ECOLE D'ARCHITECTURE
LANGUEDOC-ROUSSILLON
MONTPELLIER

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES
MATHEMATIQUES MONTPELLIER

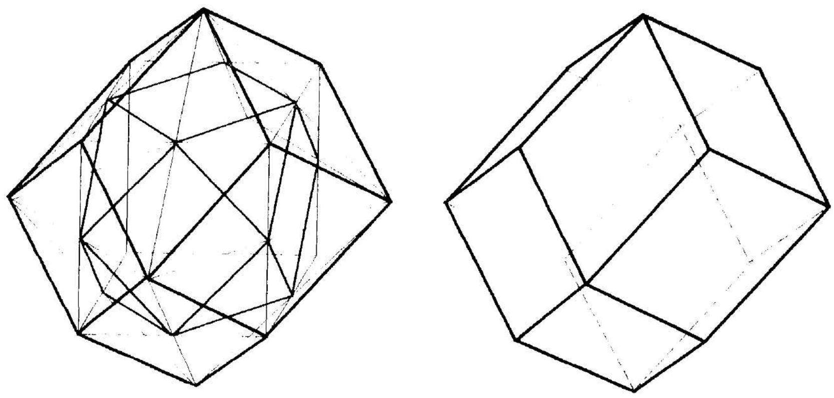
GÉOMÉTRIE POUR L'ÉLÈVE ARCHITECTE

T. BERTHOMIER F. BONAFÉ

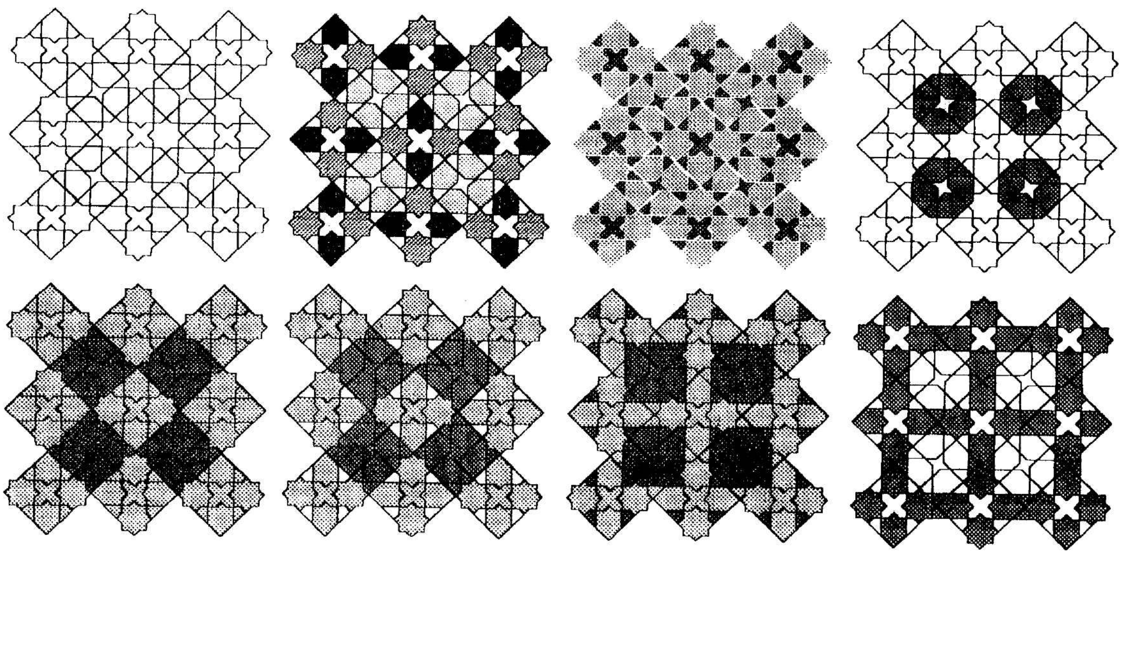
1995

ECOLE D'ARCHITECTURE LANGUEDOC-ROUSSILLON, MONTPELLIER

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DE MONTPELLIER



GÉOMÉTRIE POUR L'ÉLÈVE ARCHITECTE



T. BERTHOMIER F. BONAFÉ

1995

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Ce document est le résultat d'une collaboration entre les enseignants de mathématiques de l'Ecole d'Architecture Languedoc-Roussillon et le groupe géometrie de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Montpellier.

Nous avons tenté de rassembler les connaissances pouvant servir de point d'appui à un futur architecte dans l'utilisation de la géométrie. Pour les étudiants peu motivés par les mathématiques, parfois rebutés par les calculs, nous avons tenté de respecter quelques équilibres entre chapitres avec ou sans calcul. Equilibres entre les éléments permettant de structurer le plan (polygones réguliers, surfaces, frises, pavages) et ceux permettant de structurer l'espace (polyèdres réguliers ou non, problèmes d'intersections, angles dièdres).

Mais il est évident que les données élémentaires que constituent les théorèmes de Pythagore et de Thalès ainsi que la trigonométrie et la résolution des équations du second degré sont incontournables. Aussi pour les étudiants non familiarisés avec le second degré ou la trigonométrie nous avons prévu un chapitre permettant de faire brièvement le point.

Nous avons également proposé un travail sur l'ellipse qui est au centre de la représentation des corps ronds. Nous aurions pu ajouter une étude plus complète sur les coniques mais celles-ci peuvent également être abordées en géométrie descriptive comme problèmes d'intersections.

Enfin, pour les étudiants désireux d'approfondir certains des thèmes abordés, nous avons regroupés dans une bibliographie des documents ou ouvrages pouvant les aider dans leur démarche.

Nous remercions particulièrement J. NAUDEILLO pour son concours dans la réalisation de nombreuses figures ainsi que R. BRUNET et M. C. COMBES pour leur collaboration et leur aide précieuse dans la mise en pratique de ce document.

T. BERTHOMIER, F. BONAFÉ.

CHAPITRE I

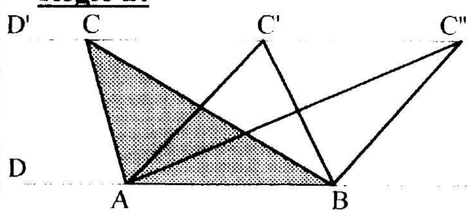
FIGURATION ET FORMALISME

Il s'agit pour l'essentiel d'exploiter visuellement une figure à partir de simples propriétés sur les surfaces, afin d'établir et d'utiliser d'autres propriétés déjà connues ou à découvrir.

1°) LES PRINCIPES DE BASE.

Règle 1: la surface d'un triangle est invariante dans tout déplacement ou retournement. Elle est donnée par $S = \frac{1}{2} bh$ quelles que soient la base b et la hauteur h correspondante.

Règle 2:

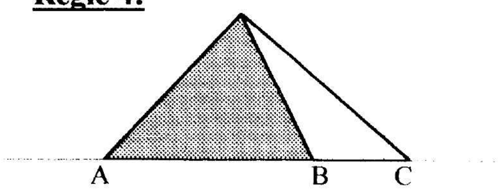


Si D et D' sont parallèles, la surface du triangle ABC est indépendante de la position de C sur D'.

$$S(ABC) = S(ABC') = S(ABC'')$$

Règle 3: réciproquement, si un triangle a une surface fixe donnée et un côté AB fixe, son troisième sommet C située d'un côté donné de AB, est sur une droite parallèle à AB.

Règle 4:

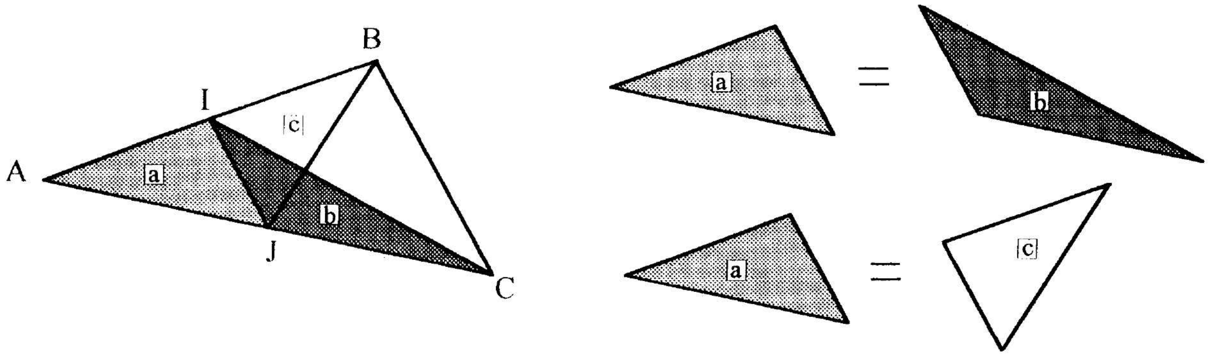


A, B, C étant alignés, les surfaces des triangles ABS et BCS sont dans le rapport de leurs bases AB et BC.

$$\frac{S(ABS)}{S(BCS)} = \frac{AB}{BC}$$

Application: Démontrer que la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Preuve: On désigne par a, b, c, les surfaces respectives des triangles AIJ ,CIJ, BIJ.
Comme a = b et a = c (règle 4) on en déduit b = c et la règle 3 donne IJ parallèle à BC.



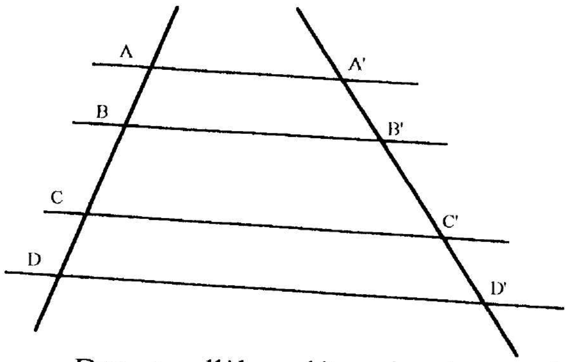
Exercices: 1) Démontrer que dans un triangle le segment qui joint les milieux de deux côtés est égal à la moitié du troisième.

2) Etablir que les médianes d'un triangle le partagent en six triangles de même surface.

2°) LE THEOREME DE THALES.

Deux points de vue coexistent

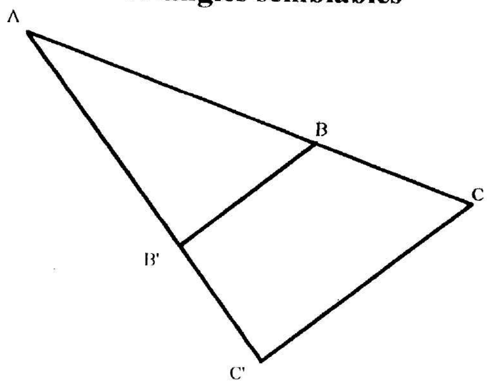
Lignes proportionnelles



Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}\text{....etc.}$$

Triangles semblables



Si l'on trace une parallèle à un côté d'un triangle, elle détermine deux triangles à côtés proportionnels.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{BB'}{CC'}$$

Exercices: 1) Dans le cas des triangles semblables, établir que $\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}$ puis une réciproque.

2) Dans le cas des triangles semblables, établir que $\frac{AB}{AC}=\frac{BB'}{CC'}$.

3) Dans le cas des triangles semblables, établir que $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$ ce qui justifie le cas des lignes proportionnelles.

A retenir:

Point de vue algébrique. Sous réserve que les dénominateurs ne soient pas nuls,

$$\textbf{si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \textbf{ alors } \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\textbf{si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \textbf{ alors } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

Point de vue géométrique.

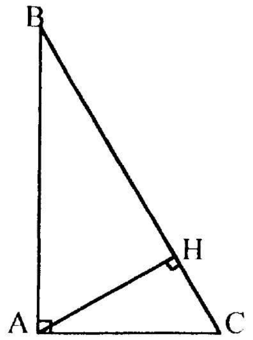
On dit que deux triangles sont semblables dans chacun des cas suivants:

-Ils ont deux angles égaux.

-Ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels.

-Ils ont leurs trois côtés proportionnels.

Application: Dans un triangle ABC rectangle en A, on désigne par H le pied de la hauteur. En posant AB = c, AC = b, AH = h, BC = a, BH = d, CH = e, établir que $b^2 + c^2 = a^2$.



Preuve:

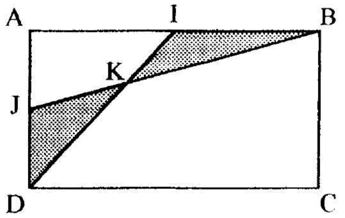
On peut mettre en évidence que ABC et ABH sont semblables, et en déduire $\frac{c}{a} = \frac{d}{c}$ et $ad = c^2$.

On peut également mettre en évidence que ABC et ACH sont semblables, on a alors $\frac{a}{b} = \frac{b}{e}$ et $ae = b^2$.

Enfin $b^2 + c^2 = ae + ad = a(e + d) = a^2$.

Exercices: 1) Etablir de même dans la figure ci-dessus les relations $ha = bc$ et $h^2 = ed$.

2) Démontrer que les aires de deux triangles semblables sont dans le carré du rapport de leurs côtés.

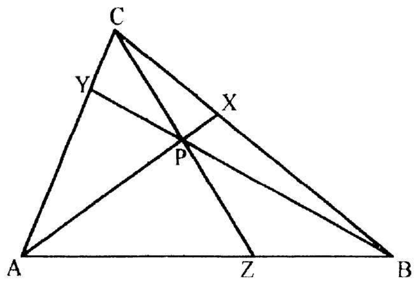


3) ABCD est un rectangle, I et J sont les milieux des côtés AB et AD. Les segments BJ et DI se coupent en K.

a) Démontrer que IBK et JKD ont même surface. En déduire que AKI et AKJ ont même surface, puis que BKC et DKC ont même surface

b) Déterminer le rapport $\frac{S(BCDK)}{S(AIJK)}$

3°) LE THEOREME DE CEVA.

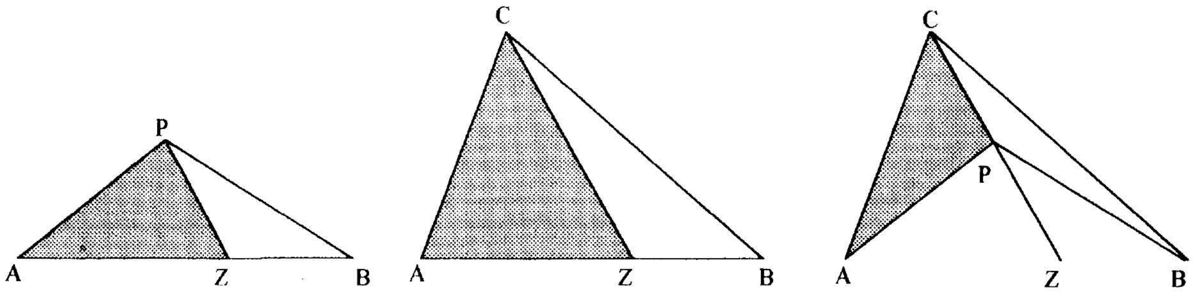


ABC est un triangle, X, Y, Z sont des points pris sur les côtés respectifs BC, AC, AB.

Si les droites AX, BY, CZ sont concourantes alors on a:

$$\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Démonstration:



Des figures ci-dessus, on peut écrire:

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{S(AZP)}{S(BZP)} = \frac{S(AZC)}{S(BZC)} = \frac{S(AZP) - S(AZC)}{S(BZP) - S(BZC)} = \frac{S(APC)}{S(BPC)}.$$

De même sur les autres bases BC et CA, on établit $\frac{BX}{XC} = \frac{S(BPA)}{S(CPA)}$ et $\frac{CY}{YA} = \frac{S(CPB)}{S(APB)}$.

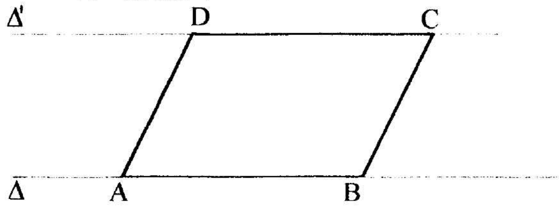
On obtient donc $\frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} \times \frac{AZ}{ZB} = \frac{S(BPA)}{S(CPA)} \times \frac{S(CPB)}{S(APB)} \times \frac{S(APC)}{S(BPC)} = 1$

Exercices: 1) Ecrire et démontrer la réciproque de ce théorème. Utiliser cette réciproque pour démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

2) Avec les hypothèses de l'exercice 3 précédent démontrer que les points A, K et C sont alignés.

4°) LE THEOREME DE PAPPUS.

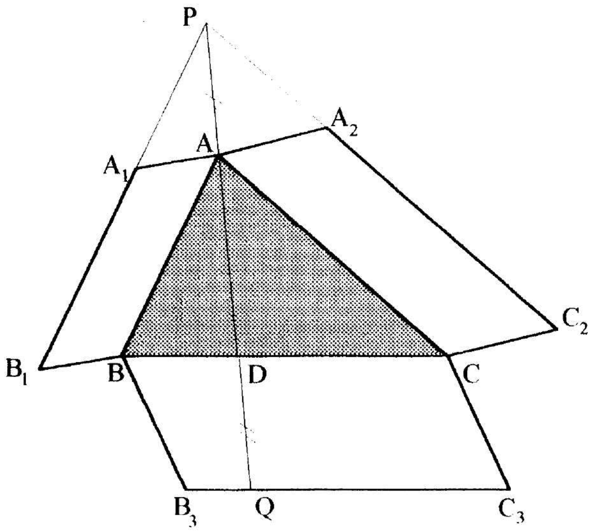
Exercice:



ABCD est parallélogramme.

Justifier que pour tout choix des points C et D sur Δ' tel que ABCD soit un parallélogramme, la surface ABCD garde la même valeur.

Théorème:



ABC est un triangle quelconque. On construit à l'extérieur les parallélogrammes AA_1B_1B et AA_2C_2C.

Soit P, l'intersection de A_1B_1 et A_2C_2. Sur la droite PA qui coupe BC en D, on place le point Q tel que PA = DQ.

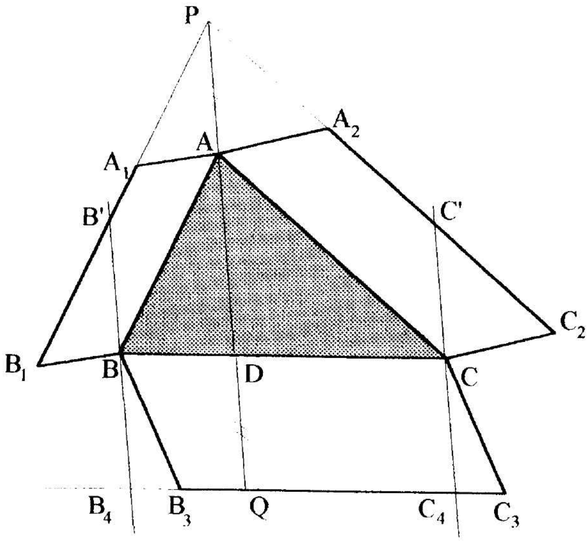
Par le point Q, on construit B_3 et C_3 de sorte que BB_3C_3C soit un parallélogramme.

Dans ces conditions, on a: $\boxed{S(AA_1B_1B) + S(AA_2C_2C) = S(BB_3C_3C)}$

Démonstration:

On construit B' sur PB_1, C' sur PC_2, B_4 et C_4 sur la droite B_3C_3 de sorte que B', B, B_4 ainsi que C', C, C_4 soient alignés et que BB', CC', AD, soient parallèles. Ainsi BB_4C_4C est un parallélogramme comme on peut le voir sur la figure suivante.

A l'aide du résultat établi dans le précédent exercice, on peut alors montrer que
$S(AA_1B_1B) = S(PB'BA) = S(BDQB_4)$.



On montre ensuite que
$S(AA_2C_2C) = S(PC'CA) = S(CDQC_4)$

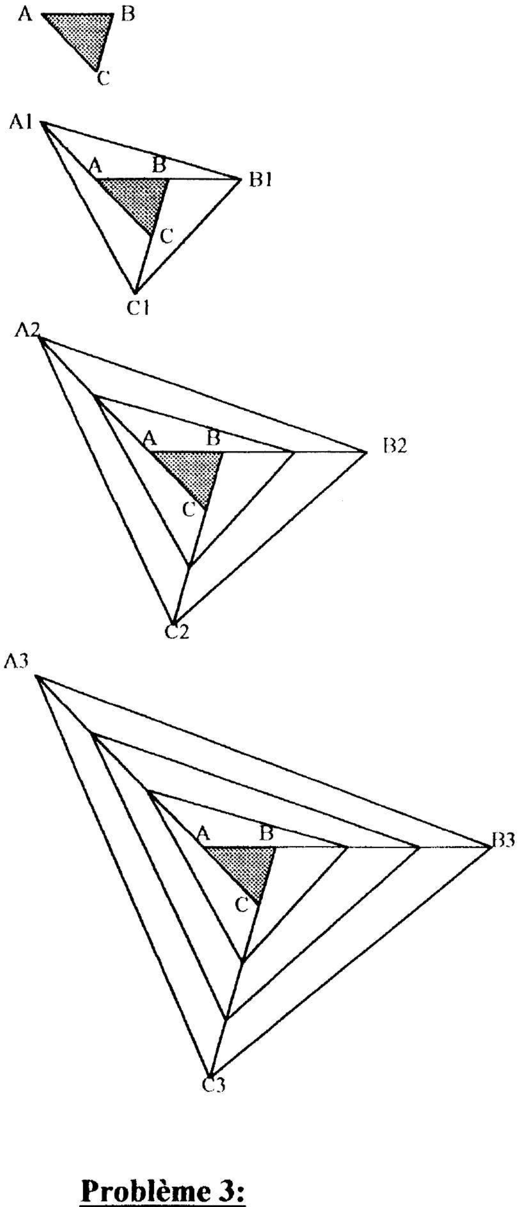
Comme on a
$S(BDQB_4) + S(CDQC_4) = S(BCC_4B_4)$
,
on obtient
$S(BDQB_4) + S(CDQC_4) = S(BCC_3B_3)$
et le résultat est acquis.

<u>Exercice:</u> Dans le cas où ABC est rectangle en A et les parallélogrammes AA_1B_1B et AA_2C_2C sont des carrés, retrouver le théorème de Pythagore.

PROBLEMES:

Problème 1: ABC est un triangle équilatéral, O est un point situé à l'intérieur de ABC. Démontrer que la somme des distances de O aux côtés de ABC est constante.

Problème 2:

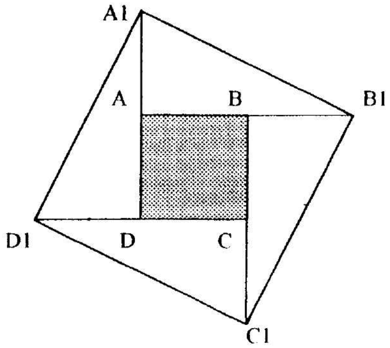


A partir du triangle ABC ci-contre, on construit les triangles A1B1C1, puis A2B2C2, A3B3C3, ...jusqu'à AnBnCn.

Pour cela, on reporte les longueurs AB sur la droite (AB), BC sur la droite (BC), CA sur la droite (CA), toujours dans le même sens, d'abord 1 fois, puis 2 fois, 3 fois .... jusqu'à n fois.

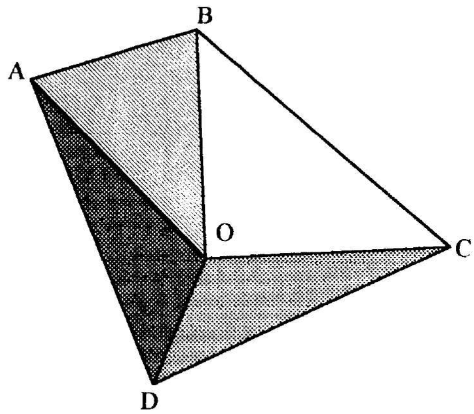
Le problème consiste à évaluer les aires A1B1C1, A2B2C2, A3B3C3 .... AnBnCn, en fonction de l'aire du triangle initial ABC.

Problème 3:



Reprendre le problème 2 à partir non pas d'un triangle ABC, mais d'un carré ABCD.

Problème 4:

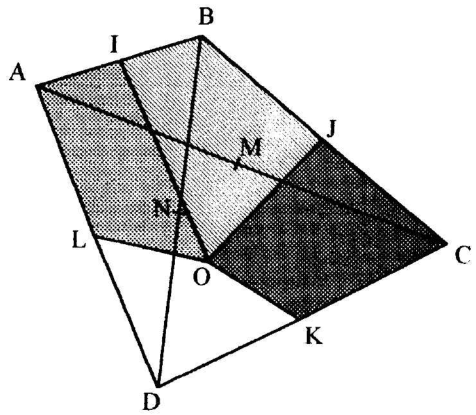


ABCD est un quadrilatère convexe. Peut-on construire à l'intérieur un point O tel que

S(OAB) = S(OBC) = S(OCD) = S(ODA) ?

Problème 5:

ABCD est un quadrilatère convexe, I, J, K, L, sont les milieux de AB, BC, CD, DA.



On souhaite construire à l'intérieur un point O tel que S(OIAL) = S(OJBI) = S(OKCJ) = S(OKDL).

Pour cela, on désigne par M et N, les milieux des diagonales AC et BD.

1°) Justifier que S(ALMI) = 1/4 S(ABCD).

2°) Où placer le point O pour que

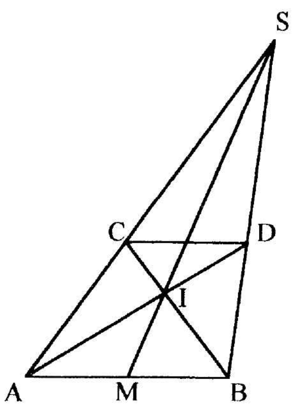
S(ALMI) = S(OIAL) ?

3°) Refaire un raisonnement analogue avec S(BINJ) (montrer d'abord que S(BINJ) = 1/4 S(ABCD), placer ensuite O pour que S(BINJ) = S(OJBI)). En déduire la position de O pour que

S(OIAL) = S(OJBI) = 1/4 S(ABCD).

4°) Justifier que O ainsi obtenu répond à la question.

Problème 6: "Le trapèze complet."



ABS est un triangle, M est le milieu de AB.

C est un point de AS et D est un point de BS, de sorte que les droites AD, BC et SM soient concourantes en I.

1°) Démontrer que les droites CD et AB sont parallèles.

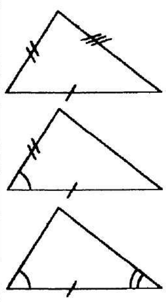
2°) Démontrer que la droite SM coupe CD en son milieu.

CHAPITRE II

RESOLUTION DES TRIANGLES

Ce chapitre résume pour l'essentiel, les diverses méthodes qui permettent lorsque un triangle est fixé, d'en calculer les divers éléments. Il prend appui sur ce que nous appelons les trois cas d'existence d'un triangle (la majeure partie du travail effectué dans ce chapitre nécessite quelques connaissances et savoir-faire en trigonométrie dont l'essentiel est contenu dans le chapitre IX de ce document).

1°) LES TROIS CAS D'EXISTENCE D'UN TRIANGLE.



Un triangle est défini (à une isométrie [1] près):

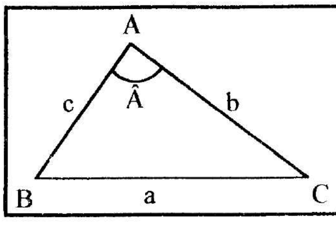
-Soit par ses trois côtés,

-Soit par deux côtés et l'angle qu'ils déterminent,

Soit par deux angles et le côté qui leur est commun.

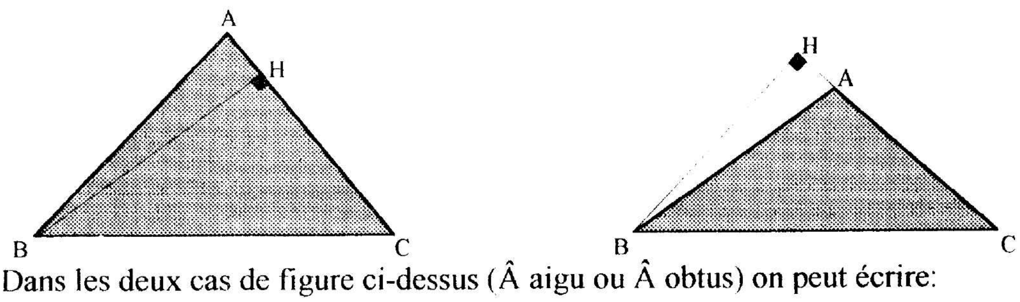
Exercices: 1) Donner des contre-exemples montrant:
a) Que deux côtés et un angle ne conduisent pas à un seul triangle (à une symétrie près).
b) Que deux angles et un côté ne conduisent pas à un seul triangle (à une symétrie près).
2) Combien de données complémentaires sur angles et côtés doit-on préciser lorsque un triangle est équilatéral? Isocèle? Rectangle?

2°) THEOREME D'AL-KASHI (OU PYTHAGORE GENERALISE).



Lorsque dans un triangle on connaît deux côtés b et c, ainsi que l'angle Â qu'ils forment, le troisième côté a (opposé à Â) est donné par $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos\hat{A})$.

Démonstration:



Dans les deux cas de figure ci-dessus (Â aigu ou Â obtus) on peut écrire:

[1] On pourra consulter le chapitre IV à ce sujet.

$AH^2 + BH^2 = AB^2$ et $BH^2 + CH^2 = BC^2$.

Ainsi, $BC^2 = CH^2 + (AB^2 - AH^2) = AB^2 + (CH + AH)(CH - AH)$.

Si $\hat{A}$ est aigu alors $BC^2 = AB^2 + CA(CA - 2AH) = AB^2 + CA^2 - 2CA \times AH$ avec $AH = AB\cos\hat{A}$.

Si $\hat{A}$ est obtus alors $BC^2 = AB^2 + (CA + 2AH)CA = AB^2 + CA^2 + 2CA \times AH$ avec $AH = AB\cos(180 - \hat{A}) = -AB\cos\hat{A}$.

Le résultat est donc le même dans les deux cas.

Application: Vérifier qu'un triangle ayant un angle de 60° compris entre deux côtés égaux est équilatéral.

Preuve: Soit b le côté connu, $\hat{A}$ l'angle connu et a le côté inconnu. Nous avons $a^2 = 2b^2 - 2b^2(\cos\hat{A})$ avec $\cos 60° = 1/2$, donc $a^2 = 2b^2 - b^2 = b^2$ et $a = b$. Le triangle ayant ses trois côtés égaux est bien équilatéral.

Exercices: 1) Un triangle a un angle de 60° compris entre deux côtés de 5cm et 10cm. Déterminer la longueur du troisième côté ainsi que les angles manquants.

2) Un triangle est donné par ses trois côtés a, b, c. Quelles sont les longueurs de ses trois médianes? Quels sont ses angles si a = 5, b =6, c =7 ?

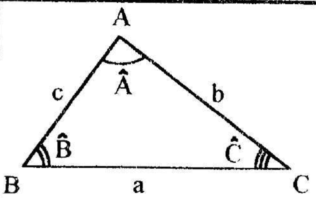
3) Un triangle est donné par ses trois côtés a, b, c. Quelles sont les longueurs de ses trois hauteurs ?

Le théorème de Pythagore généralisé apporte donc des réponses aux questions suivantes:

-Que sont les angles d'un triangle dont on connaît les côtés ?

-Que sont le troisième côté et les deux autres angles d'un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils déterminent? Il ne permet pas de répondre directement à la question suivante: que sont les deux autres côtés d'un triangle dont on connaît deux angles et le côté qui leur est commun ?

3°) LOI DES SINUS ET TROISIEME RESOLUTION DES TRIANGLES.



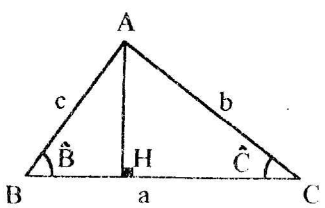
A, B, C étant un triangle quelconque, on a:

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

avec a = BC, b = AC et c = AB.

Démonstration:

Supposons que les trois angles du triangle ABC sont aigus.

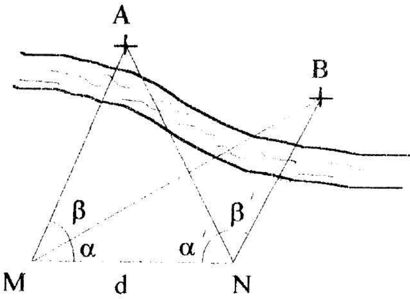


H étant le pied de la hauteur issue de A, nous avons: $AH = c \times \sin\hat{B}$ et $AH = b \times \sin\hat{C}$, donc, $c \times \sin\hat{B} = b \times \sin\hat{C}$, et enfin $\frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$.

