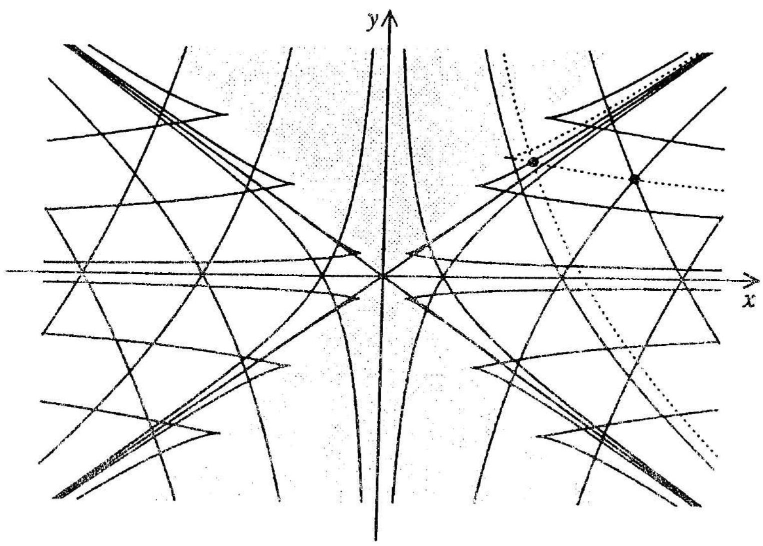
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Université de Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon 34095 MONTPELLIER CEDEX 5
© 67 14 33 83 ou 67 14 33 84, télécopie 67 14 39 09

Des fonctions et des graphes



René BERNARD - Christian FAURE - Maryse NOGUÈS
Yvon NOUAZÉ - Luc TROUCHE

1995

Préface

Dans la continuité des deux précédentes brochures * de notre groupe, nous proposons ici un certain nombre d'activités mathématiques pour les classes de lycée. Certaines concernent seulement les terminales scientifiques, d'autres sont réalisables en seconde ou en première.

Intégrer les calculatrices graphiques aujourd'hui dans un processus de conjectures, preuves, réfutations...

Les thèmes choisis sont divers, leur point commun est d'être toujours centrés sur l'analyse et plus particulièrement sur les fonctions et les graphes ** . L'emploi des calculatrices graphiques est donc très présent : comment pourrait-on négliger des calculatrices qui tracent des courbes, donnent des valeurs approchées de dérivées ou d'intégrales, résolvent avec une "grande" précision équations numériques ou équations différentielles ? Si nous voulons contrôler l'utilisation qu'en font nos élèves, nous devons bien les intégrer dans le cours de mathématiques...
Il ne s'agit pas bien sûr de remplacer la démonstration par la contemplation de l'écran, mais d'intégrer les outils de calcul dans un processus de conjectures, preuves, et réfutations.
C'est ainsi, à notre avis, que peuvent se construire les connaissances des élèves.

Pour préparer les bouleversements de demain !

Les outils de calcul dont il est question ici sont des calculatrices graphiques.
Mais les activités proposées sont adaptables pour qui voudrait travailler avec des ordinateurs, et des logiciels type "Deriv". Cette remarque est d'autant plus importante que nous savons que très bientôt les calculatrices intègreront ces logiciels de calcul formel (dérivation, intégration, factorisation des polynômes...) et bouleverseront ainsi le cours de mathématique...
Nous pensons que cette brochure prépare, modestement, ce renouvellement de l'enseignement de l'analyse. Au lecteur d'en juger !

Une présentation claire pour une utilisation simplifiée

Notre souci ayant aussi été de proposer des activités "prêtes à l'emploi" (même si elles sont toujours révisables et adaptables par l'utilisateur..), chaque activité ou thème de travail est présenté en 4 parties, signalées par un "logo":

---

* "Pour une prise en compte des calculatrices graphiques au lycée", 1993
"Des activités mathématiques en classes scientifiques (1s et Ts)", 1994

** A propos des termes employés notons que dans toute cette brochure les termes de graphe d'une fonction, représentation graphique d'une fonction ou de courbe représentative d'une fonction seront employés indifféremment.

- une introduction qui précise la population visée, l'organisation de la classe et les objectifs de l'activité ;

- une fiche élève (couleur saumon) qui donne l'énoncé du problème et les questions ;

- une partie destinée aux professeurs appelée " élèments de réponse et prolongements" qui rend compte de la solution du problème et donne des indications sur les notions mathématiques plus vastes qui sont sous-jacentes ;

- un bilan, lorsque l'activité a pu être expérimentée dans les classes, sur les sources de difficultés des élèves ou sur leurs réussites. Si à la suite de l'activité une évaluation a été faite, elle sera présentée dans cette partie (précédée du logo ...)

Les activités de cette brochure ont été regroupées en 5 sections, chacune d'elle étant plus précisément axée sur un aspect particulier des graphes et des fonctions. Le tableau suivant récapitule sommairemment le plan adopté ainsi que, pour chacune des activités, leur thème et le niveau des élèves auxquelles elle s'adresse.

Comme pour nos précédentes brochures, nous invitons nos lecteurs attentifs à être indulgents devant les erreurs qui nous auront échappé, et à nous communiquer remarques et commentaires !

Merci d'avance...

René BERNARD, Professeur au lycée Gérard Philipe de Bagnols Sur Cèze
Christian FAURE, Professeur au Lycée Joffre de Montpellier
Maryse NOGUÉS, Professeur au Lycée Louis Feuillade de Lunel
Yvon NOUAZÉ, Professeur à l'Université de Montpellier II
Luc TROUCHE, Professeur au Lycée Joffre de Montpellier

I. Graphes		
I Intersection de droites d'équation y = mx et du graphe de E(x) sur $\mathbb{R}+$	2nd et 1ière	Graphe d'une fonction particulière, droites, inéquations.
II. Notions de zéros d'un polynôme	1ière	Zéros simples et multiples, aspect graphique.
III. Une fonction "overflow"	1ière	Bizarre pour que les choses rentrent dans "l'ordre", il faut calculer...
IV. Etude d'un extrémum	2nd et 1ière	Extrémun, analyse ou/et géométrie ?
V. Une fonction affine par intervalle	2nd et 1ière	Un complément à l'activité précédente
II. Limites		
I. Limite en $+\infty$	1ière et Term.	Des comportements à l'infini et des "images" à corriger.
II. Aux abords de l'infini	1ière et Term.	Des polynômes et leur comportement à l'infini.
III. Dérivée		
I. Graphes de fonctions polynômes	1ière	Degré 2 et 3 et fonction affine, différences...
II. Chercher l'erreur	1ière et Term.	"N dériv" ou dérivée" ? Quelle approximation choisir ?
III. Etude d'une famille de fonctions	1ière et Term.	Tangente horizontale et points d'inflexions.
IV. Equations fonctionnelles		
I. Fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $y' = y$	Term	Des graphes à éliminer, des graphes possibles et des propriétés particulières
II. Introduction aux équations différentielles	Term	Des graphes qui permettent d'établir une équation différentielle
III. Entrelacs de courbes	Term	Conditions sur les dérivées et fonctions solutions
IV. fof = exp	profs...	Des considérations qui donnent des solutions...
V. Discret et continu		
I. Processus à croissance lente II. Processus à croissance rapide	Term	Des suites et des équations différentielles, similitudes et oppositions.
Références et références bibliographiques		
Où l'on recherche l'inspiration...	Term	Où l'on explique ici que l'on n'échappe pas à l'inspiration des grands maîtres...
Références bibliographiques		

Sommaire

I. Graphes

I. Etude sur $\mathbb{R}_+$ de l'intersection de droites d'équation y = mx, m réel et du graphe de la fonction x → E(x) **2**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 2
Fiche élève **3**
1ère partie 3
2ème partie 4
Eléments de réponse et prolongements **5**
Bilan **6**

II. Notion de zéro d'un polynôme **8**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 8
Fiche élève **9**
Activité 1 9
Activité 2, Activité 3 10
Eléments de réponse et prolongements **13**
Activité 1, Activité 2, Activité 3 13
Prolongements 14
Bilan **15**

III. Une fonction "overflow" ou comment forcer la calculatrice à afficher ce qu'elle doit. **16**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 16
Fiche élève **17**
I. Préliminaire ; II. Observation 17
III. Recherche d'une fonction "présentable" 18
Eléments de réponse et prolongements **19**
Bilan **21**

IV. Etude d'un extremum **24**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 24
Fiche élève **25**
Eléments de réponse et prolongements **27**
Solution. 27
Prolongements 28
Bilan **30**

V Une fonction affine par intervalle **32**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 32
Fiche élève **33**
Eléments de réponse et prolongements **35**

II. Limites

I. Limite en + ∞ **38**
Population visée, organisation de la classe, commentaires 38
Fiche élève **39**
Eléments de réponse et prolongements **41**
A propos des activités 41
Théorème de la limite monotone 42

II. Voyage aux abords de l'infini **44**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 44
Fiche élève **45**
Séance 1 ; Séance 2 45
Eléments de réponse et prolongements **47**
Séance 1 47
Séance 2 48
Prolongements 49

III. Dérivées

I. Graphes de fonctions polynômes **54**
Organisation de la classe 54
Fiche élève **55**
Eléments de réponse et prolongements **57**

II. Chercher l'erreur **60**
Population visée, organisation de la classe. A propos de f* 60
Fiche élève **61**
1. Position du problème 61
2. Etude de l'écart (f*- f ') pour la fonction sinus sur l'intervalle I=[-π,π] 61
Eléments de réponse et prolongements **63**
A propos de l'activité elle-même 63
Des compléments plus théoriques 64

III. Etude d'une famille de fonctions **68**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 68
Fiche élève **69**
Eléments de réponse et prolongements **71**
Bilan **72**

IV. Equations fonctionnelles

I. Recherche de fonctions y définies sur R telles que y' = y **74**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 74
Fiche élève **75**
Eléments de réponse et prolongements **79**
Bilan **80**

II. Introduction aux équations différentielles **82**
Fiche élève **83**
Prolongement : un programme d'étude pour TI.82 .... **85**

III. Entrelacs de courbes **90**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 90
Fiche élève **91**
Eléments de réponse et prolongements **93**

III. Equation f o f = exp **94**
Fiche élève **95**
Eléments de réponse et prolongements **97**

V. Discret et continu

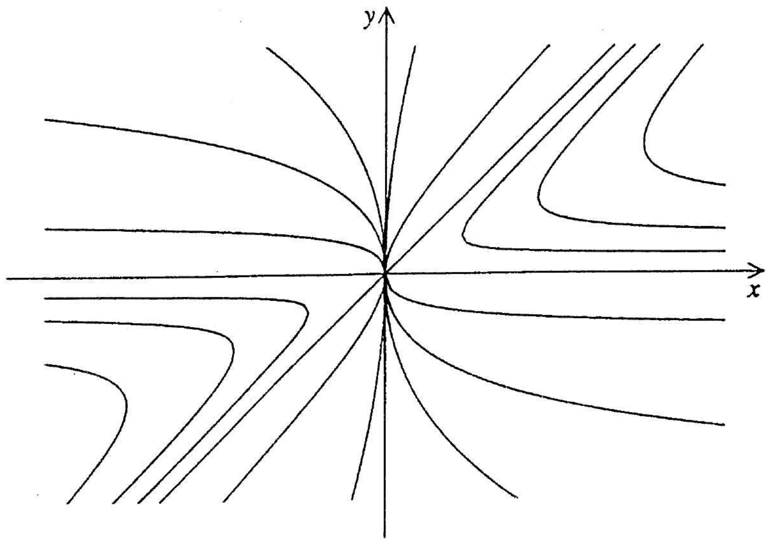
Discret et continu **102**
Population visée, organisation de la classe, objectifs de l'activité 102
Fiche élève
Problème 1 : Processus discrets et processus continus à croissance lente **103**
A. Etude d'un processus discret. 103
B Etude du processus continu correspondant 105
Problème 2 : Processus discrets et processus continus à croissance rapide **106**
A. Etude d'un processus discret. 106
B Etude du processus continu correspondant 108
Eléments de réponse et prolongements **109**
Eléments de correction pour le problème 1 109
Eléments de correction pour le problème 2 110
A propos des méthodes de résolution numérique des équations différentielles 112
En guise de généralisation... partielle 114

Références et références bibliographiques

"Où l'on recherche l'inspiration" **117**

Références bibliographiques **119**

I. Graphes



I. Etude sur $\mathbb{R}_+$ de l'intersection de droites d'équation $y = mx$, m réel et du graphe de la fonction $x \rightarrow E(x)$

La fonction E(x) n'est pas une fonction "ordinaire" pour les élèves, sa particularité peut être justement intéressante pour que ceux-ci établissent le lien entre abscisse et ordonnée des points d'une courbe représentative. Cette activité permet aussi une approche des différences entre une courbe "papier" et une courbe "écran ".

Population visée

Ce travail peut être proposé à des élèves de seconde à la suite de l'introduction des fonctions et des graphes de fonctions. Il demande alors comme préalable une révision des équations de droites, un travail sur les inéquations et les intervalles. Il peut permettre de consolider ou vérifier ces acquis, en particulier: le lien entre droite et cof. directeur . En première L, ES ou même S, il peut constituer une partie des révisions de début d'année.

Organisation de la classe

L'activité proposée concerne une classe où les élèves n'ont pas de calculatrice graphique individuelle mais où on emploiera un rétroprojecteur. Elle peut être réalisée en seconde au cours d'une séance de module, ou de travaux dirigés. Une durée minimum d'une heure trente est à prévoir, surtout si on essaye de la réaliser en début d'année.

La fiche suivante sera distribuée aux élèves ; la seconde partie pouvant être distribuée après avoir établi en groupe les conclusions de la première partie.

Objectifs de l'activité

Permettre à des élèves non familiarisés avec une calculatrice graphique, une première approche de celle-ci :

- écriture de la fonction ;
- recherche d'une fenêtre adéquate pour observer une intersection ;
- emploi d'agrandissements mettant en évidence l'intersection.

Etude sur $\mathbb{R}_+$ de l'intersection de droites d'équation $y = mx$, m réel et du graphe de la fonction $x \to E(x)$

$1^{ère}$ partie

1- Une fonction particulière

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe toujours un entier n unique tel que $n \leq x < n+1$.

On note E la fonction qui à x associe n.

Compléter : E(1,23) = ... ; E(5/2) = ... ; E(0,15) = ... ; E(4) = ...

E(x) = 0 si ....≤ x < ....

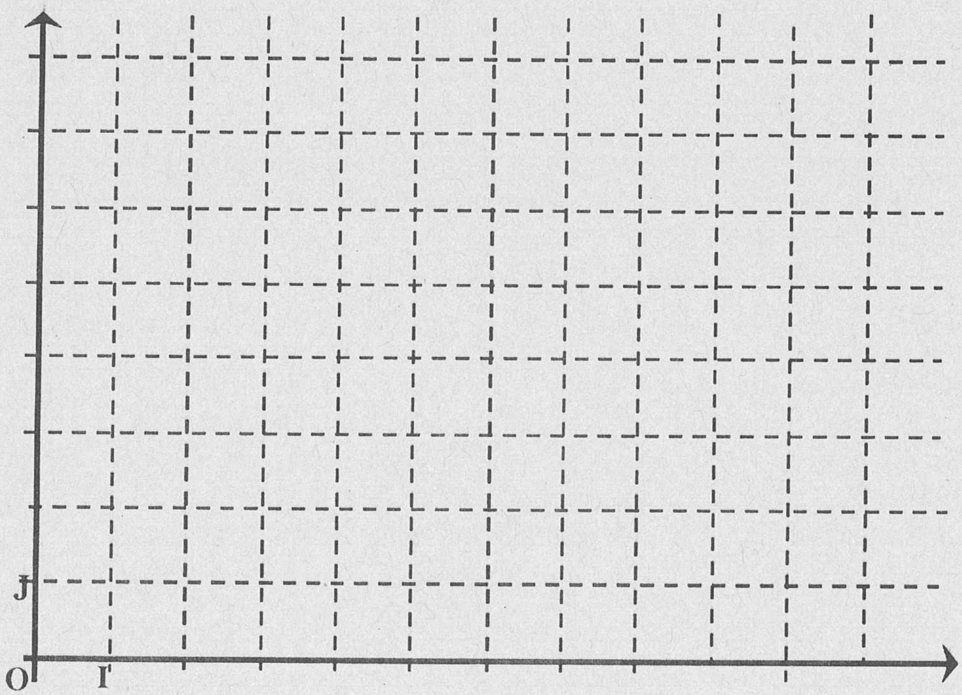
E(x) = 1 si ....≤ x < ....

E(x) = 2 si ....≤ x < ....

E(x) = 3 si ....≤ x < ....

E(x) = 14 si ....≤ x < ....

Représenter la fonction E sur [0;9] dans le repère ci-dessous.



2- Intersection

Tracer sur le schéma précédent une droite d'équation y = mx qui coupe le graphe de E.
Pouvez-vous dire en combien de points la droite choisie coupe le graphe de E ?

3- Observations graphiques et conclusions

La calculatrice graphique permet d'observer le graphe de E. Ce graphe met-il en évidence la valeur prise par E(x) si x est entier ?

En traçant plusieurs droites d'équation y = mx et en observant le nombres de points d'intersection de la droite et du graphe de E, peut-on établir une relation entre m et ce nombre de points d'intersection ?

2ème partie

1- Détermination de n+1 (nombre de points d'intersection) à partir de m

- En utilisant l'inégalité $\frac{n}{n+1} < m \leq \frac{n+1}{n+2}$, montrer que:

$$\frac{1}{n+2} \leq 1\text{-}m < \frac{1}{n+1}, \text{ et } n+1 < \frac{1}{1-m} \leq n+2.$$

- Que représente n+1 pour le nombre $\frac{1}{1-m}$? (distinguer 2 cas)

2- Application

Déterminer le nombre de points d'intersection du graphe de E et de la droite y = mx si

a) m = 0,898 ....

b) m = 0,98 ....

c) m = 0,99987 ....

3- Contrôle graphique

Pour chacun des cas a, b, c répondre aux deux questions suivantes :

- quelles sont les coordonnées du point d'intersection "le plus éloigné" de 0 ?
- quelle fenêtre d'affichage choisir pour vérifier ce résultat ?

a) Si m = 0,898

b) Si m = 0,98

c) Si m = 0,99987

Eléments de réponse et prolongements

Partie 1. A la suite du travail individuel de la 1ère partie, la discussion en groupe s'établira autour de la calculatrice graphique.

- entrer la fonction **Int** (mode **Dot**, problème des bornes...)
- quelle fenêtre choisir pour obtenir le schéma de votre feuille ?
- entrer la (les) fonctions linéaires choisies.

En faisant varier successivement le coefficient directeur de la droite, les constats suivants peuvent être faits :

- On a toujours au moins un point d'intersection 0 :
- Si m = 1 ou m = 0 on en a une infinité ;
- Si m > 1 ou m < 1/2 (≠ 0), 0 est le seul point d'intersection ;
- Si $\frac{1}{2} < m \leq \frac{2}{3}$, 2 points d'intersection ;
- Si $\frac{2}{3} < m \leq \frac{3}{4}$, 3 points d'intersection ;
- Si $\frac{3}{4} < m \leq \frac{4}{5}$, 4 points d'intersection ;

......

- Si $\frac{n}{(n+1)} < m \leq \frac{(n+1)}{(n+2)}$, n+1 points d'intersection.

Partie 2. Pour chaque cas a, b, c on mettra en évidence que le nombre de points d'intersection est respectivement 9, 49, et 7692. Conjectures et vérifications à l'aide de zoom doivent permettre d'établir que les coordonnées des points cherchés sont :

a) $8 \leq x < 9$ et $y = 8$

b) $48 \leq x < 49$ et $y = 48$

c) $7691 \leq x < 7692$ et $y = 7691$

0 étant point d'intersection, l'ordonnée du point "le plus éloigné" de 0 est n si on a n+1 points d'intersection. On détermine alors l'abscisse.

Le cas b est particulier car $m = \frac{49}{50}$, le graphe ne permet pas de mettre en évidence que (50;49) n'est pas point d'intersection.

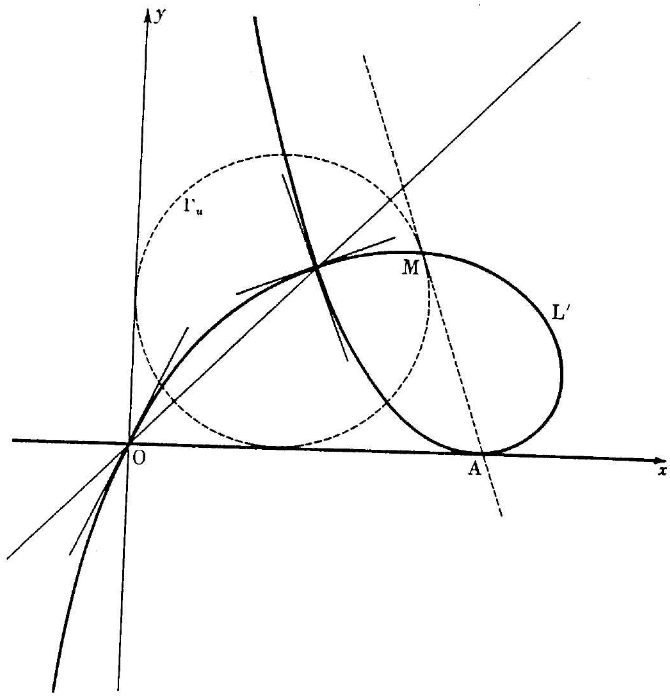
Bilan

L'activité décrite à été réalisée lors d'une séance de module en seconde. En fait 2 séances ont été nécessaires, chacune correspondant à une partie. Les élèves n'avaient pas de calculatrice graphique individuelle et un rétroprojecteur a été utilisé.
Les groupes étaient de 16 à 17 élèves chaque fois.
Un travail préalable sur les droites et les coefficient directeurs avait été fait dans cette classe ainsi que sur la notion de fonction et de graphe ; les inéquations avaient été étudiées en cours. Mais cette activité à tout de même été réalisée en début d'année, ainsi ces thèmes étaient nouveaux pour les élèves, ce qui peut expliquer le temps qui a été nécessaire à son déroulement.

Pour la partie 1
La fiche a été distribuée à chaque élève. Dans un premier temps, les élèves complétaient plus facilement $E(x) = 0$ si ....≤ x < .... etc...
que $E(1{,}23)$ = ... ; $E(5/2)$ = ... ; $E(0{,}15)$ = ... ; $E(4)$ = ...
Certains interprétaient le 1,23 comme les deux nombres 1 et 23 d'où impossibilité pour eux de répondre.
En fait, il semble plutôt que de façon générale, c'est l'écriture $f(x)$ qu'ils ne comprennent pas vu leur réponse à d'autres exercices en cours. Par exemple si 5 est l'image de 1 par une fonction f, les élèves traduisent difficilement cela par $f(1) = 5$ dans cette classe (début des fonctions ?, écriture formelle non acquise et assimilée ?).
Pour représenter E, beaucoup de difficultés ; au mieux, sans trop de problème, un élève dessine "un escalier". Le problème posé par les entiers est éludé (segment sans extrémité).
L'aspect de la courbe donné par la calculatrice pourrait d'ailleurs les conforter dans ces "visions" (en mode **Connected** on a un escalier, en mode **Dot** on a des segments "sans extrémités").
Pour la droite $y = mx$ les élèves tracent le plus souvent $y = x$! C'est pour le tracé des différentes droites que l'emploi de la calculatrice est le plus "économique". Si le début de la discussion est assez lent, la fin ne pose plus problème.

Pour la partie 2
Les inéquations ne sont pas traitées par les élèves, c'est effectivement difficile pour eux. Mais ensuite lorsque les résultats sont bien établis, la recherche du nombre de points d'intersection et des fenêtres permettant d'observer le point le plus "éloigné" de O se fait sans trop de problème.

En conclusion
Même si cette activité peut sembler complexe à mettre en place, elle a certains aspects qui peuvent être positifs :
- une fonction dont le graphe est une succession de segments semi-ouverts, pour "casser" l'idée de fonctions affines et continues ;
- une première approche d'un graphe "machine" et de ses limites ;
- multiplier les exemples de fonctions linéaires pour pouvoir établir la discussion ;
- comment utiliser différentes fenêtres d'affichage pour matérialiser ce que l'on veut voir, avec d'ailleurs parfois l'impossibilité de "voir".


y
Γu
M
L'
O
A
x

II. Notion de zéro d'un polynôme

Population visée
Elèves de $1^{ère}$ S. Familliarisation, approfondissement de la notion de zéro d'un polynôme.
La notion de multiplicité des zéros d'un polynôme n'est pas au programme des classes de $1^{ère}$ ou de TS (mais on y utilise l'expression "...est un zéro double...").

Organisation de la classe
- En groupe de module.
- Il n'est pas indispensable de rechercher une homogénéité des niveaux.
- Travail individuel, chaque élève étant muni d'une calculatrice à écran graphique.

On pourra avec profit utiliser une calculatrice avec rétroprojecteur.
Les activités 1 et 2 sont tout à fait élémentaires. L'activité 3 peut n'être que partiellement abordée, sinon réservée à un groupe d'approfondissement.

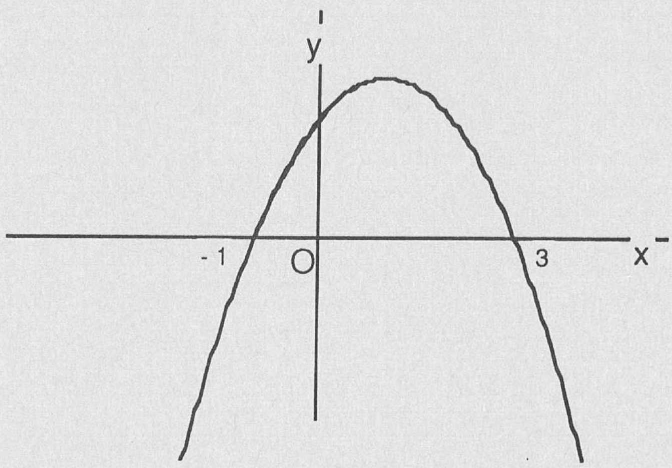
- Durée : environ. 1 heure.(activités 1 et 2)

Objectifs de l'activité
Il s'agit ici de renforcer le lien entre l'expression algébrique factorisée d'une fonction polynôme et sa représentation.
La calculatrice permettra de multiplier les expériences tout en libérant l'élève des phases de calculs intermédiaires qui peuvent "noyer" le concept en construction ; elle permet en outre d'élargir la vision des courbes représentant des fonctions polynômes (et de repousser l'exotisme un peu au delà de la cubique $y = x^3$!)
Dans les classes antérieures, les clés de la factorisation sont des égalités remarquables et quelques "factorisations types" (par x, par un coef.) ; les zéros n'apparaissent qu'en conséquence de cette transformation d'écriture.
En $1^{ère}$ S, la notion de fonction trinôme est approfondie et se complète par l'introduction des fonctions polynômes. L'interprétation graphique des solutions des équations $f(x) = 0$ est alors puissamment soulignée.
La factorisation peut désormais s'obtenir à partir des zéros.
Dans le cas du $2^{ième}$ degré, l'unification entre le problème posé et les résultats du cours est immédiate ("Si Δ .....le trinôme se factorise en ..") et l'interprétation graphique est très contrainte par la forme pré-définie de la courbe qui est systématiquement une parabole.
Pour les degrés supérieurs, c' est plus délicat : ("Si....le polynôme peut s'écrire $(x-a)Q(x)$ .."). Dans l'interprétation graphique, les zéros multiples et zéros complexes posent problème.

Notion de zéro d'un polynôme

Activité 1

La courbe ci-contre est une parabole représentation graphique d'une fonction f .



• L'équation f(x) = 0 admet deux solutions : -1 et 3. ("-1 et 3 sont les zéros de f ")

• Quelles sont, parmi les expressions suivantes, les expressions factorisées possibles pour f(x) ? On pourra s'aider des représentations obtenues sur la calculatrice.

	oui	non	justifications:
$f(x) = -(x + 1)(x - 3)$	☐	☐	
$f(x) = 3(x + 1)(x - 3)$	☐	☐	
$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 2)$	☐	☐	
$f(x) = -(x - 1)(x - 3)$	☐	☐	
$f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$	☐	☐	

• Imaginer l'expression d'une fonction <u>trinôme</u> qui a deux zéros distincts et positifs (de votre choix). Vous en donnerez l'expression ainsi que l'allure de la courbe la représentant.

