INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

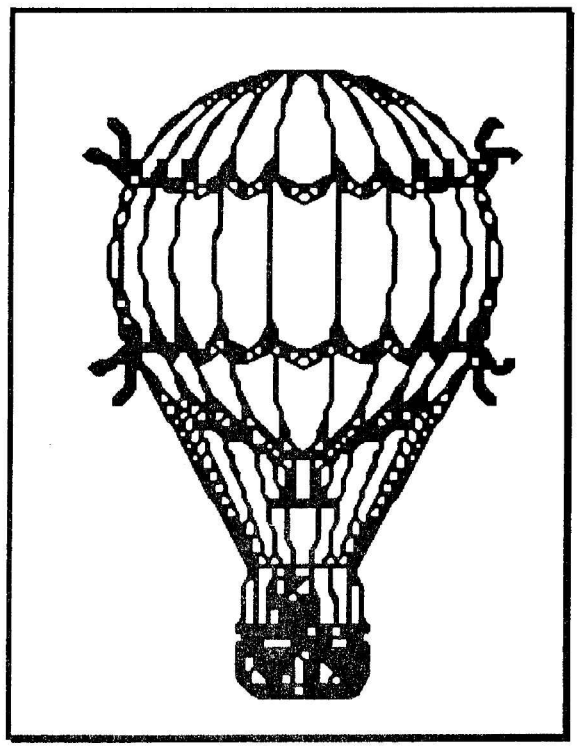
Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon
cc 040
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 67.14.33.83 - 67.14.33.84
Fax : 67.14.39.09
Fax : 67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp

Observer et agir

MATHEMATIQUES

Seconde Générale et Technologique



René Bernard
Lycée Gérard Philipe
Bagnols / Cèze

Préface

Quand nous avons rencontré René BERNARD pour la première fois l'année dernière dans une de ses classes de seconde, il nous a présenté, comme il est de coutume lors d'une inspection, ses préparations de cours, nous avons trouvé qu'elles correspondaient à notre propre lecture des programmes de la classe, de leurs commentaires ainsi que des textes organisant la rénovation pédagogique des lycées ; le choix de la progression, les présentations adoptées, les contenus, les exercices et activités retenus, largement utilisés en classe, pouvaient constituer un bon outil pour l'enseignement en seconde.

Nous lui avons donc demandé de "publier" ces notes de cours ou plutôt de faire en sorte qu'elles puissent être communiquées à d'autres professeurs. Les figer sous forme d'un nouveau manuel semblait séduisant mais n'aurait certainement pas eu le même effet que ce document évolutif et vivant : montrer que des pratiques différentes d'enseignement sont possibles au lycée, qu'elles existent et qu'elles sont efficaces. Après un an de travail, de discussions avec ses collègues de l'IREM de MONTPELLIER où il collabore au groupe de recherche sur l'enseignement de l'analyse, René BERNARD est en mesure aujourd'hui de présenter ses notes de cours sous forme d'une "publication IREM" sous le titre "Observer et agir" ; cela leur confère un caractère tout à fait intéressant : fruit d'un travail d'équipe - même si elles ont pour origine les pratiques de classe d'un professeur -, elles ont été longuement discutées par des enseignants chercheurs intervenant à différents niveaux et elles restent discutables au sens où chacun pourra après les avoir lues - ou mieux après en avoir utilisé telle ou telle partie en classe - envoyer ses remarques, ses critiques ou ses comptes-rendus d'expérience à l'IREM pour d'éventuelles publications complémentaires.

Nous souhaitons que ce document ait une large diffusion auprès des collègues qui interviennent en seconde, ils y trouveront de bonnes idées, ils y trouveront aussi des activités de "recherche" et des exercices de soutien qui leur permettront de mieux gérer l'hétérogénéité de ces classes source majeure des difficultés rencontrées par les enseignants ; nous souhaitons aussi qu'il engage à une autre lecture, bien plus efficace, des programmes, où les notions mathématiques ne seraient plus présentées de façon linéaire, mais chaque thème étudié ferait appel à la fois aux outils algébriques, numériques et géométriques.

Quant à nos élèves, dont beaucoup resteront peu sensibles aux beautés de l'abstraction, quelles mathématiques pourraient leur donner plus de plaisir que celles déclinées en terme d'action : tracer, classer, couper..., et même en termes de danse : tourner, glisser, renverser...?

Cette publication contribue à renforcer la collaboration, que nous souhaitons durable, entre l'IREM et l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématique de l'académie de MONTPELLIER, un grand merci donc à René BERNARD, à toute l'équipe de l'IREM et tout particulièrement à sa directrice Madame Dominique GUIN.

Daniel BOUTTÉ, Thierry MURGIER
Inspecteurs pédagogiques régionaux
à MONTPELLIER

Table des matières

Introduction **9**

Connaissances et savoir-faire de base **10**

Objectifs méthodologiques **11**

Chapitre 1 : Tracer **13**

Séquence 11 - FONCTIONS ET COURBES **13**
SITUER 13
RETENIR 14
Fonction, Courbe représentative, Cas de la proportionnalité, Majorant, minorant, encadrement, Sens de variation, Extremum, Résolutions graphiques
EVALUER 15

Séquence 12 - FONCTIONS DE REFERENCE **16**
SITUER 16
RETENIR 17
Fonctions de référence, Fonction "carré", Fonction "cube", Fonction "racine carrée", Fonction "inverse".
EVALUER 18

Activités complémentaires **19**
Fiche de travail personnel n°1 (soutien) 19
Fiche de travail personnel n°2 (soutien) 21
Conjecturer, démontrer (Fiches A, B, C, D) 23
Les pluviomètres 27
Confrontation 27
Evaluation (synthèse) 28

Aides **29**
Utiliser le manuel (Séq. 11 et 12) 29

Chapitre 2 : Résoudre **31**

Séquence 21 - VALEUR ABSOLUE **31**
SITUER 31
RETENIR 32
Valeur absolue, Intervalles.
EVALUER 32

Séquence 22 - EQUATIONS ET INEQUATIONS **33**
SITUER 33
RETENIR 34
Equations élémentaires, Inéquations élémentaires.
EVALUER 34

Séquence 23 - DROITES DU PLAN **35**
SITUER 35
RETENIR 36
Multiplication d'un vecteur par un réel non nul, Equations de droites, Systèmes, Inéquations à 2 inconnues.
EVALUER 37

Activités complémentaires **38**
Fiche de travail personnel n°3 (soutien) 38
Autour des équations de droites 40
Dans l'industrie 40

Confrontation : à propos du "produit en croix" 40
Choisir un champ de démonstration 41
Les fusées 42
L'Emir 42
Evaluation (synthèse) 42

Aides 43
Travailler dans plusieurs champs de démonstrations 43
Utiliser le manuel (Séq. 21, 22, 23) 44

Chapitre 3 : Retourner, renverser 47

Séquence 31 - SYMETRIES ET REFLEXIONS 47
SITUER 47
RETENIR 48
Définition, Notations, Propriétés.
EVALUER 49

Séquence 32 - APPLICATION AUX FONCTIONS 50
SITUER 50
RETENIR 50
Fonctions paires, Fonctions impaires, Courbes associées par symétries.
EVALUER 51

Activités complémentaires 52
Fiche de travail personnel n°4 (soutien) 52
Une longueur minimum 58
Construction de fonctions paires ou impaires 58
Confrontation 58
Evaluation (synthèse) 59

Aides 60
Géométrie du triangle 60
Géométrie du parallélogramme 61
Utiliser le manuel (Séq. 31 et 32) 62

Chapitre 4 : Glisser 63

Séquence 41 - TRANSLATIONS 63
SITUER 63
RETENIR 64
Translation : Définition, Notation, Propriétés, Addition des vecteurs.
EVALUER 65

Séquence 42 - APPLICATION AUX FONCTIONS 66
SITUER 66
RETENIR 66
Fonctions associées par translation, Fonctions périodiques.
EVALUER 66

Séquence 43 - FCTS HOMOGRAPHIQUES, SECOND DEGRE 67
SITUER 67
RETENIR 67
Fonctions homographiques, Fonctions du second degré.
EVALUER 68

Activités complémentaires 69
Fiche de travail personnel n° 5 (soutien) 69
Droite et fonction "partie entière" 72
Une équation du 3ème degré 73
Deux symétries consécutives 73
Points à coordonnées entières sur une hyperbole 74
Evaluation (synthèse) 74

Aides **75**
La pyramide du problème 75
Utiliser le manuel (Séq. 41, 42, 43) 76

Chapitre 5 : Couper **79**

Séquence 51 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE **79**
SITUER 79
RETENIR 80
Théorèmes d'incidence, sur le parallélisme, sur l'orthogonalité, Projections.
EVALUER 81

Activités complémentaires **82**
Fiche de travail personnel n°6 (soutien) 82
Dans un tétraèdre 84
Confrontation olympique 84
Encore le cube ! 84
Evaluation (révision) 85

Chapitre 6 : Classer **87**

Séquence 61 - STATISTIQUES **87**
SITUER 87
RETENIR 88
Vocabulaire de base, Caractéristiques de position, Caractéristiques de dispersion.
EVALUER 89

Activités complémentaires **89**
Regrouper n'est pas neutre 89
Confrontation chiffrée 89

Chapitre 7 : Agrandir, réduire **91**

Séquence 71 - HOMOTHETIE **91**
SITUER 91
RETENIR 92
Multiplication d'un vecteur par un réel (rappel et compléments), Définition de l'homothétie, Propriétés.
EVALUER 92

Activités complémentaires **93**
Fiche de travail personnel n°7 (soutien) 93
Entre deux cercles 95
Confrontation 95
Evaluation (à propos des transformations) 95

Chapitre 8 : Tourner **97**

Séquence 81 - ANGLES ORIENTES **97**
SITUER 97
RETENIR 97
Cercle trigonométrique, Arc et angle orientés, Mesures d'arcs et angles orientés, mesure principale.
EVALUER 98

Séquence 82 - TRIGONOMETRIE **99**
SITUER 99
RETENIR 99
Définitions de cosinus et sinus, Relations trigonométriques.
EVALUER 100

Séquence 83 - ROTATIONS **101**

SITUER 101
RETENIR 101
Définition de la rotation, Propriétés, Des rotations utiles.
EVALUER 102

Activités complémentaires 103
Fiche de travail personnel n°8 103
1ère partie (soutien) 103
2ème partie (approfondissement) 104
La fonction sinus et la calculatrice 106
Confrontation 107
Evaluation (Problèmes divers) 107
Transformations planes avec "Cabri-Géomètre" 108

Aides 109
Les transformations planes usuelles 109

Introduction

Cet ouvrage est destiné aux professeurs qui souhaitent aborder autrement un programme de Seconde qui s'adresse aussi bien aux futurs scientifiques qu'à ceux dont les mathématiques resteront au mieux une formation de l'esprit et un outil pour les Sciences Humaines, au pire un souvenir de jeunesse. Pour les uns comme pour les autres, il est possible de cristalliser la construction des connaissances de base autour de quelques idées simples.

Cet ouvrage est né d'une convergence et d'un parti pris.

La convergence, c'est celle d'une réflexion personnelle à propos de la cohérence du programme de Mathématiques en Seconde, d'une part, et des travaux du groupe Analyse de l'IREM de Montpellier[1] centrés sur l'activité mathématique intégrant les outils de calcul et plus particulièrement les calculatrices graphiques, d'autre part.

Le parti pris, c'est celui de la ***priorité à l'action***. Partant du principe que faire des mathématiques, c'est observer le réel pour agir sur lui, on a structuré chaque chapitre autour d'une action centrale. Ainsi, par exemple, le chapitre "retourner, renverser" autour de la réflexion et de la symétrie, traite bien évidemment de ces deux transformations planes et des problèmes géométriques qui s'y rapportent, mais y raccroche aussi, naturellement, la parité d'une fonction et le tracé des courbes associées dont les équations s'écrivent sous la forme $y = \pm f(\pm x)$ ou $y = |f(x)|$.

Tout au long de l'année, l'utilisation en classe, lorsque cela a un sens, des calculatrices graphiques individuelles et/ou d'un modèle rétroprojetable permet d'établir des va-et-vient permanents entre l'expérimentation active et l'information théorique, entre l'élaboration de conjectures et la recherche de preuves.

Ce choix s'accompagne, par nécessité, d'un refus de la séparation usuelle entre "l'Algèbre" et "la Géométrie". On a voulu une interaction aussi permanente que possible entre les deux grands axes du programme : l'initiation à l'étude des fonctions d'une part et l'étude des transformations planes usuelles d'autre part.

Bien entendu, en donnant priorité à l'action, il fallait présenter un certain nombre "d'activités" (d'introduction d'une notion, de recherche - en modules par exemple -, de soutien ou d'approfondissement). On a donc fait le choix de ne pas présenter d'exercices d'entrainement (on en trouve dans tous les manuels) et de ne pas développer le "cours" dont on n'a gardé que les résultats qu'un élève de Seconde doit mémoriser. Cependant, afin de préciser le niveau d'exigence, on pourra trouver dans la rubrique EVALUER, quelques exemples de travaux demandés aux élèves. Enfin,, quelques fiches d'aide complètent l'ouvrage. Selon le cas, ce seront des fiches d'aide méthodologique, ou des tableaux récapitulatifs. La rubrique "Utiliser le manuel" se fixe pour objectif de permettre aux élèves de s'approprier leur manuel.et d'apprendre à l'utiliser. Nous avons arrêté cette rubrique au quatrième chapître en espérant que l'habitude "d'aller voir dans le livre" sera prise.

