplie alors les deux membres de cette égalité par $\sin \frac{a}{2^3}$ (c'est le sinus "cosinophage"...). On obtient :

$$r_3 \sin \frac{a}{2^3} = r_0 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} \sin \frac{a}{2^3} \quad (\text{Egalité 1})$$

On applique la formule trigonométrique aux deux derniers facteurs :

$$\cos \frac{a}{2^3} \sin \frac{a}{2^3} = \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{a}{2^3} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2^2}. \text{ On remplace dans l'égalité 1 :}$$

$$r_3 \sin \frac{a}{2^3} = \frac{1}{2} r_0 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \sin \frac{a}{2^2}.$$

On applique à nouveau la formule aux deux derniers termes. L'égalité devient :

$$r_3 \sin \frac{a}{2^3} = \frac{1}{2^2} r_0 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2}.$$

On applique une dernière fois l'égalité aux deux derniers termes :

$$r_3 \sin \frac{a}{2^3} = \frac{1}{2^3} r_0 \sin a. \text{ D'où pour finir } r_3 = \frac{r_0 \sin a}{2^3} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^3}}$$

Il reste à généraliser cette formule, c'est à dire à prouver que :

$$r_n = r_0 \sin a \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}. \text{ Une récurrence s'impose.}$$

La formule est vraie pour $n = 0$ (on trouve $r_0 = r_0$).

Supposons la vraie au rang n , et prouvons alors qu'elle est vraie au rang $n+1$.

$$\text{On dispose donc de } r_n = r_0 \sin a \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}. \text{ Or } r_{n+1} = r_n \cos \frac{a}{2^{n+1}}.$$

D'où, en remplaçant r_n par sa valeur dans cette dernière égalité :

$$r_{n+1} = r_0 \sin a \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}} \cos \frac{a}{2^{n+1}}.$$

Or $\sin \frac{a}{2^n} = 2 \sin \frac{a}{2^{n+1}} \cos \frac{a}{2^{n+1}}$. On remplace au dénominateur le sinus par cette

expression, on simplifie, et on obtient $r_{n+1} = r_0 \sin a \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^{n+1}}}$, ce qui traduit bien

la formule à l'ordre $n+1$.

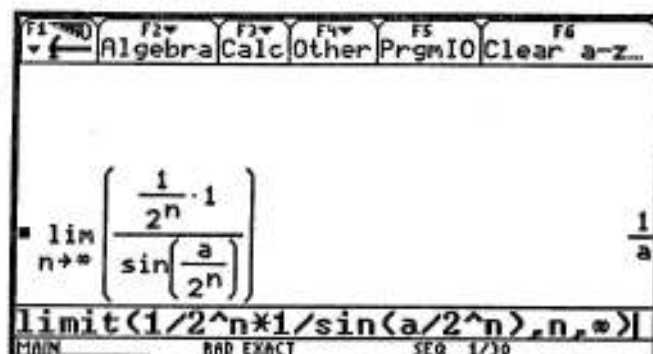
Ce résultat est donc vrai pour tout n : $r_n = r_0 \sin a \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

Peut-on alors déterminer la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$?

On ne va s'intéresser qu'à la partie variable de r_n , c'est à dire $\frac{1}{2^n} \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

La calculatrice donne bien une limite.

Mais d'où vient ce résultat ?



Puisque la limite est $\frac{1}{a}$, on peut faire apparaître a dans l'expression de r_n :

$$r_n = \frac{r_0 \sin a}{a} \cdot \frac{a}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}. \text{ Et on peut surtout se demander quelles sont les limites connues}$$

concernant le sinus. On en connaît au moins une, qui vient de la dérivation de la fonction sinus en zéro : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Or, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{a}{2^n}$ tend vers 0. Donc la limite de $\frac{a}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$ est 1 quand n tend vers $+\infty$.

Pour finir, la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{r_0 \sin a}{a}$. Vérifions :

On sait que $r_0 = 5\sqrt{2}$, et $a = \frac{\pi}{4}$. D'où la limite cherchée est égale à : $5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi}$

c'est à dire $\frac{20}{\pi}$ (valeur approchée à 10^{-5} par défaut : 6,366 19).

La suite des modules converge donc, et comme la suite des arguments principaux converge vers 0, la limite de z_n est un réel positif, égal donc à son module. Ce qui prouve du même coup que la limite de la suite x_n , partie réelle de z_n , est égale aussi à la limite de z_n quand n tend vers $+\infty$. On vérifiera dans le tableau de valeurs obtenu précédemment que l'indication donnée par la calculatrice sur le comportement de la suite (x_n) était assez bonne.

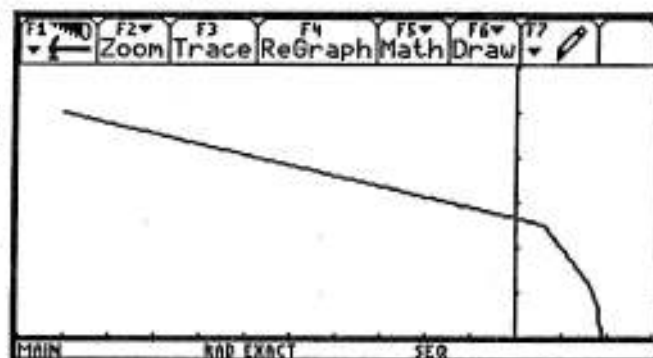
5. Aller encore plus loin...

On peut se demander ce que deviendrait cette suite si on en modifiait le premier terme. En particulier, que se passerait-il si z_0 était réel positif ? Réel négatif ? Si sa partie imaginaire était strictement négative ? Le lecteur attentif qui observera les différents comportements possibles pourra constater que la suite ne présente un intérêt que si z_0 n'est pas réel. Et que ce qui précède permet d'envisager tous les cas de figure.

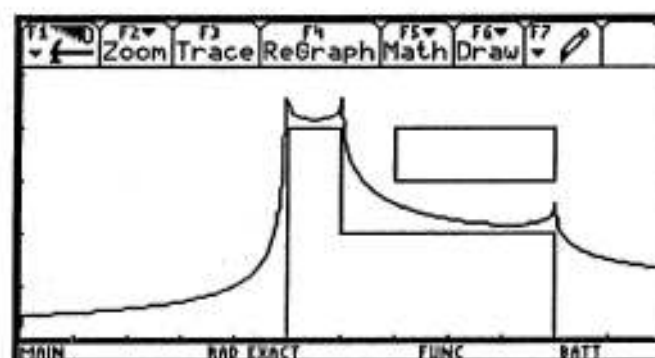
Un autre cas de figure, avec la partie réelle de z_0 négative.

Les points successifs ont été reliés (style Line) pour mieux visualiser le phénomène.

Variante : que se passerait-il pour la suite $z_n = \frac{1}{3}(z_n + 2|z_n|)$?



5. Problème long



Il était impossible, à propos d'un problème "ouvert", de distinguer les solutions, et les voies et détours qui y ont amené.

On trouvera donc ici quelques observations sur les chemins sinueux de la recherche...



Les questions

Est-ce que la possession d'outils de calcul puissants, en déchargeant l'élève des tâches répétitives, et de simple calcul, favorise la réflexion, la recherche de stratégies générales ?

Ou au contraire favorise-t-elle la dispersion dans de multiples tâches sans cohérence les unes avec les autres ?

Est-ce que la possession d'outils puissants favorise une démarche basée sur des phases de conjectures, de preuves, de réfutations ?

Ou au contraire favorise-t-elle la multiplication d'essais sans conjecture, ni bilan, une sorte de "pêche" [Artigue 1995] aléatoire ?

Quelle est la relation entre les habitudes de travail des élèves avec les machines, (la typologie mise en évidence), leur niveau scolaire, et leur investissement dans des tâches plus longues ?

C'est à ces questions que l'on va tenter de répondre avec la proposition aux élèves d'un problème long.

Ce problème sera donné après une première familiarisation avec la TI 92, et avant que la pression du bac n'empêche une recherche assez libre, donc entre fin Janvier et début Avril.

Modalités

Le problème sera donné pour recherche libre à la maison, de telle façon qu'une sorte de maturation puisse s'opérer. Il y aura à intervalles de temps réguliers des moments de synthèse en TP (toutes les 3 semaines). Les résultats partiels seront notés dans les cahiers de recherche. Les résultats significatifs bénéficieront d'une sortie sur imprimante distribuée à tous les élèves. Une synthèse du travail sera publiée en fin d'année, et donnée à tous.

Critères du choix de l'énoncé

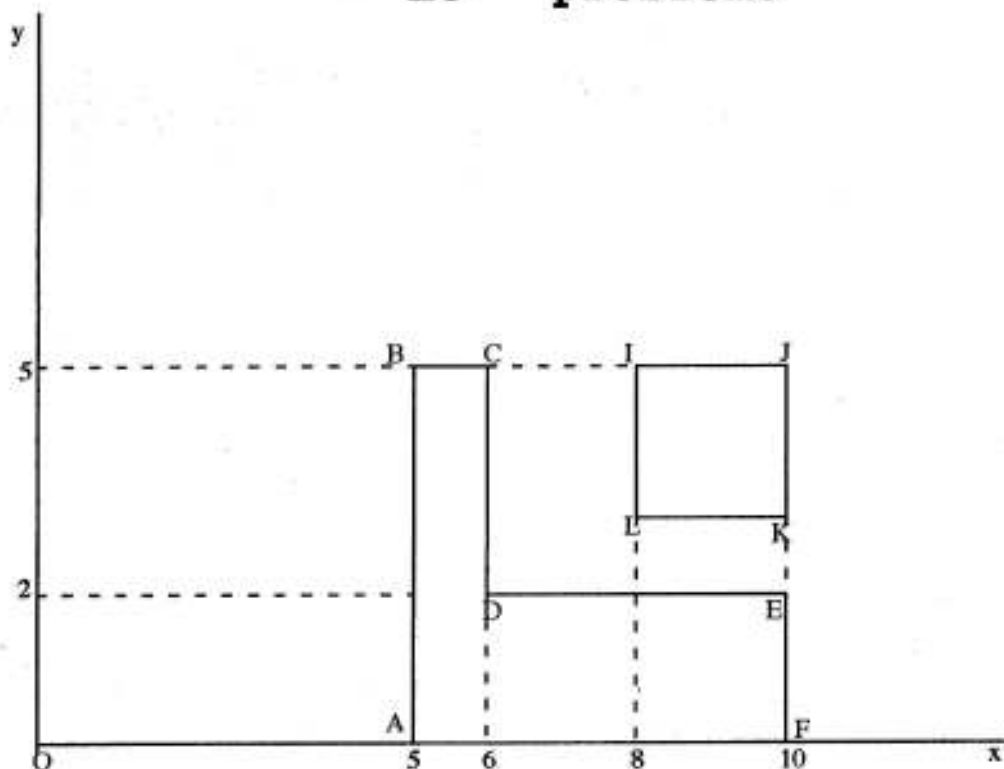
Ils sont au nombre de 6.

On recherche ici :

- un problème qui permette à tous les élèves de commencer la recherche, et de trouver des résultats partiels ;
- un problème pour lequel la possession d'un outil comme la TI 92 soit un atout décisif ;
- un problème qui permette des changements de cadre (algèbre, analyse), et des changements de point de vue (une seule fonction, ou des raccords de fonction ?) ;
- un problème qui soit une réelle modélisation : on veut déterminer une fonction, pas comme objectif en soi, mais pour pouvoir optimiser un trajet donné ;
- un problème dans lequel les outils de l'analyse (calcul différentiel, calcul intégral) soient centraux (rapport au programme de TS, et au bac !) ;
- un problème dans la résolution duquel les élèves soient confrontés à la question de limite.

On trouvera ci-après une première version du problème, les premières tentatives de résolution/ professeur, puis la version donnée aux élèves, leur travail de recherche, et enfin les leçons que l'on peut en tirer. Signalons que c'est un problème posé par Gilles Aldon [Aldon 1995] qui a été l'amorce de ce texte...

" Le " problème



Première version de l'énoncé

Le dessin ci-dessus est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion :

Il décolle en O, doit passer au dessus d'un relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau [DE], mais sous la masse nuageuse (IJKL), et enfin atterrir sur une piste qui commence en F, et de longueur infinie (pourquoi pas ?) : le contact entre l'avion et la piste, pour être le plus doux possible, devra se faire "à l'infini".

On considérera que le dessin ci-dessous est une modélisation qui "enveloppe" les reliefs réels : donc l'avion peut passer par B, mais pas en dessous !

Question 1

Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes. On n'utilisera que des combinaisons de fonctions puissances et de l'exponentielle

Question 2

On veut maintenant optimiser le trajet. L'idée est que l'avion monte "le moins possible". Cela peut se comprendre de deux façons (au moins) :

- l'avion transporte des voyageurs cardiaques. Aussi, le pilote doit s'arranger pour que, sur le trajet, la pente maximale de l'avion (en valeur absolue) soit la plus faible possible. Pour deux fonctions données, f et g , on considérera $\sup |f'|$ et $\sup |g'|$. La fonction qui aura le plus petit $\sup$ sera réputée la meilleure.
- l'avion est un avion espion. Il devra donc voler au plus près des reliefs. Il faudra ici minimiser l'intégrale de f .

NB. Il est "clair" qu'il n'y a nécessairement de solution optimale... sauf à ne pas respecter les contraintes de dérivabilité de la fonction cherchée ! (cf correction finale).

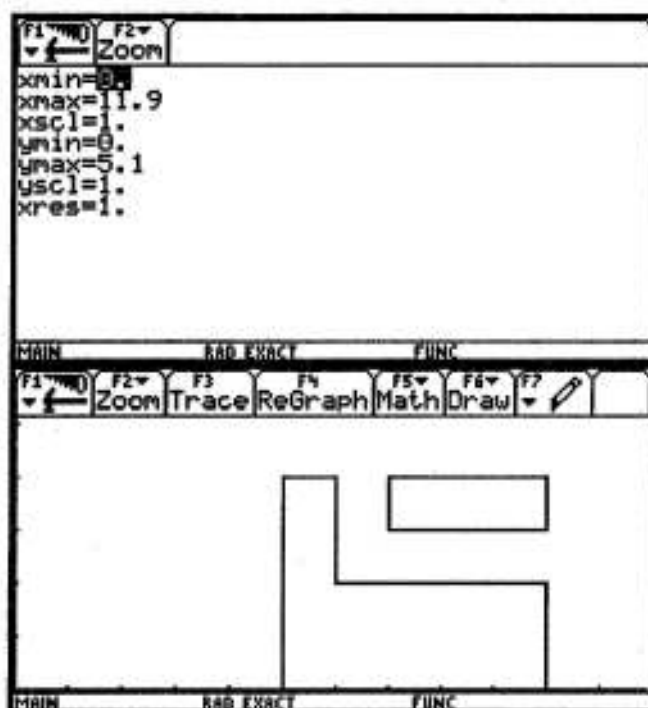
Problème long. Etape 0



Chronique d'une recherche préalable du professeur.

Ce qui suit est le travail préliminaire réalisé pour tester la faisabilité du problème, vérifier son intérêt, général, et relativement à la machine, et en conséquence ajuster l'énoncé, préciser le dispositif de réalisation par les élèves. Il s'agit d'une analyse a priori des difficultés techniques et mathématiques. Marginalement, et ce n'est pas dépourvu d'intérêt, cela permet de s'entraîner un peu dans la manipulation des différentes applications de la TI 92...

Remise en cause du schéma initial, simplicité oblige



La TI 92 a un écran de 239 pixels sur 52 pixels en hauteur.

Si on veut placer des points "simples", le choix d'une fenêtre comme la fenêtre ci-contre n'est pas mal.

Du coup, on va réduire la hauteur des reliefs de 5 à 4, pour pouvoir passer plus facilement. Un conseil : sauvegarder la figure construite, pour ne pas la rebâtir à chaque fois...

Remarque : dans un fichier "Picture", la figure est sauvegardée non pas avec ses coordonnées, mais dans sa position-écran. C'est à dire que si l'on change la fenêtre, et si on appelle la figure, elle se replace au même endroit.

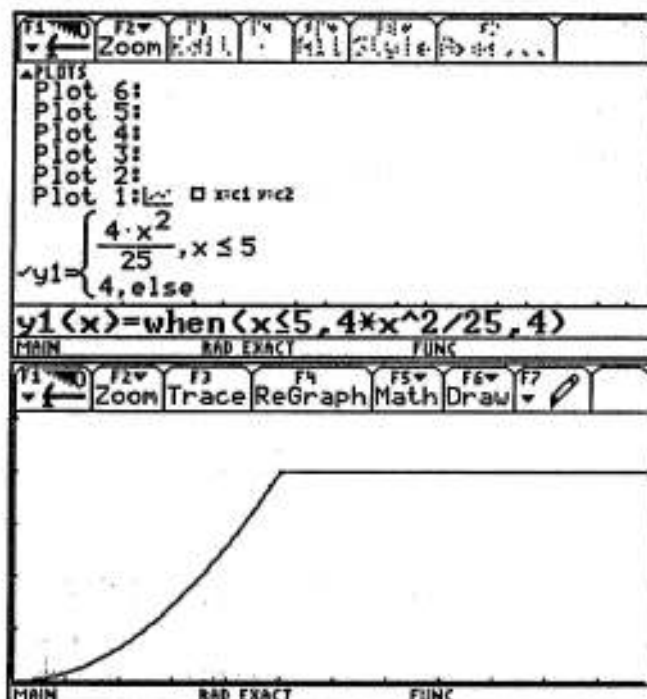
Première tentative, avec des trinômes du second degré

On peut bien sûr discuter ce choix : le physicien recherchera des fonctions de classe C^2 , ce qui impose au moins des polynômes de degré 3. On en parlera plus tard, avec la méthode dite des "splines cubiques".

Le choix des polynômes de degré 2 est justifié par le fait que ce sont les plus simples nous permettant des raccords dérivables. Cela permet des ajustements assez rudimentaires, à trois conditions : on part d'un point avec dérivée imposée, et on va à un autre point...

De plus, avec les polynômes du second degré, on dispose de dérivées et d'intégrales simples...

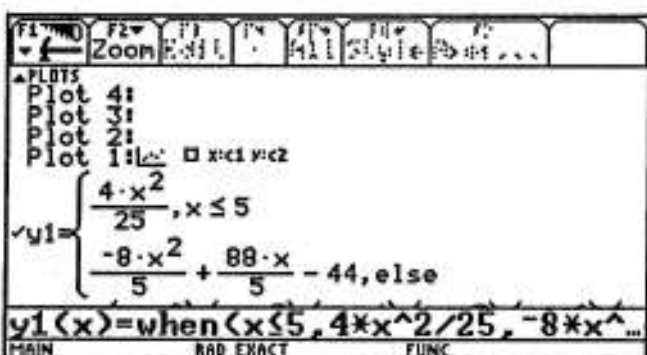
Doit-on suggérer aux élèves de commencer leur recherche ainsi ? A débattre. Mais a priori, je serai assez pour que la recherche théorique soit la plus libre possible, notre rôle étant celui de "prestataires de service" : on montre comment il faut faire, techniquement, pour réaliser la tâche envisagée.



Pour le départ, on ajuste le décollage, et le point (5,4). J'utilise les fonctions "définies par morceau", j'ai prolongé horizontalement, parce que je n'ai pas su quoi faire d'autre... (A noter, la syntaxe des fonctions "par morceaux")

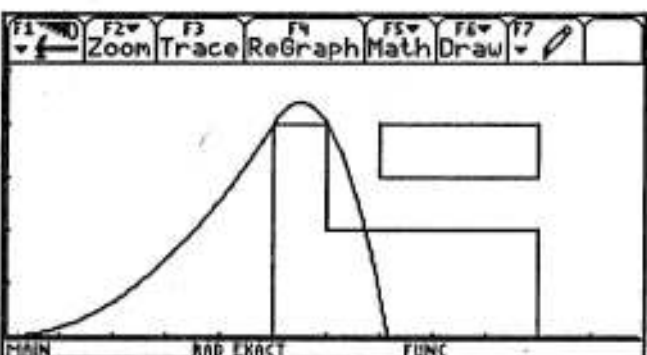
Ca marche bien.

Petit problème : mon relief a disparu. Pourquoi, mystère. Heureusement qu'il est enregistré, et peut être rappelé facilement.



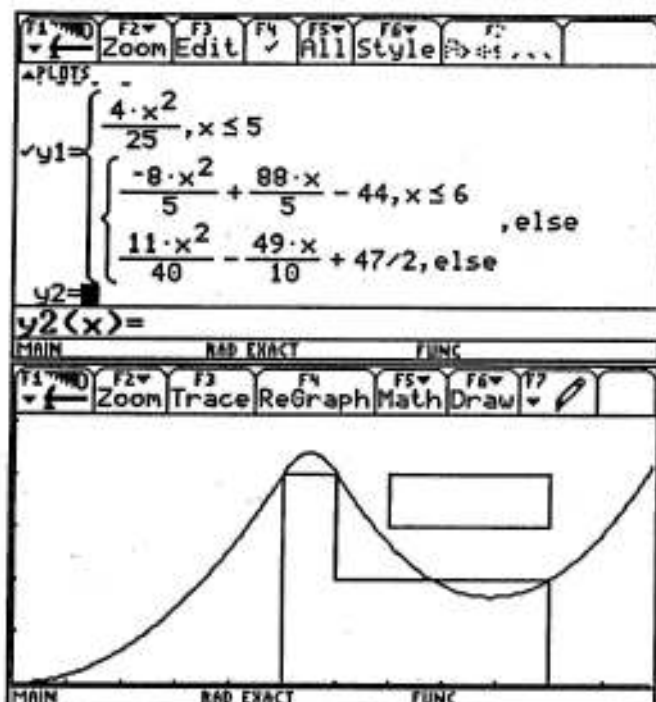
On ajuste maintenant aux points (5,4) et (6,4), avec un raccord dérivable en (5,4).

Pour cela, j'ai écrit un système d'équation, et résolu celui-ci grâce à la machine.



Ça marche...

Puisque cela marche, il n'y a pas de raison de ne pas poursuivre...

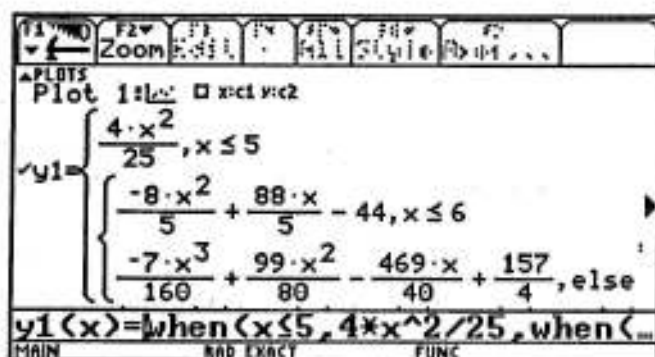


On ajuste maintenant aux points (6,4) et (10,2), avec un raccord dérivable en (6,4). Pour cela, j'ai (encore) écrit un système d'équation, et résolu celui-ci grâce à la machine.

Ça ne marche plus...

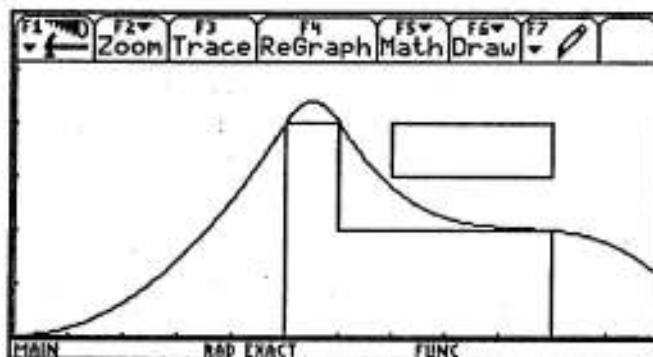
Les conditions imposées sont bien sûr réalisées, mais l'avion s'écrase sur le plateau. Est-ce à dire que le parcours via les trinômes est impossible ? Non, sans doute, mais il faut procéder autrement...

On peut faire le raccord plus bas...mais je n'y suis pas arrivé : en fait la pente au point de départ est trop forte. Il faudrait l'adoucir en modifiant le trinôme de départ... En fait, ne disposer que de 3 degrés de liberté, avec des trinômes, s'avère vite... assez contraignant. D'où un changement de contrat : j'essaie de raccorder avec une cubique, en fixant les conditions : raccord tangent en (6, 4), $f(10) = 2$, et $f'(10) = -0,1$ (pour préparer l'atterrissage...)



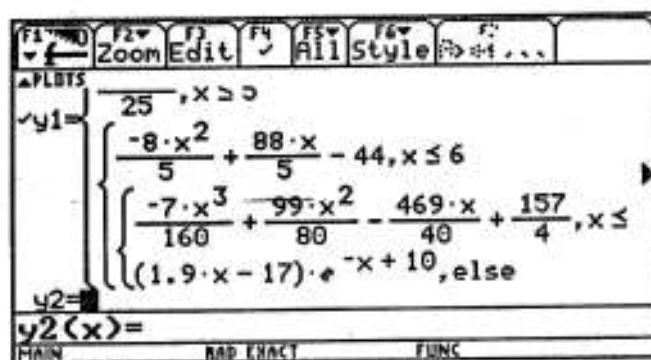
Evidemment, l'écriture de la fonction devient de plus en plus complexe.

Mais, une fois compris le principe, il ne s'agit en fait que d'empilement d'étages semblables.

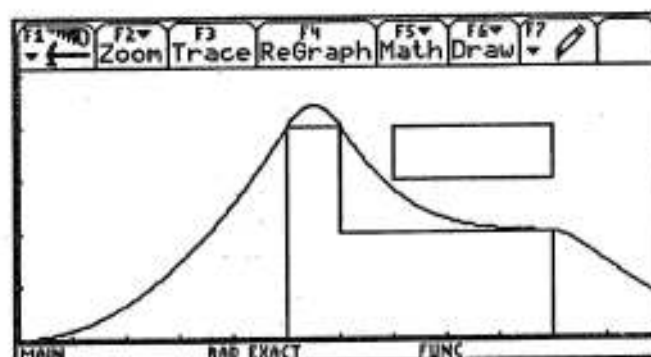


Ça marche... Ou plutôt ça vole... Il faudrait cependant vérifier qu'il n'y a pas de problème de crash juste avant (10, 2). Si cela n'avait pas été le cas, on aurait toujours pu modifier la pente de la tangente en (10 ; 2).

Il ne reste plus qu'à atterrir... Il nous faut une fonction à limite nulle en $+\infty$, $\exp(-x)$ fait l'affaire. Il nous faut de plus le raccord tangent au point (10, 2), d'où deux contraintes, donc deux degrés de liberté : on va prendre $(ax+b) \exp(-x)$. D'où le système :
 $(10a+b)\exp(-10) = 2$, et $(-9a-b)\exp(-10) = -0,1$.
 Un coup de machine : $a = 1,9 \exp(10)$ et $b = -17 \exp(10)$.
 Il nous faut aussi éviter que l'avion ne remonte, donc éviter que la dérivée de cette fonction ne s'annule après 10... Ce qui est le cas ici (cela tombe bien, mais n'était pas spécialement prévu !)



L'empilement des conditions se poursuit, sans problèmes apparents.



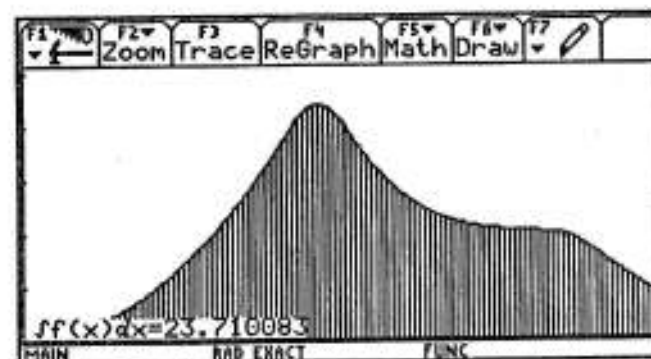
Ça marche...

Fin provisoire, pour cette méthode par raccord de courbes.

Mais le problème reste ouvert d'un passage avec des polynômes du second degré. Le faire est évidemment possible, en multipliant les raccords. Le faire avec trois bouts seulement, sans doute, mais comment effectuer la recherche correspondante ? Avis aux amateurs...

Avant de passer à d'autres méthodes de recherche de courbes adéquates, on peut déjà voir comment fonctionnent les deux critères d'optimisation :

- commençons par celui qui m'apparaît techniquement le plus simple, l'intégrale.



On peut passer d'abord par un calcul approché, dans l'application graphique : là l'intégrale - une valeur approchée - est calculée entre 0 et 11,9.. La machine donne 23,710083.

Notons qu'il est indiqué "exact" sur le bandeau du bas : un peu gênant...