• Pour les <u>mêmes</u> zéros, il existe d'autres fonctions <u>trinômes</u>
Par exemple :

(expression et représentation)

Commentaires :

Activité 2

• Imaginer l'expression de fonctions polynômes qui admettent un seul zéro : 3 et donner aussi l'allure de leur représentation (s'aider de la calculatrice)

Si f est affine : $f(x) =$

Si g est trinôme : $g(x) =$

Si h est de degré 3 : $h(x) =$

• Ces fonctions proposées sont-elles uniques ?

Activité 3

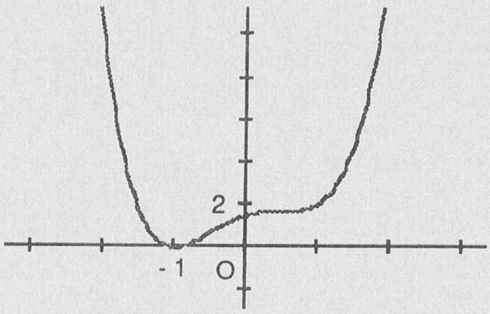
• L'expression de la fonction polynôme f se factorise en :

$$f(x) = -3\,(x+1)^3\,(x+\sqrt{2})^2\,(x-\pi)\,(x^2+1)$$

Quel est son degré ?
Quels sont ses zéros ?
Il y a-t-il des zéros doubles (si oui, les citer)
Y a-t-il des zéros triples ?

• La courbe représente une fonction f

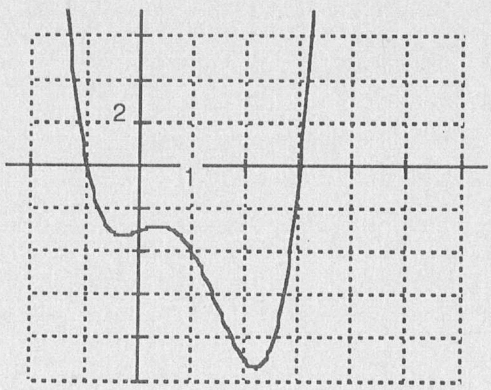
Quelle(s) est (sont) parmi les expressions ci dessous, les expressions factorisées possibles pour f(x) ?
On pourra s'aider des représentations obtenues sur la calculatrice.



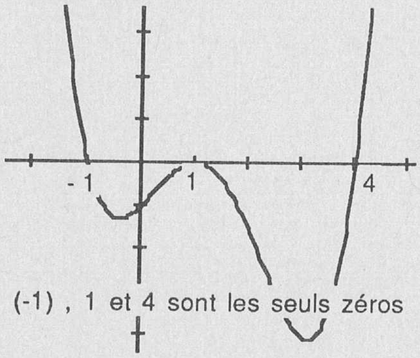
	oui	non	justifications:
$f(x) = (x+1)(x-2)$	☐	☐	
$f(x) = (x+1)^2$	☐	☐	
$f(x) = (x+1)^2(x^2-2x+1.5)$	☐	☐	
$f(x) = (x+1)^3$	☐	☐	

• La fonction représentée ici est une fonction polynôme dont les seul zéros sont (-1) et 3

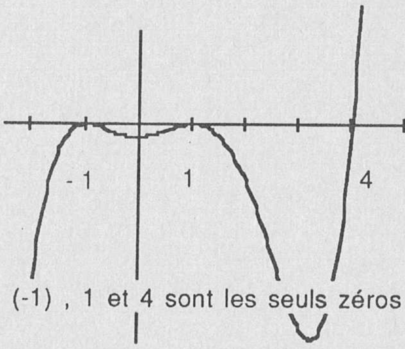
Proposez en une expression .



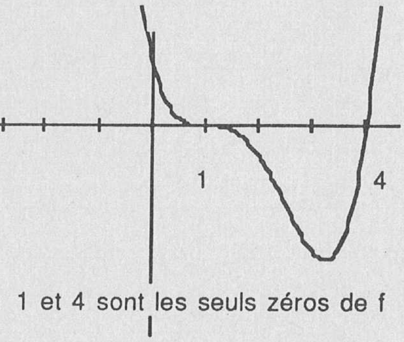
• Proposer une expression factorisée <u>de degré minimal</u> pour les fonctions polynômes représentées :



(-1) , 1 et 4 sont les seuls zéros



(-1) , 1 et 4 sont les seuls zéros



1 et 4 sont les seuls zéros de f

f(x) = (...........................   f(x) = (........................   f(x) = (........................

Eléments de réponse et prolongements

Activité 1:

• Une parabole a pour équation $y = f(x)$ où f est une fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. C'est l'occasion de rappeler l'influence du signe de a sur l'aspect de la courbe et le signe de l'expression factorisée.

Activité 2

• Il s'agit de délimiter par des exemples le concept de zéro et zéro multiple. C'est dans cette activité que se définit le concept.

• Si les seules propositions de réponses sont de la forme $a\,(x-3)^3$, on proposera la fonction f définie par : $f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$ puis on peut conduire le groupe à étendre ceci à : $f(x) = (x-3)\,P(x)$ où $P(x)$ est un (produit de) trinôme sans zéro

• Introduire le vocabulaire : 3 est un zéro <u>simple</u>
3 est un zéro <u>double</u>
3 est un zéro <u>triple</u>

Activité 3

• Sans indication de degré, les solutions sont "à un facteur polynôme près" , polynôme qui peut n'avoir que des zéros complexes.

• Attention, il faut gérer la localisation des "autres zéros" et peut-être localiser tous les zéros dans une fenêtre imposée.

• La multiplications des exemples conforte et précise le concept en faisant circuler dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{propriétes des zéros}} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \boxed{\text{expression algébrique}} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \boxed{\text{aspect graphique}} & \end{tikzcd}$$

• L'activité 3 peut se prolonger en exercice à la maison en proposant une "palette" de propriétés concernant les fonctions polynômes (par exemple) :

$(x+1)$ n'est pas facteur	$(x-2)$ n'est pas facteur	$(x-\pi)$ n'est pas facteur	pas d'autre facteur
-1 est zéro simple	2 est zéro simple	π est zéro simple	$(x^2 + 1)$ est facteur
-1 est zéro double	2 est zéro double	π est zéro double	
-1 est zéro triple	2 est zéro triple	π est zéro triple	

et en prenant une et une seule propriété dans chaque colonne. On construit ainsi l'expression d'une fonctions polynôme pour laquelle il faut préciser le degré et observer l'allure de la courbe sur la calculatrice .

L'objectif est celui décrit par le diagramme ci-dessus, avec, en outre, la familiarisation avec l'outil calculatrice. La pallette de propriétés canalise l'élève au milieu d'un domaine trop vaste pour être maîtrisé mais doit rester assez large pour créer des situations de découverte.

Prolongement :

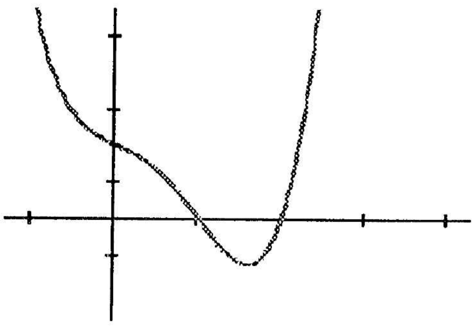
• On peut construire une activité aprés la leçon sur les dérivées pour lier :
expression factorisée de f(x) — expression de f' (x) — type du contact — tangentes

• On peut poser le problème des équations polynomiales de la forme f(x) = mx + p dont les solutions sont représentées par les abscisses des points de contact entre la courbe représentant f et la droite y = mx + p. La multiplicité des zéros serait associée au type de contact.

Bilan

- La classe est motivée, tous les élèves disposent de calculatrices graphiques et en maîtrisent les fonctionnalités de base.
- L'heure consacrée à cette fiche nous a permis d'arriver à l'activité 3 - 3ième point. L'activité 2 a donné lieu à un débat : "h admet un seul zéro et est de degré trois" : la réponse majoritaire était : $h(x) = (x-3)^3$ ou $k(x-3)^3$ (le rôle du k a été très bien perçu, il rappelle celui du coefficient a dans un trinôme $ax^2 + bx + c$) mais dans chaque groupe de module il s'est trouvé quelques élèves pour proposer $(x-3)(x^2+1)$, la généralisation s'est dégagée du débat.
- Le reste de la fiche a été laissé en exercice à la maison. Le contrôle de ce travail a laissé une impression très positive.

- **En contrôle (15 jours plus tard) :**



La fonction polynôme P représentée ci contre par une courbe (C) {fenêtre [-1;4] et [-3;5]} a pour expression :

$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$

1 Démontrer que P(x) se factorise sous la forme :

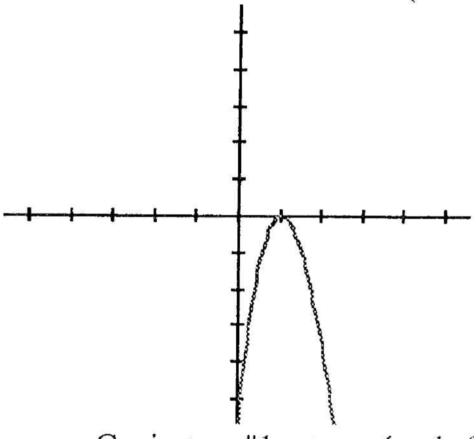
$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\,R(x)$; on précisera les valeurs de α et β ainsi que le degré de R.

2 Démontrer que la courbe (C) ne recoupe pas l'axe des x ailleurs qu'aux deux points représentés

Bonne performances mais la conjecture "1 et 2 sont des zéros" n'est pas validée par un calcul.

16/33 élèves ont 3/3points ; 15/33 élèves ne valident pas la conjecture ; 4/33 élèves ont 1 ou moins de 1 point.

- **En devoir à la maison (2 mois plus tard) :**



La courbe ci contre représente la fonction polynôme f définie par :

$f(x) = x^3 - 7{,}5\,x^2 + 12\,x - 5{,}5$

Cette courbe suggère une factorisation de f(x).

1. Factoriser f(x)
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$

Conjecture "1 est un zéro de f" : 23/33

Conjecture " 1 est un zéro double de f " : 10/33

Rédaction en général très faible quant à la validation de la conjecture (pas de "la conjecture est exacte puisque j'ai pu factoriser") ; 5/33 ne voient pas la solution {1} à l'inéquation

III. Une fonction "overflow" ; ou comment forcer la calculatrice à afficher ce qu'elle doit.

Une fonction dont l'ensemble de définition est constitué d'un nombre fini de valeurs ne présente au niveau de la Terminale aucun intérêt. Sauf si l'utilisation de la calculatrice crée un problème nouveau qui oblige à toucher du doigt la différence de nature qui existe entre une représentation graphique obtenue avec papier et crayon et celle obtenue à la machine.

Cette activité met en évidence les erreurs d'interprétations provoquées par le dépassement de la capacité de la calculatrice.

Population visée

A l'usage d'une classe de Première ou Terminale S, cette activité permet la manipulation de quelques notions d'**arithmétique** et, en Terminale, l'utilisation des **logarithmes** dans la résolution d'une inéquation (par tâtonnements au niveau de la Première)

Organisation de la classe

Compte tenu des différences entre les modèles de calculatrices, il peut être préférable d'effectuer les manipulations à la calculatrice rétroprojetable, au moins pour synthétiser les observations. Le travail s'organise en débat collectif autour du rétroprojecteur avec des phases de retour au travail individuel dans les séquences de calcul.

Objectifs de l'activité

La première partie du travail se fixe pour but de comprendre le fonctionnement d'un écran de calculatrice. Il s'agit de faire ressortir le caractère discret d'un écran informatique en opposition au caractère (presque) continu du dessin papier-crayon.

Au-delà de l'observation des limites de fiabilité de la calculatrice, c'est la recherche des causes d'un affichage imprévu* (souvent observé) et donc la maîtrise de l'affichage qui sont visées.

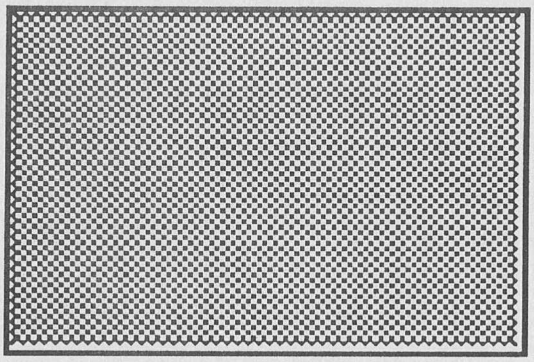
Il s'agit de montrer également que l'utilisation d'une calculatrice graphique ne dispense pas d'une réflexion mathématique, bien au contraire, puisqu'elle engendre de nouveaux problèmes.

---

* Voir à ce propos "Pour une prise en compte des calculatrices graphiques au Lycée", IREM de Montpellier, Christian FAURE, Maryse NOGUES, Yvon NOUAZE, Luc TROUCHE, 1993.

Une fonction "overflow"; ou comment forcer la calculatrice à afficher ce qu'elle doit.

I. Préliminaire



On a ici éclairé un pixel sur deux de l'écran graphique d'une TI 82.

*L'écran graphique d'une calculatrice est un tableau formé de c+ 1 = 95 colonnes de 63 lignes * . On sait que, pour tracer une courbe, la calculatrice détermine les coordonnées de 95 points dont les abscisses sont également réparties dans la fenêtre. L'intervalle séparant deux abscisses consécutives sera appelé le* "pas".

(Dans toute la suite, c doit être ajusté en fonction du matériel utilisé)

1) Démontrer que le pas p est égal à $\frac{x_{max} - x_{min}}{c}$.

2) En déduire que l'abscisse x_k de chaque point calculé est : $x_k = x_{min} + k*p$ où k est un entier variant de 0 à c.

3) On pose $x_{min} = 0$. Déterminer le nombre x_{max} pour que les abscisses de tous les points calculés soient des entiers.

4) Expliquer pourquoi la fenêtre : $\{ -4,7 \leq x \leq 4,7 ; -3,1 \leq y \leq 3,1 \}$ conduit à créer un repère orthonormal tel que tous les points construits aient une abscisse de la forme $k*10^{-1}$ (k entier).

5) Soit x un nombre réel. Vérifier que si $|x| < 10^{-99}$, la calculatrice affiche 0 et si $|x| \geq 10^{100}$, la calculatrice affiche **overflow** [soit en français : débordement, dépassement (des capacités)].*(Donc, pour la machine, 10^{100} n'existe pas et, par exemple, le nombre $0,5.10^{-99}$ est assimilé à 0 !...)*

II. Observation

Soit la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{-(x-4)^2(x+3)^2(x-1)^{1994}} + 1$

1) Quel son ensemble de définition ? En déduire sa représentation graphique.
2) Entrer cette fonction dans la calculatrice graphique et choisir la fenêtre :

$\{ -4,7 \leq x \leq 4,7 ; -3,1 \leq y \leq 3,1 \}$ (**)

* Ceci est vrai pour les TI 82 et TI 85 ainsi que pour les Casio 7800 et au-dessus. Les TI 81 disposent de 96 colonnes, la TI 80 en possède 63. La Casio 6800 dispose de 39 colonnes.

** Il s'agit de la fenêtre **ZDecimal** de la TI 82. Pour une TI 81, on choisira la fenêtre $\{ -4,7 \leq x \leq 4,8 ; -3,1 \leq y \leq 3,1 \}$

a) Que constate-t-on ?

b) Utiliser la touche TRACE pour contrôler l'observation.

c) Observer particulièrement les valeurs **données par la calculatrice** de f(1,1) et de f(4) ?

d) Détailler le calcul de f(4) effectué par la machine et donner les raisons pour lesquelles l'affichage est incorrect.

e) Même travail pour le calcul de f(1,1).

f) Calculer $(0,8)^{1994}$ et $(0,9)^{1994}$ et en déduire la raison pour laquelle la machine affiche le point P(1,8 ; f(1,8)) mais pas le point Q(1,9 ; f(1,9)) ?

III. Recherche d'une fonction "présentable"

1) Soit la fonction g_n telle que $g_n(x) = \sqrt{-(x-4)^2(x+3)^2(x-1)^n} + 1$ où n est un entier naturel **pair** et (C) sa représentation à la machine sur la fenêtre F = $\{-4,7 \leq x \leq 4,7 ; -3,1 \leq y \leq 3,1\}$. On appellera (C_0) sa représentation graphique théorique.

a) Résoudre l'inéquation $(0,1)^n \geq 10^{-99}$.

Ecrire une condition sur n pour que, dans l'intervalle [0 ; 2] , le point A(1 ; f(1)) soit le seul à apparaître.

b) En déduire la plus grande valeur de n telle que (C) et (C_0) soient compatibles.

2) On cherche maintenant une fonction g_n ayant une courbe représentative convenable dans une fenêtre F' aussi "étroite" que possible.

Posons pour cela F' = $\{-3 \leq x \leq M ; -1 \leq y \leq 2\}$ où M est, bien évidemment, un réel supérieur (ou égal) à 4 qui devra être aussi proche de 4 que possible.

a) Vérifier que la fonction trouvée à la question précédente ne convient pas.

b) Montrer que $\frac{4c}{M+3}$ et $\frac{7c}{M+3}$ doivent être des entiers. En déduire que M + 2 est un rationnel au moins égal à 7.

c) On pose $M + 2 = \frac{p}{q}$ (p et q étant deux entiers premiers entre eux).

Démontrer que p divise c.

En déduire les valeurs possibles de p.

Quelles sont les valeurs correspondantes de q pour que M + 2 soit minimal et supérieur à 7 ?

Préciser alors la fenêtre F'.

d) M ayant la valeur obtenue ci-dessus, déterminer le pas p correspondant.

En déduire qu'un point voisin du point A(1 , 1) ne sera pas affiché lorsque $p^n \geq 10^{-99}$.

Déterminer dans ce cas, la plus grande valeur de l'entier pair n pour que (C) et (C_0) soient compatibles.

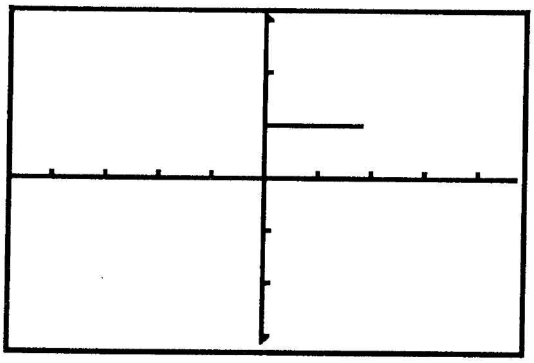
Vérifier les résultats obtenus à l'aide de la machine.

Eléments de réponse et prolongements

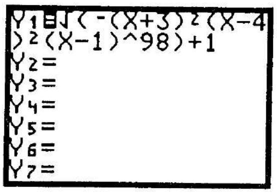
Cette activité préparée pour la TI 82, reste valable pour de nombreuses machines et peut s'adapter aisément à d'autres modèles.

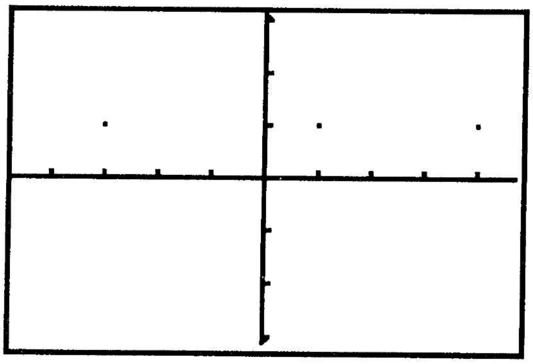
Les calculatrices HP disposent d'un nombre supérieur de colonnes et surtout acceptent des nombres dont la valeur absolue est dans un intervalle beaucoup plus large que $[\ 10^{-99}\ ;\ 10^{100}\ [$. Le travail proposé doit être considérablement modifié dans ce dernier cas.

II. Voici l'affichage obtenu, évidemment incorrect.

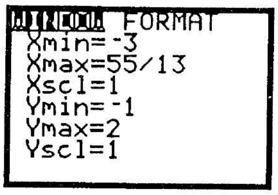


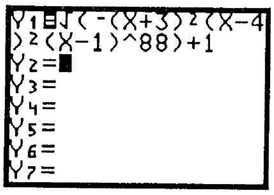
III. 1) $n \leq 98$

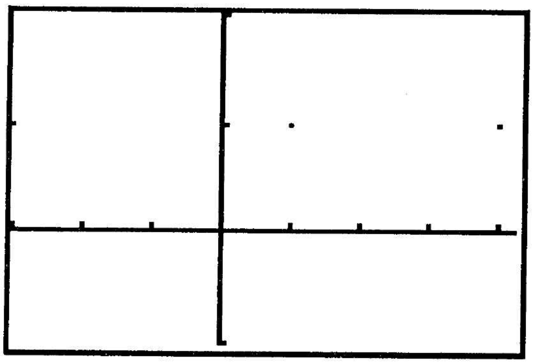




2)



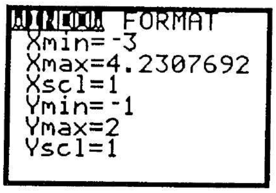


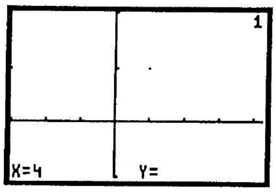


La résolution de la dernière inéquation ne pose pas de problème en Terminale (après l'étude de la fonction *logarithme*). En Première, une résolution graphique utilisant la calculatrice ou une méthode par tâtonnements sera inévitable.

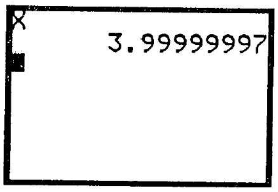
Le nombre n = 88 donne sur la fenêtre $\{-3 \leq x \leq \frac{55}{13} \;;\; -1 \leq y \leq 2\}$ les 3 points attendus et eux seuls. Ce qui n'est pas le cas lorsque n = 90 où l'on observe le marquage de 2 points parasites autour du point de coordonnées (1 ; 1).

On peut se poser la question de savoir si en remplaçant $\frac{55}{13}$ par une valeur décimale approchée moins précise que celle qu'utilise la machine, on obtient encore un affichage correct. Voici par exemple ce qu'on obtient :





Le point de coordonnées (4 ; 1) n'est pas indiqué ce qui est confirmé par l'action de TRACE.



Encore une apparente contradiction provoquée par un arrondi à l'affichage mais pas dans le calcul.

Le rappel de la mémoire X montre que f(4) n'a pas été calculé. La machine a calculé en fait f(3,99999997), ce qui conduit à une "erreur de domaine", $(-3*10^{-8})^2$ n'étant pas assimilé à 0.

Plus précisément, avec la fenêtre approchée que nous avons choisie, on obtient $p \approx 0{,}0769230766$ et l'équation $-3 + k\,p = 4$ n'a pas de solution considérée comme entière par la machine. En effet : $\frac{7}{p} \approx 91{,}00000039$.

On pourrait donc aussi se poser la question : Quelle est la précision nécessaire sur M pour obtenir le bon affichage ? (réponse M = 4,23079231).........................

Bilan

Les parties A et B (observation, manipulation, débat) ne présentent pas de difficulté. L'étrangeté du résultat graphique maintient l'intérêt pour ce travail. La partie C, techniquement plus difficile, souffre d'une attitude des élèves qui reste très empirique et expérimentale. Le passage à la démarche raisonnée reste le fait d'un nombre réduit d'élèves.

Une semaine après, l'évaluation (page suivante) a été donnée à la classe (35 élèves).
Un seul élève l'a entièrement réussie (ce n'est pas par ailleurs un élève brillant). Pour les autres, la difficulté majeure a été la démonstration du fait que $\frac{5q}{2}$ doit être entier.
Admettant ce résultat, 10 élèves ont pu trouver une valeur de M.

Cependant, tous (sauf un) ont su exprimer la valeur du pas, ce qui peut laisser supposer qu'en cas de besoin, ils pourront être capable d'amorcer une explication à propos d'un affichage incongru.

Evaluation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$.

En général, la représentation graphique de cette fonction à la calculatrice ne fait pas apparaître la discontinuité en $\frac{1}{2}$ sauf si $\frac{1}{2}$ est l'une des valeurs x_k pour lesquelles la calculatrice affiche le point $(x_k, f(x_k))$ (ce qui est le cas pour la fenêtre **ZDecimal**).

Nous cherchons une fenêtre telle que

$x_{min} = -2$
$x_{max} = M$ (où M est un nombre rationnel compris entre 3 et 4)
$y_{min} = -2$
$y_{max} = 2$

pour que la courbe obtenue à la machine ne présente pas cette "fausse continuité".

1) Préciser le nombre $c + 1$ de colonnes de votre machine et son modèle

modèle :
$c =$

2) Exprimer en fonction de M et de c le pas de travail p de votre machine.

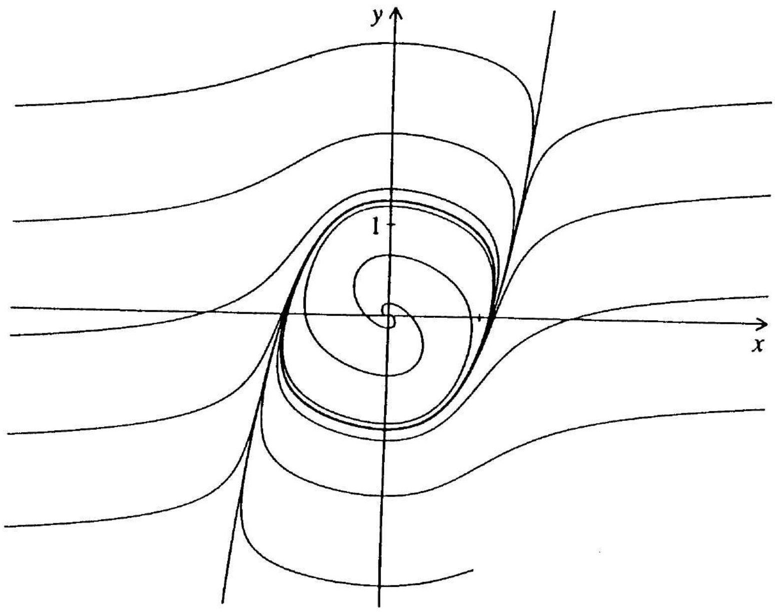
$p =$

3) Poser $M + 2 = \dfrac{c}{q}$ et démontrer que le nombre $\dfrac{5q}{2}$ doit être entier pour que le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ soit calculé.

On rappelle que : $x_k = x_{min} + k*p$ (si k est entier alors x_k est calculé par la machine)

4) Compte tenu que $5 \leq M + 2 \leq 6$, quelles sont alors les valeurs possibles de q ?

5) Déterminer *une* valeur convenable de M (il en existe plusieurs).


y
1
x

IV. Etude d'un extremum

L'objet de cette activité est de rechercher le maximum d'une fonction avec une calculatrice, tout en s'appuyant sur l'aspect géométrique du problème, ce qui permet de corroborer, et préciser, le résultat - approximatif- obtenu avec la calculatrice.

L'intérêt réside aussi dans l'approche d'un nombre irrationnel, ici $\frac{\sqrt{2}}{2}$*, qui n'est pas identifiable par les élèves sous forme décimale approchée : 0, 707 143 6 . Cela doit permettre de montrer que la calculatrice donne "beaucoup de chiffres" dont certains n'ont aucun sens* .*

Population visée

Cette activité peut être réalisée en 2^{nde}, mais aussi en $1^{ère}$, lorsque les élèves n'ont pas encore abordé la dérivation et n'ont pas les outils suffisants pour déterminer les extrémum d'une fonction.

Organisation de la classe

En module par exemple ou en travaux pratiques.

Objectifs de l'activité

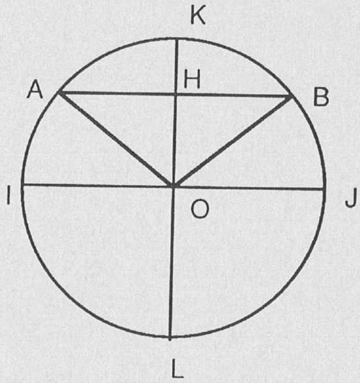
La forme de la fonction étudiée ne peut pas permettre à des élèves de 2^{nde} de déterminer analytiquement la valeur extrémale de celle-ci, la calculatrice peut les aider à en donner une valeur approchée qui sera confirmée par une étude géométrique du problème.

Ainsi les élèves peuvent apprendre à distinguer une conjecture d'une preuve.

* Cette activité est inspirée de :" Faire des mathématiques au lycée avec l'ordinateur. Une action d'innovation pédagogique menée par le bureau DLC 15"; 1993 ; MEN.

Etude d'un extremum

On considère la figure suivante. On se propose d'étudier l'aire du triangle ABO lorsque le point H décrit le segment [OK] et de déterminer une position de H qui donne l'aire (ou une aire) maximale.