Cet ouvrage ne prétend d'aucune manière à un caractère achevé et définitif. Il y subsiste probablement des fautes de frappe, des maladresses mathématiques ou didactiques. Puisse le lecteur avoir l'obligence de nous communiquer ses remarques tout en faisant preuve d'indulgence.

Remerciements à Christian Faure, Maryse Noguès, Luc Trouche, Yvon Nouazé du groupe Analyse de l'IREM de Montpellier, dont les critiques et les nombreuses relectures ont permis de donner à cet ouvrage sa forme définitive.

Remerciements à Monsieur Daniel BOUTTÊ, IPR, pour sa confiance et son appui.

---

[1] Le Groupe Analyse de l'IREM de Montpellier a publié les brochures suivantes :
"Quelques idées pour la mise en place des modules en Seconde" (1993)
"Pour une prise en compte des calculatrices graphiques au Lycée" (1993)
"Des activités en Première et Terminale Scientifique" (1994)
"Des fonctions et des graphes" (1995)
"Arithmétique, le retour ..." (1995)
Editeur : IREM de Montpellier, USTL, Place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER Cedex 5

Connaissances et savoir-faire de base

Chapitres			contenus	*principaux objectifs de savoir-faire*
1	*sep oct*	Tracer	fonctions, représentation graphique, équation d'une courbe, sens de variation sur un intervalle, extremum, fonctions de référence, égalités, inégalités, ordre	*Lire un graphique, une courbe, un tableau de variation, programmer une fonction, construire une courbe point par point, comparer des nombres, résoudre graphiquement des équations et inéquations*
2	*oct nov*	Résoudre	valeur absolue, intervalles, factorisation, identités remarquables, multiplication d'un vecteur par un réel, vecteurs colinéaires, orthogonaux, équations de droites, proportionnalité, pourcentages, systèmes d'équations, caractérisation de demi-plan	*Résoudre équations et inéquations polynômiales et rationnelles simples ou contenant des valeurs absolues, déterminer et utiliser les équations de droites, utiliser le coefficient et les vecteurs directeurs, résoudre des problèmes de proportionnalité, résoudre les systèmes linéaires 2×2 et 3×3, résoudre graphiquement des inéquations à 2 inconnues*
3	*déc jan*	Retourner Renverser	réflexions et symétries, images de droites et de cercles, images des courbes de référence, parité d'une fonction, courbes associées par symétrie de centre O ou réflexion d'axe Ox ou Oy, graphe de | f |	*Transformer un point, une droite, un cercle par symétrie ou réflexion, les utiliser dans des démonstrations géométriques et analytiques, étudier la parité d'une fonction, transformer une courbe par symétrie ou réflexion d'axe horizontal ou vertical*
4	*jan fév*	Glisser	translation, addition des vecteurs, image de points, droites, cercles, courbes, périodicité, fonctions homographiques, fonctions du second degré	*Transformer un point, une droite, un cercle par translation, utiliser le calcul vectoriel dans les démonstrations, tracer par translation des courbes homographiques et du 2d degré, résoudre des équations du 2d degré*
5	*mar avr*	Couper	principaux théorèmes de géométrie dans l'espace, (incidence, parallélisme, orthogonalité), projection sur un plan, une droite	*Lire et faire un dessin en perspective cavalière, s'initier à la démonstration dans l'espace, calculer des longueurs, aires, volumes*
6	*mar avr*	Classer	Vocabulaire des statistiques, caractéristiques de position et de dispersion, diagrammes	*Classer les données, les regrouper en classes, dresser et lire un diagramme, calculer médiane, moyenne, écart-type, interpréter les résultats*
7	*avr mai*	Agrandir Réduire	homothétie, multiplication d'un vecteur par un réel, colinéarité, alignement	*Obtenir l'image d'une figure par homothétie, raisonner analytiquement et géométriquement*
8	*mai juin*	Tourner	cercle trigonométrique, arcs et angles orientés, mesures en radian, cosinus, sinus, relations de base, rotations	*Lire les angles remarquables sur le cercle, donner la mesure principale, lire sinus et cosinus d'un angle, résoudre les équations $\sin x = a$, $\cos x = b$, utiliser les rotations dans des démonstrations*

Objectifs méthodologiques

Chapitres		Capacités et compétences	*Objectifs pédagogiques*
1	Tracer	* Observer une courbe, en déduire des inégalités, des encadrements, majorations, minorations et diverses propriétés de la relation d'ordre * Associer à la représentation graphique la notion d'image et d'antécédent, passer de l'un à l'autre, résoudre graphiquement, équations, inéquations et systèmes	* *Mettre en évidence l'insuffisance logique des méthodes graphiques, le caractère approximatif des résultats obtenus. Utiliser les possibilités de vérification et de démonstration lorsqu'elles sont accessibles*
2	Résoudre	* Manipuler les valeurs absolues sous les trois aspects de distance, de séparation des cas, de courbe de référence * Acquérir les méthodes classiques de résolution des équations et inéquations par factorisation * Ecrire, en variant les méthodes, une équation d'une droite connaissant 2 points ou un point et sa direction (coefficient, vecteur directeur ou normal)	* *Proposer la double approche (graphique et algébrique) de résolution d'équations et d'inéquations, favoriser les recoupements de résultats dans les deux champs d'action, passer d'un champ à l'autre* * *Clarifier les termes de "preuve" et "conjecture", développer les procédures de vérification*
3	Retourner Renverser	* Repérer dans une figure, la présence d'une transformation afin de l'utiliser pour transporter une propriété (alignement concours, milieux, parallélisme, ...) * Déterminer sous la forme $y = f(x)$ l'équation d'une courbe image de la courbe d'équation $y = g(x)$	* *Clarifier le vocabulaire de la démonstration : hypothèses, exemples, contre-exemple, conjecture, preuve, ...)* * *Rechercher une équation de courbe en exprimant l'ordonnée d'un point quelconque.*
4	Glisser	* Repérer dans une figure, la présence d'une translation afin de l'utiliser pour transporter une propriété * Repérer la translation qui permet de passer d'une courbe connue à la courbe à tracer	* *Résoudre à titre d'exercice les éq. du type $x^2+bx+c=0$ en faisant apparaître la forme canonique* * *Structurer logiquement la démonstration de géométrie*
5	Couper	* Voir dans l'espace, repérer et représenter des phénomènes malgré les déformations dues à la perspective * Etre capable d'énoncer le théorème utile à une démonstration	* *Aborder les positions relatives de plans et droites de l'espace à partir des solides usuels : cube et tétraèdre*
6	Classer	* Comparer deux populations en utilisant leurs caractéristiques de position et de dispersion	* *Faire observer l'importance des choix de regroupements pouvant conduire à des interprétations différentes*
7	Agrandir Réduire	* Parvenir à une maîtrise convenable des raisonnements géométrique et analytique à propos des transformations * Utiliser le champ vectoriel, analytique, géométrique, des transformations	* *Reprendre la multiplication d'un vecteur par un réel abordée au Ch 2* * *Habituer les élèves aux changements de champs*
8	Tourner	* Etre à l'aise en ce qui concerne la lecture des angles en radian, du sinus, du cosinus des angles usuels et des opposés, supplémentaires, complémentaires	* *Développer une vision graphique des notions sur les angles et la trigonométrie*

Chapitre 1 : Tracer

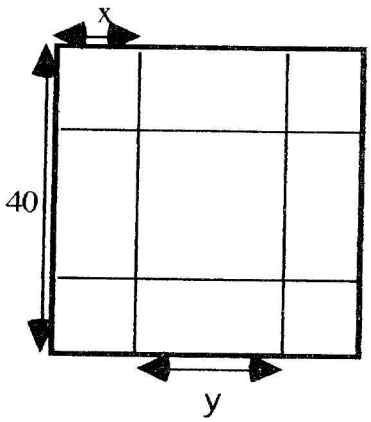
Séquence 11 - FONCTIONS ET COURBES

SITUER

Objectifs :

Découvrir la notion de fonction et de courbe représentative (autre qu'une droite). Utiliser les connaissances de Troisième. Faire les tracés sur papier, sans utiliser dans un premier temps les possibilités graphiques d'une calculatrice afin de faciliter la construction du concept de courbe représentative. Découvrir et exploiter la notion de maximum, distinguer valeur du maximum et valeur pour laquelle il est atteint. Introduire les notions de conjecture et de preuve.

Un fabricant d'emballages souhaite réaliser la boite de plus grand volume possible dans un carton carré de 40 cm de côté en pliant selon les traits fins. Où doit-on plier ? Quel est ce volume maximum ?



On appelle x la distance du bord du carton au pli.
1) Imaginer la boîte réalisée et calculer la longueur y **en fonction de** x. Quelles sont les valeurs extrêmes de x ?
2) Quel est en fonction de x, le volume V(x) de cette boîte ?
3) Quelle est la plus petite valeur de x ayant un sens dans ce problème ? Quelle est la plus grande ?
4) Choisir 10 valeurs distinctes de x. Pour chacune de ces valeurs, calculer la valeur correspondante du volume. Placer les points de coordonnées (x , V(x)) dans un repère dont on choisira les unités.
5) Joindre les 10 points obtenus au crayon et estimer la valeur du volume maximum et la valeur de x correspondante.
Calculer V(6,5) et V(6,7) et rectifier le tracé précédent.
Cela change-t-il l'estimation du volume maximal ?
Quels calculs faudrait-il envisager pour améliorer la précision ? Est-on certain d'arriver à une conclusion définitive ?

6) Recherche d'une réponse définitive :

Calculer $V(\frac{20}{3})$. Que remarque-t-on ?

Ecrire une expression développée de $V(x) - V(\frac{20}{3})$

Démontrer que $4(x - \frac{20}{3})^2.(x - \frac{20}{3}) = V(x) - V(\frac{20}{3})$

En déduire, pour tout x élément de]0 ; 20] le signe de $V(x) - V(\frac{20}{3})$

Quelle réponse peut-on donner à la question posée ? Est-elle définitive ?

RETENIR

Fonction

On appelle fonction de l'ensemble A vers l'ensemble B une "correspondance" qui, à tout élément de A, associe au maximum un élément de B

On note **f : A → B**

x ↦ y = f(x)

Courbe représentative

Dans un repère donné, si M a pour coordonnées **(x , f(x))**, alors on dit que M appartient à la courbe (Cf) représentative de la fonction **f**

M ∈ (Cf) si et seulement si M (x_M,f(x_M)) c'est-à-dire y_M = f(x_M)

y = f(x) est appelée équation cartésienne de la courbe représentative de f

Cas de la proportionnalité

Deux grandeurs variables x et y sont proportionnelles ssi l'une est le produit de l'autre par une constante non nulle.

y = ax (a réel constant non nul)

a est le coefficient de **proportionnalité**. C'est aussi le **coefficient directeur** de la droite d'équation **y = ax** qui passe par l'origine du repère. La valeur y est l'image de x par une fonction linéaire.

Majorant, minorant, encadrement

m est un majorant de la fonction f entre a et b si et seulement si, pour tout x compris entre a et b, on a : f(x) ≤ m . Un majorant, s'il existe, n'est pas unique. Définition analogue pour un minorant.

Sens de variation

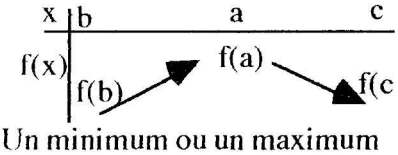
Une fonction **f** est **croissante entre a et b (on dit aussi sur [a , b])**, si pour tous les couples (x_1, x_2) situés entre a et b et tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$

Si pour $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ alors **f est décroissante sur [a , b]**

Si f est croissante sur]a , b] ou décroissante sur [a , b] on dit que f est **monotone sur [a , b]**

Extremum

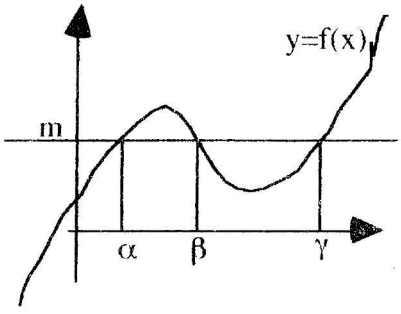
Si f est définie sur l'intervalle]b , c[et si f est croissante sur]b , a] et décroissante sur]a , c[, on dit que f passe en **a** par un **maximum** qui vaut **f(a)** . Le tableau des variations de f est :



Un minimum ou un maximum s'appelle un **extremum**

La définition d'un **minimum** est comparable à celle d'un maximum

Résolutions graphiques



Equation f(x) = m

Une solution (α ou β ou γ) est l'abscisse d'un point de la courbe d'équation y = f(x) dont l'ordonnée est m

Inéquation f(x) > m

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe d'équation y = f(x) situés au-dessus de la droite d'équation y = m

Système {y = f(x) ; y = g(x)} d'inconnues x et y

Les couples solutions sont les coordonnées des points communs aux deux courbes dont les équations sont y = f(x) et y = g(x)

EVALUER

Objectifs :

*Repérer l'appartenance d'un point à une courbe
*Traiter des problèmes de proportionnalité
*Lire sur un graphique ou un tableau de variation, un majorant, un minorant, le sens de variation et les extrema d'une fonction
*Programmer le calcul des valeurs d'une fonction
*Construire une courbe point par point
*Résoudre graphiquement une équation, une inéquation, un système

1) Un père partage 1000 F au total entre ses 3 enfants âgés de 12 ans, 8 ans et 5 ans proportionnellement à leur âge. Quelle est la part de chacun ?