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\int_0^{\infty} y1(x) dx$					$\frac{149}{6}$
$\int_0^{11.9} y1(x) dx$					$\frac{-751 \cdot e^{-19/10}}{100} + \frac{149}{6}$
$\int_0^{11.9} y1(x) dx$					23.7100830585
$f(y1(x), x, 0, 11.9)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 3/20					

Mais s'agissant d'optimisation, il vaut mieux passer par la valeur exacte, et de 0 à $+\infty$. C'est possible, puisque l'intégrale converge.

On dispose ainsi de la valeur exacte de l'intégrale "totale", de la valeur exacte de l'intégrale sur $[0; 11, 9]$, et d'une valeur approchée qui précise et confirme le résultat de l'application graphique.

On voit bien tous les problèmes qui se posent ici : définition d'une intégrale impropre, valeur-exacte, valeur-approchée...

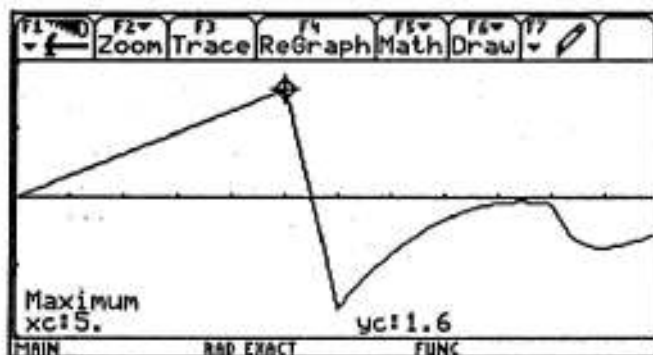
Mais la machine s'avère ici d'une redoutable efficacité pour toute la partie calculatoire.

- Ensuite l'optimisation via la dérivée.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\frac{8 \cdot x}{25}, x \leq 5$					
$\frac{-16 \cdot x}{5} + 88/5, x \leq 6$					
$\frac{-21 \cdot x^2}{160} + \frac{99 \cdot x}{40} - \frac{469}{40}, x \leq 10$					
$\frac{-(19 \cdot x - 170) \cdot e^{-x} + 10}{10} + \frac{19 \cdot e^{-x} + 10}{10}$					
$d(y1(x), x)$					
MAIN RAD EXACT FUNC 5/20					

On calcule d'abord la valeur exacte de la dérivée de f.

On obtient - évidemment - une fonction définie par morceaux.



On voit nettement ici que la dérivée... n'est pas dérivable, c'est à dire que, comme prévu, le raccord est C1, mais pas C2.

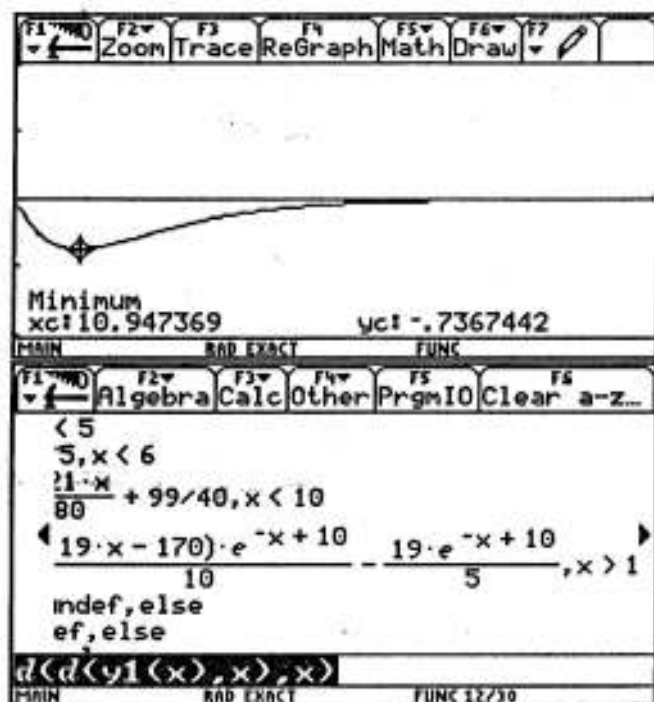
On peut utiliser l'application graphique pour avoir le maximum de f', qui est aussi le maximum de |f'| sur l'intervalle $[0, 12]$.

Mais ce n'est qu'une valeur approchée !

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\frac{8 \cdot x}{25}, x \leq 5$					
$\frac{-16 \cdot x}{5} + 88/5, x \leq 6$					
$\frac{-21 \cdot x^2}{160} + \frac{99 \cdot x}{40} - \frac{469}{40}, x \leq 10$					
$\frac{-(19 \cdot x - 170) \cdot e^{-x} + 10}{10} + \frac{19 \cdot e^{-x} + 10}{10}$					
$\frac{d}{dx}(y1(x)) x=5$					$8/5$
$d(y1(x), x) x=5$					
MAIN RAD EXACT FUNC 6/20					

Cependant, on peut considérer que sur $[0; 6]$, les dérivées sont des fonctions affines par morceaux, puis sur $[6; 10]$, la dérivée est un polynôme du second degré.

Le maximum de |f'| est donc obtenu en 5, ou 6, et c'est exactement 1,6.



Mais que se passe-t-il sur $[10, +\infty[$?

On peut se rassurer en regardant le graphique de f' sur cet intervalle, et en se rappelant qu'il s'agit d'une fonction exponentielle

On peut aussi étudier les variations de f' sur cet intervalle par l'étude de f'' .

Bref, et pour finir, on a bien, sur $[0, +\infty[$, $\max |f'| = 1,6$

Ainsi, pour le trajet convenable choisi, les constantes d'optimisation sont, pour l'intégrale $\frac{149}{6}$, et pour la dérivée $\frac{8}{5}$. Qui dit mieux ?

Pour conclure sur cette première partie, deux impressions :

- la détermination d'une courbe convenable me paraît à la fois suffisamment problématique pour stimuler la recherche, et à la fois suffisamment à portée d'un élève moyen pour ne pas la décourager.
- la partie optimisation est sur le plan technique assez rapide, et permet de relancer la recherche pour faire "mieux".

Deuxième tentative, avec une nouvelle stratégie d'interpolation : les splines cubiques.

"Le terme spline veut dire "tringle" ; son emploi est dû au fait qu'en dessin industriel, on interpole une suite de données à l'aide d'une tringle souple" [Ovaert 1983]. "Les splines vont réaliser une interpolation polynomiale par morceaux, mais de plus aux noeuds, on imposera un degré de régularité jugé nécessaire" [Théodor 1989].

Les splines cubiques reposent sur une interpolation polynomiale de degré au plus 3, avec des raccords C^2 .

Méthode générale

On peut baser l'interpolation sur 13 points, avec une subdivision de $[0, 12]$ en 12 intervalles de même amplitude h .

Alors sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction d'interpolation est définie par :

$$s(x) = d_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + d_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{hd_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{hd_{i+1}}{6}\right)(x - x_i)$$

(d_i étant la valeur de la dérivée seconde au noeud i , et f_i la valeur de la fonction au même noeud [Théodor 1989]).

Les seules inconnues sont désormais les coefficients d_i , que l'on détermine par résolution d'un système tridiagonal d'ordre $n-1$ (dans le cas où l'on fixe $d_0 = d_n = 0$) :

$$AX = \frac{6}{h^2} B, \text{ avec :}$$

A = (diagonale de 2, sur et sous diagonale de 1) ;

$B = (f_2 - 2f_1 + f_0, \dots, f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})$.

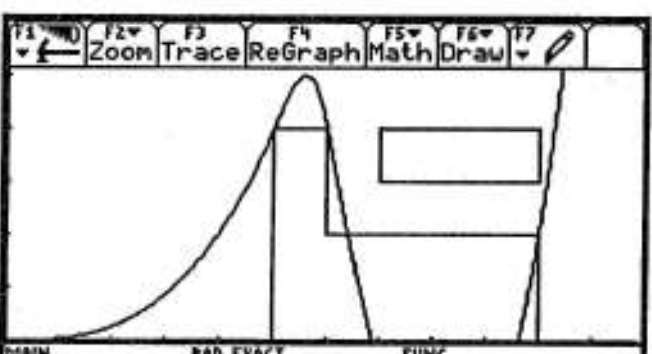
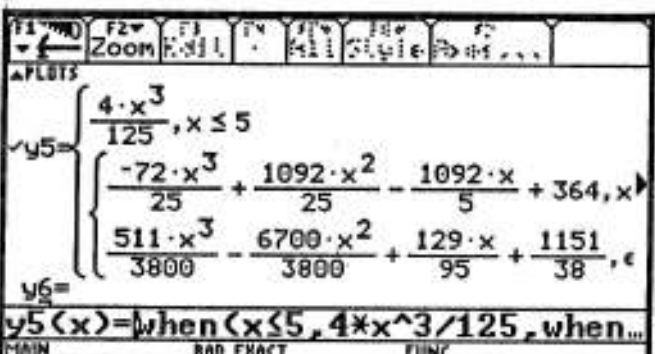
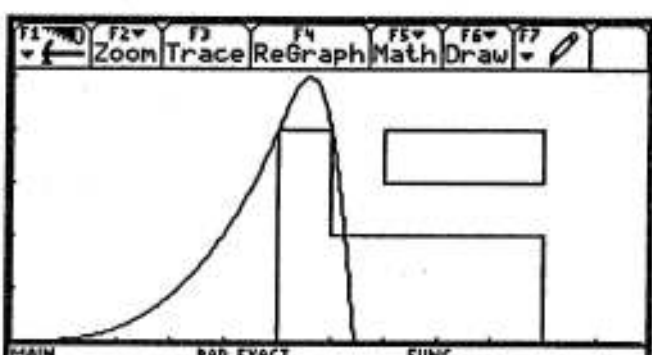
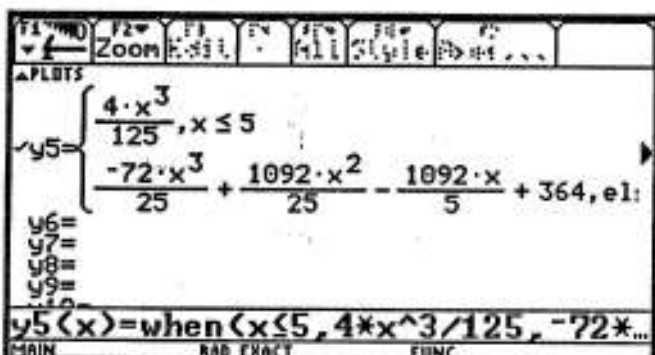
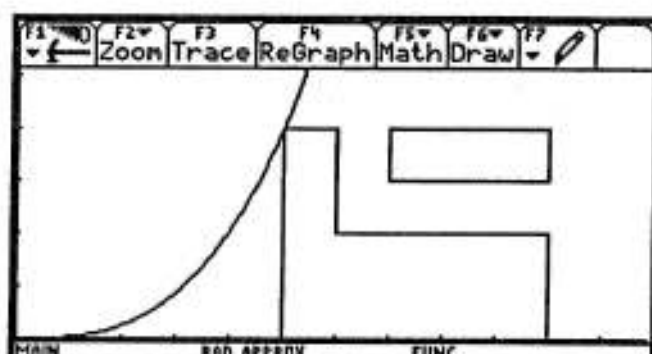
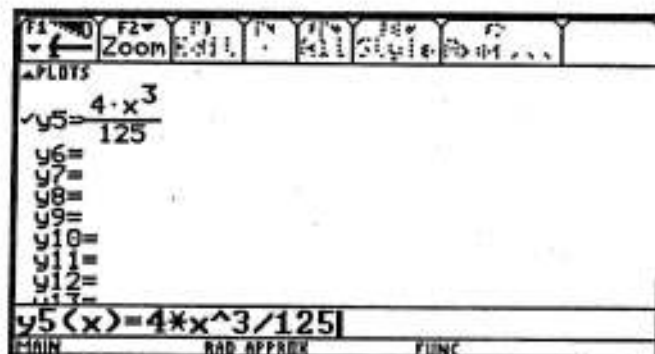
En bref, la résolution générale me semble sortir du cadre de ce problème. Elle pourrait cependant donner matière à un problème assez intéressant, mais d'un niveau supérieur.

Méthode "locale"

On va rechercher des polynômes du troisième degré, avec des raccords C_2 , mais avec une méthode "pas à pas". Au début, on a le choix (quatre inconnues, quatre contraintes) :

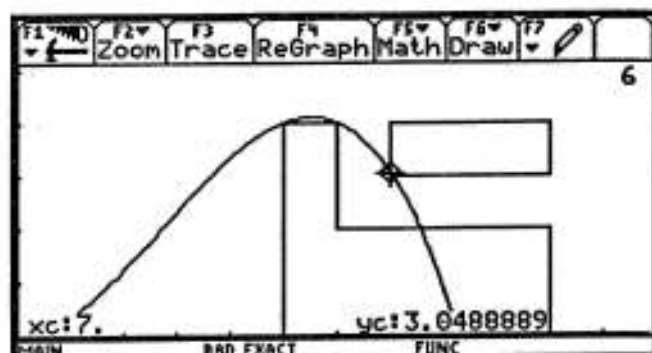
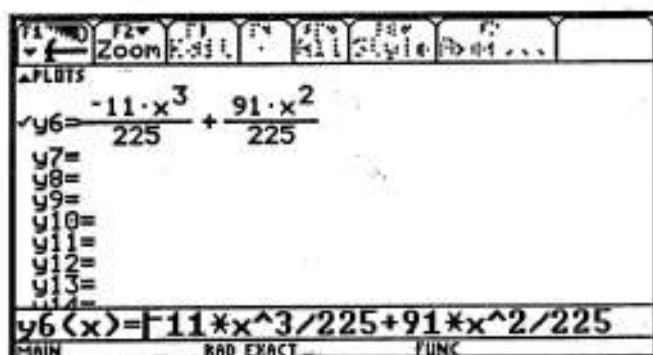
- soit on impose une dérivée seconde nulle en 0 ;
- soit on impose que la courbe passe aussi par (6;4).

Premier choix :



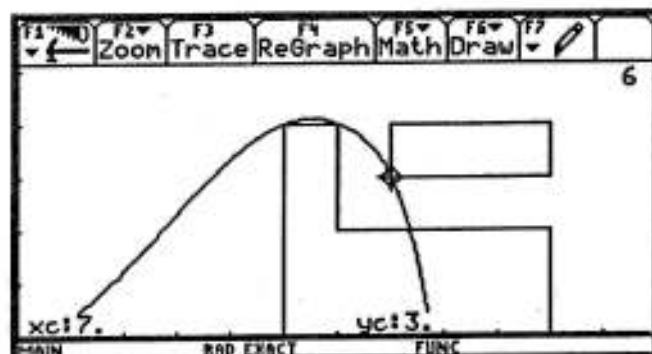
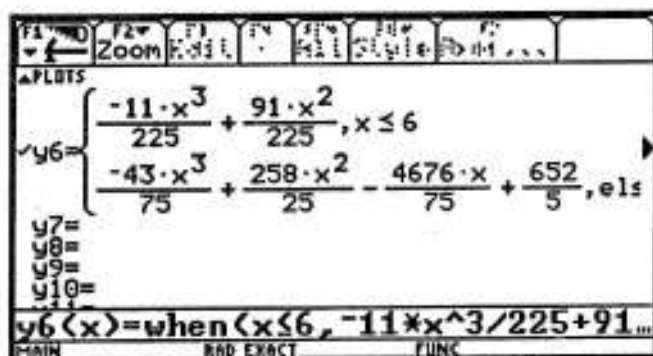
et impasse...

Deuxième choix :

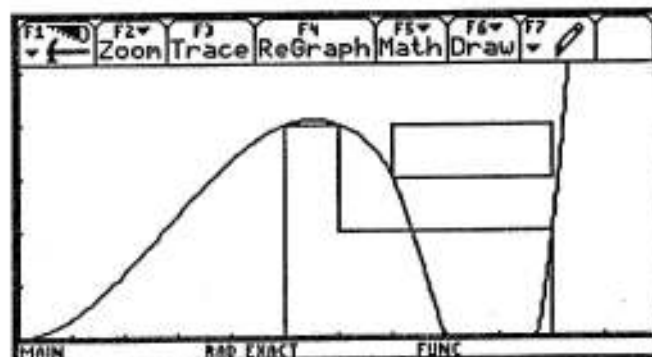
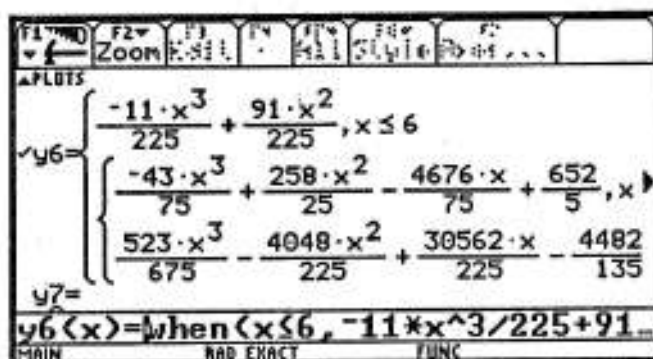


Les contraintes $f(0) = f'(0) = 0$, $f(5) = f(6) = 4$, sont réalisées. Hélas, comme le montre la mobilisation de Trace, la trajectoire percute le rectangle...

Il faut donc raccorder avant, par exemple au point d'abscisse 6, ce qui nous donne trois contraintes (raccord C_2) avec comme quatrième contrainte $f(7) = 3$.



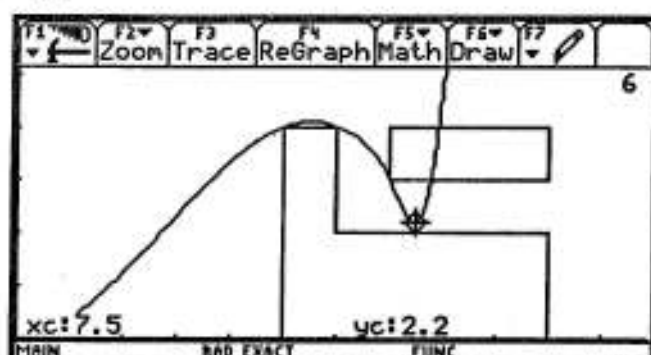
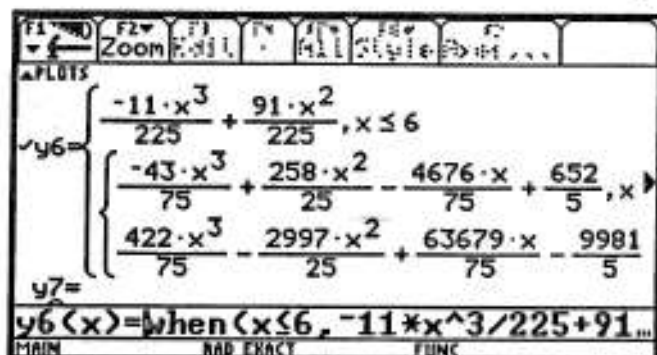
Nouveau raccord au point (7, 3), pour passer au point (10, 2).



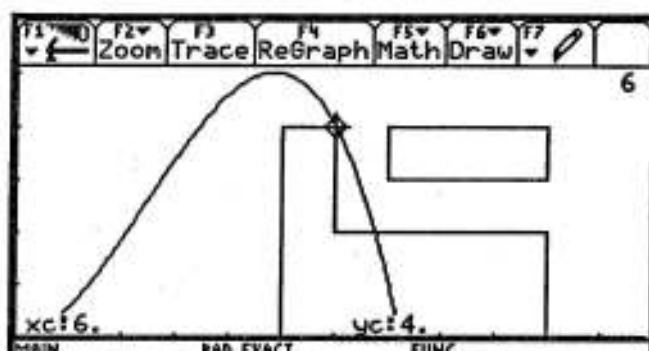
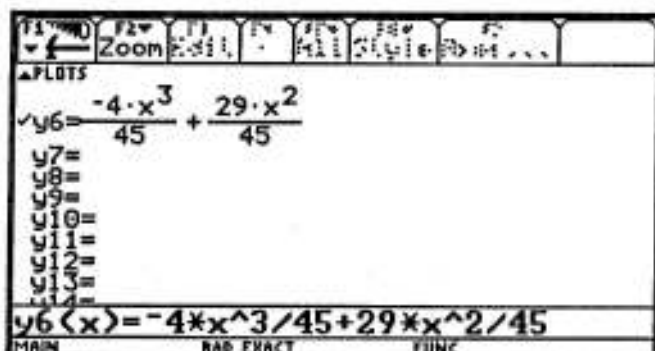
ça coïncide...

Après de nombreuses tentatives, j'arrive à trouver un raccord, en imposant le point (7,5 ; 2,2).

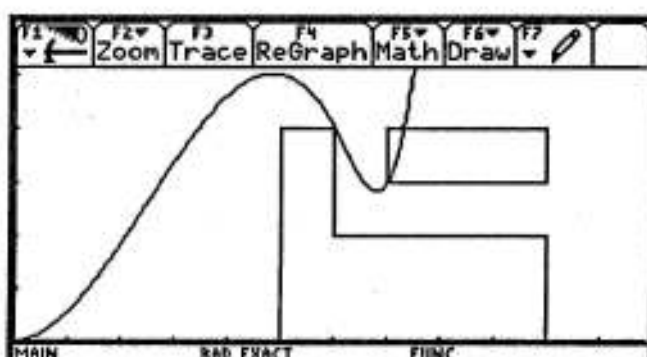
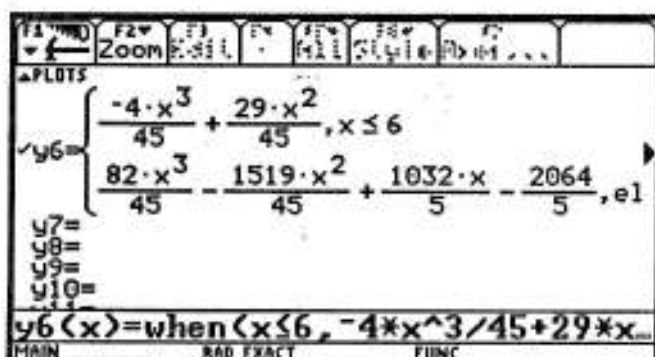
Mais ledit point se trouve "juste après la remontée" de la courbe...



Il est alors très difficile d'opérer un autre raccord du fait de la rigidité des fonctions C_2 . Soit elles percutent un des obstacles, soit alors il faut se placer aux abords du creux de la fonction (où est le curseur), mais alors on doit prendre une valeur de x avec au moins deux décimales, ce qui entraîne une inflation de calculs difficile à gérer. Ou alors on reprend le problème au départ, en imposant que la courbe passe par (5, 5) et (6, 4), pour bénéficier ensuite d'une pente plus douce...



Ensuite un raccord C_2 au point (6 ; 4) et le passage par le point (7, 3).



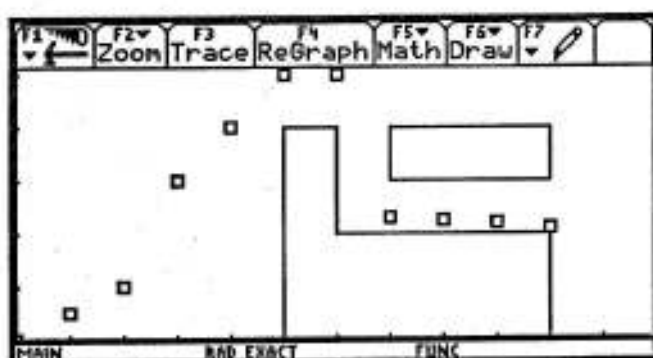
Fin provisoire, pour cette méthode.

Troisième tentative, avec une stratégie d'interpolation.

J'imagine qu'elle risque d'apparaître la plus naturelle pour beaucoup d'élèves : on recherche une fonction, donc "définie d'une seule façon", ce qui impose d'aller chercher suffisamment de points, et donc des polynômes de degré assez élevé.

On sait que cette méthode réserve un certain nombre de surprises...

Commençons par une stratégie type Lagrange. On fixe les points, et on détermine l'unique polynôme de degré convenable passant par ces points.



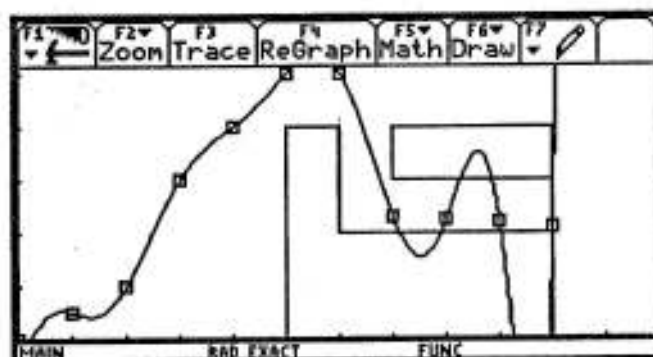
On fixe 11 points, on va donc déterminer un polynôme du 10^e degré.

$$y_2 = \begin{cases} \frac{-8 \cdot x^2}{5} + \frac{88 \cdot x}{5} - 44, & x \leq 6 \\ \frac{-7 \cdot x^3}{160} + \frac{99 \cdot x^2}{80} - \frac{469 \cdot x}{40} + \frac{157}{4}, & x \leq 6 \\ (1.9 \cdot x - 17) \cdot e^{-x} + 10, & \text{else} \end{cases}$$

$$y_2(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6) \cdot (-9!)$$

Les polynômes de Lagrange sont certes sympathiques, mais sans programme ad hoc, ils sont particulièrement fastidieux à écrire...

On bénéficie toutefois du "couper/coller" pour ne pas écrire 10 fois la même chose, ou de l'utilisation de matrices.



On bénéficie d'une fonction de classe C[∞], mais la dérivée n'est pas nulle en zéro (normal, cela n'a pas été demandé, et les accidents de parcours sont nombreux...)

Quant aux possibilités d'atterrissage, elles sont difficiles à envisager...

On a écrit explicitement le polynôme de Lagrange avec la formule consacrée. On aurait pu aussi, et ce serait peut être plus commode, écrire le système de 11 équations à 11 inconnues.

La rentrée des données dans le tableur est assez simple (on colle les formules dans les bonnes cases), et on définit alors le polynôme avec comme coefficients les cases de la matrice solution. Ce qui fait que, si on change les points, on a automatiquement le polynôme.

Pour faciliter certaines étapes, on peut aussi choisir de faire travailler les élèves "en aveugles", en rentrant les programmes correspondants avec le câble dans les machines. Après cet échec, on peut rajouter d'autres points, ou changer les points... ou renoncer.

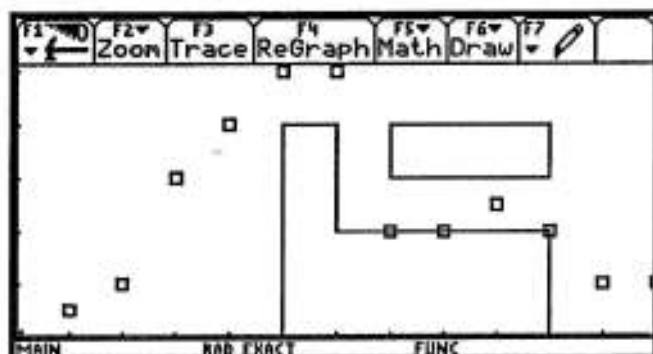
On peut imaginer que, si on donne des procédures peu couteuses aux élèves pour la recherche de ces polynômes, on risque d'assister à des comportements de "pêche", c'est à dire de recherches aléatoires, qui ont fort peu de chances de déboucher.

Mais notre rôle dans cette recherche n'est pas nécessairement d'indiquer les voies royales de résolution...

Quatrième tentative, avec une régression du quatrième degré.

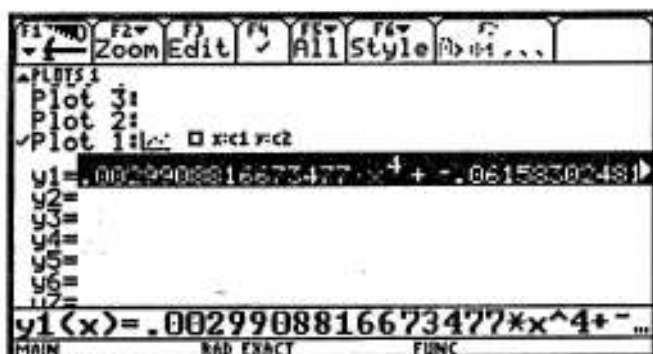
Il s'agit d'une toute autre stratégie : on va déterminer un polynôme de degré donné, qui s'approche au mieux des points choisis.

On va rentrer donc nos contraintes dans un fichier de données, et on va choisir ici une interpolation du quatrième degré (en principe la plus riche parmi les ajustements faits par la machine, suivant, j'imagine, la méthode des moindres carrés ?).