En reproduisant ce raisonnement sur une autre hauteur, on obtiendra $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$.

Exercices: 1) Reprendre la démonstration ci-dessus dans le cas où un des angles est obtus.

2) Un triangle ABC est donné par deux angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ et le côté c qu'ils déterminent. Retrouver en fonction de c, $\hat{A}$ et $\hat{B}$, les longueurs des deux autres côtés. Faire une application numérique avec $c = 10$, $\hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 45°$.



3) Sur la figure ci-contre A et B sont deux points inaccessibles dont on veut mesurer la distance.

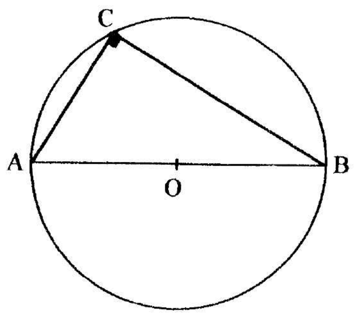
A partir de deux points accessibles M et N dont on connaît la distance d, on relève les angles:

$B\hat{M}N = \alpha$, $B\hat{M}A = \beta$, $A\hat{N}M = \alpha'$, $A\hat{N}B = \beta'$.

Calculer la distance AB en fonction de d, α, α', β et β'.

4°) COCYCLICITE ET RAYON DU CERCLE CIRCONSCRIT.

Théorème 1:

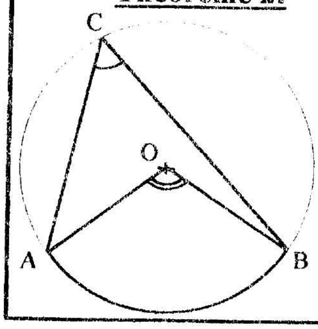


Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit rectangle est que son hypoténuse soit diamètre de son cercle circonscrit.

Démonstration: Si ABC est rectangle en C, alors on peut construire un point D tel que ACBD soit un rectangle de centre O. Un rectangle ayant ses diagonales de même longueur, on peut en déduire que OA = OB = OC et donc que O est centre du cercle circonscrit à ABC.

Réciproquement, si le milieu O de l'hypoténuse est centre du cercle circonscrit, OB = OC, donc la médiatrice de BC passe par O et le milieu de BC. La réciproque du théorème de Thalès montre que cette médiatrice est parallèle à AC, comme elle est perpendiculaire à BC, on a bien AC perpendiculaire à BC.

Théorème 2:



A, B, C sont trois points d'un cercle de centre O, $A\hat{C}B$ et $A\hat{O}B$ sont les angles qui contiennent un même arc AB et de plus $A\hat{C}B \leq 90°$.

Dans ces conditions $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$

Ce que l'on énonce par: dans un cercle l'angle au centre est le double de l'angle inscrit interceptant le même arc.

Remarque: On a volontairement restreint ce résultat au cas où $A\hat{C}B \leq 90°$.

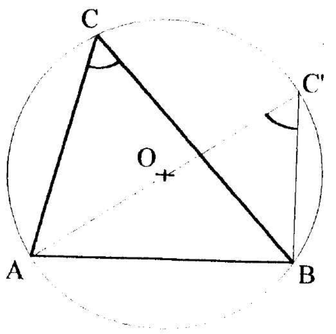
Lorsque $A\hat{C}B > 90°$, on se ramènera au cas précédent en partageant l'angle $A\hat{C}B$ à l'aide de la droite CO, on aura ainsi deux angles $A\hat{C}O$ et $O\hat{C}B$ inférieurs à 90° auxquels on pourra appliquer le théorème 2 ci-dessus.

Exercices: 1) Démontrer le théorème précédent selon que
-O est à l'intérieur de ABC.
-O est à l'extérieur de ABC.
(on peut utiliser le théorème 1 et le point C' diamétralement opposé à C)
2) Démontrer les deux conséquences suivantes:

Conséquence 1: A, B, C étant trois points d'un cercle, l'angle $A\hat{C}B$ est constant pour tout point C situé du même côté de AB.

Conséquence 2: A, B, C, C' étant quatre points d'un cercle, C et C' situés de part et d'autre de AB, on a $A\hat{C}B + A\hat{C'}B = 180°$.

Application: Calcul du rayon du cercle circonscrit à un triangle.



Les résultats précédents ont montré que le triangle étant donné par trois éléments, dans tous les cas on pouvait connaître l'angle $A\hat{C}B$.

On appelle C' le point diamétralement opposé à A, le théorème 2 ci-dessus et sa conséquence 1 permettent d'évaluer l'angle $A\hat{C'}B$.

On aura alors $OA = OB = OC = OC' = \frac{1}{2}AC' = \frac{AB}{2\sin A\hat{C'}B}$,

ce qui devient $OA = OB = OC = OC' = \frac{1}{2}AC' = \frac{AB}{2\sin A\hat{C}B}$.

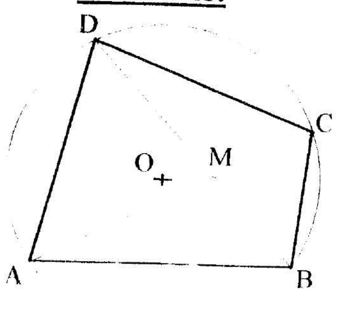
Remarque: Ce résultat permet une autre démonstration de la loi des sinus vue plus haut:

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}.$$

5°) APPLICATIONS AUX QUADRILATERES CONVEXES INSCRIPTIBLES.

Exercice: Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible est que la somme de deux angles opposés soit 180°.

Théorème:



ABCD est un quadrilatère convexe inscriptible. Si M est le point d'intersection de ses diagonales AC et BD alors:

$$MA \times MC = MB \times MD.$$

Démonstration: Considérons les triangles AMD et BMC;

$D\hat{M}A = B\hat{M}C$ car ils sont opposés par le sommet.

$A\hat{D}B = A\hat{C}B$ car D et C du même côté de AB, et donc $A\hat{D}M = M\hat{C}B$.

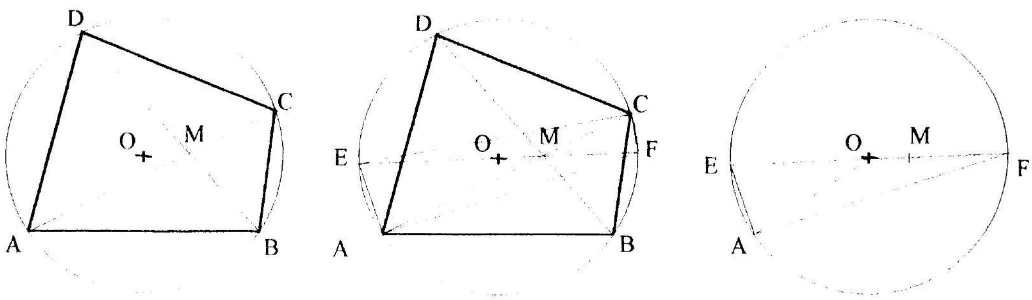
Ces triangles ayant deux angles égaux, ils sont semblables (cf. chapitre I). On peut alors écrire

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{DA} \text{ puis } MA \times MC = MB \times MD.$$

Remarques: L'aire d'un quadrilatère inscriptible peut s'obtenir à l'aide des longueurs des côtés, sans mesure d'angle. Elle est donnée par $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ où a, b, c, d, sont les longueurs des côtés et p est le demi-périmètre du quadrilatère, $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.
Il existe une formule analogue pour le triangle (formule de Héron) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où a, b, c, sont les longueurs des côtés et p est le demi-périmètre du triangle, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Application: Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon r et M un point à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Démontrer que pour tout quadrilatère convexe ABCD inscrit dans $\mathcal{C}$ dont les diagonales AC et BD se coupent en M, on a MA×MC qui est constant et égal à $r^2 - OM^2$.

Preuve: Observons les trois figures ci-dessous dans lesquelles ABCD et M sont fixes et EF est un diamètre de $\mathcal{C}$ passant par M.



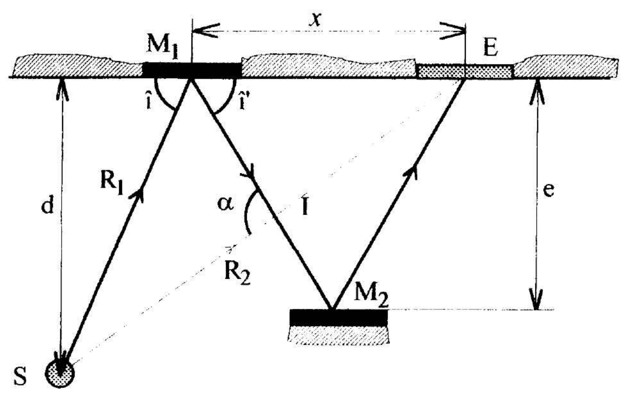
Dans la première MA×MC = MB×MD et dans la deuxième pour les mêmes raisons MA×MC = ME×MF. Or, ME = r + MO et MF = r - MO, donc,

$$MA \times MC = ME \times MF = (r + MO)(r - MO) = r^2 - OM^2.$$

Exercice: Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon r et M un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Démontrer à l'aide d'un raisonnement analogue au précédent que pour tout quadrilatère convexe ABCD inscrit dans $\mathcal{C}$ dont les côtés AB et DC se coupent en M, on a MA×MB qui est constant et égal à $OM^2 - r^2$.

PROBLEMES:

Problème 1: M_1, M_2, sont deux miroirs, S est une source lumineuse et E un écran.

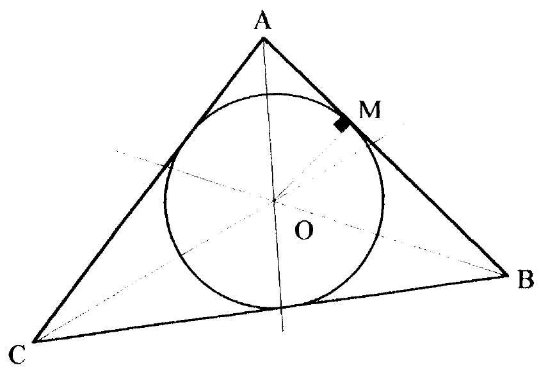


R_1 et R_2 sont des rayons lumineux émis par S dont les trajets sont différents mais qui parviennent en un même point sur E.

On connaît l'angle incident î = 60°, les distances d = 10m et e = 7m.

Déterminer l'angle α ainsi que la longueur SI où I est le point de croisement des deux rayons lumineux (on rappelle que lors de la réflexion d'un rayon lumineux, l'angle incident î et l'angle réfléchi î' sont égaux).

Problème 2: Calcul du rayon du cercle inscrit dans un triangle dont on connaît les angles et les côtés (on rappelle que son centre est le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle).



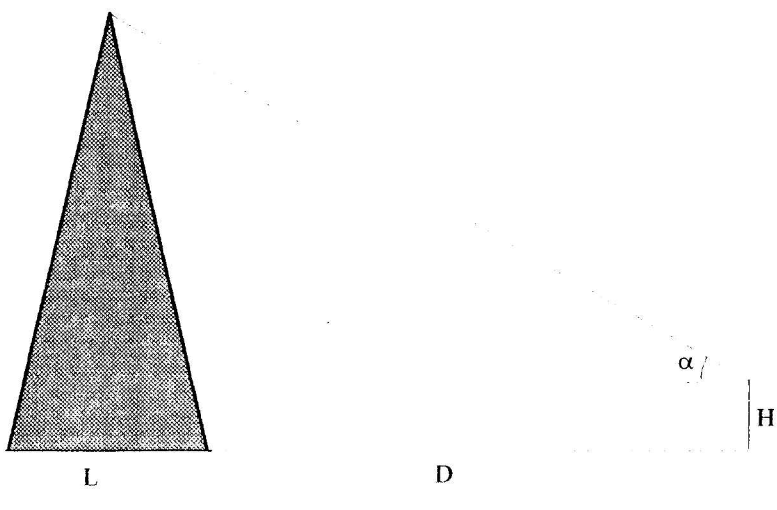
Sur la figure ci-contre, on a représenté le triangle ABC, les trois bissectrices, ainsi que le point M pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

Les longueurs AB, BC, CA, ainsi que les angles $A\hat{C}B$, $C\hat{B}A$, $B\hat{A}C$, sont connus.

a) Le triangle AOB est parfaitement déterminé par deux angles et le côté qui leur est commun. Exprimer AO en fonction des données.

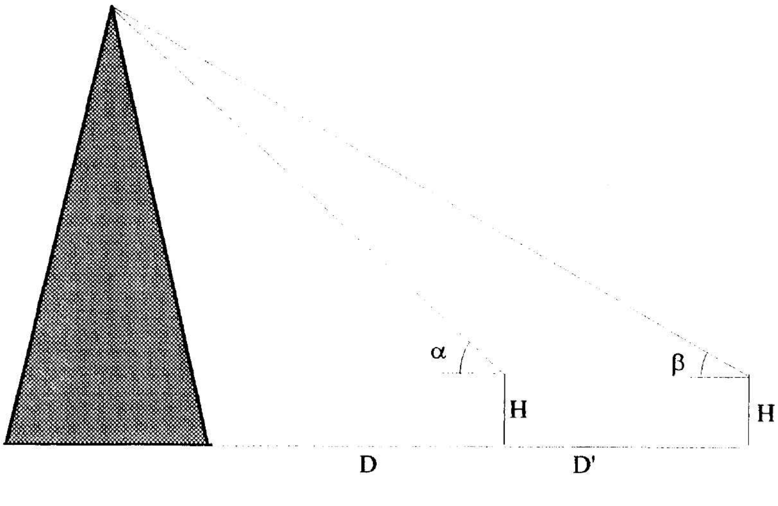
b) AO étant connu, exprimer OM en fonction des données.

Problème 3: Elaborer des stratégies permettant de mesurer les distances inaccessibles suivantes.



1°) Hauteur d'une tour dont la largeur de la base est connue.

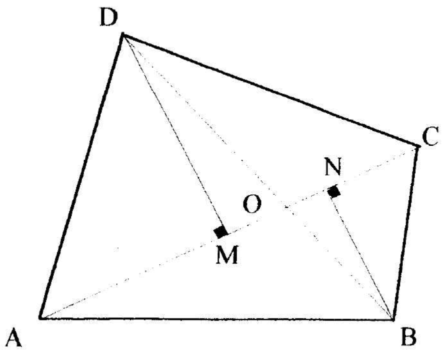
L est la largeur de la base, D est la distance du pied d'un observateur au point le plus proche de la base, H est la hauteur de l'observateur, α est l'angle que fait la visée au sommet avec l'horizontale.



2°) Hauteur d'une tour dont la largeur de base n'est pas accessible.

D est la distance d'un observateur au point le plus proche de la base, H est la hauteur de l'observateur, α est l'angle que fait la visée au sommet avec l'horizontale.
D' est la distance entre deux observations, β est l'angle que fait la deuxième visée au sommet avec l'horizontale.

Problème 4: Surface d'un quadrilatère convexe connu par ses angles et ses côtés.



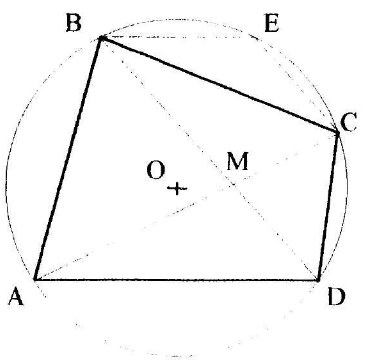
ABCD est un quadrilatère convexe, ses diagonales AC et BD se coupent en O. On désigne par M et N les pieds des hauteurs issues respectivement de D dans ADC et de B dans ABC. Les angles $\widehat{ADC}$, $\widehat{DCB}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAD}$, ainsi que les longueurs AB, BC, CD, DA, sont connus.

a) Exprimer AC et BD en fonction des données.

b) Déterminer les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{DOC}$ en fonction des données.

c) Démontrer que la surface de ABCD est donnée par $S = \frac{1}{2}AC \times BD \sin\widehat{AOD} = \frac{1}{2}AC \times BD \sin\widehat{BOC}$ et conclure en fonction des données (on utilisera les surfaces des triangles ADC et ABC).

Problème 5: Aire d'un quadrilatère convexe inscriptible.



ABCD est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, ses diagonales AC et BD se coupent en M. On désigne par E l'intersection du cercle et de la parallèle à BD passant par C.

a) Soit α l'angle $\widehat{ACE}$, écrire à l'aide de α les angles $\widehat{ADE}$, $\widehat{ABE}$, $\widehat{DMC}$ (pour ce dernier utiliser le parallélisme de BD et EC).

b) Démontrer que S(ABCD) = S(ABED) puis que
S(ABCD) = S(ABE) + S(ADE).

c) Démontrer que $S(ABE) = \frac{1}{2}AB \times BE \sin\alpha$ et que

$S(ADE) = \frac{1}{2}AD \times DE \sin\alpha$.

Démontrer que BE = CD et que BC=DE. Conclure enfin par

$$S(ABCD) = \frac{1}{2}(AB \times CD + BC \times DA)\sin\alpha.$$

CHAPITRE III

GEOMETRIE PLANE ET PROBLEMES SPATIAUX

De nombreux problèmes de géométrie dans l'espace se ramènent souvent à des problèmes de géométrie plane dès lors qu'un "bon plan" dans lequel on va travailler a été mis en évidence. L'objectif de ce chapitre est de montrer sur quelques situations simples comment interviennent les résultats déjà obtenus dans les chapitres précédents pour résoudre des problèmes spatiaux. L'essentiel des situations rencontrées concernent le cube ou le pavé, c'est pourquoi les premiers paragraphes traitent des sections planes du cube.

1°) REGLES POUR RAISONNER DANS L'ESPACE.

Règles d'incidence:

1) Deux points distincts déterminent une droite et une seule.

2) Trois points non alignés déterminent un plan et un seul. (Ou bien deux droites distinctes et parallèles déterminent un plan et un seul.)

3) Si deux points distincts sont contenus dans un plan, la droite qu'ils déterminent est entièrement contenue dans ce plan.

4) L'intersection de deux plans distincts est une droite.

5) Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et cela suivant deux droites parallèles.

Règles d'orthogonalité:

1) Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles issues d'un même point sont perpendiculaires.

2) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

3) Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

4) Deux plans sont perpendiculaires si une droite de l'un est perpendiculaire à l'autre.

Théorème du toit:

Si un plan parallèle à une droite D coupe deux plans P et P' contenant D suivant deux droites Δ et Δ' respectivement alors Δ et Δ' sont des droites parallèles à D.

2°) SECTIONS PLANES DU CUBE:

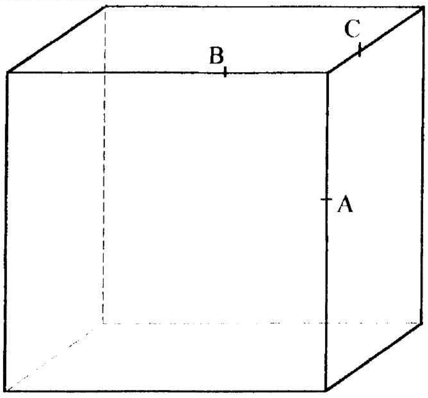
Exercice 1: 1) Parmi les polygones suivants quels sont ceux que l'on peut obtenir en coupant un cube par un plan: triangle, quadrilatère, pentagone, hexagones, heptagone.

2) Peut-on obtenir un triangle quelconque, isocèle, équilatéral, rectangle?

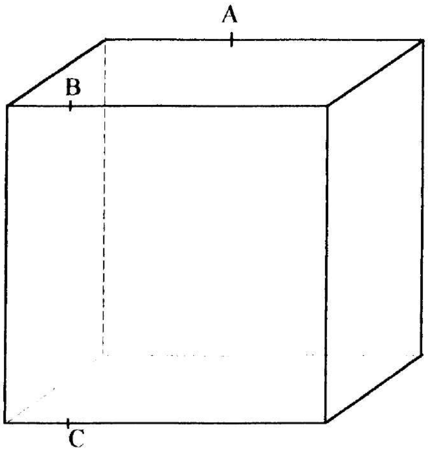
3) Peut-on obtenir un quadrilatère quelconque, un rectangle, un losange, un carré, un trapèze, un trapèze isocèle, un trapèze rectangle?

4) Peut-on obtenir un pentagone régulier? Un hexagone régulier?

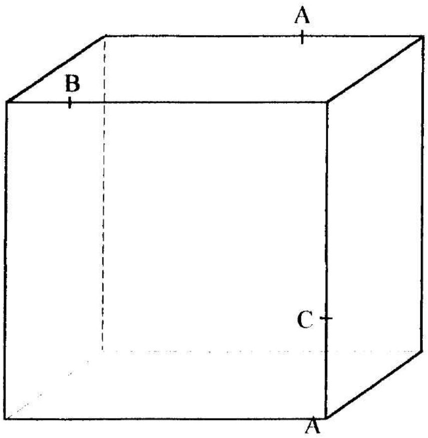
Exercice 2: Dans chacun des cas suivants un plan est déterminé par trois points donnés sur les arêtes d'un cube de 10 cm de côté. On demande de dessiner la section obtenue **en vraie grandeur.**



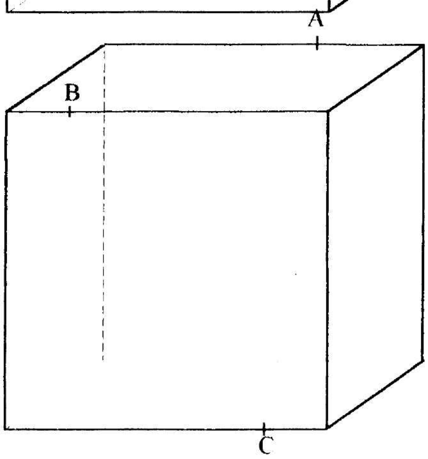
A est à 3 cm du coin le plus proche, B est à 3 cm du même coin, C est à 4 cm du même coin.



A est à 4 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 2 cm du coin le plus proche (pour la forme de la section, utiliser la règle 5 d'incidence).

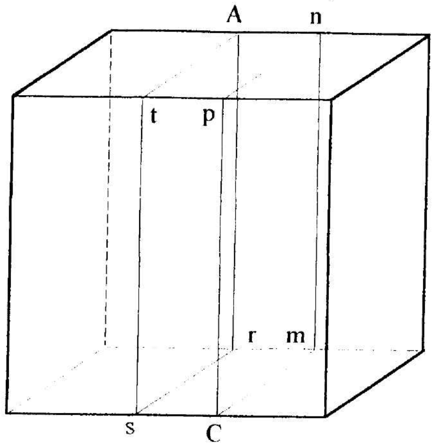


A est à 3 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 3 cm du coin le plus proche (pour la forme de la section, rechercher l'intersection de la droite AB et du plan contenant la face de droite dans laquelle se trouve le troisième point connu C).



A est à 4 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 2 cm du coin le plus proche (pour la forme de la section, utiliser la règle 5 d'incidence).

De façon générale, pour calculer la longueur d'un segment dont les extrémités sont repérées dans un cube, on peut utiliser un pavé dont ce segment est la diagonale.



Pour calculer la distance AC sur la figure ci-contre, on peut considérer le pavé ArstnmCp dont AC est la diagonale.

Dans le triangle Anp rectangle en n, on peut écrire: $(Ap)^2 = (An)^2 + (np)^2$.

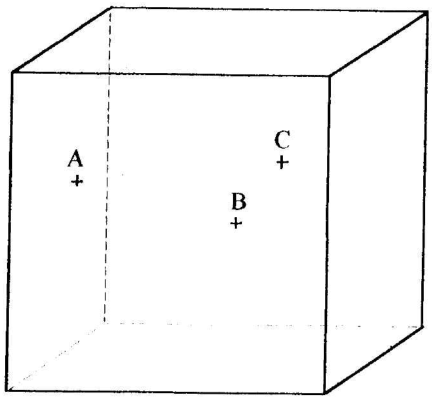
Dans le triangle ApC rectangle en p, on peut écrire: $(AC)^2 = (Ap)^2 + (pC)^2$.

Ainsi on obtient $(AC)^2 = (An)^2 + (nm)^2 + (pC)^2$ et enfin,

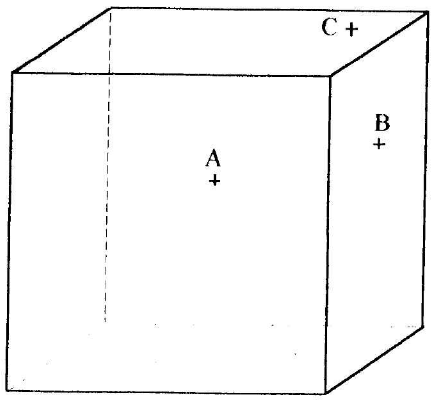
$$AC = \sqrt{(An)^2 + (nm)^2 + (pC)^2}.$$

> **<u>A retenir:</u>** la longueur d de la diagonale d'un pavé de longueur L, largeur l, hauteur h, est donnée par : $\mathbf{d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}}$

<u>Exercice 3:</u> Dans chacun des cas suivants un plan est déterminé par trois points donnés sur les faces d'un cube. On demande de dessiner la section obtenue.



A et B sont sur la face avant, C est sur la face arrière (on peut remarquer que le problème se ramène à ceux de l'exercice 2).

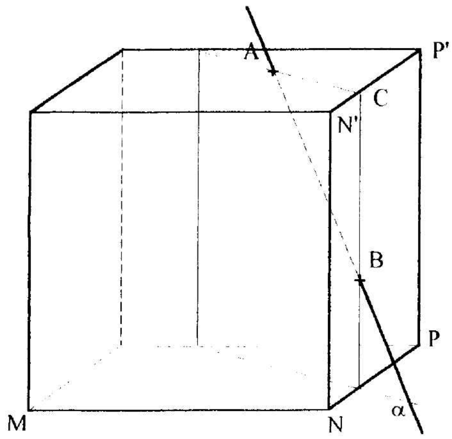


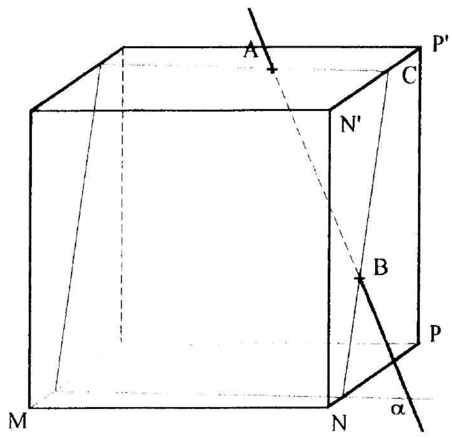
A est sur la face avant, B est sur la face de droite, C est sur la face arrière (ici le problème ne peut se résoudre que si l'on est capable d'obtenir deux points du plan ABC dans une même face).

On peut remarquer que dans cette dernière construction, la solution passe par la détermination de l'intersection d'une droite donnée par deux points et d'un plan.

Ce problème ne peut-être résolu qu'en incluant la droite dans un nouveau plan (que l'on se donne) dont on sait construire l'intersection avec le précédent. Ce choix n'est pas unique, les figures suivantes montrent deux constructions possibles de l'intersection de la droite AB et du plan MNP.

Le point A est sur la face supérieure du cube, le point B sur la face droite. On choisit arbitrairement un point C (de préférence sur N'P'), et on détermine l'intersection des plans ABC et MNP. L'intersection de la droite AB et du plan MNP est le point α





3°) ETUDE DE L'ENSEMBLE CUBE-TETRAEDRE.

Exercice 1: Ecornage du cube.

On appelle coin A du cube, le tétraèdre ABDE.

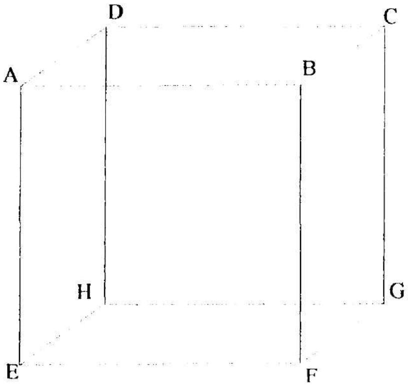
Sur les figures ci-dessous, représenter le solide restant après avoir enlevé successivement:

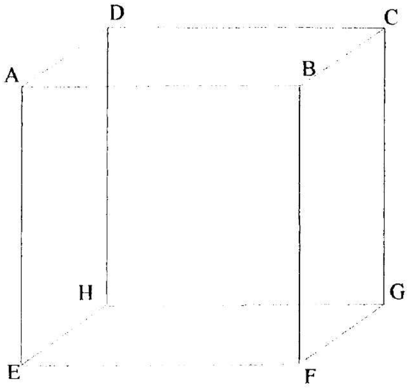
-le coin A,

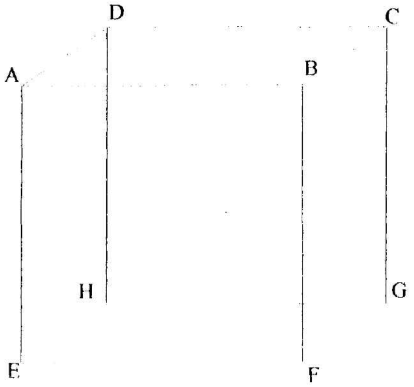
-les coins A et C,

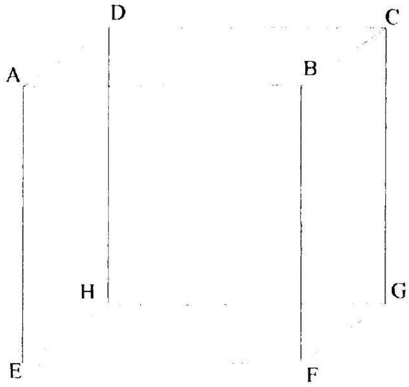
-les coins A, C et F,

-les coins A, C, F et H.



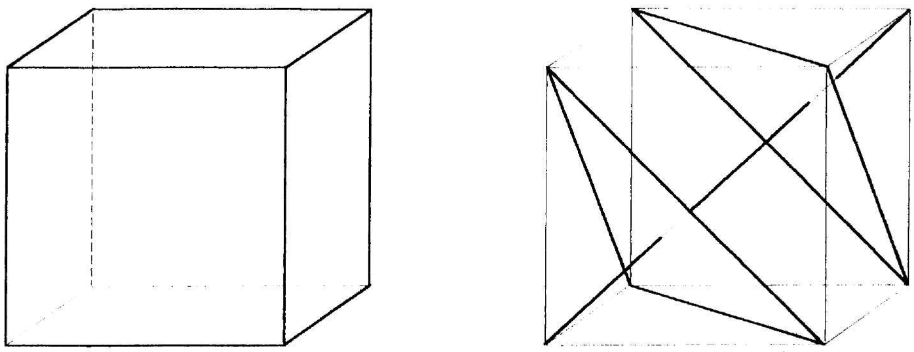






L'écornage du cube a mis en évidence un tétraèdre régulier qui a pour sommets les quatre sommets DBEG du cube et pour arêtes les diagonales DB, DE, DG, EG de faces du cube. L'étude de l'ensemble cube-tétraèdre peut être utilisée pour mettre en évidence des propriétés du tétraèdre régulier ainsi qu'une structure du cube qui n'est pas évidente si l'on considère les deux solides pris séparément.

Deux conceptions du cube:



Angles de 90° — Angles de 90° et de 60°

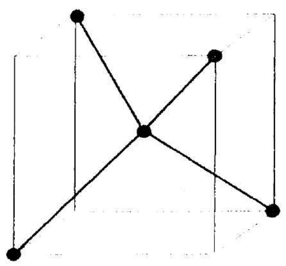
Exercice 2: (Les notations sont celles de l'exercice 1).

1°) Démontrer que les arêtes opposées du tétraèdre régulier sont orthogonales.

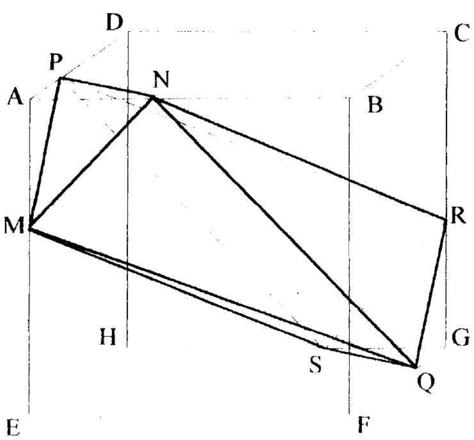
2°) Démontrer que les diagonales du cube sont les hauteurs du tétraèdre régulier.