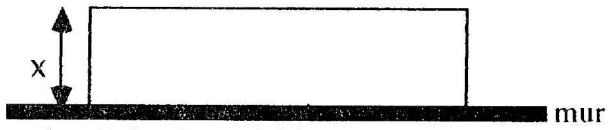
2) Donner un encadrement de $f(x) = 4 + 3x - x^3$ sur l'intervalle $]0 , 2]$ (entre 0 et 2) (on pourra utiliser la calculatrice)

3) Soit la fonction $f : x \mapsto 100x - 2x^2$ définie entre 0 et 50 (sur $[0 , 50]$) c'est-à-dire lorsque x prend toutes les valeurs entre 0 et 50.

a) Le point A(40 , 800) appartient-il à la courbe de f ? En est-il de même du point B (4 , 80) ? Pourquoi ?

b) Programmer le calcul de f(x) et tracer la courbe de f (unités: 1 mm sur Ox et 0,1 mm sur Oy)

c) Un propriétaire veut construire un poulailler avec 100 m de grillage. Le poulailler sera adossé à un mur (le grillage n'occupe que 3 côtés)



Exprimer en fonction de x l'aire du poulailler

Quelles doivent être les dimensions du rectangle pour avoir l'aire maximale ? Peut-on considérer que ce résultat est prouvé ?

d) Calculer $E = f(x) - f(25)$ pour tout $x \in [0 ; 50]$ et démontrer grâce à une factorisation que $E \leq 0$. Conclure.

Séquence 12 - FONCTIONS DE REFERENCE

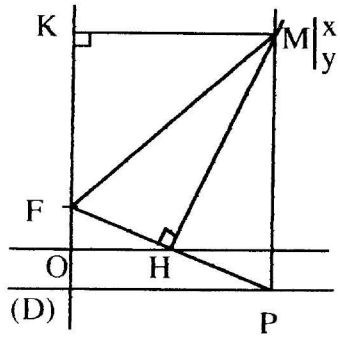
SITUER

Objectif :

Découvrir géométriquement la parabole et l'hyperbole de référence. Le tracé de ces deux courbes est obtenu comme lieu de points. On peut s'aider d'un logiciel de géométrie (Géoplan, Cabri-géomètre). Dans ce cas, la courbe apparaît comme lieu de points et la question posée doit être reformulée.

1) Dans un repère orthonormal (d'unité 4 cm), on place le point F (0 , $^1/_4$) et la droite D d'équation $y = -\,^1/_4$. Le point P (x , $-\,^1/_4$) se déplace sur D. On appelle D_P la perpendiculaire à D passant par P et Δ la médiatrice de [FP] . M est l'intersection de Δ et D_P .

Construire 8 points M et les relier par une courbe. Cette courbe constitue une approche de l'ensemble des points M lorsque P décrit D.



Recherchons par un calcul une équation de cette courbe :

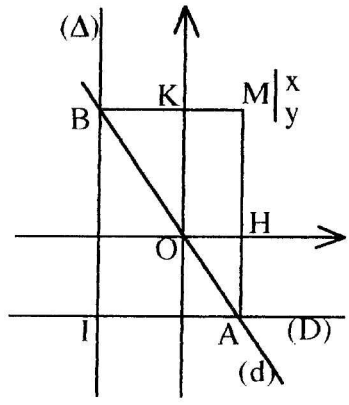
Déterminer FK en fonction de y et KM en fonction de x.
En déduire FM^2
Déterminer PM^2 en fonction de y
Justifier que $FM^2 = PM^2$ et en déduire une expression de y en fonction de x. Conclure.

2) Dans un repère orthonormal (d'unité 2 cm), on place la droite D d'équation y = -1 et la droite Δ d'équation x = -1. D et Δ se coupent en I. Une droite variable (d) passant par O coupe D en A (x , -1) et coupe Δ en B (-1 , y) . On construit ensuite le rectangle AIBM.

Construire 8 points M et les relier par une courbe. Cette courbe constitue une approche de l'ensemble des points M lorsque (d) tourne autour de O.

Choisir une droite (d) voisine de l'axe des abscisses. Que dire du point M ? Que se passe-t-il si (d) est confondue avec cet axe ?

Même question au voisinage de l'axe des ordonnées.



Recherchons par un calcul une équation de cette courbe :

En observant le triangle BKO, quel est, en fonction de y, le coefficient directeur de la droite (BO) ?
En observant le triangle OHA, quel est, en fonction de x, le coefficient directeur de la droite (OA) ?
En déduire une expression de y en fonction de x. Conclure.

RETENIR

Fonctions de référence

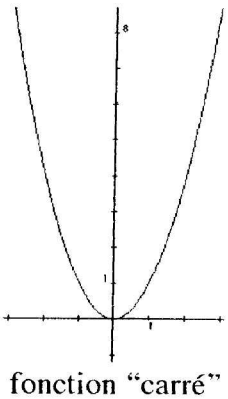
Les fonctions qui suivent sont, à tout instant, considérées comme connues. Leur courbe et les propriétés qui s'en déduisent n'ont pas besoin d'être justifiées. Elles peuvent servir à : tracer une courbe, comparer des nombres, réaliser des encadrements, vérifier des propriétés algébriques, ...

Fonction "carré"

$c : x \mapsto x^2$

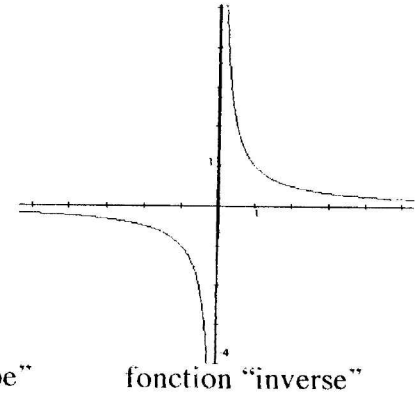
x		0	
c	↘	0	↗

La courbe obtenue est une PARABOLE
La fonction c est définie sur $\mathbb{R}$
Remarquer que c est décroissante sur $\mathbb{R}_-$
donc si $a < b < 0$ alors $0 < c(b) < c(a)$

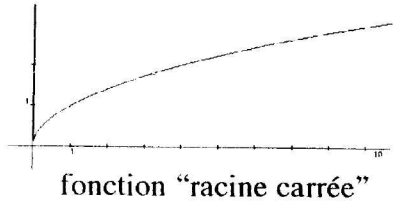


fonction "carré"

fonction "cube"



fonction "inverse"



fonction "racine carrée"

Fonction "cube"

$q : x \mapsto x^3$

x		0	
q	↗	0	↗

La courbe obtenue est une CUBIQUE
La fonction q est définie sur R
Remarquer que q est croissante sur R
donc si $a < b$ alors $q(a) < q(b)$

Fonction "racine carrée"

$r : x \mapsto \sqrt{x}$

x	0	
r	0	↗

La courbe obtenue est une DEMI-PARABOLE
La fonction r est définie sur R+
r étant croissante sur R+,
si $a < b$ alors $r(a) < r(b)$

r est la fonction réciproque de c lorsque $x \geq 0$ c'est-à-dire: $a = c(b)$ si et seulement si $b = r(a)$

Fonction "inverse"

$i : x \mapsto \frac{1}{x}$

x		0	
i	↘	‖	↘

La courbe obtenue est une HYPERBOLE
Les axes sont ses ASYMPTOTES
La fonction i est définie sur R*.
Elle est décroissante sur R-* et sur R+*
donc si $0 < a < b$ alors $0 < i(b) < i(a)$
si $a < b < 0$ alors $i(b) < i(a) < 0$

EVALUER

Objectifs :

*A l'aide des fonctions de référence trouver des règles de calculs concernant les inégalités

* Utiliser les fonctions de référence dans la résolution d'équations et d'inéquations

1) Le nombre x est positif. Quel est le plus grand des deux nombres x^2 ou $\sqrt{x}$.
Expliquer la méthode utilisée

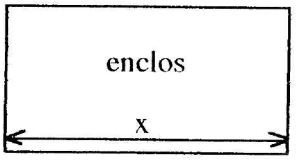
2) A quelle condition peut-on dire que $a^2 < b^2$

3) Existe-t-il des valeurs de x et y telles que si $x < y$ alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

4) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation :
$x^2 \leq 3x$

Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n°1 (soutien)



Avec 100m de fil de fer, il faut entourer un enclos de forme rectangulaire situé dans un grand champ plat. Le problème est de trouver les dimensions de l'enclos de façon que son aire soit la plus grande possible.

1) On appelle x l'un des côtés du rectangle formant l'enclos. En fonction de x, donner une mesure de l'autre côté y.

$y =$

Le côté y dépend de x : y est une fonction de x

2) En fonction de x, comment s'exprime l'aire de l'enclos rectangulaire.

l'aire s'écrit : $f(x) =$

On l'appelle f comme fonction et on rappelle que sa valeur varie lorsque x varie en écrivant : $f(x) =$

3) Que veut dire f(10) ?

f(10) est l'aire du rectangle lorsque

Calculer f(10)

$f(10) =$

Remplir le tableau suivant :

x	0	10	20	25	30	40	50
f(x)		400					

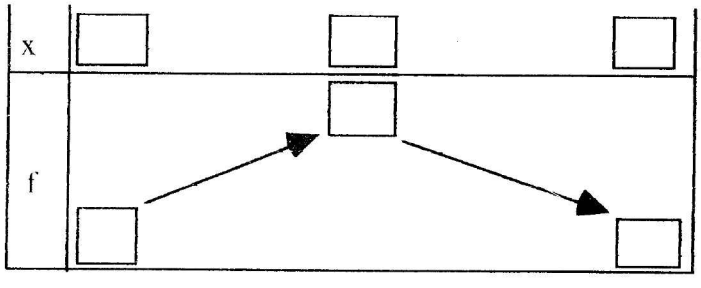
Calculer f(24,9) et f(25,1)

$f(24,9) =$

$f(25,1) =$

La fonction semble-t-elle avoir un maximum ? |_____|.
Lequel ? |_____| . Pour quelle valeur de x est-il obtenu ? |_____|

Compléter le tableau ci-contre qui n'indique plus des valeurs de f(x) mais les variations de cette fonction.

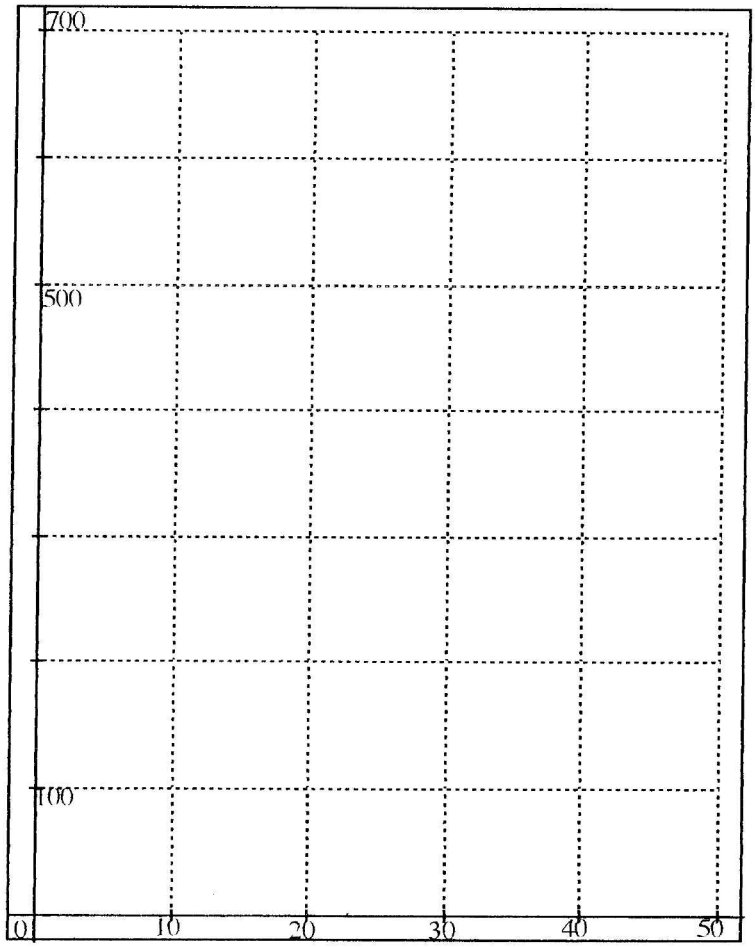


Dans quel intervalle f est-elle croissante ? décroissante ?

f est croissante dans l'intervalle [;]

f est décroissante dans l'intervalle [;]

Représenter graphiquement les variations de l'aire f(x) en fonction de x sur le graphique ci-contre :



4) Quelle est l'aire de l'enclos lorsque x mesure 15m ? |_____| m^2

Combien mesure x lorsque l'aire est de 500m^2 ? |_____| m

Combien y a-t-il de réponses ? Pourquoi ?

Il y a

Est-il possible que l'aire soit de 650 m^2 ? |_____| de 200 m^2 ? |_____|

Comment doit-on choisir x pour que l'aire soit supérieure à 500 m^2 ? |_____|

Comment doit-on choisir x pour que l'aire soit inférieure à 300 m^2 ? |_____|

5) Peut-on trouver des valeurs approchées des solutions des équations ou inéquations suivantes ?