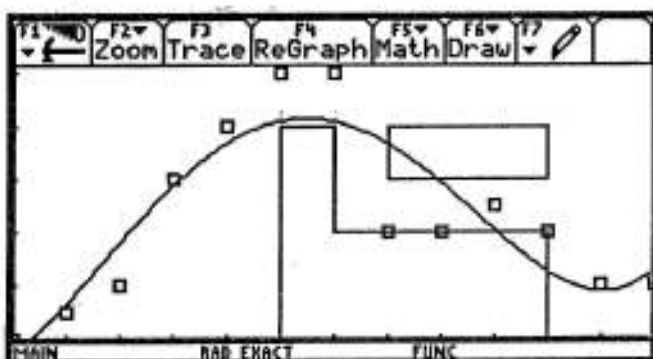


Je rentre des images pour $f(x)$, x variant de 0 à 13 par pas de 1.

Les images choisies correspondent à un trajet possible imaginé. S'agissant d'ajustement, on a "amplifié" les contraintes.



On a rentré en Y1 le polynôme d'interpolation du quatrième degré, calculé automatiquement par la machine.



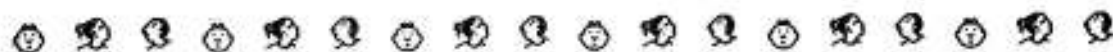
Pas très brillant comme trajet...

On pourrait alors faire d'autres tentatives, changer les points, changer l'ajustement (cubique,...), augmenter le nombre de points dans les "zones sensibles"...

Ce travail pourrait aussi déboucher sur une classification des polynômes du quatrième degré...

Fin (provisoire) des manoeuvres d'approche (des premières manoeuvres... : on n'a pas abordé ici les questions d'optimisation!). Après ces premières recherches, l'énoncé est reformulé (voir nouvelle formule ci-après).

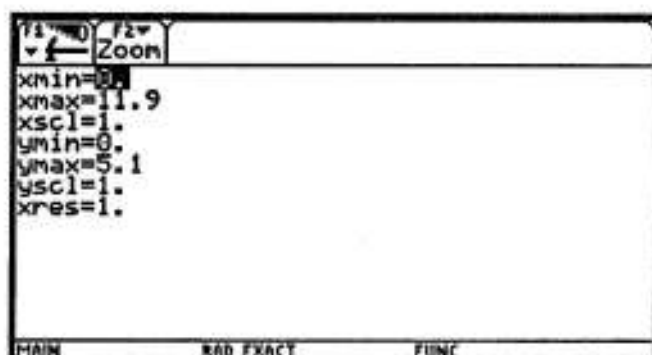
Place au travail des élèves !



Problème long (énoncé donné aux élèves le 16 Janvier)

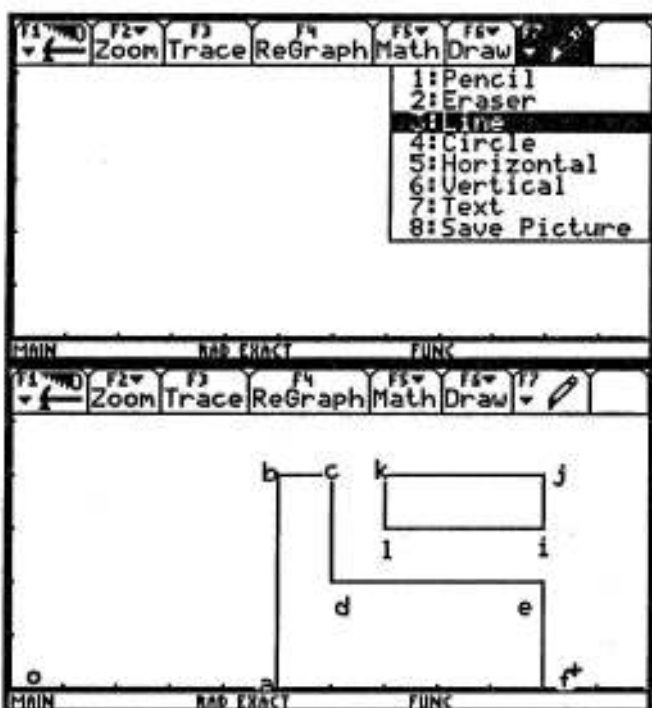
Pour la réflexion, le recherche personnelle et collective...
C'est une sorte de prolongement des TP. Le mieux est d'y réfléchir en équipe !

Préambule



On prendra pour traiter ce problème la fenêtre ci-contre.

On constatera que, si on se déplace dans cette fenêtre avec le curseur, les abscisses des points sont des valeurs décimales "simples" (pourquoi ?)

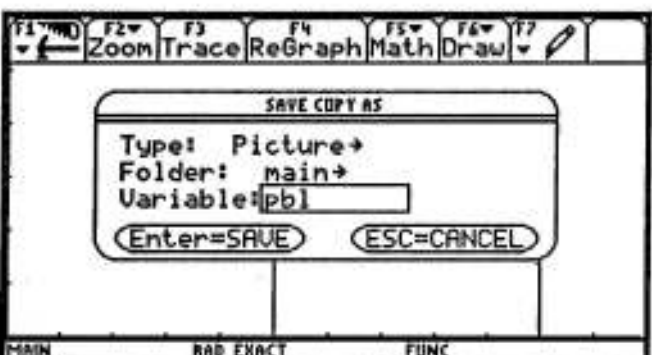


On va commencer par dessiner dans la fenêtre graphique une configuration simple, avec la commande Line

Description de la commande page 7-18 du mode d'emploi

Les points ont les coordonnées suivantes :
O(0, 0) ; A(5, 0) ; B(5, 4) ;
C(6, 4) ; D(6, 2) ; E(10, 2) ;
F(10, 0) ; I(10, 3) ; J(10, 4) ;
K(7, 4) ; L(7, 3).

On peut noter les points avec le menu F7 (Text), mais c'est inutile, et nuisible même (surcharge de l'écran)



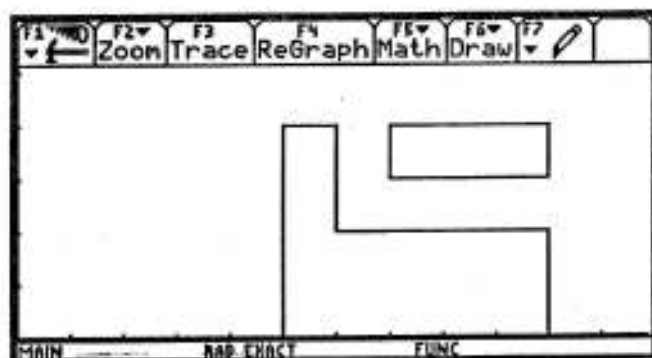
On va enfin enregistrer cette figure (choisir le menu F1), avec comme nom de répertoire pbl (comme problème long)

Description de la commande page 7-19 du mode d'emploi

La figure est dès lors enregistrée. Pour la récupérer, Menu F1, Open

Enoncé

On peut maintenant commencer le problème...



Le dessin ci-contre est une modélisation des contraintes s'exerçant sur la trajectoire d'un avion :

Il décolle en O, doit passer au dessus d'un relief qui culmine en B, puis passer au dessus du plateau [DE], mais sous la masse nuageuse (IJKL), et enfin atterrir sur une piste qui commence en

F, et de longueur infinie (pourquoi pas ?) : le contact entre l'avion et la piste, pour être le plus doux possible, devra se faire "à l'infini".

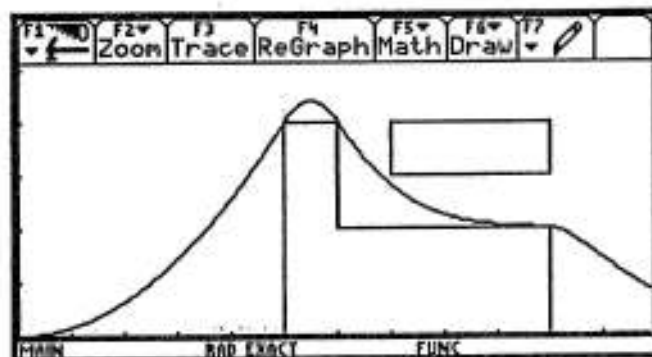
On considèrera que le dessin ci-dessus est une modélisation qui "enveloppe" les reliefs réels : donc l'avion peut passer par B, mais pas en dessous !

Question 1

Déterminer une fonction dont la représentation graphique satisfasse à toutes ces contraintes. On n'utilisera que des combinaisons de fonctions puissances et de l'exponentielle.

On trouvera les indications relatives aux fonctions dans le mode d'emploi, chapitre 23.

On trouvera des indications relatives à la résolution des systèmes d'équation dans le mode d'emploi, chapitre 22.



Pour montrer que tout ceci est possible, voici un exemple d'itinéraire...

Il resterait bien sûr à prouver que la fonction convient bien (contraintes d'atterrissage, de décollage, position par rapport aux points critiques B, C... Mais la courbe a belle allure...

Question 2

On veut maintenant **optimiser** le trajet. L'idée est que l'avion monte "le moins possible". Cela peut se comprendre de deux façons (au moins) :

- l'avion transporte des voyageurs cardiaques. Aussi, le pilote doit s'arranger pour que, sur le trajet, la pente maximale de l'avion (en valeur absolue) soit la plus faible possible. Pour deux fonctions données, f et g , on considèrera $\sup |f'|$ et $\sup |g'|$. La fonction qui aura le plus petit $\sup$ sera réputée la meilleure.

- l'avion est un avion espion. Il devra donc voler au plus près des reliefs. Il faudra ici minimiser l'intégrale de f . A vos compas !

Timing : le préambule doit être traité assez rapidement (demander aux copains en cas de blocage !), la première question doit être bien avancée d'ici la fin du mois de Janvier : le TP du Jeudi 1 Février y sera consacré. Pour la deuxième question, on verra en Février. Ce travail est important ! Les meilleures productions seront primées...

Problème long, I.

Premier bilan des travaux des élèves.

Le 7 Février, comme prévu, la séance de TP est consacrée à un premier bilan des travaux réalisés, seuls, ou en groupes.

Ce qui est remarquable, c'est l'intérêt de la plupart des élèves pour le problème :

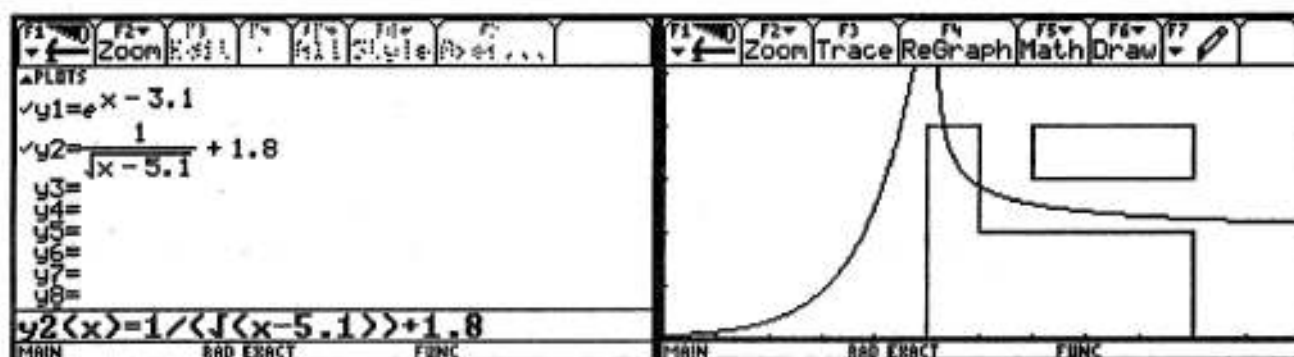
- le graphique du décor a été préalablement exécuté, et rangé dans le fichier "pbl", comme demandé dans l'énoncé ;
- des solutions ont été trouvées par plusieurs élèves, toujours originales, et témoignant d'un travail réel ;
- tous les groupes ont cherché pendant le TP à améliorer les solutions existantes pour les plus avancées, à trouver des ébauches de solution pour les autres, parfois maladroitement, mais toujours avec tenacité.

Petit panorama des solutions trouvées ... et communiquées !

On va d'abord considérer les solutions données "brutes", puis les solutions qui ont été communiquées avec un rapport témoignant de l'historique de la recherche.

1. La solution de Caroline.

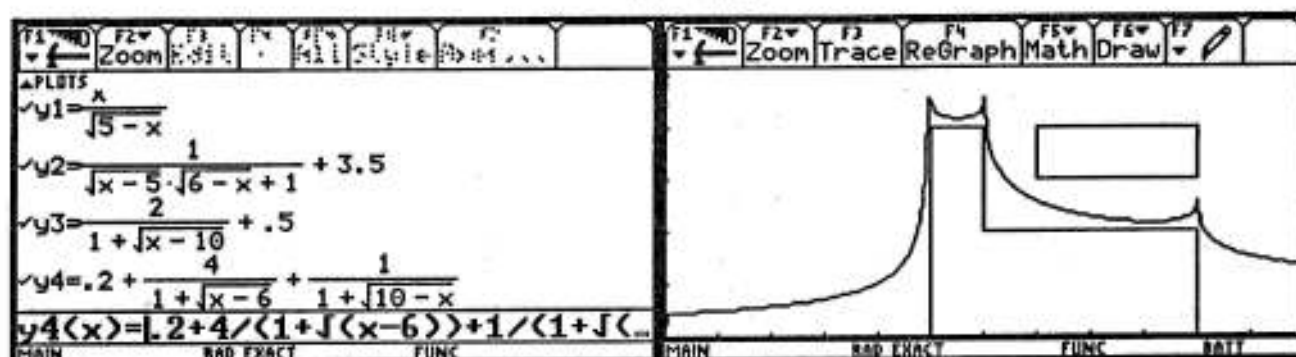
- quelques erreurs : la solution en Y2 n'est pas franchement un polynôme, et la dérivée en zéro n'est pas nulle ;
- une idée qui est peut être intéressante : définir le tronçon à gauche du relief, puis un tronçon à droite... Mais il faut pouvoir ensuite raccorder les deux bouts !



2. La solution de Nathalie et Tristan.

La plus originale. L'astuce est de calibrer le domaine de définition des fonctions pour que les tronçons de la fonction ne dépassent pas l'intervalle où ils conviennent. Il y a aussi une certaine intelligence des raccords : le recollement le long d'asymptotes assure une certaine "continuité des pentes" !

On imagine le travail réalisé pour déterminer les constantes permettant de respecter les contraintes du trajet...



(la première fonction, qui n'apparaît pas dans le fichier ci-dessus, est $\frac{x^{0,01}}{\sqrt{5-x}}$)

L'intelligence mise dans cette réalisation devrait permettre de réenvisager le problème, de plusieurs points de vue :

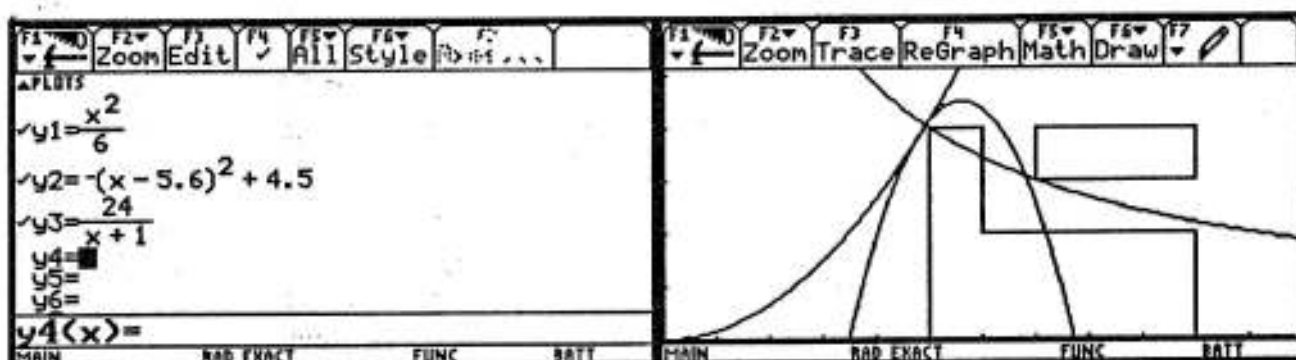
- les fonctions utilisées (polynômes et exponentielles) ;
- le décollage ;
- les raccords.

Ce qui nécessitera probablement d'utiliser la syntaxe des "fonctions définies par morceau"...

3. La solution d'Erwan et Hakim

Les fonctions utilisées sont licites (sauf la fonction inverse...). Cependant...

- il faudrait apprendre à définir des fonctions par morceaux, pour éviter "les bouts qui traînent"...
- les raccords ne semblent pas être particulièrement dérivables...



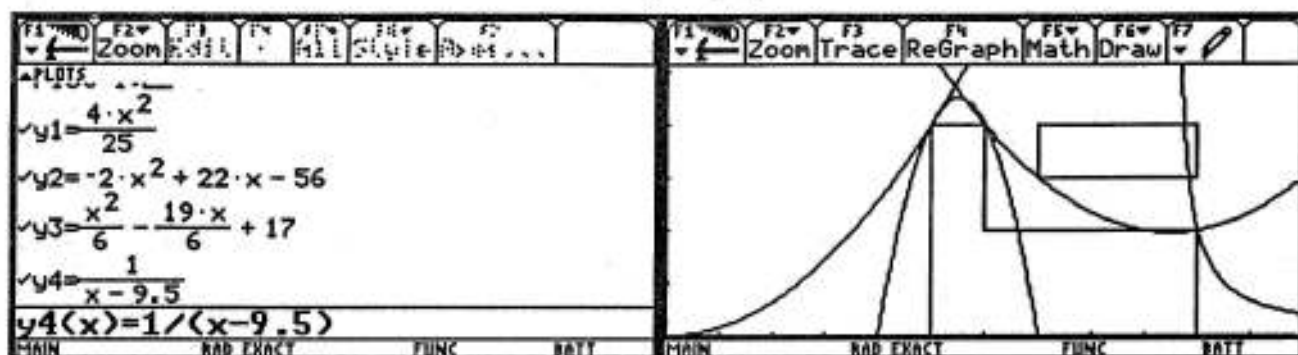
4. La solution d'Alexandre et Laurent

On trouve là une solution de la même inspiration que la précédente, avec les mêmes qualités, et les mêmes défauts.

Le rapport de recherche garde ici une trace du travail effectué :

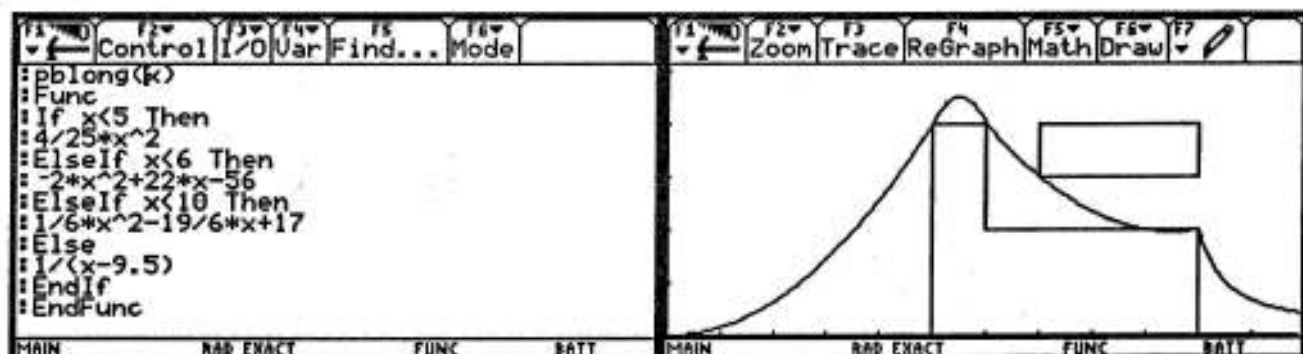
" Pour arriver à ces résultats, j'ai utilisé les fonctions de référence tournées et retournées dans tous les sens..."

Le résultat un peu désordonné provient d'une recherche de même nature...
(voir ci-dessous)



5. La solution d'Alice et Brigitte

Première solution utilisant l'éditeur de programme. C'est d'autant plus intéressant que cette perspective n'avait pas été indiquée en classe...



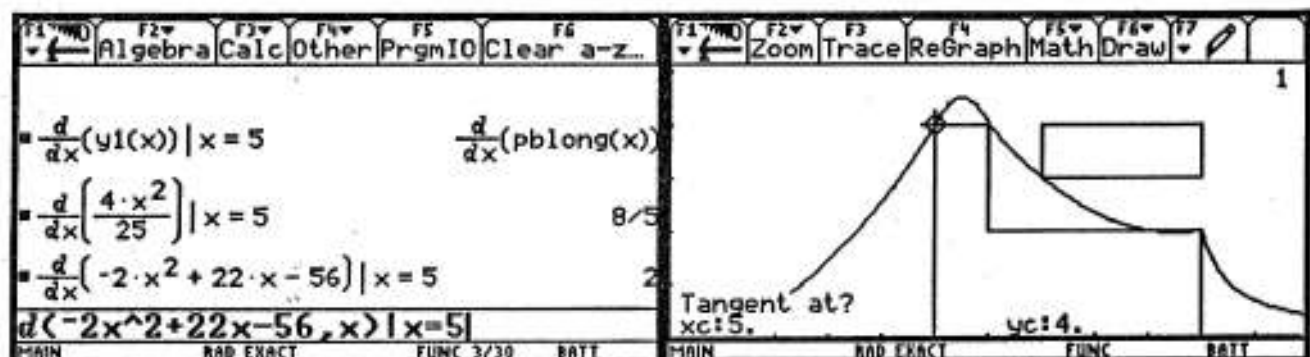
Les problèmes du tracé sont clairs :

- le tracé percute la plate-forme ;
- les raccords sont continus, mais pas dérivables.

Le binôme l'a constaté, en notant : il y a un problème pour la troisième fonction : il faut que le nombre dérivé de la 3ème fonction soit le même que le nombre dérivé de la 4ème fonction en 10 "pour que le voyage soit possible physiquement".

Il est vrai que la cassure de pente est claire en 10. Mais elle existe aussi aux autres points de jonction, par exemple en 5, comme on le verra ci-dessous :

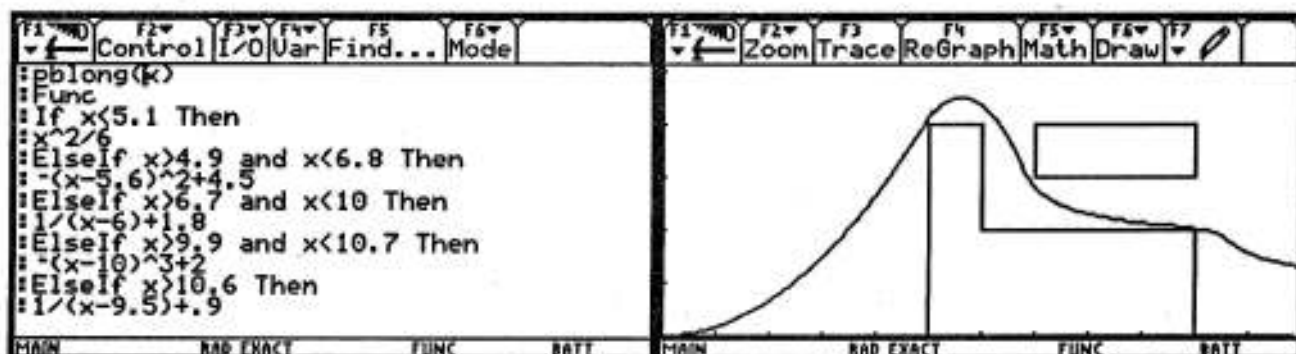
- par le calcul exact, dans l'application initiale (on notera que la machine refuse de dériver la fonction Y1 définie à partir d'un programme) ;
- par le tracé des tangentes, dans l'application graphique : si on demande à la machine de tracer la tangente au point 5 (commande Tangente dans le menu Math), elle répond très explicitement : "no solution". En fait, elle refuse de tracer les tangentes en tout autre point. Il semble que ce soit un défaut des fonctions rentrées en programme...



6. La solution de Pierre

Identique dans son principe à la résolution précédente. Pierre note sa méthode :

- utilisation du manuel pour définir les fonctions par intervalle ;
- utilisation des fonctions de référence (x^2 , $1/x$...)
- puis, par des manipulations quelconques, le hasard fait bien les choses. ! "



On notera que la réalisation est esthétiquement assez réussie. Le procédé utilisé est tout à fait astucieux : c'est la stratégie des raccords en "manchons". Le premier tronçon est défini jusqu'à 5, 1, et le deuxième tronçon prend le relais dès 4, 9. Ce qui, pour Pierre, assure la continuité des pentes...

Il y a l'illusion que des fonctions polynômes différentes peuvent coexister sur un intervalle, et que la machine peut gérer cette coexistence...

En fait, la machine, jusqu'à 5, 1, prend la première fonction, et, à partir de 5, 1, par défaut, prend la deuxième fonction...

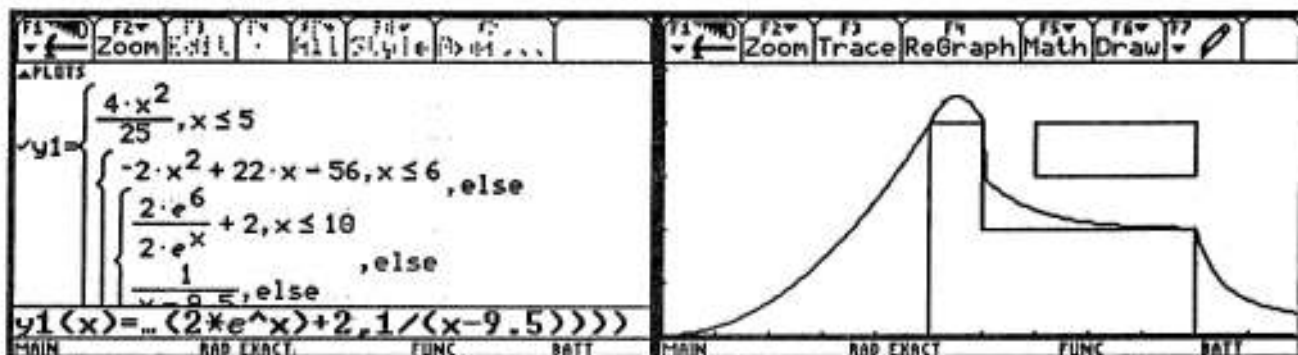
Le problème de raccord de dérivabilité va ainsi se poser en 5, 1.

Cette stratégie est assez révélatrice du type "bricoleur". Une intelligence de la situation, qui a recours à des solutions techniques au détriment d'outils théoriques (ici la dérivation, qui n'est pas évoquée).

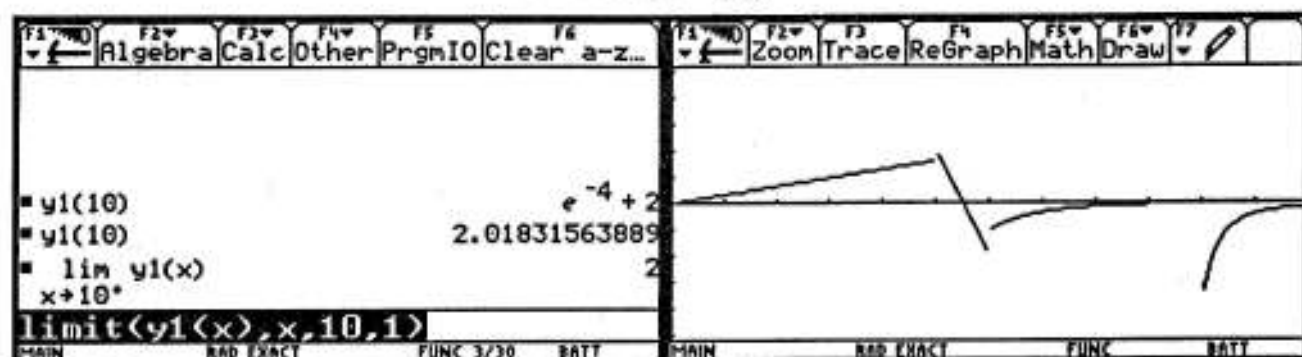
7. La solution de Cyril et Patrice

On a là un premier rapport de recherche assez consistant :

" On se sert des fonctions de référence puissance et exponentielle. Puis par tâtonnement on ajuste les fonctions pour qu'elles ne percutent pas les obstacles. Ensuite, pour les raccorder, on utilise sur la page graphique le mode intersection. Ainsi on peut définir les différentes fonctions sur différents intervalles. Pour établir un décollage de pente faible, on a donc utilisé la fonction carré, soumise à un coefficient adapté aux données. Pour l'atterrissage, on a choisi une fonction qui admet une limite en $+\infty$ égale à 0."



Il y a un problème de non continuité en 10, et un problème de dérivabilité, comme on le voit sur la courbe de la dérivée ci-dessous.



8. La solution de Cécile

Premier rapport de recherche complet. Un extrait :

" - Partie OB : courbe de la forme des exponentielles, décalage de la courbe et accroissement d'amplitude. La recherche à taton donne $f(x) = e(\frac{x}{3}) - 1$.