3°) Si c est l'arête du cube, a celle du tétraèdre régulier et h la hauteur du tétraèdre régulier, exprimer a et h en fonction de c, puis h en fonction de a.

4°) O étant le centre du cube, O est équidistant des sommets BDEG du tétraèdre régulier. Exprimer en fonction de c puis de a, la longueur OB. Calculer l'angle BÔD. On retrouve la structure du méthane ou carbone tétraédrique qui se présente ainsi:



4°) ANTIPRISME ET OCTAEDRE REGULIER.



M, N, P, Q, R, S, T sont sur les arêtes d'un cube, les distances AM, AN, AP, GQ, GR, GS sont égales.

Le polyèdre MNPQRST est appelé antiprisme (il a deux faces opposées isométriques et parallèles et des faces latérales isométriques).

Pour des raisons de symétrie évidentes, il suffit de se référer aux deux conceptions du cube, on a

MN = NP = PM = QR = RS = SQ et

MQ = MS = NQ = NR = PR = PS.

Si on désigne par c l'arête du cube, x la longueur AM, l la longueur MN et L la longueur MQ, on peut exprimer L, l ainsi que les angles formés par les arêtes en fonction de c et x.

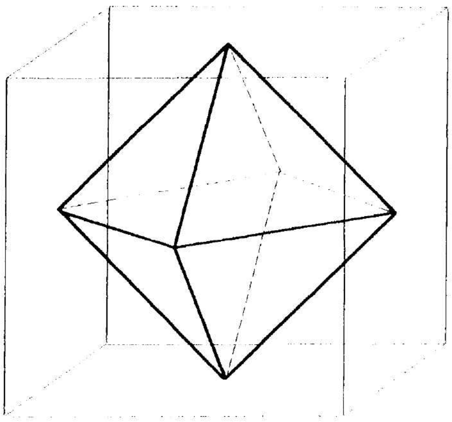
Calcul de l et L:

Dans le triangle rectangle AMN on a $l^2 = 2x^2$ et donc $l = x\sqrt{2}$.

Dans le triangle rectangle EFQ on a $EQ^2 = c^2 + (c-x)^2$.

Dans le triangle rectangle MEQ on a $L^2 = (c-x)^2 + (c^2 + (c-x)^2)$ et donc $L = \sqrt{3c^2 + 2x^2 - 4xc}$.

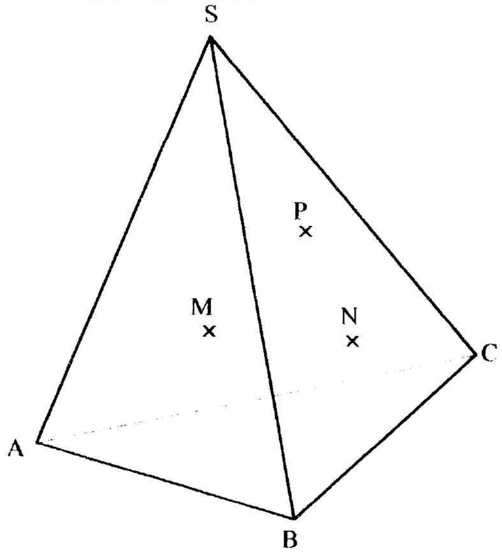
Exercice: A l'aide des résultats ci-dessus exprimer le cosinus de l'angle $\alpha = \widehat{MQN}$ en fonction de x et c. Déterminer la position des points M, N, P, Q, R, S sur les arêtes AE, AB, AD, GF, GC, GH pour que les triangles MQN, QRN, PNR, RSP, PMS, SQM soient équilatéraux. Pour cette dernière position l'antiprisme MNPQRS est un octaèdre régulier, ses huit faces sont des triangles équilatéraux identiques.



On peut remarquer que l'octaèdre régulier apparaît également dans le cube lorsque l'on joint les centres des faces comme ci-contre, ses sommets sont alors les milieux des arêtes du tétraèdre.

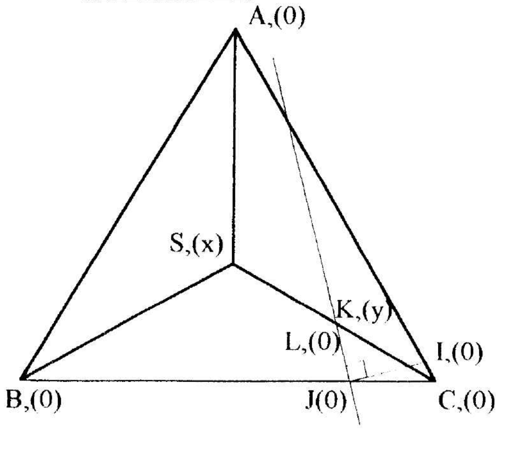
PROBLEMES:

Problème 1:



Construire l'intersection du tétraèdre SABC par le plan MNP, sachant que M, N, P, sont respectivement sur les faces SAB, SBC, SAC.

Problème 2: Etude d'une section du tétraèdre régulier.

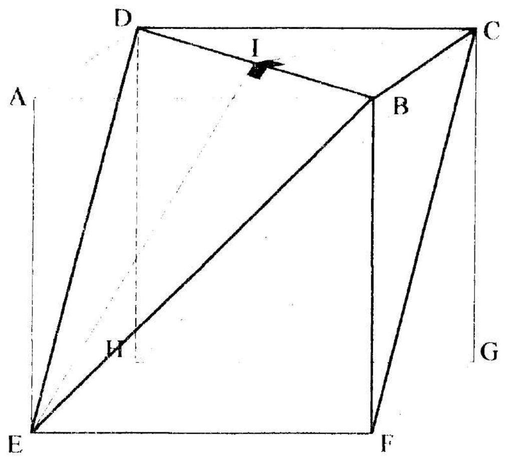


La figure ci-contre est la représentation d'un tétraèdre régulier SABC de 10 cm d'arête, en géométrie cotée (il s'agit d'une projection orthogonale sur un plan horizontal, chaque point est accompagné d'un nombre qui donne sa hauteur ou côte). Le point K est au milieu de l'arête SC, le point J est sur BC avec JC = 2 cm.

1°) Calculer la côte (choisie positive) de S.

2°) Soit L le pied de la perpendiculaire au plan ABC passant par K, soit P le plan vertical de trace JL sur le plan ABC et soit I le point de AC tel que IJ soit perpendiculaire à JL. Déterminer en vraie grandeur le triangle IJK. Vérifier ainsi que l'intersection d'un tétraèdre régulier avec un plan peut être un triangle rectangle.

Problème 3:



ABCDEFGH est un cube, BCDEFH est un antiprisme.

On appelle angle de deux faces sécantes (ou angle dièdre), l'angle formé par deux perpendiculaires à leur arête commune. Ainsi, l'angle des faces BDE et BCD est l'angle $\widehat{EIC}$, où I est le milieu de BD.

Quels sont les angles des faces:

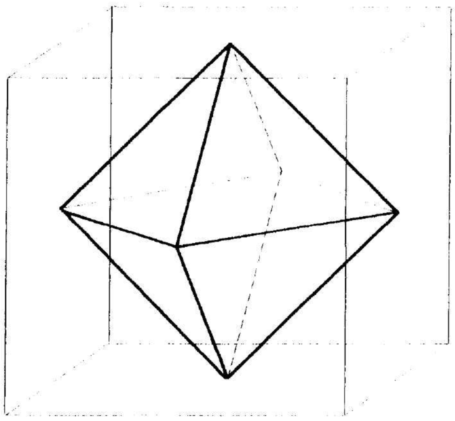
-BDE et BCD ?

-BDE et BEF ?

-BEF et BFC ?

-DCH et CHF ?

Problème 4:

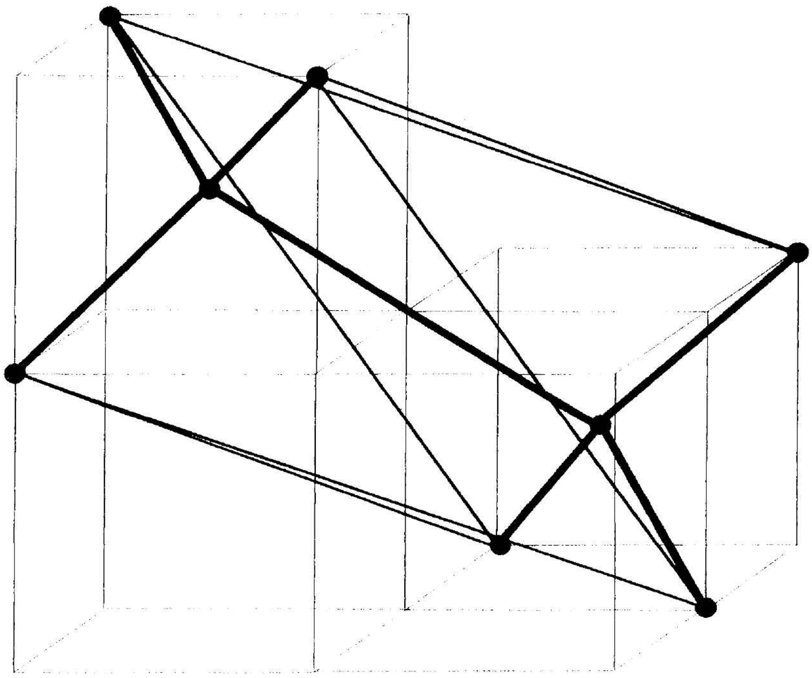


Quel est l'angle que peuvent former deux faces sécantes quelconques de l'octaèdre régulier ?

Problème 5:

La structure tubulaire ci-dessous (en traits épais) a été créée à partir d'un réseau de cubes de 1m d'arête (en traits fins) et de leur structure tétraédrique. Les traits moyens représentent des câbles.

Calculer les longueurs de tube et de câble nécessaires à sa réalisation.



CHAPITRE IV

ROSACES, FRISES ET PAVAGES DU PLAN

L'étude et la réalisation de coloriages réguliers du plan, qu'il s'agisse d'équipartition du plan et donc de partages réguliers, ou de mosaïques et donc de motifs décoratifs réguliers, nécessitent la connaissance des isométries du plan. Ce chapitre propose une mise en ordre de ces isométries et quelques applications concernant rosaces, frises et pavages.

1°) ISOMETRIES DU PLAN.

Une isométrie du plan est une transformation qui conserve les longueurs et par conséquent les angles géométriques (cf. Chapitre II et le théorème de Pythagore généralisé).

On classe les isométries du plan en deux familles:

-Les déplacements qui conservent les angles orientés,

-Les antidéplacements qui changent les orientations des angles.

On démontre qu'il n'existe que 4 types d'isométries planes, ce qui revient à dire que la composée de deux de ces isométries ne peut donner qu'une de ces isométries.

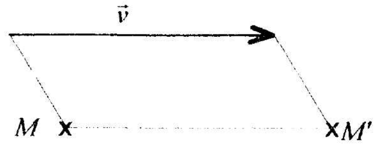
Ces 4 types sont les suivants:

Les déplacements

1) La translation $t_{\vec{v}}$.

Elle est définie par un vecteur $\vec{v}$ et l'image d'un point est donnée par:

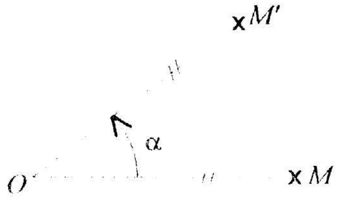
$$t_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$$



2) La rotation $R_{(O,\alpha)}$.

Elle est définie par un point O et un angle α et l'image d'un point est donnée par:

$$R_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$



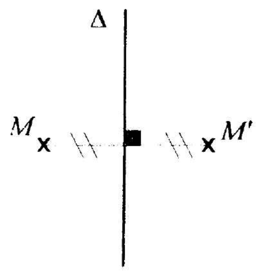
Remarque: **L'identité** Id pour laquelle l'image d'un point est donnée par $Id(M) = M' = M$ n'est qu'une translation ou rotation particulière.

Les antidéplacements

3) La réflexion S_Δ.

Elle est définie par une droite Δ et l'image d'un point est donnée par:

$$S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM']$$

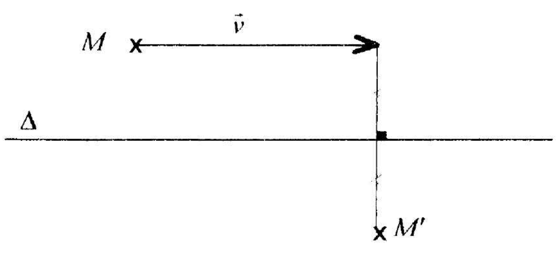


4) La symétrie glissée $S_{\Delta,\vec{v}}$.

Elle est définie par une droite Δ et un vecteur $\vec{v}$ de même direction.

L'image d'un point est donnée par:

$$S_{\Delta,\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow S_\Delta(t_{\vec{v}}(M)) = t_{\vec{v}}(S_\Delta(M)) = M'$$



On peut remarquer que la symétrie centrale n'est qu'une rotation particulière, de 180°, que l'on appelle rotation d'ordre deux. Plus généralement nous dirons qu'une rotation est d'ordre n lorsque le produit de son angle par n est un multiple entier de 360°.

Exercices: 1) Mettre en évidence sur des exemples que toute isométrie est la composée d'au plus trois réflexions.

2) Sur le pavage qui suit:

a) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (c) ?

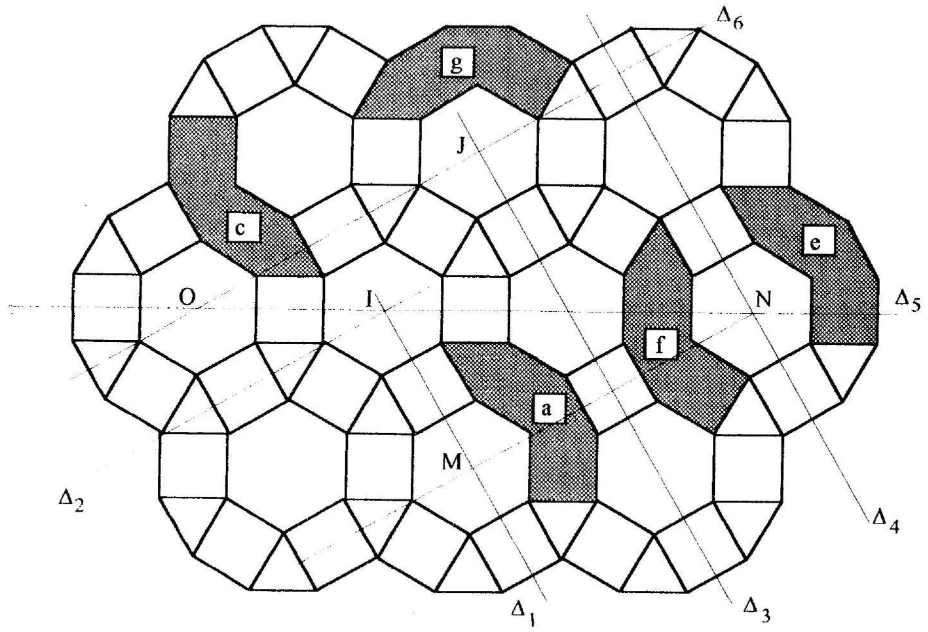
Mettre en évidence (b) symétrique de (a) par rapport à Δ_1 puis le symétrique de (b) par rapport à Δ_2. Que remarque-t-on ? Expliquer ce résultat.

b) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (e) ?

Quel est le symétrique de (a) par rapport à Δ_3 ? Quel est le symétrique de ce dernier par rapport à Δ_4 ? Que remarque-t-on ? Expliquer ce résultat.

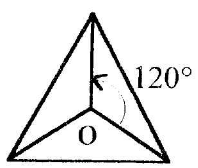
c) Mêmes questions pour le passage de (a) à (g) avec les symétries par rapport à Δ_5 et Δ_6 .

d) Par quelle transformation passe-t-on de (c) à (f) ?

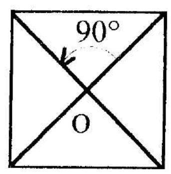


2°) LES POLYGONES REGULIERS CONVEXES ET LES ROSACES.

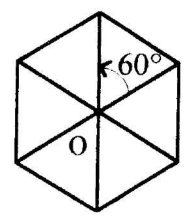
Un polygone régulier convexe de n côtés est un polygone dont les sommets sont obtenus par rotations successives de 360°/n autour d'un point O appelé centre du polygone. Par exemple:



Rotations d'ordre 3



Rotations d'ordre 4



Rotations d'ordre 6

Une rosace est un élément de décoration inscrit dans un cercle de centre O et invariant au moins par certaines rotations de centre O.

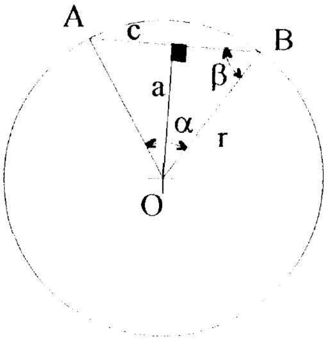
Application: Quelles sont les isométries qui laissent invariant un polygone régulier de n côtés et de centre O donné?

Il est immédiat qu'une telle isométrie laissera invariant le centre O.

On trouve l'identité, les n-1 rotations de centre O de k360°/n où k est un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$, et toutes les réflexions dont les axes passent par le centre O et un sommet du polygone, ainsi que celles dont les axes passent par le centre O et le milieu d'un côté (ce sont les mêmes lorsque le nombre de côtés est impair et dans tous les cas leur total est n). On a donc 2n isométries.

On peut remarquer qu'il ne peut y en avoir d'autres car les translations, les réflexions dont les axes ne passeraient pas par le centre O, les rotations de centre différent de O et les symétries-glissées ne laisseraient pas le centre O invariant

Exercices: 1) Eléments remarquables de quelques polygones réguliers:

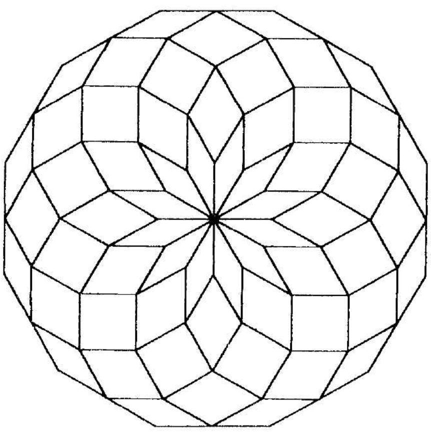


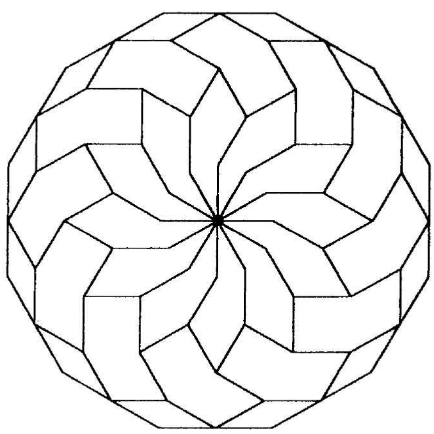
Pour un polygone régulier donné de n côtés, on désigne par r et O le rayon et le centre du cercle circonscrit, par α l'angle de la rotation de centre O permettant sa réalisation, par 2β l'angle de deux côtés consécutifs, par c la longueur d'un côté et par a son apothème (distance de O au côté).

Compléter le tableau suivant:

Nombre de côtés	α	2β	c	a
3				
4				
5				
6				
7				
8				

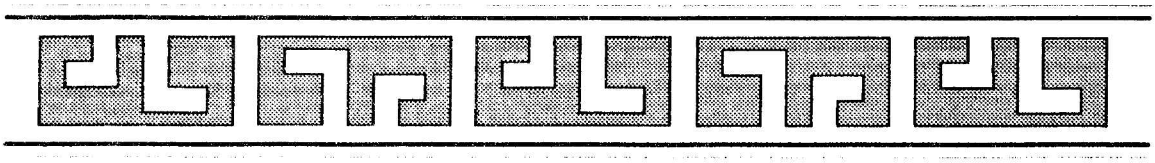
2) Quelles sont les isométries qui laissent invariantes les rosaces ci-dessous?



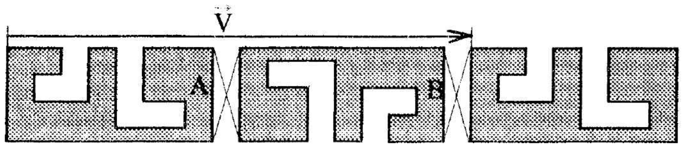


3°) ETUDE DES FRISES.

On désigne ici par frise un élément de décoration en forme de bande continue périodique. Une propriété essentielle étant que cette bande doit se reproduire elle-même par translation. Par exemple:



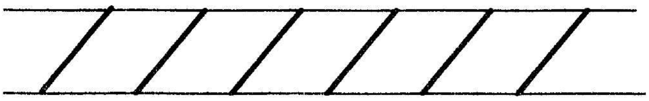
Application: Quelles sont les isométries qui laissent la frise ci-dessus invariante?



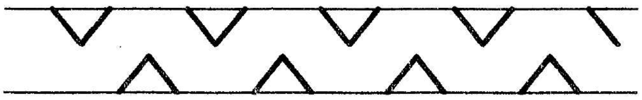
On en trouve de trois types:
-Rotation d'ordre 2 de centre A.
-Rotation d'ordre 2 de centre B.
-Translations de vecteurs $k\vec{V}$ où k est un entier quelconque.

On démontre qu'il existe sept types de frises et sept seulement lorsqu'on les analyse du point de vue des transformations qui les laissent invariantes.

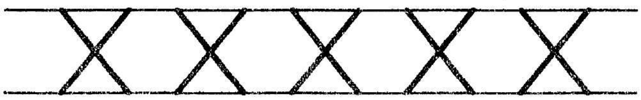
On peut les présenter de la façon suivante (le codage n'est qu'une convention, par contre, les transformations données sont celles suffisantes à leur réalisation. On peut remarquer qu'il en existe d'autres qui les laissent invariantes, que l'on peut obtenir en composant celles données).



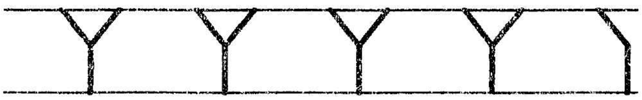
Type **f 2**.(Translations et une rotation d'ordre 2). C'est le type de l'exemple ci-dessus.



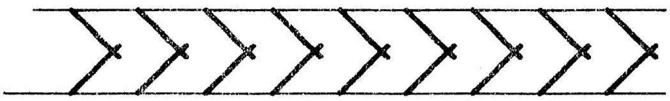
Type **f m 2**.(Translations, une rotation d'ordre 2 et symétrie glissée)



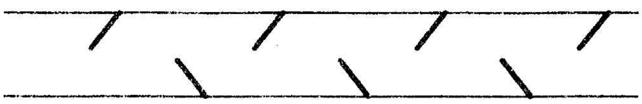
Type **f 2 m**.(Translations, une rotation d'ordre 2, symétrie axiale longitudinale)



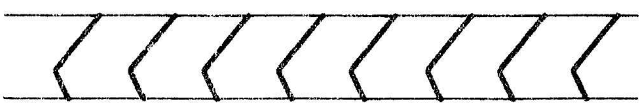
Type **f m 1**.(Deux symétries axiales transversales d'axes parallèles)



Type **f 1 m**.(Translations, une symétrie axiale longitudinale)



Type **f 1 g**.(Symétrie glissée)



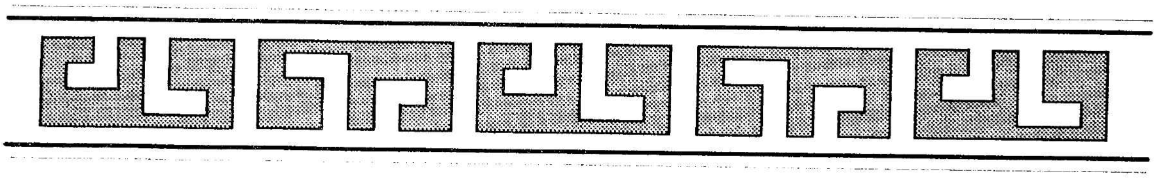
Type **f 1**.(Translations)

Exercice: Quelles sont les isométries qui laissent chacune des frises ci-dessus invariante?

On peut déterminer de façon systématique le type d'une frise en utilisant l'algorithme suivant

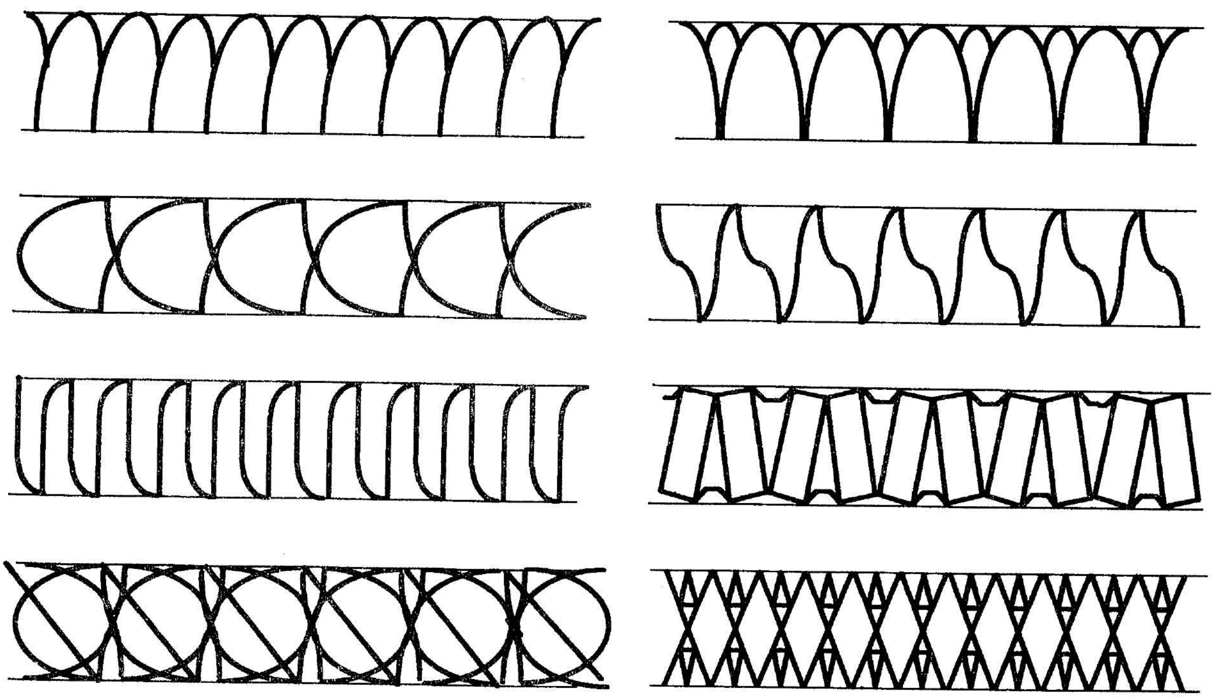
METHODE DE CLASSIFICATION DES FRISES PAR REFLEXIONS ET ROTATIONS								
rotation d'ordre deux	oui	axe de symétrie longitudinal	oui					**f2m**
			non	axe de symétrie transversal	oui			**fm2**
					non			**f2**
	non	axe de symétrie longitudinal	oui					**f1m**
			non	axe de symétrie transversal	oui			**fm1**
					non	symétrie glissée	oui	**f1g**
							non	**f1**

Application: Déterminer le type de la frise ci-dessous:



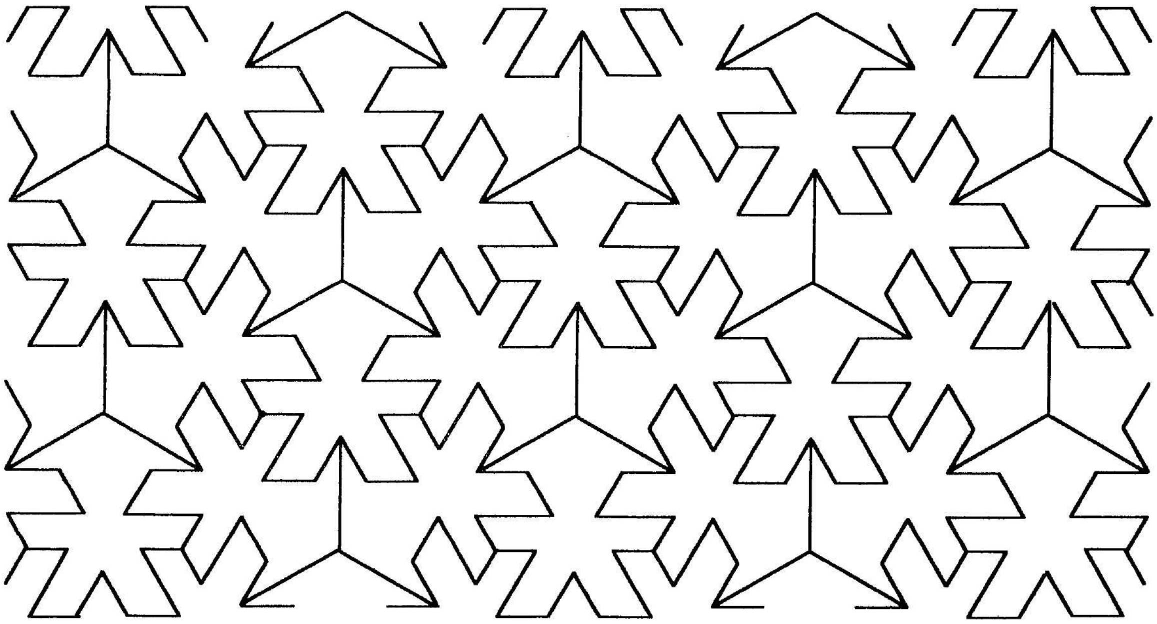
Nous avons vu dans l'application précédente qu'il existe deux types de rotation d'ordre deux, on peut donc répondre oui à la première question. Il n'y a pas d'axe de symétrie longitudinal et la réponse à la deuxième question est non. Il n'y a pas non plus d'axe de symétrie transversal et la réponse a la troisième question est encore non. Le chemin est donc oui, non, non, cette frise est du type f2.

Exercice: Reconnaître le type de chacune des frises suivantes.

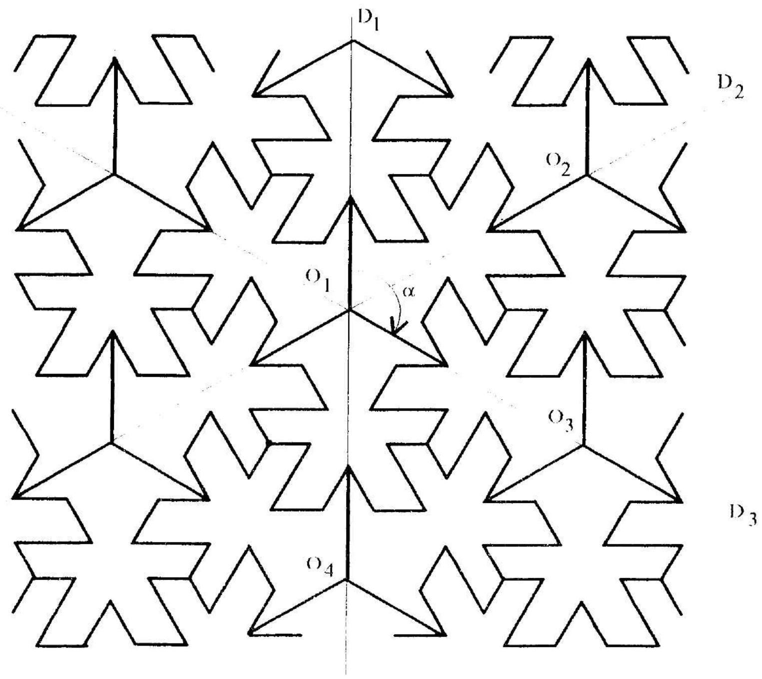


4°) ETUDE DES PAVAGES.

On désigne ici par pavage un élément de décoration permettant d'occuper le plan, continu et périodique. Une propriété essentielle étant que cette décoration doit se reproduire elle-même par des translations dans deux directions au moins. Par exemple[1] :



Application: Quelles sont les isométries qui laissent le pavage ci-dessus invariant?



On en trouve de sept types:

-Les réflexions d'axes D_1, D_2, D_3.

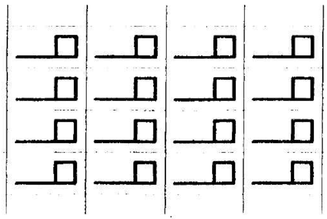
-Les translations de vecteurs $\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_3}, \overrightarrow{O_1O_4}$.