$-x^2 + 50x = 650$ →

$-x^2 + 50x = 500$ →

$-x^2 + 50x \geq 500$ →

$-x^2 + 50x \leq 300$ →

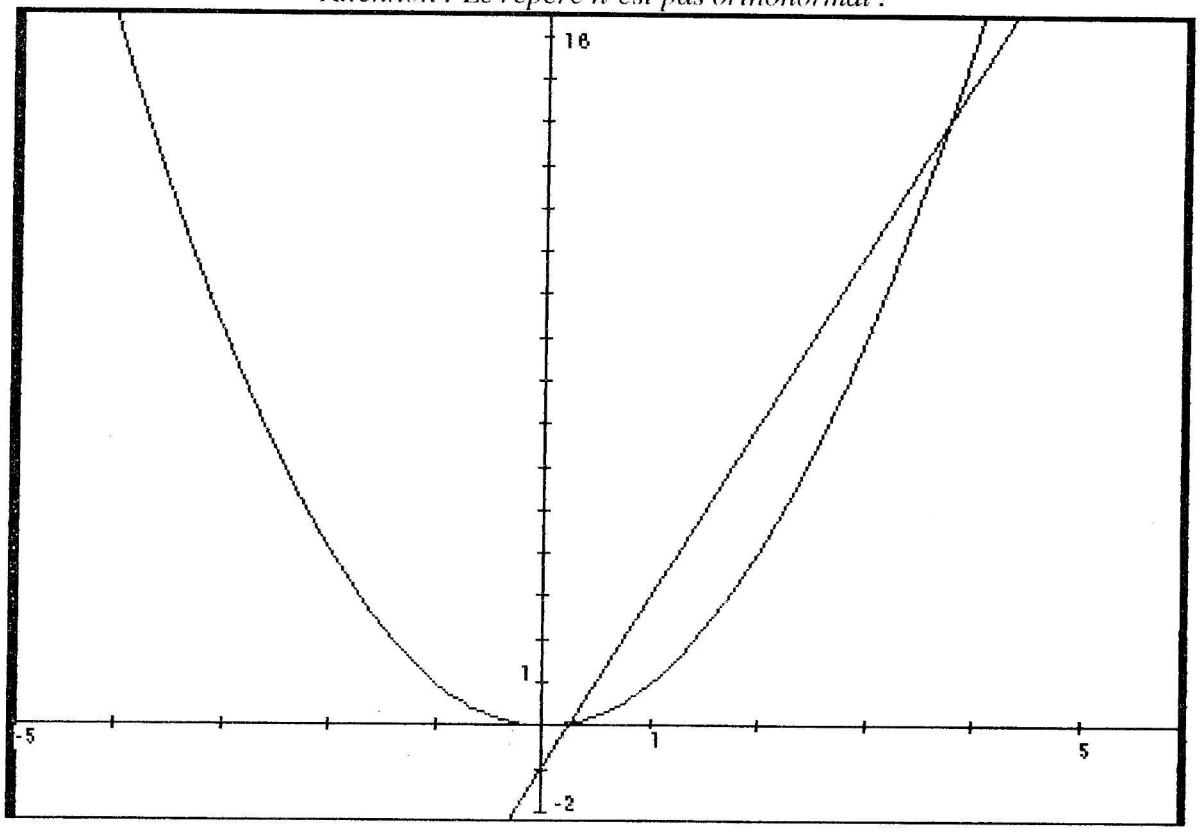
Fiche de travail personnel n°2 (soutien)

Nous nous proposons de résoudre l'inéquation :

$$x^2 > 4x - 1$$

et pour cela nous avons tracé la courbe (C) d'équation $y = x^2$ et la droite (D) d'équation $y = 4x - 1$.

Attention ! Le repère n'est pas orthonormal !



1) On appelle I et J les points d'intersection visibles de ces deux courbes.
Estimer les abscisses de I et J

x_I = x_J =

2) Placer les points suivants, comparer leurs ordonnées et dire lequel est "au-dessus" de l'autre

A de (C) et B de (D) d'abscisses 2	y_A =	y_B =	: A est "au-d"	"de B
E de (C) et F de (D) d'abscisses -1	y_E =	y_F =	: E est "au-d"	"de F
G de (C) et H de (D) d'abscisses 4	y_G =	y_H =	: G est "au-d"	"de H

3) A l'aide des calculs précédents, pensez -vous que -1, 2 et 4 sont solutions de l'inéquation $x^2 > 4x - 1$?

-1 est solution :	vrai ☐	faux ☐
2 est solution :	vrai ☐	faux ☐
4 est solution :	vrai ☐	faux ☐

4) Factoriser $x^2 - 4x + 1$ en suivant les indications données

$x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 4x + 4) - 3$

$= (\quad)^2 - (\sqrt{3})^2$

$= (\quad)(\quad)$

5) En déduire les solutions exactes de l'équation $x^2 = 4x - 1$ et justifier qu'il n'existe que deux points communs à (C) et (D)

x =	x =
x I = ...	x I = ...
y J = ...	y J = ...

6) Exprimer sous forme de réunion d'intervalles les solutions de l'inéquation $x^2 > 4x - 1$

x est solution de l'inéquation ssi x est élément de :

7) Marquer sur la figure, par un trait rouge, les abscisses des points solutions de cette inéquation .

8) Observons que résoudre l'inéquation $x^2 > 4x - 1$ revient à résoudre $x^2 - 4x + 1 > 0$. Revenir à la forme factorisée obtenue à la question 4 et étudier le signe de chaque facteur :

si $x < 2 - \sqrt{3}$,

alors $(x - 2 - \sqrt{3})$ ..... 0 et $(x - 2 + \sqrt{3})$ ..... 0 et le produit est donc .....

si $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$,

alors $(x - 2 - \sqrt{3})$ ..... 0 et $(x - 2 + \sqrt{3})$ ..... 0 et le produit est donc .....

si $x > 2 + \sqrt{3}$,

alors $(x - 2 - \sqrt{3})$ ..... 0 et $(x - 2 + \sqrt{3})$ ..... 0 et le produit est donc .....

9) Compléter les phrases suivantes

si $x < 2 - \sqrt{3}$ alors $x^2 - 4x + 1 < 0$ donc $x^2 < 4x - 1$ et donc (C) est au -dess..... de (D)

si ...

si ...

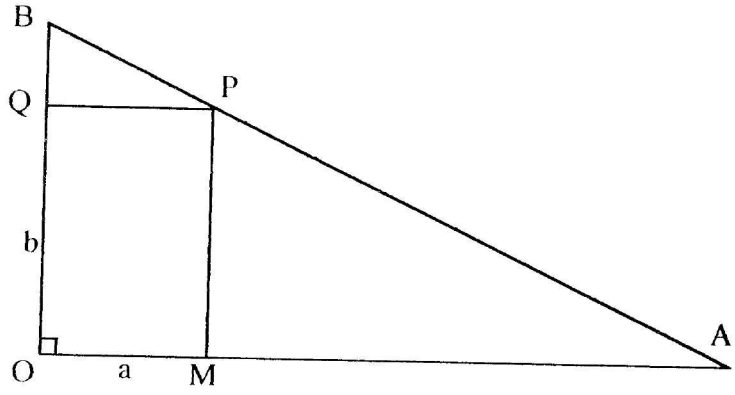
Conjecturer, démontrer

Fiche A

OAB est un triangle rectangle en O. Le point M se déplace sur le côté [OA] et on construit le rectangle OMPQ de façon que P soit sur [AB] et Q sur [OB].

On sait que OA = 10 cm et OB = 6 cm

On posera a = OM et b = OQ .



1ère partie

1) Construire la figure en vraie grandeur.

2) On prend a = 2 cm, déterminer b (penser à Thalès) et en déduire l'aire du rectangle OMPQ.

3) On prend maintenant a quelconque, exprimer , en fonction de a, l'aire du rectangle OMPQ.

4) En utilisant la calculatrice, déterminer où on doit approximativement placer M pour que l'aire de ce rectangle soit maximale ? Quelle paraît être sa position géométrique ?

5) Ce résultat est-il une conjecture ou une certitude ? Pourquoi ?

2ème partie

On veut maintenant prouver que la position trouvée du point M correspond effectivement à un maximum de l'aire de OMPQ.

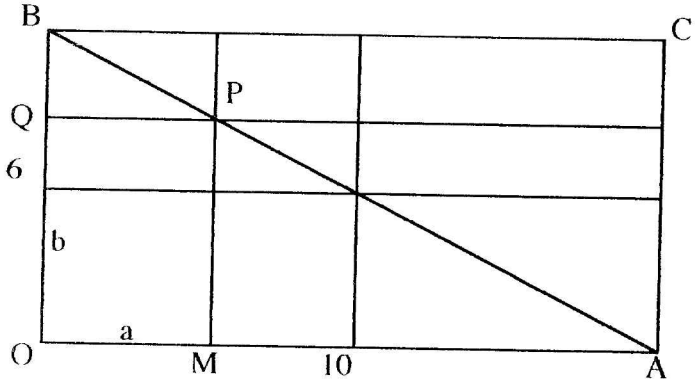
1) Démontrer que l'aire de OMPQ est égale à $ab = 0{,}6 \times a(10 - a)$

2) Quelle est, en fonction de a , la différence :

d = aire (OABC) - 4 × aire (OMPQ) ?

Démontrer que $d = 2{,}4 \times (a^2 - 10a + 25)$ et en déduire que d est positive.

3) En déduire une comparaison de l'aire de OMPQ au quart de l'aire de OABC.

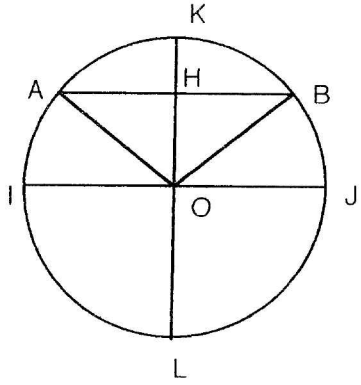


4) Pourquoi les résultats précédents permettent-ils de prouver la conjecture obtenue en fin de première partie ?

Fiche B

On considère la figure suivante[2].

On se propose d'étudier l'aire du triangle ABO lorsque le point H décrit le segment [OK] et de déterminer une position de H qui donne l'aire (ou une aire) maximale.



Le cercle a pour rayon 10 cm.

1ère partie

On cherche une valeur approchée de cette aire maximale

1) Reproduire en vraie grandeur le dessin ci-dessus.

2) Que peut-on dire de l'aire du triangle AOB quand H est en O, en K ?

3) En posant OH = x, exprimer l'aire du triangle AOB en fonction de x.

4) A l'aide de la calculatrice, représenter la variation de la fonction trouvée ci-dessus.

5) Il semble y avoir une valeur maximum pour l'aire ; donner une valeur approchée de cette valeur maximum et une valeur approchée de la valeur de x pour laquelle le maximum semble atteint.

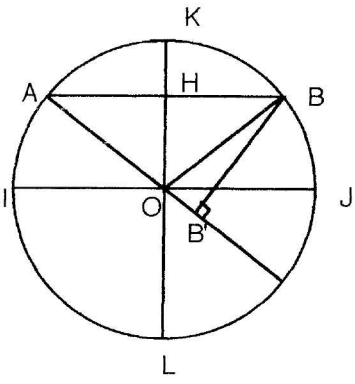
6) Ce résultat est-il une conjecture ou une certitude ? Pourquoi ?

2ème partie

On cherche maintenant une justification géométrique du résultat précédent.

1) Faire la figure avec la valeur (approchée) de x trouvée. Quelle conjecture peut-on faire ? Essayer de la vérifier.

2) On se propose de montrer qu'il y a effectivement **un** maximum. Pour cela, calculer (différemment) l'aire du triangle en s'inspirant de la figure ci-contre.



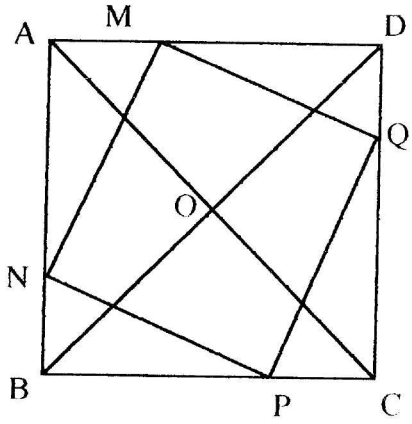
3) Quelle conclusion peut-on tirer ?

4) Ce résultat est-il une conjecture ou une certitude ? Pourquoi ?

---

[2] Activité extraite de la brochure *"Des fonctions et des graphes" (BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE)* éditée à l'IREM de Montpellier (1995)

Fiche C[3]



Soit un carré ABCD de côté 10. M est un point du segment [AB] tel que AM = x .

On construit les points N, P, Q respectivement sur [AD] , [DC] et [CB] de façon que BN = CP = DQ et on admettra que MNPQ est un carré .

Partie A

1) Exprimer en fonction de x l'aire du carré MNPQ (penser à Pythagore)

2) Représenter le tableau de variations approximatif de la fonction qui à x associe l'aire du carré MNPQ

3) Préciser pour quelle valeur de x, cette aire est minimale

4) Est-ce une conjecture ? ☐ une preuve ? ☐ (cocher)

Partie B

1) Soit O le centre du carré ABCD. Démontrer que AMCP est un parallélogramme

2) En déduire que O est le centre du carré MNPQ

3) Démontrer que l'aire de MNPQ est égale à $2\,OM^2$

4) Où doit se situer M pour que l'aire de MNPQ soit minimale ? Pourquoi ?