Le cercle a pour rayon 10 cm.

1) Reproduire en vraie grandeur le dessin ci-dessus.

2) Que peut-on dire de l'aire du triangle AOB quand H est en O, en K ?

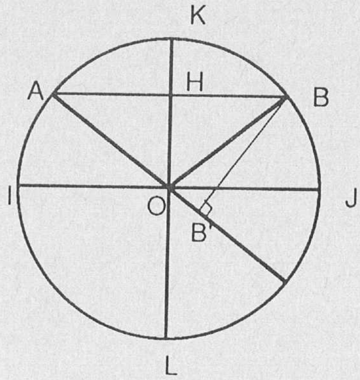
3) En posant OH = x, exprimer l'aire du triangle AOB en fonction de x.

4) A l'aide de la calculatrice, représenter la variation de la fonction trouvée ci-dessus.

5) Il semble y avoir une valeur maximum pour l'aire ; donner une valeur approchée de cette valeur maximum et une valeur approchée de la valeur de x pour laquelle le maximum semble atteint. (Ces valeurs approchées doivent être données avec la plus grande précision possible).

6) Refaire la figure avec la valeur (approchée) de x trouvée. Quelle conjecture peut-on faire ?

7) On se propose de montrer qu'il y a effectivement **une seule** valeur de x pour laquelle l'aire est maximum. Pour cela, calculer (différemment) l'aire du triangle en s'inspirant de la figure ci-dessous.



Quelle conclusion peut-on tirer ?

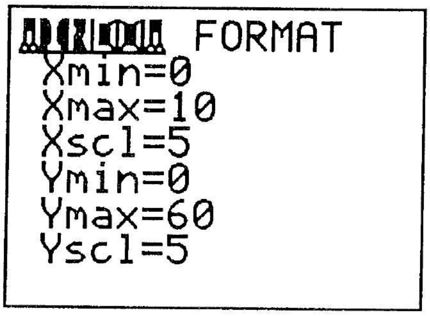
Éléments de réponse et prolongements

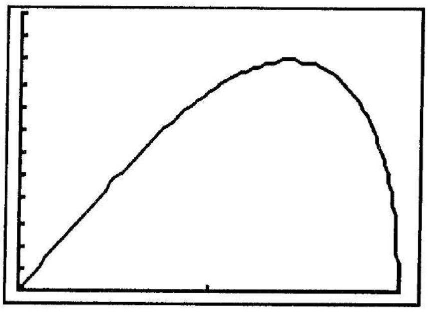
Solution.

2) Quand H est en O ou K, l'aire est nulle.

3) L'aire est égale à $x\sqrt{R^2-x^2}$, où $R = 10$ cm et où $0 \leq x \leq R$.

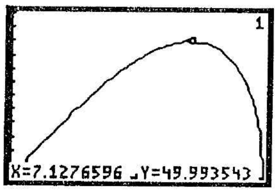
4) La courbe représentative correspondante est la suivante.

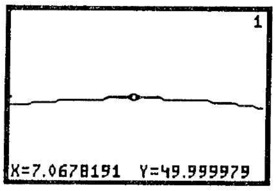


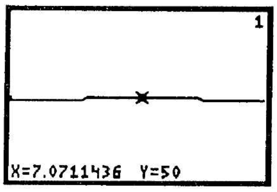


Domaines de variations pour x et y, et graduations sur chaque axe.

5) A l'aide de la fonction TRACE, et en utilisant la fonction ZOOM, on obtient une valeur approchée avec plus ou moins de précision.



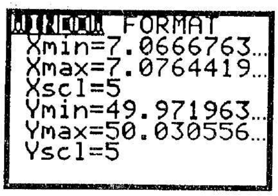


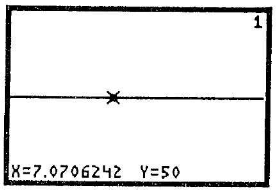


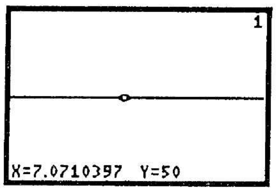
Les meilleures valeurs approchées semblent donc, si l'on s'en tient à la valeur de x qui donne 50 pour la première fois :

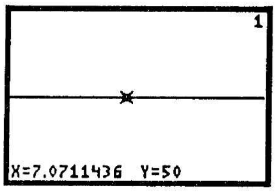
pour x : 7, 071 143 6 cm et pour l'aire : 50 cm^2.

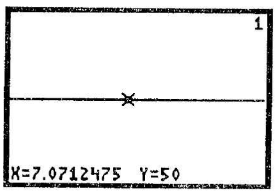
Si l'on continue à agrandir, on va trouver un maximum qui est toujours 50, mais qui semble atteint pour plusieurs valeurs de x, comme le montrent les écrans suivants :



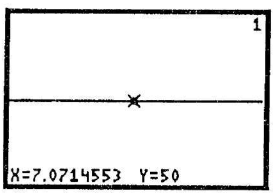


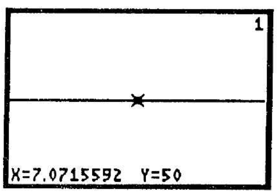






....





Tout ceci montre qu'il est fondamental de montrer que d'une part, le maximum est atteint pour **une seule valeur de x**, et que d'autre part, les valeurs affichées par la calculatrice sont des valeurs approchées dans la majorité des cas.)

6) La conjecture "raisonnable", que l'on peut faire au vu de la figure tracée pour $x_0 = 7{,}07..\text{cm}$ est que le triangle est rectangle en O. Si cela est le cas, on doit avoir $(x_0)^2 + (x_0)^2 = 50\ \text{cm}^2$, ce qui est vérifié. On trouve ainsi que x_0 est égal à $10\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit, avec 10 chiffres significatifs : 7,071 067812. On s'aperçoit donc que "la plus grande précision possible" demandée pose problème.

7) L'aire du triangle est égale à OA.BB' = R.BB', de sorte que l'aire est maximum quand BB' est maximum, ce qui se produit quand B' est en O. On retrouve donc l'existence et la valeur du maximum, et l'unicité de la valeur de x pour lequel il est atteint.

Prolongements

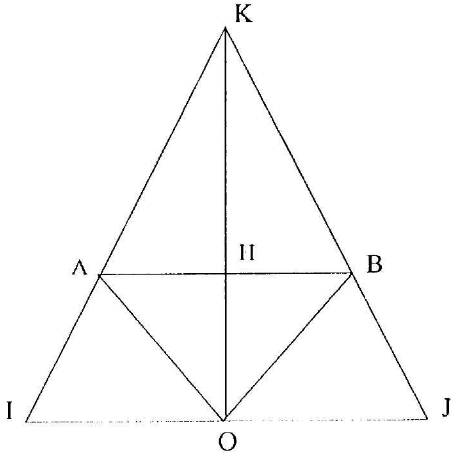
Suivant la classe dans laquelle cette activité est proposée, on peut y apporter des variantes.

En voici quelques-unes.

1°. Le maximum d'une fonction positive est obtenu en même temps que le maximum du carré de cette fonction. On est donc ramené, avec des notations convenables, à étudier le maximum de la fonction $U(R^2-U)$, ce qui fait évidemment référence aux propriétés de la fonction polynôme du second degré.

2°. En considérant l'angle au centre BOJ = a, l'aire du triangle OAB est égal à $R^2 \sin a \cos a$, soit $\frac{R^2}{2} \sin 2a$, ce qui donne immédiatement le maximum de l'aire en fonction de a.

3°. On peut remplacer le cercle par un triangle isocèle. On obtient alors la figure suivante :



Le calcul de l'aire est un petit peu plus compliqué.

On trouve, en posant OH = x, aire AOB = $x.\frac{KO-x}{KO}.OJ$, et le maximum est donc obtenu pour $x = \frac{KO}{2}$, le maximum étant égal à $\frac{\text{aire de IJK}}{4}$.

On peut proposer deux manières de calculer l'aire. La première consiste à écrire que l'on a :

$\frac{KH}{KO} = \frac{HB}{OJ}$, soit $\frac{KO-x}{KO} = \frac{HB}{OJ}$, de sorte que l'aire de AOB est égale à $x.\frac{KO-x}{KO}.OJ$.

La deuxième consiste à écrire que :

$\frac{1}{2}$ aire (AOB) = Aire (OKJ) - Aire(OBJ) - Aire (KHB) , et à remarquer que :

aire (KHB) = aire(KOJ).$(\frac{KO-x}{KO})^2$.

La comparaison des deux résultats amène à vérifier que : $KO - x - \frac{(KO-x)^2}{KO} = x.\frac{KO-x}{KO}$, ce qui peut être un exercice intéressant (?).

4°. On peut se poser le même problème, mais en remplaçant le cercle par une ellipse, on passe de la situation du cercle à celle de l'ellipse par une affinité.

Bilan

Cette activité a été proposée à une classe de Seconde dans le cadre des modules, avec l'objectif de clarifier les termes de "conjecture" et de "preuve".

Dès le début de l'activité, une aide paraît nécessaire pour faciliter la prise de sens du texte : "... H *décrit* le segment [OK] ..."... quand H *est en* O ...". Par la suite, le calcul de l'aire de AOB en fonction de x se réalise assez aisément, même si, pour certains, une question intermédiaire (calculer HB) peut être nécessaire. Dans la deuxième partie, la difficulté majeure est de faire admettre que le segment [BB'] est une hauteur du triangle AOB dont la base est [AO]. La question 3 peut être remplacée par : *"Comment choisir BB' pour que l'aire de AOB soit maximale ?"*

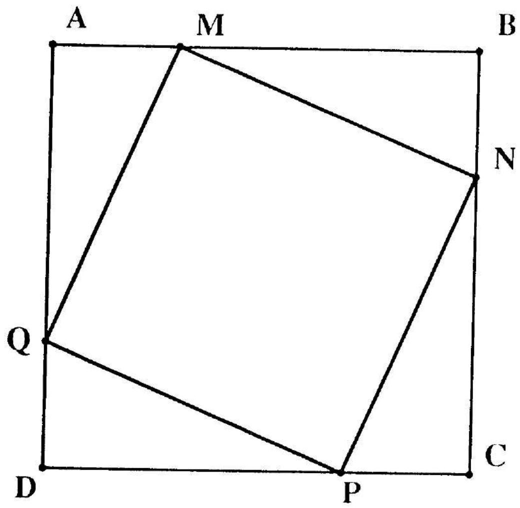
Que reste-t-il de cette activité quelques semaines plus tard ?

Le travail figurant à la page suivante a été donné aux élèves environ un mois après.

- La détermination de l'aire de MNPQ a été correcte chez 2/3 des élèves et 1/5 ont commis une erreur n'ayant pas de conséquence sur la suite du travail. Par conséquent la plupart d'entre eux est dans une situation permettant de continuer, mais seulement 2/3 sont parvenus à la conjecture $x \approx 5$.
- Cinq élèves ont considéré qu'il s'agissait d'une preuve. Cette réponse ne semble pas dépendre du fait que la conjecture ait été trouvée ou non.
- La partie géométrique, présentant des difficultés n'a été correctement (ou presque) traitée que par 1/4 des élèves mais ils sont 2/5 à avoir dit (avec plus ou moins d'élégance) que l'aire est minimale lorsque OM est minimal (O étant le centre du carré).
- Remarquons enfin que sur les cinq élèves ayant estimé que la lecture sur la machine constituait une preuve, quatre ont considéré le raisonnement de la deuxième partie comme une conjecture. Confusion de vocabulaire ? Idée fausse ? On trouve aussi trois non réponses soit 4/5 de bonnes réponses). Y a-t-il 4/5 des élèves qui distinguent clairement les concepts de conjecture et de preuve. Ce n'est pas si sûr. En effet, il est possible que les résultats soient faussés par les difficultés de démonstration (*"Si c'est difficile, c'est une preuve !"*) et que certaines réponses correctes aux questions A4 et B5 soient données par analogie selon le principe mémorisé que la conjecture est **avant** la preuve.

Il faudra encore d'autres activités pour asseoir cette notion.

Evaluation



Soit ABCD un carré de côté 10 cm. M est un point du segment [AB] tel que AM = x.

On construit les points N, P, Q respectivement sur [AD] , [DC] et [CB] de façon que AM = BN = CP = DQ . *(On admettra que MNPQ est un carré.)*

Partie A

1) Exprimer en fonction de x l'aire du carré MNPQ *(penser à Pythagore)*

2) En interprétant la courbe donnée par la calculatrice, tracer le tableau de variations approximatif de la fonction qui à x associe l'aire du carré MNPQ.

3) Préciser pour quelle valeur de x, cette aire semble minimale.

4) Est-ce une conjecture ? une preuve ? (cocher)

Partie B

1) Démontrer que AMCP est un parallélogramme

2) Soit O le centre du carré ABCD. Déduire de la question précédente que O est le centre du carré MNPQ

3) Démontrer que l'aire de MNPQ est égale à $2\ OM^2$ *(Penser à Pythagore dans OMN)*

4) Où doit se situer M pour que l'aire de MNPQ soit minimale ? Pourquoi ?

5) Est-ce une conjecture ? une preuve ? (cocher).

V. Une fonction affine par intervalles

L'évaluation précédente suggère cette situation voisine conduisant à la mise en place, à partir de considérations géométriques, d'une fonction affine par intervalles continue sur [0 , 40[, non dérivable sur cet intervalle.

De plus l'introduction de la notion de périodicité peut créer une difficulté nouvelle qui apparaît rarement hors les fonctions trigonométriques et la fonction "partie entière". La discontinuité en 40 ajoute une nouveauté au problème.

Population visée

Cette activité s'adresse à des élèves de Seconde. La notion de droite et d'équation de droite sous la forme y = mx + p est seule utile ici. Ce sujet pourrait être également traité en Troisième.

Organisation de la classe

La première partie concernant la construction de la fonction et le tracé de la représentation graphique peut être réalisée de manière individuelle ou en petits groupes de deux ou trois élèves.

La deuxième partie concernant le contrôle par la calculatrice nécessite l'utilisation du rétroprojecteur ; l'écriture de l'équation d'un segment de droite nécessitant une information de la part du professeur.

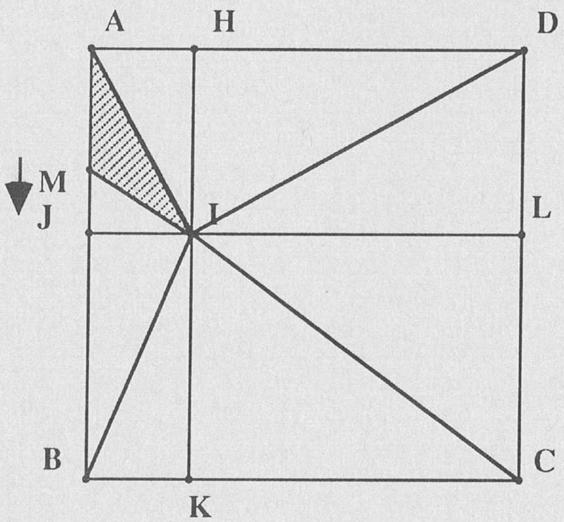
Objectifs de l'activité

La manipulation de fonctions variées a probablement permis aux élèves venus de Troisième de dissocier les concepts de représentation graphique d'une fonction et celui de droite. Il n'est pas non plus utile de remplacer une idée fausse par une autre. Le graphe d'une fonction n'est pas nécessairement une "courbe". Celui d'une fonction affine par intervalles n'est ni "courbe" ni "droit" : il n'est peut-être pas inutile de déstabiliser une nouvelle fois les élèves de Seconde.

Quant aux élèves de Troisième, l'étude d'une fonction affine par intervalles (non posée a priori) sera un premier pas vers l'élargissement de la notion de fonction.

Une fonction affine par intervalles

ABCD est un carré de côté 10 cm. Le point I est situé à 2 cm du segment [AB] et à 4 cm du segment [AD]. C'est-à-dire IJ = 2 cm et IH = 4 cm.



Le point M parcourt les côtés du carré ABCD en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir du point A. La distance x parcourue par le point M varie donc de 0 à $+\infty$.

Notre propos est d'étudier l'aire hachurée notée A(x).

1ère partie : construction de la fonction

1) Lorsque M est en A , quelle est la valeur de l'aire AIM ? Donc A(0) = ...
2) Déterminer A(x) en fonction de x lorsque $0 \leq x \leq 10$
3) Calculer A(10) et déterminer A(x) lorsque $10 < x \leq 20$
4) Poursuivre le raisonnement. A partir de quelle valeur de x peut-on considérer qu'il est terminé ?
5) Que vaut A(40) ? Représenter graphiquement la fonction A sur l'intervalle [0 , 80].

2ème partie : contrôle à la calculatrice

Éléments de réponse et prolongements

Le choix du point I qui a été fait conduit à des coefficients entiers. On aurait pu paramétrer la position du point I au risque de compliquer considérablement le travail et de camoufler l'objectif sous les difficultés techniques, ce qui ne paraît pas conforme à l'esprit de la classe de Seconde.

Les résultats sont les suivants :

$$\left|\begin{array}{l} 0 \le x < 10 \;:\; A(x) = x \\ 10 \le x < 20 \;;\; A(x) = 3x - 20 \\ 20 \le x < 30 \;;\; A(x) = 4x - 40 \\ 30 \le x < 40 \;;\; A(x) = 2x + 20 \\ A(x + 40) = A(x) \end{array}\right.$$

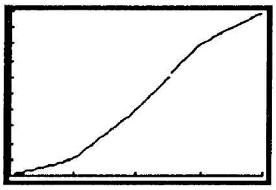
Le traitement à la calculatrice graphique suppose l'utilisation des fonctions logiques (X<a) , (X>a) , (X≤a) et (X≥a). Ces fonctions valent 1 lorsque la condition est vraie et 0 dans le cas contraire.

De ce fait l'écriture : $(X < a)f(X) + (X \ge a)g(X)$ représente la fonction égale à $1*f(X) + 0*g(x)$ lorsque $X < a$ et la fonction égale à $0*f(X) + 1*g(x)$ lorsque $X \ge a$.

Les écritures possibles sur la calculatrice (TI 82) pour une période seront :

```
Y1=X
Y2=3X-20
Y3=4X-40
Y4=2X+20
Y5=(X<10)Y1+(X≥1
0)(X<20)Y2+(X≥20
)(X<30)Y3+(X≥30)
(X<40)Y4
```

```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=40
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=100
Yscl=10
```

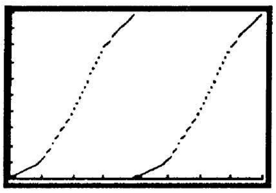


Le graphique ci-dessus est réalisé en mode **dot** pour éviter la jonction entre A(39,57) ≈ 100 et A(40) = 0.

Pour obtenir les deux périodes demandées, on entrera une fonction Y_6 de la manière suivante :

```
Y3=4X-40
Y4=2X+20
Y5=(X<10)Y1+(X≥1
0)(X<20)Y2+(X≥20
)(X<30)Y3+(X≥30)
(X<40)Y4
Y6=Y5+(X≥40)Y5(X
-40)
```

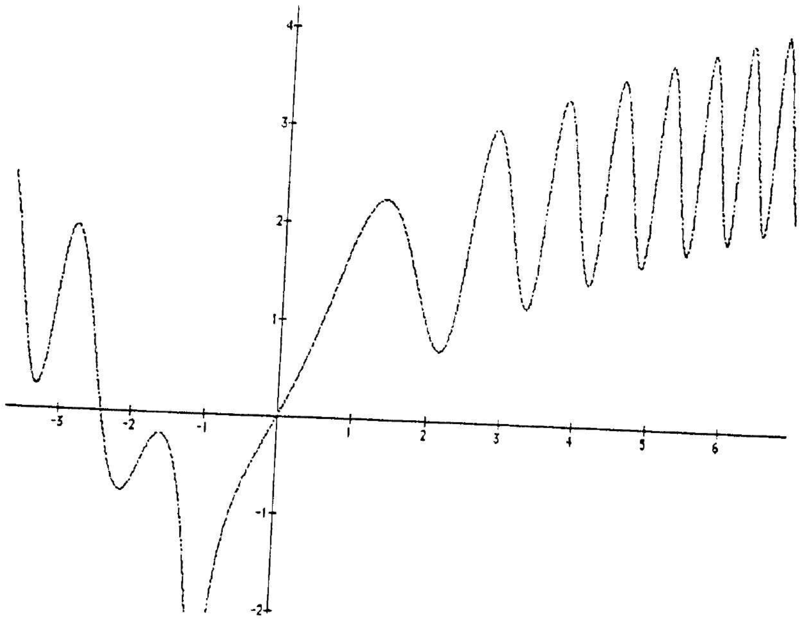
```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=80
Xscl=10
Ymin=0
Ymax=100
Yscl=10
```



Remarque

Dans le même ordre d'idée, on peut envisager l'étude de la fonction x → IM

II. Limites



I. Limite en $+\infty$

La situation $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ (réel ou non) est mise en évidence par l'utilisation sinon exclusive, du moins très fréquente, de fonctions rationnelles. Le concept défini est conforté en TS par les comportements de fonctions utilisant ln ou exp. Les situations rencontrées par les élèves concourent à leur laisser croire à des liens logiques entre monotonie et limite.

Population visée

Élèves de TS. L'objectif est de compléter le concept de limite en $+\infty$ en le dissociant des propriétés de monotonie.

Organisation de la classe

En groupe de module.
Travail individuel, chaque élève étant muni d'une calculatrice à écran graphique.
On pourra avec profit utiliser une calculatrice avec rétroprojecteur.

Commentaires

Il y a effectivement des liens entre la monotonie de f et l'existence de limite mais ceux ci dépassent la cadre du programme : penser notamment au "théorème de la limite monotone" *

* Voir par exemple RAMIS DESCHAMPS ODOUX, tome 3, page 119

Limite en $+\infty$

Activité 1

On considère ici des fonctions définies au moins sur] 0; + ∞[et les propositions :

P1 «*Toute fonction strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$ (à partir d'un certain réel α) à une limite $+\infty$ en $+\infty$* »

P2 «*Toute fonction qui à une limite $+\infty$ en $+\infty$ est strictement croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$* »

• Représenter à l'aide de votre calculatrice puis démontrez :

fonction :	*variation :*	*limite en + ∞ :*
$x \rightarrow x^2+1$		
$x \rightarrow 1-\dfrac{1}{x^2+1}$		

• Que faut-il penser de la proposition **P1** ? Est-elle VRAIE ou FAUSSE ?

• On considère la fonction définie par : $x \rightarrow f(x) = x + m\cos x$ ($m \geq 0$, réel fixé)

A l'aide de la calculatrice, représenter la courbe de f dans les cas :
$m = 2$; $m = 1$; $m = 1/2$

Quelle conjecture peut on faire sur le comportement de f.en $+\infty$ Démonter éventuellement cette conjecture

Constater et justifier les variations observées.

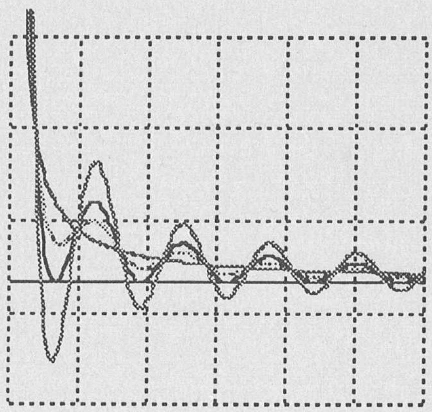
Conclure quant à la proposition **P2 .**

Que conjecturer sur l'existence d'une droite asymptote?

Activité 2

On considère maintenant la fonction définie par :

$x \rightarrow f(x) = \dfrac{x + m\cos x + 1}{x}$ ($m \geq 0$ réel fixé)



A l'aide de la calculatrice, représenter la courbe de f pour $m = 2$; $m = 1$; $m = 1/2$; $m = 0$, et désigner les courbes (C_2) ; (C_1) ; $(C_{1/2})$; (C_0)

Conjecturer l'existence et la valeur d'une limite de f en $+\infty$ puis démontrer ce résultat et préciser l'asymptote horizontale commune à toutes les courbes (C_m) ;

• Que penser de la proposition **P3** analogue au théorème des "gendarmes"

«*Si sur $]\alpha\,;+\infty[$ (à partir d'un certain réel α) on a : $g_1 \leq f \leq g_2$ avec g_1 et g_2 décroissantes et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} g_2 = L$ Alors f est décroissante et aune limite en $+\infty$ qui est L* »

Eléments de réponse et prolongements

A propos des activités

Activité 1

- La situation évoquée par la proposition P1 n'est pas très remarquable et le contre-exemple ne doit pas poser problème. Les variations de g seront démontrées par décomposition de la fonction. On pourra faire énoncer "non P1"
- La proposition P2 est le centre de cette activité. Il s'agit d'élargir le concept de limite infinie en $+\infty$ qui se limite dans l'esprit des élèves à une image mentale : celle d'une branche de courbe approximativement droite ou parabolique. La limite de f pourra s'obtenir par une application du théorème des gendarmes ; selon le groupe on peut aider en suggérant l'encadrement.

On pourra, si nécessaire, proposer la fenêtre : Xmin = -1 ; Xmax=30 ; Ymin=-1 ; Ymax=30
- Le problème de la direction asymptotique pourra être laissé de côté. Il peut cependant donner lieu à un débat qui serait l'occasion de mieux percevoir cette notion. Il y a les cas $m = 0$ et $m > 0$ à distinguer ; on s'appuie ensuite sur un résultat qui a sa place dans un cours "la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$". Noter que les cas où m est "assez petit" ($0< m \leq 0,1$ par exemple) peuvent fournir une démarche intéressante d'une prévision théorique (il n'y a pas de droite asymptote) vers sa constatation expérimentale (non évidente).

Activité 2

- Il s'agit ici de compléter la vision de "droite asymptote à (C)" et de lever quelques perceptions erronées du type "une courbe ne coupe jamais son asymptote" "une courbe se rapproche régulièrement de son asymptote" ...
- On prolonge le problème à un cas plus général d'une fonction encadrée par deux fonctions. Le comportement des "gendarmes" dicte la limite mais pas la variation de la fonction encadrée.

Prolongements

- On peut raisonnablement espérer l'extrapolation de cette activité aux situations d'asymptotes obliques. et proposer aux élèves la recherche de fonctions illustrant cette situation .

Complément :Théorème de la limite monotone[1]

> Soit D une partie de $\mathbb{R}$, f : $D \to \mathbb{R}$ une application monotone, a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que a soit adhérent à $D \cap [a ; +\infty]$ (resp. $D \cap [-\infty ; a]$) . Alors f admet une limite finie ou infinie à droite (resp. à gauche) au point a.

On peut préférer des conséquences moins "compactes" mais plus lisibles de la forme :

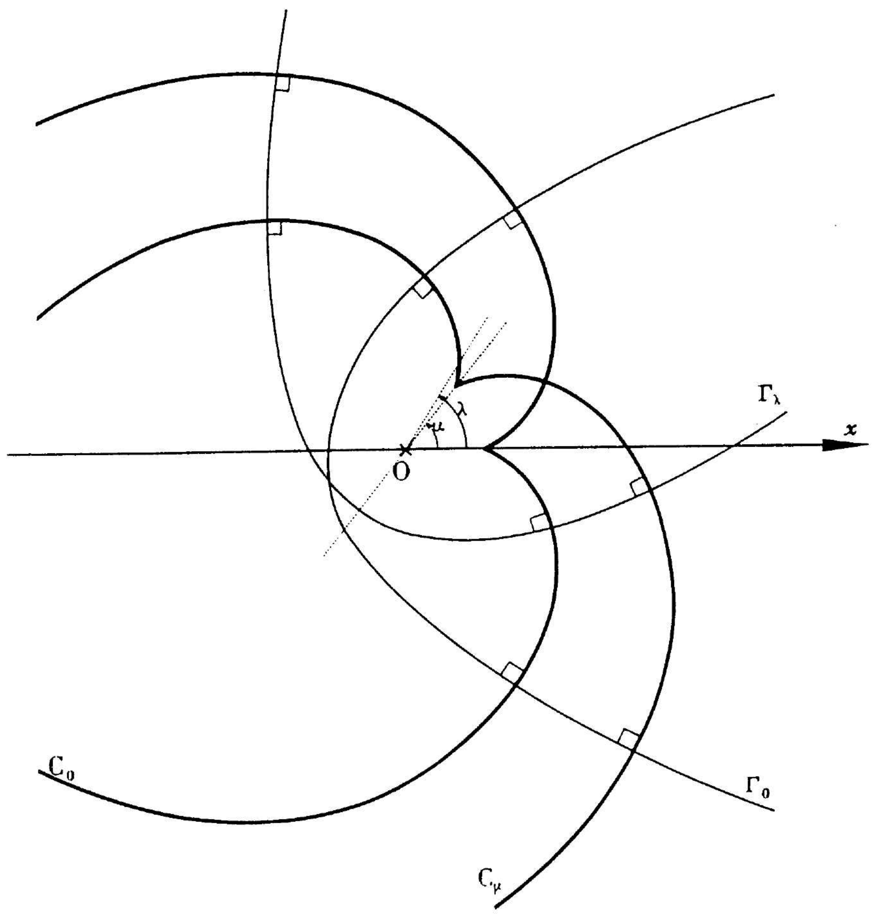
> Soit f une f fonction définie et monotone croissante (resp. décroissante) de $]a ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ alors f admet une limite en $+\infty$, cette limite est réelle si est seulement si f est majorée.