-Les rotations d'ordre 3 de centre O_1, O_2, O_3, O_4, etc...

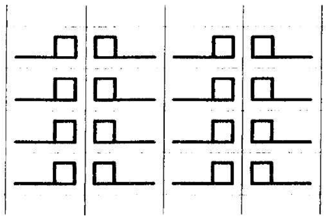
On démontre qu'il existe dix-sept types de pavages et dix-sept seulement lorsqu'on les analyse du point de vue des transformations qui les laissent invariants.

[1] D'après M.C.Escher.

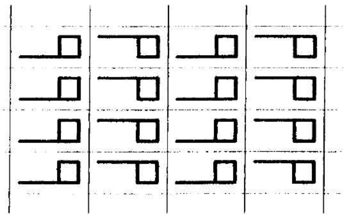
p1



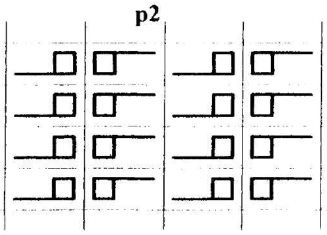
p1m



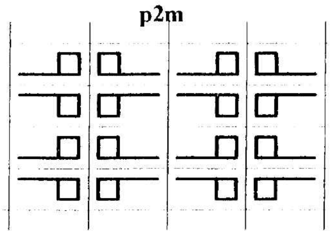
p1g



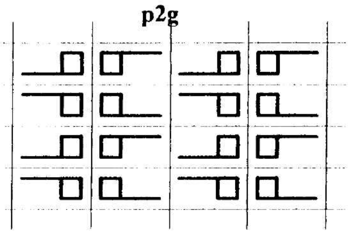
p2



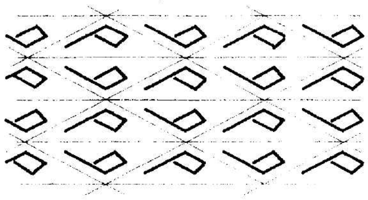
p2m



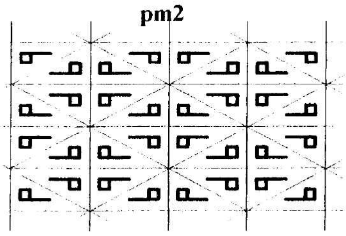
p2g



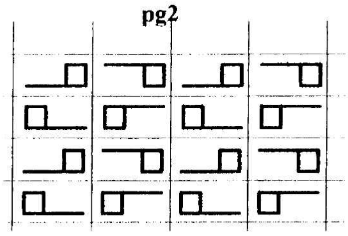
pm1



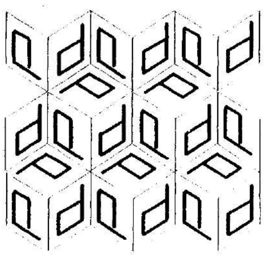
pm2



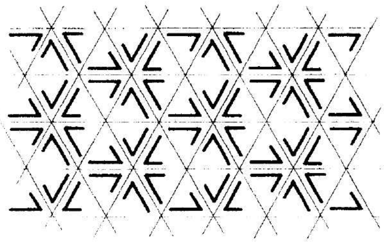
pg2



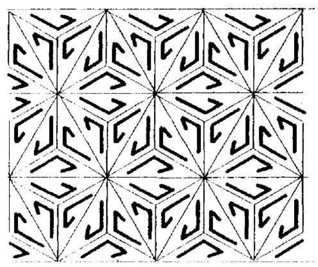
p3



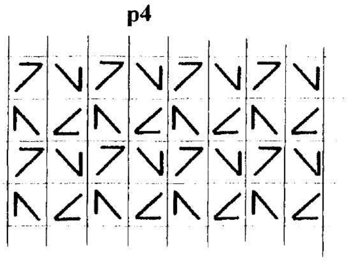
p3m



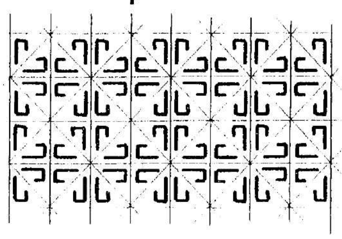
pm3



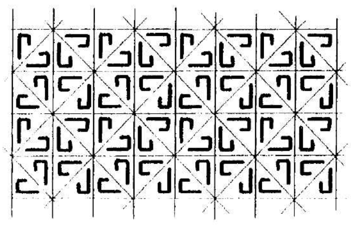
p4



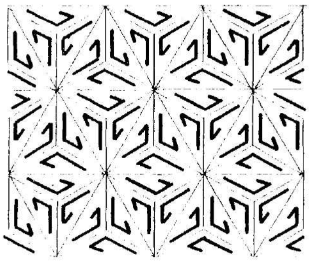
p4m



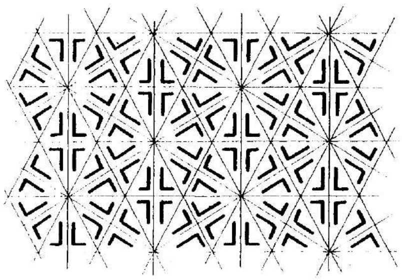
pm4



p6



p6m



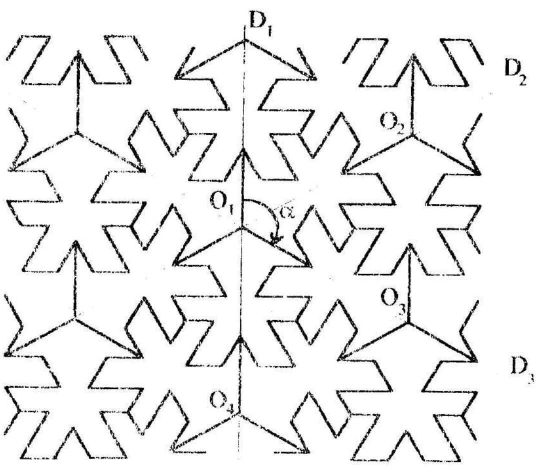
Nous allons tenter d'examiner les divers groupes de pavages, pour cela nous proposons l'algorithme suivant qui doit-être utilisé en recherchant en premier le nombre de directions d'axes de réflexions (c'est le nombre de la colonne de gauche).

Pour la suite on désigne par "mailles" les polygones délimités par les axes des réflexions, et par "trames" les bandes déterminées par les axes des réflexions.

CLASSIFICATION DES PAVAGES PAR REFLEXIONS ET ROTATIONS

6											**p6m**
4											**p4m**
3	rotation d'ordre 3 dans une maille	oui									**pm3**
		non									**p3m**
2	rotation d'ordre 4 dans une maille	oui									**pm4**
		non	rotation d'ordre 2 dans une maille	oui							**pm2**
				non							**p2m**
1	rotation d'ordre 2 dans la trame	oui									**p2g**
		non	symétrie glissée dans la trame	oui							**pm1**
				non							**p1m**
0	rotation d'ordre 6	oui									**p6**
		non	rotation d'ordre 4	oui							**p4**
				non	rotation d'ordre 3	oui					**p3**
						non	rotation d'ordre 2	oui	symétrie glissée	oui	**pg2**
										non	**p2**
								non	symétrie glissée	oui	**p1g**
										non	**p1**

Application: Déterminer le type du pavage ci-dessous.

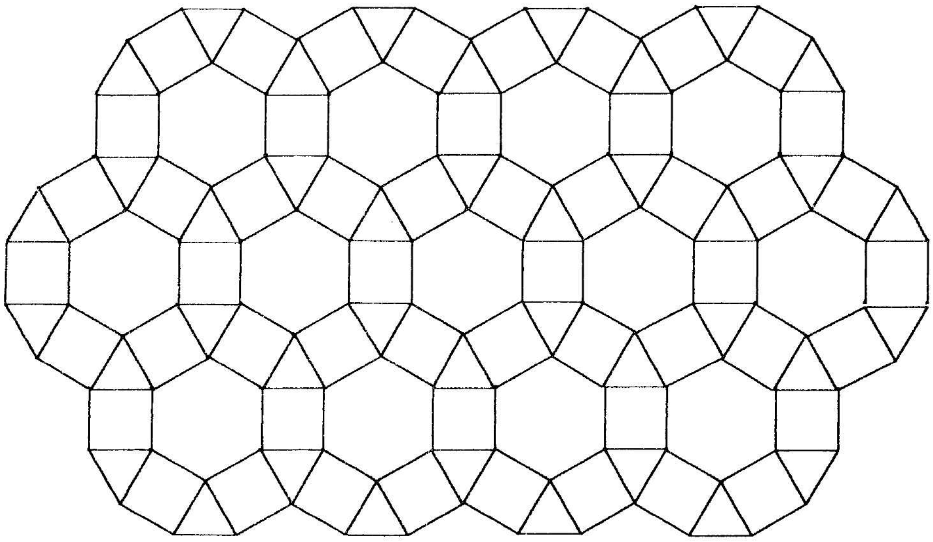


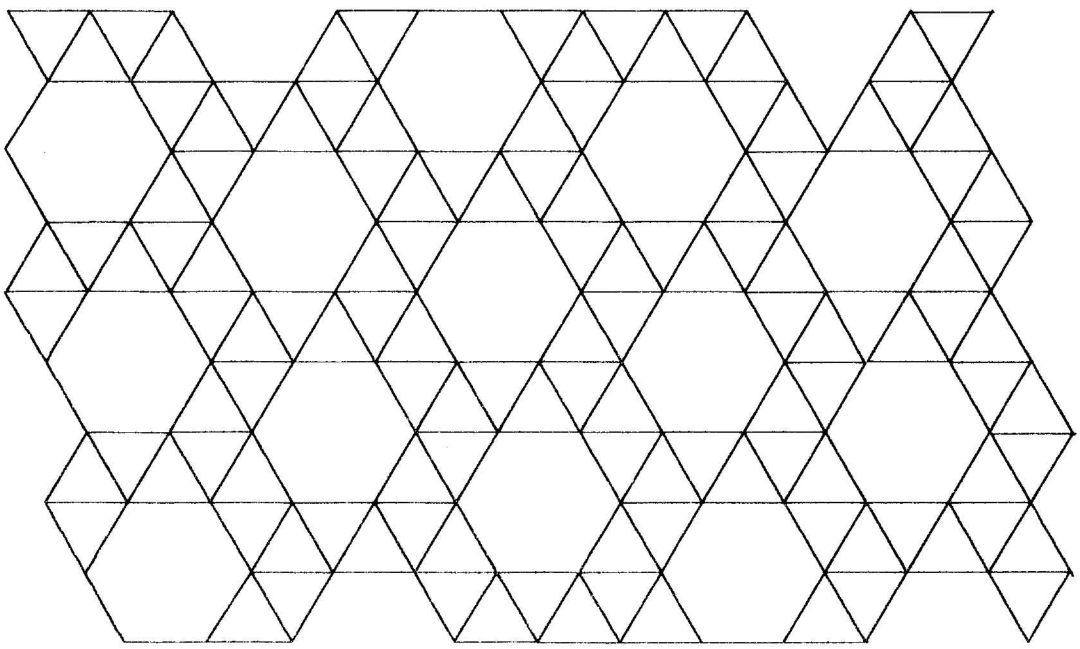
On remarque trois directions d'axes de réflexions données par D_1, D_2, D_3.

Leurs intersections A, B, C déterminent une maille à l'intérieur de laquelle on observe une rotation de centre O et d'angle $\alpha = 120°$, c'est à dire une rotation d'ordre trois.

Le premier choix est donc 3, et le deuxième oui. Le type est pm3.

Exercice: Déterminer le type de chacun des pavages suivants.

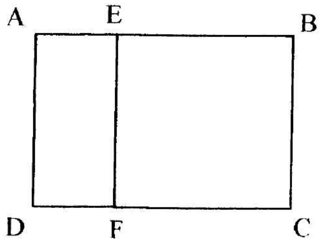




PROBLEMES:

Problème 1: Les polygones et le nombre d'or.

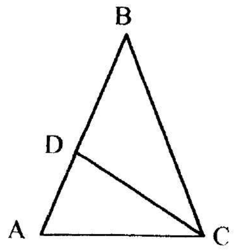
On dit qu'un point M partage un segment AB dans un rapport doré (ou qu'il réalise la divine proportion) lorsque $\frac{MB}{MA} = \frac{AB}{MB}$. Le nombre d'or est alors la valeur exacte de ce rapport.



1°) En prenant AB = 1, calculer MB, en déduire que le nombre d'or est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2°) Un rectangle ABCD est d'or lorsque le quotient $\frac{AB}{AD}$ est égal au nombre d'or.

Montrer que dans ces conditions, si BE = BC = CF, le rectangle AEFD est aussi un rectangle d'or.

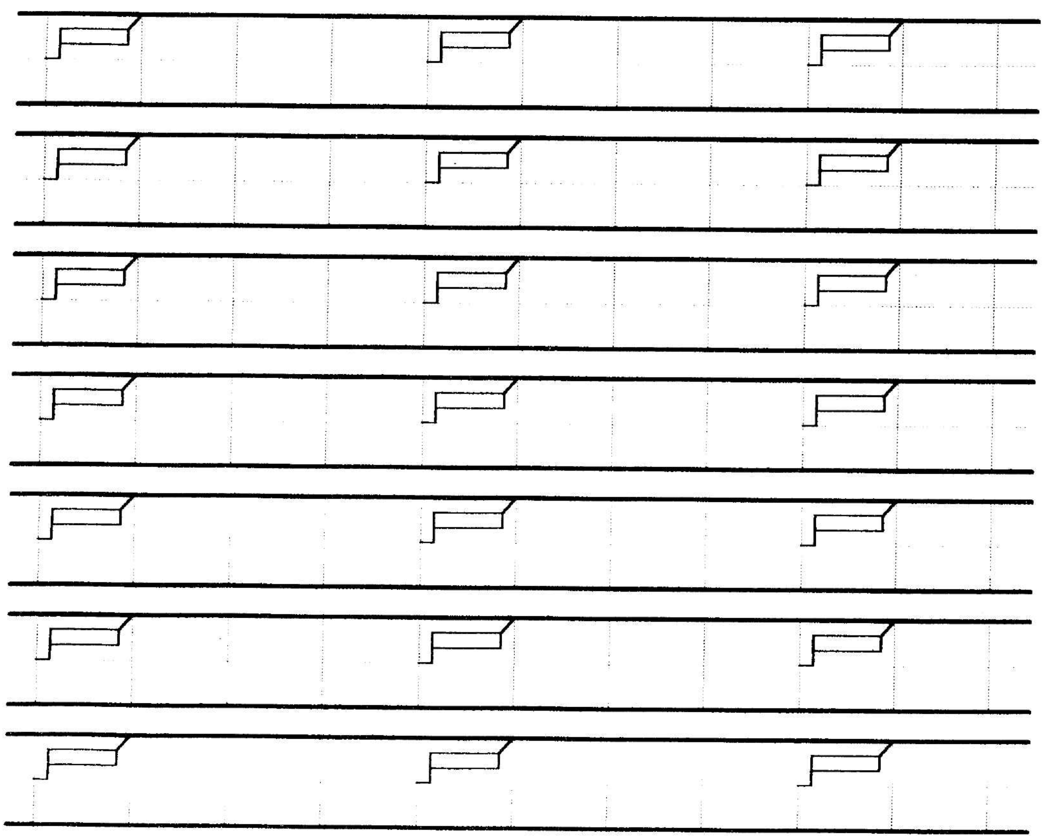


3°) Un triangle isocèle ABC de sommet B est d'or lorsque le quotient $\frac{AB}{AC}$ est égal au nombre d'or.

Montrer que dans ce cas, si DB = AC, alors DC = DB = AC, et le triangle DCA est d'or.

Calculer les angles de ce triangle et montrer qu'il est contenu dans le pentagone régulier.

Problème 2: Réaliser sur les grilles ci-dessous une frise de chacun des sept types possibles.



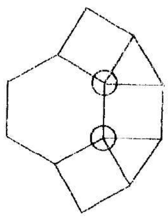
Problème 3: Frises et pavages réguliers.
Peut-on recouvrir une bande de plan ou le plan tout entier à l'aide d'un seul type de polygones réguliers de même taille?

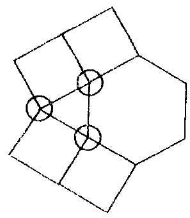
1°) Démontrer qu'il n'existe que deux familles de polygones réguliers de même taille permettant de recouvrir une bande de plan.

2°) Démontrer, en considérant les angles autour d'un sommet, qu'il n'existe que trois familles de polygones réguliers de même taille permettant de recouvrir le plan.

Problème 4: Les pavages semi-réguliers:
On désigne ainsi tout ensemble de polygones réguliers de plusieurs types disposés de telle manière qu'en chaque sommet de polygone apparaisse la même configuration. Par exemple:

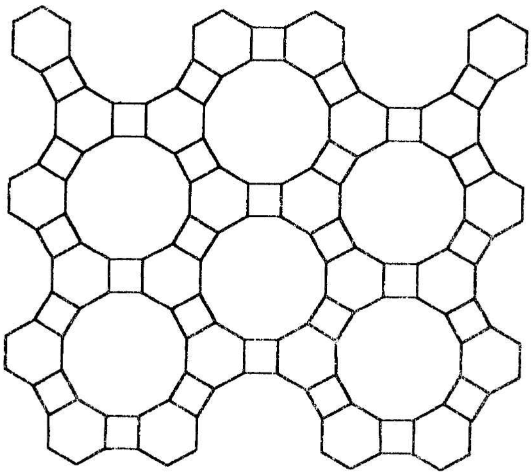
Disposition correcte

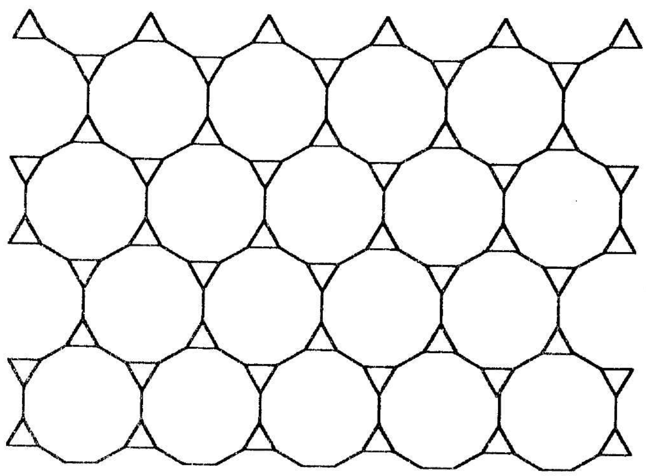


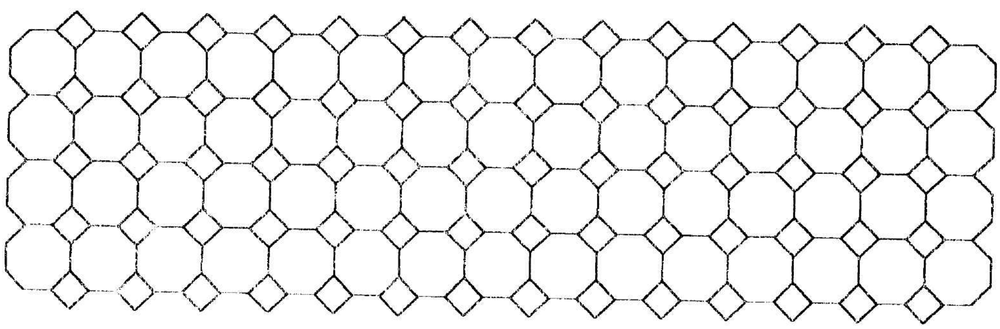


Disposition incorrecte

1°) Analyser avec la grille vue plus haut les trois pavages semi-réguliers ci-dessous, et préciser le type auquel ils appartiennent.







2°) Supposons que l'on dispose autour d'un sommet n polygones réguliers dont deux au moins sont différents.

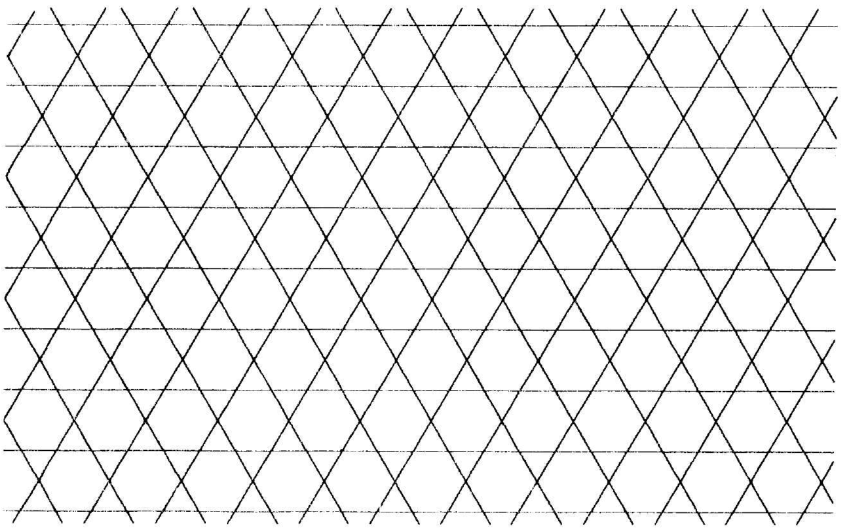
a) En vous aidant des résultats obtenus sur les polygones réguliers, montrer que $3 \leq n \leq 6$.

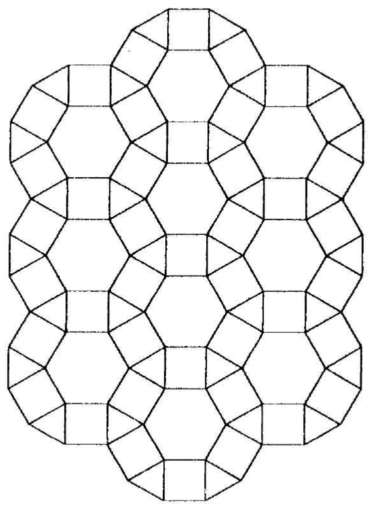
b) <u>Cas n = 3:</u> si l'on désigne par a, b, c le nombre de côtés de chacun de ces polygones, on obtient au sommets trois angles respectifs de $\frac{a-2}{a}\times 180°, \frac{b-2}{b}\times 180°, \frac{c-2}{c}\times 180°$ dont la somme doit être égale à 360°. En déduire que $\frac{a-2}{a}+\frac{b-2}{b}+\frac{c-2}{c}=2$ puis que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$.

Démontrer que les seuls entiers satisfaisant à cette condition sont 3, 12, 12 puis 4, 8 et 8 et enfin 4, 6 et 12 (il s'agit des trois pavages présentés en question 1).

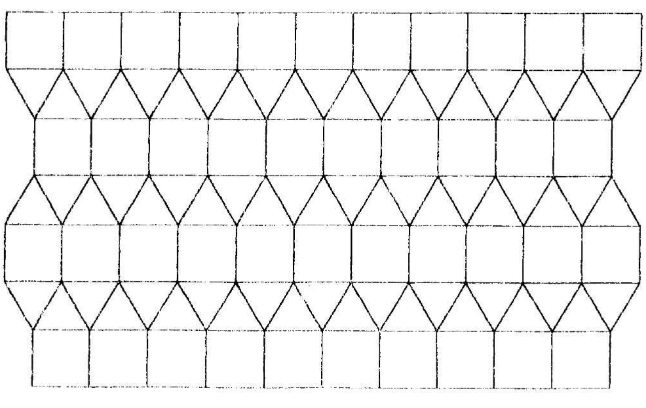
c) <u>Cas n = 4:</u> si l'on désigne par a, b, c, d le nombre de côtés de chacun de ces polygones, on obtient $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

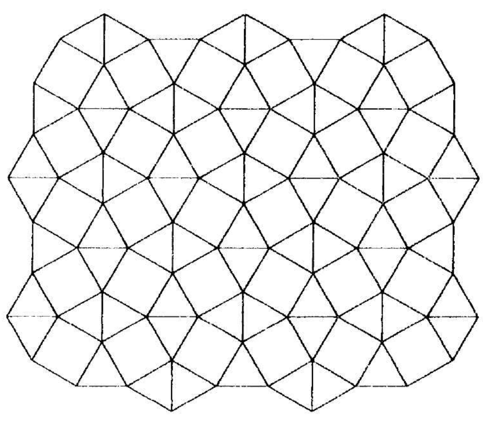
Démontrer que les seuls entiers satisfaisant à cette condition sont 3, 3, 6 et 6 puis 3, 4, 4 et 6 qui donnent les pavages suivants:

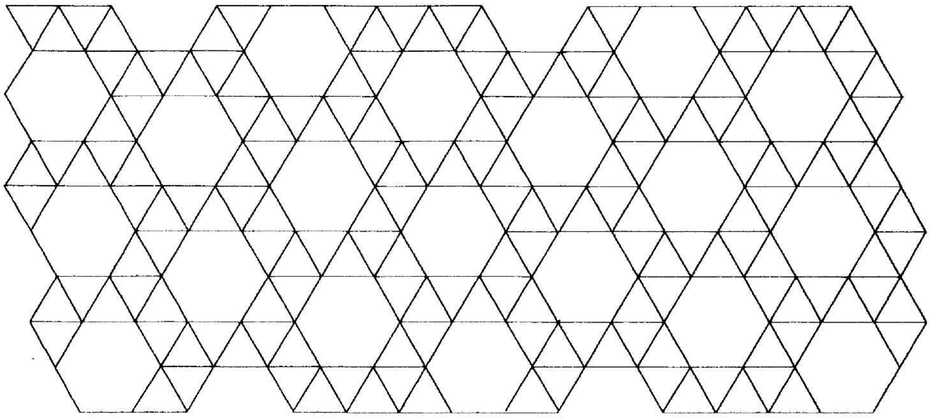




d) <u>Cas n = 5 et n = 6:</u> par des méthodes analogues établir que l'on ne peut obtenir que trois pavages supplémentaires, donnés par les entiers 3, 3, 3, 4 et 4 qui donne deux pavages puis 3, 3, 3, 3 et 6. Les trois pavages obtenus sont les suivants:

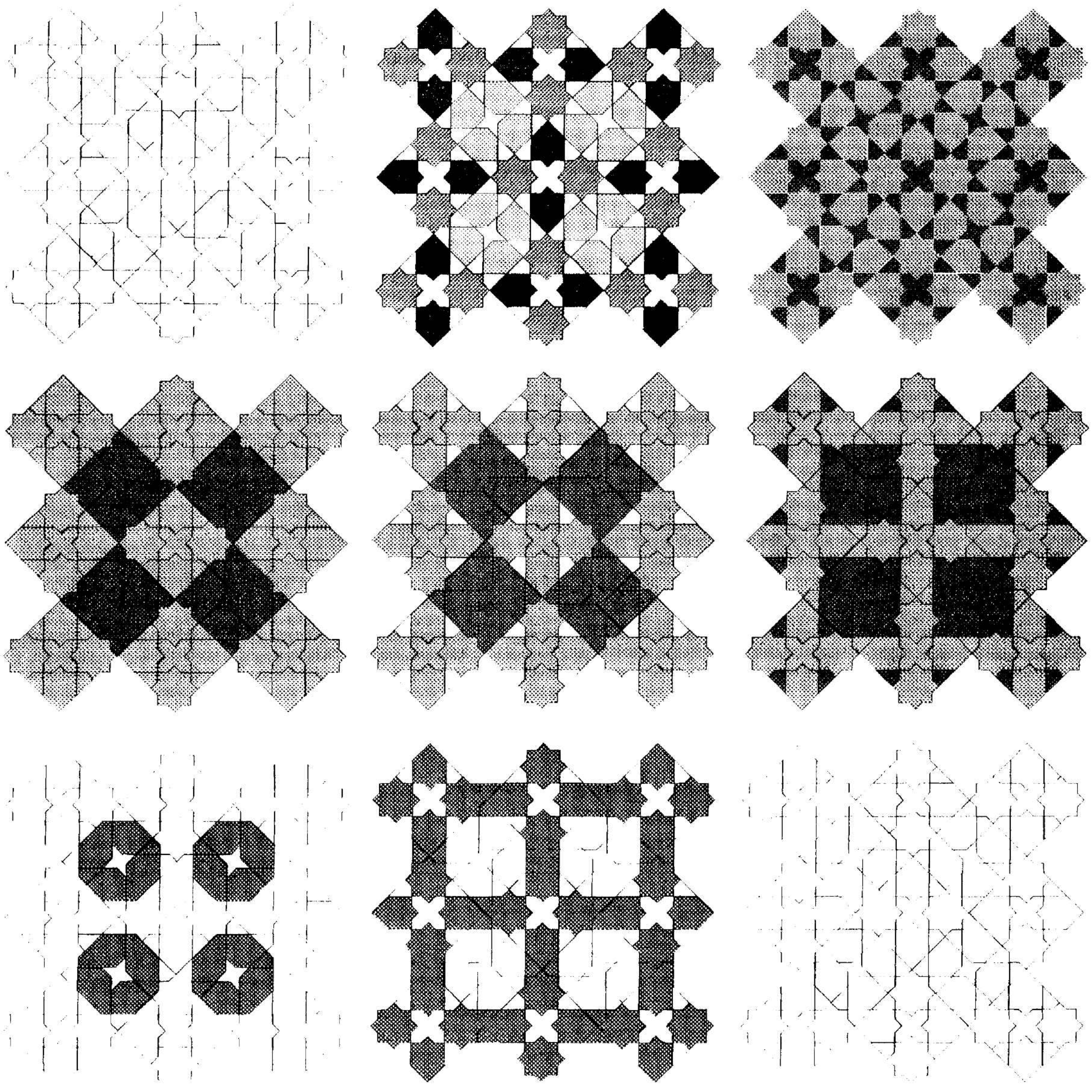






e) Analyser avec la grille vue plus haut les pavages semi-réguliers obtenus dans les questions c et d ci-dessus, et préciser le type auquel ils appartiennent.

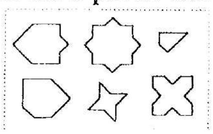
Problème 5: Quelques variations sur des mosaïques.
Variations sur une mosaïque murale de l'Alhambra de Grenade[1].

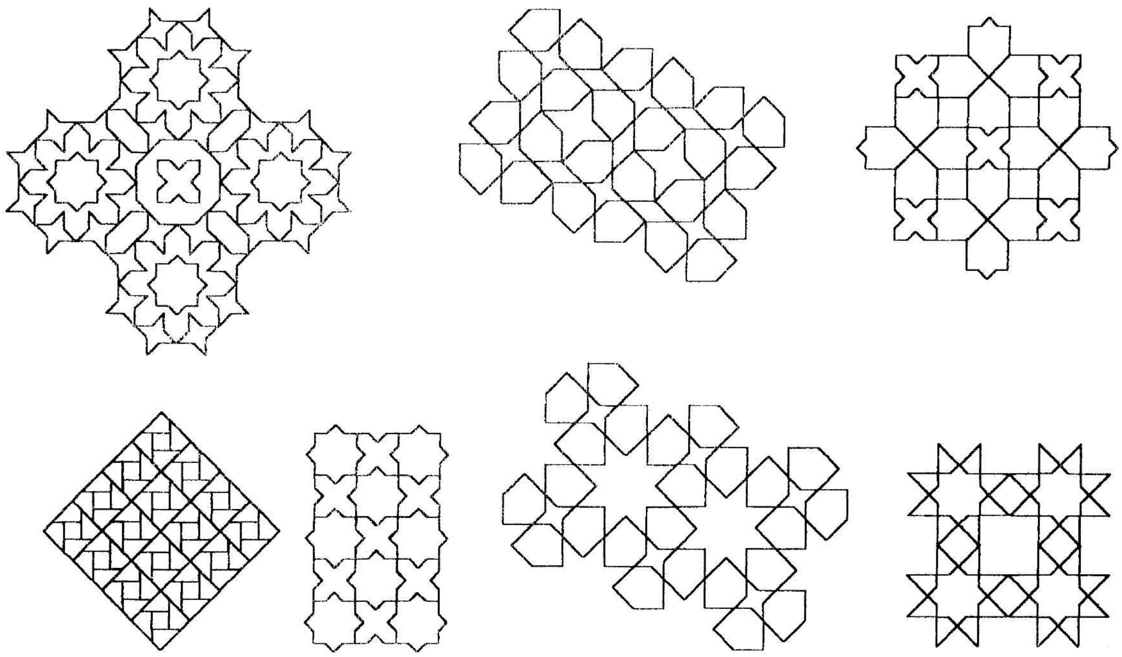


[1] D'après en relevé de M.C. ESCHER

1°) Les huit premières des neuf figures qui précédent constituent des variations colorées à partir d'un même support initial. Quel est à chaque fois le type de pavage correspondant? Proposer sur la neuvième figure un coloriage différent.