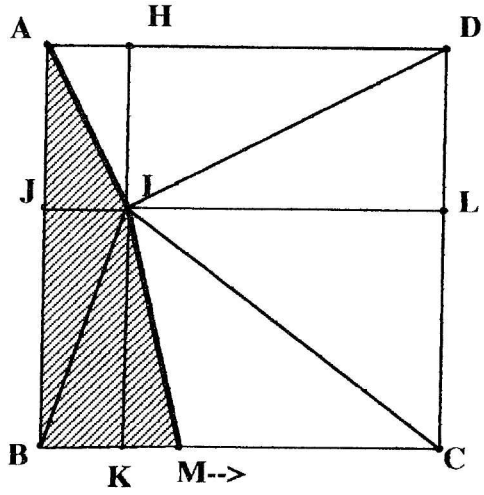
5) Est-ce une conjecture ? ☐ une preuve ? ☐ (cocher)

---

[3] Voir la brochure *"Des fonctions et des graphes" (BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE)* éditée à l'IREM de Montpellier (1995)

Fiche D[4]

ABCD est un carré de côté 10 cm. Le point I est situé à 2 cm du segment [AB] et à 4 cm du segment [AD]. C'est-à-dire IJ = 2 cm et IH = 4 cm.



Le point M parcourt les côtés du carré ABCD en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir du point A. Le point pouvant faire plusieurs tours, la disance x parcourue par le point M varie donc de 0 à $+\infty$.

Notre propos est d'étudier en fonction de x l'aire A(x) limitée par le segment [AI], le segment [IM] et les côtés du carré ABCD.

1ère partie : La fonction

1) Lorsque M est en A, quelle est la valeur de l'aire ? Donc A(0) = ... ;
2) Déterminer A(x) en fonction de x lorsque $0 \leq x \leq 10$;
3) Calculer A(10) et déterminer A(x) lorsque $10 \leq x \leq 20$;
4) Poursuivre le raisonnement. A partir de quelle valeur de x peut-on considérer qu'il est terminé ?
5) Que vaut A(40) ? Représenter la fonction A sur l'intervalle [0 , 80].

2ème partie: contrôle à la calculatrice

1) Que trace Y1 = (X ≤ 3) ? Que trace Y1 = (X ≤ 3)(X ≥ -1) ? Que trace Y1 = (X ≤ 3)(X ≥ -1)X ?
2) Comment représenter seulement un segment de droite ?
3) Comment représenter la fonction A sur [0 , 80] ?

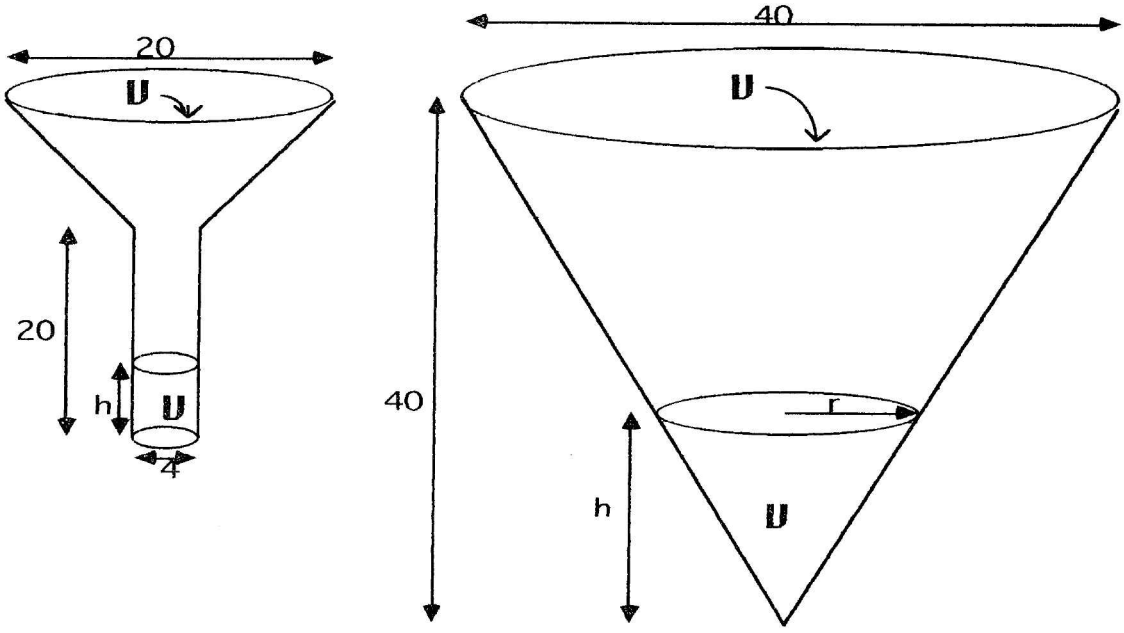
---

[4]Voir la brochure *"Des fonctions et des graphes" (BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE)* éditée à l'IREM de Montpellier (1995)

Les pluviomètres[5]

On dit qu'il est tombé 1 mm de pluie lorsque le volume tombé sur une surface donnée (par exemple celle de l'ouverture du pluviomètre) permettrait d'atteindre une hauteur de 1 mm. Cette pluie tombant dans le pluviomètre occupe alors le même volume mais une hauteur d'autant plus grande que le diamètre du pluviomètre est petit.

Il s'agit de graduer ces 2 pluviomètres en "mm de pluie" (le premier n'est à graduer que sur sa partie cylindrique)



1) S'il est tombé x mm de pluie, quel volume d'eau (en fonction de x) est entré dans le pluviomètre ?
2) Pour le pluviomètre conique, calculer r en fonction de h (à l'aide de "Thalès")
3) Calculer en fonction de h le volume d'eau tombée et en déduire x en fonction de h
4) Tracer les courbes et graduer les pluviomètres

Confrontation

Je cherche à résoudre l'inéquation $x^2 > \frac{1}{x}$. Pour cela j'envisage 2 méthodes :

Méthode 1 : Je trace sur le même repère la courbe des fonctions **c** et **i** puis je regarde les abscisses des points de C_c situés au-dessus des points correspondants de C_i.

Méthode 2 : En multipliant les 2 membres de l'inéquation par x, j'obtiens $x^3 > 1$. Ensuite, je trace la courbe de la fonction **q** et je regarde les abscisses des points de C_q situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$

Après avoir utilisé les deux méthodes, constatez que les résultats sont différents et éclaircissez ce mystère !

[5] Voir la brochure *"Des fonctions et des graphes" (BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE)* éditée à l'IREM de Montpellier (1995)

Evaluation (synthèse)

Objectifs :

*Repérer l'appartenance d'un point à une courbe
*Traiter des problèmes de proportionnalité
*Déduire des fonctions de référence les règles sur les inégalités
*Majorer, minorer une fonction sur un intervalle
*Lire le sens de variation et les extrema d'une fonction
*Programmer le calcul des valeurs d'une fonction
*Construire une courbe point par point
*Résoudre graphiquement une équation, une inéquation, un système
*Mettre en œuvre des capacités stratégiques et d'expression

Problème 1 :

On donne la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ définie sur l'intervalle $[-1 , 4]$

1) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(\frac{2}{3})$, $f(3)$, $f(4)$

2) Le point M de coordonnées $(\frac{8}{3} ; \frac{121}{27})$ est-il un point de la courbe représentative de f ?

3) Donner une valeur approchée du minimum de f sur l'intervalle $[1 , 4]$

4) Est-il vrai que pour tout $x \in [-1 , 2]$ on a : $-3 \leq f(x) \leq 0$?
Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $[-1 , 2]$.

5) Donner les solutions approchées de l'équation : $x^3 - 4x^2 + 5 = 0$

6) L'équation : $x^3 - 4x^2 + 5 = -5$ a-t-elle des solutions ?

7) Si m est un nombre entier quelconque, préciser selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 4x^2 + 5 = m$.

Problème 2 :

On pose $a < b$

A quelles conditions peut-on écrire : a) $a^2 < b^2$

b) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

c) $a^3 < b^3$

Aides

Utiliser le manuel (Séq. 11)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

fonction	|_____|
image	|_____|
antécédent	|_____|
fonction linéaire	|_____|
maximum	|_____|
tableau de variations	|_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Repérer l'appartenance d'un point à une courbe	
Traiter des problèmes de proportionnalité	
Lire sur un graphique ou un tableau de variation	
Programmer le calcul des valeurs d'une fonction	
Construire une courbe point par point	
Résoudre graphiquement une équation, ...	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Utiliser le manuel (Séq. 12)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

parabole	|_____|
Hyperbole	|_____|
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	|_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Déduire des courbes de référence des règles de calcul concernant les inégalités	
Utiliser les fonctions de référence dans la résolution d'équations ou d'inéquations	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Chapitre 2 : Résoudre

Séquence 21 - VALEUR ABSOLUE

SITUER

Objectif :

On introduit la valeur absolue comme la distance entre deux points d'une droite graduée. Ce point de vue permet de résoudre, en leur donnant une signification graphique forte les premières équations du type $|x - a| = b$ et les inéquations correspondantes.

C'est l'occasion de clarifier la notion d'intervalles sur $\mathbb{R}$ et de définir la réunion de deux intervalles.

A. Sur les autoroutes françaises, on indique par une pancarte les "points kilométriques" (PK). Le PK 0 est l'une des 2 extrémités de l'autoroute. Un automobiliste entre au PK 107 et sort au PK 256. Quelle distance a-t-il parcourue ?

Un autre automobiliste entre au PK 326 et sort au PK 256. Quelle distance a-t-il parcourue ?

La ville A est au PK 100. Un automobiliste est à 80 km de cette ville. A quel PK se trouve-t-il ?

Un automobiliste est à moins de 50 km de A. Entre quels PK se trouve-t-il ?

La distance qui sépare l'automobiliste X de la ville A est inférieure à 93 km. Entre quels PK se trouve-t-il ?

La ville B est au PK 326. Monsieur X est à égale distance de A et de B. A quel PK est-il ?

B. Soit une droite graduée et deux points A et B de cette droite d'abscisses respectives a et b.

On appelle* valeur absolue de (a - b) *le nombre noté* | a - b| *égal à la* distance *entre les points A et B.

1) Placer sur cette droite les points d'abscisses : 0 , 100 , 107 , 256 , 321.

2) Calculer $|256 - 107|$ et $|256 - 321|$.

3) Placer ou colorier sur cette droite les points d'abscisses :

a tels que $|a - 100| = 80$

b tels que $|100 - b| < 50$

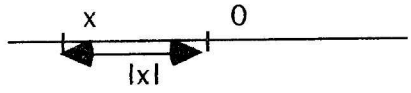
c tels que $|c - 100| \leq 93$

x tels que $|326 - x| = |x - 100|$

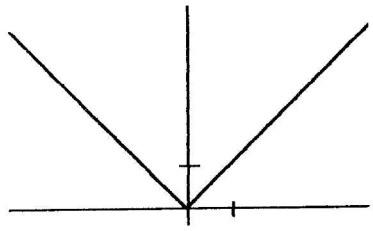
RETENIR

Valeur absolue

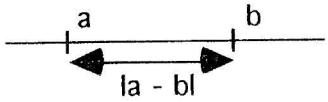
x étant un réel, on appelle "valeur absolue de x" ou "module de x"
la distance qui sépare x de 0
|x| = d(x , 0)
De ce fait : | -x | = | x | et | x | ≥ 0 .
| x | = 0 si et seulement si x = 0.
On a aussi : si x ≥ 0 alors | x | = x et si x < 0 alors | x | = -x



La fonction **v : x ⟼ | x |** est une fonction de référence :



a et b étant 2 réels quelconques, on a :
| a - b | = d (a , b)



Vérifier géométriquement que : | a - b | = | b - a | ; | a + b | ≤ | a | + | b |
En envisageant 4 cas, démontrer que : | a . b | = | a | . | b | ; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Intervalles

$a \le x \le b$ signifie $x \in [a , b]$ et $a < x < b$ signifie $x \in]a , b[$
$|x - c| < r$ signifie $x \in]c-r , c+r[$, c est le centre de l'intervalle et r son rayon
$|x - c| \ge r$ signifie $x \in]-\infty , c-r] \cup [c+r , +\infty[$ (réunion de 2 intervalles)

EVALUER

Objectifs :

Exprimer des encadrements à l'aide d'intervalles et val. absolues
Résoudre équations et inéquations avec des valeurs absolues
Manipuler la fonction de référence "valeur absolue"
Utiliser la notion de distance entre deux réels
Séparer une valeur absolue en deux intervalles

1) Déterminer x pour que $|x - 3| < 0,1$

2) Résoudre les équations : a) $|x - 3| = |x + 5|$
b) $|2x - 3| = -3$

4) Résoudre $|x + 4| - |x - 2| = 3$
a) graphiquement
b) par un calcul

5) En représentant les fonctions de référence convenables, expliquer pourquoi :
$|x| > x^2$ lorsque $x \in]-1 ; 1[$

Séquence 22 - EQUATIONS ET INEQUATIONS

SITUER

Objectifs :

Il s'agit de faire observer que les formes factorisées ou conduisant à une factorisation aisée sont les plus propices à la résolution d'équations ou d'inéquations polynômiales.