- Partie BC : trajectoire circulaire en forme de demi-cercle, soit parabole avec concavité vers le bas, $-x^2$. De plus, décalage de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe Y1 arrive à l'abscisse 4,85 alors que $x_B = 5$. Il y a donc un écart de 0,15. Pour conserver cet écart afin d'obtenir une courbe parfaitement symétrique par rapport au milieu de BC, il faut que la courbe passe par l'abscisse 6,15.

Equation de la trajectoire du type $-x^2 - ax + b$.

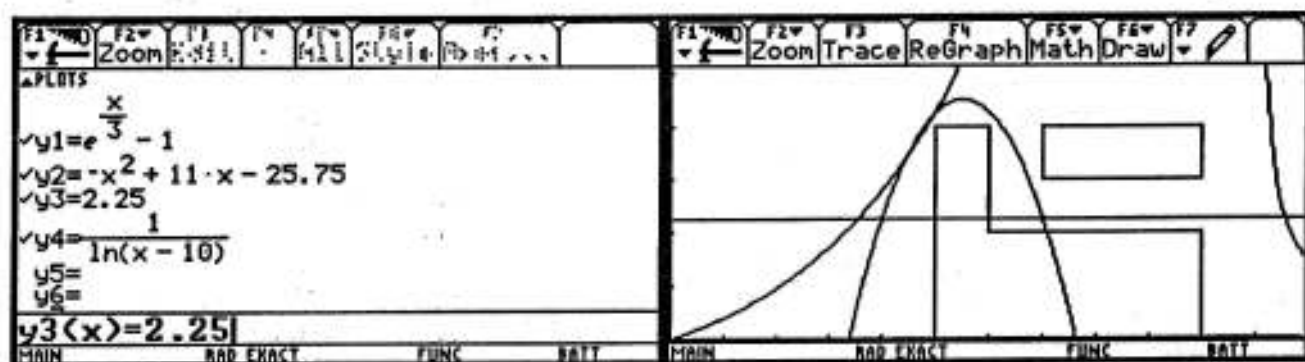
$$-(4,85)^2 - a \cdot 4,85 + b = 4$$

$$-(6,15)^2 - a \cdot 6,15 + b = 4$$

D'où $a = -11$.

Recherche de b à taton pour modifier le repère, d'où $Y2 = -x^2 + 11x + 25,75$

La recherche donne finalement le résultat suivant :



Les problèmes posés par ce travail :

- le calcul est fait en valeur approchée pour b : la machine donnait exactement $b = -25,8275$;
- la définition des fonctions par morceaux n'est pas utilisée ;
- les problèmes de raccord sont à revoir à tous les niveaux : déjà la dérivée n'est pas nulle en zéro !.

9. La solution de Vincent

On découvre ici un deuxième rapport de recherche en tout point remarquable. Un extrait de celui-ci, pour le premier tronçon :

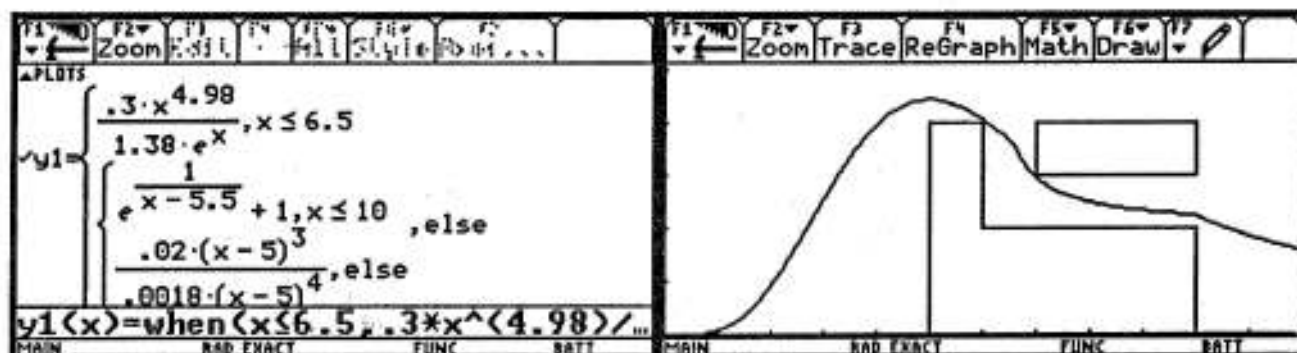
" Sur l'intervalle $[0 ; 6,5]$, je prends comme fonction $\frac{x^n}{e^x}$ "

Suit alors le calcul de la dérivée qui assure que, comme voulu, $f'(0) = 0$.
Puis, pour ajuster la courbe, il ajoute deux coefficients a et b :

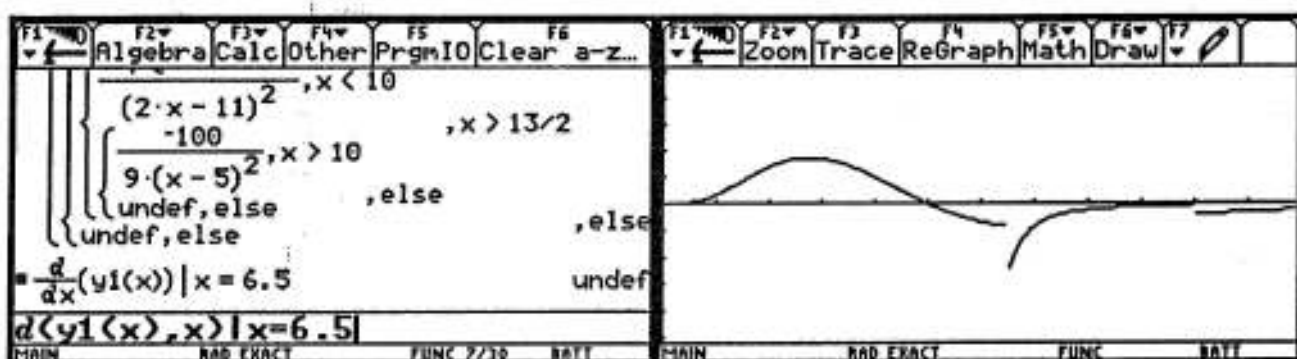
" $f(x) = \frac{bx^n}{ae^x}$. Je prends $n > 1$ pour que la pente soit faible, et je prends $b = 0,3$ pour que la pente soit très faible au début. Je prends $a = 1,38$ pour que la courbe ne touche pas le point C.

Car le numérateur dirige la fonction sur $[0 ; 5]$, puis c'est ensuite la fonction exponentielle qui l'emporte..."

Il y a là un réel talent, qui combine la connaissance des fonctions de référence, et des techniques d'ajustement assez habiles...



Le problème est que les raccords, s'ils sont continus, ne sont pas dérivables, comme on peut le voir, aussi bien en calculant la dérivée aux points litigieux, qu'en observant la courbe de la fonction dérivée... comme on peut le voir ci-dessous.



Le travail est donc à reprendre, en intégrant cette donnée essentielle !

10. La solution de Jérôme L.

Troisième rapport de qualité. Et première recherche d'une solution globale.

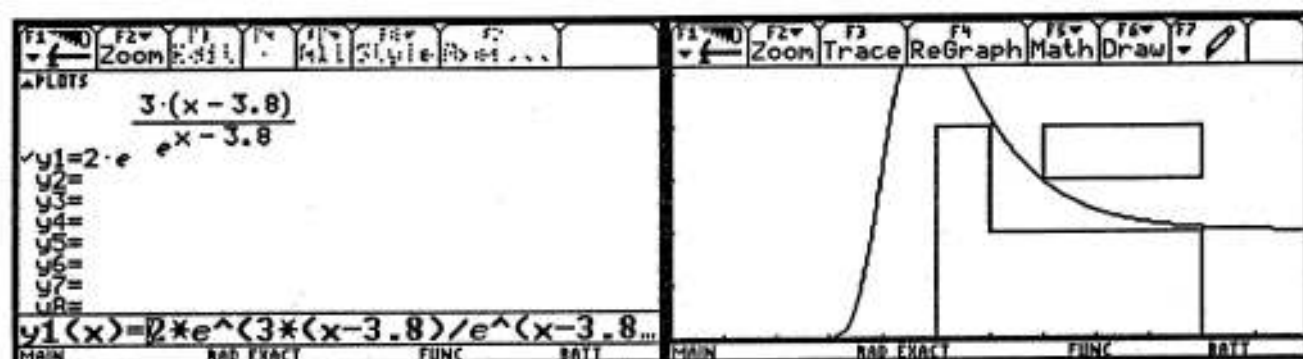
Un extrait du rapport :

"La forme de la fonction n'est pas celle d'une fonction de référence mais certains caractères nous font nous diriger vers plusieurs tentatives..."

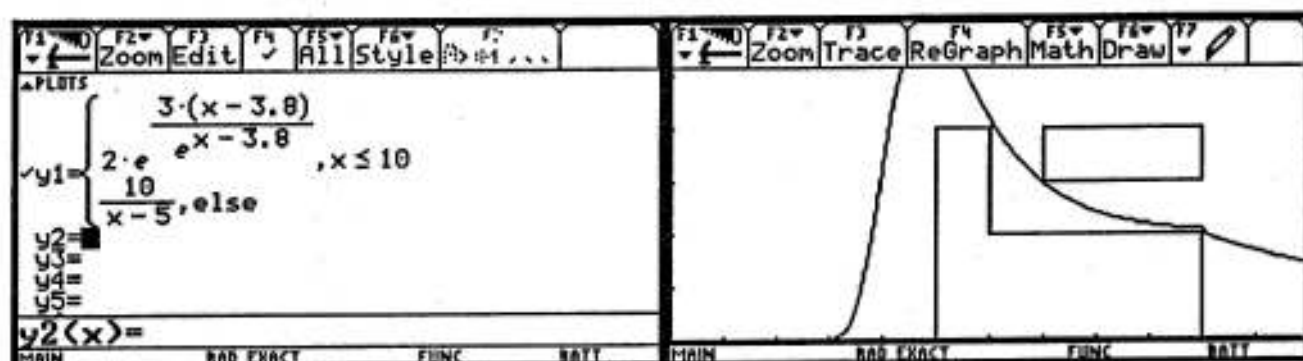
La forme en cloche lui rappelle la fonction $\frac{x}{e^x}$. Pour des raisons non explicitées, il décide d'en prendre l'exponentielle. Il adapte ensuite pour avoir l'objet voulu :

" - réglage de l'amplitude : on multiplie la fonction $\exp(\frac{x}{e^x})$ par 2. Le graphique semble montrer qu'il faut renforcer. On essaie maintenant la fonction $2 \exp(\frac{3x}{e^x})$;

- réglage du cadrage : le maximum de la dernière fonction essayée est atteint pour x proche de 1, alors que, d'après l'énoncé, il semble être atteint vers 5, 5. On va donc effectuer un changement de variable. $X = x + a$. Il reste à déterminer a . On va essayer 4, ce qui semblerait logique. (...) Le cadrage est presque bon, on va faire jouer l'alignement de la fonction pour avoir la fonction voulue, et on va abaisser le cadrage de 0, 2 car cela semblerait bon sur le graphique. D'où $2 \exp(\frac{3(x-3,8)}{e^{x-3,8}})$."



En cours de TP, Jérôme se rend compte que la limite en $+\infty$ ne convient pas, et détermine une fonction de raccord :



Double problème pour cette solution :

- en arrangeant un aspect, Jérôme en dérange un autre : le raccord en 10 n'est pas continu...
- et la fonction initiale ne convient pas en 0 : la dérivée de f n'est pas nulle en ce point (elle est presque nulle, ce qui ne suffit pas...).

Une leçon s'impose à nouveau :

utiliser à chaque fois que faire se peut l'application initiale, en calcul exact, pour contrôler ce qui est fait...

Voir ci dessous le contrôle :

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...	←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\frac{d}{dx}(y1(x)) _{x=0} = \frac{144 \cdot e^{-57 \cdot \frac{19}{5}}}{5} + 19/5$						$\frac{93 \cdot e^{-31/5}}{5}$					
$\frac{d}{dx}(y1(x)) _{x=0} = 6.2526634766E-219$						$2 \cdot e^{-31/5}$					
$d(y1(x), x) _{x=0}$						2.07693778544					
$\text{limit}(y1(x), x, 10, 1)$						2					
MIN	RAD	EXACT	FUNC	2/30	EDIT	MIN	RAD	EXACT	FUNC	2/30	EDIT

On voit, dans le cadre de gauche, le calcul exact et approché de la dérivée de f en 0.

C'est pas 0, mais presque.

Dans le cadre de droite, on voit que la valeur de la fonction en 10 ne coïncide pas avec sa limite à droite, ce qui témoigne d'une discontinuité certaine...

D'autres recherches de solutions globales n'ont pas abouti :

Michaël et Aurélie, Elsa et Guillaume, ont recherché une fonction "globale", en fixant 8 contraintes ($f'(0) = f(0) = 0$, $f(5) = 4$...) mais en ne prenant que 4 ou 5 degrés de liberté (du type $f(x) = e^x (ax^2 + bx + c)$). Ils avaient peu de chances d'aboutir...

Fabienne et Christelle cherchent un polynôme du deuxième degré qui vérifie $f(5) = f(6) = 4$, et $f'(5,5) = 0$. Elles utilisent la résolution machine des systèmes. Stupeur, elles trouvent comme solution la fonction constante égale à 4...Evidemment, puisqu'elle vérifie bien les contraintes imposées !

Signalons tout de même que les élèves qui ont peu produit pendant cette heure de TP étaient des élèves qui étaient arrivés "vierges" au début de la séance, sans travail préalable chez eux... On a rien sans rien !

Quelques observations sur la typologie des élèves, et le travail réalisé.

Il y a une dispersion des attitudes assez naturelle :

- les élèves "scolaires" n'ont pas vraiment commencé le problème (Caroline). Des brins de courbe ont été tracés, sans cohérence. Il n'y a pas d'apprentissage consécutif aux tentatives successives ;

- les élèves "rationnels" ont procédé par relevé des contraintes, expression mathématique de celles-ci, et tentative de résolution de système. Sans aboutir, même à des solutions partielles (Elsa, Michaël) ;

- les élèves "bricoleurs" utilisent de manière intensive la méthode de "fausse position", avec le recours aux différentes possibilités de la machine (programmation, intersection...). Cette méthode d'essai / erreurs / correction a donné des fruits... partiels. Les outils mathématiques sont peu sollicités (la dérivation n'apparaît pas). Le travail reste souvent dans le cadre graphique ;

- les élèves "théoriques" recherchent d'abord, dans l'allure de la solution, les références nécessaires. Ils procèdent par ajustement, mais en réfléchissant à tout moment sur l'effet des différentes fonctions (laquelle "dirige" l'autre...) ;

- les élèves "expérimentateurs" se situent entre les trois types précédents : quelques recherches de formalisation du problème, quelques manipulations de la machine, quelques recherches d'objets de référence... Du coup, le travail piétine un peu...

Il y a donc, dans l'investissement de la recherche, deux pôles :

- les élèves scolaires, et les élèves rationnels, un peu sur la défensive ;

- les élèves "bricoleurs" et "théoriques", qui sont le moteur des découvertes successives...

Pour relancer la recherche, une semaine après...

Je reviens sur la question posée dans le préambule : pourquoi ce choix du repère, et pas un autre ? Les élèves, fidèles à leur habitude de ne lire dans un problème ni l'introduction, ni les annexes, n'ont pas abordé cette question, qui n'est pourtant pas sans intérêt...

Je présente ensuite à l'aide de transparents toutes les solutions présentées ci-dessus, avec les problèmes posés. Chacun des auteurs commente sa solution, détaille les mécanismes de recherche, pour toute la classe.

J'insiste particulièrement sur :

- la nécessité de donner un historique de la recherche ;
- la nécessité de fixer clairement les contraintes : on recherche une fonction continue, dérivable, avec une dérivée en zéro nulle, et une limite en $+\infty$, et qui respecte les contraintes du relief ;
- la nécessité de vérifier que ces contraintes sont respectées, en utilisant les ressources du calcul exact dans l'application initiale ;
- la nécessité d'utiliser les capacités de la machine en ce qui concerne l'écriture des fonctions (les fonctions définies par morceaux) et la résolution des systèmes ;
- j'indique que, pour définir une fonction "par morceaux", il est plus efficace d'utiliser la syntaxe "when..." que d'écrire un programme : le programme ne permet pas d'obtenir la dérivée, ce qui est essentiel pour régler les raccords, et ensuite, pour optimiser les tracés.

Pour finir, je récapitule les deux stratégies qui ont été utilisées jusqu'à présent : soit la recherche d'une seule forme de fonction, soit la recherche de plusieurs tronçons avec des raccords convenables.

Les deux stratégies ont des avantages... et des inconvénients :

- la première nécessite de tenir compte de toutes les contraintes en même temps. De ce point de vue, il faut se souvenir qu'il faut en général autant de degrés de liberté que de contraintes... L'avantage de cette stratégie est qu'il n'y a pas de problème de raccord à gérer, et que, si les fonctions utilisées sont dérivables, le résultat global est d'emblée continu et dérivable...
- la deuxième permet de gérer peu de contraintes à la fois, mais on doit contrôler le caractère continu et dérivable de tous les raccords...

Mais quelque soit la stratégie choisie, il est indispensable de travailler avec des fonctions qui font référence : quand on recherche un type de courbe, on doit avoir en tête un type de fonction, c'est à dire avoir en mémoire une bibliothèque de fonctions bien organisée !

Le problème est relancé dans la classe pour encore 15 jours de recherche personnelle ou collective !

J'ajoute aussi une question, qui n'est pas tout à fait un gag : peut-on imaginer une trajectoire de l'avion avec un looping ?

Au-delà de la plaisanterie, il y a dans cette question une double préoccupation :

- faire en sorte de maintenir la tension de recherche des élèves qui sont très en avance
- faire réfléchir sur ce qu'est une fonction. Il ne faudrait pas que la définition d'une fonction " par morceaux " ne dilue la caractéristique d'une fonction : une variable, une image...

Remarque : le jour où je propose le looping, Jérôme s'exclame : " mais ce n'est pas possible ! Un même point aurait plusieurs images ! ". Preuve que l'idée de fonction a fait son chemin...



Problème long, II



Le retour... Les mêmes, trois semaines après.

Trois semaines après, le Jeudi 22, chacun revient avec de nouvelles propositions de solutions. Qu'ont apporté de nouveau le temps de maturation, le retour critique sur les premières solutions ? (Tant pour les professeurs que pour les élèves...)

A. D'abord du côté des professeurs...

La recherche sur un problème ouvert est assez intéressante du point de vue de l'observation des mécanismes qui se mettent en place. Chez l'élève, comme chez les professeurs qui assurent le suivi de l'expérimentation !

Nous nous sommes en effet posé la question : sur quelles pistes sommes-nous partis, et pourquoi ?

Pour constater que, comme les élèves, nous étions partis en bricolant, en déterminant une fonction sur un premier tronçon, puis en recollant sur un deuxième tronçon... et ainsi de suite.

Il semble que la disposition d'un outil assez puissant, et la curiosité d'en explorer les différentes facettes, ont agi dans le sens de ce "bricolage" expérimental.

Si nous appliquons à nous-mêmes les conseils que nous donnons à mes élèves, nous ne partons pas de la même façon. Nous examinons le problème, nous cherchons des analogies avec des problèmes connus, nous essayons de le rattacher à une classe de situations familières.

Il s'agit finalement, si on ne retient pas dans un premier temps les contraintes de décollage et d'atterrissage, d'un problème de fonction de classe C_1 (au moins) à faire rentrer dans un tuyau. Mais, bien sûr, c'est un problème de convergence uniforme d'une suite de fonctions ! Et pour cela, nous disposons de théorèmes puissants d'existence (Weierstrass !), et même de méthodes de construction d'objets via les polynômes, version Bernstein, ou les polynômes trigonométriques.

On retrouve aussi l'idée que la limite uniforme de fonctions dérivables n'est pas nécessairement dérivable. La méthode de constructions d'objets envisagée ne nous donnera pas des solutions optimales (elles n'existent pas toujours, cf correction page 281), mais des solutions adaptables, en modifiant la fonction affine d'appui, ou en prenant des termes de la suite construite "de plus en plus loin".

Par ailleurs, on se pose aussi les questions de majoration, ou minoration, des constantes qualifiant les fonctions trouvées (intégrale, et maximum de la valeur absolue de la dérivée) :

- l'intégrale est nécessairement supérieure à 12 (relief oblige) ;
- le maximum de la valeur absolue de la dérivée est nécessairement supérieur à 1 (inégalité des accroissements finis oblige, il suffit de considérer le parcours "affine par morceaux").

Une fois définis les contraintes, et un cadre théorique adéquat, on peut reprendre la recherche, mais dans de toutes autres conditions que lors des premiers tâtonnements expérimentaux !

1. Version polynômes trigonométriques (rédigée par Maryse Noguès)

Toute fonction numérique continue de période 2π est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

Si f est une fonction numérique continue sur un compact $[a,b]$, on se ramène via un changement de fonction à g 2π -périodique vérifiant $g(a) = g(b)$. On peut alors approcher la fonction g par une suite de polynômes trigonométriques. Via la transformation réciproque, on se ramène alors à f qui est ainsi exprimée comme somme d'une série trigonométrique, modulo une fonction affine.

Premières approximations :

Pour construire cette suite, nous avons pris dans un premier temps comme fonction f une fonction affine par morceaux réalisant les contraintes de parcours (voir ci-dessous), mais sur le compact $[0,4\pi]$ pour simplifier les changements de variable nécessaires.

- Pour que sur $[a,b]$, on ait $f(a) = f(b)$, on utilise la fonction :

$$x \rightarrow f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Ce qui donne ici $f(x) + \frac{1}{2}x - \frac{15}{8\pi}x$ car $a = 0$; $b = 4\pi$, $f(0) = 0$ et $f(4\pi) = -2\pi + \frac{15}{2}$.

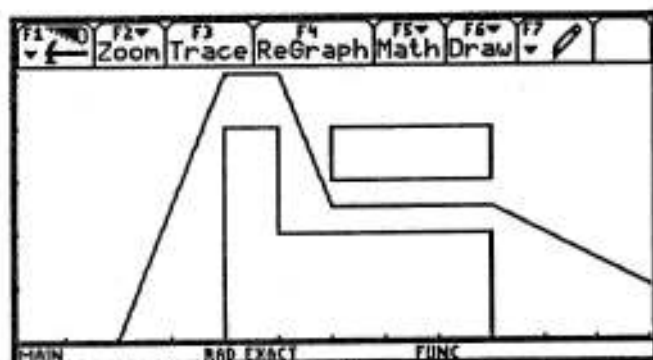
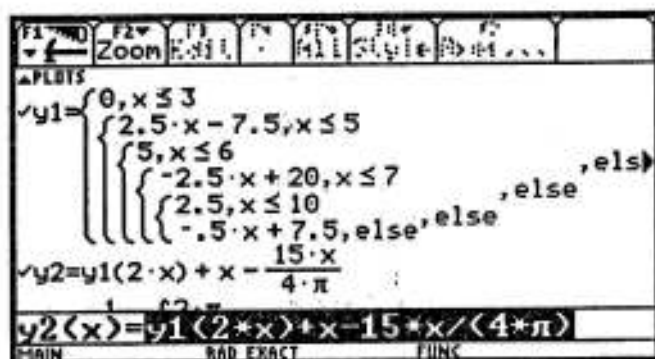
- Pour ce ramener à l'intervalle $[0,2\pi]$, on effectue le changement de variable :

$$t \doteq 2\pi \frac{x-a}{b-a} \quad \text{ce qui donne ici } t = \frac{x}{2}.$$

On obtient ainsi la fonction $g(x) = f(2x) + x - \frac{15}{4\pi}x$.

f et g sont entrées respectivement en $y1$ et $y2$.

Par ailleurs nous avons aussi décalé la fenêtre de représentation des courbes : $[1,1;13].[0;5,1]$.



- Le polynôme trigonométrique d'ordre k correspondant à $y2$ est alors :

[Lelong-Ferrand 1977]
$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=k} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

avec $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y2(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y2(x) \cos nx dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y2(x) \sin nx dx$ pour

n variant de 1 à k

et pour obtenir celui correspondant à $y1$ on fait les transformations réciproques, ce qui donne :

$$P'(x) = P\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} + \frac{15x}{8\pi}$$

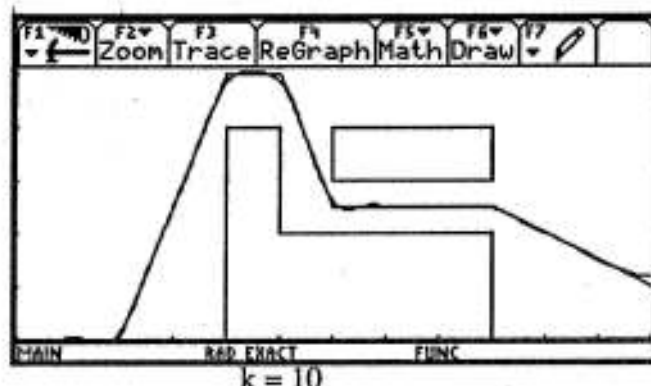
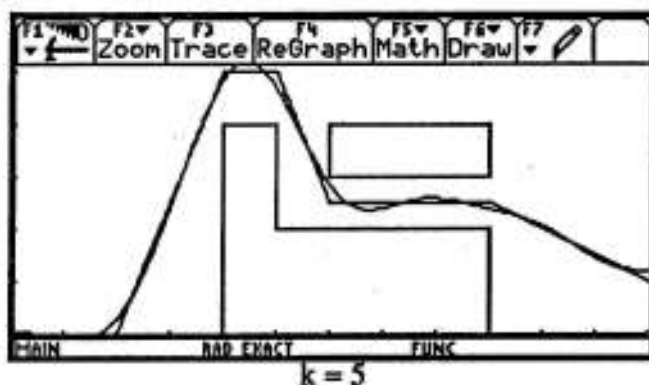
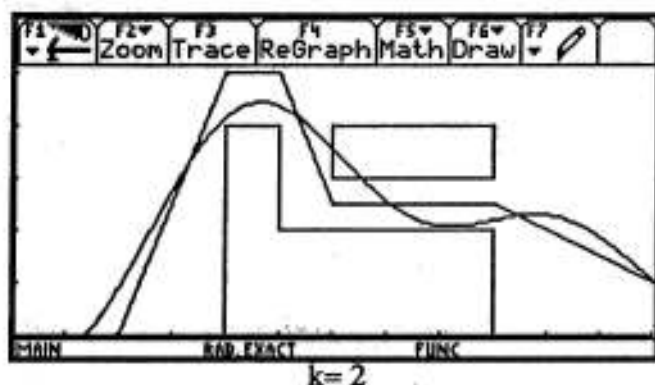
- On a calculé successivement les polynômes obtenus pour $k = 2$, $k = 5$ et $k = 10$.
Mais si l'on peut entrer directement les formules de calcul dans les fichiers y de la calculatrice, le calcul est ensuite très long et le traçage de la courbe très difficile : pour chaque valeur la calculatrice refait les calculs.
Ainsi seulement pour $k = 5$, le temps de traçage est ... : j'ai "planté" la calculatrice (5h).
Pour $k = 2$, j'ai essayé, puis renoncé après 1h 30 minutes.

Essayons de comprendre l'origine de cette lenteur.

Je fais calculer pour $k = 2$, en mode approché $P'(1)$ (donc pour une seule valeur) : la réponse est -0,488307835009, obtenue après 10 minutes environ. Il y a 238 points de calcul en écran graphique et les calculs se font en mode approché. Donc si la calculatrice recommence bien les calculs pour chaque valeur, il faudrait environ 10×238 minutes. Cela fait plus de 39 heures...

- On a donc entré les formes exactes dans les fichiers y de la calculatrice, mais demandé ensuite le calcul de la fonction cherchée $P'(x)$ en mode approché dans l'application principale (cela donne les coefficients sous forme approchée), et c'est cette fonction qui est représentée.

Le temps est alors raisonnable : au plus 30 minutes pour le calcul en mode approché des $P'(x)$ pour $k = 2, 5$ ou 10 . Notons que pour $k = 10$, on a rajouté les termes manquants en sin et cos à la fonction précédente.



- En conclusion, il reste de toute façon les problèmes de bords, ainsi il faudrait raccorder sur l'intervalle $[0; 3,5]$ par exemple à gauche avec une fonction du type $ax^3 + bx^2$ et sur $[12; +\infty[$ à droite avec une fonction du type $(ax + b)e^{-x}$.

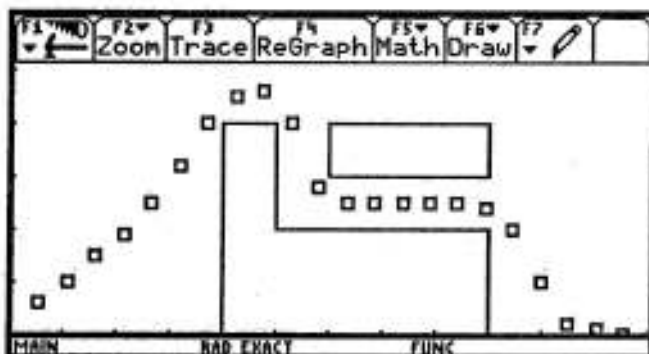
Par ailleurs on aurait pu prendre une fonction qui ne soit pas nulle sur l'intervalle $[0, 3]$, le polynôme obtenu oscille sur cet intervalle autour de 0, de même on aurait pu prendre $f(4\pi) = 0$ ce qui aurait seulement entraîné le changement de variable $t = \frac{x}{2}$.