2°) La figure ci-dessous montre quelques réalisations possibles à partir des éléments géométriques simples ci-contre relevés dans les pavages précédents:
Quel est à chaque fois le type de pavage correspondant?





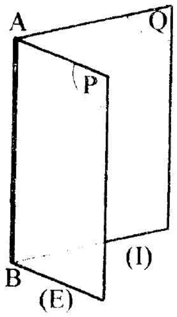
CHAPITRE V

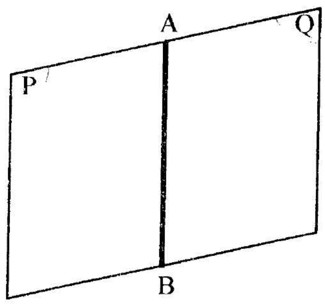
DIEDRES ET TRIEDRES

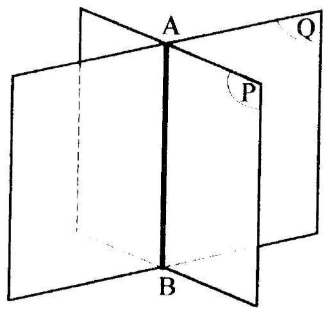
L'étude des polyèdres nécessite une bonne connaissance des polygones qui constituent leurs faces (c'est à dire des relations qui existent entre les angles et les longueurs de leurs arêtes), ainsi que la maîtrise des relations angulaires entre les faces. Ce chapitre propose donc une étude des angles de demi-plans, angles dièdres ou trièdres.

1°) ANGLES DIEDRES.

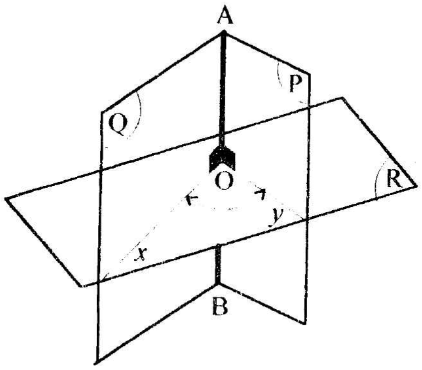
Un dièdre (ou angle dièdre) est la figure formée par deux demi-plans issus d'une même droite. Ces demi-plans sont les faces du dièdre.







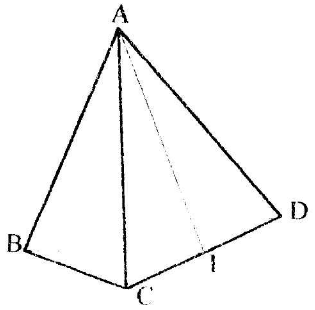
Un dièdre partage l'espace en deux régions, l'intérieur (I) que nous considérerons toujours comme saillant, et l'extérieur (E). Un dièdre plat a ses deux faces dans un même plan. Deux dièdres (non plats) sont opposés par l'arête lorsque les plans contenant les faces de l'un contiennent les faces de l'autre.



On appelle rectiligne ou angle plan ou plus simplement angle d'un dièdre, la mesure de l'angle géométrique obtenu en coupant ce dièdre par un plan perpendiculaire à l'arête.

Sur la figure ci-contre, le plan R est perpendiculaire à l'arête AB et coupe les plans P et Q suivant Ox et Oy. L'angle du dièdre d'arête AB est ($x\hat{O}y$), il ne dépend pas de la position du plan R perpendiculaire à l'arête..

Application: ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 10 cm. Calculer l'angle du dièdre d'arête CD.



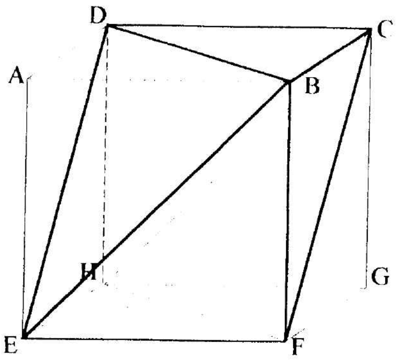
Soit I le milieu de CD, l'angle cherché est $A\hat{I}B$ car le plan AIB est perpendiculaire à l'arête CD du dièdre.

On sait que $AI = IB = \dfrac{10\sqrt{3}}{2}$. Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABI permet d'écrire $AB^2 = AI^2 + IB^2 - 2AI \times IB \times \cos(A\hat{I}B)$

on obtient donc $100 = 2 \times \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\dfrac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \cos(A\hat{I}B)$

et enfin, $\cos(A\hat{I}B) = \dfrac{50}{150} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi $A\hat{I}B \approx 70{,}5°$.

Exercice: ABCDEFGH est un cube. Quels sont les angles des dièdres de faces:



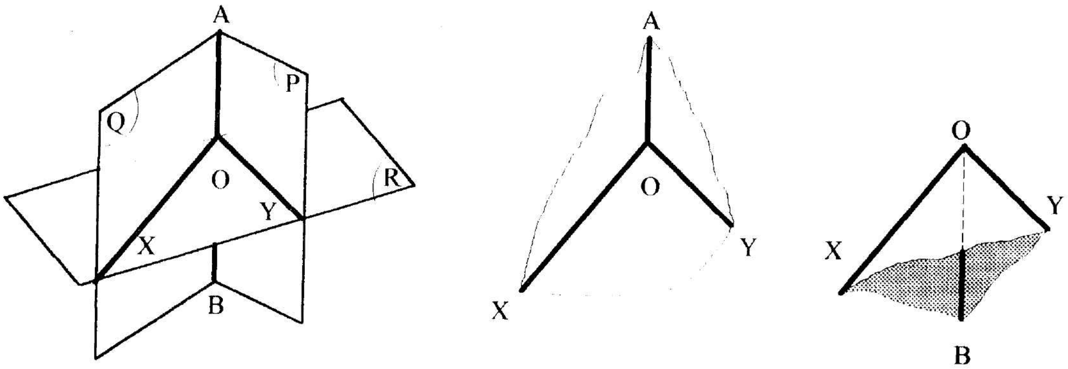
a) BEF et BFC ?
b) BDE et BCD ?
c) BDE et BEF ?
d) DCH et CHF ?

2°) TRIEDRES OU ANGLES TRIEDRES.

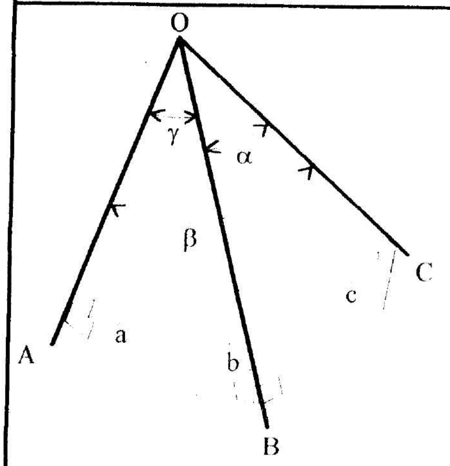
Un angle trièdre ou trièdre est la figure formée par trois demi-droites issues d'un même point et non situées dans un même plan. Le point A est le sommet du trièdre, les trois demi-droites sont ses arêtes.

Remarque: On peut également voir un angle trièdre comme la figure formée lorsque on coupe un dièdre par un plan.

Sur la figure ci-dessous, le dièdre d'arête AB est coupé par le plan R. On obtient ainsi deux trièdres de sommet O, l'un de ces trièdres a comme arêtes OA, OX, OY, et l'autre OB, OX, OY.



Angles dans un trièdre.



Dans le trièdre OABC ci-contre on peut relever:

Trois angles plans: $B\hat{O}C = \alpha$
$A\hat{O}C = \beta$
$A\hat{O}B = \gamma$

Trois angles dièdres $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, d'arêtes respectives OA, OB, OC.

Comme pour les triangles, suivant la nature des angles observés, on donne aux trièdres des noms particuliers:

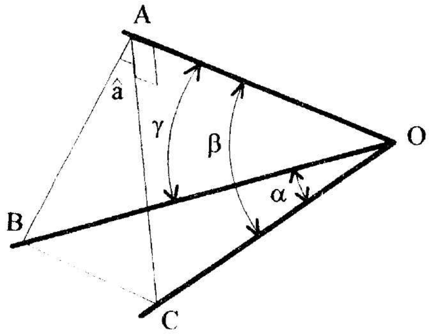
-Rectilatère si un angle plan est droit, par exemple $\alpha = 90°$.

-Rectangle si un angle dièdre est droit, par exemple $\hat{a} = 90°$.

-Isocèle si deux angles dièdres correspondant à deux arêtes sont égaux et si les deux angles plans ayant en commun la troisième arête du trièdre sont égaux, par exemple $\hat{a} = \hat{b}$ et $\alpha = \beta$.

-Rectilatère isocèle, et rectangle isocèle qui sont définis par la conjonction de deux des propriétés précédentes.

3°) FORMULE FONDAMENTALE DU TRIEDRE.



On considère un trièdre de sommet O, et on appelle A, B, C, les intersections des arêtes de ce trièdre avec un plan perpendiculaire à l'arête OA.

Nous allons établir une relation entre l'angle dièdre â d'arête OA et les angles plans (formés par les arêtes) $B\hat{O}C = \alpha$ $A\hat{O}C = \beta$ et $A\hat{O}B = \gamma$.

En utilisant le théorème d'Al Khashi dans les triangles BAC et BOC, on obtient:

① $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \times BA \times AC \times \cos\hat{a}$ dans BAC

② $BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2 \times BO \times OC \times \cos\alpha$ dans BOC.

On obtient également dans les triangles BAO et CAO rectangles en A:

③ $BO^2 = BA^2 + AO^2$ dans BAO

④ $CO^2 = CA^2 + AO^2$ dans CAO.

En portant BO^2et CO^2 de ③ et ④ dans ②, on a:

$BC^2 = 2 \times AO^2 + BA^2 + AC^2 - 2 \times BO \times OC \times \cos\alpha$, puis,

$BC^2 - (BA^2 + AC^2) = 2 \times AO^2 - 2 \times BO \times OC \times \cos\alpha$.

D'autre part, de ① on peut écrire:

$BC^2 - (BA^2 + AC^2) = -2 \times BA \times AC \times \cos\hat{a}$, qui devient alors

$2 \times AO^2 - 2 \times BO \times OC \times \cos\alpha = -2 \times BA \times AC \times \cos\hat{a}$.

En divisant par $2 \times BO \times OC$ cette dernière relation, on a:

$\dfrac{AO^2}{BO \times OC} - \cos\alpha = -\dfrac{BA \times AC \times \cos\hat{a}}{BO \times OC}$, qui peut s'écrire $\dfrac{AO}{BO} \times \dfrac{AO}{OC} - \cos\alpha = -\dfrac{BA}{BO} \times \dfrac{AC}{OC} \times \cos\hat{a}$.

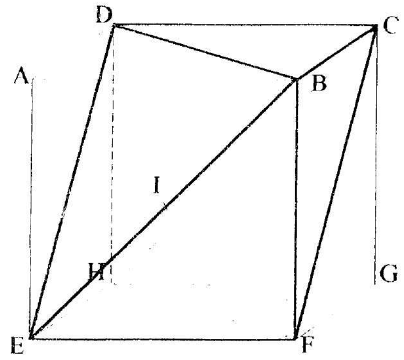
En remarquant que $\dfrac{AO}{BO} = \cos\gamma$, $\dfrac{AO}{OC} = \cos\beta$, $\dfrac{BA}{BO} = \sin\gamma$, $\dfrac{AC}{OC} = \sin\beta$, le résultat précédent donne une relation entre angle dièdre et angles plans du trièdre:

$$\boxed{\cos\gamma \times \cos\beta - \cos\alpha = -\sin\gamma \times \sin\beta \times \cos\hat{a}}$$

Enfin, si on sépare angle dièdre â et angles plans α, β, γ, on obtient la formule suivante:

$$\boxed{\underline{\textbf{Formule fondamentale du trièdre}}\quad \cos\hat{a} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \times \cos\gamma}{\sin\beta \times \sin\gamma}}$$

Application: ABCDEFGH est un cube d'arête 1 m. Calculer l'angle que forment les faces BDE et BCD.



On considère pour cela le trièdre de sommet B et d'arêtes BE, BC, BD, qui est rectilatère car BE et BC sont perpendiculaires.

Appelons â l'angle dièdre cherché, les angles α, β, γ, sont alors $\widehat{EBC}$, $\widehat{DBE}$, $\widehat{DBC}$, et on peut appliquer le résultat précédent.

Ainsi, $\cos\hat{a} = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \times \cos\gamma}{\sin\beta \times \sin\gamma}$, avec $\cos\alpha = 0$ car $\widehat{EBC}$ est droit.

On a $\sin\gamma = \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et, avec I milieu de BE, $\sin\beta = \dfrac{DI}{DB}$, donc,

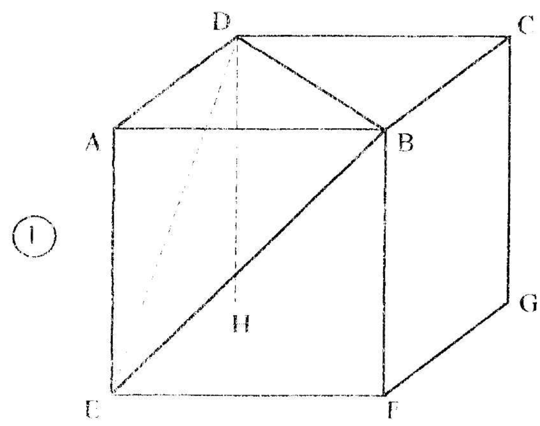
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{DB^2 - IB^2}}{DB} = \frac{\sqrt{2 - \dfrac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ et enfin } \cos\beta = \frac{BI}{DB} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

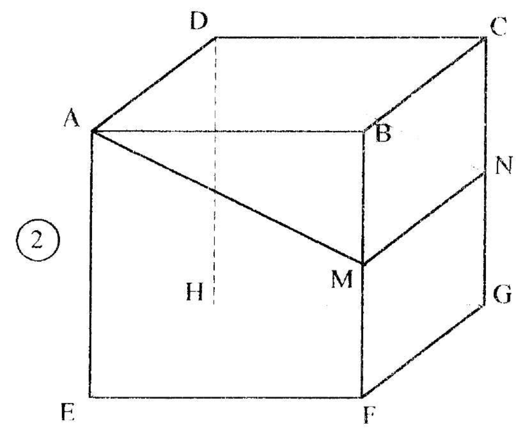
On obtient alors $\cos\hat{a} = \dfrac{0 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ puis $\hat{a} \approx 125{,}2°$.

Exercice: On considère un cube ABCDEFGH de 4 cm d'arête.

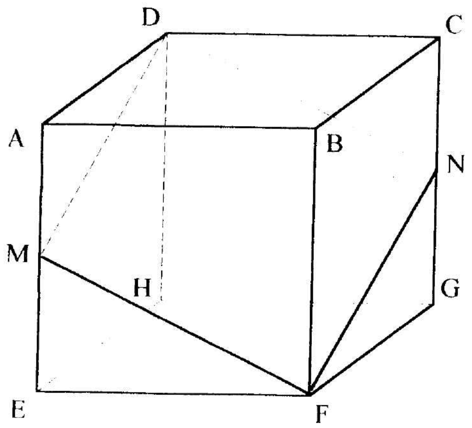
1) Dans chacun des cas suivants, préciser le trièdre que vous choisiriez pour calculer l'angle dièdre demandé. En désignant par â cet angle dièdre, préciser également les angles α, β, γ, permettant l'application de la formule $\cos\hat{a} = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \times \cos\gamma}{\sin\beta \times \sin\gamma}$.

Figure ①: angle des plans DBE et DBC. Figure ②: angle des plans DNM et NMF.
Figure ③: angle des plans DMF et MFE. Figure ④: angle des plans MNP et MNF.
Figure ④: angle des plans MNP et NPG. Figure ⑤: angle des plans MNP et NPC.
Figure ⑥: angle des plans AMN et MNG.

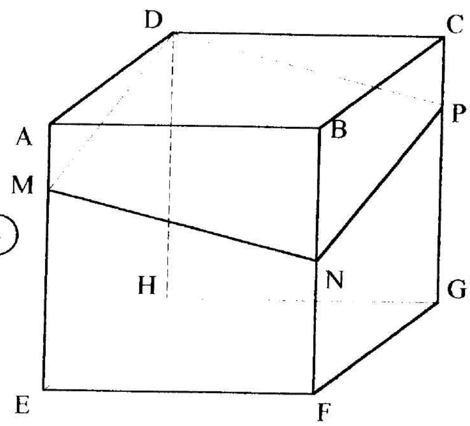




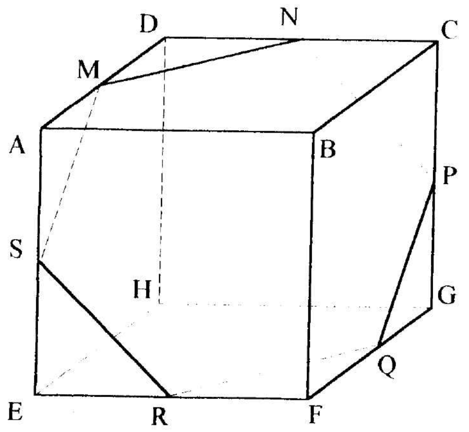
③



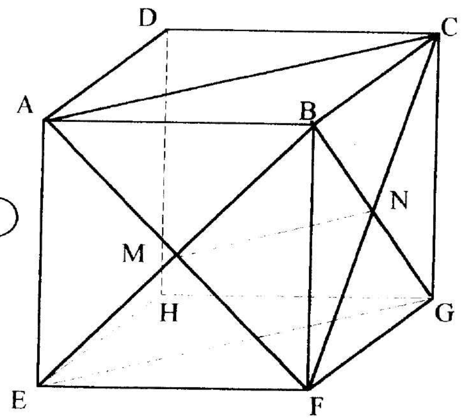
④



⑤



⑥



2) Calculer effectivement les cosinus des angles dièdres suivants:

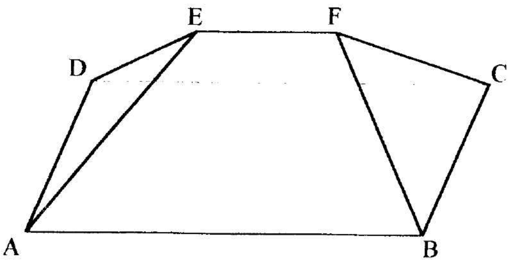
<u>Figure ②</u>: angle des plans DNM et NMF si M et N sont les milieux des arêtes BF et CG.

<u>Figure ③</u>: angle des plans DMF et MFE si M et N sont les milieux des arêtes AE et CG.

<u>Figure ⑥</u>: angle des plans AMN et MNG.

PROBLEMES:

Problème 1: Un toit à quatre pentes.



Le toit ci-contre repose sur une base carrée ABCD de côté a. On sait de plus que les arêtes AE, BF, CF, DE et EF sont de même longueur x, et que EF est parallèle à AB et DC.

1°) Quelle valeur faut il donner à x (en fonction de a) pour que les angles dièdres d'arêtes AB et AC soient de 45° ?

2°) On suppose maintenant que les angles dièdres d'arêtes AB et AC sont de 45°.

a) Calculer les sinus et cosinus des angles $\widehat{AED}$, $\widehat{DAE}$, $\widehat{AEF}$.

b) Calculer les angles dièdres d'arêtes EF, puis AD et BC, enfin AE, BF, CF et DE.

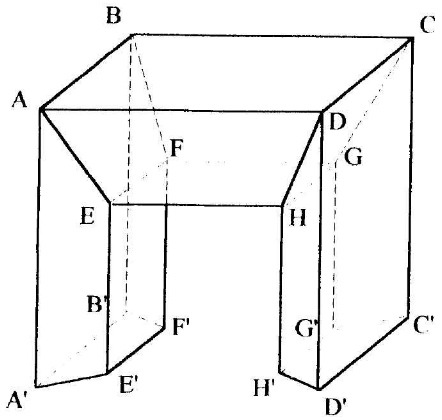
Problème 2: Première étude pour une arche.

Les trois dessins ci-dessous représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.

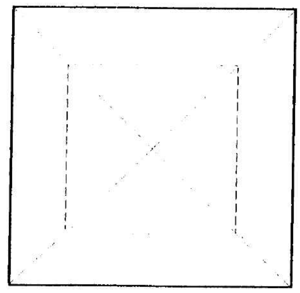
Le volume extérieur ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a.

Le volume intérieur EFGHE'F'G'H' est un cube d'arête b, (b < a).

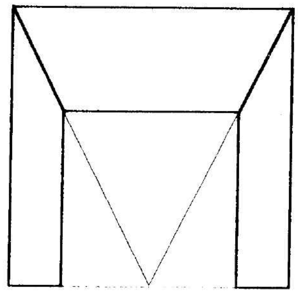
Ces deux cubes ont un même axe de symétrie vertical et leurs faces sont parallèles.



Vue de dessus



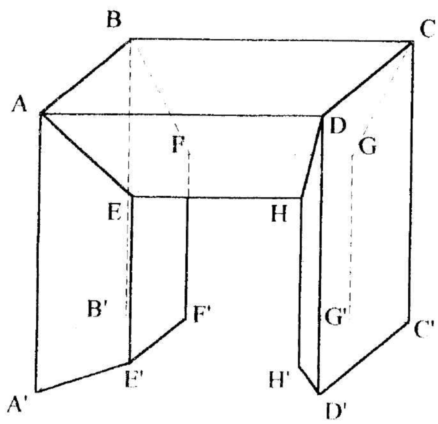
Vue de face



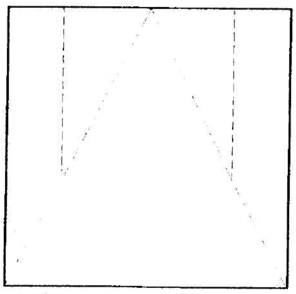
Calculer l'angle dièdre d'arête AE après avoir calculé successivement les cosinus et sinus des angles $\widehat{E'EF}$, $\widehat{AEF}$, $\widehat{AEE'}$.

Problème 3: Deuxième étude pour une arche.

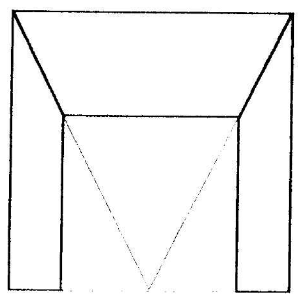
Les trois dessins qui suivent représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.



Vue de dessus



Vue de face



Le volume extérieur ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a.

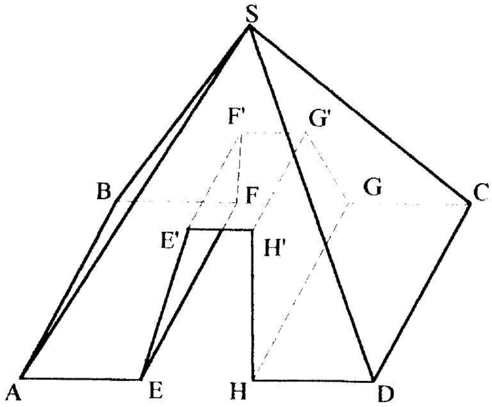
Le volume intérieur EFGHE'F'G'H' est un cube d'arête b, (b < a).

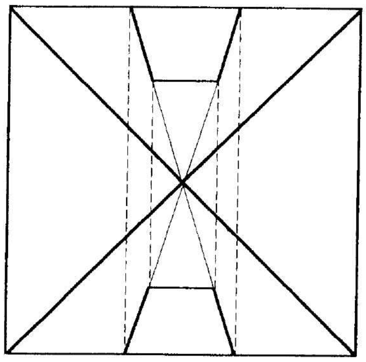
Ces deux cubes ont un même plan de symétrie vertical, une face commune et leurs faces sont parallèles.

Calculer l'angle dièdre d'arête AE après avoir calculé successivement les cosinus et sinus des angles E'ÊF, AÊF, AÊE'.

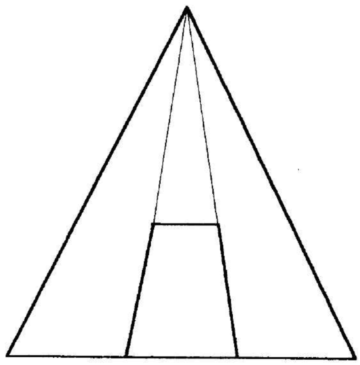
<u>Problème 4:</u> Etude pour une autre arche.

Les trois dessins ci-dessous représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.





Vue de dessus



Vue de face

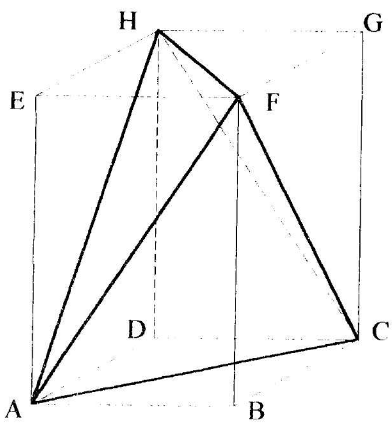
Le volume extérieur SABCD est une pyramide à base carrée de côté a et de hauteur a. On a percé à l'intérieur un tunnel de section trapézoïdale de hauteur h (h < a) en respectant les alignements SEE', SFF', SGG', SHH'. La largeur de la base du tunnel est donnée par $EH = FG = \frac{a}{3}$.

1°) Calculer en fonction de a la longueur AS.

2°) Calculer l'angle du dièdre d'arête AB.

3°) Calculer les angles des dièdres d'arêtes AS puis EE' et enfin E'F'.

<u>Problème 5:</u> Le tétraèdre isocèle.



On dispose d'un pavé droit ABCDEFGH à base carrée de côté c et de hauteur h.

On coupe successivement ce pavé par les plans HFA, HFC, ACF, ACH.

On obtient ainsi 5 tétraèdres:

-Un dont les faces sont 4 triangles isocèles, que l'on nomme tétraèdre isocèle.

-Quatre identiques dont 3 arêtes sont orthogonales, que l'on nomme tétraèdres trirectangles.

1°) Pour c et h de votre choix ($c \neq h$), présenter les calculs nécessaires à la réalisation des patrons de ces tétraèdres et fournir un patron de chaque type.

2°) Pour c et h quelconques, exprimer en fonction de c et h les volumes de ces tétraèdres.

3°) Pour la suite, on note x = HF et y = AF; c et h sont quelconques.

a) Exprimer en fonction de c et h puis de x et y les différentes hauteurs de ces tétraèdres.

b) Exprimer en fonction de c et h puis de x et y les différents angles dièdres de ces tétraèdres (par "exprimer " on entend donner le sinus, le cosinus ou la tangente).

CHAPITRE VI

PAVAGES DE L'ESPACE

Nous avons vu dans le chapitre IV qu'il est possible de réaliser des pavages réguliers ou semi-réguliers du plan à l'aide de polygones réguliers. De même, il existe des polyèdres réguliers permettant de paver l'espace. Nous allons dans ce chapitre étudier certains de ces pavages.

1°) LES CINQ POLYEDRES REGULIERS CONVEXES.

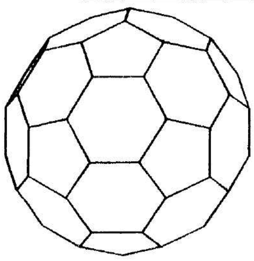
Un polyèdre régulier convexe est un polyèdre dont tous les sommets sont sur une sphère et dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques (le cube par exemple).

Relation d'Euler concernant les polyèdres convexes.

En désignant par **f** le nombre de faces, **a** le nombre d'arêtes, **s** le nombre de sommets du polyèdre:

$$s - a + f = 2$$

Applications: 1) Le polyèdre convexe ci-contre, appelé icosaèdre tronqué, n'est pas un polyèdre régulier car il est composé de 12 pentagones réguliers et 20 hexagones réguliers. Combien a-t-il de sommets et d'arêtes?



Les 12 pentagones réguliers donnent 60 arêtes, les 20 hexagones réguliers en donnent 120. Comme toute arête est commune à deux polygones réguliers, il y en a $\frac{120+60}{2} = 90$. La relation d'Euler permet d'affirmer qu'il a 2 - 32 + 90 sommets, soit 60.

2) Démontrer qu'il existe au plus cinq polyèdres réguliers.

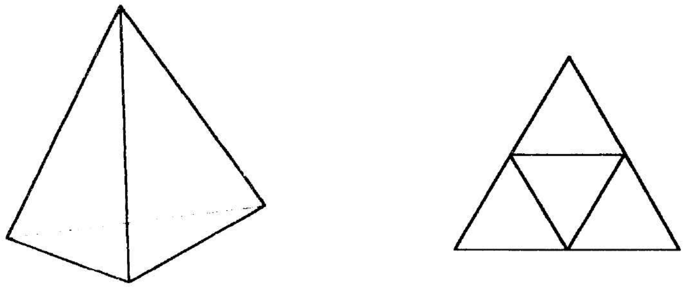
Preuve: Désignons par p le nombre d'arêtes issues d'un même sommet et par q le nombre d'arêtes par face, on obtient $2a = ps = qf$ et de là, $s = \frac{2a}{p}$, et $f = \frac{2a}{q}$. Si l'on reporte ces résultats dans la relation d'Euler, on peut écrire $\frac{2a}{p} - a + \frac{2a}{q} = 2$ puis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}$ et donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$.

Comme p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à trois, on n'obtient que cinq couples de valeurs possibles. Ils conduisent aux valeurs de a, s, f ci-dessous. On peut remarquer que ce calcul ne prouve pas l'existence de ces polyèdres réguliers, mais seulement qu'il ne peut en exister d'autres.

p	q	a	s	f	
3	3	6	4	4	**Tétraèdre régulier**
3	4	12	8	6	**Cube**
3	5	30	20	12	**Dodécaèdre régulier**
4	3	12	6	8	**Octaèdre régulier**
5	3	30	12	20	**Icosaèdre régulier**

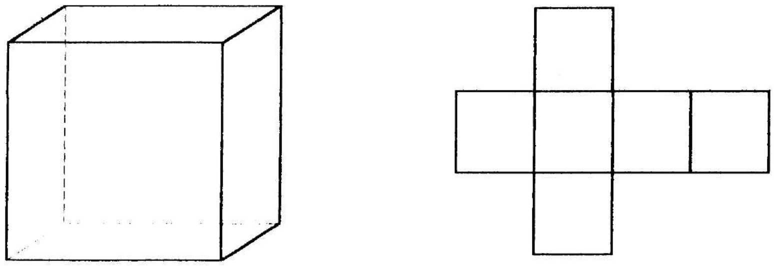
On désigne par polygones platoniciens ces cinq polygones réguliers du nom de Platon qui les a décrits dans son "Timée". Les figures qui suivent proposent pour chacun d'eux, une perspective, un modèle de patron ainsi que l'angle dièdre (exact ou approché, en degrés et minutes) formé par deux faces contiguës de ces polyèdres.