On donne l'expression suivante qui est un polynôme du second degré :

$P(x) = x^2 - 6x + 8$ (forme développée)

Démontrer que $P(x) = (x - 2)(x - 4)$ (forme factorisée)

et que $P(x) = (x - 3)^2 - 1$ (forme canonique)

Quelle est la forme la plus pratique pour :

1) Calculer P(0) ?

2) Calculer P(5) ?

3) Résoudre $P(x) = 0$?

4) Résoudre $P(x) = 15$?

5) Résoudre $P(x) < 0$?

6) Résoudre $P(x) \geq 8$?

RETENIR

Equations élémentaires

Pour résoudre une équation qui n'est pas du premier degré (cas où l'inconnue figure avec une puissance supérieure ou égale à 2 ou/et cas où l'inconnue figure en dénominateur) le ***principe*** de résolution *(sauf si une méthode plus simple apparaît !)* est :

"Pour qu'un ***produit*** soit ***nul*** il faut et il suffit que l'un ou l'autre des facteurs soit nul"

"Pour qu'un ***quotient*** soit ***nul*** il faut et il suffit que le numérateur soit nul et que le dénominateur ne le soit pas"

Inéquations élémentaires

La résolution des inéquations qui ne sont pas du premier degré utilise le ***principe*** suivant :

"Pour qu'un ***produit*** ou un ***quotient*** soit ***négatif*** , il doit contenir un nombre ***impair*** de facteurs négatifs dans l'ensemble (numérateur et dénominateur)"

La technique de résolution utilise le **"tableau de signes"**

Exemple Résoudre : $\frac{(x+1)(2-x)}{x-3} \geq 0$

La valeur 3 est interdite

On étudie sur chaque ligne horizontale le signe de chaque facteur et on fait la synthèse sur la dernière ligne

L'ensemble des solutions est : $]-\infty, -1] \cup [2, 3[$

x		-1		2		3	
x + 1	-	0	+		+		+
2 - x	+		+	0	-		-
x - 3	-		-		-	0	+
E	+	0	-	0	+	‖	-

EVALUER

Objectif : Résoudre équations et inéquations factorisables à une inconnue

1) Résoudre $(x + 1)(2x - 5) = (x^2 - 1)$
2) Résoudre $(x + 1)(2x - 5) \leq (x^2 - 1) + 2(x^2 + x)$
3) Résoudre $4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 6x + 9$

Séquence 23 - DROITES DU PLAN

SITUER

Objectifs :

Mettre en évidence la notion de vecteur directeur d'une droite, la rapprocher de celle de coefficient directeur. Utiliser ces notions dans la résolution de problèmes.

Deux frères jumeaux ayant les mêmes diplômes ont été embauchés dans deux entreprises A et B avec les salaires suivants :

entreprise	A	B
salaire d'embauche :	9000	10000
augmentation mensuelle dès le premier mois :	80	50

1) Déterminer les salaires de chaque frère après 1 mois, 5 mois, 10 mois, 12 mois, 24 mois.

2) Exprimer en fonction de x les salaires de chacun après x mois.

3) Représenter graphiquement l'évolution des salaires de chaque frère. (On prendra 1 cm pour 4 mois sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 500F sur l'axe des ordonnées.). Sur la calculatrice graphique, on prendra une fenêtre où $0 \leq x \leq 47$ et on ajustera les valeurs de y.

4) Que représentent, dans ce problème, les vecteurs de coordonnées (2 , 160) ? (5 , 250) ? (5 , 400) ? Que représentent les réels 80 ? 50 ? Quel est le terme mathématique correspondant ?

5) Observer sur le graphique le point correspondant à l'égalité des deux salaires. Quelles sont ses coordonnées ? Que représentent-elles ?

6) Déterminer par un calcul la date à laquelle les deux salaires seront égaux ?

7) A quelles dates les deux frères auront-ils des salaires qui diffèrent de 1000 F ?

RETENIR

Multiplication d'un vecteur par un réel non nul

Multiplier un vecteur par un réel non nul revient à :
- Conserver sa **direction**
- Conserver son **sens** si le réel est positif, le changer dans le cas contraire
- Multiplier la **longueur** (ou **norme**) du vecteur par la ***valeur absolue*** du réel

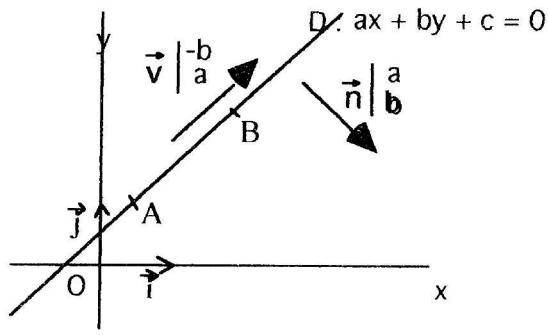
$\vec{v} = k\vec{u}$ signifie donc en particulier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et que $\|\vec{v}\| = |k| \|\vec{u}\|$

Equations de droites

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur non nul dont la direction est celle de la droite.
Un **vecteur normal** d'une droite est un vecteur non nul de direction orthogonale à celle de la droite

Soit deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ non nuls. Ces vecteurs sont :
colinéaires (ont la même direction) ssi **ad - bc = 0** dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque
orthogonaux ssi **ac + bd = 0** dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

Une équation d'une droite est une condition nécessaire et suffisante liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque pour que ce point soit sur la droite.



Soit un point variable M (x , y).
Pour obtenir une équation de la droite (AB), on peut écrire :

$M \in (AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
et on écrit alors la condition de colinéarité

Pour obtenir une équation de la droite D passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, on écrira :
$M \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
et on écrit alors la condition d'orthogonalité

Une équation de droite peut se mettre sous la forme **ax + by + c = 0** a et b non tous les deux nuls)
Alors un vecteur **directeur** a pour coordonnées **(-b , a)** et un vecteur normal a pour coordonnées (dans un repère orthonormal) **(a , b)**

Systèmes

Le système $\begin{cases} a x + b y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
a une seule solution ssi $ab' - a'b \neq 0$
On résoudra ce système par substitution ou par combinaison
On remarquera que ces équations représentent deux droites qui sont sécantes précisément lorsque $ab' - a'b \neq 0$
Un système de 3 équations à 3 inconnues se résoud le plus souvent par substitution

Inéquations à 2 inconnues

La droite D d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en 2 demi-plans (P) et (P')
Dans l'un de ces demi-plans tous les points ont des coordonnées (x , y) qui vérifient $ax + by + c > 0$ et dans l'autre tous les points ont des coordonnées (x , y) qui vérifient $ax + by + c < 0$
Pour déterminer le signe caractérisant chaque demi-plan, on peut faire un test avec un point particulier (par exemple O si celui-ci n'appartient pas à D)

EVALUER

Objectifs :

Résoudre les systèmes d'équations à 2 ou 3 inconnues
Ecrire une équation de droite connaissant un point et sa direction
Résoudre graphiquement des inéquations à 2 inconnues

1) Dans un repère orthonormal d'unités 4 cm
a) Tracer la droite (D) passant par A(-2 , -1) et B(1 , 1)
b) Tracer la droite (Δ) passant par C(-2 , 1) et perpendiculaire à (D)
c) Estimer graphiquement les coordonnées du point I d'intersection de (D) et (Δ)
d) Déterminer par calcul les coordonnées de I

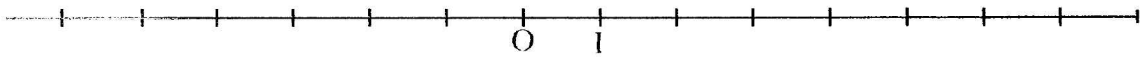
2) Trouver tous les couples (x , y) d'entiers qui vérifient à la fois :

$$\begin{cases} x + y - 4 < 0 \\ 2x - y - 1 \geq 0 \\ x + 3y \geq 0 \end{cases}$$

Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n°3 (soutien)

Tracer une droite Δ graduée en centimètres. Placer le point O origine de la graduation et le point I d'abscisse 1. Dans la suite, on appellera x l'abscisse d'un point M de la droite Δ et pour dire que "M a pour abscisse x", on écrira simplement " M (x) ".



1) a) On pose A (3) et B (7). Quelle est la distance AB ?
b) On pose C (-3) et D (-5). Quelle est la distance CD ?
c) Quelle est la distance AC ? CA ? DB ? AD ?

$AB =$	$CD =$	$AC =$
$CA =$	$DB =$	$AD =$

2) a) On pose M (x). Si x > 3, comment peut-on écrire la distance AM ?

$AM =$

b) Si x < 3, comment peut-on écrire la distance AM ?

$AM =$

On aura retenu que la distance entre P(a) et Q(b) s'écrit PQ = |a - b|.
où que soient les points P et Q.

3) Résumer la réponse à la question 2 en une seule "formule" :

$AM =$

4) Compléter les phrases suivantes :

$|x - 3| =$ ..... si x .... 3 et $|x - 3| =$ ..... si x 3

5) Répondre comme aux questions 2 , 3 , 4 à propos de la distance DM

si M est à droite de ..... alors DM =

si M est à gauche de ..... alors DM =

| | = ... si $x \geq$ ..... et | | = ... si $x <$ ....

6) Supposons que $|x - 3| \leq 4$.
Représenter sur le dessin (par un tracé en rouge) l'ensemble des positions possibles de M.
Compléter ensuite la phrase suivante :

$|x - 3| \leq 4$ se traduit par : ..... $\leq x \leq$ .....

7) Supposons que $|x + 3| \leq 2$.
Représenter sur le dessin (par un tracé en rouge) l'ensemble des positions possibles de M.
Compléter ensuite la phrase suivante :

$|x + 3| \leq 2$ se traduit par : ..... $\leq x \leq$ .....

8) On sait maintenant que M est placé entre D et B sans être confondu avec l'un ou l'autre de ces points. Compléter les phrases suivantes :

le milieu de BD est .....

On observe que .... < x < .... et on en déduit que | x - ... | < ...

9) On sait maintenant que | x - 7 | = | x + 5 |

a) Traduire ceci à l'aide de distances égales

..... = ...

b) Où se trouve le point M ?

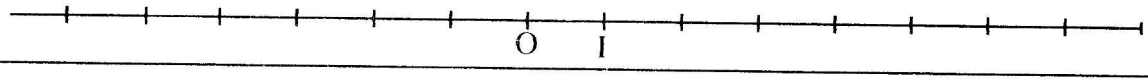
M se trouve ...

c) En déduire la valeur de x

donc x = ...

10) On pose E(-2).

a) Représenter graphiquement la situation traduite par l'équation : | x - 3 | = | x + 2 |



b) Donner la solution de cette équation :

x = ...

11) Combien de solutions possède l'équation : $\left| x + \frac{17}{4} \right| = \frac{13}{7}$? Pourquoi ?

Cette équation a ..... solutions. En effet, la distance .....

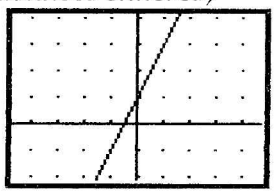
Quelles sont ces solutions ? Ecrire le calcul

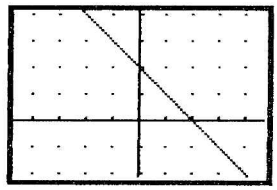
donc x = ... ou x = ...

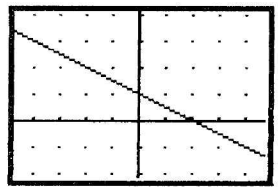
Autour des équations de droites

Estimer par simple observation :
a) l'ordonnée à l'origine de la droite,
b) le coefficient directeur de la droite
c) l'équation de cette droite
d) un vecteur directeur de cette droite

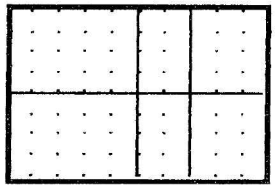
(On admettra que chaque droite passe réellement par un certain nombre de points repérables à coordonnées entières)

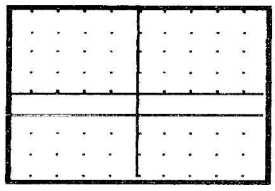

y =
$\vec{v}$ (,)

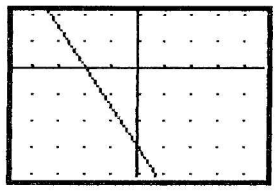

y =
$\vec{v}$ (,)

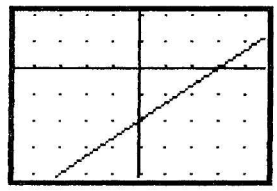

y =
$\vec{v}$ (,)

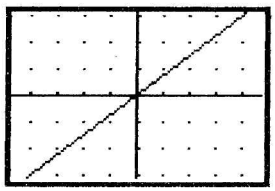
y =
$\vec{v}$ (,)

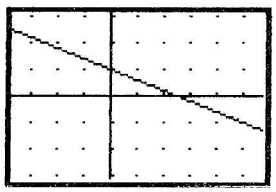

y =
$\vec{v}$ (,)

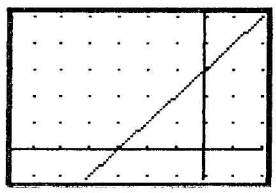

y =
$\vec{v}$ (,)

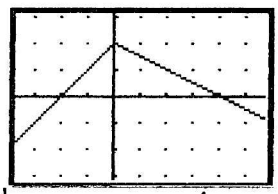

y =
$\vec{v}$ (,)


y =
$\vec{v}$ (,)


y =
$\vec{v}$ (,)


y =
$\vec{v}$ (,)


y =
$\vec{v}$ (,)


y = si x
y = si x

Dans l'industrie

Une usine produit 2 types de voitures appelées A et B . La voiture A revient au constructeur à 30000 F et est vendue 50000F . la voiture B revient à 70000 F et est vendue 80000 F.