On peut aussi mentionner une autre conséquence :

> Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f : I —> $\mathbb{R}$ une application monotone ; alors f admet en tout point de $\mathring{I}$ (intérieur de I) une limite à droite et une limite à gauche finies.

---

1 Voir par exemple Ramis ,Comeau et Cagnac, tome 3



Γ_λ
x
λ
μ
O
C_0
Γ_0
C_μ

II. Voyage aux abords de l'infini

L'enseignement de la notion de limite est probablement celui qui a subi le plus de transformations dans les dernières années. L'enseignement actuel laisse la plupart des enseignants insatisfaits : manque de rigueur et de clarté sont les principaux reproches qui lui sont faits. D'autant que la présence des outils graphiques donne l'illusion que l'on peut voir... ce qui, par définition, est insaisissable par la vue : on ne voit ni l'infiniment grand, ni l'infiniment petit.

Peut-on combiner un travail de conjectures, à partir des outils de calcul, et une validation numérique ?

Population visée

Classe de première ou terminale, non nécessairement scientifique.

Organisation de la classe

Il peut être intéressant de regrouper les élèves par deux, pour favoriser les conjectures et réfutations diverses.

Objectifs de l'activité

Fonder la notion de limite par un contrôle numérique, et préparer ainsi la formulation théorique qui sera vue plus tard.

Voyage aux abords de l'infini

Séance 1

Soit P le polynôme égal à :

$$P(x) = -121011 - 14290.1989\,x + 5601.73023\,x^2 - 300.56003\,x^3 + 0.03\,x^4$$

1. Etudiez les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$.

2.On veut résoudre maintenant l'équation P(x) = 0.
Pour cela, vous utiliserez votre calculatrice graphique, les résultats de la première question, et vos connaissances générales sur ce type de fonctions...
Vous reproduirez précisément sur feuille les graphiques apparus sur l'écran de votre machine et qui ont été utilisés dans la résolution (préciser à chaque fois la fenêtre d'affichage)

- Combien de solutions semble avoir cette équation ?
- Donnez un encadrement de chacune d'entre elles.
- Utilisez tous les résultats obtenus pour tracer l'allure générale de la courbe de P.

Séance 2

Retour au polynôme

$$P(x) = -121011 - 14290.1989\,x + 5601.73023\,x^2 - 300.56003\,x^3 + 0.03\,x^4$$

On se propose maintenant de déterminer un réel A tel que, pour tout x supérieur à A, le polynôme P soit positif.

1. Illustrer par un schéma la situation de A par rapport à la représentation graphique de P.

2. On propose deux méthodes pour déterminer A :

Méthode 1

On choisit dans ce qui suit x > 0 .
- Montrer que cela ne restreint pas le problème posé.
- Montrer que l'on peut écrire P sous la forme :

$$P(x) = 0.03\,x^4\left(-\frac{121011}{0{,}03x^4} - \frac{14290.1989}{0{,}03x^3} + \frac{5601.73023}{0{,}03x^2} - \frac{300.56003}{0{,}03\,x} + 1\right)$$

- Montrer que pour que P(x) soit positif, **il suffit que** l'on ait simultanément :

$$\frac{121011}{0{,}03x^4} < \frac{1}{3} \qquad \frac{14290.1989}{0{,}03x^3} < \frac{1}{3} \qquad \frac{300.56003}{0{,}03\,x} < \frac{1}{3}$$

- Quelle valeur choisir pour le A cherché ?

Méthode 2

On se place encore dans le cas $x > 0$.

- Montrer que : $P(x) > 0.03\, x^4 - 300.56003\, x^3 - 14290.1989\, x - 121011$.

- Déterminer un nombre A_1 tel que sur $[\, A_1, +\infty\,]$, l'inégalité suivante : $0.03\, x^4 - 300.56003\, x^3 > x^3$ soit vérifiée.

- Montrer alors que pour tout $x \geq A_1$, on a : $P(x) > x^3 - 14290.1989\, x - 121011$.

- Déterminer un nombre A_2 tel que à partir de A_2 on ait : $x^3 - 14290.1989\, x > x$.

- Montrer alors que, pour tout x supérieur à la fois à A_1 et A_2, on a : $P(x) > x - 121011$.

- Déterminer alors la valeur A à partir de laquelle on est sûr que P(x) est positif.

3. Comparer les deux méthodes précédentes : laquelle est la plus précise ?
Comment utiliser une calculatrice pour vérifier ces résultats ?

4. Les calculs qui précèdent auraient-ils été utiles pour résoudre l'équation $P(x) = 0$ étudiée lors de la séance précédente ?

5. Peut-on utiliser une des méthodes précédentes pour déterminer à partir de quelle valeur de la variable le polynôme P sera : plus grand que 1000 ?
plus grand que B ?(B positif quelconque)

6. En conclusion, pouvez-vous donner un contenu précis à la proposition suivante :
"Le polynôme P tend vers + l'infini quand x tend vers + l'infini "

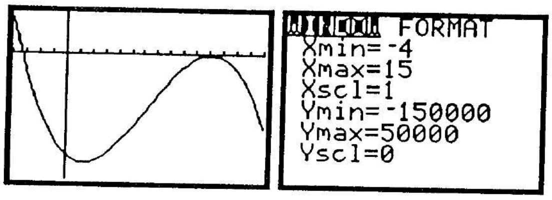
Éléments de réponse et prolongements

Séance 1

La difficulté de la résolution tient bien sûr à la proximité de certaines racines, et à l'éloignement d'une autre...

Quelques conseils :

- expliquer aux élèves que toute fenêtre doit tenir compte du 0,03 x^4. Ainsi, si on prend x entre -1000 et 1000, il faudra prendre y entre - et + 30.000.000.000...
- l'intérêt de l'exercice tient à l'apparente contradiction entre la limite de P égale à plus l'infini en plus l'infini, et la "descente" apparemment inexorable de la fonction pour x grand : laisser les élèves débattre entre eux pour faire émerger leurs conceptions profondes. On pourra avoir quelques surprises !



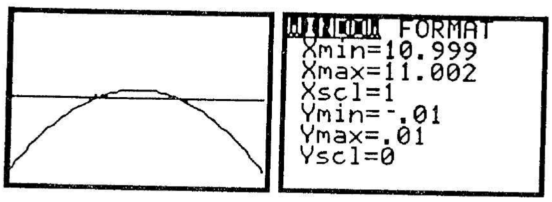
Les élèves verront en général deux racines (cf ci-dessus).

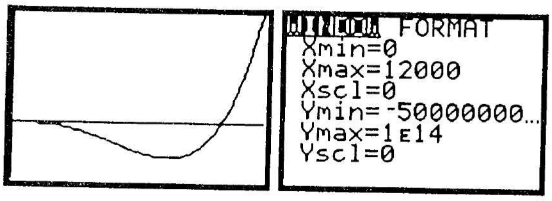
Deux problèmes sont à creuser :

- Y a-t-il une racine double aux alentours de 10 ?
- A quel endroit la courbe, qui, pour des raisons de limite, doit "remonter", coupera-t-elle l'axe des abscisses ?

Ces deux problèmes requièrent des compétences différentes : maîtrise du zoom pour la première, contrôle de la fenêtre avec les rapports entre les x et les y pour la deuxième.

On pourra s'inspirer des fenêtres ci-dessous pour aider les élèves en difficulté (mais ne pas hésiter à laisser "sécher" un certain temps : la recherche n'est jamais du temps perdu. Il vaut mieux mettre en rapport un élève plus avancé avec un autre en retard que donner, toute parfaite, la solution du maître...)

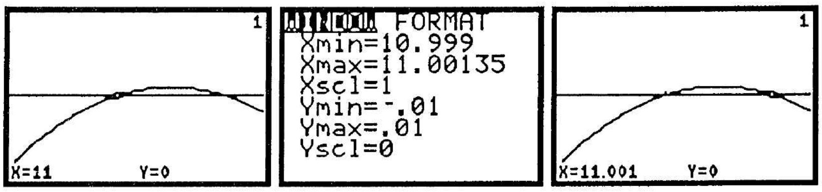


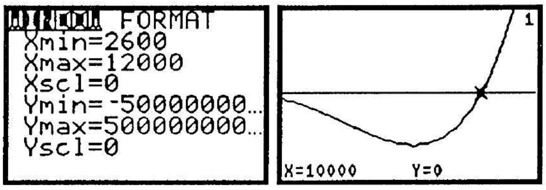


Pour que la solution soit complète, voici la forme factorisée du polynôme :

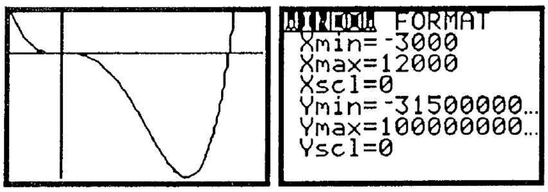
$P(x) = 0.01(x-11)(x-11.001)(3x+10)(x-10000)$

Le problème se pose évidemment de la validation de ce résultat : autant la calculatrice permet de vérifier sans problème la racine 11, autant pour les autres, elle a quelques difficultés. Regarder un particulier l'image qu'elle donne pour 10000... On est loin du zéro attendu ! C'est dû tout simplement au fait que, ayant une plage de plus de 13 ou 14 chiffres significatifs à gérer, elle procède à quelques troncatures et arrondis... qui ont des grandes conséquences.
Cependant, il peut se produire qu'avec une fenêtre bien choisie (cf ci-dessous) l'option TRACE donne les bonnes racines. Mais en aucun cas bien sûr ceci permet de conclure à l'exactitude du calcul !





Tout ceci est l'occasion de mettre le doigt sur le calcul approché avec une calculatrice !
Enfin, il est demandé de dessiner l'allure générale de la courbe de P. Il faut un peu de doigté pour l'apercevoir avec une seule fenêtre. En fait il s'agit de reconstituer les différents éléments du puzzle...



Séance 2

La méthode 1 donne A = 30056, la méthode 2 donne A = 121011. La méthode 1 est ici la meilleure. Le A trouvé n'est cependant pas optimal : la factorisation effectuée nous dit que le meilleur A est 10000.

<u>La méthode 2 est facilement généralisable à tout polynôme P</u> *

- On enlève de P(x) tous les $a_i x^i$ où a_i est positif, à l'exception de $a_n x^n$. On obtient ainsi un nouveau polynôme Q(x). Sur $\mathbb{R}_+$, $P(x) \geq Q(x)$.
- Q(x) est alors de la forme $a_n x^n + a_p x^p + a_r x^r + a_u x^u + \ldots$, avec $a_p < 0$, $a_r < 0$...

Pour $x > A_1 = \sqrt[n-p]{\dfrac{1-a_n}{a_p}}$, on a l'inégalité $a_n x^n + a_p x^p > x^p$.

On a alors, pour $x > A_1$, $Q(x) > Q_1(x) = x^p + a_r x^r + a_u x^u + \ldots$

- On renouvelle alors l'opération pour $x^p + a_r x^r$:

* Méthode tirée de : Antibi A., 1988, *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite / réflexions, propositions*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.

Pour $x > A_2 = \sqrt[p-r]{1-a_r}$, on a l'inégalité $x^p + a_r x^r > x^r$.
On a alors, pour $x > A_2$, $Q_1(x) > Q_2(x) = x^r + a_u x^u + \ldots$
- On renouvelle cette opération, jusqu'à ce qu'il ne reste que les deux expressions de plus bas degré initialement dans Q(x), soit $a_i x^i + a_j x^j$.

On aura alors, pour $x > A_k = \sqrt[i-j]{-a_j}$, l'inégalité $x^i + a_j x^j > 0$.
- Au total, pour tout x supérieur au plus grand des A_i déterminés ci-dessus, on a bien $P(x) > 0$.

Citons pour mémoire une troisième méthode, indiquée dans notre brochure 94 * . C'est une méthode de localisation des racines. Celles-ci (si elles existent !) se trouvent nécessairement dans l'intervalle $]-A, A[$, avec $A = \mathrm{Max}(\left|\frac{a_i}{a_n}\right|) + 1$. Le calcul donne ici A = 4 033 700. On en déduit, pour cause de continuité de P que, au delà de A, P a un signe constant. Et, pour des raisons de limite, à partir de x = A, on est sûr que le polynôme est positif. On constatera que, dans le cas précis, cette méthode n'est pas très performante. Ce n'est pas cette raison qui a fait que nous ne l'avons pas suggéré aux élèves : la raison est plutôt que le but de l'activité est d'initier au contrôle numérique de la notion de limite. Et le caractère "automatique" de cette méthode 3 la rend assez peu formatrice dans ce contexte.

Ceci débouche donc sur une définition mieux assise de la notion de limite. On pourra, si besoin est, faire les trois propositions suivantes aux élèves :

- définition 1 : quand x devient de plus en plus grand, f(x) devient de plus en plus grand
- définition 2 : quel que soit B, aussi grand que l'on veut, on peut trouver x tel que f(x) soit supérieur à B.
- définition 3 : quel que soit le réel B, on peut trouver un réel A tel que, pour tout x supérieur à A, f(x) soit supérieur à B.

Pour bien montrer la différence entre les trois définitions, on pourra les illustrer par des schémas. La distinction des trois est en effet essentielle.

Prolongement possible

On dispose, en ce qui concerne les polynômes, d'un résultat plus fort.
En l'infini , un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.
C'est à dire que, quels que soient α et β tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$, on peut trouver A tel que pour tout $x > A$, on ait $\alpha < \frac{P(x)}{a_n x^n} < \beta$.
On peut prolonger les séances précédentes en introduisant ce point de vue.
- Faire un graphique illustrant cette situation.
- Utiliser une des méthodes précédentes pour déterminer A tel que :

$$\text{pour tout } x > A,\ 0,9 < P(x) < 1,1.$$

- Vérifier sur la calculatrice que, pour x > A, le graphe de P est bien situé dans la bande déterminée par les deux droites d'équation y = 0,9 et y = 1,1.

* *Activités scientifiques pour les classes de lycée*, Juin 1994, IREM de Montpellier

Bilan

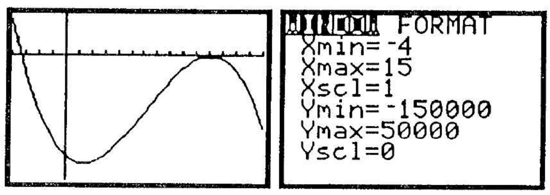
La séance 1 a été proposée à 12 élèves de TS, en activité de soutien.

Tous les élèves répondent sans hésitation à la première question : la limite du polynôme en plus l'infini, c'est plus l'infini. Deux élèves répondent que la limite du polynôme en moins l'infini, c'est moins l'infini, les autres fournissent une réponse correcte. Les limites des polynômes font partie des routines en TS. Les deux élèves qui se trompent le font après avoir noté que la limite du polynôme était celle de son terme de plus haut degré. Seulement, il font alors une erreur de signe : x^4 est pour eux négatif quand x est négatif... Rappelons qu'il s'agit d'élèves en difficulté mathématique...

Les problèmes se posent quand il faut faire apparaître les solutions de l'équation $P(x) = 0$. Et même quand il s'agit de faire apparaître un semblant de représentation graphique pour la fonction.

Tous les élèves tapent correctement la formule algébrique, mais n'arrivent pas à trouver une fenêtre convenable * . Devant les difficultés, au lieu d'adapter le choix des y à celui des x, ils augmentent l'intervalle sur les x (jusqu'à des intervalles du type $[-10^{80} ; 10^{80}]$) Evidemment, à ce stade, on ne voit plus rien... Au bout de 10mn, je fais une suggestion à tous les élèves : il faut tenir compte de la plus grande puissance de x, qui "pilote" les valeurs de la fonction pour les "grandes" valeurs de x. Les élèves adaptent alors leur fenêtre, avec des fortunes diverses, mais tous font apparaître un semblant de courbe.

L'énoncé invitait clairement à combiner l'étude des limites, et l'observation graphique. Les élèves vont faire des zooms plus ou moins efficaces, pour avoir la "plus grande précision possible" sur les racines. Dans cette démarche, ils perdent le point de vue général, qu'ils retrouvent pour récapituler leurs résultats, et tracer un graphique acceptable pour P . Ils ont à gérer une contradiction : la fonction tend vers plus l'infini en plus l'infini, alors que la calculatrice affiche imperturbablement une courbe du type ci-dessous...



C'est là que les démarches divergent. On retrouve trois types d'attitude.

---

* Pour certains élèves le changement de fenêtre constitue un travail énorme, du fait du matériel utilisé : deux élèves disposent de vieilles calculatrices Casio qui ont ceci de fâcheux que, quand ils changent la fenêtre, la courbe s'efface... Ils doivent donc retaper toute la fonction, ce qui est plus que pénible quand l'expression algébrique est longue (ce qui est le cas ici). Cela en dit long sur les soucis pédagogiques des concepteurs de ces machines....

Les attitudes "étanches" : 4 élèves

Ils reproduisent un graphique du type ci-dessus, annoncent 2 solutions pour l'équation *, et ne repèrent pas la contradiction avec la limite annoncée en plus l'infini.

Les attitudes "conciliatrices" : 3 élèves

Ceux-ci repèrent la contradiction. Leur réaction apparaîtrait alors tout à fait extraordinaire pour quelqu'un n'imaginant pas le pouvoir persuasif de l'écran : après un temps de réflexion, ces élèves rendent le résultat théorique et le résultat machine compatible... en changeant le résultat théorique : ils reprennent la réponse à la première question. Le polynôme P tend vers moins l'infini en plus l'infini...

Les attitudes "légitimistes" : 5 élèves

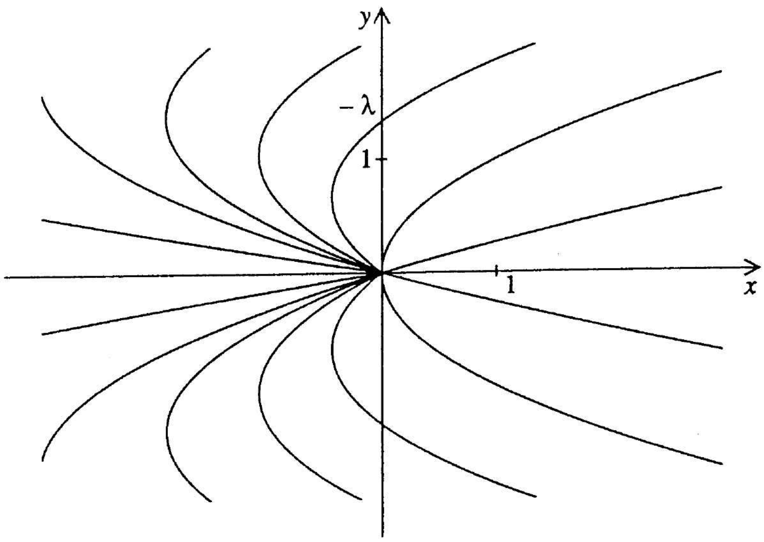
Ces élèves repèrent la contradiction, mais pour eux, c'est le cours qui prime. Ils vont donc tenter de modifier le fenêtre pour voir ce qui est attendu. Deux y parviennent. Pour les autres, interrogés par moi, le doute subsiste...
Ce qui est frappant, c'est qu'il n'y a jamais interraction entre le résultat "théorique" et le résultat "pratique" : c'est toujours l'un qui efface l'autre.
Ainsi l'un des élèves, qui a bien fait apparaître la "remontée" de la courbe en plusl'infini, se trompe en moins l'infini : il avait trouvé comme limite moins l'infini en moins l'infini, et n'arrive pas à le faire apparaître sur son écran. Il conclue alors : "comme en plus l'infini, on pourrait faire apparaître la limite voulue en moins l'infini, par un fenêtre adapté. Mais le temps me manque...". Et il exécute un graphique faux en moins l'infini, qui ne correspond pas à ce qu'il voit sur la machine.

Il reste du travail à faire pour développer les attitudes "critiques"...

---

* Il est à noter que aucun élève n'a pu décoller les racines 11 et 11,001, faute de savoir maîtriser suffisamment les zooms. En classe, il avait été vu qu'une équation de degré n avait au plus n racines réelles, donc personne n'a été choqué de trouver moins de 4 racines.

III. Dérivée



I. Graphes de fonctions polynômes

L'objet de cette activité est d'étudier la forme du graphe d'une fonction polynôme de degré au plus 3 et de voir les éventuelles constances de ces graphes.

Population visée
Classes de $1^{\text{ère}}$.

Organisation de la classe
Cette activité peut se faire sur deux séances : une partie par séance. Tout dépend des connaissances des élèves en ce qui concerne le trinôme.
Il semble raisonnable qu'il y ait une calculatrice pour deux.

Objectifs de l'activité
Il est clair pour l'élève que le graphe d'une fonction de degré 1 est une droite, et que, réciproquement, une droite est le graphe d'une fonction polynôme de degré 1. Parmi les fonctions et les graphes de référence c'est ce qui se fait de plus simple.
Pour le degré 2, le trinôme du second degré a un graphe qui est une parabole. "L'ennui", est qu'une parabole ne s'identifie pas au premier coup d'oeil. En outre, si l'on est assuré que la courbe vue est une parabole, il reste à en trouver l'équation ce qui ne pose aucun (?) problème par identification. (L'unicité de cette équation résulte de la formule d'interpolation de Lagrange *). Si dans un repère donné, on identifie une fonction à son graphe, on sait qu'il existe, à une translation près, une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des paraboles. C'est ce que nous proposons dans la première partie, avec un vocabulaire adapté bien sûr.
Pour le degré 3 la situation est plus compliquée, puisqu'il n'y a plus de forme stable pour les graphes correspondants. La deuxième partie traite de ces problèmes.

---

* Cette formule est utilisée par ailleurs dans cet ouvrage. Rappelons en l'énoncé. Soient x_1, x_2,..x_n n nombres réels deux à deux distncts et y_1, y_2,... y_n n nombres réels quelconques. Il existe un polynôme unique f de degré au plus n-1, vérifiant $f(x_i) = y_i$; une autre formulation est la suivante : par n points du plan il passe le graphe d'une fonction polynôme unique de degré au plus n-1. (C'est la condition sur le degré qui assure l'unicité. Le degré peut être strictement inférieur à n-1, comme le montre l'exemple de trois points (x_i, y_i) alignés : le polynôme est alors de degré 1)

Graphes de fonctions polynômes

Première partie.

1° Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2 (a est non nul).
Ecrire ce trinôme sous forme canonique et en déduire que son graphe coïncide, par une translation à déterminer, avec le graphe de $g(x) = ax^2$.

2° Que peut-on déduire pour le graphe de la fonction h définie par $h(x) = f(x) + \alpha x + \beta$, où α et β sont deux réels quelconques ?

Deuxième partie.

1° On considère les quatre polynômes suivants :

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{12}x^3 + 0{,}25x^2 + 0{,}75\,x - 1{,}6$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$$

$$f_4(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 0{,}5$$

Tracer leur graphe à la calculatrice.
Quel(s) élément(s) de symétrie semble(nt) apparaître ? Quelle relation éventuelle y-a-t-il avec la dérivée ? Déterminer les éléments de symétrie.

2° On considère maintenant la seule fonction f_1.
Déterminer des nombres réels α, p et q tels que : $f_1(x) = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + p(x-\alpha) + q$?
(Autrement dit, peut-on par un changement de repère approprié "faire disparaître" le terme en x^2 dans f ?).
Quelle relation lie p et les racines de la fonction dérivée ?
Quelles relations lient α, p et q aux éléments de symétrie du graphe de f ?
Ce qui a été fait pour f_1 peut il être fait pour toute fonction polynôme de degré trois ?

3° Soient u, v et w trois nombres réels quelconques.
Les graphes de $g(x) = ax^3$ et de $h(x) = ax^3 + ux^2 + vx + w$ sont-ils superposables ?
Même question pour les graphes de $g(x) = ax^3$ et de $ax^3 + ux + v$.

4° Peut-on classer les graphes des fonctions polynômes de degré 3 suivant leur forme ?

5° Peut on classer les graphes des fonctions polynômes de degré 3 en utilisant l'écriture mise en évidence au 2°, et en utilisant la dérivée de la fonction ?

6° Dans quel cas peut-on affirmer que l'équation $ax^3 + px + q = 0$ possède une solution (réelle) et une seule ?

Eléments de réponse et prolongements

1° Il va de soi que la première partie peut être traitée, en la développant éventuellement, de manière autonome. Toutefois, il nous semble intéressant de faire les deux études, degré 2 et degré 3, afin de mettre en évidence les différences au niveau des graphes.

2° L'étude du degré 3 met en oeuvre, outre l'aspect graphique, les propriétés de la dérivée. La notion de point d'inflexion peut être introduite à cette occasion.

3° On pourrait, en prolongement de cette activité, étudier également les polynômes de degré 4, mais nous pensons qu'il faudrait se restreindre, pour ne pas être noyé sous les différentes situations possibles, au cas où f(x) est le produit de deux trinômes dont les graphes se déduisent l'un de l'autre par une translation parallèle à l'axe des x * .

4° *Eléments de symétrie*. Si symétrie il y a, c'est une symétrie centrale. Si cela est le cas, les pentes des tangentes en deux points symétriques sont les mêmes ; en particulier, si la pente est nulle. Donc, si symétrie centrale il y a, l'abscisse du centre de symétrie est égale à la demi-somme des racines du polynôme dérivé.
Pour chaque fonction f_i on trouve ainsi 1.
Il reste à vérifier que les points $(x,f_i(x))$ et $(2-x,f_i(2-x))$ sont symétriques par rapport au point $(1,f_i(1))$, ce qui est presque immédiat.
[On a, par exemple, pour i = 1, $f_1(1) = 8/3$ et $f_1(2-x) + f_1(x) = 8/3$]

5° Dans la deuxième partie, la recherche de α, p et q conduit au système :

$$\begin{cases} -1 = -\alpha \\ 0 = \alpha^2 + p \\ 2 = -\frac{1}{3}\alpha^3 - p\alpha + q \end{cases}$$

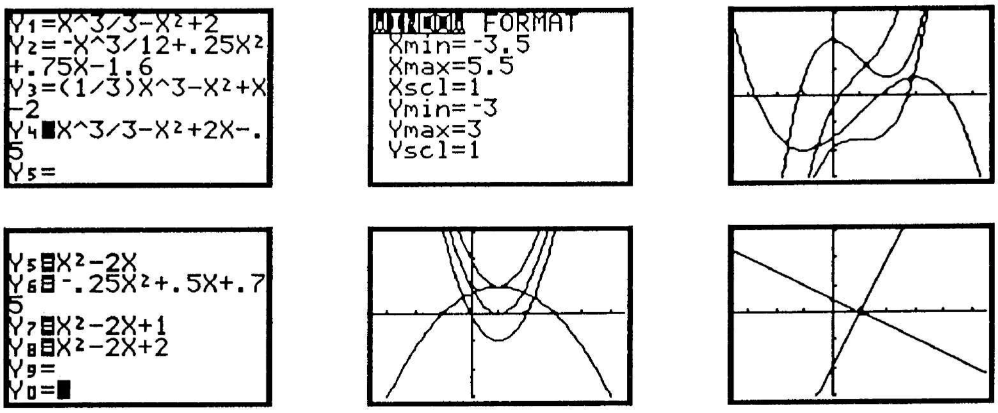
dont la résolution, immédiate, donne : $\alpha = 1$; $p = -1$; $q = \frac{4}{3}$.

On vérifie que les graphes de $f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ et de $\frac{1}{3}(x-1)^3 - (x-1) + \frac{4}{3}$ coïncident.

Dans le cas général, la résolution se fait sans problème. On remarque que est α la demi-somme des racines du polynôme (du second degré) dérivé, et est donc l'abcisse du centre de symétrie, que q est égal à $f(\alpha)$ qui est l'ordonnée du centre de symétrie. On remarque aussi que α est l'abcisse du point d'inflexion.