Tétraèdre régulier



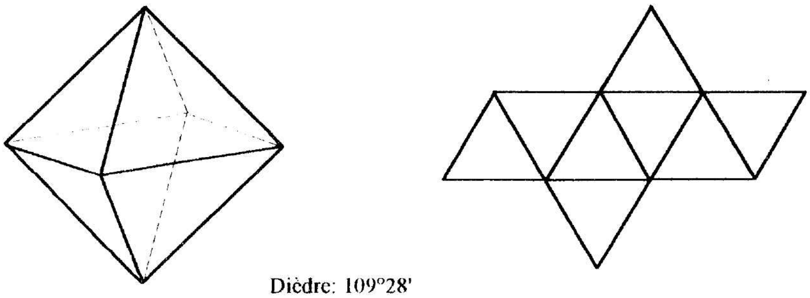
Dièdre: 70°32'

Cube:



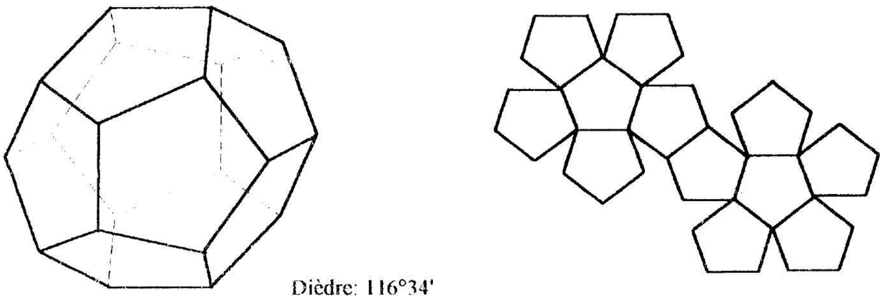
Dièdre: 90°

Octaèdre régulier:



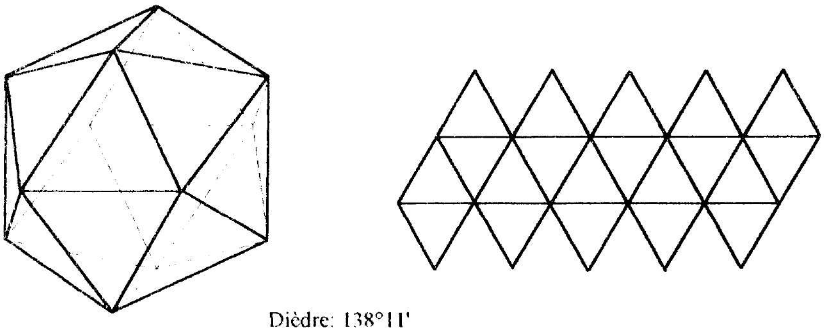
Dièdre: 109°28'

Dodécaèdre régulier:



Dièdre: 116°34'

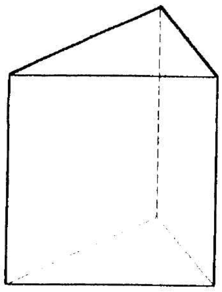
Icosaèdre régulier:



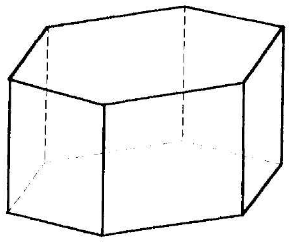
Dièdre: 138°11'

2°) LES POLYEDRES SEMI-REGULIERS CONVEXES.

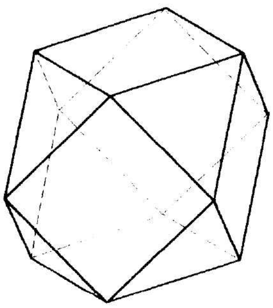
On désigne ainsi les polyèdres convexes dont les sommets sont sur une sphère et dont les faces sont des polygones réguliers différents, également disposés autour de chaque sommet. L'icosaèdre tronqué vu dans le paragraphe 1 en est un. Il en existe un très grand nombre et rares sont ceux qui présentent un intérêt quand il s'agit de paver l'espace. Nous allons cependant en examiner quelques uns.



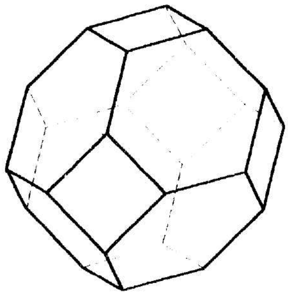
-<u>Le prisme droit à base triangulaire</u> qui est composé de 3 carrés identiques et de 2 triangles équilatéraux identiques. Chacun de ses sommet est commun à deux carrés et un triangle.
On peut noter que ses angles dièdres sont soit de 90°, soit de 60°.



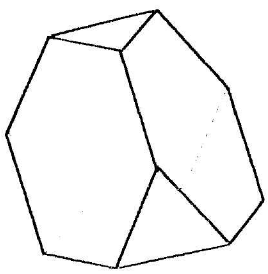
-<u>Le prisme droit à base hexagonale</u> qui est composé de 6 carrés identiques et de 2 hexagones réguliers identiques. Chacun de ses sommets est commun à deux carrés et un hexagone. Ses angles dièdres sont 120° et 90°.



-<u>Le cuboctaèdre</u> qui est composé de 6 carrés identiques et de 8 triangles équilatéraux identiques. C'est l'intersection d'un cube et d'un octaèdre. Chacun de ses sommets est commun à deux carrés et deux triangles. On peut noter que les 6 carrés sont contenus dans les 6 faces d'un même cube.

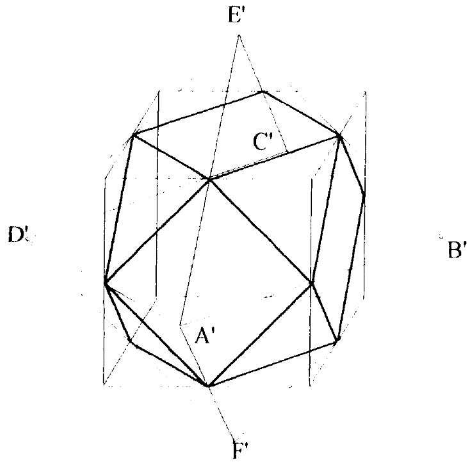


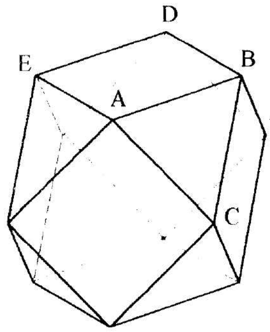
-<u>L'octaèdre tronqué</u> qui est composé de 6 carrés identiques et de 8 hexagones réguliers identiques. C'est également l'intersection d'un cube et d'un octaèdre. Chacun de ses sommets est commun à un carré et deux hexagones. On peut noter que les 6 carrés sont contenus dans les 6 faces d'un même cube.



-<u>Le tétraèdre tronqué</u> qui est composé de 4 triangles équilatéraux identiques et de 4 hexagones réguliers identiques. C'est l'intersection de deux tétraèdres.Chacun de ses sommets est commun à un triangle équilatéral et deux hexagones.

Application: Calcul des angles dièdres du cuboctaèdre.





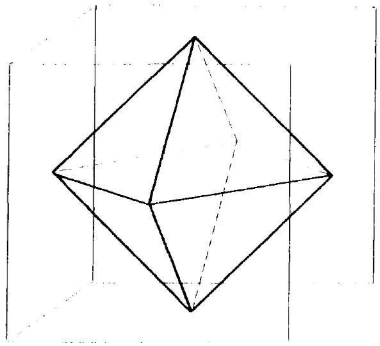
Le cuboctaèdre est l'intersection d'un cube et d'un octaèdre représenté ci-contre .

L'angle dièdre d'arête AB des faces ABC et ABDE peut se déduire de l'angle dièdre de l'octaèdre. Il est égal au supplémentaire de l'angle dièdre d'arête A'B' de la face A'B'E' et du carré A'B'C'D'. Ce dernier angle qui est le demi dièdre de l'octaèdre mesure 54°44'. Comme 180° - 54°44' = 125°16' l'angle cherché est de 125°16'.

Exercices: 1) Vérifier pour chacun des polyèdres ci-dessus la formule d'Euler.
2) Calculer les angles dièdres du tétraèdre tronqué et de l'octaèdre tronqué.

3°) LES POLYEDRES DUAUX.

En joignant les centres des faces d'arête commune d'un polyèdre régulier par des segments, on obtient un nouveau polyèdre dont les sommets sont les centres des faces du polyèdre initial et les arêtes sont les segments tracés. On dira que le nouveau polyèdre est un **polyèdre dual** du polyèdre initial. Par exemple:



Les centres des faces du cube déterminent un octaèdre régulier. L'octaèdre régulier est donc le dual du cube.

Réciproquement, le dual de l'octaèdre régulier est le cube, et la relation de dualité est une relation de réciprocité entre les différentes formes de polyèdres réguliers ou semi-réguliers convexes.

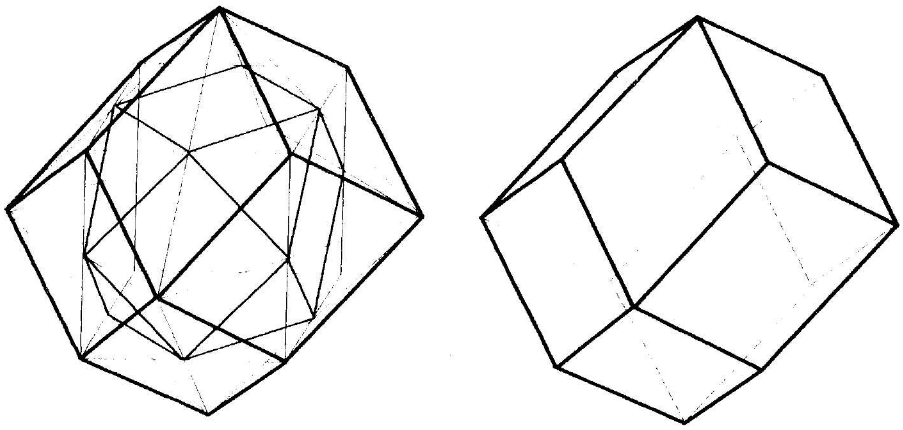
Exercice: Vérifier que le polyèdre dual de chacun des polyèdres réguliers est un de ces polyèdres réguliers.

Remarque: Plus généralement, un polyèdre régulier ou semi-régulier ayant ses sommets sur une sphère, son dual est le polyèdre déterminé par les plans tangents à cette sphère passant par ses sommets.

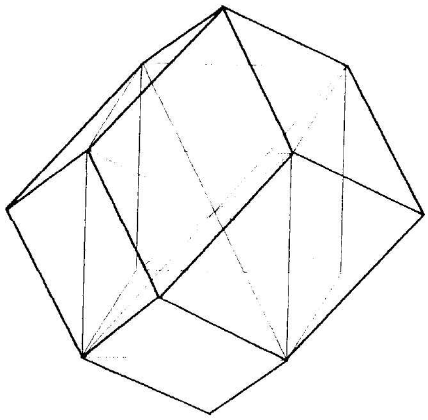
Application: Etude du dual du cuboctaèdre.

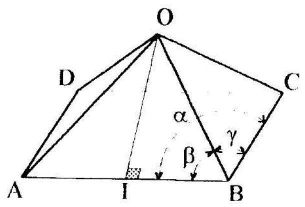
Nous avons déjà vu dans l'application précédente que le cuboctaèdre est l'intersection d'un cube et d'un octaèdre. En joignant chacun des sommets de ce cube aux trois sommets les plus proches de cet octaèdre, comme le montre la figure suivante, on obtient un nouveau polyèdre, dont les faces sont des losanges qui ont leurs centres aux sommets du cuboctaèdre.

Ce nouveau polyèdre, appelé "dodécaèdre rhombique", est le dual du cuboctaèdre. Il a 14 sommets, 12 faces et 24 arêtes. La régularité de sa construction permet d'affirmer que tous ses angles dièdres sont égaux, déterminons leur mesure.



Pour cela, on peut remarquer que le dodécaèdre rhombique peut également s'obtenir en disposant convenablement autour d'un cube les six pyramides à base carrée déterminées à l'intérieur de ce même cube par ses quatre grandes diagonales.





L'angle dièdre du dodécaèdre rhombique est donc l'angle dièdre formé par deux des faces latérales d'une de ces pyramides.

La formule fondamentale du dièdre donne pour cosinus du dièdre: $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

Avec: $\alpha = 90°$, $\cos\beta = \dfrac{BI}{OB} = \cos\gamma$, $\sin\beta = \dfrac{OI}{OB} = \sin\gamma$, où I est le milieu de AB, on obtient:

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{0 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = -\frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

L'angle dièdre est donc 120°.

Exercice: A partir des calculs ci-dessus, déterminer les angles plans de chaque face du dodécaèdre rhombique.

4°) PAVAGES DE L'ESPACE PAR DES POLYEDRES REGULIERS OU SEMI-REGULIERS.

On démontre qu'il n'existe que huit façons de remplir l'espace par des polyèdres réguliers ou semi-réguliers. Cinq d'entre elles n'utilisent qu'une seule famille de polyèdres identiques, les trois autres en utilisent deux. Dans tous les cas, ces polyèdres sont toujours disposés de la même façon autour d'un sommet, d'une arête.

Pavages n'utilisant qu'un seul polyèdre régulier ou semi-régulier. Un pavage de l'espace par des polyèdres réguliers identiques n'est possible que si autour d'une arête on peut juxtaposer un nombre entier de polyèdres réguliers identiques. Il est donc nécessaire que les angles dièdres du polyèdre choisi soient des diviseurs entiers de 360° ou bien qu'en les associant de différentes façons la somme de ces angles dièdres puisse donner 360°.

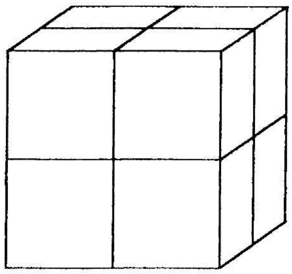
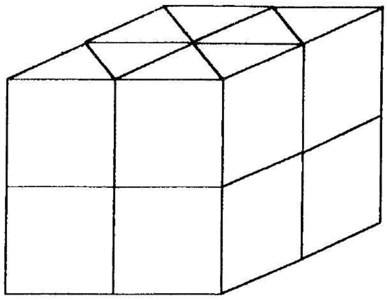
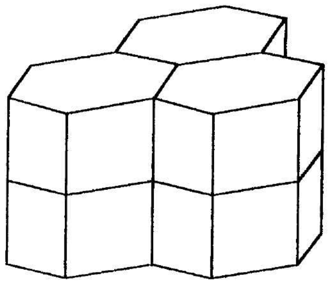
On obtient ainsi des pavages par les polyèdres qui suivent:

-Le cube pour lequel l'angle dièdre est de 90° donne le pavage qui est un modèle classique d'occupation de l'espace.

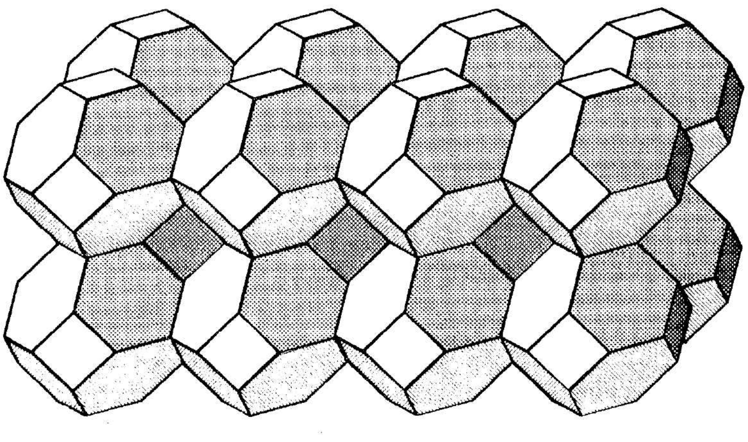
-Le prisme droit dont la base est un triangle équilatéral et dont les angles dièdres sont de 90° et 60°.

-Le prisme droit dont la base est un hexagone régulier et dont les angles dièdres sont de 90° et 120°.

Les trois figures ci-dessous présentent ces trois premiers modèles.

-L'octaèdre tronqué, dont les angles dièdres sont exactement de 125°16' et 109°28' ce qui permet de réaliser 125°16' + 125°16' + 109°28' = 360°, donne le pavage ci-dessous.



-Le dodécaèdre rhombique dont les angles dièdres sont de 120°.

Exercices: 1) A l'aide des résultats obtenus précédemment, vérifier que le pavage par les cubes est le seul possible parmi les polyèdres réguliers.

2) Réaliser par maquette ou par dessin un assemblage de plusieurs dodécaèdres rhombiques permettant un pavage de l'espace.

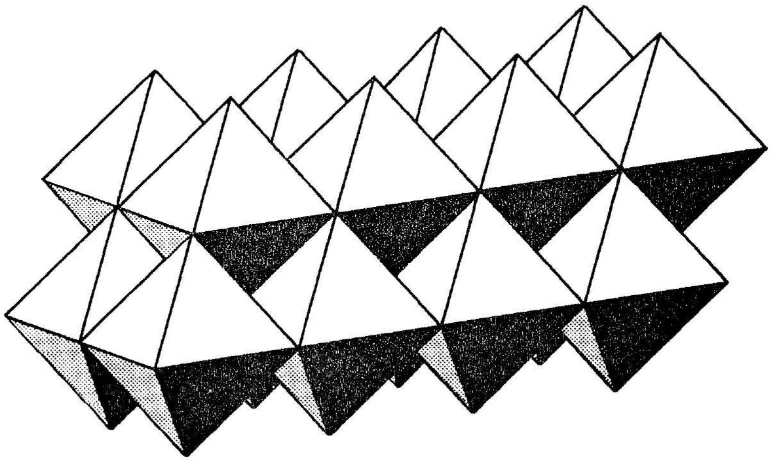
Pavages utilisant deux types de polyèdres réguliers ou semi-réguliers. Toujours pour des raisons analogues de disposition des dièdres autour d'une arête afin de réaliser une somme de 360°, on obtient les assemblages qui suivent.

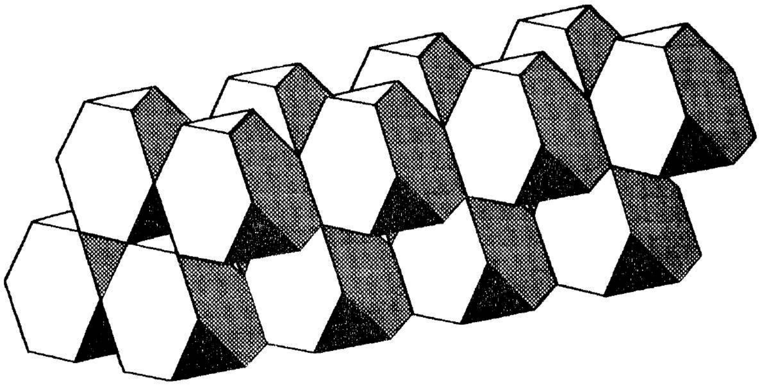
-Tétraèdre et octaèdre, dont les angles dièdres respectifs sont exactement de 70°32' et 109°28'. Leur somme 180° est bien un diviseur de 360°.

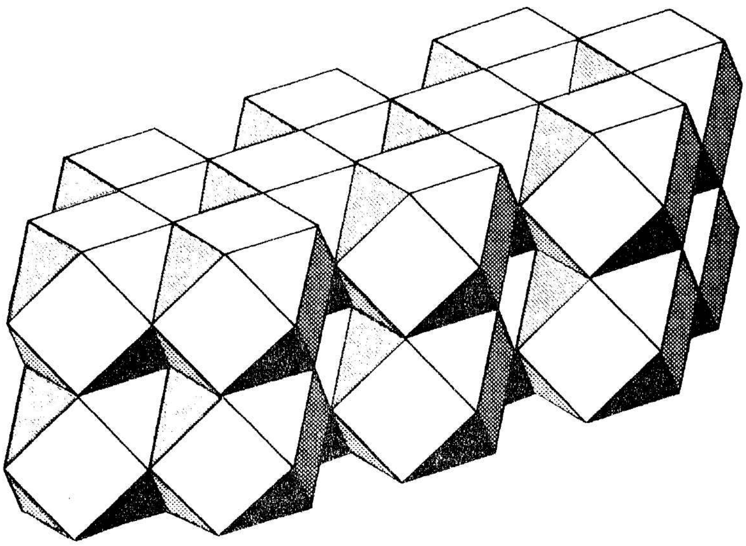
-Tétraèdre et tétraèdre tronqué, dont les angles dièdres respectifs sont exactement de 70°32' et 109°28' comme pour la paire précédente.

-Octaèdre et cuboctaèdre, dont les angles dièdres respectifs sont exactement de 109°28' et 125°16', ce qui permet de réaliser 125°16' + 125°16' + 109°28' = 360°.

Les trois figures qui suivent présentent ces trois pavages.



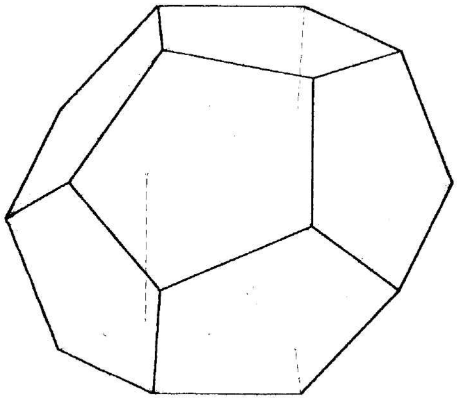


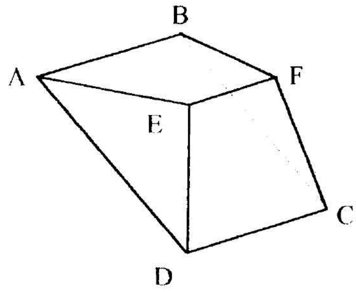


PROBLEMES.

Problème 1: Une étude du dodécaèdre régulier.

Ainsi que le montre la figure ci-dessous, le dodécaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage de six polyèdres identiques sur chacune des six faces d'un cube.





Soit c la longueur de l'arête du cube et a celle de l'arête du dodécaèdre. On a:

$AB = BC = CD = DA = a$ et $AE = BE = CF = DF = c$.

1°) Connaissant les angles du polygone régulier, préciser les angles $B\hat{E}A$, $B\hat{A}E$, $A\hat{E}F$, $E\hat{A}D$. En déduire une relation entre a et c.

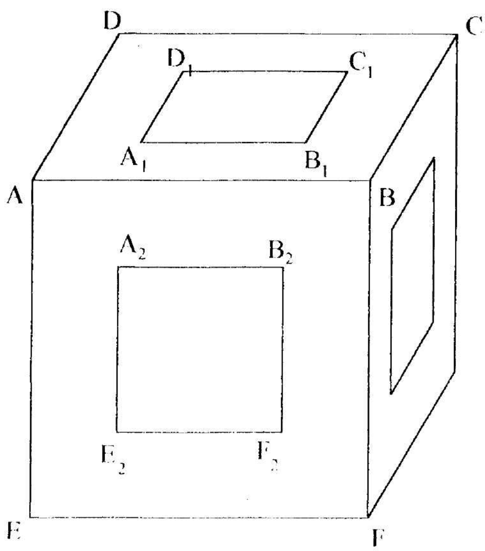
°) Calculer les angles dièdres d'arêtes AB et BC.

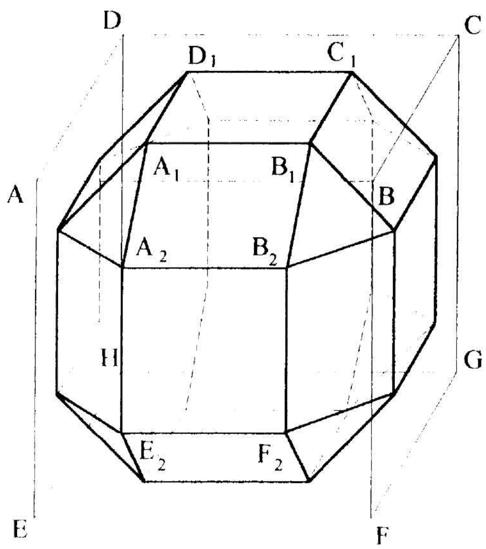
3°) Calculer l'angle dièdre d'arête EF.

Problème 2: Etude d'un polyèdre semi-régulier.

Sur chacune des 6 faces d'un cube, on place un carré dont les côtés sont parallèles aux arêtes du cube, et équidistants de ces arêtes. Par exemple, sur la figure ci-dessous, le carré $A_1B_1C_1D_1$ est tel que ses côtés A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, sont respectivement parallèles à AB, BC, CD, DA, et les distances de AB à A_1B_1, BC à B_1C_1, CD à C_1D_1, DA à D_1A_1, sont les mêmes.

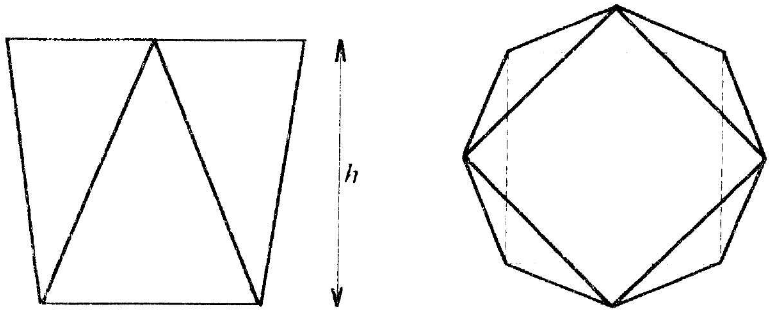
On pose $AB = a$, et $A_1B_1 = c$.





1°) Déterminer une relation entre a et c pour que $A_1B_1 = B_1B_2$. 2° Dans le cas ou $A_1B_1 = B_1B_2$, justifier que le procédé de construction décrit permet de réaliser un polyèdre semi-régulier et calculer ses angles dièdres d'arêtes A_1B_1 et B_1B_2.

Problème 3: Etude d'un anti-prisme, polyèdre semi-régulier.



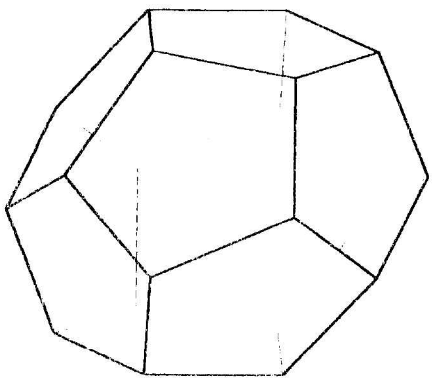
La figure ci-contre représente vu de face et de dessus un polyèdre à 10 faces. Les faces supérieure et inférieure sont des carrés égaux et parallèles qui en vue de dessus ont médianes et diagonales respectives confondues. Les faces latérales sont des triangles isocèles égaux.

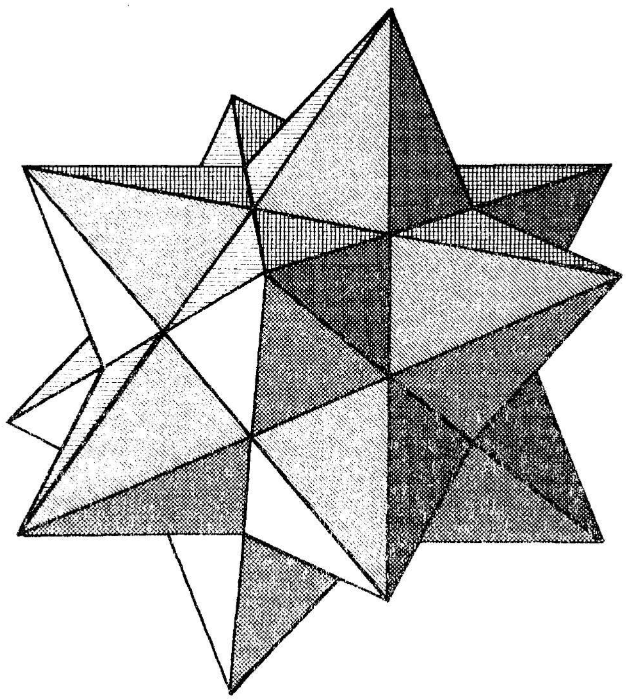
On désigne par h la hauteur (distance entre les faces carrées), et par c la longueur des côtés des carrés

1°) Déterminer une relation entre h et c pour que les faces latérales soient des triangles équilatéraux.

2°) Dans le cas où les faces latérales sont des triangles équilatéraux, justifier que ce polyèdre est un polyèdre semi-régulier et calculer ses divers angles dièdres.

Problème 4: Etude d'un étoilage du dodécaèdre régulier.





En prolongeant les arêtes d'un dodécaèdre, on constate qu'elles concourent par groupes de cinq et forment alors un polyèdre étoilé (et donc non convexe) que l'on nomme petit dodécaèdre étoilé. Ce polyèdre a 12 sommets équidistants 2 à 2 qui sont les sommets d'un icosaèdre.

1°) Calculer les angles plans et angles dièdres du petit dodécaèdre étoilé.

2°) En joignant 2 à 2 les sommets voisins du petit dodécaèdre étoilé, on peut réaliser un autre dodécaèdre étoilé si on laisse subsister les sommets du dodécaèdre initial. Proposer une perspective de cet autre dodécaèdre étoilé.

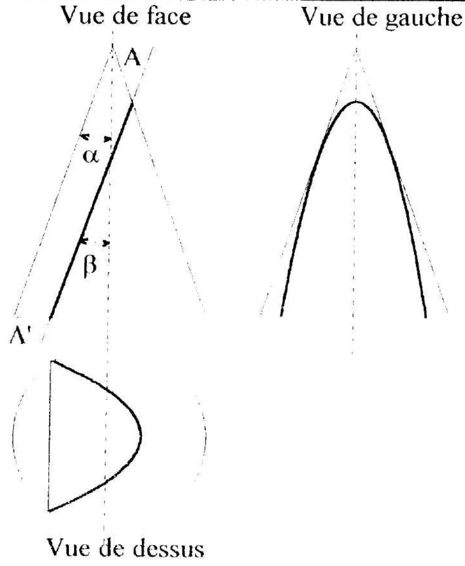
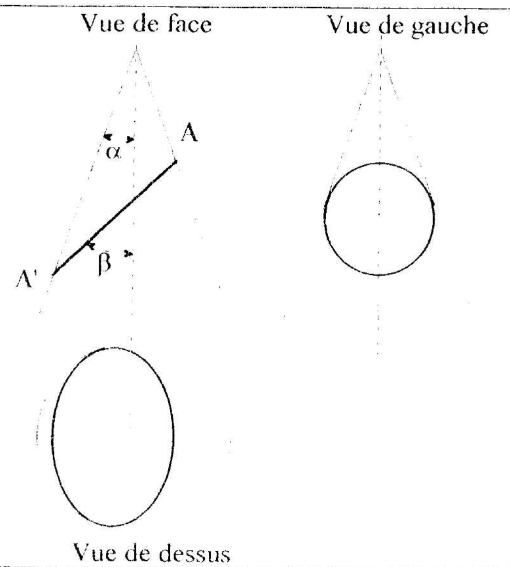
CHAPITRE VII

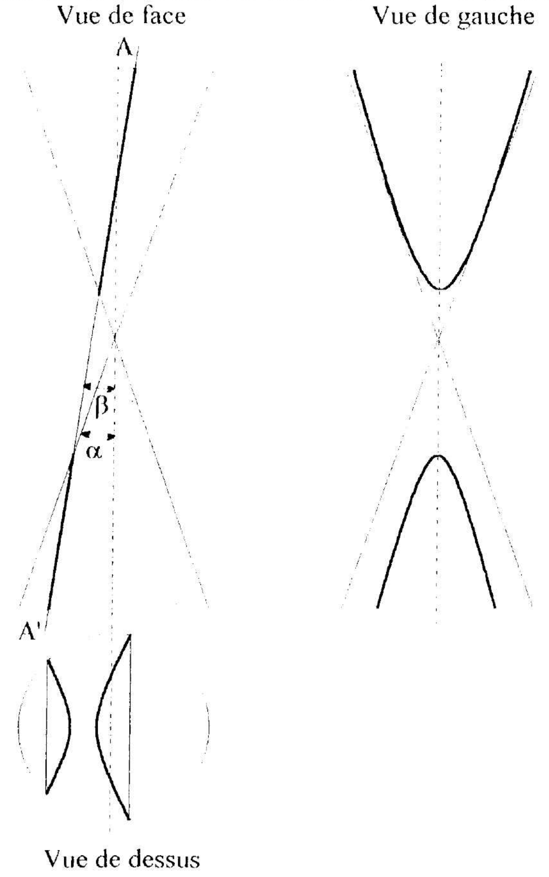
L'ELLIPSE

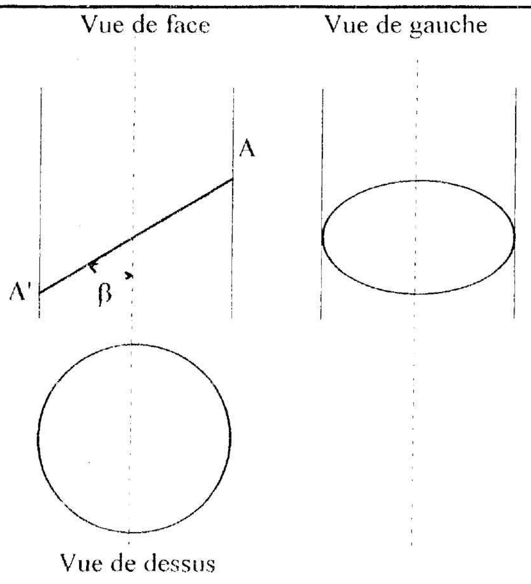
La connaissance des coniques, intersections d'un cône et d'un plan, est incontournable dès qu'il s'agit d'aborder la représentation des corps ronds. L'étude d'autres disciplines, comme la géométrie descriptive ou la perspective, permettra de revenir sur ces questions que nous allons ici simplement ébaucher. Après une brève présentation, l'essentiel du travail proposé concernera l'étude de l'ellipse qui est le plus souvent au centre des problèmes de représentation.