L'usine ne peut pas produire plus de 1500 voitures mais doit réaliser un chiffre d'affaires d'au moins 81 mégafrancs (MF). Le nombre de voitures A fabriquées doit rester supérieur au nombre de voitures B.

Quelle doit être la production de chaque type de voitures pour obtenir le bénéfice maximal ?

En cas de crise économique, quelle est la production minimale acceptable pour l'usine ?

Confrontation : à propos du "produit en croix"

Pour résoudre l'inéquation : $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x+3}{x-4}$

j'écris : si $x \neq 1$ et $x \neq 4$, je fais le "produit en croix" et j'obtiens $(x+1)(x-4) < (x+3)(x-1)$ ensuite, je développe ..... Achever la résolution .....

Le réel 2 est-il solution ? Vérifier en regardant l'ensemble des solutions.... Vérifier aussi en remplaçant x par 2 dans l'inéquation donnée ..... Quelle erreur ai-je commise ? Que penser de ce **fameux** "produit en croix" ?

Choisir un champ de démonstration

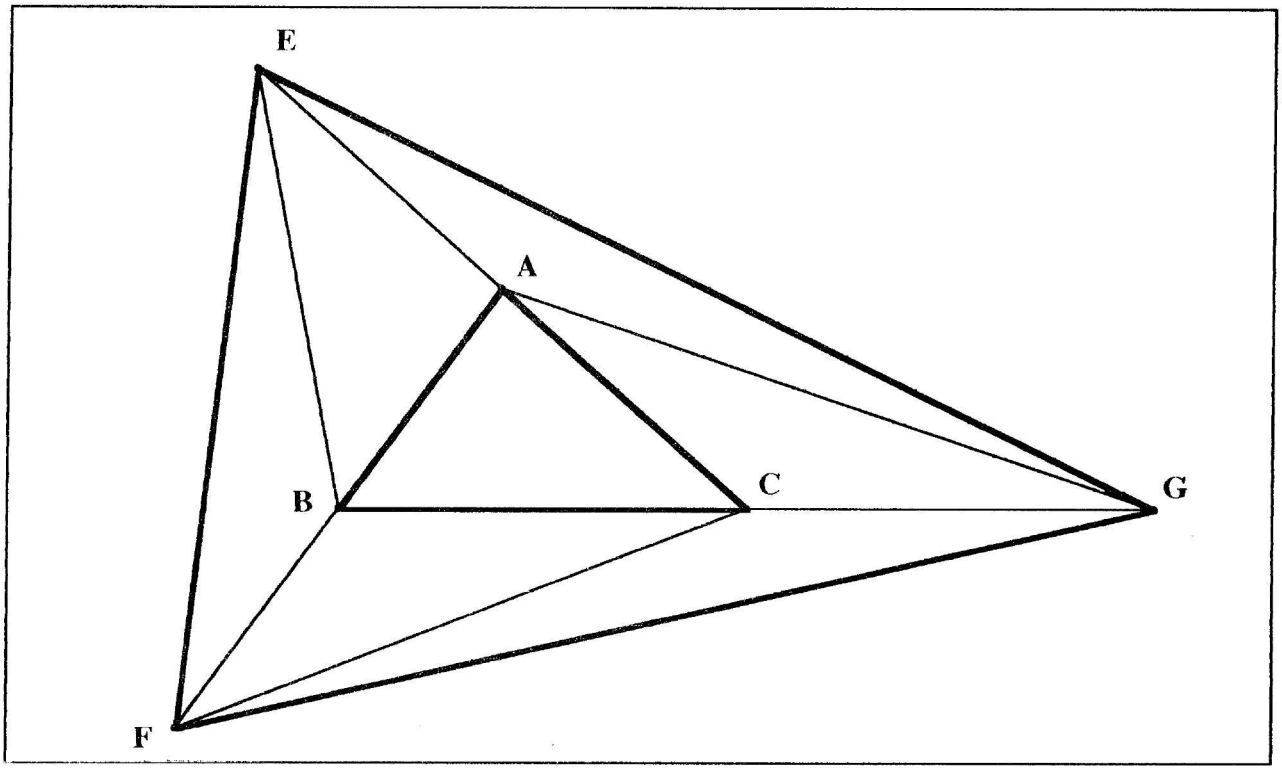
Commentaires :

Il peut être utile de faire démontrer préalablement qu'une médiane détermine deux triangles de même aire.
En se plaçant dans le champ analytique et en utilisant le contre-exemple d'un triangle (3, 4, 5) on peut démontrer la non-proportionnalité des côtés des triangles.

Enoncé :

Soit un triangle ABC. Les points E , F , G sont construits de façon que A, B et C soient les milieux respectifs des segments [CE] , [AF] , [BG] .

Quelles relations peut-il y avoir entre les triangles ABC et EFG ?



Aide 1 : *Tracer en rouge et vert les médianes des deux triangles*

Aide 2 : *Les triangles ABC et BCF ont-ils la même aire ?*

Aide 3 : *Si ABC était rectangle, en serait-il de même de EFG ?*

En Mathématiques, quelle signification ont les mots suivants :

HYPOTHESE
CONJECTURE
PREUVE
EXEMPLE
CONTRE-EXEMPLE

Les fusées

On lance un missile et on note toutes les 10 secondes son altitude y en mètres :

t :	0	10	20
y :	150	2750	4550

(t = 0 est l'instant du lancement)

Quelle est l'altitude de la base de lancement ?
On sait que la loi physique (en négligeant la résistance de l'air) qui donne l'altitude d'un projectile en fonction du temps est de la forme : $\mathbf{y = at^2 + bt + c}$ où a, b, c sont des nombres qui dépendent de la pesanteur et du mode de lancement.
Déterminer les nombres a, b, c dans le cas de ce missile et trouver au bout de combien de temps, il atteindra son altitude maximum. S'il ne trouve pas sa cible, à quel moment s'écrasera-t-il en mer ? (altitude 0)

Pour détruire en vol le missile précédent, on lance un projectile dans la bonne direction dont la loi est :

$$y = -t^2 + 200t - 3450$$

L' instant t = 0 est l'instant de départ du premier missile.
Combien de temps après le premier missile ce projectile a-t-il été lancé de la base ?
Interceptera-t-il le missile ? A quel instant ? A quelle altitude ?
Quelles sont les limites des méthodes graphiques ?

L'Emir

L'Emir se rend en Rolls de son Palais à son aéroport personnel sur son autoroute privée toujours à la même vitesse.
Un jour, son chauffeur augmente la vitesse de 20 km/h et fait ainsi gagner 2 min à l'Emir.
Un autre jour, le chauffeur diminue la vitesse de 20 km/h et fait ainsi perdre 3 min à l'Emir.
Quelle est la distance séparant le Palais de l'Aéroport ?

Evaluation (synthèse)

Objectifs :

Encadrer à l'aide d'intervalles et de valeurs absolues
Résoudre équations, inéquations et systèmes
Ecrire une équation de droite connaissant un point et sa direction
Résoudre graphiquement des inéquations à 2 inconnues
Développer des capacités stratégiques et d'expression

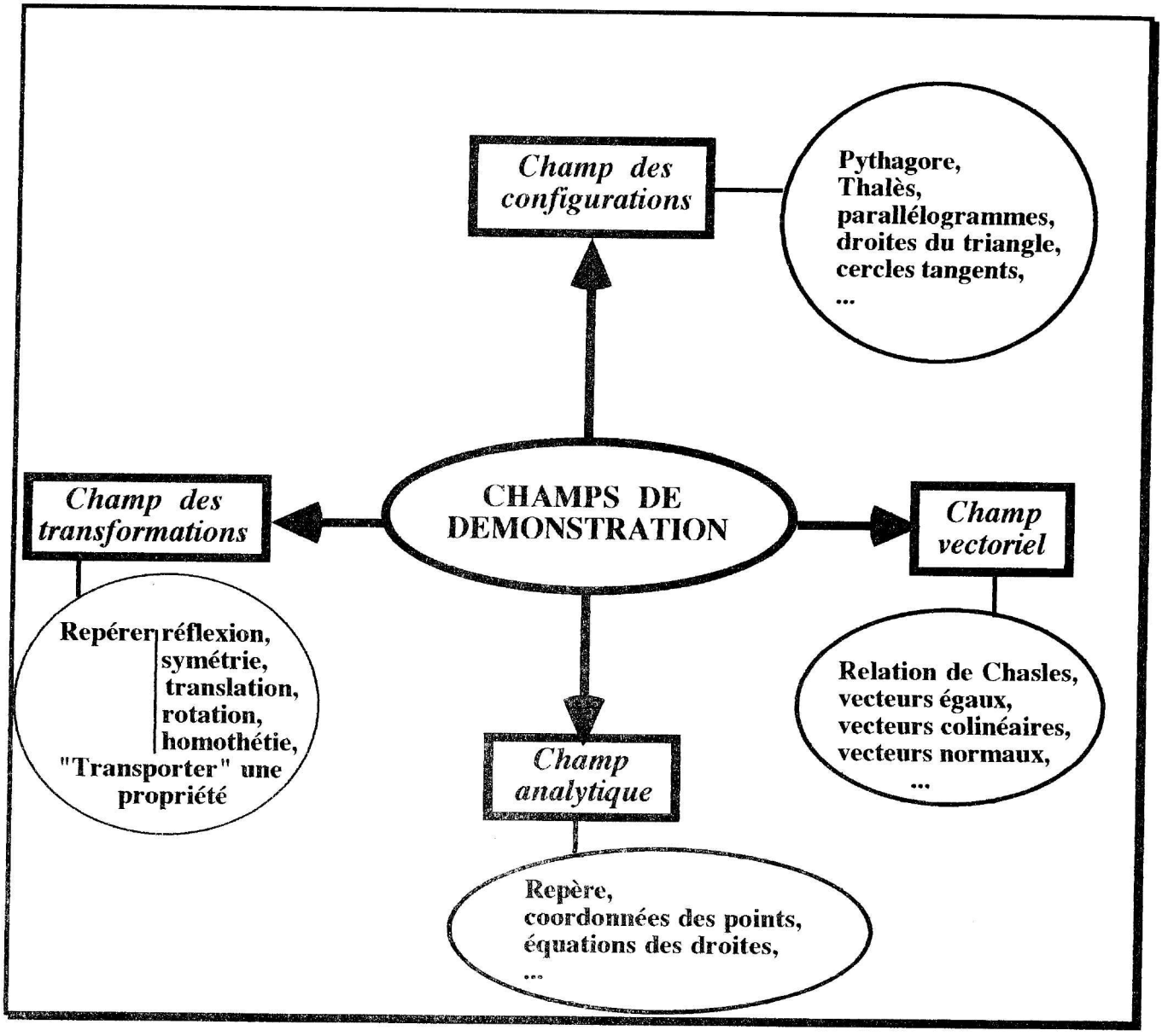
1) Soit la fonction f : $x \mapsto f(x) = |2x| - |2 - x|$ définie sur $\mathbb{R}$
   a) Exprimer $|2x|$ et $|2 - x|$ sans l'aide des valeurs absolues.
   b) Exprimer f(x) sans l'aide des valeurs absolues en étudiant les trois cas.
   c) Représenter graphiquement la fonction f
   d) En déduire les solutions de l'équation : $|2x| - |2 - x| = 5$

2) Dans un repère orthonormal d'origine O, on donne les droites D et Δ d'équations :
   D : $4x - 6y + 15 = 0$ et Δ : $3x + 2y - 12 = 0$
   a) Représenter graphiquement ces deux droites.
   b) Etudier la position relative des deux droites (parallèles, sécantes, perpendiculaires ?)
   c) Déterminer les coordonnées de leur point commun :
      par une méthode graphique
      par le calcul

3) Factoriser le premier membre puis résoudre l'équation : $\frac{2x - 1}{x - 2} - \frac{x - 2}{2x + 1} = 0$

Aides

Travailler dans plusieurs champs de démonstrations



Ne pas laisser enfermer son esprit dans un seul champ : explorer toutes les possibilités.
Passer d'un champ à un autre dans une même démonstration.

Utiliser le manuel (Séq. 21)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

distance entre a et b |_____|
intervalles |_____|
inégalité triangulaire |_____|
rayon d'un intervalle |_____|
fction valeur absolue |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :

	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Utiliser la notion de distance entre deux réels	
Manipuler la fonction de référence "valeur absolue"	
Exprimer des encadrements à l'aide d'intervalles et val. absolues	
Séparer une valeur absolue en deux intervalles	
Résoudre équations et inéquations avec des valeurs absolues	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Utiliser le manuel (Séq. 22)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

Résoudre une équation |_____|
Produit nul |_____|
Tableau de signes |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :

	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Résoudre des équations factorisables à une inconnue	
Résoudre des inéquations factorisables à une inconnue	
Résoudre des équations à une inconnue avec dénominateur	
Résoudre des inéquations à une inconnue avec dénominateur	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Utiliser le manuel (Séq. 23)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

repère quelconque	
vecteur directeur	
équation cartésienne	
vecteurs colinéaires	
vecteurs orthogonaux	
vecteur $k\vec{u}$	
inéquations linéaires	

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :

	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Ecrire une équation de droite connaissant un point et un vecteur directeur	
Ecrire une équation de droite connaissant 2 points	
Ecrire une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal	
Donner une équation de droite par lecture graphique	
Résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues	
Résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues	
Résoudre graphiquement des inéquations à 2 inconnues	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Chapitre 3 : Retourner, renverser

Séquence 31 - SYMETRIES ET REFLEXIONS

SITUER

Objectifs :

Expérimenter les propriétés fondamentales des réflexions (symétries orthogonales) et des symétries (centrales). L'idée de base est, d'une part, de repérer les configurations fondamentales liées à ces transformations ; d'autre part, d'installer l'idée que certaines propriétés se "transportent" grâce à une transformation.