- Pour $k = 5$ on a déjà une fonction qui approche "bien" la fonction de départ. Reste à contrôler cette convergence.....

Mais les fonctions à développer en série de Fourier sont plutôt, dans la pratique, données par une liste discrète de points, et on utilise ensuite sur ces données des formules d'approximations [Mathematics at a Glance 1975].

Approximations discrètes:

- On choisit ici de subdiviser 4π en $2m = 24$ intervalles et on se donne les valeurs correspondantes de $y : y_i$ pour i de 0 à $2m-1 = 23$ (le fait de prendre 12, 24, 36 ou 72 intervalles permet de simplifier les calculs).



Les 25 valeurs de $f(x)$ sont données sur $[0, 4\pi]$ par la liste :

0 - 0,1 - 0,3 - 0,6 - 1 - 1,5 - 1,9 -
2,5 - 3,2 - 4 - 2,8 - 2,5 - 2,5 - 2,5 -
2,5 - 2,5 - 2,4 - 2 - 1 - 0,2 - 0,1 -
0 -

- Pour simplifier, et avoir déjà $f(a) = f(b)$, on a pris $f(0) = f(4\pi) = 0$, ce qui demandera ainsi seulement un changement de variable $t = \frac{x}{2}$ par la suite.

- Le polynôme trigonométrique d'ordre m

$$P(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + a_m \cos 12x$$

avec: $a_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m-1} y_i$

$$a_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m-1} y_i \cos \frac{\pi n i}{m} \quad \text{pour } n \text{ de } 1 \text{ à } m$$

$$b_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m-1} y_i \sin \frac{\pi n i}{m} \quad \text{pour } n \text{ de } 1 \text{ à } m-1$$

est alors une approximation de la série de Fourier de f .

En fait, ces coefficients sont obtenus en résolvant le système à $2m$ inconnues et $2m$ équations qui expriment la coïncidence de P et f sur les 24 points x_k :

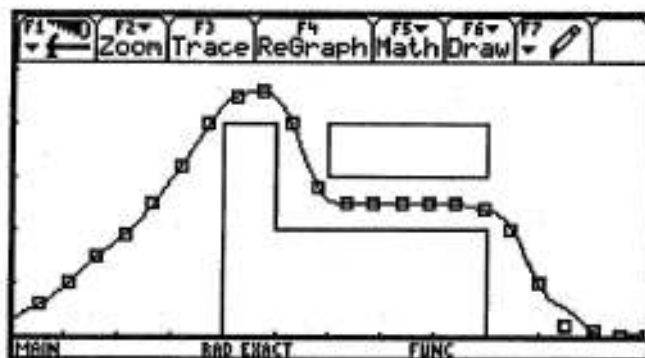
$$P(x_k) = y_k \quad \text{pour } k \text{ de } 0 \text{ à } 2m - 1.$$

- Avec la calculatrice, difficile de gérer les problèmes de multiplication et sommation même en utilisant des listes : on n'obtient pas les résultats... dépassement de mémoire. Malgré tout, cela marche-t-il bien...?

On fait les calculs avec un tableur de l'ordinateur, on entre la fonction dans la calculatrice, sans oublier que, pour dilater ensuite sur $[0, 4\pi]$, il faut faire tracer $P(\frac{x}{2})$.

Ca ne marche pas du tout... Le livre où on a pris les formules [Chabert 1994] a oublié d'inscrire π pour le calcul des coefficients. Recherche dans un autre livre [VEB 1975], coefficients complexes qui incluent π ... Calculs recommencés et résultat ci-dessous :

$$P(x) = 2,0625 - 1,7852956 \cos x - 0,1646528 \cos 2x - 0,179044 \cos 3x + 0,025 \cos 4x + \\ 0,04651377 \cos 5x + 0,04166667 \cos 6x - 0,04328775 \cos 7x - 1,7116 \cdot 10^{-15} \cos 8x - \\ 0,0376227 \cos 9x + 0,02298609 \cos 10x - 1,2639 \cdot 10^{-3} \cos 11x + 0,025 \cos 12x + \\ 0,03454591 \sin x - 0,5522916 \sin 2x + 0,42391715 \sin 3x - 0,1010363 \sin 4x \\ + 0,10730996 \sin 5x - 0,0666667 \sin 6x + 0,01400869 \sin 7x - 0,0288675 \sin 8x + \\ 0,02391715 \sin 9x + 0,0162492 \sin 10x + 0,02784718 \sin 11x.$$



En fait, en observant de plus près, il y a un problème juste avant 4π , l'avion va s'écraser. Il faudrait revoir les données initiales pour améliorer, ou alors prendre plus de points : 36, 72...

De toutes façons, il manque la tangente horizontale en 0 et l'atterrissage à l'infini...

Derniers ajustements indispensables !

Ce sera pour l'année prochaine...

Fin (provisoire) de l'étude versant Fourier.

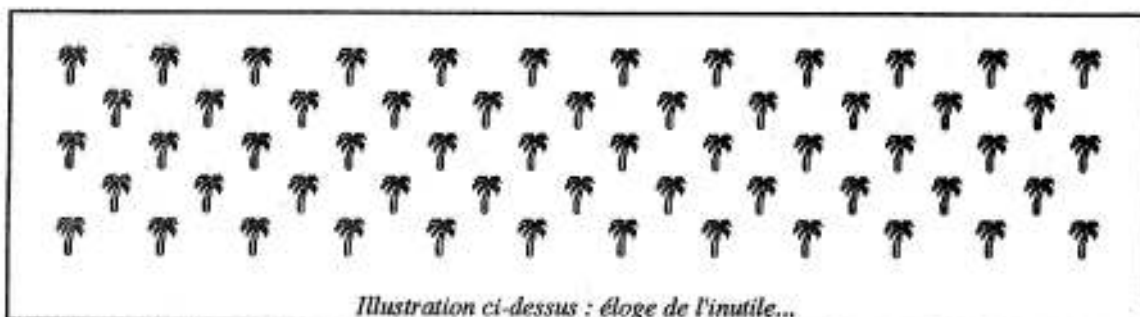


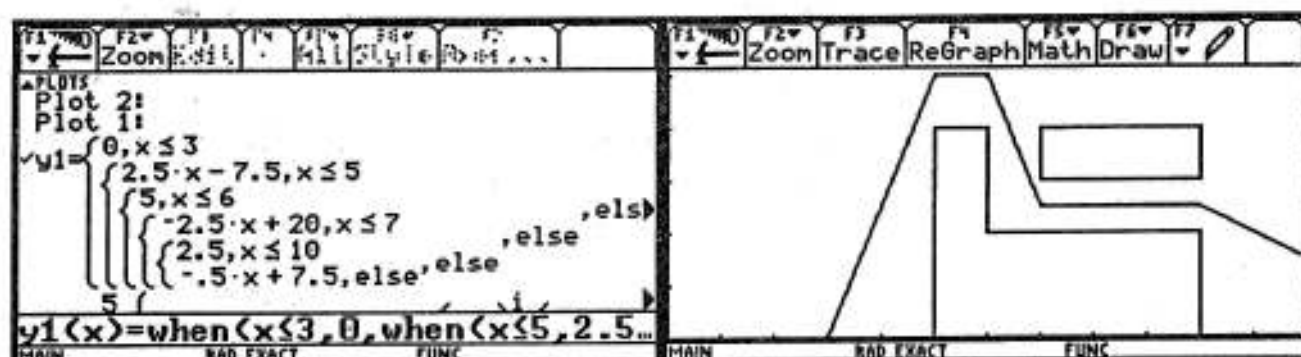
Illustration ci-dessus : éloge de l'inutile...

2. Version polynômes de Bernstein

Le théorème de Bernstein assure : "Toute fonction continue est limite uniforme, sur tout compact, d'une suite de fonctions polynômes".

On va donc définir une fonction continue, par exemple affine par morceaux, sur l'intervalle $[0, 12]$, qui réalise toutes les contraintes, sauf celles "aux bornes".

Pour modéliser la contrainte de départ, on débute la courbe par une fonction nulle entre 0 et 3.



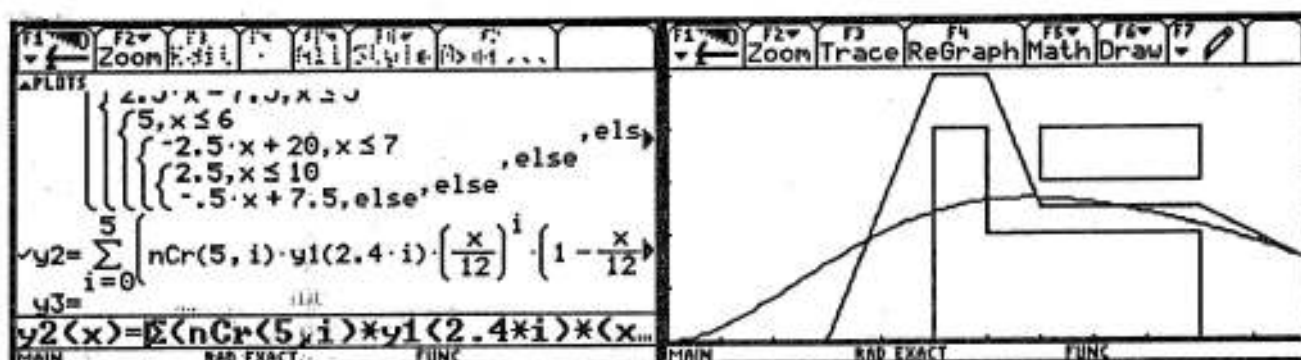
Puis je vais définir la suite des polynômes de Bernstein, et je vais aller assez loin pour que le polynôme obtenu passe dans un tuyau assez fin, qui évite les reliefs. La convergence uniforme m'assure que cette fonction existe. Mieux, puisqu'il s'agira d'une fonction polynôme, elle sera non seulement C_1 , mais C_∞ ...

On rappelle que, pour une fonction f , continue sur un segment $[a, b]$, la suite des polynômes de Bernstein est obtenue en faisant la somme, pour i variant de 0 à n , de

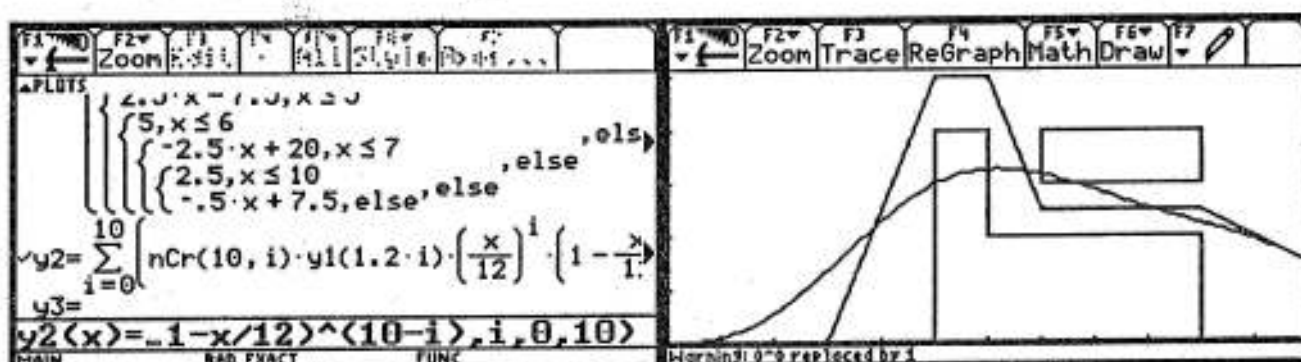
$$C_n^i f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-i}.$$

On appellera polynôme de Bernstein d'ordre n ce polynôme.

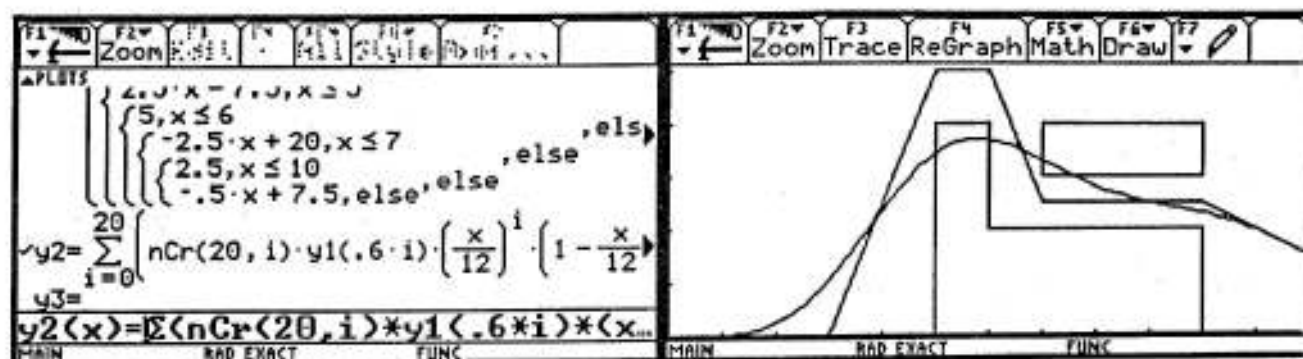
Voyons les premiers résultats, et l'effet de la convergence uniforme de cette suite de polynôme vers notre fonction affine par morceaux.



Polynôme de Bernstein d'ordre 5

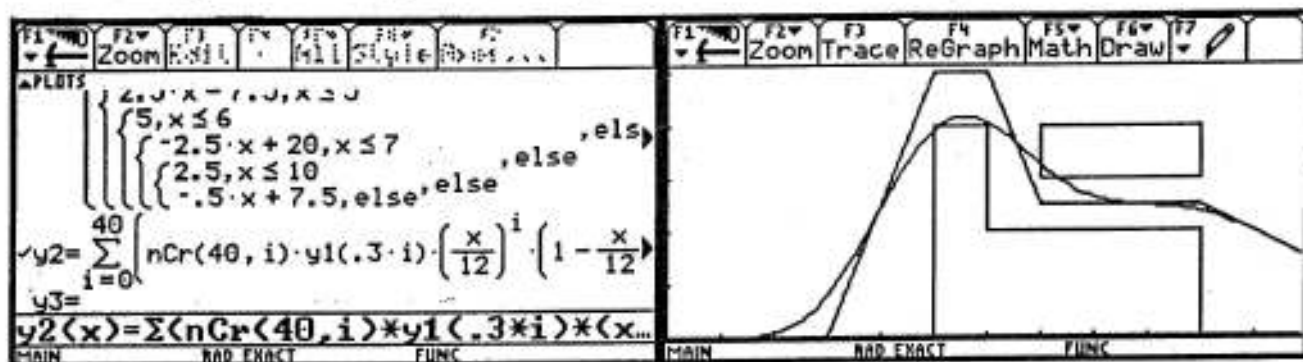


Polynôme de Bernstein d'ordre 10



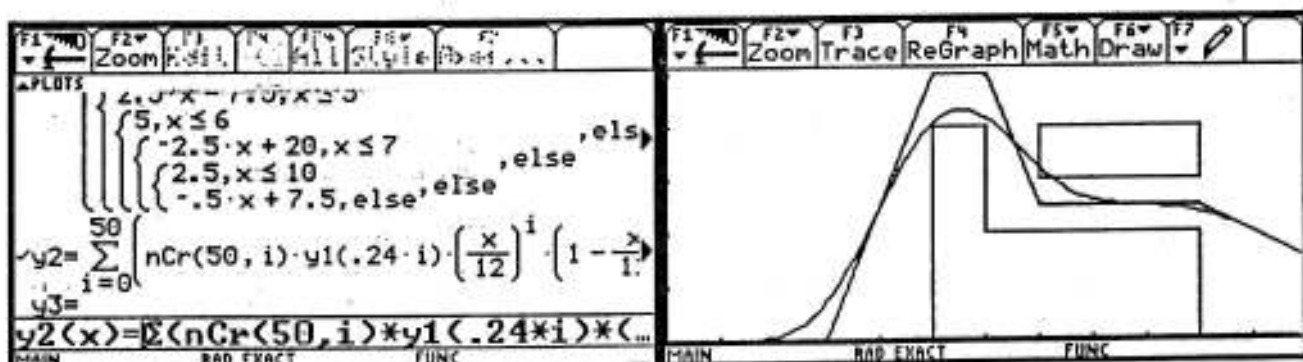
Polynôme de Bernstein d'ordre 20

Les temps de calcul augmentent à chaque fois de façon importante...



Polynôme de Bernstein d'ordre 40

On y est presque ! Les temps de calcul continuent de croître (30mn de calcul pour ce dernier polynôme...)



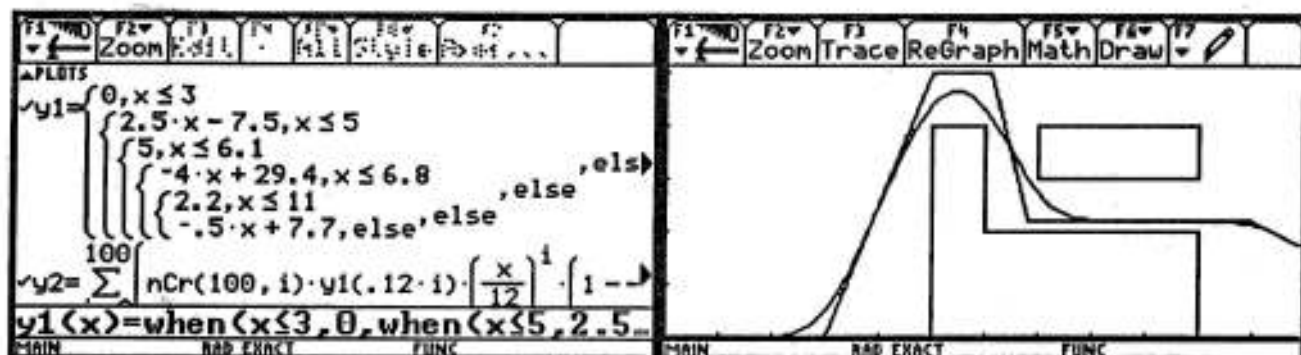
Polynôme de Bernstein d'ordre 50

Encore un petit effort !

Mais il faut essayer de rationaliser un peu la recherche, en analysant ce qui fait obstacle. C'est manifestement le coin du "nuage" qui "accroche".

On peut alors, certes augmenter le degré du polynôme de Bernstein, mais aussi changer la fonction affine d'appui, pour l'éloigner du coin fatal.

Ce que l'on fait ci-dessous, pour augmenter les chances de succès.



Polynôme de Bernstein d'ordre 100

Ouf, nous y sommes... (sous réserve de menues vérifications que l'on épargnera au lecteur... et au rédacteur). Il a fallu 5 heures de calcul pour la TI-92.

Remarque 1 :

On constate ici la souplesse beaucoup plus grande des polynômes trigonométriques. A l'ordre 5, on avait une fonction trigonométrique convenable, alors que l'on a dû aller à l'ordre 100 pour atteindre un bon polynôme...

Remarque 2:

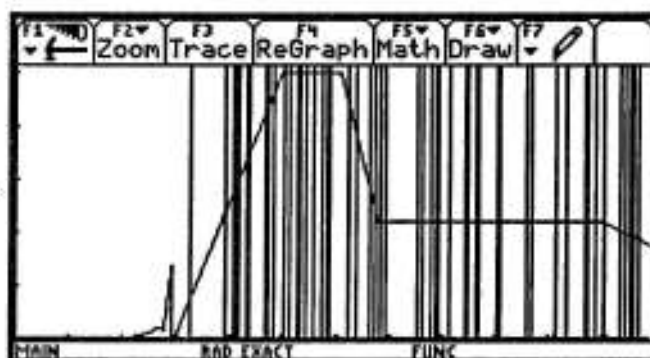
J'ai réalisé, mais un peu tard, qu'on gagnait un temps considérable en développant le polynôme dans l'application initiale (Commande Expand), puis en stockant la forme ainsi développée dans le fichier de fonction.

Le temps de calcul est alors divisé par 10 (30mn pour tracer le polynôme de Bernstein d'ordre 100).

Le problème est que la représentation graphique du polynôme, vite tracée, ne convient plus :

On aperçoit encore, derrière le "rideau" polynômial, la fonction affinée d'appui.

C'est pourtant le même polynôme de Bernstein d'ordre 100, mais rentré sous une autre forme que précédemment.



Comment expliquer cette différence ?

Dans la première version, on avait rentré le polynôme sous la forme de la somme de $i = 0$ à $i = 100$ de $C_{100}^i f(0,12,i) \cdot \left(\frac{x}{12}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{x}{12}\right)^{100-i}$.

Dans la deuxième version, on a rentré le polynôme sous la forme développée.

Dans les deux cas, les coefficients sont rentrés en calcul exact.

Mais, dans l'application graphique, ces expressions sont gérées en calcul approché. Et la deuxième forme est sans doute plus sensible aux arrondis multiples imposés par ce "gros" calcul.

On assiste là à un phénomène du même type que lors du TP 14 : deux suites égales étaient traitées différemment dans les tableaux de valeurs, qui gèrent des valeurs approchées...

Ce qui pose d'ailleurs un problème redoutable : puisque l'application graphique donne deux allures différentes pour la représentation graphique d'une même fonction, laquelle est la bonne ? A moins que toutes les deux soient mauvaises ...

On peut répondre à cela de quatre façons :

- en s'appuyant sur la "vraisemblance" des tracés : on a vu l'amélioration progressive des tracés, en augmentant le degré des polynômes de Bernstein... Il serait étonnant que l'approche constatée de la fonction affine par le polynôme de degré 100 soit le résultat d'une erreur de la machine!

- en travaillant en valeur exacte : ce qui suppose de faire des "sondages", sur des points particuliers de l'intervalle considéré... Mais une observation discrète ne nous donne aucune certitude sur ce qui se passe entre les points choisis !

- on peut étudier les deux formes (la forme de somme, et la forme développée), pour comprendre l'origine de leur traitement numérique différent, en calcul approché. Je n'y suis pas arrivé... Mais avis aux amateurs !

- enfin on peut en venir au contrôle numérique de la qualité de l'approximation : on

dispose en effet de la majoration ¹⁸ $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{4n\alpha^2} M + \frac{\varepsilon}{2}$, où P_n est le

polynôme de Bernstein de degré n , M un majorant de la valeur absolue de f , et (ε, α) un module d'uniforme continuité de f (f étant continue sur un segment, elle y est uniformément continue).

Ici, une considération géométrique simple montre que il suffit que $|f(x) - P_n(x)|$ soit inférieur à 0,2 si on veut éviter que la fonction ne percute le relief.

On peut alors prendre $\varepsilon = 0,2$. Par considération de la portion affine de plus forte pente (en valeur absolue, c'est 4), on trouve $\alpha = 0,05$. Par ailleurs, $M = 5$.

D'où la majoration nécessaire : $\frac{1}{4n\alpha^2} M \leq 0,1$, c'est à dire $\frac{5}{0,01n} \leq 0,1$. C'est à dire qu'avec $n \geq 5000$, on était tranquille.

Mais on pouvait attendre quelques semaines pour le traçage effectif de la courbe par la machine. On voit l'écart entre condition suffisante, et condition nécessaire...

On en restera à l'idée que le polynôme de degré 100 convient bien.

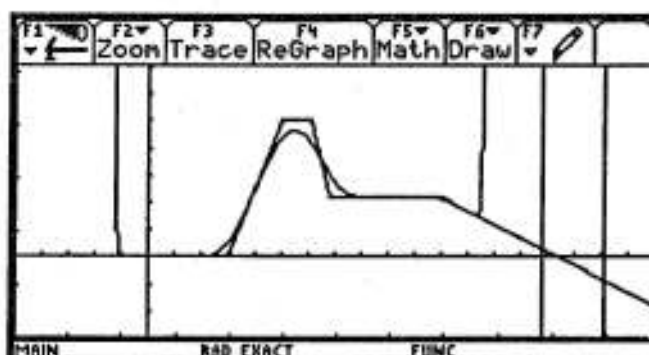
Remarque 3

Revenons à ce polynôme de Bernstein d'ordre 100. Ce polynôme, bien qu'il soit d'un degré très élevé, a (si on en reste à notre première impression) un comportement très sage sur l'intervalle. Mais en dehors de cet intervalle ? On regarde par exemple ce qui se passe sur l'intervalle $[-5 ; 18,8]$ ¹⁹. On voit ci-dessous que, dès que le polynôme quitte l'intervalle où il est censé approcher la fonction affine, il explose...

¹⁸ Voir sur ce point le livre d'exercices d'Analyse de Flory, Tome 2.

¹⁹ On a choisi cet intervalle pour bénéficier de points de calcul décimaux "simples". Il y a en effet dans l'application graphique 239 points de calcul. Sur l'intervalle choisi, le premier point de calcul sera donc -5, le suivant -4,9, etc. En fait, même avec des points décimaux moins "simples", c'est à dire avec une fenêtre prise "au hasard", le même phénomène apparaissait ici. Cependant le temps élevé de calcul (5 heures!) interdit de faire trop d'observations aléatoires...

La mobilisation de la commande "maximum" de l'application graphique donne un maximum de près de 5000 pour la fonction quand x varie entre 12 et 13 !



Fin des remarques, et retour au problème.

On a ici, avec un polynôme de degré 100, une solution de classe C^∞ . Pour achever la résolution, il faut opérer un raccordement dérivable avec une fonction du type $ax^3 + bx^2$ sur $[0, 3]$ pour assurer les conditions du décollage, et un raccordement avec une fonction du type $(ax + b)e^{-x}$ sur $[11, +\infty[$ pour assurer l'atterrissage...

Par ailleurs, cette méthode "Bernstein" donne l'amorce des deux optimisations (relatives...) de la deuxième question.

- pour l'optimisation type "avion espion", à intégrale minimale, on pourra prendre comme fonction affine à approcher une fonction "proche" du relief lui même ;
- pour l'autre optimisation, on prendra comme fonction affine par morceaux le plus court chemin.

Petit problème cependant, on n'est pas certain que l'approche se fera en respectant les reliefs. Ce qui nécessite de laisser une "petite" marge de sécurité !

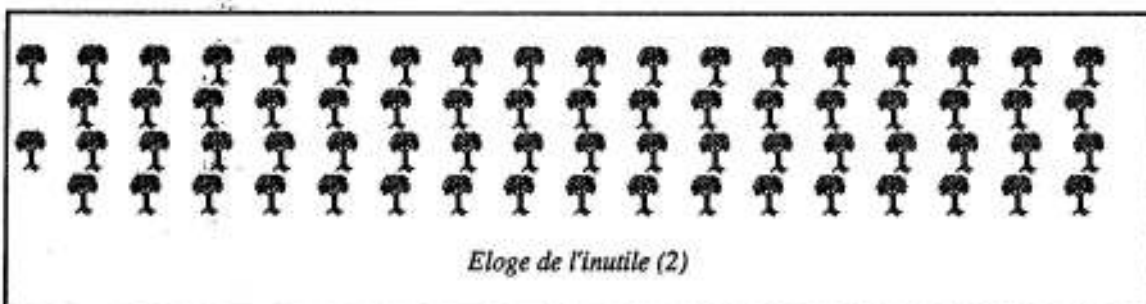
Morale et fin de l'histoire, coté professeur.

On réalise que cette deuxième résolution est très différente dans son esprit de la première, il y a trois semaines. Au lieu de traiter bout après bout le problème, on a d'abord attaqué le cœur de la question, par recours aux résultats de référence du cours d'analyse. Puis on a procédé aux ajustements nécessaires. Et on peut même se poser alors la question : le bricolage petit bout par petit bout n'était-il pas plus efficace qu'une solution globale ?

Mais ce détour a permis le recul, la réflexion, la prise de distance avec l'outil.

Ce qui, a priori, n'est pas toujours naturel ! Même pour un professeur de mathématiques...

Ces détours n'ont pas d'utilité immédiate pour les élèves. Leur intérêt, ici, est de permettre la comparaison des chemins sinueux de la recherche, pour les élèves et les "experts", avec la disponibilité d'une "machine à calculer" efficace.



B. Ensuite du côté des élèves.

Plusieurs éléments à prendre en compte du côté des élèves :

- c'est la dernière semaine avant les vacances de Février. La fatigue est là...
- en même temps, la pression du bac se fait sentir : est-ce que cela sera vraiment utile ?
- les élèves qui avaient cherché une solution globale se sont épuisés à la tâche : ils arrivent ce jour en disant " on a cherché des heures et des heures, et on n'a rien trouvé" (Jérôme, Vincent). Hélas, ils n'ont gardé aucune trace de ces nouvelles recherches...