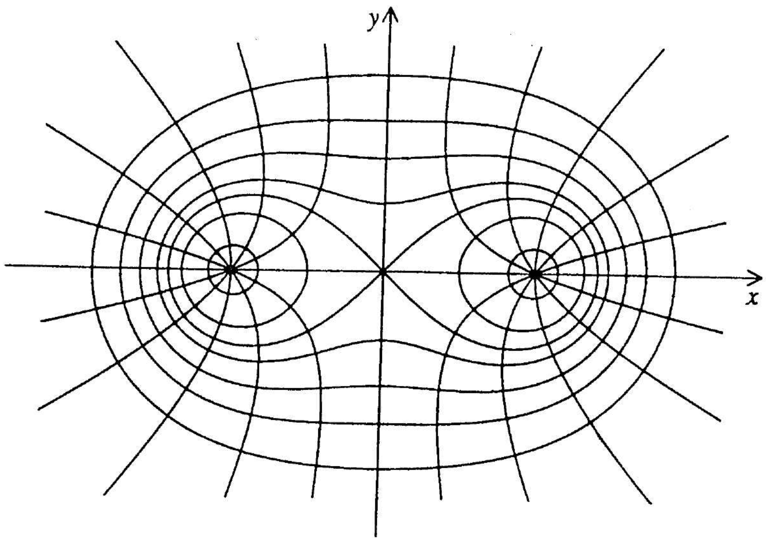
6° Les fonctions étudiées au début de la deuxième partie, montrent clairement que les graphes ne sont pas superposables (moyennant un passage par le changement de repère).
Pour mémoire, voici les graphes de ces fonctions, ainsi que ceux de leurs dérivées première et seconde.

* Pour une étude de cette situation, le lecteur intéressé pourra consulter : *Fenêtres sur Courbes* ; Sylviane Gasquet et Raymond Chuzeville ; Collection Mathématiques ; CRDP de Grenoble ; 1994.



7° La classification se fait suivant la présence de "bosses" ou non ; cette présence est liée au signe du discriminant de la dérivée, et donc aussi à la racine de la dérivée seconde. Une constante existe, c'est la valeur pour laquelle existe un point d'inflexion.

8° Si la dérivée ne possède pas de racines réelles, on est assuré que l'on a une seule racine. Cette condition n'est évidemment pas nécessaire.


y
x

II. Chercher l'erreur...

*Connaître la valeur d'une approximation... C'est bien souvent essentiel. C'est à cette découverte que l'activité ci-contre entraîne. Il s'agit de comparer la valeur exacte de la dérivée, et la valeur approchée que donnent la plupart du temps les calculatrices sous la forme NDeriv * .*

Cet exercice pourra avec profit être réinvesti à d'autres occasions : comparaison de la valeur exacte d'une intégrale, et de la valeur approchée donnée par un algorithme quelconque (et comparaison de la performance des différents algorithmes), même démarche pour la résolution des équations différentielles, etc...

Population visée

Cette activité s'adresse à un public de 1ère S ayant déjà abordé la dérivation, ou à une classe de TS.

Organisation de la classe

Les élèves sont par deux, regroupés si possible avec des calculatrices de même type, pour favoriser les échanges. De plus il est souhaitable que les problèmes techniques ne constituent pas des obstacles au travail demandé : penser donc à ce que au moins un des deux membres du binôme sache manoeuvrer les fonctions de zoom, de trace, etc.

Insister pour que les élèves fassent précisément la représentation graphique sur papier de f* et f'. C'est dans l'aller retour entre écran et papier que peuvent prendre place conjectures, et réflexion en général.

A propos de f*

Ce sont les calculatrices TI qui possédent, préprogrammée cette fonction NDeriv qui donne, pour une fonction f donnée, et un pas h donné, une valeur approchée de f ' sous la forme $f^*(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$. Le concepteur du programme aurait pu choisir une forme plus "classique", du type $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. L'intérêt de f* est sans doute que pour les fonctions "proches" de $x \to x^2$, l'approximation est meilleure (voir sur ce point la fiche professeur qui suit la fiche élève). Pas de problème pour ceux qui ne disposent pas de NDeriv préprogrammé : l'écriture de cette fonction, dans le fichier de fonction, est immédiate.

L'intérêt pédagogique pour les élèves, outre le contrôle d'une approximation, est de découvrir d'autres approches de la dérivation ** , d'en voir l'aspect graphique, et numérique, de comparer enfin l'intérêt respectif de chacune des approches. On le verra dans la fiche professeur qui suit, cette activité a de nombreux prolongements, pas tous à la portée d'élèves, même de TS.

---

* Sur cette fonction, on pourra se reporter à notre précédente brochure *Des activités mathématiques en classes scientifiques (1S et TS)* , 1994, IREM de Montpellier.

** On notera toutefois que si la fonction f est dérivable en x, alors f* tend bien vers f'(x) quand h tend vers 0, mais que la réciproque est fausse. Ainsi pour la fonction valeur absolue, f*(0)=0, alors que la fonction n'est évidemment pas dérivable en 0...

Chercher l'erreur...

1. Position du problème

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, et x un élément de I. On se propose de prendre pour valeur approchée de f'(x) le nombre noté $f^*(x)$ égal à

$$\frac{f(x+0,1)-f(x-0,1)}{0,2}$$

a) A quoi correspond graphiquement ce nombre ? Faites un dessin pour l'expliquer clairement. Comparer ce résultat avec l'approche habituelle de la fonction dérivée.

b) On veut comparer f' et f^* pour la fonction $x \to x^2$

- Faites tracer par votre calculatrice simultanément les courbes de f' et f^*
- Que remarquez vous ? Pouvez-vous prouver ce résultat ?

c) On veut comparer f' et f^* pour la fonction $x \to \sin x$

- Faites tracer par votre calculatrice simultanément les courbes de f' et f^*
- Pensez-vous que l'écart entre f' et f^* soit constant ? (on fera les aggrandissements nécessaires)
- Représenter (sur papier) les courbes de f' et f* sur l'intervalle $I = [-\pi;\pi]$

2. Etude de l'écart (f^*- f ') pour la fonction sinus sur l'intervalle I = $[-\pi,\pi]$

a) On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = f^*(x) - f'(x)$.

- Prouver que g est paire. Cela vous paraît-il naturel ?
- Déterminer g'(x).
- Factoriser g'.
- En déduire les variations de g, puis les variations de $| g |$.
- En déduire les points de I où l'écart entre f' et f^* est maximal, minimal.
- Vérifier sur votre calculatrice la valeur de ces extrema.
- La localisation des extrema vous semble-t-elle naturelle ?

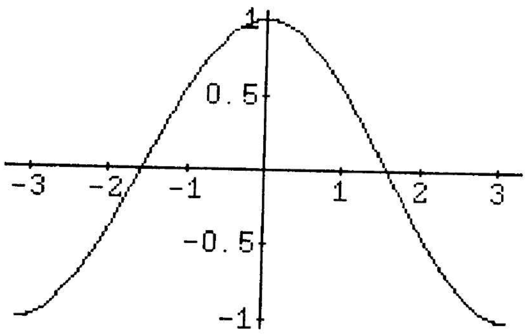
b) Aurait-on eu les mêmes résultats en prenant une autre valeur que 0,1 pour la détermination de f*

$$\text{(Prendre } f^*(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \text{ et } h \neq 0,1)$$

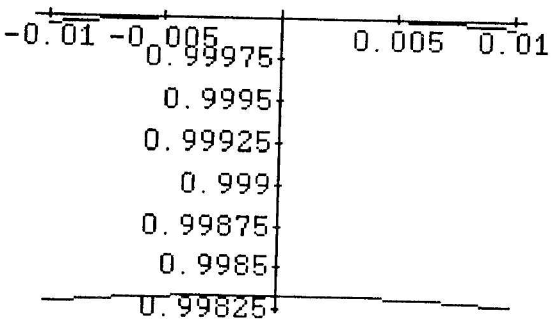
Eléments de réponse et prolongements

A propos de l'activité elle-même

- L'interprétation de f*(x) en terme de pente de la corde passant par les points de la courbe d'abscisse (x-0,1) et (x+0,1) est immédiate.
- Très intéressante est l'égalité entre f* et f' pour la fonction carré (attention à ce que les élèves ne s'épuisent pas en zoom infructueux...). La démonstration est très simple. Ce qui l'est moins, c'est la démonstration de la réciproque : si f = f* en tout point, et pour toute valeur de h, alors on a nécessairement une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à deux (sur ce point, voir la brochure citée en référence, ou les compléments à la fin de cette fiche).
- Pour la fonction sinus, on n'a pas l'égalité. La visualisation des écarts entre f' et f* nécessite, comme on le voit sur les graphiques ci-dessous, la mobilisation de zooms adéquats... Il est essentiel de faire apparaître que, même très petites, des quantités peuvent être comparées. Ainsi, les écarts entre f' et f* doivent-ils pouvoir être repérés (c'est à dire évalués, et notés sur feuille...) pour pouvoir être comparés.



Evidemment, sur un "gros" intervalle, on ne voit pas grand chose...



Un zoom apporte des éléments d'information intéressants. Au voisinage de 0, f' apparaît "nettement" au dessus de f.*

- Le fait que g est paire n'est pas immédiat... Il faut bien rentrer dans le calcul...

- On trouve g'(x) = sinx - 5[cos(x-0,1) - cos(x+0,1)]. Evidemment g' est impaire, comme dérivée d'une fonction paire :

g'(x) = sinx - 10 sinx sin(0,1) = sinx [1-10sin(0,1)]. L'étude se fait sur [0;π] pour cause de parité.

- La dérivée est positive sur cet intervalle. La fonction g croît de g(0) = 10sin(0,1)-1, qui est négatif, jusqu'à -10sin(0,1)+1, qui est positif. Elle s'annule pour $x = \pi/2$. Ainsi la valeur absolue de l'écart entre la dérivée et sa valeur approchée est-il maximal en 0, et minimal en $\pi/2$. Ce qui n'était pas évident a priori...

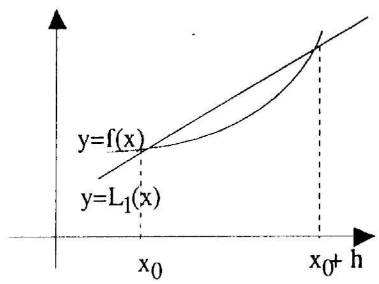
- En y réfléchissant bien, l'égalité f' = f* en $\pi/2$ s'explique facilement :
$f'(\pi/2) = 0$, et, comme $f(\pi/2 - h) = f(\pi/2 + h)$, on a bien $f^*(\pi/2) = 0$.
Il faut réfléchir un peu plus pour comprendre ensuite que l'écart entre f' et f* sera maximal quand "la pente de la courbe" sinus (ou plutôt la valeur absolue de celle-ci) sera maximale, c'est à dire en $k\pi$.

- Pourrait-on avoir d'autres résultats si on prenait pour h d'autres valeurs ? Il faudrait pour cela que : $1 - \frac{\sinh}{h}$ soit négatif sur $[0;2\pi]$, ce qui n'arrive jamais...

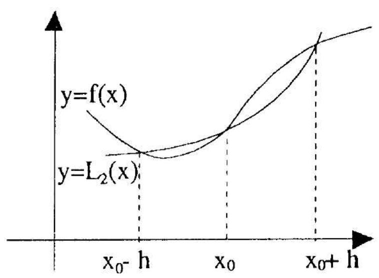
Des compléments plus théoriques, qui fournissent une explication d'ensemble

• L'approximation la plus naturelle serait de considérer une valeur de $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ pour une valeur de h arbitrairement "petite" vu que la limite de cette expression est une définition de f '(xo).
Il se trouve que, dans des calculatrices * , cette approximation est faite par une valeur ** de $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.
L'idée ici est de comparer la qualité de ces deux approximations.
Pour ce faire, on doit faire un détour par les approximations des fonctions par un polynôme (appelé polynôme de Lagrange).

• Si on considère l'approximation polynomiale (Lagrange) à deux points x_0 et $x_1 = x_0 + h$ $(h\neq 0)$ d'une fonction f , ce polynôme peut s'exprimer par :
$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$
C'est l'interpolation <u>affine</u> de f entre x_0 et x_1.
La dérivée de L_1 en x_0 est alors : $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.



• Si on considère maintenant l'approximation polynomiale à trois points : $x_{-1} = x_0 - h$; x_0 et $x_1 = x_0 + h$ $(h\neq 0)$ de f , ce polynôme pourra s'exprimer par :
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} f(x_{-1}) + \frac{(x - x_{-1})(x - x_1)}{(x_0 - x_{-1})(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_{-1})(x - x_0)}{(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_0)} f(x_1).$$
La dérivée de L_2 en x_0 est alors : $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.



* TI 81 , TI 82 ,TI 85 , Sharp
** On rappelle que l'existence d'une limite finie de cette expression n'équivaut pas à la dérivabilité de f en x_0.

On notera que l'on retrouve avec L'_1 la forme qui permet "d'habitude", par passage à la limite, de déterminer f ', et avec L'_2, on trouve f* comme définie ci-dessus. Pour contrôler l'écart entre d'une part f 'et L'_1, d'autre part f ' et L'_2, on pose le problème général de l'évaluation de l'écart entre f et L, L étant un polynôme d'interpolation de Lagrange défini par n points.

Préliminaires : une majoration de $f(x) - L_i(x)$

- On supposera f $C^{n+2}_{[a,b]}$ (c'est à dire f dérivable n+2 fois, avec ses dérivées successives continues sur [a;b]). Soit L le polynôme d'interpolation de Lagrange, défini par les n+1 points équidistants $a=x_0<x_1<...<x_n=b$. On souhaite majorer $|f(x) - L(x)|$ sur [a;b].

- On pose, pour $t \in [a;b]$ et $x \neq x_i$:

$$w(t) = f(t) - L(t) - \frac{(t-x_0)(t-x_1)....(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)}[f(x) - L(x)]$$

Cette fonction de t s'annule n+2 fois en x_0; x_1; ...; x_n et x. Comme elle est $C^{n+2}_{[a,b]}$ et s'annule n+2 fois, par application répétée du théorème de Rolle on a : sa dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ s'annule au moins une fois sur [a;b] .
Soit $\xi \in [a;b]$ (ξ dépend de x) qui vérifie $w^{(n+1)}(\xi) = 0$.

- Or : $$w^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)}[f(x) - L(x)]$$

Donc : $$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)}[f(x) - L(x)]$$

D'où, pour $x \neq x_i$: $$f(x) - L(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

D'où $$|f(x) - L(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1} \text{ où } M_{n+1} = \text{Sup}_{[a;b]} f^{(n+1)}(x)$$

- Cette majoration est évidente pour $x = x_i$, elle est donc valide pour tout x de [a;b].

La majoration de $f'(x) - L'_i(x)$

- <u>Pour L_1</u> :

On a : $f(x) - L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi)$ où $\xi \in [a;b]$, fonction de x, est supposée dérivable.

D'où : $$f'(x) - L'_1(x) = \frac{(x-x_0) + (x-x_1)}{2!} f''(\xi) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f'''(\xi)\,\xi'.$$

en $x = x_0$ (avec $x_1 = x_0 + h$) et sachant que $L'_1(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ il vient :

$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| = \frac{|h|}{2} f''(\xi)$	$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \frac{|h|}{2} M_2$

- Pour L_2 :

On a : $f(x) - L_2(x) = \dfrac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{3!} f'''(\xi)$ où $\xi \in [a;b]$ dérivable

D'où :

$f'(x) - L'_2(x) =$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_{-1})(x-x_1)+(x-x_{-1})(x-x_0)}{6} f'''(\xi)+\frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{6} f^{(4)}(\xi)\xi'.$$

En $x = x_0$ (avec $x_1 = x_0 + h$ et $x_{-1} = x_0 - h$) et sachant que $L'_2(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

il vient :

$\left\| f'(x_0) - \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right\| = \dfrac{h^2}{6} \left\| f'''(\xi) \right\|$	$\left\| f'(x_0) - \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right\| \leq \dfrac{h^2}{6} M_3$

Applications :

Le résultat décisif est alors le suivant :

- la valeur absolue de l'écart entre f ' et $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est majorée par $\dfrac{|h|}{2} M_2$.
- la valeur absolue de l'écart entre f ' et f* est majorée par $\dfrac{h^2}{6} M_3$

Ceci explique que, pour une fonction "suffisamment régulière", c'est à dire sans accident notable pour les dérivées secondes et troisièmes, l'approche de la dérivée par f* soit meilleure que l'approche "classique".

*En effet, ce qui compte, ce n'est pas tant les valeurs relatives de M_2 et de M_3, mais le fait que, pour h "petit", le premier écart est de l'ordre de $\frac{h^2}{6}$, le deuxième est de l'ordre de $\frac{|h|}{2}$. Le choix est vite fait...**

Cela permet de comprendre aussi l'écart entre f ' et f* pour la fonction sinus étudiée, et pour les fonctions trinômes :

---

* On peut cependant se poser la question de la comparaison des majorants, s'ils existent, des valeurs absolues de f, f ', et f ".

On dispose du résultat suivant. Soit une fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, si les valeurs absolues de f et f " sont majorées respectivement par M_0 et M_2, alors la valeur absolue de f ' est aussi majorée par un réel M_1 qui vérifie : $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$. La démonstration en est assez simple.

Pour h > 0, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence de a dans]x; x+h[et b dans]x-h; x[tels que $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(a)$ et $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(b)$.

Par soustraction, il vient $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \dfrac{h}{2}(f''(a) - f''(b))$, de sorte que $|f'(x)| \leq M_1$ qui vérifie $M_1 = \dfrac{M_0}{h} + hM_2$.

On étudie alors la fonction définie pour h > 0, qui, à h, associe $g(h) = \dfrac{M_0}{h} + hM_2$. On démontre sans peine que cette fonction admet, pour $h = \sqrt{2\dfrac{M_0}{M_2}}$, un minimum égal à $\sqrt{2M_0M_2}$. Ce qui est bien le résultat voulu. Mais cela, même pour des écarts importants entre M_1 et M_2 (ou M_2 et M_3) n'empêche pas que, quand h devient "petit", le rapprochement entre f* et f ', "gouverné" par $\frac{h^2}{6}$, est plus intéressant que celui entre f ' et son approche "classique".

- Comparaison de f ' et f* $\{f(x) = \sin x$ et $f^*(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}\}$

Dans l'activité précédente on a pu constater que $|f'(x) - f^*(x)|$ présentait un maximum pour $x = k\pi$ et un minimum (nul) pour $x = \pi/2 + k\pi$.

En reprenant la comparaison de f ' et de L_2' ci-dessus on a $|f'(x) - f^*(x)| = \frac{h^2}{6}|\cos x|$ d'où les max et les min constatés.

- On sait que l'approximation de la dérivée en x_0 des fonctions polynômes de degré 2 par $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ est exacte (il y a même équivalence : approx exacte <=> f trinôme)

Ceci est immédiatement prouvé par l'étude ci-dessus vu que dans ce cas et ce cas seulement : $f' = L_2$ (en effet on a bien pour les fonctions trinômes la nullité de la dérivée troisième...)

Conclusion : plus le détour théorique est large, plus la compréhension des phénomènes est profonde.

III. Etude d'une famille de fonctions

Population visée
Ce travail s'adresse plus spécialement à des élèves de Terminale scientifique. En début d'année un travail de révision sur dérivée, sens de variation des fonctions est nécessaire.

Organisation de la classe
Après un temps de recherche individuel qui peut se faire soit en classe, soit à l'extérieur, les résultats seront mis en commun et commentés.

Objectifs de l'activité
Une idée tenace chez une majorité d'élèves : là où la dérivée s'annule, elle change de signe. La fonction x^3, exhibée la plupart du temps pour déstabiliser cette conception n'a pas toujours l'efficacité souhaitée. L'activité proposée laissera peut être plus de traces...*

En ce qui concerne le programme des Terminales scientifiques, on peut lire : *"On mettra en évidence la relation entre la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport à ses tangentes ; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions et notamment sur la convexité et les points d'inflexion."*

L'utilisation de la calculatrice permet d'établir des conjectures qui demandent ensuite à être démontrées, les élèves doivent alors faire appel à leurs connaissances antérieures.

---

* Idée tirée d'une brochure du Ministère de l'Education Nationale, *Enseignement des Mathématiques et Logiciels de Calcul Formel*, 1994, Direction des Lycées et Collèges, bureau des innovations pédagogiques et des technologies nouvelles.

Etude d'une famille de fonctions

Partie 1. Observations et aspects généraux

On considère la famille de fonctions définies par $f_a(x) = ax + 1/(1+ x^2)$ où a est réel.

1. Observer le graphe de différentes fonctions de cette famille à l'aide de votre calculatrice.
(On pourra prendre par exemple a = 1 ; -1 ; 1/2 ; 1/4 ; 2 ; -2 ...)

2. Quelles constations avez-vous fait ?
(Points communs ; asymptote ; sens de variation ...)
Pouvez-vous justifier ces constats à partir de l'expression de f_a et des fonctions $x \to ax$ et $x \to 1/(1+ x^2)$.

3. Etudier $f_{1/2}$ et f_2 : dérivée, sens de variation (utiliser la calculatrice pour déterminer les zéros de la dérivée et les justifier par une étude). Quelle différence faites-vous entre ces 2 fonctions ?

Partie 2. Recherche d'une fonction f_a "intermédiaire" entre $f_{1/2}$ et f_2 : soit f_a' s'annule sans changer de signe.

1. Comment serait le graphe d'une fonction f_a telle que $f_a'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe x_0 unique avec $f_a'(x_0) = 0$.
Rechercher expérimentalement à la calculatrice une telle fonction.

2. Soit f_a telle que $f_a'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f_a'(x_0) = 0$; déduire à l'aide du tableau de variation de f_a' que f_a'' s'annule en x_0.
- Résoudre $f_a''(x) = 0$.
- Comment déterminer alors a ?
- Vérifier avec votre calculatrice l'allure de (ou des) fonction(s) trouvée(s).

Conclusion ....

Eléments de réponse et prolongements

L'observation des graphes de la calculatrice permet de constater dans un premier temps les différences liées aux valeurs de a.
Les fonctions f_1, f_{-1}, f_2, f_{-2}, sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$ alors que pour a = 1/2 ou 1/4 la fonction présente deux extréma relatifs.

D'où l'idée de recherche une situation "intermédiaire" c'est à dire une fonction monotone mais ayant sa dérivée nulle en un point.
La valeur de a qui permet d'observer le graphe d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, mais présentant au point d'abscisse $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ une tangente horizontale, est $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Si l'argument attendu des élèves pour justifier que $f_a''(x_0) = 0$ lorsque $f_a'(x_0) = 0$ et $f_a'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$ est la continuité de f'', on peut s'interroger sur cet argument.
En fait la seule existence de $f_a''(x_0)$ permet d'assurer le résultat.
Le plus simple est de passer par la formule de Taylor :

$$f_a(x) = f_a(x_0) + (x-x_0) f_a'(x_0) + 0{,}5\,(x-x_0)^2 f_a''(x_0) + (x-x_0)^2\,\varepsilon(x)$$

On obtient donc

$$f_a(x) - f_a(x_0) = (x-x_0)^2\,[0{,}5\, f_a''(x_0) + \varepsilon(x)]$$

Il existe donc un voisinage de x_0 où le crochet est du signe de $f_a''(x_0)$. Or à cause du sens de variation de f , $f_a(x) - f_a(x_0)$ est négatif à gauche de x_0 et positif à droite. Ceci implique que $f_a''(x_0)$ est nul.

Bilan

La fiche élève a été donnée à préparer pour la séance suivante. Le compte rendu a alors duré 2h. Certains élèves n'ont pas abordé la partie 2, d'autres sont arrivés à déterminer a.

La justification du point commun et de l'asymptote ne pose pas de problèmes même si la justification s'exprime parfois maladroitement.

Malgré la question 3, certains élèves (même s'ils sont rares) disent que la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

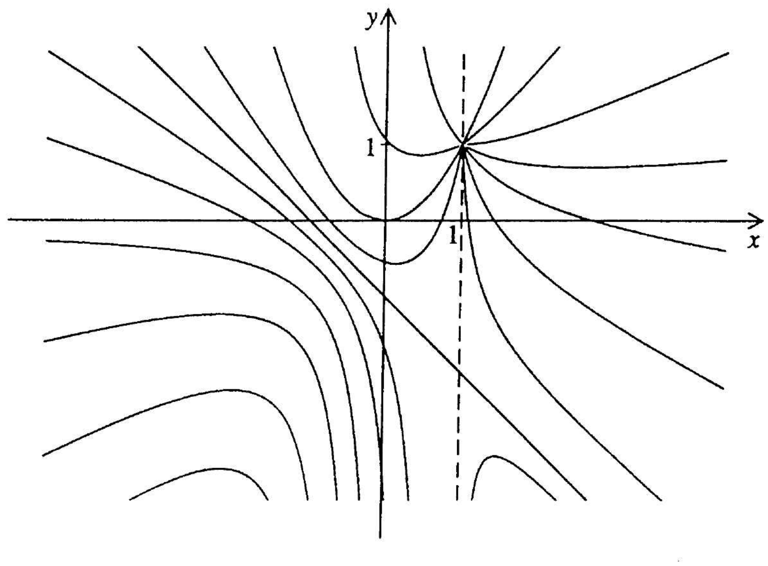
Pour justifier l'existence du second zéro $\alpha \in]0,1[$ de la dérivée de $f_{1/2}$, le recours à l'étude de la dérivée du numérateur de $f_{1/2}'$ est acquis pour la majorité.

Cette méthode ne va pas pour prouver que f_2' est positive sur $\mathbb{R}$. Si certains élèves proposent de déterminer la valeur exacte de la racine β du polynôme de degré 3 égal à la dérivée du numérateur de f_2' par les formules de Cardan, pour vérifier ensuite que $f_2'(\beta) > 0$, personne ne se lance dans les calculs. La comparaison de $(1+x^2)^2$ et x leur semble par contre évidente et injustifiable. Une tentative donne "mais puisque on a $x^2 > x$!"

Pour la question 2, partie 2, l'argument de la continuité de f_a'' n'est pas invoqué pour affirmer que $f_a''(x_0) = 0$.

En conclusion, la dérivée peut s'annuler sans changer de signe, on a une tangente horizontale et un point d'inflexion. Certains élèves sont allés vite dans l'autre sens, on a un point d'inflexion si la tangente est horizontale...!

IV. Equations fonctionnelles



I. Recherche de fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ telles que $y' = y$

La fonction exponentielle est à l'étude dans toutes les classes de terminale (S, ES, L option). Une des premières propriétés mise en évidence pour celle-ci est bien qu'elle est sa propre dérivée. Mais avant toute étude de cette fonction, peut-on demander à des élèves de terminale, dès lors qu'ils ont étudié la dérivation d'imaginer quel pourrait être le graphe d'une fonction qui vérifierait

$y' = y$ *(1)*

C'est ce que propose la première partie de cette activité * .

La deuxième partie permet de mettre en évidence certaines propriétés des solutions de (1). Ses arguments sont plus techniques et calculatoires, ils ne sont peut-être pas accessibles à toutes les terminales et par rapport aux objectifs initiaux de cette activité, elle peut ne pas être réalisée à la suite de la partie 1.

Population visée

Classes de terminale scientifique, mais la première partie qui s'appuie essentiellement sur des graphes peut être réalisée dans d'autres sections. Toutefois, on aura besoin de savoir relier la monotonie de la dérivée et la position de la courbe par rapport à ses tangentes ** .

Organisation de la classe

La fiche élève est distribuée lors d'un cours (si la classe peut être dédoublée c'est mieux mais il n'y a plus d'heures de TD en terminale scientifique...), la recherche est individuelle ou avec son voisin. Les conclusions de chaque question doivent être établies en groupe, au fur et à mesure, pour pouvoir progresser.

Objectifs de l'activité

A partir d'une propriété précise pour une fonction, établir d'autres propriétés et faire ainsi "apparaître" un graphe possible.

---

* Pour Raymond Duval, il n'y a pas congruence entre les "variables" des registres graphiques et algébriques, la difficulté pour les élèves étant de passer de l'un à l'autre.

** Voir dans le chapitre précédent la citation du texte du B.O. à ce propos.

Recherche de fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ telles que $y' = y$

Partie 1.

0- Préambule.

1- Trouver une fonction très simple qui vérifie y' = y sur $\mathbb{R}$. (Cette fonction sera exclue des recherches suivantes.)

2- L'objectif de cette partie est d'essayer de trouver l'allure possible d'une solution y (non nulle) sur $\mathbb{R}$ de y' = y, pouvez-vous dès à présent l'imaginer ? Vous confronterez ensuite votre réponse aux résultats établis.