1°) INTERSECTION D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE ET D'UN PLAN.

Toutes les situations qui suivent proposent une vue de face, une vue de dessus et une vue de gauche. Le plan de section qui est de bout (perpendiculaire au plan frontal de projection) est représenté par une droite AA' en vue de face.

Intersection d'un cône et d'un plan:	
	Dans la situation ci-contre, le plan de section est parallèle à une génératrice du cône, $\alpha = \beta$. Le contour de la section est une **parabole**.
	Dans la situation ci-contre, le plan de section n'est plus parallèle à une génératrice du cône, $\alpha < \beta < 90°$. Le contour de la section est une **ellipse**.

	Dans la situation ci-contre, le plan de section ne contient pas l'axe du cône, $0 \leq \beta < \alpha$. Le contour de la section est une **hyperbole**.

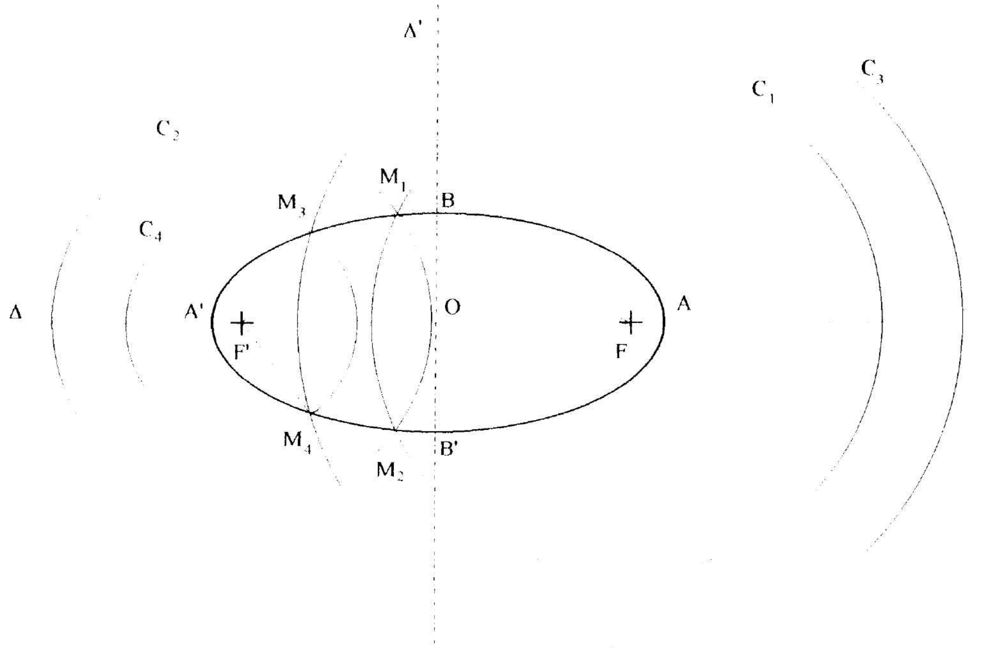
Intersection d'un cylindre et d'un plan:	
	Dans la situation ci-contre, le plan de section est tel que $0 < \beta < 90°$. Le contour de la section est une **ellipse**.

Exercice: Réaliser une maquette pour chacune des intersections d'un cône par un plan.

2°) L'ELLIPSE, LIEU DE POINTS DU PLAN.

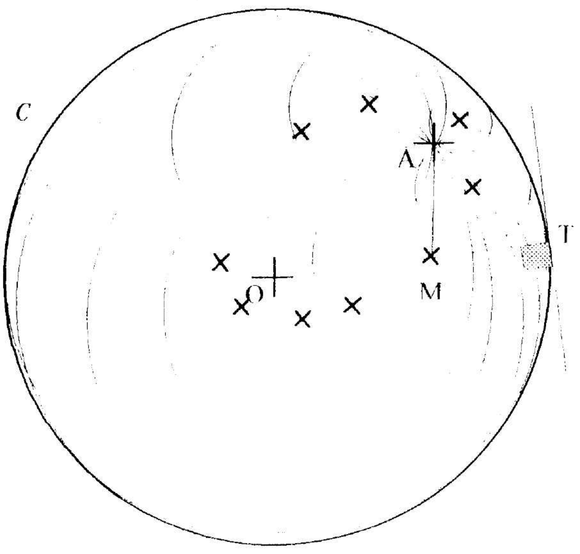
Définition bifocale: On se donne deux points F et F' ainsi qu'un nombre réel d tel que FF' < d. L'ensemble des points M du plan tels que MF + MF' = d est une ellipse de foyers F et F'.

La figure ci-dessous montre la construction de quatre de ces points M. On a tracé un cercle C_1 de centre F et de rayon $r_1 < d$ puis un cercle C_2 de centre F' et de rayon $r_2 = d - r_1$. L'intersection de C_1 et C_2 donne les deux points M_1 et M_2 de l'ellipse. En procédant de même pour les cercles C_3 et C_4 on obtient les points M_3 et M_4.



Conséquences: L'ellipse a deux axes de symétrie Δ et Δ' qui se coupent en O, appelé centre de l'ellipse. Les intersections A, A', B, B' de ces axes de symétrie avec l'ellipse sont appelés les **sommets** de l'ellipse. Les distances AA' = 2a et BB' = 2b sont appelées **grand et petit diamètre** de l'ellipse. Les droites AA' et BB' sont appelées **grand et petit axe** de l'ellipse. On peut remarquer que MF + MF' = 2a.

Application: On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, et un point A intérieur à $\mathcal{C}$. Démontrer que l'ensemble des centres des cercles passant par A et tangents à $\mathcal{C}$ est une ellipse.



Preuve: Soit M un tel centre; le cercle $\mathcal{C}$ et le cercle de centre M passant par A sont tangents en T où ils ont même tangente, ainsi, O, M et T sont alignés et donc OM + MT = r. Ainsi, OM + MA = r. Ce qui prouve que M est sur l'ellipse de foyers O et A.

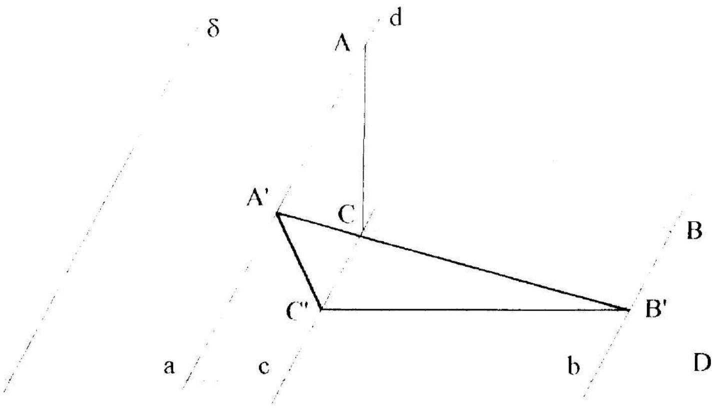
Réciproquement, pour tout point M de cette ellipse, OM + MA = r, donc le cercle de centre M passant par A est tangent à $\mathcal{C}$ car ils ont en commun un unique point T tel que OM + MT = r.

3°) CERCLE ET ELLIPSE.

Affinité: Donnons nous une droite D, une direction δ non parallèle à D et un nombre réel k non nul. Soit un point M du plan, désignons par d la droite de direction δ passant par M et par m son intersection avec D.

On appelle affinité l'application qui à tout M associe le point M' défini par $\overrightarrow{mM'} = k\,\overrightarrow{mM}$. Cette transformation conserve l'alignement et le parallélisme.

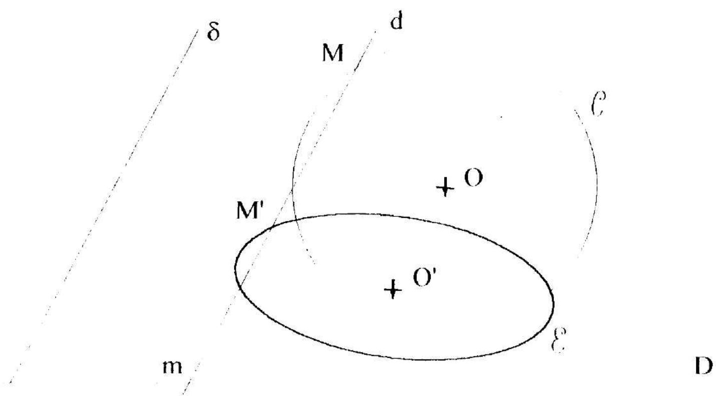
Exemple:



La figure ci-contre représente un triangle ABC et son image A'B'C' dans l'affinité définie par la droite D, la direction δ et le nombre k = 0,5. On a $\overrightarrow{aA'} = 0{,}5\overrightarrow{aA}$, $\overrightarrow{bB'} = 0{,}5\overrightarrow{bB}$ et $\overrightarrow{cC'} = 0{,}5\overrightarrow{cC}$.

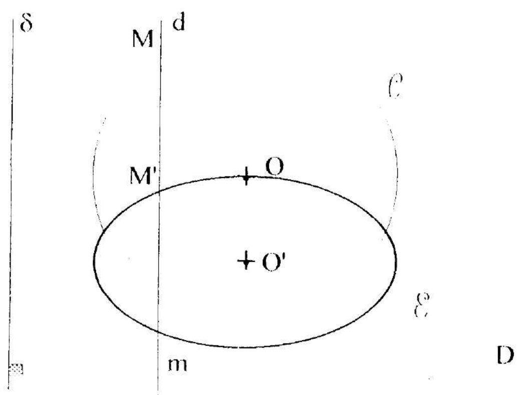
Définition par affinité: On appelle ellipse l'image d'un cercle par une affinité.

Exemples:



1) La figure ci-contre représente un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et son image $\mathcal{E}$ dans l'affinité définie par la droite D, la direction δ et k = 0,5.

$\mathcal{E}$ est une ellipse de centre O', image de O par cette affinité.

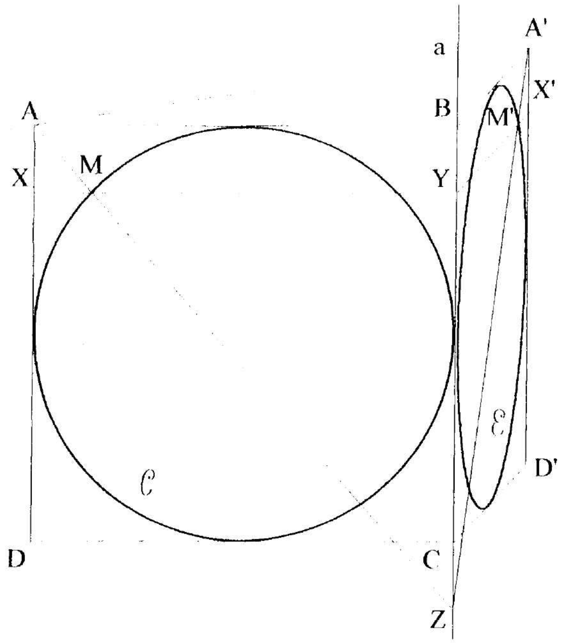


2) La figure ci-contre représente un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et son image $\mathcal{E}$ dans l'affinité définie par D, δ perpendiculaire à D et k = 0,5.

$\mathcal{E}$ est une ellipse de centre O', image de O par cette affinité.

Application: On considère un cube orné de cercles inscrits dans chacune des faces. Montrer qu'en perspective cavalière les représentations de ces cercles pour les deux faces qui ne sont pas frontales sont des ellipses transformées par affinités du cercle qui est dans la face frontale.

Preuve: Considérons la face avant ABCD et la face de droite BA'D'C. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$, repéré dans le carré ABCD par la droite AZ et par la parallèle XY à AB.

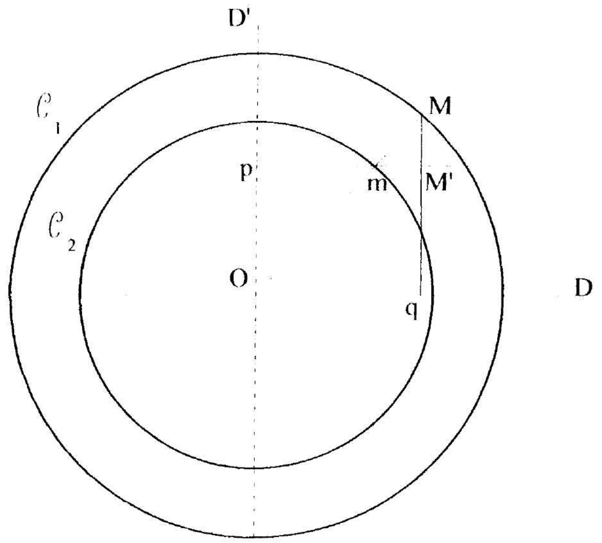


Point de vue spatial: Dans la rotation autour de BD qui amène A en A', l'image de AZ est A'Z et l'image de XY est X'Y. Ainsi le point M a pour image l'intersection M' de A'Z et X'Y.

La rotation étant une isométrie, le point M' est bien un point du cercle de la face de droite (réciproquement tout point M de $\mathcal{C}$ est antécédent d'un point M' du cercle de la face de droite).

Point de vue plan: Dans l'affinité définie par la droite BC, la direction AA', et le rapport $-\frac{aA'}{aA}$, le point A' est l'image de A, et comme BA'D'C est un parallélogramme (conservation du parallélisme), D' est l'image de D. L'image de la droite AZ est la droite A'Z et l'image de la droite XY est la droite X'Y. Le point M' est bien image de M dans cette affinité et l'image $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ est une ellipse.

Exercice: On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même centre O et de rayons r_1 et r_2 différents ($r_1 > r_2$ par exemple). On désigne par D et D' deux diamètres perpendiculaires de ces cercles.



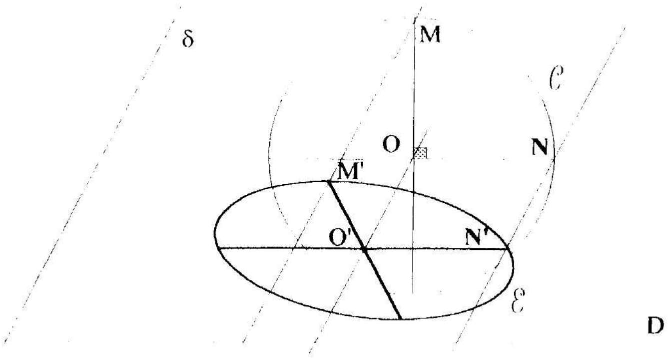
A tout point M de $\mathcal{C}_1$ on associe le point M' obtenu de la façon suivante:
-On trace la droite Mq parallèle à D'.
-On trace la droite OM qui coupe $\mathcal{C}_2$ en m.
-On trace la droite pm parallèle à D.

Le point M' est alors l'intersection de Mq et mp.

Démontrer que la courbe décrite par les points M' est une ellipse, préciser son centre et ses diamètres.

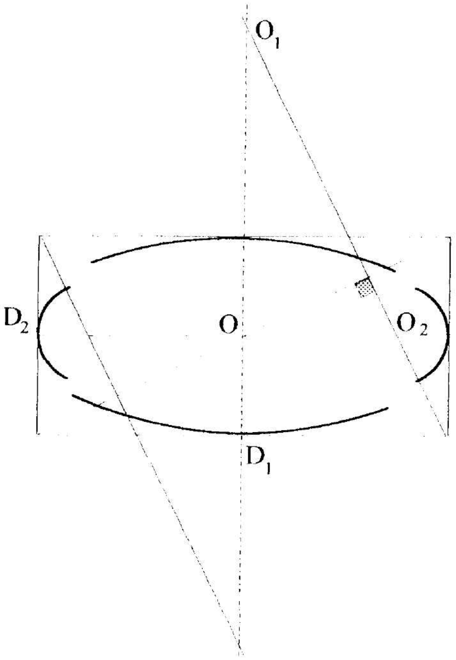
Diamètres conjugués: Une ellipse étant définie par un cercle et une affinité, on appelle diamètres conjugués de cette ellipse les images de deux diamètres perpendiculaires du cercle.

Comme le montre la figure qui suit, des diamètres conjugués d'une ellipse ne sont pas nécessairement perpendiculaires.



Cependant le grand et le petit diamètre d'une ellipse, sont aussi des diamètres conjugués. C'est à dire qu'il existe deux diamètres perpendiculaires du cercles dont les images sont des diamètres conjugués perpendiculaires de l'ellipse.

4°) TRACE APPROCHE DE L'ELLIPSE.



A partir des diamètres 2a et 2b d'une ellipse la construction suivante donne quatre arcs de cercle qui une fois raccordés donnent une très bonne approximation de cette ellipse.

On trace un rectangle de côtés 2a et 2b, et d'axes de symétries D_1 et D_2.

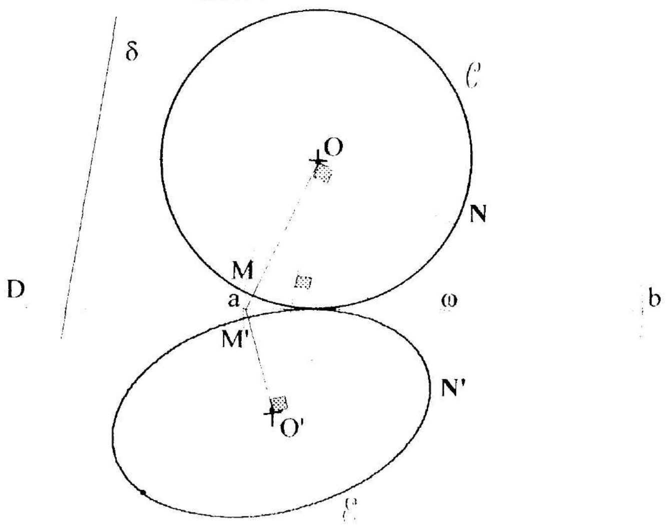
Par un sommet de ce rectangle on trace la perpendiculaire à la diagonale ne passant pas par ce sommet. Cette perpendiculaire coupe les axes D_1 et D_2 en deux points O_1 et O_2.

On obtient deux arcs approchés de l'ellipse en traçant deux arcs de cercles de centres O_1 et O_2 et tangents aux côtés du rectangle. On complète ensuite par symétrie pour obtenir quatre arcs voisins d'arcs de l'ellipse.

Ce tracé approché nécessite donc la connaissance des deux diamètres de l'ellipse alors que, comme nous l'avons vu précédemment, l'affinité ne donne que deux diamètres conjugués quelconques.

L'application qui suit propose une méthode permettant d'obtenir les deux diamètres de l'ellipse à partir de deux diamètres conjugués donnés dans une affinité.

Application: Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et son image $\mathcal{E}$ dans l'affinité définie par la



droite D, la direction δ et l'image O' de O (δ et D n'étant pas perpendiculaires). Construire les axes de symétrie de $\mathcal{E}$.

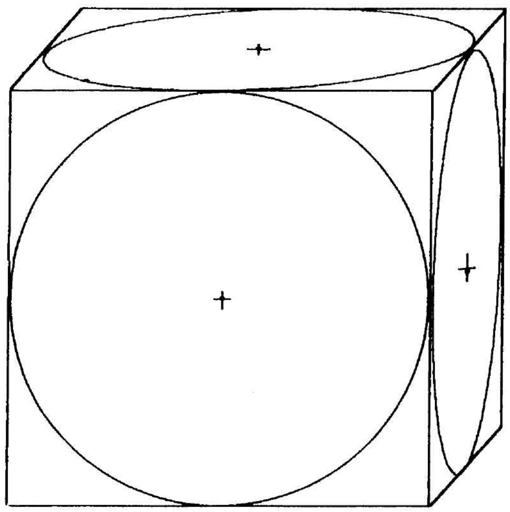
Considérons OM et ON, deux rayons perpendiculaires de $\mathcal{C}$ qui coupent D respectivement en a et b. On nomme M' un points d'intersection de aO' avec $\mathcal{E}$, et N' un points d'intersection de bO' avec $\mathcal{E}$. Dans ces conditions les segments O'M' et O'N' sont portés par deux diamètres conjugués de $\mathcal{E}$.

Comme aOb est un triangle rectangle en O, les segments O'M' et O'N' sont perpendiculaires si et seulement si les points O, a, O' et b sont cocycliques.

Le centre ω du cercle passant par O, a, O' et b est alors le milieu de ab que l'on peut obtenir comme intersection de la médiatrice de OO' avec D.

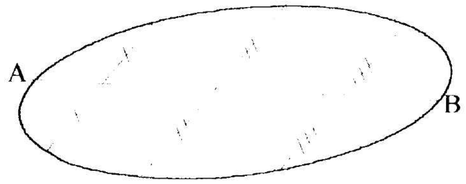
(Sur la figure ci-dessus on a réalisé en pointillés la construction de ω et de là, celles des points a, b, M, N, M', N'.)

Exercice: Retrouver les diamètres des ellipses qui représentent les cercles des faces supérieure et de droite du cube dans la perspective ci-dessous.



PROBLEMES:

Problème 1: Pour retrouver deux diamètres conjugués d'une ellipse.



1°) En utilisant l'affinité, démontrer que les milieux des cordes parallèles d'une ellipse sont alignés et définissent un segment [AB].

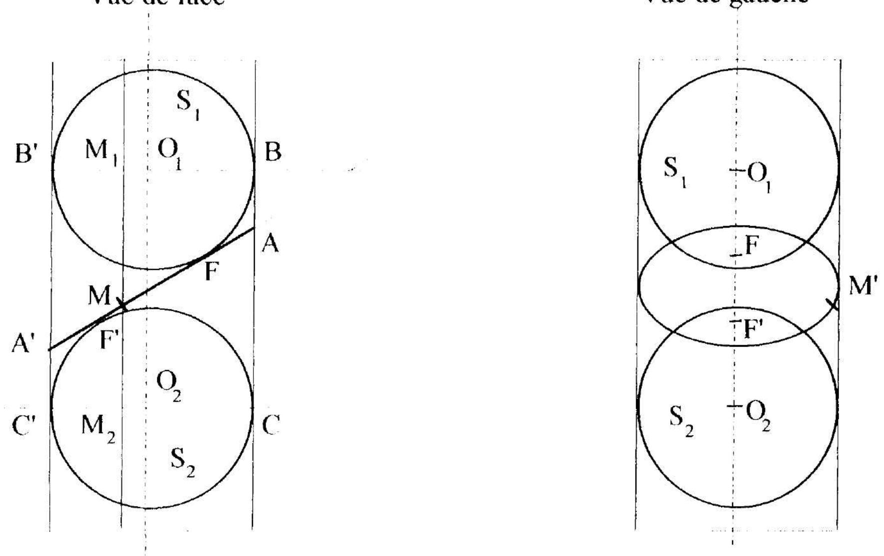
2°) Sachant que parmi toutes les cordes parallèles à une corde donnée figure nécessairement un diamètre, démontrer que [AB] et ce diamètre sont deux diamètres conjugués.

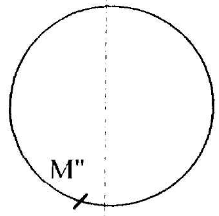
Problème 2: De l'intersection du cylindre et du plan à la définition bifocale.

La figure ci-dessous présente en vue de face, de gauche et de dessus un cylindre d'axe vertical coupé par un plan de bout P qui est représenté par la droite AA' en vue de face.

S_1 et S_2 sont deux sphères de centres O_1 et O_2, tangentes intérieurement au cylindre ainsi qu'au plan sécant P. On appelle F et F' les points de contact respectifs de P avec S_1 et S_2.

Soit Q_1 et Q_2 les plans de bout et horizontaux qui passent respectivement par O_1 et O_2 et représentés par les droites BB' et CC' en vue de face.

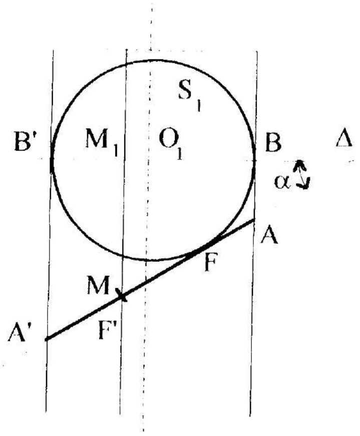




1°) Soit M un point d'intersection du cylindre (noté M sur la vue de face, M' sur la vue de gauche et M" sur la vue de dessus) et de P. La génératrice du cylindre qui passe par le point M coupe Q_1 et Q_2 respectivement en M_1 et M_2. Démontrer en exploitant les propriétés des tangentes à la sphère ayant un point commun que $MM_1 = MF$ et $MM_2 = MF'$ (en vraie grandeur).

2°) Démontrer que la somme $MF + MF'$ est constante.

Problème 3: De l'intersection du cylindre et du plan au cercle et à l'affinité.



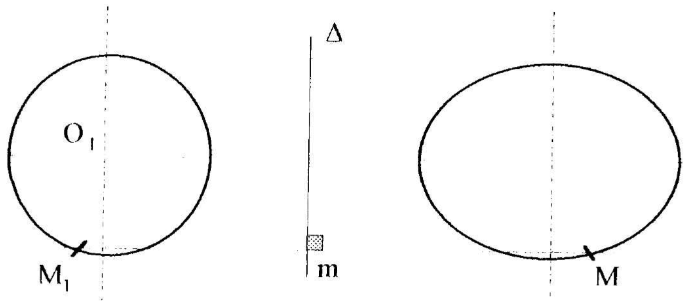
Reprenons pour ce problème la situation décrite dans le problème 1 et dont la vue de face est à nouveau reproduite ci-contre.

On appelle Δ la droite définie par l'intersection des plans P et Q_1.

On désigne par α une mesure de l'angle du dièdre d'arête Δ et dont les faces sont les demi plans Q'_1 et P' qui contiennent respectivement les points M_1 et M.

Dans une rotation autour de Δ, il est possible d'amener M dans le plan Q'_1 de sorte que le demi plan Q'_1 forme avec P' un dièdre plat.

La figure suivante représente ce dièdre plat en vue de dessus. On a représenté la droite Δ, le cercle intersection de la sphère S_1 et du plan Q_1, ainsi que l'ellipse intersection du cylindre et du plan P. La droite M_1M est perpendiculaire à Δ et la coupe en m.



Démontrer que chaque point de l'ellipse est l'image d'un point du cercle dans une affinité que vous préciserez.

CHAPITRE VIII

COMPLEMENTS D'ALGEBRE ET DE TRIGONOMETRIE

1°) EQUATIONS DU SECOND DEGRE.

Ce sont les équations d'inconnue x de la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b, c sont des nombres réels, $a \neq 0$. Un rapide calcul peut montrer que dans ces conditions:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

En désignant par Δ le nombre b^2-4ac, on obtient $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut alors s'écrire $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$. Suivant la valeur de Δ on distingue trois cas.

A retenir: Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$. Cette équation s'écrit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$.

Lorsque $\Delta>0$ elle devient $\left(x+\frac{b-\Delta}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\Delta}{2a}\right)=0$ et admet deux solutions

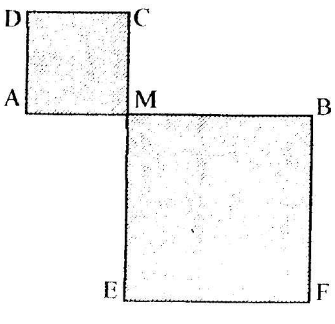
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Lorsque $\Delta=0$ cette équation devient $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Elle a une unique solution $x=\frac{-b}{2a}$.

Lorsque $\Delta<0$ il est certain que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et l'équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ ne peut avoir de solution.

Remarque: Dans le cas particulier où b est pair il est possible de travailler, en posant $b'=\frac{b}{2}$ avec $\Delta'=b'^2-ac$. Si $\Delta>0$ on a alors $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Application:



Sur un segment AB de 10cm on place un point M tel que AM = x. On construit ensuite comme le montre la figure ci-contre deux carrés AMCD et BMEF et on s'intéresse à la surface hachurée.

1) Peut-elle être égale à 75cm^2 ?
2) Peut-elle être égale à 50cm^2 ?
3) Peut-elle être égale à 25cm^2 ?

Désignons par S cette surface, $S = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

1) S = 75 devient $2x^2 - 20x + 25 = 0$. En posant $\Delta = 20^2 - 4 \times 2 \times 25$, comme $\Delta > 0$, on obtient dans ce cas deux solutions $x_1 = \frac{20 - \sqrt{200}}{2 \times 2} = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{20 + \sqrt{200}}{2 \times 2} = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

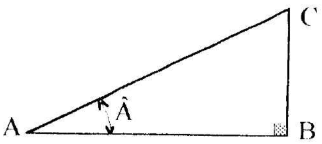
2) S = 50 devient $2x^2 - 20x + 50 = 0$. En posant $\Delta = 20^2 - 4 \times 2 \times 50$, comme $\Delta = 0$, on obtient une seule solution $x = \frac{20}{2 \times 2} = 5$.

3) S = 25 devient $2x^2 - 20x + 75 = 0$. En posant $\Delta = 20^2 - 4 \times 2 \times 75$, comme $\Delta < 0$, le problème n'a pas de solution.

Exercice: Résoudre les équations suivantes.

① $2x^2 - 5x = 0$, ② $-3x^2 - 20x + 25 = 0$, ③ $3x^2 - 24 = 0$, ④ $x^2 + x - 1 = 0$,
⑤ $3x^2 - 5x + 1 = 0$, ⑥ $-3x^2 + 2x - 5 = 0$, ⑦ $3x^2 + 25 = 0$, ⑧ $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$.

2°) LIGNES TRIGONOMETRIQUES D'UN ANGLE AIGU.



Considérons un triangle ABC rectangle en B et désignons par $\hat{A}$ l'angle $B\hat{A}C$. On appelle:

-Sinus de l'angle $\hat{A}$ le rapport de la longueur du côté BC (côté de l'angle droit opposé à $\hat{A}$) à la longueur de l'hypoténuse CA. On note $\mathbf{sin\hat{A}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AC}}$.

-Cosinus de l'angle $\hat{A}$ le rapport de la longueur du côté AB (côté de l'angle droit adjacent à $\hat{A}$) à la longueur de l'hypoténuse CA. On note $\mathbf{cos\hat{A}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}$.

-Tangente de l'angle $\hat{A}$ le rapport de la longueur du côté BC (opposé à $\hat{A}$) à la longueur du côté AB (adjacent à $\hat{A}$). On note $\mathbf{tan\hat{A}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AB}}$.

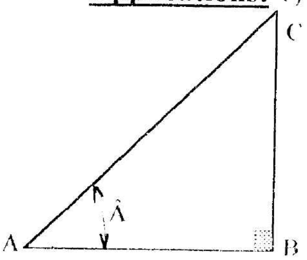
Remarques: 1) Ces trois rapports sont des nombres positifs.

2) Comme $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $(\cos\hat{A})^2 + (\sin\hat{A})^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1$.

3) $\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \tan\hat{A}$.

Ainsi la connaissance d'un seul de ces rapports permet le calcul des autres, et permet également le calcul des lignes trigonométriques de l'angle $\hat{C}$.

Applications: 1) Triangle rectangle isocèle.

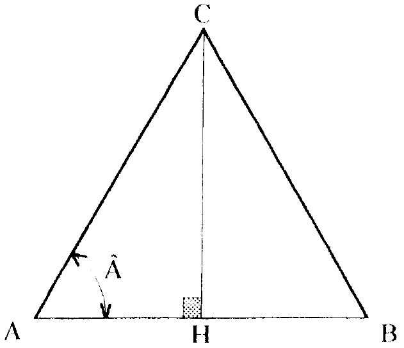


Dans ce cas $\hat{A} = \hat{C} = 45°$ et AB = BC = c et $AC = c\sqrt{2}$.

Ainsi $\sin\hat{A} = \sin\hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puis

$\cos\hat{A} = \cos\hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan\hat{A} = \tan\hat{C} = 1$.

2) Triangle équilatéral.



Dans ce cas $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$ et AB = BC = AC = c et, en désignant par H le pied de la hauteur issue de C, on obtient $AH = \frac{1}{2}c$ et $CH = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

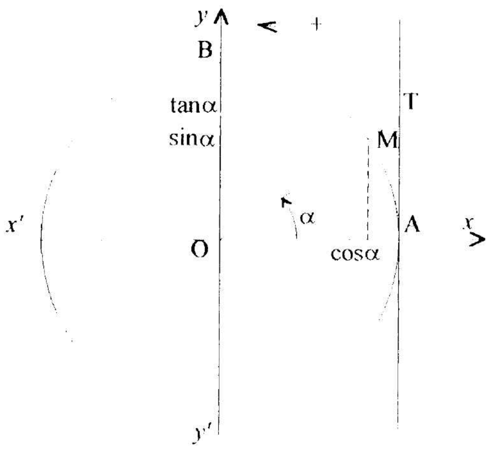
Ainsi $\sin\hat{A} = \frac{CH}{AC} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\hat{A} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}$

et $\tan\hat{A} = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$.