Comme pour le dernier TP sur ce thème, les comportements des élèves sont très éclatés :

- les élèves qui n'ont rien fait chez eux font quelques tentatives de résolution ; mais en un heure, ils ne vont pas très loin...
- ceux qui sont arrivés avec un rapport de recherche tout prêt n'ont plus grand chose à faire.

Les échanges entre les uns et les autres sont intéressants quand l'écart de recherche n'est pas trop important. Si d'un côté l'un a tout fait, et de l'autre côté, l'autre n'a rien fait, la seule communication possible est... la transmission des résultats !

Globalement, j'estime que la moitié de la classe a fait un très gros travail de recherche, un quart de la classe a un peu cherché, et un quart de la classe n'a rien fait.

On va faire le choix ici de regrouper les réalisations des élèves par type de travail, en essayant de noter les évolutions apparues au cours de la recherche.

Les bricoleurs

On a déjà signalé des évolutions parmi ces élèves. Certains sont rebutés par l'investissement nécessaire pour comprendre les mécanismes de la nouvelle machine. Ceux-là ont fait assez peu de choses ("bricoleurs paresseux"). Les autres se sont assez vite familiarisés avec les différentes fonctionnalités de la machine ("bricoleurs entreprenants"). Il me semble que la relation avec la machine est alors assez exclusive... Un bon représentant de ce type de travail, Pierre (voir première réalisation page 180). C'est lui qui avait imaginé les "manchons" pour un raccordement régulier des tronçons. Malgré les remarques faites en cours lors du premier retour critique, il redonne une réalisation du même type.

Il la pousse même plus loin, donnant d'autres propositions "plus harmonieuses" de tracé, témoignant d'une réelle habileté dans la manipulation des fonctions. Il passe à l'intégration, ce qui ne pose pas de problèmes, s'agissant de fonctions "continues par morceaux". Il intègre même jusqu'à l'infini, ce qui "marche", puisque la dernière fonction contient une exponentielle.

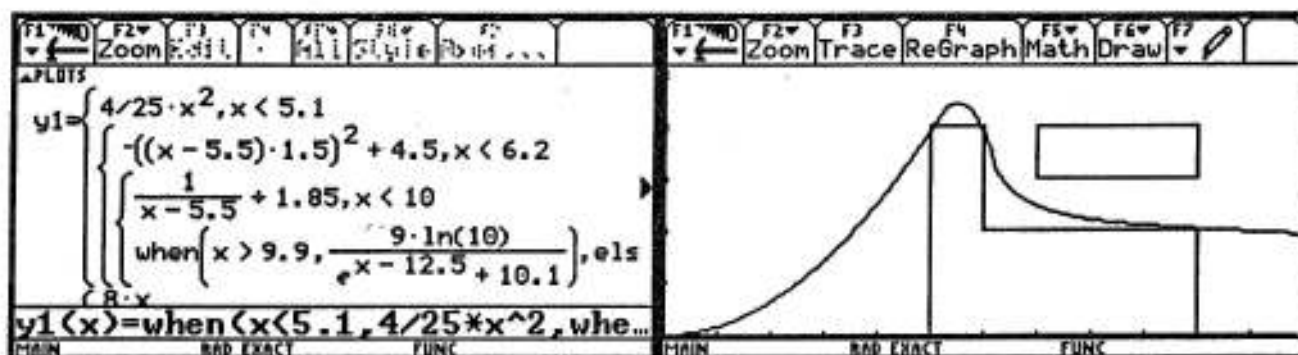
Il n'est nulle part question de dérivation.

Il est vraiment resté dans son problème, ou plutôt dans sa problématique, totalement déconnecté des indications du professeur.

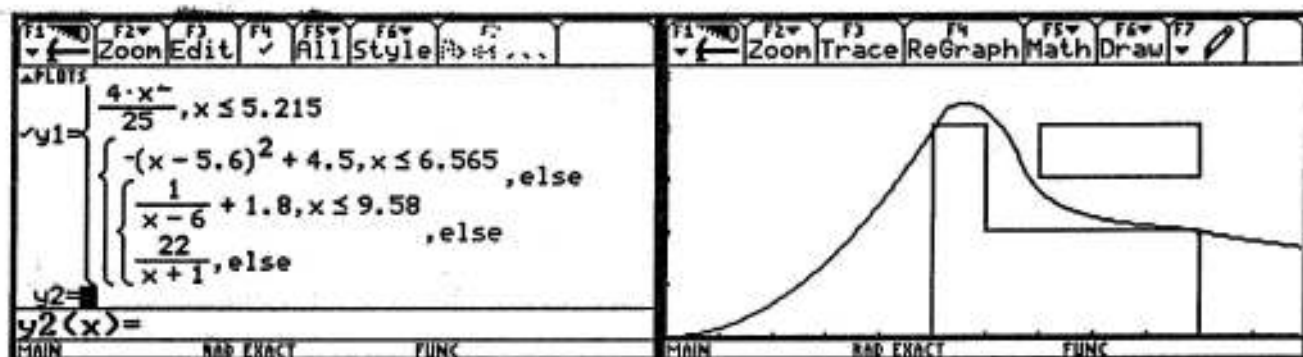
Autre représentant de ce type de travail, Nikola : "par dichotomie graphique, on essaie de mieux raccorder les courbes, on obtient quelque chose de continu (à vérifier théoriquement)".

Un autre représentant de ce type de travail, Alexandre, réalise une courbe sans manchons : " nous avons réussi à trouver après de nombreuses heures de travail l'allure la plus parfaite à notre goût que nous puissions trouver".

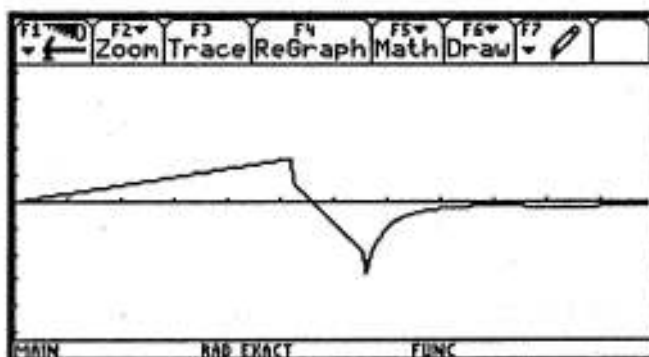
On verra ci-dessous que la fonction trouvée n'est pas particulièrement adéquate : elle percute les reliefs, et les raccords sont presque dérivables, c'est à dire qu'ils ne le sont pas...



Certains élèves "bricoleurs" ont fait un travail très complet. Ainsi Cyril et Patrice ont ajusté au plus près leur fonction : elle est "presque continue", "presque dérivable".



Ils calculent l'intégrale, et constatent qu'elle diverge (le dernier tronçon est en effet $\frac{22}{x+1}$). Ils en concluent que " ce n'est pas bon !". Puis ils passent à l'étude de la dérivée :



Ils concluent alors à l'existence d'un nouveau problème à cause des points anguleux de la courbe...

On voit aussi là un bon travail de "recherche approchée de solutions", mais les contraintes ne sont pas traitées systématiquement, en mode exact, et les notions théoriques restent floues...

L'hypothèse que l'on peut faire est que, pour ces élèves, l'aspect "calcul exact", ou calcul formel, n'est pas pris en compte. La TI92 est utilisée comme une super-calculatrice graphique, avec des potentialités fort utiles (elle dérive, elle intègre), mais elle n'entraîne pas "naturellement", une prise en compte des problèmes théoriques.

Les scolaires

Ces élèves utilisaient assez peu la calculatrice graphique. La TI92 fournissant des réponses à des "questions de cours", elle est beaucoup plus sollicitée. Mais son utilisation n'est absolument pas maîtrisée. Il n'y a en fait ni maîtrise des contraintes que doit respecter la fonction, ni maîtrise d'une stratégie cohérente. On verra dans le travail de Caroline l'effet "boule de neige" de la complexité numérique que cela entraîne :

- elle commence par écrire " nous avons décidé d'utiliser la fonction $x^2 \cdot e^{-x}$ qui passe par (0, 0), qui a un maximum, et une limite en $+\infty$ égale à 0". C'est ce qui avait été évoqué en cours. On reconnaît bien ici cette démarche de "coupé-collé" de micro-stratégies, qui sont évoquées, mais pas nécessairement mises en pratique.
- en fait cette fonction va être plaquée, sous des formes variées, sur chaque tronçon :

$$\text{sur } [0; 4,9], \frac{x^2}{6,039096} ;$$

$$\text{sur } [4,9; a], (x - 3,46)^2 \cdot 8,1 \cdot e^{-(x - 3,46)} ;$$

$$\text{sur } [a; 10], e^{-(x - b)} + 2 ;$$

Leurs calculs aboutissent à $a = 6,98611042943$, et surtout :

$$b = \ln \left(- (8,10^{25} e^{6559060863359/2 \cdot 10} - 3484723632149064547969793361)) - 25 \ln 5 - 27 \ln 2 + \frac{173}{50} \right).$$

On réalise l'effarante complexité des coefficients, qui ne permettent de réaliser qu'une partie des contraintes: la continuité de la fonction (dès le premier raccord, il n'y a pas de dérivabilité)

Mais l'effet boule de neige fait que cette seule contrainte ne peut pas être respectée :

" on s'aperçoit que la fonction n'est pas bien rattachée". On remplace donc 6,986 110 429 43 par 6,73 : "on obtient alors une intersection qui semble parfaite". C'est à dire que la validation est graphique. Autrement dit, on travaille en calcul exact, mais quand les choses ne vont pas, on arrondit le tout.

En lisant cela, j'avais l'impression d'assister à la projection d'un film burlesque, avec l'enchaînement de catastrophe habituel. Et l'absence complète de contrôle de son destin par le personnage, ballotté par les événements.

L'hypothèse que l'on peut faire est que la prise en compte, par ces élèves, de la TI 92 entraîne une difficulté supplémentaire. Il y a, en fin de compte, affaiblissement du contrôle, et perte de sens de ce qui est fait.

En particulier, la difficulté d'adaptation à la machine a empêché jusqu'à présent un apprentissage essentiel : la distinction valeur exacte, valeur approchée.

Ainsi Karen, qui a eu beaucoup de mal à comprendre la syntaxe des fonctions définies par morceaux construit la fonction suivante :

$$\text{- si } x < 5, f(x) = x \cdot \frac{|x|}{6} ;$$

$$\text{- si } x < 6, f(x) = - (x - 5,7) + 4,65.$$

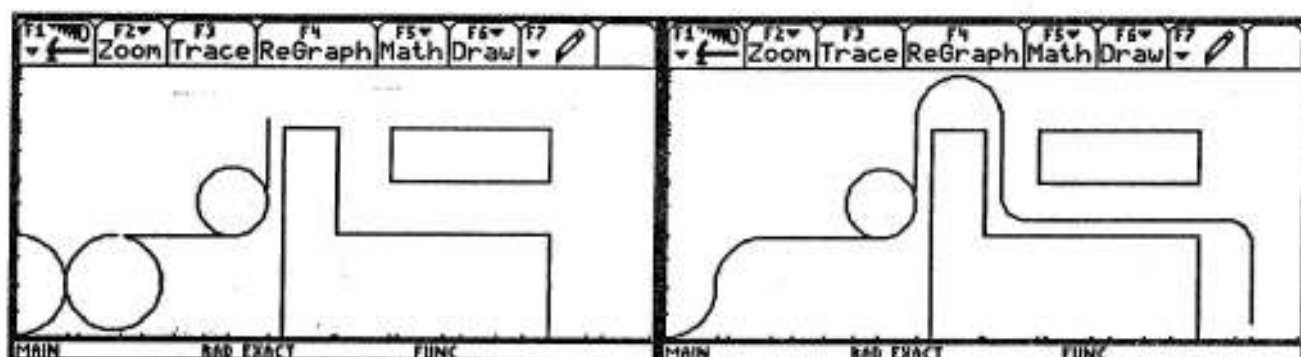
Puis elle écrit : "montrons que le raccord de ces deux fonctions vérifie la bonne dérivabilité et une continuité : on s'aperçoit que lorsque $x = 5$ toutes les deux sont à peu près égales à 4,16, donc la continuité au raccord de ces deux fonctions marche bien."

En fait, Karen a identifié 104/25 et 25/6. La presque continuité est devenue continuité.

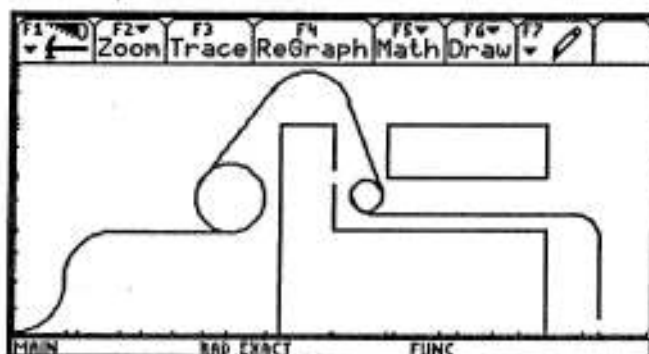
Les expérimentateurs

On observe là des évolutions assez intéressantes : Damien et Etienne, des élèves que je cataloguais comme bricoleurs, avec les calculatrices graphiques, ont des démarches qui se sont enrichies avec les TI92. Il y a une plus grande interaction entre des recherches graphiques, des calculs, et cela semble être un effet des potentialités de la machine. Leur rapport de recherche est assez succinct : " après plusieurs jours de recherche, on a

pensé à une méthode, une combinaison d'arcs de cercle et de segments". La discussion entre les deux élèves est très animée. J'arrive à faire, au cours du travail, des copies d'écran :



Les élèves me soumettent leur production: "on a même fait un looping !". Avec une question : "on ne peut pas récupérer l'équation des courbes ?". Je leur renvoie une remarque : leur trajectoire n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Ils le reconnaissent (tronçons verticaux...), et se remettent à l'ouvrage:



La séance se termine sur une dernière constatation : on ne voit pas comment cette trajectoire pourrait être celle d'un avion...

Ce travail me paraît assez caractéristique d'un groupe expérimentateur : plusieurs cadres de travail mobilisés, souvent en interaction.

Les rationnels

Il y a ceux qui fonctionnent déjà sur ce mode (Michaël), et qui fournissent un travail sans surprise : on repère les contraintes, et on résout des systèmes. Le travail fourni est ici de qualité fort médiocre (cela sert à quoi, est-ce que c'est au programme, etc...).

Il est difficile de dire si la faiblesse des résultats est due à un investissement insuffisant, ou à des habitudes de travail "automatique" : si on a a priori aucune idée du type de courbe convenable, la recherche est sans doute assez difficile...

Je constate un déplacement des attitudes habituelles de deux groupes :

- le groupe Christelle / Fabienne, ordinairement très expérimentateur, a essayé, après des échecs successifs, de rationaliser ses démarches. Contraintes, choix de fonctions, résolution d'équations. C'est le seul groupe qui arrive à un résultat complet correct.
- le groupe Cécile / Stéphanie (en fait le rapport est signé de Cécile seule), que je qualifie de "théorique", a travaillé ici de façon plus systématique. Rationalisation des démarches, et résultat convenable (sauf le dernier tronçon : elle choisit une fonction du

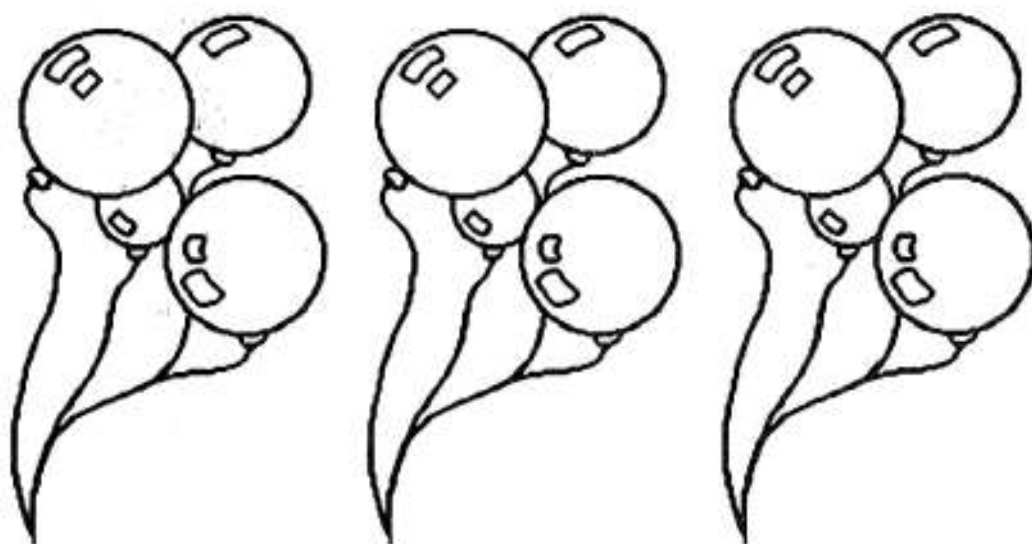
type $a \in \mathbb{R}$. Elle trouve comme valeur pour a : $6, 144 \cdot 10^{-6}$. La fonction admet en $+\infty$ comme limite a . C'est très petit, mais c'est pas 0...).

Pour ces deux derniers groupes, la machine a eu un rôle très positif : elle a permis une mise en ordre des réflexions et des actions (pour le type expérimentateur), une traduction mathématique précise des idées générales (pour le type théorique).

Pour la suite...

Une fiche de travail est fournie aux élèves (voir pages suivantes), avec :

- une proposition de syntaxe allégée, pour l'écriture des fonctions "par morceaux" ; plusieurs élèves ont en effet souligné que la syntaxe "when..." était complexe, et je ne voudrais pas que cette complexité fasse écran au travail théorique souhaité ;
- un exemple de solution exacte, celle de Christelle - Fabienne, et des exemples de solutions fausses ;
- l'exigence reformulée de solutions exactement continues et dérivables ;
- le relancement de la recherche de deux solutions optimales, la première du point de vue de la dérivée, la deuxième du point de vue de l'intégrale.



Allégorie : envol de la recherche, individuelle, et collective.

(Espace de coloriage pour le lecteur fatigué)

Problème long II (suite)



Note de synthèse distribuée aux élèves.

Des difficultés sont apparues, dans la réalisation du problème :

- difficultés de syntaxe (le fameux when ...) ;
- difficultés de compréhension du caractère continu, et dérivable des solutions cherchées ;

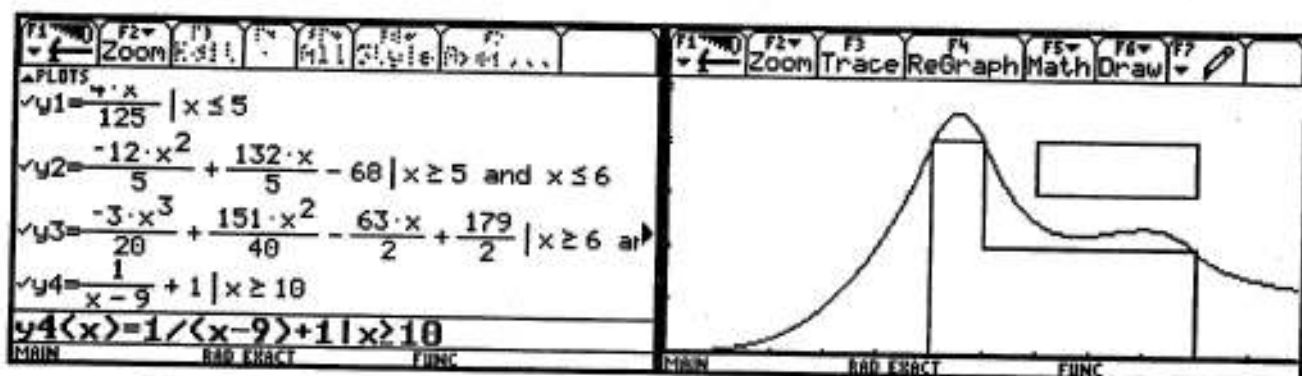
Sur ces points, d'utiles éclaircissements...

Plusieurs rapports témoignant d'une recherche très sérieuse ont été rendus (Cécile, Cyril et Patrice, Fabienne et Christelle, Caroline, Pierre, Alexandre, Elsa et Guillaume...).

Une seule solution est convenable...

C'est celle de Christelle et Fabienne. J'en profite pour suggérer ci-dessous une syntaxe plus souple que la syntaxe "when", qui a semble-t-il posé problème. Il suffit d'utiliser la commande "sachant que", en utilisant plusieurs fonctions.

On gagne en simplicité d'écriture, mais on perd en synthèse : pour la machine, on a défini là 4 fonctions successives, que l'on ne peut pas réunir "formellement" en une seule. Donc pour la dérivée, comme pour l'intégrale, on devra traiter chaque tronçon successif.



Cette fonction est convenable, car elle vérifie les contraintes "aux extrémités" (valeur et dérivée en zéro, et limite en $+\infty$), les contraintes de raccords (exactement continus et dérivables), et les contraintes d'évitement des reliefs.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z

■	$y_1(5)$	4
■	$y_2(5)$	4
■	$\frac{d}{dx}(y_1(x)) \mid x = 5$	12/5
■	$\frac{d}{dx}(y_2(x)) \mid x = 5$	12/5

$\frac{d}{dx}(y_2(x)) \mid x = 5$	
-----------------------------------	--

MAIN	END EXEC	FUNC 4/20
------	----------	-----------

Comment arriver à ce résultat ?

Mais en choisissant des fonctions simples, en faisant les raccords en des points "simples" (5 et pas 5, 615...), en déterminant d'abord les contraintes, et en résolvant des systèmes pour trouver des fonctions convenables...

Exemple (ce n'est qu'une stratégie possible, il y en a d'autres... mais c'est celle qui a été utilisée par Fabienne et Christelle) : on veut au départ choisir une fonction nulle et à dérivée nulle en zéro. La plus simple connue est x^2 (ou x^3 , ou $ax^2 + bx^3 \dots$). Mais on veut aussi qu'elle passe par le point (5, 4). On rajoute donc un degré de liberté en prenant ax^2 . Pour avoir $f(5) = 4$, il faut prendre $a = \frac{4}{25}$. Le premier tronçon est ainsi défini par $f(x) = \frac{4}{25} x^2$

Puis on va raccorder en 5 par la courbe la plus simple possible qui permette d'arriver au point (6, 4). On veut donc $f(5) = 4$ (pour la continuité), $f'(5) = 2 \cdot \frac{4}{25} \cdot 5$ (c'est la dérivée de la fonction calculée au point 5). Et enfin $f(6) = 4$. Il y a donc 3 contraintes. On va choisir trois degrés de liberté, avec une fonction du deuxième degré $ax^2 + bx + c$. On aboutit à un système de trois équations à trois inconnues, que l'on résout sans peine.

Les autres solutions ne sont pas complètement justes...

Elsa et Guillaume commencent leur trajet par une fonction qui n'a pas une dérivée nulle en zéro, Cécile termine le sien par une fonction qui n'a pas une limite nulle en zéro.

Les autres ont des raccords qui ne sont pas dérivables (et parfois même pas continus...).

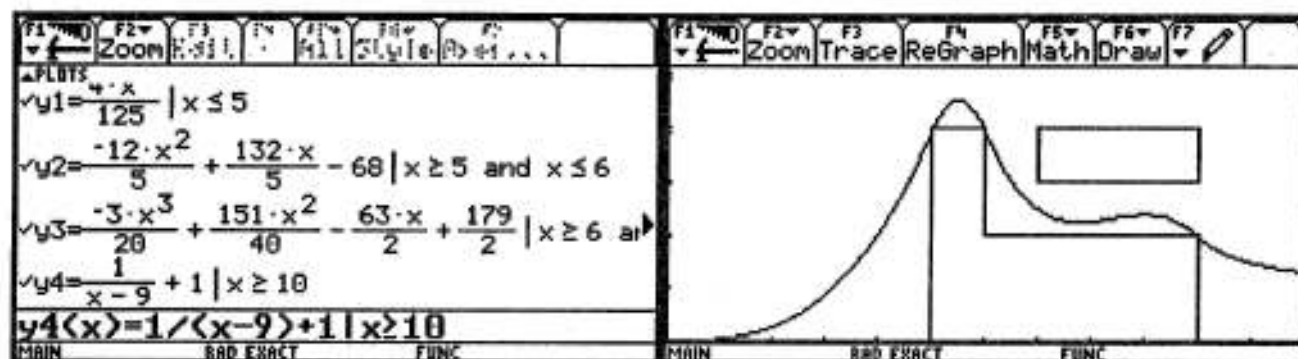
Il faut rectifier ces erreurs...

Une courbe trouvée, que faire ?

Rappelons qu'il y a deux types de courbe idéale que l'on cherche :

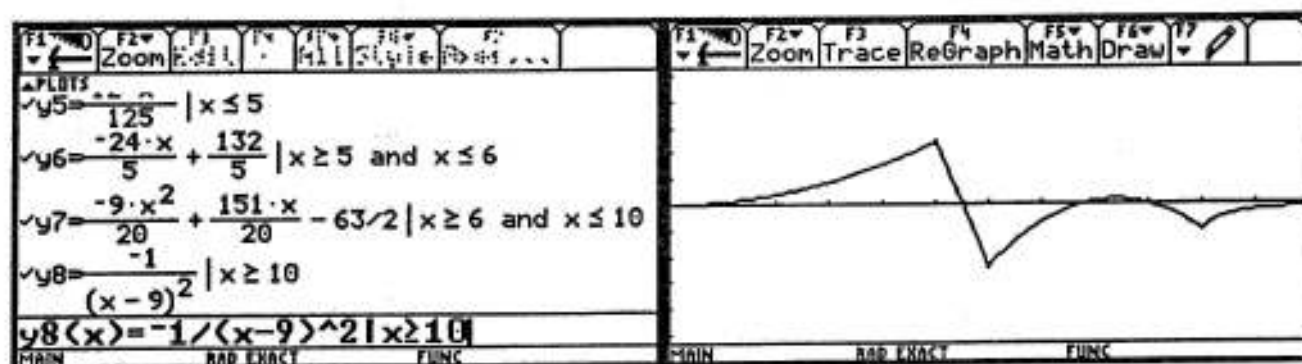
- la première avec une valeur absolue de la dérivée qui soit la plus faible possible. Plus exactement, pour une fonction donnée, il faudra chercher la dérivée, puis la valeur absolue de la dérivée, puis le maximum de cette valeur absolue. Celui qui aura le plus petit maximum aura gagné...

Voyons ce que cela donne pour la fonction de Fabienne / Christelle



On notera que l'on est obligé de définir quatre dérivées, puisque la machine gère quatre fonctions différentes. On vérifie ci-contre que la dérivée est bien continue (par contre elle n'est pas dérivable, mais l'énoncé ne le demandait pas).

La plus grande valeur prise par la valeur absolue de la dérivée est en $x = 5$ (ou $x = 6$) :
on a alors (en valeur exacte) $f'(x) = 2, 4$.



Si quelqu'un trouve mieux (c'est à dire moins), il a gagné, sinon c'est Christelle et Fabienne qui seront déclarées gagnantes... par forfait !

- deuxième optimisation : avec l'intégrale de f qui soit la plus faible possible.

Voyons ce que cela donne pour la fonction de Fabienne et Christelle.
L'intégrale est obtenue ici en ajoutant les intégrales des 4 tronçons successifs.

Cela marche bien sur les trois premiers tronçons. Problème sur le quatrième : l'intégrale est infinie. La même mésaventure est arrivée à la courbe de Cyril et Patrice.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\int_0^5 y_1(x) dx$					5
$\int_5^6 y_2(x) dx$					22/5
$\int_6^{10} y_3(x) dx$					152/15
$\int_{10}^{\infty} y_4(x) dx$					"
$\int(y_4(x), x, 10, \infty)$					
MAIN	RAD EXACT				FUNC 5/30

Ce résultat n'est pas étonnant : reportez-vous au cours sur les intégrales. On y avait vu que la limite de l'intégrale de $\frac{1}{t}$ entre 1 et a , quand a tend vers $+\infty$, tend vers $+\infty$.

Mésaventure que l'on a pas quand on calcule la même limite pour $\frac{1}{t^2}$, ou $\frac{1}{e^t}$.

Si on veut avoir une limite finie, il faut donc modifier la fonction sur le même tronçon !

A vos plumes, vos machines et vos neurones pour le dernier épisode de la recherche.

Rendez-vous le 9 Avril pour la désignation du, de la, ou des gagnant (e)(s) !



Problème long, III.



**Un problème long... qui fait long feu.
Ou la chronique d'une fin annoncée
en forme de queue de poisson...**

Le 9 Avril, retour au problème long. En principe. En fait, le lendemain, commence un bac blanc commun à toutes les Terminales Scientifiques du Lycée. Et, trois jours après, commencent les vacances de Printemps.