1- Continuité et dérivabilité

Si y est solution de y' = y sur $\mathbb{R}$,

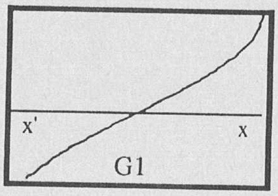
a) y est-elle continue ?

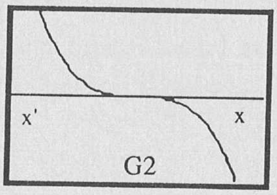
b) y' est-elle dérivable ? Si oui quelle est sa dérivée ?

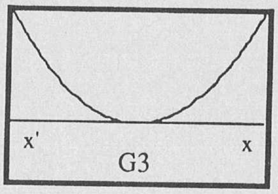
c) La dérivée n[ième] de y existe-elle ? Si oui que vaut-elle ?

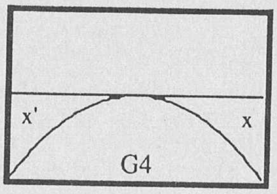
2- Sens de variation

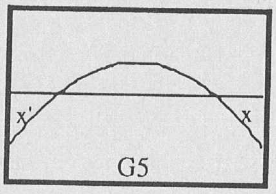
Les graphes suivants vous paraissent-ils possibles pour y ? Justifier votre réponse.











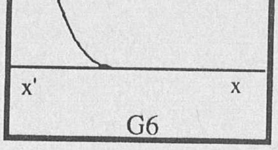
Conclusion : Soit y solution de y' = y sur $\mathbb{R}$, et soit I intervalle de $\mathbb{R}$

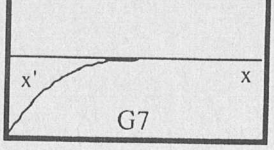
a) si y > 0 sur I, quel est son sens de variation ?

b) si y < 0 sur I, quel est son sens de variation ?

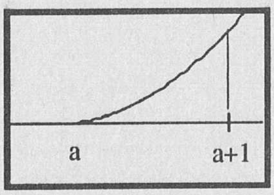
3- Nullité de y en un point, sur un intervalle.

- Les graphiques G1, G2, G3 et G4 vous paraissent-ils suffisants pour exclure le fait que y s'annule en un point "isolé" ?

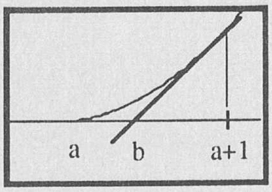




- Si y est nulle sur un intervalle [a;b] où a fini, les 2 seules possibilités sur]-∞;a] sont représentées ci-contre, dire pourquoi elles ne sont pas compatibles. En déduire que si y nulle sur un intervalle celui-ci est de la forme]-∞;a].



G8

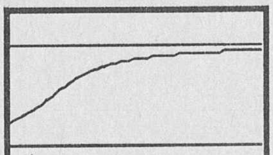


G9

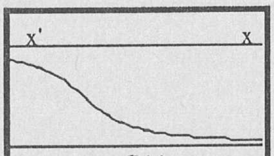
Si y vérifie y' = y alors -y aussi on se limitera donc au cas où y > 0 sur un intervalle
Soit y nulle sur [a;+∞], et y > 0 sur]a;a+1],
Comparer la pente de la tangente en a+1 à y'(a+1). Montrer qu'il y a une impossibilité d'où y nulle sur [a;a+1].

Conclusion : Soit y solution de y' = y sur $\mathbb{R}$, soit y............. , soit y ....

4- Asymptote horizontale en +∞



G10



G11

Les graphes ci-dessus vous semblent-ils suffisants pour exclure la possibilité d'une asymptote horizontale en +∞ ? (Observer les variations de la fonction dérivée)
Quel comportement pour y est possible en +∞ ?

Conclusion : à la suite des conclusions des pararagraphes 2, 3, 4 si y' = y admet des solutions sur $\mathbb{R}$, quelle allure vous semble possible pour ces solutions?

3- Relation entre différentes fonctions solutions de y' = y.

a) Si y est solution et si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que αy est solution.

b) Si y est solution et si z est solution, montrer que y+z est solution.

c) Montrer que si y est solution, (y différente de la fonction nulle) et z solution, alors il existe α réel tel que z = α y. (Utiliser $\frac{z}{y}$ et sa dérivée)

Conclusion : En supposant qu'il existe des solutions à y' = y sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il en existe une et une seule telle que y(0) = 1 ?

Partie 2

1- "Propriété des puissances".

Nous considérons désormais qu'il existe une telle solution y ($y > 0$, $y' > 0$ sur $\mathbb{R}$, telle que $y(0) = 1$) Pour $h \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $y(x + h) = z(x)$.

Montrer qu'alors z est aussi solution de $y' = y$ et est donc de la forme αy.

En déduire que $y(x + h) = y(x)\, y(h)$.

2- Détermination de y(q) si $q \in \mathbb{Q}$ à partir de $y(0) = 1$ et $y(1) = a$ où a réel ($a>1$).

Montrer que :

a) $y(-1) = \frac{1}{a}$;

b) si $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = a^n$ et $y(-n) = \frac{1}{a^n}$;

c) $y(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$ (utiliser $1 = \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}$, n fois) ; $y(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$;

d) si p et q entiers, $y(\frac{p}{q}) = (\sqrt[q]{a})^p$.

3- Encadrement de a.

a) En utilisant la convexité de y montrer que $2{,}25 < a < 4$.

(on écrira que les points $(\frac{1}{2} ; y(\frac{1}{2}))$ et $(-\frac{1}{2} ; y(-\frac{1}{2}))$ du graphe de y sont au-dessus de la tangente à ce graphe au point $(0 ; 1)$.

b) En utilisant le même procédé avec les points $(\frac{1}{n} ; y(\frac{1}{n}))$ et $(-\frac{1}{n} ; y(-\frac{1}{n}))$ montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $(1 + \frac{1}{n})^n \leq a \leq (1 - \frac{1}{n})^{-n}$

Eléments de réponse et prolongements

La première partie a pour but en éliminant successivement les divers cas possibles d'obtenir un graphe correct et même d'arriver à formuler qu'il existe une seule fonction solution qui vérifie $f(0) = 1$.

La seule partie délicate est l'élimination du graphe d'une fonction qui serait nulle sur $]-\infty;a]$ et strictement positive (respectivement négative) sur $]a;+\infty[$.
L'idée est ici de procéder par "intervalles successifs", en traçant la tangente à la courbe au point d'abscisse $a+1$.
Celle-ci doit avoir pour pente $f(a+1)$, donc doit passer par le point de coordonnée $(a ; 0)$, mais cette droite est alors une corde. Elle ne peut être confondue avec la tangente que dans le cas d'une fonction affine non nulle (impossible) ou alors la fonction nulle ainsi $f(a+1) = 0$ et de proche en proche... f nulle sur $\mathbb{R}$.

La deuxième partie peut permettre d'établir certaines propriétés de la fonction qui pourrait être solution et vérifierait $f(0) = 1$. Une deuxième condition, $f(1) = a$ permet de déterminer les valeurs prises par cette solution pour tout nombre rationnel.
L'encadrement de a à partir de la convexité de f demande que soit connu le fait que la courbe est située au dessus de ses tangentes. Il n'est pas possible de montrer facilement que les suites ainsi définies convergent bien, seul le recours au logaritme permettrait de l'assurer, on peut essayer de le "conjecturer" en programmant les deux suites mais celles-ci convergent très très lentement.

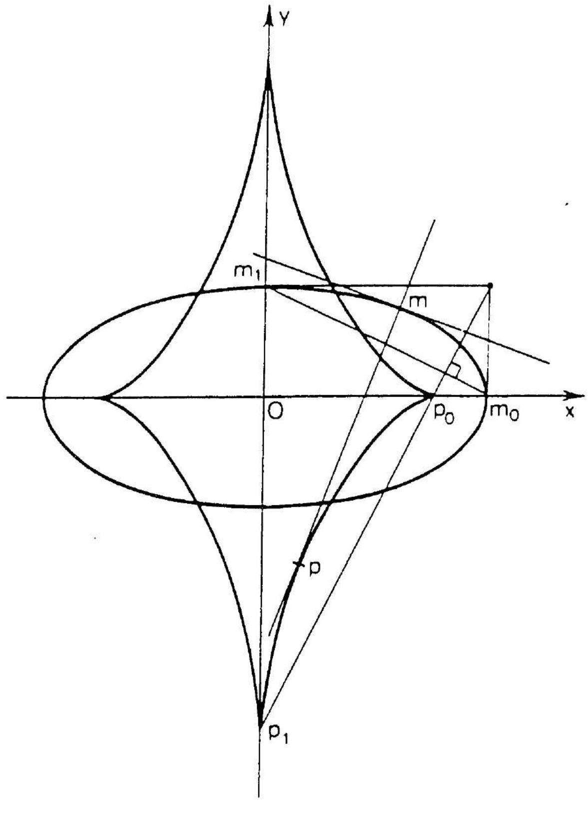
Bilan

Cette activité a été réalisée dans une classe de terminale scientifique en début du cours d'analyse, après que la dérivation ait été revue.

Etablir la relation entre propriété d'une fonction et son graphe possible n'est pas facilement réalisable par une grande majorité d'élèves au premier abord. Ainsi dès la première question certains éprouvent des difficultés à réfuter correctement les graphes proposés.

Cela s'améliore pour les questions concernant les asymptotes après qu'un premier bilan soit fait.

La seconde partie plus calculatoire surprend moins les élèves qui retrouvent des procédures (connues ou non) mais plus familières pour eux.


y
m1
m
O
p0
m0
x
p
p1

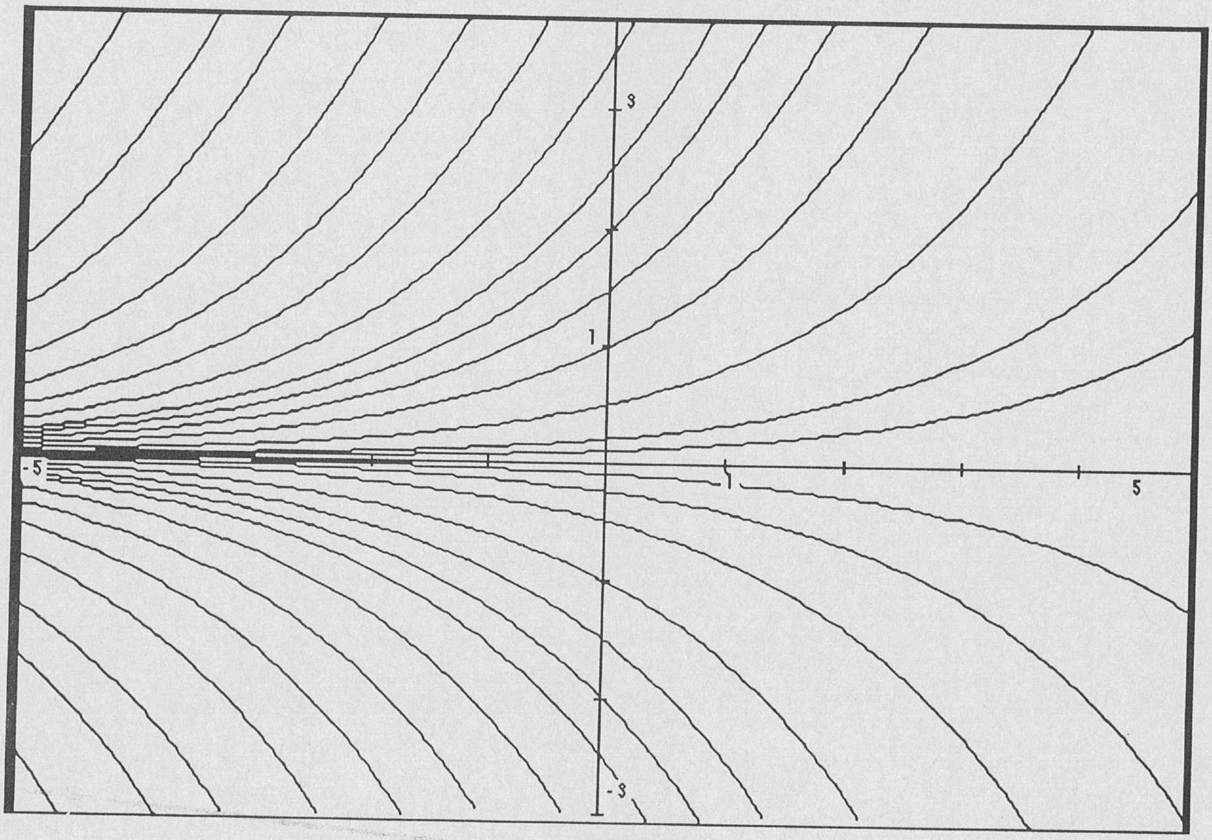
II. Introduction aux équations différentielles

Population visée
Classe de terminale scientifique.

Ojectif de l'activité
C'est l'aspect graphique et certaines observations qui doivent amener les élèves à trouver l'équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions correspondant aux courbes données.

Introduction aux équations différentielles

On a représenté ci-dessous une famille de courbes ayant pour équations $y = f_a(x)$ et on pose $y' = f_a'(x)$.



1) Tracer la droite d'équation y = 2 . Quelle particularité semblent avoir les tangentes aux différentes courbes au point d'ordonnée 2 ? Préciser leur coefficient directeur ?

2) Tracer la droite d'équation y = m. Quelle particularité semblent avoir les tangentes aux différentes courbes au point d'ordonnée m ? Préciser leur coefficient directeur ?

3) Déduire de ce qui précède une conjecture concernant une expression de y' en fonction de y.

4) En déduire $\frac{y'}{y}$, puis une primitive de $\frac{y'}{y}$ et enfin une expression de y en fonction de x.

5) Vérifier à la calculatrice que les fonctions obtenues à la question précédente ont des courbes compatibles avec la figure ci-dessus.

6) Il reste à s'assurer que les fonctions trouvées à la question 4 sont les seules à vérifier la conjecture de la question 3 .

Pour cela : supposons que g vérifie la conjecture et posons $z(x) = g(x).\exp(-\frac{x}{2})$.
Déterminer z'(x) en fonction de g(x) et de g'(x) et déduire du fait que g vérifie la conjecture, que z'(x) = 0 . Que peut-on dire de z(x) ?
En déduire g(x). Quelles sont toutes les fonctions vérifiant la conjecture de la question 3?

Prolongements

Etude géométrique des solutions d'une équation différentielle avec un programme TI.82

Le programme qui suit, écrit pour une TI 82, permet d'étudier géométriquement une équation différentielle du type y ' = f(x,y).

Il permet :

- de tracer un champ de tangentes : en des points (x,y) convenablement choisis - noeuds d'un quadrillage- on trace des segments de tangentes dont la pente est y' = f(x,y) ;
- de tracer, sur ce champ de tangentes, les graphes de quelques isoclines. En général, l'équation de ces isoclines est facile à établir. Le programme impose que les équations de ces isoclines aient été introduites avant de lancer le programme : les équations doivent figurer en Y9 ;
- de tracer quelques courbes intégrales, à supposer qu'on les connaisse. Si c'est le cas, les équations correspondantes doivent être entrées en Y8 ;
- de tracer une courbe intégrale, par une méthode de Runge Kutta. Rappelons que cette technique permet, dans la plupart des cas, c'est à dire quand on ne connaît pas l'expression de solutions, (sauf dans les livres d'exercices !), d'avoir une approche numérique d'une courbe intégrale passant par un point donné (x_0,y_0) * .

Ce programme peut être considérablement simplifié en le limitant à la construction du champ des tangentes. Il suffit pour cela de ne conserver que les instructions des sous-programmes A, B, et 1 ; on s'arrête donc juste avant l'instruction pause qui précéde **StorePic Pic1** (haut de 2° colonne).

Une version plus spartiate encore est proposée en fin de ce texte.

Commentaires.

1- Avec le choix fait pour les fenêtres, les axes sont orthonormés.

2- Il est loisible d'écarter ou de rapprocher les points où l'on trace les tangentes ; dans le programme ci-dessus, les abscisses et les ordonnées des points en question augmentent de 9H. Rien n'empêche de prendre 8H, 10H, 11 H, ..etc. Le seul problème qui se pose est celui de la lisibilité de l'écran ; des points en plus grand nombre donnent une meilleure précision qui peut être gachée par un écran illisible ** !

3- Deux possibilités sont offertes au début du programme : fenêtre centrée ou non. La première situation correspond plutôt à une étude au voisinage du point (x_0,y_0).

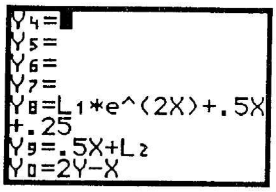
---

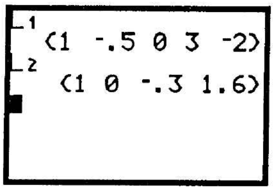
* Nous avons retenu la méthode de Runge Kutta d'ordre 4, qui est la plus performante, afin d'avoir des solutions numériques les meilleures possibles.

** Avec des points suffisamment rapprochés, les segments de tangentes reconstituent presque une solution approchée obtenue par la méthode d'Euler.

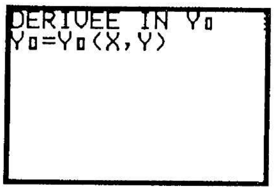
```
FnOff
ClrHome
ClrDraw
Disp "DERIVEE IN Y0"
Disp "Y0=Y0(X,Y)"
Pause
ClrHome
Menu("FENETRE","CENTREE ?",A,"NON CENTREE ?",B)
Lbl B
Disp "PAS=H"
Prompt H
Prompt Xmin
Prompt Ymin
Xmin+94H→Xmax
Ymin+64H→Ymax
10H→Xscl
10H→Yscl
Goto 1
Lbl A
Disp "X0="
Input X
Disp "Y0="
Input Y
Disp "PAS=H"
Input H
X-47H→Xmin
X+47H→Xmax
Y-31H→Ymin
Y+31H→Ymax
10H→Xscl
10H→Yscl
Line(X,Y-3H,X,Y+4H)
Line(X-3H,Y,X+3H,Y)
Goto 1
Lbl 1
For(X,Xmin+3H,Xmax,9H)
For(Y,Ymin+3H,Ymax,9H)
Y0→A
3/√(1+A²)→K
Line(X-KH,Y-KHA,X+KH,Y+HAK)
End
End
Pause
StorePic Pic1
Lbl 5
Menu("COURBES ?","ISOCLINES ?",C,"INTEGRALES ?",D,"RUNGE KUTTA ?",F,"AUCUNE",E,"REVOIR ?",G
Lbl C
Disp "ISOCLINES IN Y9
Pause
Func
FnOn 9
RecallPic Pic1
DrawF Y9
Pause
StorePic Pic2
FnOff 9
Goto 5
Lbl D
Disp "EQUATIONS IN Y8
Pause
Func
FnOn 8
RecallPic Pic1
DrawF Y8
StorePic Pic3
Pause
FnOff 8
Goto 5
Lbl F
.5H→H
Disp "X0="
Input X
Disp "Y0="
Input Y
While (X≤Xmax) and (Y≤Ymax) and (X≥Xmin) and (Y≥Ymin)
X→A:Y→B
Pt-On(A,B)
Y0→R
A+.5H→X
B+.5HR→Y
Y0→S
B+.5HS→Y
Y0→T
A+H→X:B+HT→Y
Y0→U
(1/6)(R+2S+2T+U)→K
A+H→X:B+KH→Y
End
RecallPic Pic1
StorePic Pic4
Pause
ClrDraw
Goto 5
Lbl G
Menu("REVOIR COURBES ?","ISOCLINES ?",H,"INTEGRALES ?",I,"RUNGE KUTTA",J,"NON",K)
Lbl H
RecallPic Pic2
Pause
ClrDraw
Goto 5
Lbl I
RecallPic Pic3
Pause
ClrDraw
Goto 5
Lbl J
RecallPic Pic4
Pause
ClrDraw
Goto 5
Lbl K
Goto E
Lbl E
```

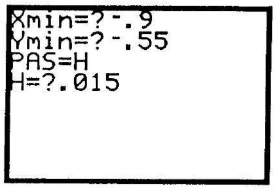
Voici le déroulement de ce programme pour l'équation différentielle y ' = 2y - x.
Les équations des isoclines et des courbes intégrales sont respectivement dans Y9 et Y8.
Les premiers écrans montrent les diverses équations utilisées ainsi que les valeurs données aux paramètres pris en compte.



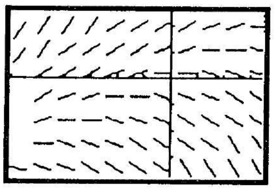


Les trois écrans suivants sont ceux qui apparaissent après lancement du programme, étant entendu que l'on a pris l'option "NON CENTREE" .



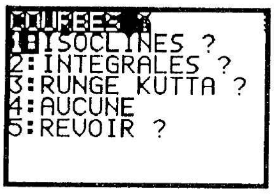


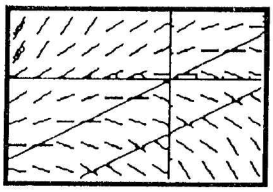
Après action sur la touche ENTER, apparaît l'écran suivant qui donne le champ des tangentes.

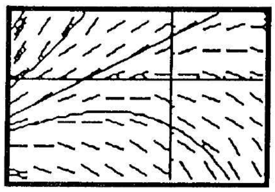


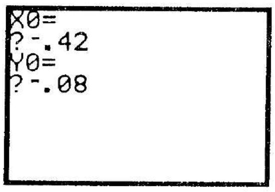
(La graduation qui apparaît sur les axes est égale à dix fois le pas, donc 10 H.)

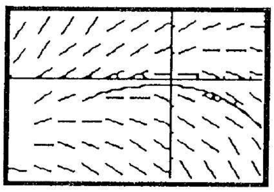
Après une autre pression sur la touche ENTER, apparaît le menu COURBES. Suivant le choix fait, on obtient les isoclines, des courbes intégrales, le point de départ de la courbe (obtenue par la méthode de Runge Kutta) passant par le point dont les coordonnées sont celles qui sont affichées.

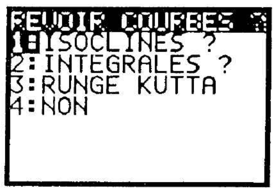












Le recours à la touche REVOIR dans le menu COURBES renvoie sur le menu REVOIR COURBES ? Les touches n'ont d'intérêt que pour autant que les courbes correspondantes ont été tracées !

Voici le programme spartiate annoncé p. 84 .

Ce programme trace le champ des tangentes dans la fenêtre définie par **Xmin**, **Ymin** et le pas H. Le repère est orthonormé.

```
FnOff
ClrHome
Disp "DERIVEE IN Y0"
Disp "Y0=Y0(X,Y)"
Pause
ClrHome
Disp "PAS=H"
Input H
Prompt Xmin
Prompt Ymin
Xmin+94H→Xmax
Ymin+64H→Ymax
10H→Xscl
10H→Yscl
Pause
Lbl 1
For(X,Xmin+3H,Xmax,9H)
For(Y,Ymin+3H,Ymax,9H)
Y0→A
3/√(1+A²)→K
Line(X-KH,Y-KHA,X+KH,Y+HAK)
End
End
```

III. Entrelacs de courbes

Il s'agit ici de déterminer des fonctions dont les dérivées vérifient un certain nombre de propriétés, en liaison avec un régionnement du plan. Ceci constitue donc une bonne introduction à la résolution des équations différentielles.

Population visée

Il s'agit en fait d'une réflexion sur les rapports entre une fonction (dérivable !) et sa dérivée. Cette séance a donc tout à fait sa place au début de l'année, au moment où ces notions sont revues, en TS, ou même en fin de 1ère S.

Organisation de la classe

L'intérêt de cette activité est de faire émerger un certain nombre de conceptions des élèves, de réfléchir ensemble sur des graphiques, standards ou non. En particulier pour la recherche d'une fonction explicite, on pourra utiliser des cadrages bien choisis pour persuader les élèves... que cela se recoupe bien...
Pour la recherche de fonctions monotones répondant à la question, l'échange organisé entre les différentes réponses des élèves (et les éléments de preuve !) pourra être fructueux... Le travail en groupes de 2 ou 3 (avec les mêmes modèles de calculatrices !) serait sans doute le mieux adapté.

Objectifs de l'activité

L'étude des équations différentielles en TS se ramène le plus souvent à l'apprentissage de recettes, à la reproduction de routines de calcul, bien illustrées par les exercices classiques donnés au baccalauréat. Sous cette forme, cette rubrique pourrait être supprimée sans dommage des programmes...
Mais une autre introduction de ces équations est possible, plus proche d'ailleurs des objectifs affichés par les programmes eux-mêmes :
"On développera une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation." (BO n° spécial du 2 Mai 1991, page 36, repris par le programme de 1994)
Il s'agit évidemment d'une introduction des équations différentielles basée sur leur étude qualitative. On présentera ici un exemple de progression s'inspirant de ce principe * .

* Les exercices qui suivent s'inspirent largement des documents élaborés par l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois pour les étudiants de Deug A.

Entrelacs de courbes

Soit la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x - 1$, représentant une fonction g, et f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les 3 conditions suivantes :

- si $f(x) < x^2 - 2x - 1$, alors $f'(x) < 0$
- si $f(x) = x^2 - 2x - 1$, alors $f'(x) = 0$
- si $f(x) > x^2 - 2x - 1$, alors $f'(x) > 0$

1. Tracer (P)

2. Dessiner plusieurs graphes possibles pour une telle fonction f

3. On veut maintenant rechercher des fonctions f vérifiant certaines contraintes en plus des conditions déjà énoncées :

a) Peut-on déterminer une fonction f constante sur $\mathbb{R}$?

b) Peut-on déterminer une fonction f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$?

c) Peut-on déterminer une fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

(Dans chaque cas, on justifiera précisément sa réponse. Si celle-ci est positive, on donnera un exemple précis de fonction répondant à la question.)

4. Peut-on trouver une fonction f convenable, polynôme du troisième degré, coupant la parabole P aux points d'abscisse 0 et 3 ?

On fera un dessin précis avec les courbes en question.

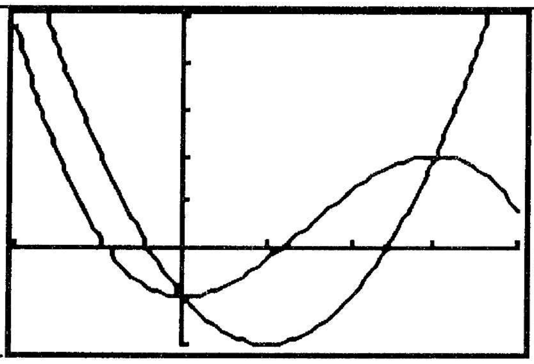
Éléments de réponse et prolongements

- Impossible naturellement de trouver une fonction constante solution (cela supposerait $f'(x) = 0$ en tout point, donc la courbe de f confondue avec P, donc f non constante...
- Impossible aussi de trouver une fonction strictement croissante solution sur $\mathbb{R}$ pour raison de limite : f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ n'est possible que si $f(x) > x^2 - 2x - 1$, ce qui implique $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, ce qui est incompatible avec le caractère croissant de f...

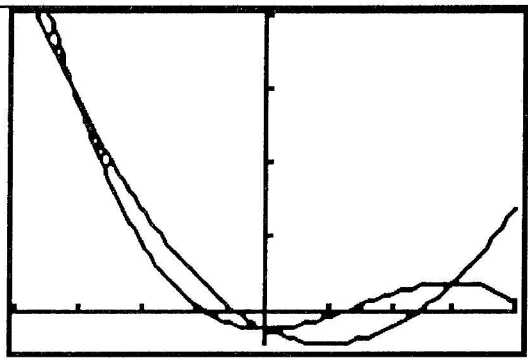
-Par contre on peut trouver une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions données (il suffit de prendre $f(x) = x - 1000$...) , ce qui permet au passage de discuter logique : dire que "si $f(x) > x^2 - 2x - 1$ alors $f' > 0$" n'implique pas qu'à un moment la condition "$f(x) > x^2 - 2x - 1$" soit réalisée !

- Pour la détermination du polynôme de degré 3 : la fonction f cherchée coupe (P) en (0;-1) et (3;2). Une résolution simple d'un système de 4 équations à 4 inconnues (on connaît deux points de la courbe avec leurs tangentes horizontales, pour cause de dérivée nulle) donne : $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2 - 1$.

Le problème est que l'on n'est pas assuré que la fonction trouvée convient "partout". Pour des raisons de puissance, le graphe de f recoupe nécessairement (P) à gauche...(voir graphiques 1 et 2 ci-dessous).



Graphique 1 : cela semble marcher...



Graphique 2 : hélas non !