En désignant par $\hat{C}_1$ l'angle $A\hat{C}H$, $\hat{C}_1 = 30°$, on obtient $\sin\hat{C}_1 = \frac{1}{2}$, $\cos\hat{C}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\hat{C}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3°) LES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Les définitions utilisées ci-dessus présentent l'inconvénient de n'être valables que pour un angle aigu. Elles peuvent être étendues à d'autres valeurs angulaires lorsque intervient la notion d'angle orienté.



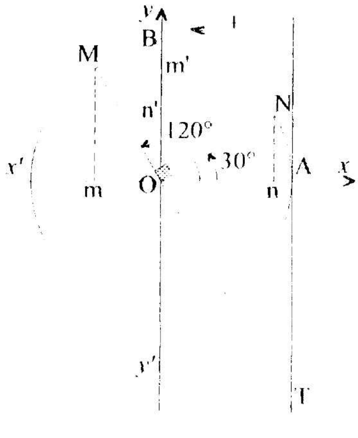
Dans un repère orthonormé orienté par le sens proposé sur la figure ci-contre et dont les unités en abscisses et ordonnées sont OA et OB, on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et rayon 1.

Soit M un point de ce cercle, on désigne par α l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et par T le point d'intersection de la droite OM et de la tangente en A au cercle trigonométrique. On appelle:

-Cosinus de α l'abscisse de M.
-Sinus de α l'ordonnée de M.
-Tangente de α l'ordonnée de T.

Remarque: Comme OM = 1, pour $0 < \alpha < 90$ on retrouve les définitions des lignes trigonométriques du précédent paragraphe.

Application: Recherche des sinus, cosinus et tangente de 120°.



Sur la figure ci-contre les points M et N du cercle trigonométrique sont définis par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 120°$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = 30°$. Ainsi $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 30°$ et les rectangles OnNn' et Om'Mm sont superposables.

On peut en déduire que l'abscisse de M est égale à l'opposé de l'ordonnée de N, et que l'ordonnée de M est égale à l'abscisse de N.

Les résultats de l'application précédente donnent alors

$\cos 120° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$, $\sin 120° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et enfin $\tan 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice: En procédant comme dans l'application ci-dessus, déterminer les sinus, cosinus et tangente de 135°, 150°, -30°, -120°. Quels sont les sinus, cosinus et tangente de 0° ? de 90° ? de 180°?...quand ils existent.

4°) PETIT FORMULAIRE TRIGONOMETRIQUE.

On peut avoir recours dans certaines circonstances à certaines formules déjà obtenues, c'est le cas de $\boxed{(\cos\hat{A})^2 + (\sin\hat{A})^2 = 1}$ ou de $\boxed{\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \tan\hat{A}}$.

On peut également démontrer les résultats suivants:

$$\boxed{1 + (\tan\hat{A})^2 = \frac{1}{(\cos\hat{A})^2}}$$

$$\boxed{\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos\hat{A} \times \cos\hat{B} - \sin\hat{A} \times \sin\hat{B}} \qquad \boxed{\cos(\hat{A} - \hat{B}) = \cos\hat{A} \times \cos\hat{B} + \sin\hat{A} \times \sin\hat{B}}$$

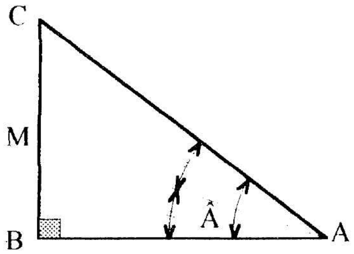
$$\boxed{\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin\hat{A} \times \cos\hat{B} + \cos\hat{A} \times \sin\hat{B}} \qquad \boxed{\sin(\hat{A} - \hat{B}) = \sin\hat{A} \times \cos\hat{B} - \cos\hat{A} \times \sin\hat{B}}$$

$$\boxed{\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\tan\hat{A} + \tan\hat{B}}{1 - \tan\hat{A} \times \tan\hat{B}}} \qquad \boxed{\tan(\hat{A} - \hat{B}) = \frac{\tan\hat{A} - \tan\hat{B}}{1 + \tan\hat{A} \times \tan\hat{B}}}$$

$$\boxed{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} = 2 \times \sin\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \times \cos\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}} \qquad \boxed{\sin\hat{A} - \sin\hat{B} = 2 \times \cos\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \times \sin\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} = 2 \times \cos\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \times \cos\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}} \qquad \boxed{\cos\hat{A} - \cos\hat{B} = 2 \times \sin\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \times \sin\frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}}$$

Exercice:



On considère un triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4, BC = 3 et AC = 5. La bissectrice de l'angle BÂC noté Â coupe BC en M.

Calculer les longueurs BM et AM.

RESULTATS DES EXERCICES DU CHAPITRE VIII.

Equations du second degré.

① $2x^2 - 5x = 0$

s'écrit $2x(x - \frac{5}{2}) = 0$ donc $x = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$.

② $-3x^2 - 20x + 25 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 400 + 300 = 700$

d'où $x = \dfrac{-10 + 5\sqrt{7}}{3}$ ou $x = \dfrac{-10 - 5\sqrt{7}}{3}$.

③ $3x^2 - 24 = 0$ s'écrit $3(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$ donc $x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$.

④ $x^2 + x - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

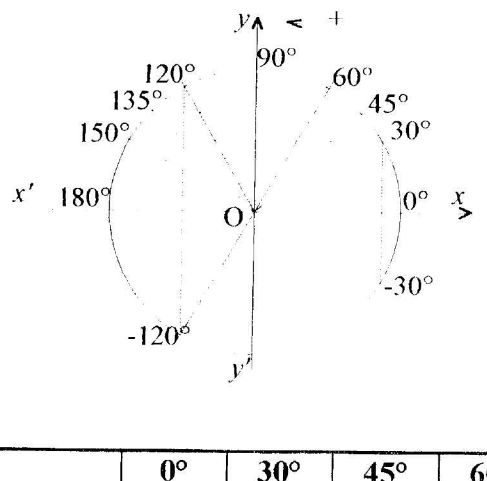
⑤ $3x^2 - 5x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 12 = 13$ d'où $x = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{6}$ ou $x = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{6}$.

⑥ $-3x^2 + 2x - 5 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 60 = -56$ et donc n'a pas de solution.

⑦ $3x^2 + 25 = 0$ ne peut avoir de solution car $3x^2 + 25 > 0$ quel que soit x.

⑧ $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 24 - 24 = 0$ et pour seule solution $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

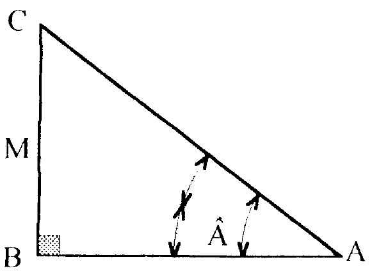
Trigonométrie, calculs de sinus, cosinus et tangentes.



En s'appuyant sur le cercle trigonométrique, les coordonnées des points, et les valeurs déjà établies pour 30°, 45°, 60°, on obtient les résultats suivants.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	-30°	-120°
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

Trigonométrie, calculs dans un triangle.



Par définition dans le triangle ABC, $\cos\hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$,

or, $\cos\hat{A} = \cos\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{A}}{2}\right) = \left(\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)^2$

donc $\cos\hat{A} = \left(\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)^2 - \left(1 - \left(\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)^2\right) = 2\left(\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)^2 - 1$.

Ainsi, $\left(\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)^2 = \frac{9}{10}$.

Comme $0 < \frac{\hat{A}}{2} < 90°$ on sait que $\sin\frac{\hat{A}}{2} > 0$ et $\cos\frac{\hat{A}}{2} > 0$, on obtient donc $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

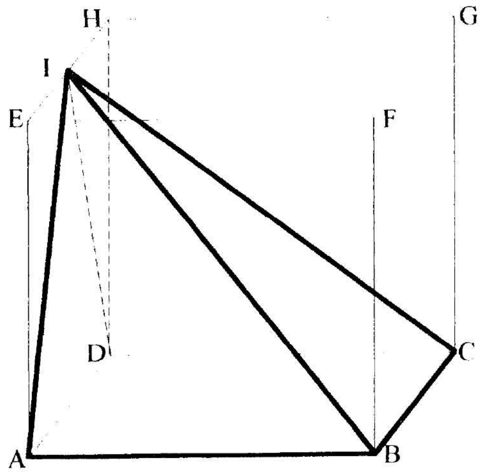
Or $\cos\frac{\hat{A}}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{AB}{AM}$, et donc $AM = \frac{4\sqrt{10}}{3}$.

Enfin en posant $\left(\tan\frac{\hat{A}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\cos\frac{\hat{A}}{2}\right)^2} - 1 = \frac{1}{9}$ on a $\tan\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1}{3} = \frac{BM}{AB}$, d'où $BM = \frac{4}{3}$.

CHAPITRE IX

PROBLEMES D'EXAMEN

PROBLEME 1:



Partie I: ABCDEFGH est un cube d'arête ℓ et I est le milieu de [EH].

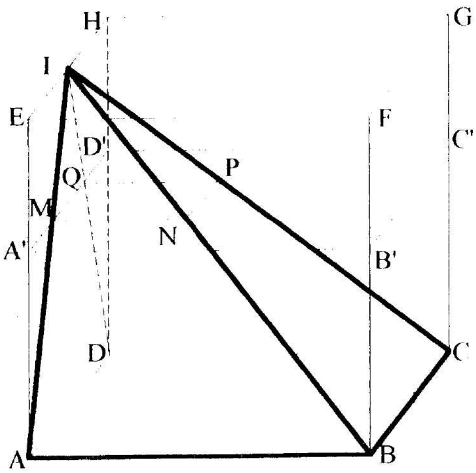
Etude de la pyramide ABCDI.

1°) Face AID: exprimer en fonction de ℓ les longueurs IA, ID, calculer ensuite les sinus et cosinus de l'angle $\widehat{IAD}$.

2°) Face AIB: exprimer en fonction de ℓ la longueur IB, calculer ensuite les sinus et cosinus de l'angle $\widehat{IBA}$.

3°) Face CIB: calculer les sinus et cosinus de l'angle $\widehat{IBC}$.

4°) Calculer l'angle dièdre des plans ABI et IBC.

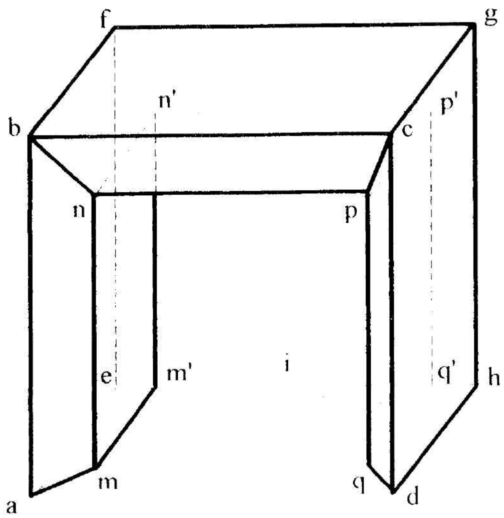


Partie II: On coupe le cube ABCDEFGH par un plan A'B'C'D' parallèle à ABCD. La pyramide ABCDI est alors coupée suivant le quadrilatère MNQP.

On pose EA' = FB' = GC' = HD' = h.

1°) Justifier que MNPQ est un carré.

2°) Calculer en fonction de h la longueur du côté de ce carré.



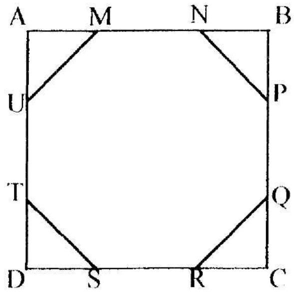
Partie III: La figure ci-contre représente une arche dont les parties I et II ci-dessus ont permis de mettre en évidence certaines propriétés (abcdefgh et mnpqm'n'p'q' sont des cubes, i est le milieu de [eh] et de [m'q']).

1°) A l'aide des résultats obtenus préciser les angles dièdres des plans amn et nmm', puis bnp et n'np, enfin bnm et bnp.

2°) Les cubes extérieur et intérieur ayant pour arêtes ℓ et h calculer le volume de cette arche en fonction de ℓ et h.

On rappelle que le cosinus d'un angle dièdre est donné par $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

PROBLEME 2:

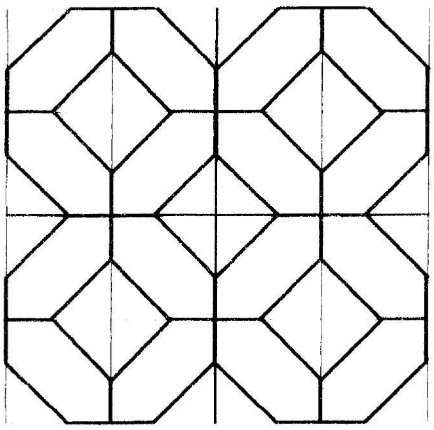


Préliminaires: ABCD est un carré de côté c. Sur chacun de ses côtés on a placé deux points M et N, P et Q,,R et S, T et U, tels que:

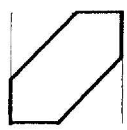
$$AM = NB = BP = QC = CR = SD = DT = UA = x.$$

Justifier que MNPQRSTU est un octogone régulier lorsque:

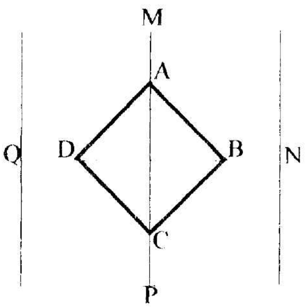
$$x = \frac{c(2-\sqrt{2})}{2} \quad \text{et} \quad MN = c(\sqrt{2}-1)$$



Partie I: On réalise un pavage dont les motifs font apparaître octogones réguliers et carrés (une partie est présentée ci-contre). Les éléments de base sont des carrés 20x20 cm présentant deux axes de symétrie suivant leurs diagonales.



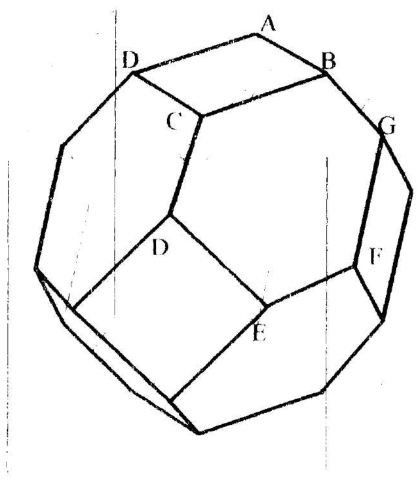
1°) Quelle sera la longueur des côtés de l'octogone régulier?
2°) Sur le pavage ainsi réalisé, quelle sera la largeur de l'intervalle séparant deux motifs carrés?



Partie II: Sur chaque face d'un cube d'arête c, on place sur les médianes [MP] et [NQ] quatre points A, B, C, D situés à la même distance des côtés, de façon à obtenir un carré

On pose $AM = BN = CP = DQ = \dfrac{c(2-\sqrt{2})}{2}$

1°) Calculer en fonction de c la longueur du côté du carré ABCD.

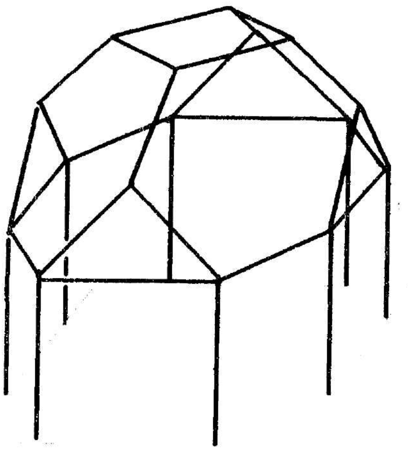


2°) En joignant deux à deux les extrémités de ces carrés on peut alors réaliser un polyèdre à quatorze faces dont six carrées et huit hexagonales.

a) Calculer en fonction de c la longueur BG. L'hexagone BCDEFG est-il régulier?

b) Donner une méthode permettant de calculer en fonction de c la longueur CG.

c) Comment évaluer le dièdre d'arête BG?...et celui d'arête BC?



3°) A partir du polyèdre étudié dans la question précédente, on réalise la structure ci-contre. Sa partie supérieure est constituée de la moitié supérieure de ce polyèdre, elle repose sur huit piliers verticaux dont les bases sont sur le contour de la face inférieure du cube circonscrit. Ce cube a 10 m d'arête.

a) Démontrer que la base est un octogone régulier.

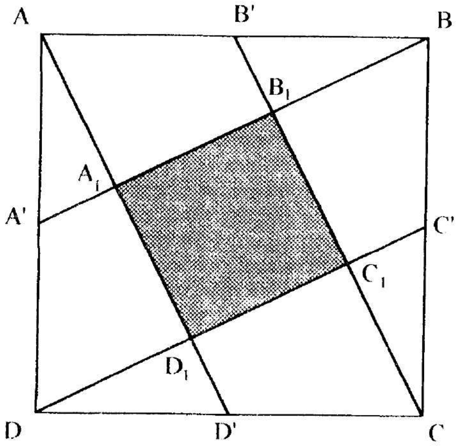
b) Faire un croquis côté de l'ensemble vu de dessus.

c) Tous les segments dessinés étant réalisés en tube, quelle est la longueur totale nécessaire à la construction?

PROBLEME 3:

Le problème qui suit a été découpé en quatre parties. Les deux premières permettent l'obtention de résultats sur une figure plane, les suivantes utilisent ces résultats dans des situations spatiales.

Partie 1:



Sur la figure ci-contre ABCD est un carré, A', B', C', D' sont les milieux de ses côtés, A_1, B_1, C_1, D_1 sont les points d'intersection des segments qui joignent les sommets aux milieux des côtés. Il s'agit ici d'évaluer la surface de ABCD par rapport à celle de $A_1B_1C_1D_1$.

1°) Justifier que $A_1B_1 = B_1B$ et que $B_1B' = \frac{1}{2}AA_1$.

2°) Comparer les surfaces suivantes:

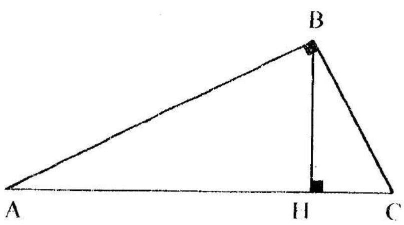
a) $A_1B_1C_1D_1$ et BB_1B'.

b) BB_1B' et BA_1A.

c) BA_1A et $A_1B_1C_1D_1$.

3°) Conclure en évaluant la surface de ABCD par rapport à celle de $A_1B_1C_1D_1$.

Partie 2: Soit ABC un triangle rectangle en B et H le pied de sa hauteur issue de B. On connaît les longueurs BC = a et AB = 2a.



1°) Calculer en fonction du nombre a:

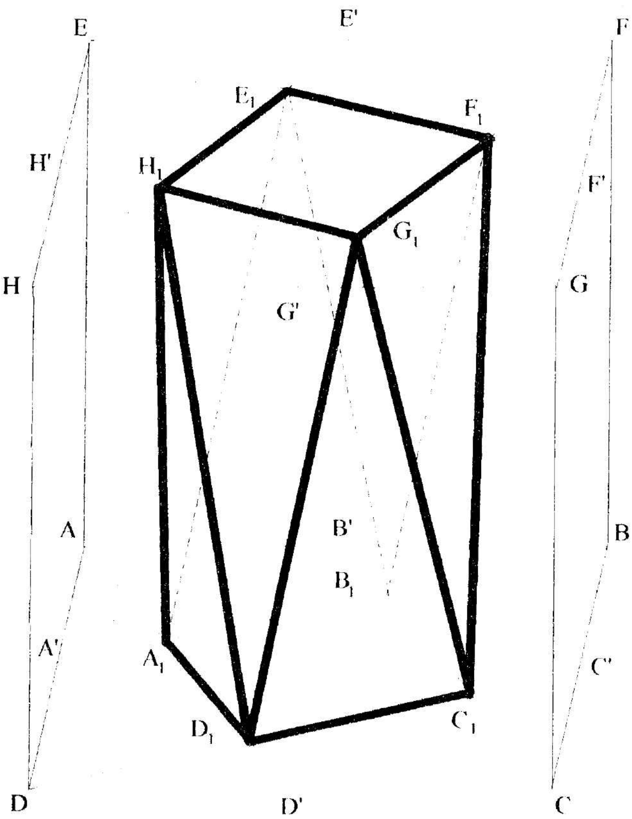
a) La surface de ABC.

b) La longueur AC.

c) La longueur BH.

2°) Calculer les longueurs BC, BA, BH lorsque AC = 10cm puis lorsque AC = 5cm.

Partie 3:



Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube de 10cm d'arête. Sur les faces supérieure et inférieure on a réalisé des tracés selon des méthodes comparables à celle décrite dans la partie 1. Ainsi, A', B', C', D', E', F', G', H' sont des milieux d'arêtes, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ sont les points d'intersection des segments qui joignent les sommets aux milieux de ces arêtes. L'objet représenté en traits épais se nomme un antiprisme. Il a 2 faces qui sont des carrés et 8 faces qui sont des triangles.

Les calculs effectués dans les exercices précédents permettent d'affirmer que chacun des points $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ se situe par rapport aux arêtes les plus proches et à 2cm de l'une et 4cm de l'autre (Par exemple la distance de A_1 à AD est 2cm, et celle de A_1 à AB est 4 cm).

1°) Réaliser la vue de dessus de cet antiprisme que l'on nommera figure 1.

2°) Calculer la longueur des arêtes A_1H_1 et D_1H_1. Le triangle $D_1H_1A_1$ est-il isocèle? Calculer l'angle $D_1\hat{H}_1A_1$. Calculer la longueur des diagonales C_1H_1 et B_1H_1.

3°) On effectue une coupe de cet antiprisme par un plan vertical passant par les points A_1 et C_1.

a) Représenter ce plan de coupe sur votre figure1.

b) En vous appuyant sur votre figure1, justifier que la section obtenue est un trapèze isocèle.

Partie 4: Il s'agit dans cette partie de représenter en vraie grandeur la section réalisée dans la partie 3. On désigne par I et J les points d'intersection du plan de coupe avec les arêtes E_1H_1 et G_1F_1, et on admet que A_1I et C_1J ont même longueur.

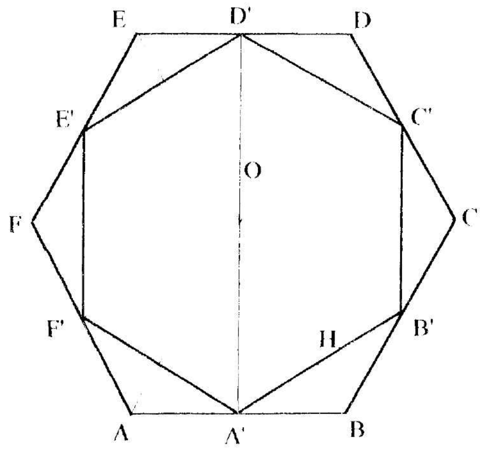
1°) Calculer la longueur A_1C_1.

2°) Proposer une méthode permettant de localiser exactement I et J par rapport aux arêtes du cube. En admettant que I se situe par rapport aux arêtes les plus proches du cube à 20/7cm de l'une et 30/7cm de l'autre calculer A_1I.

3°) Réaliser la section à l'échelle 1/2.

PROBLEME 4:

Le problème qui suit est découpé en trois parties. La première est l'étude d'une configuration plane qui intervient dans chacune des deux autres: analyses de pavages, calculs d'angles et de longueurs dans un polyèdre.



Partie I: ABCDEF est un hexagone régulier de côté r et de centre O. Les points A', B', C', D', E', F' sont les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD, DE, EF, FA. Le point H est le milieu de A'B'.

1°) a) Montrer que $OA' = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ et que $OH = \frac{3}{4}r$.

b) Calculer le rapport des aires $\frac{S(OAB)}{S(OA'B')}$.

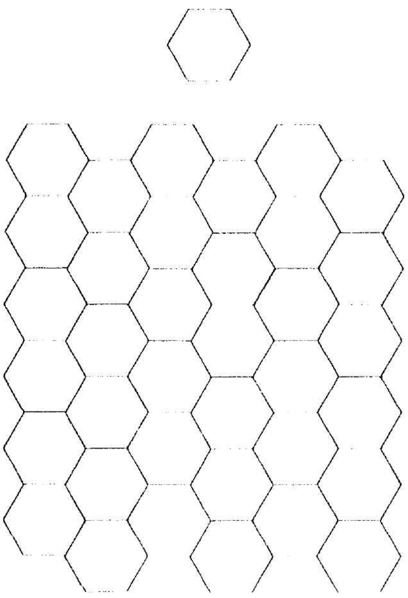
2°) a) Justifier que les triangles sont semblables.

b) En déduire les rapports des aires $\frac{S(AOA')}{S(HBA')}$ et $\frac{S(OAB)}{S(BA'B')}$.

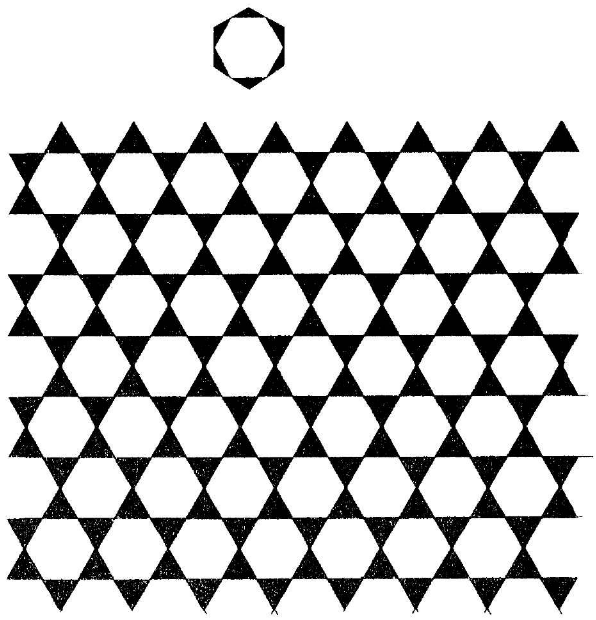
3°) A partir des résultats précédents, évaluer le rapport des aires des hexagones ABCDEF et A'B'C'D'E'F'.

Partie II: A partir de deux modèles de pavés hexagonaux, on réalise deux pavages du plan aux motifs différents. Les figures ci-dessous proposent pour chacun de ces deux pavages, un pavé et un exemple d'occupation du plan.

Pavage 1

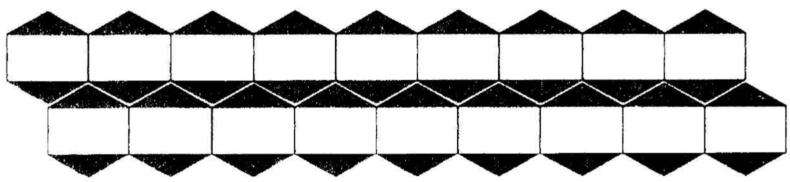


Pavage 2

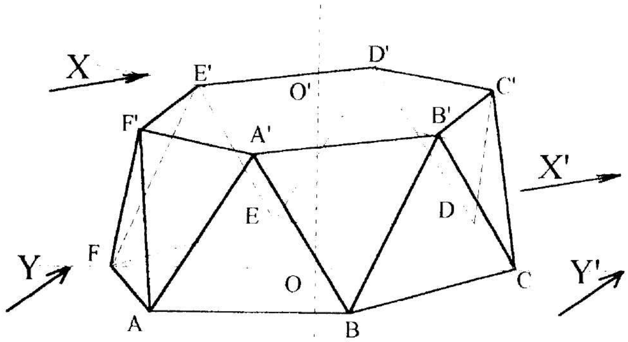


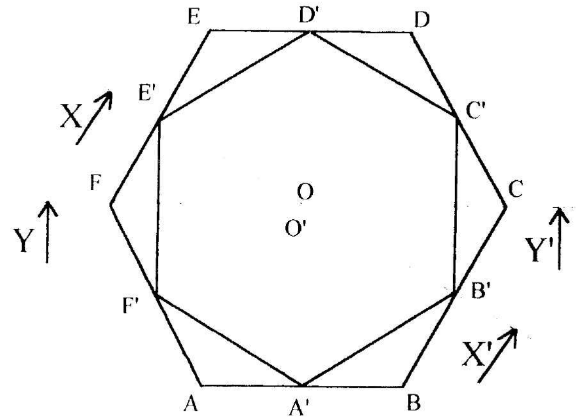
1°) A l'aide de la grille de classement des pavages, donner en justifiant votre choix, le type de chacun de ces deux pavages.

2°) On utilise un troisième modèle de pavé hexagonal suivant la disposition représentée ci-dessous. Quel sera le type de ce pavage?



Partie III: On considère le solide polyèdre représenté ci-dessous en perspective cavalière et en vue de dessus.





ABCDEF et A'B'C'D'E'F' sont des hexagones réguliers situés dans des plans horizontaux. La droite joignant leurs centres O et O' est verticale. Les faces ABA', BCB', CDC', DED', EFE', FAF', sont des triangles équilatéraux de 5 cm d'arête.

1°) Dessiner en vraie grandeur la section de ce polyèdre par un plan vertical XX' passant par B' et E'.

2°) Dessiner en vraie grandeur la section de ce polyèdre par un plan vertical YY' passant par C et F.

3°) Déterminer les angles dièdres d'arêtes respectives BC et B'C' (on pourra les donner soit par leurs mesures en degrés soit par leurs sinus et cosinus ou par leur tangente).

4°) Etude de l'angle dièdre d'arête BB'.

a) On considère le triangle A'B'B. On désigne par H le milieu de A'B', et par $\hat{B}'$ l'angle $A'\hat{B}'B$. Calculer le sinus et le cosinus de l'angle $\hat{B}'$.

b) Soit H' le milieu de BC, justifier que A'B' et B'H sont perpendiculaires. Quelle est la mesure de l'angle $H'\hat{B}'B$?

c) En considérant le trièdre de sommet B', d'arêtes B'A', B'B, B'H', calculer le cosinus de l'angle dièdre d'arête BB' (On rappelle que le cosinus d'un angle dièdre est donné par $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUDIBERT G. (1986): Description des 14 groupes finis d'isométries. Editions IREM-USTL, Montpellier.

AUDIBERT G. (1990): La perspective cavalière. Publication APMEP N°75, Paris.

AUVIN B. & DOBIGEON J.C. (1991): Aires. Publication IREM de Poitiers.

BROSSARD Y. (1977): Rosaces, frises et pavages. Volumes 1 et 2. Editions Cedic, Paris.

COLLONGE M.P. & TREHARD F. (1982): Mosaïques et isométries. Editions Cedic, Paris.

CUNDY H.M. & ROLLET A.P. (1978): Modèles mathématiques. Editions Cedic, Paris.

ERNST B. (1986): Le miroir magique de M.C. Escher. Editions Taco, Berlin.

HADAMAR J. (1898): Leçons de géométrie. Volumes 1 et 2. Nouvelle édition. Editions J. Gabay, Paris.

LUPSIN G. (1943): Trigonométrie sphérique. Editions La Procure, Bruxelles.

MAILLARD R. & MILLET A. (1958): Géométrie- Trigonométrie. Classe de mathématiques. Editions Hachette, Paris.

SCHULMANN J.C. (1976): Polycopié de géométrie constructive. ESA de Paris.

WILLIAMS R. (1979): The géométrical fondation of natural structure. Editions Daver, New-York.

Titre GEOMETRIE POUR L'ELEVE ARCHITECTE.

Auteurs Thierry BERTHOMIER, Freddy BONAFÉ.

Date Juin 1995.

Editeur IREM de MONTPELLIER.

Mots-clés Triangles, aires, polygones, polyèdres, pavages du plan, angles dièdres, pavages de l'espace, ellipse.

Résumé Cette brochure est avant tout destinée aux élèves architectes. Elle doit leur permettre d'aborder les problèmes géométriques que peut rencontrer l'architecte dans l'étude du plan et de l'espace.

Les sujets traités - calculs de longueurs, d'aires, d'angles, occupation du plan, occupation de l'espace, tracés d'ellipses - recouvrent et prolongent presque tous les domaines de la géométrie de l'enseignement secondaire. Les professeurs de Collèges et Lycées peuvent trouver là, matière à de nombreux exercices.

Nombre de pages 78

ISBN 2-909916-11-1