12 élèves manquent à l'appel. Et, parmi les présents, un seul a repris son travail depuis la dernière séance. Les autres assurent qu'ils remettront l'ouvrage sur le métier pendant les vacances.

Ce que plusieurs d'entre eux feront bien.

On peut raisonnablement imaginer que le problème, pour cette année, a vécu.

Dernier retour sur ce problème donc, bilan, et perspectives.

Le 9 Avril, une seule copie est rendue, celle de Michaël. Le fait mérite d'être relevé, puisque jusqu'à présent, cet élève (que je qualifie de "rationnel") s'était fort peu investi dans la recherche.

Après les vacances de Pâques, 4 autres devoirs sont rendus : celui de Caroline, celui de Fabienne et Christelle, celui de Cécile, celui de Jérôme L et Vincent :

- celui de Caroline est en fait une reprise de sa dernière réalisation (cf page 265). Elle n'a pas pu aller beaucoup plus loin ;
- celui de Christelle et Fabienne comporte la rectification demandée (cf page 269) ;
- ceux de Jérôme et Vincent, et de Cécile, contiennent des éléments nouveaux.

Vue la rareté des devoirs rendus, on peut se permettre de donner les devoirs de Michaël, Jérôme-Vincent, et Cécile dans leur intégralité.

A l'occasion, on comparera ces solutions du point de vue des méthodes mises en oeuvre.

A. Le travail de Michaël (avec sa propre rédaction)

1. Trajet avec la pente la moins forte

En utilisant la méthode consistant à choisir le degré de la fonction en fonction du nombre de degrés de liberté exigés, je trouve grâce aux fonctions empruntées aux camarades (au départ) une solution. Mais le problème réside alors dans le tronçon du milieu.

La fonction cube de Christelle et Fabienne ne permet pas un choix énorme car elle est à peu près la seule de ce degré à convenir. La fonction carré ne permet que des paraboles sans intérêt.

Je vise donc les fonctions à degré 4 ou 5, pour le tronçon de $x \geq 6$ à $x \leq 10$.

En partant de $y_2 = -\frac{x^2}{10} + \frac{11x}{10} + 1$, de $x \geq 5$ à $x \leq 6$, et de $\frac{1}{(x-9)^2} + 1$ pour $x \geq 10$ (j'ai mis un carré au dénominateur pour enlever le problème de l'intégrale ²⁰).

²⁰ Michaël fait allusion au travail de Christelle et Fabienne : elles avaient mis pour le dernier tronçon une fonction homographique, ce qui posait un problème pour la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Je me suis aperçu plus tard que cela ne marchait pas quand même.

On a quatre contraintes. En effet :

$$f(6) = 4 \quad f(10) = 2$$

$$f'(6) = -\frac{1}{10} \quad f'(10) = -2.$$

Mais mon intérêt était aussi de passer par le point (7, 3). Le degré est donc de 5. Après plusieurs essais infructueux à la main (6 ou 7 pages de calcul), je me contrains à utiliser la calculatrice. Grâce à l'option Matrix, mes calculs sont non seulement grandement simplifiés, mais, en plus, enrichis.

$$\text{On part de } f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$$

$$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e.$$

En remplaçant x par ses différentes valeurs, et $f(x)$ de même, on obtient sous forme "matricielle" :

Matrice A.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Fix	Mode	Util	Stat
MAT						
Ex1	c1	c2	c3	c4	c5	
1	7776	1296	216	36	6	
2	100000	10000	1000	100	10	
3	16807	2401	343	49	7	
4	32768	4096	512	64	8	
5	6480	864	108	12	1	
6	50000	4000	300	20	1	
7						
r6c1=50000						
MAIN RAD FRAC FUNC						
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Fix	Mode	Util	Stat
MAT						
Ex1	c1	c2	c3	c4	c5	
1	4					
2	2					
3	3					
4	5/2					
5	-1/10					
6	-1/100					
7						
r6c1=-1/100						
MAIN RAD FRAC FUNC						

Simult (A, B) donne les différentes valeurs de a, b, c, d, e, f, g . Là où cela devient intéressant, c'est pour les deux dernières valeurs, $f'(6)$ et $f'(10)$, que l'on a choisies ici égales à $-0,1$ et $-0,01$, qui deviennent entièrement modulables selon ce que l'on a envie d'obtenir aux bornes de l'intervalle. Ainsi la fonction $f_3(x)$ de $x \geq 6$ à $x \leq 10$ est adaptable. Et le perfectionnement est renouvelable à l'infini (on peut obtenir aux bornes une pente de $-\frac{1}{10000}$). Il suffit ensuite de trouver une fonction $f_2(x)$ de $x \geq 5$ à $x \leq 6$

dont la pente soit de $-\frac{1}{10}$ en 6, et qui passe par (5,4) et (6,4) (facile grâce à la méthode des dérivées). On obtient sans difficulté la fonction citée plus haut $y_2 = -\frac{x^2}{10} + \frac{11x}{10} + 1$.

Profitant de cette facilitation énorme et ayant découvert mon erreur pour $\frac{1}{(x-9)^2} + 1$, je cherche une formule permettant de trouver la fonction $f_4(x)$ de formule $\frac{1}{(ax+b)^2}$ avec sa pente en 10. On a alors :

$$f_4(x) = \frac{1}{(ax+b)^2} \quad \text{et} \quad f'_4(x) = \frac{-2a}{(ax+b)^3}$$

$$\frac{1}{(ax+b)^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-2a}{(ax+b)^3} = R \quad (\text{valeur demandée}).$$

Michaël laisse R flottant, et résout "à la main", avec semble-t-il des passages traités avec la TI-92.

Cela débouche sur $a = -\frac{R}{\sqrt{2}}$ et $b = \frac{10R+1}{\sqrt{2}}$.

Ce qui donne la fonction avec $R = -0,01$ comme voulu. On a d'ailleurs l'effet requis : pente très faible et possibilité de précision à l'infini pour l'intégrale (en ajustant R).

Il suffit ensuite de trouver $f_1(x)$ tel que $f_1(x) = ax^2 + bx + c$, avec :

$$f_1(6) = 4 \quad f'_1(6) = \frac{-1}{10} \quad f_1(0) = 0 \quad f'_1(0) = 0 \quad (\text{IMPOSSIBLE}).$$

On prend donc $f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$c = 0$ et $d = 0$. Après calcul, on trouve $f_1(x) = -\frac{3}{50}x^3 + \frac{23}{50}x^2$.

On a donc :

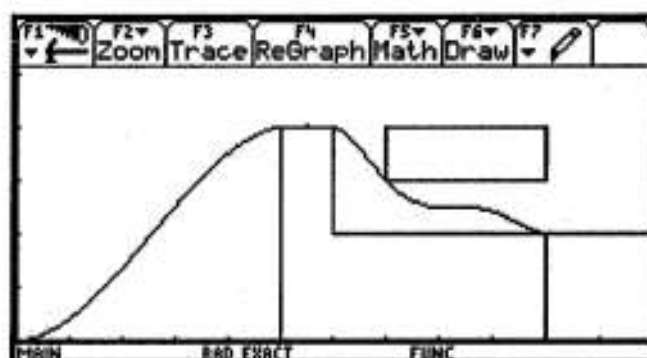
$$f_1(x) = -\frac{3}{50}x^3 + \frac{23}{50}x^2 \quad \text{pour } x \leq 5;$$

$$f_2(x) = -\frac{x^2}{10} + \frac{11x}{10} + 1, \quad \text{pour } 5 \leq x \leq 6;$$

$$f_3(x) = \frac{1207}{28800}x^5 - \frac{49099}{28800}x^4 + \frac{395317}{14400}x^3 - \frac{1573541}{7200}x^2 + \frac{1030783}{1200}x - \frac{6642}{5} \quad \text{pour } 6 \leq x \leq 10$$

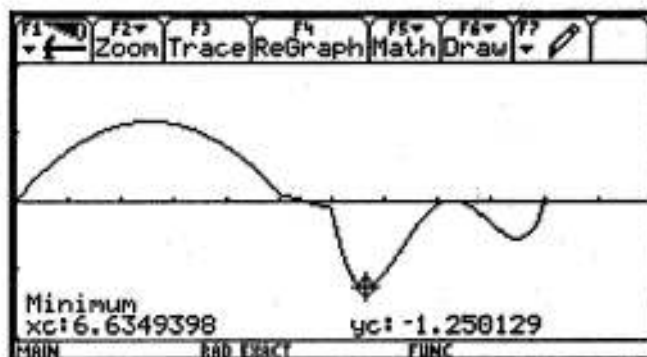
$$f_4(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{400\sqrt{2}} + \frac{39}{40\sqrt{2}}\right)^2} \quad \text{pour } x \geq 10.$$

Graphique de f



Graphique de f'

Michaël note : le maximum de la valeur absolue de la dérivée est 1,25, mais c'est améliorable grâce au système des matrices.



Pour terminer, il note :

*De plus l'intégrale de cette fonction
a une valeur finie, même si elle
n'est pas compétitive.*

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear a-z...
$\int_0^{\infty} u_1(x) dx = \frac{2474153}{3000}$					
$= \frac{2474153}{3000} \approx 824.717666667$					
$2474153/3000$					
MAIN FLO EXACT FUNC 2230					

A la réception, je pose évidemment la question : cela veut dire quoi, "non compétitive" ?
Réponse de Michaël :
*si on rase les reliefs, l'objectif est de se rapprocher le plus possible de 12, c'est à dire
"l'aire des reliefs". Ce qui relève d'une bonne compréhension des contraintes !*

B. Le travail de Jérôme L et Vincent. (avec leur propre rédaction)

1ère courbe sur [0, 6].

On veut chercher une courbe de la forme $f(x) = ax^6 + bx^5 + c$.

On a choisi des exposants forts. Or $c = 0$, car $f(x)$ doit passer par l'origine, donc
 $f(x) = ax^6 + bx^5$.

On veut que la courbe passe par les points B et C respectivement (5, 4) et (6, 4).

Donc $a5^6 + b5^5 = 4$ et $a6^6 + b6^5 = 4$.

A l'aide de la fonction Solve, on obtient :

$$a = -\frac{4651}{6075000} \text{ et } b = \frac{31031}{6075000}. \text{ D'où } f(x) = -\frac{4651}{6075000} x^6 + \frac{31031}{6075000} x^5.$$

$$\text{De là on tire } f'(x) = 6ax^5 + 5bx^4 = -\frac{4651}{1012500} x^5 + \frac{31031}{1012500} x^4.$$

$$\text{Donc, au point C } (x = 6) : f'(6) = \frac{-24562}{9375}.$$

2ème courbe sur [6, 10].

La deuxième équation est de la forme $g(x) = ax^{-5} + bx^{-4} + c$.

On choisit des exposants suffisamment forts pour que la courbe ne coupe pas [D, E].

$$g'(x) = -5ax^{-6} - 4bx^{-5}.$$

On veut que la courbe passe par les points C(6, 4) et E(10, 2).

$$\text{Pour C, } a6^{-5} + b6^{-4} + c = 4$$

Pour E, $a10^{-5} + b10^{-4} + c = 2$. On sait de plus que la dérivée de $f(x)$ en C doit être
égale à la dérivée de $g(x)$ pour que les deux courbes soient tangentes en C :

$$-5a6^{-6} - 4b6^{-5} = g'(6) = \frac{-24562}{9375}.$$

Par résolution du système, on obtient :

$$g(x) = \frac{10787699232}{161875} x^{-5} - \frac{7114897116}{809375} x^{-4} + \frac{7163419}{3237500}, \text{ d'où } g'(10) = \frac{46573137}{2529296875}.$$

3ème courbe sur [10, +∞].

On prend une courbe de la forme $k(x) = \frac{a(x-7)^c}{e^{x-7}}$.

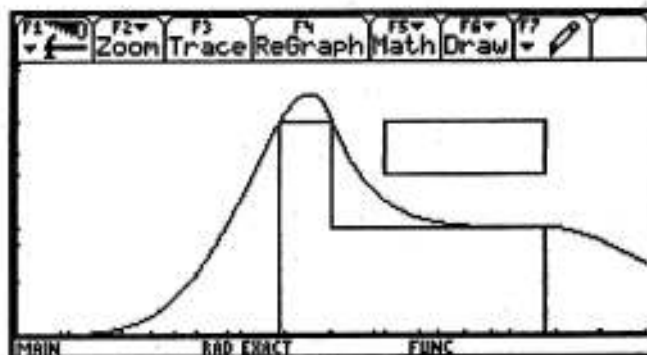
On choisit $(x - 7)$ pour décaler la courbe de 7 vers la droite par rapport à l'origine.
On veut que la courbe passe par $E(10,2)$, et $k'(x) = g'(x)$ pour $x = 10$. Résolution de système, et résultat :

$$c = \frac{15315500661}{5058593750} \text{ et } a = \frac{2e^3}{27} \cdot 3 \cdot c.$$

D'où $k(x)$.

Après plusieurs journées acharnées de travail, nous avons atteint notre objectif : battre le meilleur résultat obtenu précédemment ; en effet, nous arrivons à vaincre toutes les contraintes avec trois courbes.

On réalise là la complexité de la fonction ainsi construite, qui réalise l'ensemble des contraintes... ce qui d'ailleurs a été vérifié avec la calculatrice par des méthodes d'investigation variées (aussi bien via l'application initiale que via l'application graphique.

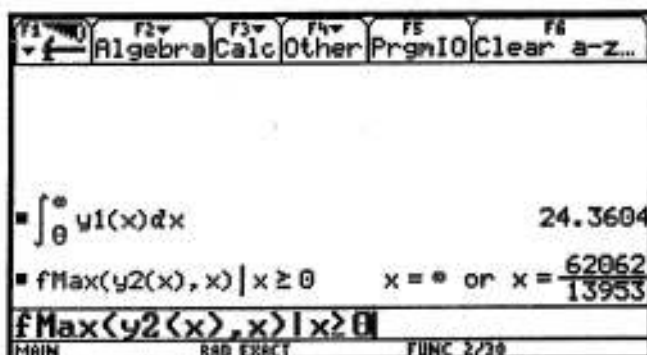


Remarques mathématiques sur le travail réalisé par Jérôme et Vincent.

Ils n'ont pas abordé les calculs d'intégrale et de dérivée : et pour cause, les tentatives d'intégration avec la machine se sont soldées par des échecs.

En effet la calculatrice ne sait pas calculer une primitive de la fonction pour x supérieur à 10. Elle renvoie simplement la question posée. Cependant, si on demande une valeur approchée de l'intégrale entre 0 et $+\infty$, on obtient une réponse... (voir ci-dessous).

Pour le maximum de la valeur absolue de la dérivée, on obtient une réponse bizarre (voir ci-dessous) : $+\infty$, ou $\frac{62062}{13953}$. Difficile à interpréter. Et en plus faux !... Il y a un petit jeu autour de l'infini qui a de quoi laisser perplexe...



Remarques croisées sur les travaux de Michaël, Vincent et Laurent.

Il est tout à fait significatif d'observer l'évolution suivie dans les deux types de travaux :
- Michaël est parti sans recul sur le problème, en notant les contraintes, et en adaptant les "degrés de liberté". Il en arrive à la fin de sa recherche à envisager des "perfectionnements renouvelables à l'infini", ce qui témoigne d'une réflexion sur le travail réalisé...

- Vincent et Jérôme sont partis d'une réflexion sur les fonctions de référence, sur leur adaptabilité au problème posé, et ils en arrivent à une rationalisation des démarches. Bref, des parcours croisés d'un élève plutôt "rationnel" et de deux élèves plutôt "théoriques"...

L'utilisation de la calculatrice, et la stimulation de la recherche, auront été les moteurs de ces progrès...

C. Le travail de Cécile. (avec sa propre rédaction)

On garde les 4 premières fonctions (Cécile raccorde son travail avec ses résultats antérieurs, cf pages 247 et 266).

$$[0, 2] \quad y = 0,25x^2;$$

$$[2, 5] \quad y = x - 1;$$

$$[5, 6] \quad y = -x^2 + 11x - 26;$$

$$[6, 7] \quad y = -x + 10.$$

J'ai cherché d'abord la 6ème fonction avant de trouver la cinquième afin de modifier comme il se doit la pente de cette dernière au point de jonction en $x = 10$.

Cécile procède ainsi parce que, dans les tentatives antérieures, elle n'était pas parvenue à déterminer la dernière fonction en bout de course. Elle commence donc par résoudre la difficulté -la branche infinie- avant d'effectuer le raccord avec le début de la courbe.

Il faut une fonction dont la limite soit nulle en $+\infty$, et dont l'intégrale converge en une limite finie l . Conservons la forme $\frac{a}{x^2}$, il faut que $f(10) = 2$, soit $\frac{a}{100} = 2$, d'où $y_6 = \frac{200}{x^2}$.

$$\text{Or } y'_6 = -\frac{400}{x^3}, \text{ soit } y'_6(10) = -0,4.$$

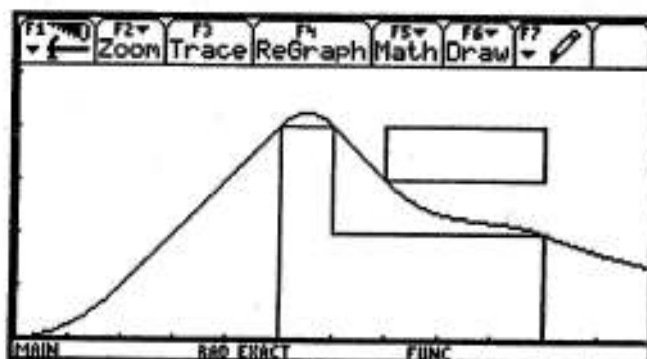
D'où cherchons la fonction comprise entre 7 et 10. 4 conditions pour les raccords de courbe et les raccords de pente. Donc on recherche un polynôme du 3ème degré.

Utilisation de la matrice sur la calculatrice, et détermination du polynôme.

$$\text{Sur } [7, 10] \quad y = -\frac{11}{135}x^3 + \frac{98}{45}x^2 - \frac{878}{45}x + \frac{1642}{27}.$$

L'intégrale de la 6ème fonction converge vers 20. De plus sa limite est nulle en $+\infty$.

Dans toutes ces 6 fonctions, la pente est au plus égale à 1.



Remarque sur les travaux de Jérôme, Vincent, et Cécile :

La comparaison des deux recherches est intéressante : elle correspond à des objectifs opposés.

Jérôme et Vincent, depuis le début, voulaient trouver une seule expression de fonction (ou, à défaut, un minimum d'expressions) qui réalise les contraintes indiquées. Ils étaient prêts ainsi à accepter une complexité considérable des différents coefficients, pourvu que leur objectif soit atteint. Du coup, d'ailleurs, l'objectif du problème (optimisation de la dérivée et de l'intégrale) était relégué au second plan.

Cécile, au contraire, vise les expressions les plus simples possibles, quitte à multiplier les tronçons. C'est une autre conception du travail, plus "cartésienne" : décomposer le problème en problèmes plus simples... et qui lui permet d'aborder la fin du problème dans de meilleures conditions.

Bref, on doit toujours gérer la même quantité d'informations, globalement, ou par petits bouts. Le choix est affaire de stratégie...

Problème long III(suite)

Note de synthèse distribuée aux élèves.

Les meilleures choses ont une fin (provisoire)...

On trouvera ci-dessous les solutions complètes, et justes, qui ont été rendues.

Les solutions incomplètes ont déjà été évoquées.

Tous ceux qui se sont penchés sur ce problème auront beaucoup appris... même s'ils ne s'en sont pas rendu compte !

Ce qui suit ne met pas un point final à cette recherche. A l'occasion, vous pourrez remettre ce problème en chantier. Après le bac, par exemple, pour préparer la prochaine rentrée scolaire. Que vous soyez amené à refaire des mathématiques, ou non, d'ailleurs. Pour le plaisir de la recherche, pourquoi pas ?

1. Les solutions elles-mêmes

1. La solution de Cécile.

$$\text{Sur } [0, 2] \quad f(x) = 0,25x^2;$$

$$\text{Sur } [2, 5] \quad f(x) = x - 1;$$

$$\text{Sur } [5, 6] \quad f(x) = -x^2 + 11x - 26;$$

$$\text{Sur } [6, 7] \quad f(x) = -x + 10;$$

$$\text{Sur } [7, 10] \quad f(x) = -\frac{11}{135}x^3 + \frac{98}{45}x^2 - \frac{878}{45}x + \frac{1642}{27};$$

$$\text{Sur } [10, +\infty[\quad f(x) = \frac{200}{x^2}.$$

2. La solution de Michaël.

$$\text{Sur } [0, 5] \quad f(x) = -\frac{3}{50}x^3 + \frac{23}{50}x^2;$$

$$\text{Sur } [5, 6] \quad f(x) = -\frac{x^2}{10} + \frac{11x}{10} + 1;$$

$$\text{Sur } [6, 10] \quad f(x) = \frac{1207}{28800}x^5 - \frac{49099}{28800}x^4 + \frac{395317}{14400}x^3 - \frac{1573541}{7200}x^2 + \frac{1030783}{1200}x - \frac{6642}{5}$$

$$\text{Sur } [10, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{400\sqrt{2}} + \frac{39}{40\sqrt{2}}\right)^2}$$

3. La solution du professeur.

$$\text{Sur } [0, 5] \quad f(x) = \frac{4}{25}x^2;$$

$$\text{Sur } [5, 6] \quad f(x) = -\frac{8x^2}{5} + \frac{88x}{5} - 44;$$

$$\text{Sur } [6, 10] \quad f(x) = -\frac{7}{160}x^3 + \frac{99}{80}x^2 - \frac{469}{40}x + \frac{157}{4}$$

$$\text{Sur } [10, +\infty[\quad f(x) = (1,9x - 17)e^{-x+10}.$$

4. La solution de Christelle et Fabienne

Sur $[0, 5]$ $f(x) = \frac{4}{125}x^3$;

Sur $[5, 6]$ $f(x) = -\frac{12x^2}{5} + \frac{132x}{5} - 68$;

Sur $[6, 10]$ $f(x) = -\frac{3}{20}x^3 + \frac{151}{40}x^2 - \frac{63}{2}x + \frac{179}{2}$

Sur $[10, +\infty[$ $f(x) = -e^{-0,5x+5}$.

5 La solution de Jérôme L. et Vincent

Sur $[0, 6]$ $f(x) = -\frac{4651}{6075000}x^6 + \frac{31031}{6075000}x^5$;

Sur $[6, 10]$ $f(x) = \frac{10787699232}{161875}x^5 - \frac{7114897116}{809375}x^4 + \frac{7163419}{3237500}$,

Sur $[10, +\infty[$ $f(x) = \frac{a(x-7)^c}{e^{x-7}}$, avec $c = \frac{15315500661}{5058593750}$ et $a = \frac{2e^3}{27} \cdot 3^{-c}$.

2. Remarques sur les solutions.

Voir uniquement les solutions donne peu d'indications sur la méthode utilisée pour y aboutir. Quelques réflexions donc sur les choix effectués.

Des choix nécessaires...

Tous ceux qui ont réfléchi au problème, trouvé des solutions partielles, ont bien vu qu'il fallait à la fois :

- avoir une petite idée des solutions convenables a priori (c'est à dire connaître l'allure des principales fonctions de référence : "là une fonction carré irait bien...") ;
- analyser clairement les contraintes que le fonction devait satisfaire pour la continuité et la dérivabilité ;
- bien utiliser les commandes de la machine (pour la résolution des équations, puis l'écriture des fonctions solutions).

C'est à dire que la résolution du problème supposait de connaître des mathématiques, et de connaître le fonctionnement de la TI-92. Mais c'était aussi l'occasion d'apprendre des mathématiques, et de se familiariser avec de nouvelles commandes de la machine !

Bref, pour réussir à trouver des solutions convenables, il fallait accepter de jouer le jeu, de réfléchir, et de travailler un certain temps.

... et des choix personnels.

Il y avait aussi des choix de stratégie à faire : il est clair que, quand on regarde les solutions trouvées, on réalise que Cécile d'un côté, et Vincent et Jérôme de l'autre, n'ont pas fait les mêmes choix. L'une a multiplié les tronçons, pour bénéficier des fonctions les plus simples possibles, les autres ont tenté d'avoir le moins de tronçons possibles, quitte à se trouver avec des expressions très complexes...

Des choix différents ont été faits aussi en cours de résolution : certains ont d'abord déterminé les tronçons "extrêmes" (à droite et à gauche), puis déterminé un raccord central, d'autres ont commencé par le tronçon de gauche, et ont raccordé au fur et à mesure...

Résoudre un problème, c'est faire des choix de stratégie, en étant capable de réévaluer une stratégie si celle-ci aboutit à une impasse. Rien à voir avec l'application de recettes toutes faites !

Un petit coup d'oeil maintenant sur les courbes obtenues.

1. La solution de Cécile

$$\text{Max } |f'(x)| = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{2573}{60} \approx 42,88$$

2. La solution de Michaël

$$\text{Max } |f'(x)| \approx 1,25$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{2\,474\,153}{3000} \approx 824,71$$

3. La solution du professeur

$$\text{Max } |f'(x)| = 1,6$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{149}{6} \approx 24,83$$

4. La solution de Christelle et Fabienne

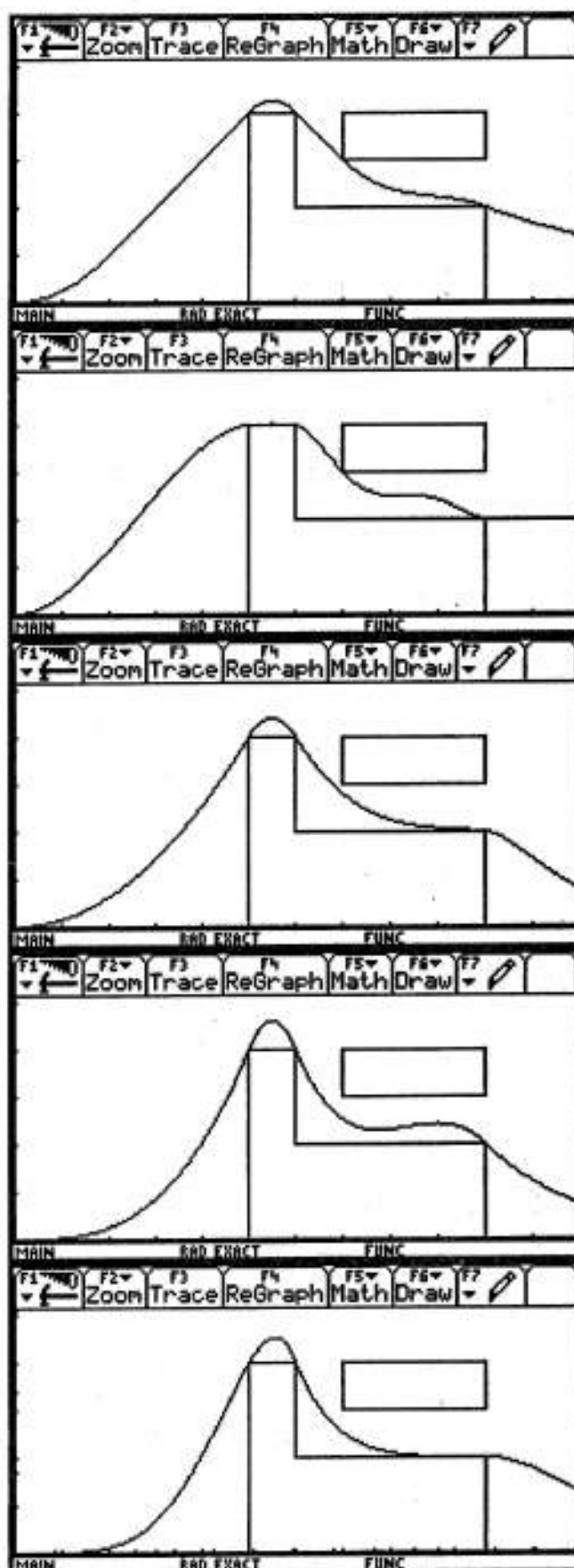
$$\text{Max } |f'(x)| = 2,4$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{353}{15} \approx 23,53$$

5. La solution de Jérôme et Vincent

$$\text{Max } |f'(x)| \approx 2,61$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \approx 24,36$$



3. Et enfin le "classement" des solutions !

Il y avait deux optimisations possibles : par la dérivée, et par l'intégrale, les deux objectifs étant difficilement compatibles...

Palmarès	Optimisation dérivée.	Optimisation intégrale.
1 ^{er}	Cécile $\text{Max} f'(x) = 1$	Christelle-Fabienne $\int_0^\infty f(x) dx \approx 23,53$
2 ^{ème}	Michaël $\text{Max} f'(x) \approx 1,25$	Jérôme-Vincent $\int_0^\infty f(x) dx \approx 24,36$
3 ^{ème}	Prof. $\text{Max} f'(x) = 1,6$	Prof. $\int_0^\infty f(x) dx \approx 24,83$
4 ^{ème}	Christelle-Fabienne $\text{Max} f'(x) = 2,4$	Cécile $\int_0^\infty f(x) dx \approx 42,88$
5 ^{ème}	Jérôme-Vincent $\text{Max} f'(x) \approx 2,61$	Michaël $\int_0^\infty f(x) dx \approx 824,71$

Tableau récapitulatif (valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut)

On voit assez facilement, en considérant les courbes, pourquoi la solution de Cécile est la meilleure relativement à la dérivée, et pourquoi la solution de Michaël est la pire relativement à l'intégrale...