Pour faire apparaître cette contradiction, il faut éventuellement suggérer aux élèves de changer de fenêtre sur leurs calculatrices, ou d'étudier les variations de la fonction différence f-g.
Pour obtenir tout de même une fonction solution, on peut alors faire, "à gauche", un raccord entre f et une fonction affine bien choisie, en veillant bien au caractère "continu et dérivable" du raccordement... (c'est l'occasion d'initier les élèves au tracé, sur leur calculatrice, des fonctions définies par morceaux). On peut aussi raccorder à gauche le graphe de f avec une portion de la parabole originelle convenablement translatée.

NB Le problème ci-dessus peut tout aussi bien être traité à un niveau "inférieur", en remplaçant g par une fonction affine. La parabole P est ainsi remplacée par une droite D. Il sera tout aussi impossible, pour les mêmes raisons de limite, de déterminer un polynôme du deuxième degré dont la dérivée serait négative "à gauche" de la droite, nulle "sur" la droite, et positive "à droite" de la droite (sic...).

IV. Equation $f \circ f = \exp$

Pour résoudre ce problème, on fera toutes les hypothèses "raisonnables" que l'on voudra, dès lors qu'elles permettent de faire avancer la résolution.

Ce problème, dans son ensemble, dépasse largement le niveau d'une terminale scientifique. Toutefois, la plupart des questions qui permettent une approche qualitative de la solution (des solutions), peuvent trouver leur réponse dans une telle classe. Nous pensons que l'obstacle le plus grand est sans doute que l'on travaille avec des fonctions non explicitement définies, et aussi, peut-être, que la notion de fonction composée n'est pas très solidement acquise. En outre, comme toujours, la non appropriation du problème - ce qui peut se produire dans cette situation tellement inhabituelle - concourt à la difficulté.

Voici tout d'abord une suite de neuf questions très simples qui permettent de dégrossir le problème. La 10^{e} permet de résoudre le problème.

Equation f o f = exp

1° Quel est l'ensemble de définition de f ?

2° L'application f est-elle injective * ? Si oui, que peut-on en conclure dans le cas où elle est continue ** ?

3° S f est dérivable, que peut-on dire de sa dérivée ?

On suppose maintenant que f est **continue**.

4° Que peut-on dire du graphe de f et de la première bissectrice ? En déduire que f est nécessairement croissante. Dans quelle région du plan se trouve alors le graphe de f ?

5° Quelles peuvent-être les limites en $+\infty$ et $-\infty$? En déduire que le graphe de f possède une asymptote horizontale (d'équation $y = a$). Que vaut f(a) ?

6° Dans quel demi-plan déterminé par la première bissectrice se trouve le graphe de f ?

7° Les graphes de f et de exp ont-ils un point commun ?

8° Le réel a déterminé au 5° peut-il être nul, ou de signe quelconque ?

9° Déduire de ce qui précède que le graphe de f se trouve au dessus de la première bissectrice, au dessus de la droite d'équation $y = a$, et en dessous du graphe de l'exponentielle.

10° Soit f une solution du problème. Sur l'intervalle $]-\infty, a]$, f est une fonction strictement croissante qui réalise donc une bijection de $]-\infty, a]$ sur $]a, 0]$. Montrer que, sur l'intervalle $]a, 0]$, f est entièrement déterminée par la donnée de f sur $]-\infty, a]$. (De manière plus précise, si $t \in]a, 0]$, il s'écrit f(x) pour un $x \in]-\infty, a]$, et $f(t) = f(f(x)) = \exp(x)$; de sorte que $f(t) = \exp o f^{-1}(t)$)

En déduire que pour tout couple (a, f_a) où a est un nombre réel strictement négatif et f_a une application définie sur $]-\infty, a]$, strictement croissante et appliquant $]-\infty, a]$ sur $]0,a]$, il existe une seule fonction f vérifiant $f o f = \exp$ et coincidant avec f_a sur $]-\infty, a]$ *** . En déduire qu'il existe une infinité de solutions au problème.

---

* Une application est injective si deux éléments distincts ont des images distinctes ; ou encore, si deux éléments ont même image par l'application, ils sont égaux. Par exemple, si une application f est strictement monotone, elle est injective : si deux éléments x et t sont distincts, on a, soit $x < t$, soit $t < x$, et donc, soit $f(x) < f(t)$, soit $f(t) < f(x)$ (l'application f est supposée strictement croissante) ; dans les deux cas, $f(x) \neq f(t)$.

** Il faut se convaincre, puisque f est injective, que dire que f n'est pas (strictement) monotone, équivaut à dire qu'il existe un triplet (a,b,c) tel que $a < b < c$ et $f(a) < f(b)$, $f(c) < f(b)$ (ou $f(a) > f(b)$ et $f(b) < f(c)$. La continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires donnent le résultat... attendu.

*** L'application f_a définie sur $]-\infty, a]$ se prolonge à $]a, 0]$, puis à $]0, \exp(a)]$, puis à $]\exp(a), \exp(0)]$, ...De manière plus précise, à partir de deux intervalles consécutifs $]a_i, a_{i+1}]$ et $]a_{i+1}, a_{i+2}]$ le suivant est $]\exp(a_i), \exp(a_{i+1})]$; cela résulte de la définition du prolongement de f.

Eléments de réponse et prolongements

1° La seule hypothèse que nous avons prise en compte est que f était continue. L'hypothèse de dérivabilité n'apportait pas de renseignements exploitables ; et c'est heureux, car une solution n'a "aucune raison d'être dérivable". L'exemple suivant le montre.

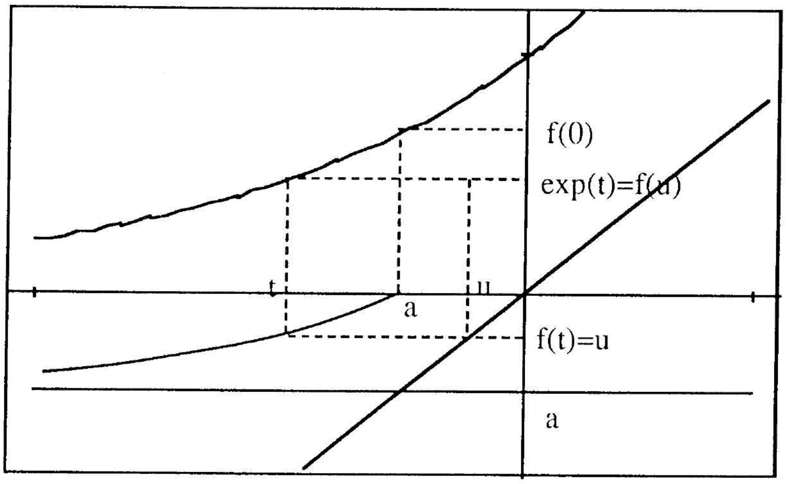
On part de f_{-1} = tan h (x+1) sur l'intervalle $]-\infty, -1]$, et on prolonge comme ci-dessus ;

* sur $]-1,0]$ par exp (-1 + Arg tan h (x)) ...etc.

Alors, f est dérivable à gauche en -1 (dérivée égale à 1) mais n'est pas dérivable à droite : tangente verticale.

On obtient ainsi, *un exemple de deux fonctions g et h, non dérivables, mais dont la composée est dérivable.*

2° L'interprétation géométrique du prolongement de f_a figure dans le dessin ci-dessous.



3° A titre d'exemple, voici une solution f définie par sa donnée f_a sur $]-\infty, -\frac{\pi}{2}]$

En fait, nous modifions un petit peu les notations. La fonction qui était notée f_a est maintenant notée f_1 et est définie sur l'intervalle $J_1 =]-\infty, \frac{\pi}{2}]$; les intervalles successifs et les expressions successives de la fonction f solution sur ces intervalles sont notés $J_2, J_3, \ldots$ et $f_2, f_3, \ldots$ de sorte que la restriction de f à chaque intervalle J_p n'est autre que f_p.

On prend $f_1 = \text{Arc}\tan(x+\frac{\pi}{2})$. Si τ est l'application : $x \longmapsto x + \frac{\pi}{2}$, on a $f_1 = \text{Arc}\tan \circ \tau$, de sorte que l'on définit f de la manière suivante :

* sur $J_2 =]-\frac{\pi}{2}, 0]$, $f_2 = \exp \circ \tau^{-1} \circ \tan$, soit, $f_2(x) = \exp(-\frac{\pi}{2} + \tan(x))$;

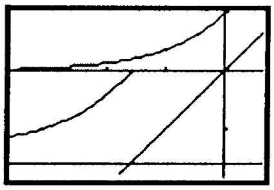
* sur $J_3 =]0, \exp(-\frac{\pi}{2})]$, $f_3 = \exp \circ \text{Arc tan} \circ \tau \circ \ln$, soit

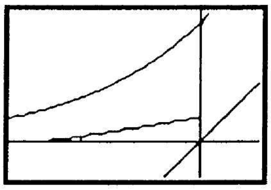
$$f_3(x) = \exp(\text{Arc tan}\,(\frac{\pi}{2} + \ln(x)))\ ;$$

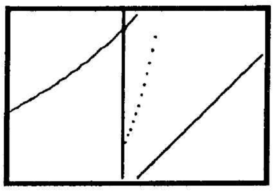
* sur $J_4 =]\exp(-\frac{\pi}{2}), \exp(0)]$, $f_4 = \exp \circ \exp \circ \tau^{-1} \circ \tan \circ \ln$, soit

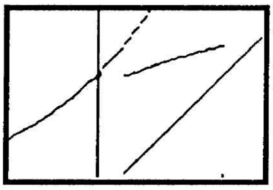
$$f_4(x) = \exp\,(\exp\,(\tan\,(\ln x) - \frac{\pi}{2})).$$

Nous nous arrêterons ici. Nous aurons ainsi une fonction définie de proche en proche sur quatre intervalles distincts pour laquelle nous donnerons une représentation graphique à l'aide d'une calculatrice (ici, la TI 82). Nous traçons également les graphes de exp, de la première bissectrice et de la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$.

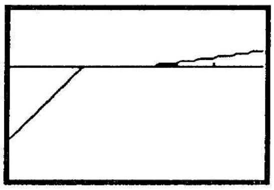


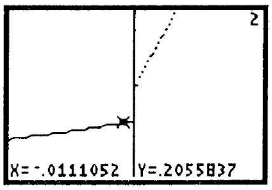


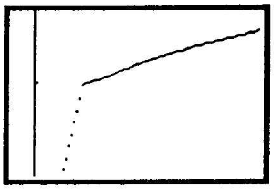




Ci-dessus et à gauche, les diverses fonctions définies sur les intervalles.
A droite, f définie sur la réunion des intervalles.
Ci dessous, les raccordements des diverses fonctions considérées.
Tous les graphes sont orthonormés.







On retrouve ce que nous avions remarqué, à savoir la non dérivabilité de la fonction f (du moins en certains points).

4° Le lecteur se persuadera que la réunion des intervalles J_k constitue une partition de $\mathbb{R}$ et donc que f est définie sur toute la droite. En effet, considérons les fonctions f_k et les intervalles J_k :

$$\longrightarrow J_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} J_k \xrightarrow{f_k} J_{k+1} \longrightarrow$$

On a $J_{k+1} = f_k(J_k) = \exp \circ f_{k-1}^{-1}\,(J_k) = \exp(J_{k-1})$, ce qui donne, compte tenu de la définition de f_2, la suite d'intervalles, :

$J_1 =]-\infty, a]$;

$J_2 =]\, a, \exp(-\infty)] =]a, 0]$;

$J_3 =]\exp(-\infty), \exp(a)] =]0, \exp(a)]$;

$J_4 =]\exp(a), \exp(\exp(-\infty))] =]\exp(a), 1]$;

$J_5 =]\exp(0), \exp(\exp(a))] =]\,1, \exp(\exp(a))]$...;

.....

$J_{k+1} =]\,(\exp)^{o(k-3)}(a), (\exp)^{o(k-2)}(a)]$, où $(\exp)^{o(p)}(a)$ désigne la valeur de l'application égale à la composée p fois de l'exponentielle calculée au point a.

5° Le lecteur pourra tracer par la même technique les graphes des fonctions f définies à partir des fonctions f_1 suivantes :

$f_1 = \exp(x+1) - 1$ sur l'intervalle $]-\infty, -1]$;

$f_1 = \tan h(x+1)$ sur l'intervalle $]-\infty, -1]$;

$f_1 = -1 - 1/x$ sur l'intervalle $]-\infty, -1]$.

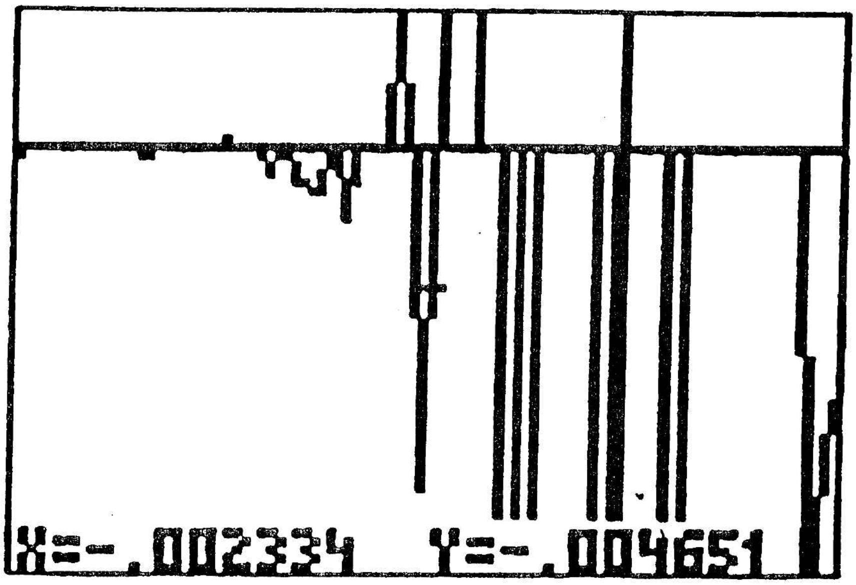
6° On pourrait se poser la question de savoir s'il existe une fonction *dérivable* vérifiant fof = exp. En tenant compte de la définition de f_2 à partir de f_1, on a, puisque $f_2(a) = 0$:

$$\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f_2(x)-f_2(a)}{x-a} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f_2(x)}{x-a} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\exp(t)}{f_1(t)-a},$$ où l'on a posé $t = f_2^{-1}(x)$.

Le raccordement des tangentes en a dépend donc de la "manière" dont l'exponentielle et la fonction f_1 tendent vers a en moins l'infini. Cette manière étant connue, et la dérivée à droite en a étant donc connue, il suffit de modifier f_1 à gauche de a pour que les dérivées à gauche et à droite de a soient les mêmes. On fabrique alors une nouvelle fonction f_1 qui coïncide avec l'ancienne sur $]-\infty, b]$, pour un $b < a$ et qui, sur $]b, a]$ est une fonction continue et dérivable dont la dérivée à gauche en a est égale à la dérivée à droite. On sait que l'on peut raccorder ces deux fonction de manière que l'on obtienne une fonction dérivable.

En outre, la définition par morceaux de f, et la relation définissant f_k en fonction de f_{k+1} montrent que si f est dérivable en a elle l'est en chaque extrémité de tous les intervalles J_n.

V. Discret et continu



Discret et continu

Discret/Continu... Des rapports étranges. On s'intéresse ci-dessous à deux types de situation. D'où il ressort que, si un processus est lent, l'observation discrète, ou continue, donne à peu près les mêmes résultats. Mais si le processus est rapide, ce n'est pas le cas... Moralité, mieux vaut ne pas quitter des yeux le lait qui est sur le feu !

Population visée

Cette activité s'adresse à un public de TS. Plus exactement les thèmes abordés, en particulier les suites récurrentes, situent plutôt ce travail dans l'enseignement de spécialité. Il est conseillé d'avoir déjà traité en classe les suites et les équations différentielles avant de proposer ce travail.

Organisation de la classe

Les deux problèmes qui suivent sont complémentaires, mais les deux études ajoutées sont un peu longues... Il convient donc de ne pas les traiter simultanément. Laisser du temps au temps...

Un dernier conseil : ne pas se précipiter tout de suite dans les calculs, laisser le temps que des conjectures soient formulées sur le comportement de la suite, et, après les calculs, revenir aux conjectures initiales !

Objectifs de l'activité

Elle est l'occasion de se pencher, en utilisant les outils à disposition, sur des points qui ne sont pas souvent abordés en classe :

- sensiblité d'une suite récurrente à la variation de son premier terme ;
- rapidité de divergence ;
- et surtout comparaison entre processus discrets et processus continus.

Cela débouche bien sûr sur une réflexion de fond sur l'écart irréductible entre ces deux domaines. Une réflexion d'autant plus utile pour les élèves que la manipulation fréquente des calculatrices graphiques estompe cette différence de nature.

Cette activité peut déboucher aussi sur la mise au point de programmes de résolution numérique d'équations différentielles. Ces programmes fonctionnent nécessairement sur un mode discret pour traiter des problèmes continus. D'où les dérapages qui peuvent être observés, et que nous illustrons à la fin de ce chapitre.

Problème 1
Processus discrets et processus continus à croissance lente *

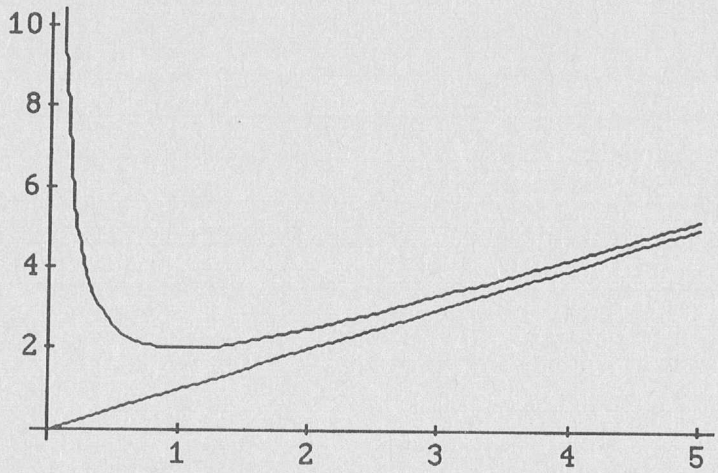
A. Etude d'un processus discret.

On se propose d'étudier la suite (u_n) des nombres réels définis par la relation de récurrence $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$ et la condition initiale $u_0 = c$, où c est supérieur à 1.

I. Etude expérimentale (on prendra dans cette question c = 2.)

1. Programmer cette suite. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur son sens de variation ? Son éventuelle convergence ?

2. Montrer graphiquement la construction des premiers termes de la suite, en vous appuyant sur les courbes des fonctions $x \to x$, et $x \to x + \frac{1}{x}$. Retrouvez-vous les conjectures de la question précédente ?



II. Etude de la nature de la suite (u_n)

1. Montrer par récurrence que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1.
2. En déduire que la suite est strictement croissante
3. Si la suite était convergente, quelle équation vérifierait nécessairement sa limite λ ?
4. En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
5. Prouver alors que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

Les résultats des questions 4 et 5 vous semblent-ils compatibles ? Confirment-ils les observations faites en début d'activité ?

---

* Idée tirée de Ovaert et Verley, 1983, *Analyse, Volume 1,* page 234, Cedic Nathan

III. Etude de la rapidité de la divergence

La suite diverge donc "lentement". On se propose maintenant de déterminer le terme général d'une suite (v_n)"simple", qui ait un comportement proche de celui de la suite étudiée, c'est à dire telle que $(\frac{v_n}{u_n})$ converge vers 1 (on dira que les deux suites sont "équivalentes").

1. En utilisant $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}$ et donc $u_{n+1} + u_n = 2u_n + \frac{1}{u_n}$ établir la double inégalité :

$$2 \leq u_{n+1}^2 - u_n^2 \leq 2 + u_{n+1} - u_n \quad (*)$$

2. En utilisant cette inégalité "en cascade", prouver l'inégalité :

$$2n \leq u_n^2 - c^2 \leq 2n + u_n - c$$

3. Prouver alors :

$$u_n - \frac{c^2}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n} + 1 - \frac{c}{u_n}$$

En déduire que la limite de $\frac{n}{u_n}$ est $+\infty$.

4. En reprenant alors l'inégalité (*) prouver enfin :

$$1 \leq \frac{u_n^2}{2n} - \frac{c^2}{2n} \leq 1 + \frac{u_n}{2n} - \frac{c^2}{2n}$$

5. Conclure alors que la suite (u_n) est équivalente à la suite $\sqrt{2n}$, et confronter ce résultat aux valeurs trouvées lors de la recherche expérimentale de la première question. Etudier l'influence du choix du premier terme c sur le comportement de la suite pour les grandes valeurs de n.

c	u_{10}	u_{100}	u_{1000}	$\sqrt{2n}$,

B Etude du processus continu correspondant

On se propose maintenant l'étude sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{y}$, assortie de la condition initiale $y(0) = c > 1$

1. En quoi cette équation différentielle "ressemble-t-elle" à la suite récurrente qui vient d'être étudiée ?

2. Pouver que les fonctions solutions sont nécessairement strictement croissantes, et que leurs dérivées secondes sont strictement négatives. Peut-on en conclure quelques chose pour leur limite quand x tend vers $+\infty$?

3. En prenant $c = 2$, tracer une esquisse d'une fonction solution (sur $[0,10]$, avec un pas de 0,5). Avec cette condition initiale, la fonction solution est-elle unique ?
Que se passe-t-il si on choisit un "pas" de 1 ? Montrer alors que l'on retrouve un problème déjà abordé.

4. On résoud maintenant l'équation différentielle. Montrer qu'elle équivaut à $yy' = 1$. En reconnaissant à gauche et à droite du signe = les dérivées de fonctions connues, en déduire que les solutions sont de la forme $\sqrt{2x + K}$, soit, en tenant de la condition initiale, $y = \sqrt{2x+c^2}$. Comparer cette solution avec la solution construite par approximations successives à la question 3.

5. Montrer enfin que la fonction solution et la fonction $\sqrt{2x}$ sont équivalentes en (au sens où on l'a vu dans la partie A III). Conclure alors en comparant les solutions du processus discret (suite récurrente) et du processus continu (équation différentielle). Comment expliquer cette similitude ? Pensez-vous que ce résultat est généralisable ?

Problème 2
Processus discrets et processus continus à croissance rapide

A. Etude d'un processus discret.

On se propose d'étudier la suite (u_n) des nombres réels définis par la relation de récurrence $u_{n+1} - u_n = u_n^2$ et la condition initiale $u_0 = c$, où c est supérieur à 1.

I. Etude expérimentale (on prendra dans cette question c = 2, puis c=3)

1. Programmer cette suite. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur son sens de variation ? Son éventuelle convergence ?
2. Montrer graphiquement la construction des premiers termes de la suite, en vous appuyant sur les courbes des fonctions $x \to x$, et $x \to x + x^2$. Retrouvez-vous les conjectures de la question précédente ?
3. L'évolution de la suite est-elle sensible au choix du premier terme c ? Comparer avec le problème précédent.

II. Etude de la nature de la suite (u_n), c quelconque supérieur à 1

1. Montrer que la suite est strictement croissante.
2. Si la suite était convergente, quelle équation vérifierait nécessairement sa limite λ ?
3. En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Comparer la divergence de cette suite avec la divergence de la suite du premier problème.

III. Etude de la rapidité de la divergence

La suite diverge "rapidement". On se propose maintenant d'en rechercher un équivalent.

1. On considère la suite définie par $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$. En calculant $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.
2. Etablir ensuite la majoration $v_{n+1} - v_n \leq \frac{\ln 2}{2^{n+1}}$. En déduire l'inégalité :

$$v_n - c \leq \ln 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^n} \right)$$

puis : $v_n \leq c + \ln 2$

3. En déduire que la suite (v_n) est convergente. On notera a sa limite.

4. En utilisant l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, prouver que $\ln u_{n+1} \leq \ln (u_n^2) + \frac{1}{u_n}$

En déduire l'inégalité :

$$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}[\ln u_{n+1} - 2\ln u_n] \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n}$$

5. En écrivant cette inégalité en cascade, du rang n au rang n+p, prouver l'inégalité

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

6. Cette inégalité étant vraie pour tout p, en déduire que :

$$0 \leq a - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

7. En déduire enfin, en remplaçant v_n par sa valeur en fonction de u_n que :

$$0 \leq 2^n a - \ln u_n \leq \frac{1}{u_n}$$

8. En déduire que $(2^n a - \ln u_n)$ a pour limite 0, puis que $\exp(2^n a - \ln u_n)$ a pour limite 1, enfin que la suite u_n est équivalente à $e^{2^n a}$.

9. Reprendre alors les cas particuliers (c=2, puis c=3).

- Calculer des valeurs approchées de a à 10^{-6} près. Qu'est-ce qui garantit cette précision ?
- Remplir alors le tableau suivant :

c	a	u_5	u_7	$e^{2^n a}$
2				
3				

- Comparer ce tableau avec le tableau du problème précédent. Quelles remarques pouvez vous faire ?

B Etude du processus continu correspondant

On se propose maintenant l'étude sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y' = y^2$, assortie de la condition initiale $y(0) = c > 1$

1. En quoi cette équation différentielle "ressemble-t-elle" à la suite récurrente qui vient d'être étudiée ?

2. Pouver que les fonctions solutions sont nécessairement croissantes, et que leurs dérivées sont aussi croissantes. Peut-on en conclure quelques chose pour leur limite quand x tend vers $+\infty$?

3. En prenant c = 2, tracer une esquisse d'une fonction solution (sur [0,5], avec un pas de 0,5). Avec cette condition initiale, la fonction solution est-elle unique ?

4. On résoud maintenant l'équation différentielle. Montrer qu'elle équivaut à $\frac{y'}{y^2} = 1$. En reconnaissant à gauche et à droite du signe "=" les dérivées de fonctions connues, en déduire que les solutions sont de la forme $\frac{-1}{x+k}$, soit, en intégrant la condition initiale $y = \frac{c}{1-cx}$. Comparer cette solution avec la solution construite par approximations successives à la question 3.

5. Constatez alors que la solution maximale de l'équation différentielle existe sur $[0 ; \frac{1}{c} [$ (on s'intéresse ici aux solutions pour x positif).

Comparer alors avec les solutions du processus discret mises en évidence au II. Comment expliquer cet écart ?

6. Comparer alors les situations issues du problème 1 (divergence lente), et du problème 2 (divergence rapide). En tirer une morale sur la nature différente des processus discrets et des processus continus, et sur les conditions de rapprochements... ponctuels !

Eléments de réponse et prolongements

Eléments de correction pour le problème 1

A. Etude de la suire récurrente.

II Le rapprochement entre le fait que la suite diverge vers l'infini, alors que la différence de deux termes consécutif tend vers 0 doit être fait : pour les élèves il y a trop souvent équivalence entre "la suite converge" et "la différence de deux termes consécutifs tend vers 0"...

III Par produit des deux égalités, on obtient :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

Mais on a démontré que tous les termes de la suite étaient plus grands que 1, donc u_n^2 est plus grand que u_n, et donc les inverses sont dans l'ordre...inverse. On a donc :

$$2 < u_{n+1}^2 - u_n^2 < 2 + \frac{1}{u_n}$$

Or on dispose de $\frac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_n$ par définition de la suite,.on obtient ainsi, comme voulu

$$2 < u_{n+1}^2 - u_n^2 < 2 + u_{n+1} - u_n$$

La sommation de toutes les inégalités obtenues en faisant varier n entre 0 et (n-1) donne bien :

$$2n \leq u_n^2 - c^2 \leq 2n + u_n - c$$

En considérant l'inégalité de droite, et en divisant par u_n, on obtient

$$u_n - \frac{c^2}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n} + 1 - \frac{c}{u_n}$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche aussi, d'où par application des théorèmes d'encadrement, $\frac{n}{u_n}$ aussi.

La dernière inégalité (proposée en 4 de l'énoncé donne bien que $\frac{u_n^2}{2n}$ tend vers 1. Ainsi la suite (u_n^2) est équivalente à la suite (2n), et la suite (un) est équivalente à la suite ($\sqrt{2n}$.)

Il est alors utile de compléter le tableau proposé pour bien noter la pertinence de l'équivalent, et la relative "indifférence" de la suite au choix du premier terme.

On peut aussi user d'une autre méthode. La recherche d'un équivalent pour cette suite à croissance lente est grandement facilitée par des méthodes plus puissantes, hors de portée des élèves de lycée. Il s'agit des développements limités, et du théorème de Césaro qui stipule :

"si une suite (u_n), réelle ou complexe, converge vers une limite λ, alors la "moyenne arithmétique" des premiers termes, c'est à dire la suite ($\frac{u_1+u_2+u_3+...+u_n}{n}$), converge vers la même limite λ. "

On use de ce résultat comme suit :

- on cherche a tel que $D_n = (u_{n+1})^a - (u_n)^a$ tende vers une limite finie.