Plusieurs questions peuvent se poser à propos de ces résultats.

a) comment, pour une courbe solution, peut-on calculer intégrale, et maximum de la valeur absolue de la dérivée ?

* Pour l'intégrale, pas de problème, en principe. La calculatrice assure le calcul de $\int_0^\infty f(x) dx$, quand cette intégrale existe (on a vu que pour $\frac{1}{x}$ ce n'est pas le cas), et quand elle sait la calculer (ce qu'elle ne sait pas faire pour la fonction de Jérôme et Vincent, il faut alors passer par un calcul approché).

Il s'agit ici d'un travail de recherche, donc on peut légitimement se satisfaire du résultat exact donné par la machine. Le jour d'un examen, il faudrait décomposer la fonction sur chacun des intervalles où elle est définie par une forme particulière, intégrer, et faire la somme des intégrales en utilisant la relation de Chasles.

Un problème se pose en $+\infty$ (nous sommes ici à la lisière du programme de Terminale!). Pour le régler (en calcul papier/crayon), on calcule $F(a) = \int_{10}^a f(x) dx$, et on calcule la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

* Pour le maximum de la valeur absolue de la dérivée, on peut passer, en première approximation, par la considération du graphique de celle-ci, et utiliser les commandes graphiques Maximum, et Minimum. Mais on n'aura là que des valeurs approchées (comme toujours dans l'application graphique).

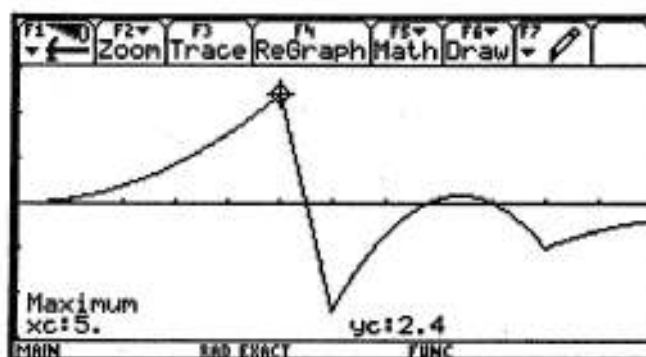
L'assurance du maximum exact s'obtient par considération des fonctions qui entrent dans la composition de la dérivée.

Par exemple, pour la fonction de Fabienne et Christelle, on sait que la restriction de la dérivée au premier intervalle est un polynôme du deuxième degré, puis une fonction affine, puis à nouveau un trinôme (il suffit de considérer la fonction f pour s'en persuader).

Quand au dernier tronçon, il s'agit d'une fonction exponentielle, facile à analyser.

On est ainsi assuré que le maximum de la valeur absolue de la dérivée est atteint en 5 (ou en 6) : c'est exactement 2, 4.

Ceux qui ont choisi des fonctions plus complexes (Jérôme et Vincent, Michaël), ont beaucoup plus de mal à déterminer les valeurs exactes des extremums de la dérivée !



(Pour cette recherche, on peut aussi utiliser, dans l'application initiale, la commande fMax(fonction, variable) du menu Calc. Mais cela réserve parfois quelques surprises...)

b) Comment pouvait-on améliorer les solutions trouvées ?

Pour minimiser $\text{Max } |f'|$, il fallait envisager une fonction "la plus directe possible", en fait assez proche d'une fonction affine par morceaux. C'est pourquoi la solution de Cécile est si performante...

Pour minimiser l'intégrale, il fallait que la courbe soit la plus proche possible des reliefs, en particulier sur l'intervalle $[10, \infty[$. On trouve aux deux extrêmes la solution de Michaël, qui est très mauvaise, et, à l'autre extrémité, la solution de Christelle et Fabienne, qui, avec une fonction du type e^{-x} , sont assurées d'une décroissance très rapide vers 0.

c) Pouvait-on trouver mieux ?

*Pour l'intégrale d'abord.

La fonction f à trouver était nécessairement au dessus des reliefs. Si on appelle g la fonction affine par morceaux qui est égale à 0 sur $[0, 5[$, à 4 sur $[5, 6[$, à 2 sur $[6, 10[$, puis à 0 sur $[10, +\infty[$, on admettra bien volontiers, que, pour des considérations d'aire,

$\int_0^{\infty} g(x) dx = 12$. Comme $f \geq g$ sur cet intervalle, on a nécessairement $\int_0^{\infty} f(x) dx \geq 12$. On peut donc trouver des solutions meilleures que celle de Fabienne et Christelle, en "creusant" davantage les tracés, pour frôler davantage les reliefs. Problème : peut-on arriver à une intégrale égale à 12 ? On aurait alors :

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} g(x) dx, \text{ donc } \int_0^{\infty} [f(x) - g(x)] dx = 0, \text{ ou encore :}$$

$$\int_0^5 [f(x) - g(x)] dx + \int_5^6 [f(x) - g(x)] dx + \int_6^{10} [f(x) - g(x)] dx + \int_{10}^{\infty} [f(x) - g(x)] dx = 0.$$

Or $f \geq g$, donc ces quatre intégrales sont positives. Comme leur somme est nulle, cela veut dire que chacune d'elle est nulle. On démontre que si une fonction positive et continue a une intégrale nulle, alors elle est nulle. Donc les fonction f et g coïncident sur chacun de ces intervalles. Or la fonction g n'est pas continue !

Conclusion, f ne peut pas être égale à g , et l'intégrale ne peut pas atteindre 12. On peut simplement s'en rapprocher autant que l'on veut...sans jamais l'atteindre !

* Pour la dérivée.

Soit M le majorant envisagé. L'inégalité des accroissements finis nous dit que, pour tout (a, b) de l'intervalle $[0, +\infty[$, on a $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$. On a là une contrainte importante sur M ! On peut l'exploiter à partir des "tunnels" de passage de la courbe f (en prenant les tunnels les plus "pentus", pour augmenter la contrainte sur M).

Prenons alors $b = 6$, et $a = 5$. On a, par report dans l'inégalité des accroissements finis $|f(6) - f(5)| \leq M |6 - 5|$, c'est à dire $M \geq |f(6) - f(5)|$. Or on a forcément $f(6) \geq 4$, et $f(7) \leq 3$ (pour des raisons de contraintes de relief). Donc $f(6) - f(7) \geq 1$. Donc $M \geq 1$. Ainsi, il n'y a pas de meilleur résultat à espérer que le résultat de Cécile !

Pour autant, sa solution est-elle la seule possible ?

Il est assez facile de voir que non. Il suffit pour cela de garder la même solution qu'elle sur l'intervalle $[2, +\infty[$, de prolonger la fonction affine $x - 1$ sur $[1,5; 2]$, et de lier le point de départ $(0, 0)$ au point $(1,5; 0,5)$ par une fonction qui vérifie 4 contraintes :

$f(0) = f'(0) = 0$, $f(1,5) = 0,5$, et $f'(1,5) = 1$. Cela fait 4 contraintes, un polynôme du 3ème degré fait l'affaire.

On laisse le lecteur attentif achever le calcul...

En conclusion.

1. Les choses ne sont pas aussi simples que prévu :

- pour l'optimisation de l'intégrale, on ne peut pas trouver mieux que 12. Mais aucune fonction ne peut atteindre cet "idéal". Mais on peut se rapprocher aussi près que l'on veut de cette valeur ;

- pour l'optimisation de la dérivée, on ne peut pas trouver mieux que 1. Mais là, on peut trouver une fonction qui atteigne cette valeur. Mais cette "meilleure solution" n'est pas la seule.

Il y a de quoi méditer...

2. Sur les rapports entre ces problèmes de recherche et le cours normal : certains se sont laissés gagner par le scepticisme. Ils ont eu tort ! C'est en cherchant que l'on fait des progrès. Même si l'on ne trouve pas.

- ceux qui ont cherché des courbes ont ainsi mémorisé de nombreuses formes de représentations graphiques, ce qui facilitera plus tard les associations courbes/fonctions;

- ceux qui sont allés plus loin ont pu réfléchir à la définition de la dérivée, de l'intégrale ;

- et ceux qui reprendront cette correction de près auront l'occasion de revoir les deux inégalités fondamentales de cette année d'Analyse, l'inégalité des accroissements finis, et l'inégalité de la moyenne. Notez d'ailleurs que ces inégalités étaient la clé du problème !

- de façon générale, chercher à résoudre un problème sert toujours. Que fait-on dans la vie sinon cela ? Rechercher une stratégie (quand on en a trouvé une, essayer de l'améliorer, quand on n'en a pas trouvée, essayer de comprendre les raisons des impasses...et recommencer par une autre voie) essayer de distinguer exact et approximatif, vrai et faux...

Finalement, faire des mathématiques, c'est cela.

Comme toujours, tout finit par une question.

Si on remonte tout le relief de 1 unité (le nuage aussi, mais pas le sol évidemment), sans rien changer au reste, alors le plus petit majorant de la valeur absolue de la dérivée reste 1, mais on ne peut plus trouver de fonction qui réalise cela. C'est à dire que l'on se trouve dans la même situation que pour l'intégrale tout à l'heure : existence d'une borne idéale, que l'on ne peut pas atteindre en respectant les contraintes du problème.

Pourquoi ?



Problème long, fin.



Commentaires finaux sur le problème long

Sur l'éventail des stratégies...

Il est intéressant de noter l'évolution de l'investissement des différents types d'élèves dans cette recherche :

- au début, les élèves "bricoleurs" se sont lancés à corps perdu dans le problème, imaginant que leur habileté manœuvrière les sortirait vite d'affaire. Ils ont vite déchanté ;

- les élèves théoriques et expérimentateurs ont mobilisé des fonctions de référence, ou des astuces technico-mathématiques, pour résoudre le problème. Ils ont d'abord enregistré des succès partiels, mais les insuffisances mathématiques, et de maîtrise de l'outil de calcul, les ont bloqués. Puis (pendant les vacances de Pâques), certains ont repris l'ouvrage, en rationalisant leurs démarches, et ils sont arrivés au bout !

- certains élèves de type "rationnels", qui sont partis les derniers, sont arrivés quasiment au bout de l'épreuve. Convaincus tardivement de l'intérêt de la machine (on en voit encore les traces dans la rédaction de Michaël), ils ont traité le problème avec méthode, c'est à dire en utilisant les résultats du cours, les indications du professeur, et les travaux antérieurs des autres équipes.

- quant aux élèves de type scolaire, ils ne sont pas arrivés au bout du voyage quant à l'avion.... Cependant, malgré les difficultés théoriques et techniques, ceux qui avaient accepté le contrat de recherche ont poursuivi leur petit bonhomme de chemin. Et, finalement, on peut estimer que leur voyage à eux n'était pas si mal que cela...

Sur les acquis...

Il reste à évaluer ce que la recherche a apporté sur le plan théorique : les notions de fonction, de continuité, de dérivabilité, de limite ont été cotoyées pendant plusieurs mois au cœur de ce problème. On peut espérer que cela laissera quelques traces...

Dans le travail de Michaël par exemple, l'élément important, concernant l'optimisation de l'intégrale, a été vu : tous les tracés sont perfectibles, il n'y a donc pas de tracé "optimal".

Dans le travail de Cécile, de façon plus implicite, la contrainte pour la dérivée a été pressentie. Oralement : "faire mieux que 1, ce n'est pas possible, sinon, comment on pourrait passer par là ?" (dit-elle en montrant le tunnel crucial...).

Ces réussites partielles constituent sans doute la partie émergée d'un iceberg plus profond : pour une bonne partie de la classe, la recherche (aussi bien pour ce problème long que, plus généralement, dans les TP) a permis des découvertes non négligeables sur les objets de base du cours... et sur "l'attitude de recherche" elle-même !

Sur les rapports entre le problème long... et le reste du travail de l'année.

On pourra lire dans le volume 2 ("côté jardins") des éléments significatifs concernant l'évaluation que les élèves font eux-mêmes des travaux réalisés cette année.

90% des élèves de la classe ont considéré le travail de recherche en TP intéressant, 60% des élèves ont jugé intéressante la rédaction de rapports de recherche réguliers. Seulement 45% des élèves ont été intéressés par la recherche sur le problème long.

On peut estimer que c'est peu, ou beaucoup, suivant le regard que l'on porte sur ce type de travail...

Trois éléments semblent en tous cas certains :

- c'est parce qu'il y a eu un travail régulier de recherche, toute l'année, dans des situations variées (les TP), que des élèves ont pu s'engager dans une recherche plus ardue dans le cadre du "problème long" ;

- réciproquement, l'existence de ce problème de longue haleine a donné une continuité de travail sur une bonne partie de l'année, a maintenu une "tension intellectuelle" dont une bonne partie de la classe a profité ;

- la possession d'un outil comme la TI-92 a permis à bon nombre d'élèves de s'approprier des "petits bouts" de solution, de voir une partie de l'objet en cours de construction...

Et sur la queue de poisson.

Il n'en reste pas moins que seuls 7 élèves ont rendu un rapport final.

Deux raisons, liées, expliquent la fin de ce problème en forme de queue de poisson :

- d'une part le retard dans l'arrivée des machines. Les choses se seraient déroulées différemment si la recherche avait pu commencer en Novembre, pour se finir en Février. Au niveau de la classe Terminale, la préparation du baccalauréat, et l'angoisse qui y est liée, ne permettent pas d'envisager une étude relativement ouverte au delà de cette date ;

- d'autre part la coupure entre le problème long, et les parties du cours traitées. Les élèves ont abordé les questions de "raccord dérivable" quand on étudiait le cours sur l'intégration, et les problèmes d'intégrale minimale quand on traitait en cours des complexes. Il est probable que l'investissement des uns et des autres aurait été différent si le cours avait pu fournir le contexte de traitement du problème, si le problème avait été perçu comme le cadre naturel d'illustration des points théoriques abordés en classe.

Tout ceci est à méditer pour de prochaines expériences de ce type !



Fin du problème long.
(et dernière allégorie).

Une conclusion en forme d'introduction.

Que dire en conclusion ?

Du point de vue des professeurs, cette année a été l'occasion de remises en question, assez profondes :

- sur la façon de faire des mathématiques ;
- sur la "formation de l'esprit scientifique" ;
- sur les relations avec les élèves.

Ces remises en questions sont naturelles, dans le cadre d'un travail d'équipe. Elles sont aussi la conséquence du travail d'intégration d'un logiciel de calcul formel : l'activité permanente d'identification d'expressions retournées par la machine, la combinaison permanente aussi de résultats donnés, et de résultats à trouver, posent nécessairement des questions de fond. Y a-t-il une meilleure représentation d'un objet mathématique ? Que peut-on accepter du logiciel sans démonstration ? Sans contrôle ? Quel type de problème est désormais pertinent ? Avec quelle organisation de classe ?

Nous sommes bien conscients d'avoir ouvert quelques pistes, mais d'être encore au coeur de la jungle...

Du point de vue des élèves, l'expérience de cette année aura eu sans doute deux conséquences :

- sur leur attitude vis à vis des mathématiques. D'abord sceptiques vis à vis du travail de recherche demandé, ils ont peu à peu gagné en motivation. Les professeurs qui ont visité la classe pendant les TP ont ainsi pu apprécier le réel investissement des "binômes" d'élève dans le travail donné. Les mathématiques sont devenues objet de curiosité, enjeu de connaissances.

- sur les connaissances acquises. La plupart des TP ont été centrés cette année sur l'analyse, et plus précisément sur la notion de limite. Dire que cela a permis de lever tous les obstacles à l'acquisition de cette difficile notion serait excessif. Je dirais simplement que le fait même d'avoir mis en évidence les obstacles est déjà un progrès décisif, préparant dans de bonnes conditions les apprentissages ultérieurs.

On pense à la phrase d'Imre Lakatos [Lakatos 1974] : *La certitude n'est jamais achevée ; les fondations ne sont jamais trouvées. Mais, dans le domaine des mathématiques, l'art de la raison transforme chaque progrès de la rigueur en un accroissement du contenu.*

Disons que le travail collectif de cette année nous a donné l'impression de cultiver, avec bonheur parfois, avec perplexité toujours, cet "art de la raison"...

Mais la réflexion doit sans doute se prolonger, pour aller plus au fond. Dans un rapport sur l'intégration des logiciels de calcul formel, l'équipe DIDIREM [DIDIREM 1996] note :

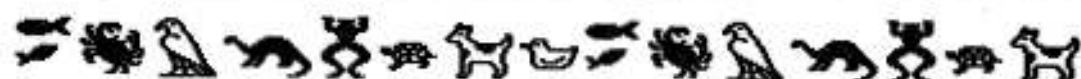
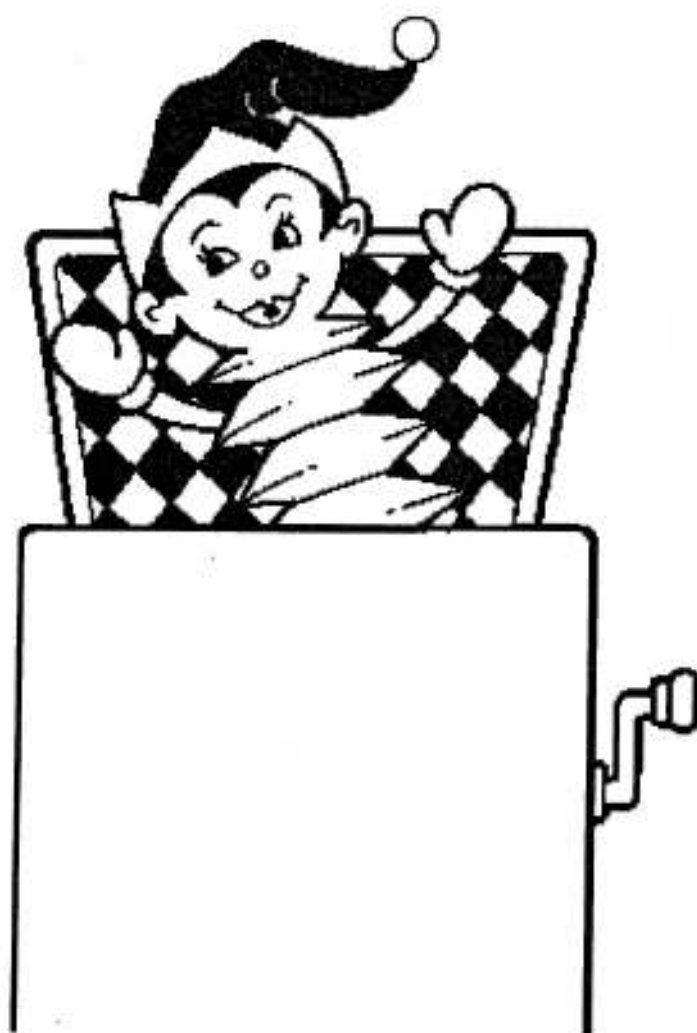
Il existe des forces contradictoires, la première favorisant un fonctionnement réflexif et conceptuel, la deuxième favorisant une atomisation de la résolution en une multiplicité d'actions élémentaires, l'équilibre dépendant à la fois des caractéristiques de la tâche, mais aussi des caractéristiques cognitives des élèves concernés.

C'est dire que, pour comprendre vraiment ce qui se passe, il faut observer avec plus de finesse les comportements des élèves, dégager une typologie de ceux-ci, pour mieux cerner les évolutions. Il faut aussi recueillir les impressions des élèves eux-mêmes, leur propre représentation du travail réalisé cette année. Il faut analyser leurs propres productions (en TP, en devoir "type bac", en classe en général).

C'est l'objectif du deuxième volume : "côté jardins", qui suit avec une grande logique ce "côté cours".

Si le "côté cours" donne envie d'aller voir aussi ce qui se passe "côté jardins", il aura pleinement rempli son rôle ! De l'intérêt pour les connaissances à l'intérêt pour la construction des connaissances, il n'y a qu'un pas...qu'il faut franchir !

Bibliographie



Repères bibliographiques

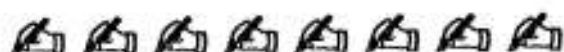


- ALDON G.**, 1995, *Une voiture à la Derive*, Repères-Irem n°21.
- ARTIGUE M.**, 1995, *Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques*, Repères-IREM n°19, pp 77-108
- ARTIGUE M.**, 1995, *Une approche didactique de l'intégration des EIAO à l'enseignement*, in *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, Guin, Nicaud et Py, Eyrolles, Paris.
- BALACHEFF N.**, 1987, *Processus de preuve, et situation de validation*, Educational Studies in Mathematics 18, pp 147-176.
- BARON M., ROBERT A.**, 1993, *Métaconnaissances en I.A., en E.I.A.O., et en didactique des Mathématiques*, Cahier de Didirem (numéro spécial, IREM, Université Paris VII.
- BERNARD, FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE**, 1995, *Des fonctions et des graphes*, IREM de Montpellier.
- BERNARD, FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE**, 1995, *Arithmétique, le retour*, IREM de Montpellier.
- CANET J.-F.**, 1994, *Exemple d'utilisation d'un Système de Mathématique Symbolique*, Mémoire de DEA, IREM de Montpellier
- CANET J.-F.**, 1995, *Outil de calcul symbolique et enseignement des mathématiques*, Hypothèses, bulletin scientifique du secondaire de Texas Instrument, n°8.
- CANET J.-F., DELGOULET J., GUIN D., TROUCHE L.**, 1996, *Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense toujours pas de réfléchir*, à paraître dans Repères-IREM n°24.
- CHABERT J.-L., et alii**, 1994, *Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin.
- CHEVALLARD Y.**, 1992, *Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques*, in *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, PUF.
- CNDP**, 1995, *Des outils pour le calcul et le traçage de courbes*, Les Dossiers de l'Ingénierie Educative, n°19, Mars 1995, CNDP
- Commission Inter-Irem Epistémologie et Histoire des Mathématiques**, 1982, *La rigueur et le Calcul*, Cedic.
- Commission Inter-Irem Mathématique et Informatique**, 1994, *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques*, Actes de l'Université d'été, Irem de Caen.
- DAHAN-DALMEDICO A., PFEIFFER J.**, 1982, *Routes et dédales*, Axes
- DIDIREM**, 1996, *Impact de l'Intégration de systèmes de calcul symbolique dans l'enseignement sur les représentations et pratiques mathématiques des élèves de l'enseignement secondaire*, Rapport de recherche, Université Denis Diderot, Paris 7.
- DEBRAY R.**, 1992, *Vie et mort de l'image, une histoire du regard en Occident*, Gallimard.
- DOUADY R.**, 1986, *Jeux de cadre et dialectique outil-objet*, RDM 7-2, pp 5-31.





- DREZEN G.**, 1996, *Recherche statistique orientée objets d'une typologie d'élèves utilisateurs de calculatrices graphiques et à système formel*, Mémoire de DEA, Université de Montpellier II.
- DUVAL R.**, 1988, *Graphiques et équations : l'articulation de deux registres*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1, pp 235-253, IREM de Strasbourg.
- FAURE, NOGUÈS, NOUAZÉ, TROUCHE**, 1993, *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, IREM de Montpellier.
- FORTIN P.**, 1995, *Calcul formel, mythe ou réalité*, document d'accompagnement de la TI-92, Texas Instrument.
- HIRLMANN A. et alii**, 1994, *Enseignement des Mathématiques et Logiciels de Calcul Formel*, Bureau des innovations pédagogiques et des technologies nouvelles, Ministère de l'Éducation Nationale.
- Hypothèses**, 1995, Bulletin Scientifique du Secondaire de Texas Instrument, n°8.
- IREM Strasbourg**, 1983, *Mathématiques, Terminales C et E*, Istra.
- KUNTZ G.**, 1993, *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*, Repères-Irem n°11.
- KUTZLER B.**, 1992, *The Future of Teaching Mathematics*, The International Derive Journal, John Berry Editor, Plymouth.
- KUTZLER B.**, 1995, *Présentation de la TI-92*, Documents d'accompagnement de la TI-92, Texas Instrument.
- LAKATOS I.**, 1974, *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann
- LELONG-FERRAND, ARNAUDIES**, 1977, *Analyse, Tome II*, Collection U, Dunod.
- NOGUES M.**, 1993, *Le concept de fonction*, Mémoire de DEA, Montpellier II, IREM de Montpellier
- NOUAZÉ Y.**, 1995, *Mathématiques et Calculatrices*, Premiers Cycles Universitaires, Ellipse.
- OVAERT J.-L. et VERLEY J.-L.**, 1983, *Analyse, Volume 1*, Cedic Nathan.
- POLYA G.**, 1962, *La découverte des Mathématiques*, Traduction française 1967, Dunod.
- QUEAU P.**, 1993, *Le virtuel, vertus et vertiges*, Champ Vallon / INA.
- ROBERT A.**, 1993, *Éléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices en 1ère S et Terminale C et E*, Repères-Irem n°11.
- STRANSKY J.**, 1992, *Macintosh Uti Nec Abuti, Calculer*, Apple Computer France.
- THEODOR R.**, 1989, *Initiation à l'Analyse Numérique*, Masson
- TROUCHE L.**, 1992, *Calculatrices graphiques, Statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA, IREM de Montpellier.
- TROUCHE L.**, 1995, *E pur si muove*, Repères, revue des IREM, n°20.
- TROUCHE L.**, 1996, *Masques*, Repères spécial Analyse n°23.
- VEB Bibliographisches Institut**, 1975, *Mathematics at a Glance*, Leipzig.



Mathématiques

Quarante enfants dans une salle
Un tableau noir et son triangle,
Un grand cercle hésitant et sourd
Son centre bat comme un tambour ;

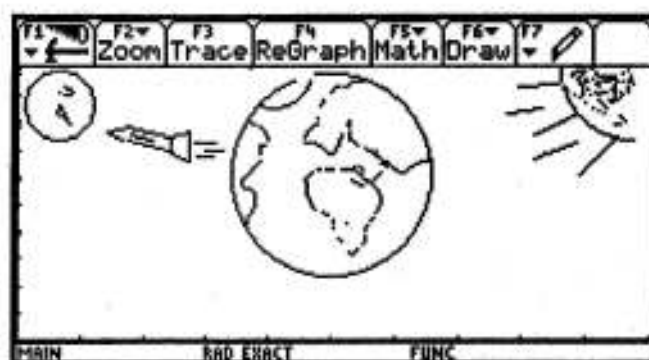
Des lettres sans mots ni patrie
Dans une attente endolorie.

Le parapet dur d'un trapèze,
Une voix s'élève et s'apaise,
Et le problème furieux
Se tortille et se mord la queue.

La mâchoire d'un angle s'ouvre.
Est-ce une chienne ? Est-ce une
louve ?

Et tous les chiffres de la terre,
Tous ces insectes qui défont
Et qui refont leur fourmillère
Sous les yeux fixes des garçons.

Jules Supervielle, *Gravitations*.



TITRE

Enseigner les mathématiques en TS avec des calculatrices graphiques et formelles.

Pistes pour un renouvellement. Volume 1 (côté cours).

AUTEUR

Luc TROUCHE

DATE

Juin 1996

EDITEUR

IREM, Université Montpellier II.

MOTS CLÉS

Analyse, expérimental, outil de calcul, calculatrice graphique, calcul formel, Derive.

RÉSUMÉ

Dans le cadre d'une expérimentation IREM / CRDP de Montpellier, l'auteur a travaillé pendant une année scolaire avec des élèves de Terminale S disposant tous d'une calculatrice TI-92 (comportant, entre autres applications, un logiciel de calcul formel : Derive). Il présente dans ce premier volume les documents élaborés pour les élèves : éléments de cours, propositions de travaux pratiques, et d'un problème ouvert.

A travers ces différentes facettes de l'enseignement des mathématiques, apparaissent les problèmes posés par l'outil de calcul, et ses potentialités :

- la possibilité de distinguer calcul exact et calcul approché ;
- la possibilité d'envisager un même objet mathématique sous des angles, et avec des formes, très divers ;
- la nécessité d'un débat scientifique dans la classe.

Il s'agit en fait de pistes pour un renouvellement de l'enseignement de l'analyse en lycée, rendu indispensable par l'évolution des outils de calcul.

NOMBRE DE PAGES

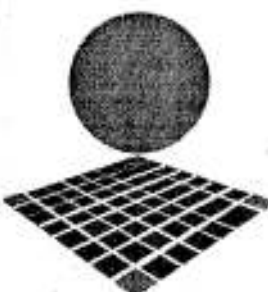
292 pages

PRIX

70F

ISBN

2-909916-21-9

IREM de Montpellier

Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon Montpellier
cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05

Tél : 67.14.33.83 - 67.14.33.84
Fax : 67.14.39.09

e.mail : irem@math.univ-montp2.fr