$D_n = (u_{n+1})^a - (u_n)^a = (u_n + \frac{1}{u_n})^a - (u_n)^a = (u_n)^a(1+\frac{1}{u_n^2})^a - (u_n)^a$

On use alors d'un développement limité, puisque $\frac{1}{u_n}$ converge vers 0. Ainsi :

$D_n = (u_n)^a(1+\frac{a}{u_n^2} + o(\frac{1}{u_n^2})) - (u_n)^a = a(u_n)^{a-2} + o(1)$

Il est clair que D_n tend vers une limite fini si et seulement si a = 2. Alors D_n converge vers 2.

Alors $\frac{D_1+D_2+D_3+...+D_n}{n}$, par application du théorème de Césaro, converge aussi vers 2.

Or, par un savant jeu de domino, $\frac{D_1+D_2+D_3+...+D_n}{n}$ est égal à $\frac{(u_{n+1})^2 - (u_0)^2}{n}$ qui converge donc vers 2. Ainsi $(u_{n+1})^2 - (u_0)^2$, donc $(u_{n+1})^2$, est équivalent à 2n.
Par translation d'indice, $(u_n)^2$ est équivalent à 2(n-1), donc à 2n.
Pour finir, u_n est bien équivalent à $\sqrt{2n}$.

B. Etude de l'équation différentielle "correspondante"

1. La ressemblance entre les deux processus est assez claire, si on pose $u_n = f(n)$. On a, du côté de la suite, le "taux de variation" entre f(n) et f(n+1) qui est égal à l'inverse de f(n). Du côté de l'équation différentielle, on a la dérivée, c'est à dire "la limite du taux de variation" égale aussi à l'inverse de f(x). Cette proximité éclate encore avec plus de clarté au point 3 de cette partie : on propose de résoudre numériquement l'équation différentielle avec un pas de 0,5. Et si on prend un pas de 1.... l'étude de l'équation différentielle se ramène purement et simplement à l'étude de la suite récurrente précédemment étudiée !

4. La résolution de l'équation différentielle proposée n'est certes pas au programme, mais elle est à la portée des élèves qui connaissent des primitives des formes uu'.

On obtient ainsi $\frac{1}{2}y^2 = x + K$. On a déjà prouvé que les fonction étaient nécessairement croissantes, donc la solution $\sqrt{2x+2K}$ s'impose, et, via la condition initiale, $\sqrt{2x+c^2}$.
Il est alors immédiat, en prouvant que la limite de leur quotient est 1, que les fonctions $\sqrt{2x+c^2}$ et $\sqrt{2x}$ sont équivalentes.

5. La proximité des solutions de l'équation différentielle et de la suite récurrente s'explique par la croissance lente des solutions. Ainsi il y a une faible variation de la fonction entre n et n+1. L'observation discrète ne s'éloigne pas trop de l'observation continue. Cela explique aussi que les procédés de résolution numérique de l'équation différentielle vus à la question 3 ci-dessus fonctionnent assez bien.

Eléments de correction pour le problème 2

Disons le tout de suite, l'étude de ce problème est plus délicate que celle du précédent...

A. Etude de la suite récurrente.

I. Il est clair ici que la croissance de la suite est très rapide, avec une sensibilité certaine au choix du premier terme.

II. La suite est croissante, du fait du signe de la différence de deux termes consécutifs. Ainsi elle a nécessairement une limite, soit finie, soit plus l'infini. Comme l'équation $x=x+x^2$ n'a qu'une solution, 0, et que tous les termes de la suite sont supérieurs à 1, la suite ne peut pas converger. Elle diverge donc vers plus l'infini.

III. Vient alors l'heure de la recherche, assez délicate, d'un équivalent * . Suivons le plan proposé.

1. On commence par rechercher une suite "dérivée" de u_n, mais qui converge. Pour cela, on "écrase" suffisamment u_n, voilà pourquoi on introduit $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$. On a alors:

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln u_{n+1} - 2\ln u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} [\ln (u_n^2+u_n) - \ln(u_n^2)] = \frac{1}{2^{n+1}} \ln (1 + \frac{1}{u_n})$

Ainsi, on a bien $v_{n+1} - v_n > 0$

2. On a même plus : puisque u_n est plus grand que 1, $\frac{1}{u_n}$ est inférieur à 1. D'où : $v_{n+1} - v_n < \frac{1}{2^{n+1}} \ln 2$. Par addition des inégalités du même type obtenues en faisant varier n, et par la classique élimination des dominos, il reste : $v_n - c < \ln 2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n})$. Par calcul de la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on majore la parenthèse par 1. Et ainsi on a bien $v_n < c + \ln 2$.

3. La suite (v_n) majorée et croissante, est donc convergente. On note a sa limite.
Suggestion : on peut ici rechercher des valeurs approchées de a, pour des valeurs initiales diférentes de c. Illustration numérique reposante (!) dans un océan d'inégalités variées...

Remarque : il est tentant d'écrire alors que $\frac{1}{2^n} \ln u_n$ est équivalent à a, donc que $\ln(u_n)$ est équivalent à $2^n a$, et que donc (u_n) est équivalent à $(e^{2^n a})$. Hélas, trois fois hélas, on ne peut pas appliquer la fonction exponentielle à des équivalents... Il faut donc replonger dans le dit océan d'inégalités ...

4. L'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, bien connue, gagne à être illustrée à chaque occasion graphiquement. Illustration du caractère concave de la fonction logarithme, la courbe est sous sa tangente en 0. On dispose donc de :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln (1 + \frac{1}{u_n}) \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$$

5. Une nouvelle utilisation des dominos, du rang n au rang n + p, donne :

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n} + \frac{1}{2^{n+2} u_{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p} u_{n+p-1}}$$

On utilise ensuite le fait que la suite (u_n) est croissante, donc la suite $(\frac{1}{u_n})$ est décroissante. L'inégalité précédente donne donc :

---

* Le lecteur curieux pourra vérifier que la méthode indiquée plus haut, type "Césaro", ne fonctionne pas ici.

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_n} + \frac{1}{2^{n+2}u_n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}\,u_n} \leq \frac{1}{u_n}\left[\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}}\right]$$

Et pour finir :

$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \dfrac{1}{2^n u_n}$ (en utilisant à nouveau la somme des termes d'une suite géométrique)

6. Ceci est valable pour tout naturel p, ce qui donne, par passage à la limite :

$$0 \leq a - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

7. Soit, en remplaçant v_n par son expression en fonction de u_n :

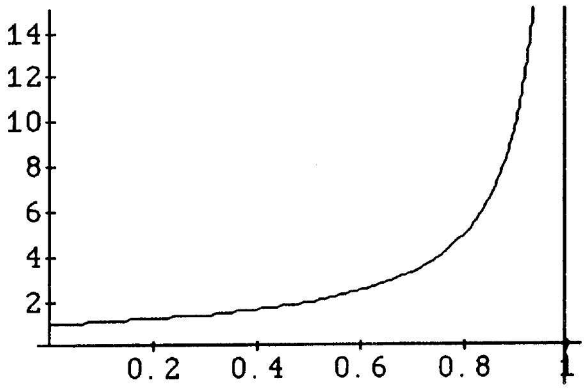
$$0 \leq 2^n a - \ln u_n \leq \frac{1}{u_n}$$

8. La suite $(2^n a - \ln u_n)$ a pour limite 0. Par passage, celui-ci licite, à l'exponentielle,

$\exp(2^n a - \ln u_n)$, c'est à dire $\dfrac{\exp(2^n a)}{u_n}$, a pour limite 1. On a bien l'équivalence souhaitée pour la suite étudiée.

B. Etude de l'équation différentielle associée.

L'intégration de l'équation différentielle ne pose pas de problème. Mais on trouve une solution maximale qui n'est définie que sur $[0,1/c[$, $f(x) = \dfrac{c}{1-cx}$.



Ci-contre la solution maximale pour x positif, et vérifiant $f(0) = c = 1$

Ce qui est "spectaculaire" ici, c'est que la croissance très rapide du processus continu contraint à un "décrochement" dès $x = \frac{1}{c}$, alors que le processus discret, avec une croissance très forte, est, lui, défini pour tout n.

Ceci a évidemment des conséquences pour les programmes de résolution numérique de cette équation différentielle. Ainsi, à la question 2, on demandait une résolution approchée, graphique, en prenant c = 2. Les élèves constateront que les solutions tracées franchissent allègrement la frontière de $\frac{1}{2}$, pourtant fin de la vie de la solution maximale - théorique - de l'équation différentielle.

A propos des méthodes de résolution numérique des équations différentielles

Les résolutions numériques classiques de cette équation différentielle aboutiront toutes à de semblables errements : en effet, elles se ramènent toutes à la résolution la suite récurrente, qui n'est pas de même nature que l'équation différentielle !

Ainsi la méthode d'Euler : elle consiste, pour un pas h choisi, à évaluer au point (x;y) la dérivée, qui est ici $1/y^2$, puis à prendre pour image de x+h : f(x)+(x+h)f ' (x), et ainsi de suite... Elle revient donc à confondre la tangente en x et la sécante entre x et x+h.
On peut programmer cette méthode sur une calculatrice comme suit :

```
Prompt A,B,H
Disp "Y0"
Input Y
ClrHome
DispGraph
A→X
Pt-On(X,Y)
While X<B
X+H→X
Y^2→Z
Y+ZH→Y
X+H→X
Pt-On(X,Y)
End
```

(ce programme est exprimé dans le "langage" TI 82, mais se convertit aisément pour les autres calculatrices)

```
WINDOW FORMAT
Xmin=0
Xmax=1.5
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=30
Yscl=5
```

On fait alors afficher simultanément dans le cadre de la fenêtre ci-dessus la solution de l'équation différentielle trouvée théoriquement ($y = -\frac{1}{1-x}$), et les points de la solution construite par la méthode d'Euler, avec des pas différents.

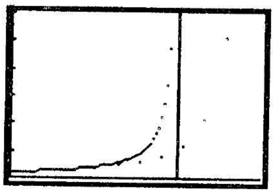
```
prgmEULER
A=?0
B=?2
H=?.001
Y0
?1
```

h = 0,001

```
prgmEULER
A=?0
B=?2
H=?.011
Y0
?1
```

h = 0,11

```
prgmEULER
A=?0
B=?2
H=?.13
Y0
?1
```



h = 0,13

On remarque facilement que, plus h est grand, plus l'approximation par Euler de la solution de l'équation différentielle est grossière. Et en particulier plus le franchissement de la frontière x = 1 est rapide. Mais, de toutes façons, ce franchissement s'effectuera pour toutes les approximations numériques de la solution de l'équation, alors que celle-ci, en théorie, ne franchit pas 1...

En guise de généralisation... partielle

Pour finir, on peut se poser la question : à partir de quel exposant α observe-t-on le décrochage entre l'équation différentielle $y' = y^{\alpha}$ et la suite récurrente associée ?

<u>Pour $\alpha = 1$</u>

Il s'agit alors de comparer la suite récurrente suivante, débouchant sur une suite géométrique, et l'équation différentielle "associée"

$y' = y$ $\qquad$ $y(0) = 1$

$u_{n+1} - u_n = u_n$ $\qquad$ $u_0 = 1$

On trouve $y = e^x$ et $u_n = 2^n$

On trouve donc deux "fonctions" <u>qui sont de même nature...</u> (fonctions exponentielles), <u>mais qui ne sont pas équivalentes au voisinage de l'infini</u> ($\frac{e^n}{2^n}$ tend vers l'infini).

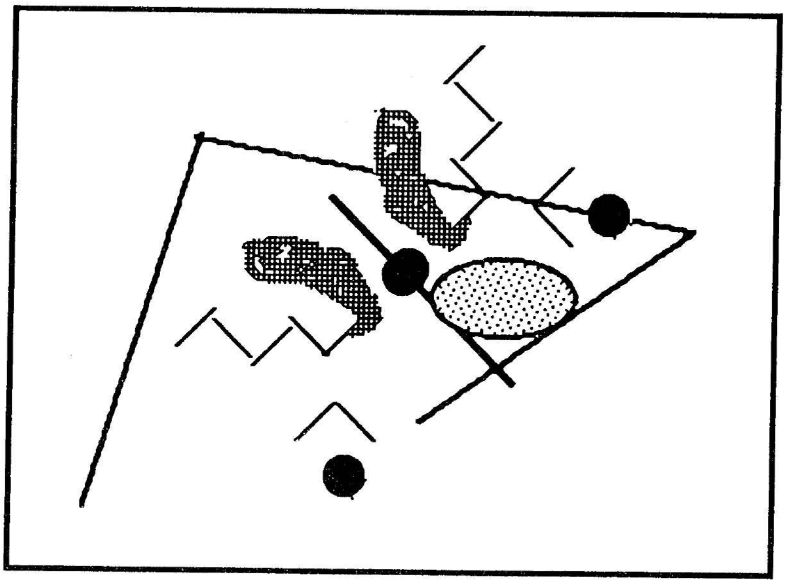
<u>Pour $\alpha > 1$</u>

Soit donc l'équation différentielle $y' = y^{\alpha}$, $y(0) = 1$, avec $\alpha > 1$

On trouve $y = \dfrac{1}{\sqrt[\alpha-1]{(1-\alpha)x+1}}$, et cette fonction est définie, pour x positif, sur $[0, \frac{1}{\alpha-1}[$.

Donc, dès que α est strictement supérieur à 1, s'opère le décrochage entre la résolution de l'équation différentielle (solution maximale définie seulement au voisinage de 0), et la suite récurrente, définie sur $\mathbb{N}$.

Références et références bibliographiques



Où l'on recherche l'inspiration...

On se propose de répondre à l'intéressante question suivante : quelle est la probabilité pour notre honorable lecteur d'inspirer, au moment même où il découvre ses lignes, une molécule de gaz expirée par Jules César quand il dit : "Tu quoque, mi fili..."

L'objectif de l'activité est double :

1) Montrer qu'un calculatrice ne permet pas de tout calculer...

2) Prouver qu'on n'échappe pas à "l'inspiration " des grands anciens...

<u>Données numériques :</u>

On admettra que l'air contient 3.10^{22} molécules par litre (nombre d'Avogadro = 6.10^{23}, volume molaire : 20 litres).

On admettra que l'on expire, ou inspire, un litre d'air à chaque respiration.

On admettra que la couche atmosphérique est homogène, d'une épaisseur de 10 km, et que la terre a un rayon de 6000km.

Enfin on admettra que les molécules expirées par Jules César... expirant sont également réparties dans l'atmosphère * .

<u>Résolution :</u>

Le volume de l'atmosphère est ainsi de

$\frac{4}{3}\pi\,(6010^3\text{-}6000^3) = 4{,}5.10^9 \text{ km}^3 = 4{,}5.10^{21}$ litres **

Il y a donc, environ, 6 molécules de gaz "Jules César" par litre d'atmosphère.

Lors d'une inspiration, on va ingérer un litre d'air, c'est à dire successivement (si l'on peut dire...) 3.10^{22} molécules.

On s'intéresse à l'évènement A : "ingérer au moins une molécule Jules César".

Cet évènement est en fait très complexe : A est réalisé si on ingère une, ou deux, ou trois, ou..., ou 3.10^{22} molécules de ce type.

On va donc s'intéresser à l'évènement contraire, B : "n'ingérer aucune molécule Jules César".

B est réalisé si la première molécule ingérée n'est pas une molécule JC *** , et si la deuxième molécule ingérée n'est pas une molécule JC, etc. 3.10^{22} fois de suite. On peut supposer que ces 3.10^{22} évènements successifs sont indépendants (vu le nombre de molécules ambiantes...).

La probabilité qu'une molécule ingérée ne soit pas JC est $\left(1 - \frac{6}{3.10^{22}}\right)$.

---

* Le lecteur suspiciaux trouvera peut être cette hypothèse déraisonnable. Erreur la difusion moléculaire, les grands mouvements convectifs de l'atmosphère et le brassage dû à la turbulence assurent une telle répartition. Voir sur ce point, Brezin E., 1994, "Cours de physique statistique", Ecole Polytechnique.

** On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$

*** Ici, c'est à dire localement, JC signifie "Jules César"

La probabilité de B est donc $(1 - \frac{6}{3.10^{22}})^{3.10^{22}}$.

Et la probabilité de A est $1 - (1 - \frac{6}{3.10^{22}})^{3.10^{22}}$.

Le problème qui se pose est celui du calcul : hors de portée d'une calculatrice standard... qui donne pour résultat 0.

Un petit coup de théorie. On appelle x la probabilité de B : $(1 - \frac{6}{3.10^{22}})^{3.10^{22}}$.

On calcule son logarithme est $\ln x = 3.10^{22} \ln(1 - \frac{6}{3.10^{22}})$.

Nous savons que quand u est "petit", ln(1-u) peut être confondu avec -u.
Ainsi lnx "n'est pas loin" de -6. * .
Donc x, c'est à dire la probabilité de B, est voisine de e^{-6}, c'est à dire 0,002.
Ainsi la probabilité de respirer au moins une molécule Jules César est-elle de l'ordre de 0,998.

On peut aller j'usqu'au calcul de l'espérance mathématique de la variable aléatoire "nombre de molécules JC inspirées lors d'une inspiration". On trouve, en appliquant la loi binomiale, E(x) = np, où n est le nombre de molécules ingérées en une inspiration (soit $n = 3.10^{22}$) et p la probabilité que l'une d'elle soit une molécule JC ($p = \frac{6}{3.10^{22}}$) ;

E(x) = 6.

Etonnant, non ? **

La morale de l'histoire : ceci est une exellente introduction à la bibliographie qui suit car .... on n'échappe pas à "l'inspiration" des anciens.

---

* C'est ici que le raisonnement pêche un peu. Mais au niveau TS, on peut difficilement aller plus loin. Il faudrait, en toute rigueur, faire un développement limité de ln(1-u) , c'est à dire aller jusqu'au degré deux, pour pouvoir justifier l'approximation choisie.

** On pourra, selon les goûts, remplacer Jules César par Platon, Aristote ou Vercingétorix, l'essentiel est que l'individu soit suffisamment "ancien".

Références bibliographiques

Des livres.

Gasquet Sylviane *Fenêtres sur courbes*, CRDP de Grenoble, 1994.
Sylviane Gasquet propose "une approche graphique de l'analyse mathématique". Son livre est une mine d'idées pour qui veut renouveler l'enseignement de l'analyse (en vrac: une parabole absorbe une fonction affine, mais un polynôme du troisième degré ne l'absorbe pas ; les courbes de $\sqrt{x+1}$ et de $\sqrt{x}$ sont asymptotes, alors que les courbes de leurs réciproques, leur correspondant pourtant par une symétrie, ne le sont pas...)

Mais ce travail présente deux lacunes qui limitent considérablement sa portée :
- S. Gasquet se refuse, par principe semble-t-il, à une réflexion d'ordre didactique. Du même coup, elle se prive de toute analyse critique de la portée de ses travaux dans les classes. Du moins si on veut bien reconnaître que des citations de deux "excellents élèves de première S" découvrant ce type d'activité - "ça nous oblige à réfléchir - " n'ont pas valeur de bilan...
- On pourrait cependant concevoir son travail comme une proposition d'ingénierie, donnant un autre statut au graphique, et s'appuyant sur des hypothèses publiées par ailleurs. Mais alors on retombe sur le deuxième travers de l'ouvrage : alors même que S. Gasquet présente son livre comme répondant à la généralisation de calculatrices graphiques de plus en plus sophistiquées, elle ne dit pas un mot de l'intégration de ces outils dans le cours. Peut-on imaginer faire abstraction de ces calculatrices, et envisager une éducation au graphisme, à ses conventions et à ses codes, pour ensuite revenir aux images "automatiques" (qui ont de toutes autres conventions et codes...)?

Des brochures.

R. Bernard, C.Faure, M. Noguès, Y. Nouazé, L. Trouche
- *Des activités mathématiques en classes scientifiques (1S et TS)*, 1994. IREM de Montpellier.

C. Faure, M. Noguès, Y. Nouazé, L. Trouche
- *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, 1993. IREM de Montpellier.
- *Quelques idées pour la mise en pratique des modules en seconde*, 1993. IREM de Montpellier.

Des recherches didactiques.

Canet J. F., *Exemple d'utilisation d'un système de mathématique symbolique*, 1994. DEA de didactique des disciplines scientifiques, USTL Montpellier.

Trouche L., *Les calculatrices graphiques au lycée : statut pour l'élève, staturt pour le maître*, 1992. DEA de didactique des disciplines scientifiques, USTL Montpellier.

Noguès M., *Le concept de fonction,* 1993. DEA de didactique des disciplines scientifiques, USTL Montpellier.

Des recueils de promotion des calculatrices.

Ferrand M, *Courbes et graphiques,* Casio, Noblet Editeur
Vagost D., Verdier J, *TI82, Mathématiques au lycée,* Texas Instrument, Dunod, 1993
Vagost D, *20/20 avec la calculatrice TI.82. Les mathématiques en Terminale scientifique,* Vuibert-Texas instrument, 1994
Revues : Hypothèses pour TI ; 3,33 pour Casio

Ces recueils et revues cultivent, malgré toutes les précautions d'usage, l'illusion de la transparence des calculatrices :

"Ces matériels permettant un regard nouveau (parce qu'immédiat) sur des êtres ou des concepts mathématiques " *

"Assurez en math... avec votre calculatrice graphique TI 82 " **

Malgré de réels progrès dans la proposition pédagogique de séances de travail avec les calculatrices (comme en témoigne la publication de revues spécialisées (Hypothèses pour TI, 3,33 pour Casio), le point de vue qui transparaît dans ces productions est celui de la convivialité naturelle des calculatrices, de la dynamique quasi automatique d'observation et d'expérimentation qu'elles engendrent dans une classe :

"ce livre propose d'aller plus loin, et d'aborder une étape nouvelle : rassembler élèves et enseignants autour du plaisir neuf de l'observation et de l'expérimentation mathématiques, grâce aux étonnantes possibilités, notamment de représentation graphique des calculatrices de nouvelle génération..."[2].

L'illusion est que l'outil apporte - en soi - un progrès pour l'apprentissage :

"Les expériences menées... montrent que les élèves apprennent à résoudre des équations plus rapidement et plus efficacement dans un environnement informatique qu'en environnement papier-crayon" .***

Le dernier livre de Daniel Vagost propose des solutions d'exercice proposés au Baccalauréat en faisant systématiquement appel à la calculatrice, Soit pour vérifier des résultats, soit pour établir des conjectures. L'auteur montre les limites d'utilisation de celle-ci et les risques d'erreurs provoqués par l'affichage par pixels ou par l'assimililation à 0 de petits nombres.

De la production américaine.

Demana, Waits, Vonder, Embse, Foley, *Graphing Calculator and Computer Graphing Laboratory Manual,* Addison-Wesley USA, 1992.
Demana, Waits, Clemens, *College Algebra & Trigonometry A Graphing Approach* , Addison-Wesley USA, 1992.

---

* Ferrand, M, *Courbes et graphiques*, Casio, Noblet Editeur
** Vagost D., Verdier J., 1993, *TI82, Mathématiques au lycée*, Texas Instrument, Dunod
*** Kutzler, B, 1994, *Derive, l'avenir de l'enseignement des mathématiques*, The International Derive Journal, Plymouth.

Quesada A, Maxwell M., The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students'Performance in Precalculus, Educational Studies in Mathematics, 1994.

Elle se situe dans la même perspective que les recueils précédents..

"The teaching and learning of traditional topics can be improved with the full use of technology... Computer and calculator based technology can turn the classroom into a mathematics laboratory. Technology gives rise to interactive instructional models that permit a focus on problem solving and encourage generalizations based on strong geometric evidence. The new instructional approaches possible with the use of technology makes teachers and students active partners in an exciting, rewarding, enjoyable, and intensive educational experience." *

Cette perspective a d'autant plus d'impact aux USA qu'elle se situe dans une tradition mathématique bien établie au collège : peu d'importance donnée à la démonstration, beaucoup d'importance donnée à la manipulation des objets. <u>Le mérite de cette production est (à la différence des productions des fabricants citées ci-dessus) la mise en place d''une progression intégrant ces outils, mieux une progression à partir de ces outils</u> ** Les exercices proposés sont souvent stimulants, mais cela suffit-il ?.

"The mathematics classroom is transformed into a mathematics laboratory, with a new interactive instructional approach that focuses on problèm-solving. As a natural outgrowth of this excitement, students complete the course with a better understanding of mathematics and a solid intuitive fondation for calculus."

On ne peut s'empêcher de déceler dans ces propos une certaine naïveté (le caractère interactif du cours n'est pas une condition suffisante de son "efficacité"), et on peut s'interroger sur "la solide fondation intuitive" que cela donne pour l'analyse.

Une étude récente *** mérite attention. Deux enseignants de l'Université d'Akron se proposent de comparer les performances d'étudiants apprenant l'analyse dans le cadre d'un enseignement intégrant l'outil graphique avec celles d'étudiants apprenant l'analyse dans un cadre traditionnel avec une calculatrice non graphique. Ils constatent que les résultats du groupe expérimental sont meilleurs que les résultats du groupe "témoin". Cette étude n'est hélas pas convaincante : même si les deux groupes ont été constitués "au hasard", il est clair que le groupe expérimental a travaillé dans des conditions particulières : une équipe restreinte d'enseignants motivés, des cours organisés autour d'un rétroprojecteur... Ensuite le type même de contrôle proposé aux étudiants (questions à choix multiples, et questions ouvertes à réponses courtes) ne permet pas de tester au fond les connaissances acquises... quand il ne donne pas une prime aux calculatrices graphiques (trouver les zéros d'une fonction polynôme...). On retombe ainsi sur des observations superficielles : il est certain qu'il y a une classe de problèmes simples dont le traitement graphique est immédiat, et il est certain qu'on apprend mieux dans un contexte de "preuve et réfutation", mais celui-ci n'est pas lié mécaniquement à la manipulation des calculatrices graphiques...

---

* Demana, Waits, Vonder, Embse, Foley, 1992, *Graphing Calculator and Computer Graphing Laboratory Manual* , Addison-Wesley USA

** `Demana, Waits, Clemens, 1992, *College Algebra & Trigonometry A Graphing Approach* , Addison-Wesley USA

*** Quesada A, Maxwell M., 1994, The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students'Performance in Precalculus, Educational Studies in Mathematics

Un questionnaire intéressant cependant a été donné aux étudiants du groupe expérimental sur les leçons qu'ils tiraient du travail systématique avec une calculatrice graphique : dans leur majorité, ils trouvent que cela facilite la compréhension, permet de vérifier les réponses, d'économiser des calculs fastidieux. Mais ils craignent en même temps d'être devenus trop dépendants de la calculatrice graphique. Il aurait été interessant de préciser la nature de cette dépendance...

Des productions du Ministère de l'Education Nationale.

M.E.N., *Faire des mathématiques au lycée avec l'ordinateur*, DLC 15, 1993.
. L'ordinateur, ou la calculatrice, dès lors qu'ils sont pris en compte dans la démarche d'enseignement, *sont des outils... "aidant à mettre en oeuvre ces différents aspects (...) : proposer des approches diversifiées, plus individualisées afin de permettre à tous les élèves d'acquérir, d'approfondir et d'enrichir leur formation mathématique, et d'autre part faire intervenir simultanément, le plus souvent possible, des parties diverses du programme afin d'en faire ressortir l'unité ".*

Des productions du centre national de la documentation pédagogique.

Un numéro spécial, faisant le tour de la question est publié en Mars 1995 : *Des outils pour le calcul et le traçage des courbes*, dossier de l'ingénièrerie didactique, CNDP.
Différents aspects des nombreux outils de calcul : les instruments et leurs potentialités ; les comportements des élèves ; le point de vue du mathématicien, du physicien et du psycologue ; l'intégration de ses instrument dans la classe. Une utile synthèse.

Des productions des IREM.

En particulier les actes de l'Université d'été de 1994, publiés par l'IREM de Caen : *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques.*
Dans un avenir assez proche tous les élèves pourront disposer de façon personnele des outils de calcul formel. Comment intégrer ces formidables outils pour faire faire des mathématiques aux élèves... Cette université d'été propose des pistes.

Irem de Lyon , 1995, *36 élèves 36 calculatrices.*
Un dossier qui comporte pour 29 types différents de calculatrices des exemples de programmation d'une fonction ou de traçage de courbe si celle-ci est graphique. Notons tout de même qu'il est un peu étonnant pour une TI 82 ('par exemple) de vouloir faire programmer une fonction pour obtenir des valeurs de f(x) alors qu'on a l'option TBSET.