1) Soit une droite (D) et deux points A et B n'appartenant pas à (D). Un point M parcourt (D). Soit P le point tel que AMBP soit un parallélogramme.

a) Sur le même dessin, placer sur (D) quatre positions différentes du point M qu'on notera M_1, M_2, M_3, M_4 et construire les points P_1, P_2, P_3, P_4 correspondants. Quel ensemble le point P semble-t-il parcourir ?
(Dans cette partie du problème on réalise une ***expérimentation*** *qui permet de "se faire une idée" de ce qui se passe)*

b) Quel ensemble le point P parcourt-il ?
(Cette partie du problème est la ***phase déductive****. Pour rechercher des preuves, on observera les éléments invariants de la figure)*

2) Soit une droite (D) et deux points A et B n'appartenant pas à (D). Un point M parcourt (D). Soit Q le point tel que (AB) soit la médiatrice de [MQ].

Répondre aux mêmes questions qu'au 1).

RETENIR

REFLEXION
symétrie orthogonale

Définition

On appelle **réflexion d'axe Δ**, la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

Δ est la médiatrice de [MM']

Notations

$S_\Delta : M \mapsto M'$ ou $S_\Delta(M) = M'$

Propriétés

1) Si $S_\Delta : M \mapsto M'$ alors $M'N' = MN$
et $S_\Delta : N \mapsto N'$
et de plus (MN)et(M'N') sont sécantes sur Δ (ou // dans un cas particulier)

2) Si $M \in \Delta$ alors $M' = M$ (la droite Δ est invariante point par point)

3) L'image d'une droite D est une droite D'. Si D coupe Δ en A, alors D' passe par A.

4) L'image d'un cercle de centre J est un cercle de centre $J' = S_\Delta(J)$ et de même rayon

5) La réflexion conserve :
alignements, longueurs, aires, milieux, parallélisme, orthogonalité, contact tangentiel angles géométriques (pas l'orientation)

SYMETRIE
symétrie centrale

Définition

On appelle **symétrie de centre A,** la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

A est le milieu de [MM'] ou $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$

Notations

$s_A : M \mapsto M'$ ou $s_A(M) = M'$

Propriétés

1) Si $s_A : M \mapsto M'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$
et $s_A : N \mapsto N'$
On dit que les 2 vecteurs sont opposés (même direction, même norme, sens contraire)

2) Si $s_A(M) = M'$ alors A, M, M' alignés et A est le seul point invariant

3) L'image d'une droite est une droite parallèle

4) L'image d'un cercle de centre J est un cercle de centre $J' = s_A(J)$ et de même rayon

5) La symétrie conserve :
alignements, longueurs, aires, milieux, parallélisme, orthogonalité, contact tangentiel angles géométriques et orientés

EVALUER

Objectifs : Trouver l'image d'un point, d'une droite, d'un cercle par réflexion ou symétrie
Observer la présence d'une réflexion ou symétrie pour utiliser une conservation de propriété

1) ABCD est un parallélogramme non aplati de centre O . (Δ) est une droite qui passe par O et qui coupe [AB] en I et [CD] en K. (Δ') est une droite qui passe par O et qui coupe [BC] en J et [AD] en L.

Démontrer que IJKL est un parallélogramme.
On fera au moins deux démonstrations en utilisant au moins deux "champs de démonstration" différents.

2) Dans le repère orthonormal d'origine O, on donne A (1 , 3) , M (x , y) et M' (x', y') son image par la symétrie s de centre A

a) Calculer les coordonnées de O' = s(O)

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y

c) Soit la droite D d'équation 2x -3y = 0 . Quelle est une équation de D' = s(D) ?

Séquence 32 - APPLICATION AUX FONCTIONS

SITUER

Objectif :

Faire expérimenter les effets d'une symétrie ou réflexion sur les courbes des fonctions de référence et en découvrir les répercussions sur leurs équations. Mettre en évidence les courbes d'équation : $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$. Il est possible aussi de rechercher l'équation d'une courbe, image d'une courbe donnée par une symétrie de centre quelconque ou par une réflexion d'axe vertical ou horizontal (en repère orthonormal)

Dans un repère orthonormal d'origine O et pour chaque courbe de référence **c , q , r , i** effectuer la transformation demandée :

a) la réflexion d'axe Ox
b) la réflexion d'axe Oy
c) la symétrie de centre O

Observer ce que deviennent les coordonnées d'un point quelconque M(x , y).

Quelles sont les équations des courbes ainsi obtenues ?

Le point M de coordonnées (x , y) a pour image par la symétrie de centre A(1 , 2) un point M' de coordonnées (x', y'). Exprimer une relation entre x et x' et une relation entre y et y'.
Le point M est un point de la courbe (P) d'équation $y = x^2$. A l'aide des 3 relations entre les nombres x, y, x', y' déterminer une relation entre x' et y'. Donner alors une équation de la courbe (P') image de (P) par la symétrie de centre A.

RETENIR

Fonctions paires

Une fonction f définie sur D est **paire** si sa courbe (en repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$) est invariante par la réflexion d'axe **Oy**.
Ou ce qui est équivalent :
si $x \in D$ alors $(-x) \in D$
et pour tout x , $\mathbf{f(-x) = f(x)}$

Les fonctions **c , v** sont PAIRES

Fonctions impaires

Une fonction f définie sur D est impaire si sa courbe (en repère quelconque $(O,\vec{i},\vec{j})$) est invariante par la symétrie de centre **O** .
Ou ce qui est équivalent :
si $x \in D$ alors $(-x) \in D$
et pour tout x , $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

Les fonctions **q , i** sont IMPAIRES

La plupart des fonctions ne sont **ni paires ni impaires** (par exemple : **r** dont l'ensemble de définition n'est pas symétrisé). La fonction nulle est la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ **paire et impaire**

Courbes associées par symétries

Si $f_1(x) = -f(x)$ leurs 2 courbes sont symétriques par rapport à Ox
Si $f_2(x) = f(-x)$ leurs 2 courbes sont symétriques par rapport à Oy
Si $f_3(x) = |f(x)|$ ou si $f_4(x) = f(|x|)$ certaines parties de courbes seulement sont modifiées

EVALUER

Objectifs :

Déterminer la parité d'une fonction et en déduire une symétrie de la courbe

Obtenir une courbe en transformant par symétrie une courbe connue

1) Dans le repère orthonormal d'origine O, soit A (1 , 3) , M (x , y) et M' (x', y') son image par la symétrie s de centre A

a) Calculer les coordonnées de O' = s(O)

b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y

c) Soit P la parabole d'équation $y = x^2$. Quelle est une équation de P' = s(P) ?

d) Quelle est l'image de P par la réflexion d'axe Δ dont l'équation est y = 3

2) Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}}{x^2 + 9}$

a) En utilisant la calculatrice graphique, quelle conjecture peut-on faire concernant la parité de f ? Expliquer les raisons de cette conjecture.

b) Etudier la parité de f en réalisant les calculs nécessaires.

Activités complémentaires

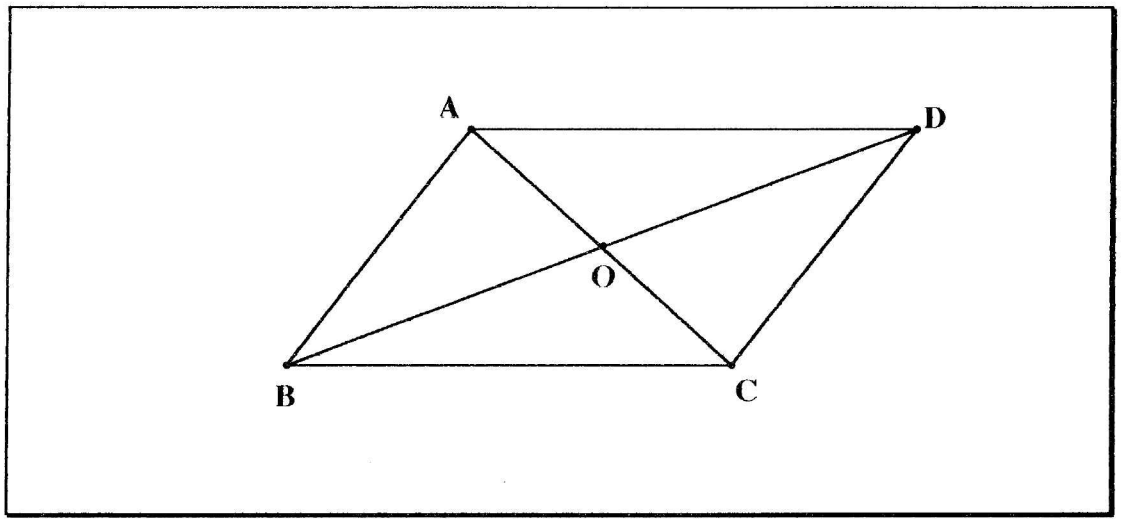
Fiche de travail personnel n°4 (soutien)

Problème 1

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et Δ une droite passant par A qui coupe (BC) en E. Soit Δ' la droite parallèle à Δ qui passe par C et qui coupe (AD) en F.

Comment utiliser les propriétés de la symétrie pour prouver que BEDF est un parallélogramme ?

1) Compléter la figure :



2) Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$? Par quelle transformation C est-il l'image de A ? Par quelle transformation A est-il l'image de C ? D est-il l'image de B ?

Sachant que, par hypothèse, O est le
on en déduit que : $\overrightarrow{OC}$ =
Donc C est l'image de A par la
De même, parce que $\overrightarrow{OA}$ = , on peut dire que A est
par la
et, parce que , on peut dire que D est l'image

3) Quelle est l'image par la symétrie de centre O de la droite Δ ?

On sait que, par une symétrie, l'image d'une droite est
Donc, l'image de Δ est une
De plus, A est un point de Δ, donc son image C est un
Par conséquent, l'image de Δ est

4) Quelle est l'image par la symétrie de centre O de la droite (BC) ?

Par la symétrie de centre O, on a prouvé que l'image de B est et que l'image de C est
Donc, sachant que l'image d'une droite est une , on en déduit que l'image de (BC) est

5) En déduire l'image de E par la symétrie de centre O.

On vient de prouver que l'image de Δ par la symétrie de centre O est
Donc l'image de tout point de Δ est un point de
De plus, l'image de tout point de (BC) est un point de
En particulier, E est un point de Δ et de (BC) donc son image est un point de et de
Donc, l'image de E est

6) Que peut-on dire du quadrilatère BEDF ?

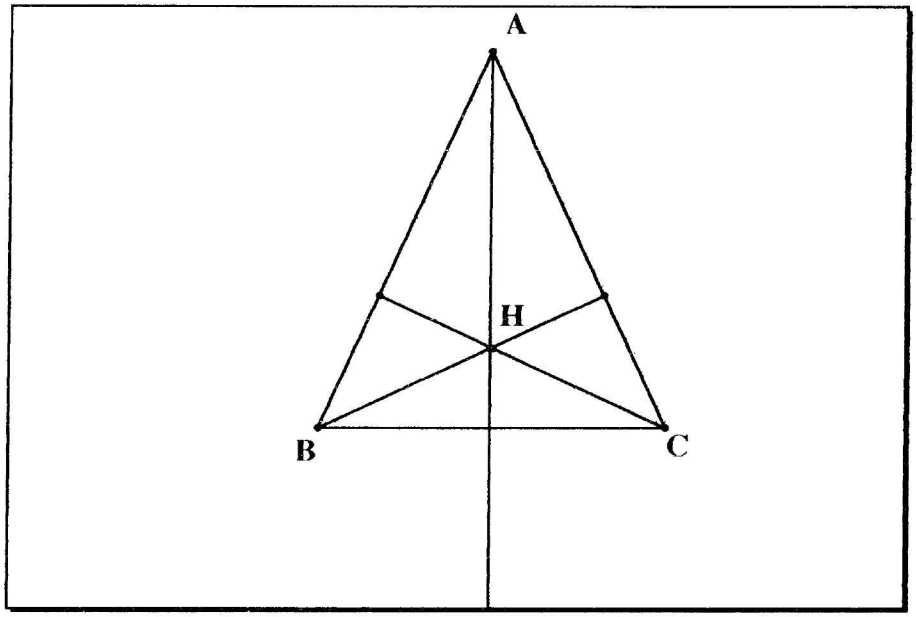
On a prouvé que, par la symétrie de centre O, B a pour image
donc, O est le milieu de
On a aussi prouvé que, par la symétrie de centre O, E a pour image
donc, O est le milieu de
Donc,

Problème 2

Dans un triangle ABC, isocèle de sommet principal A, on considère l'orthocentre H et le point D symétrique de H par rapport à la droite (BC).

Comment utilisr les propriétés de la réflexion pour déterminer la nature du quadrilatère BHCD ?

1) Compléter la figure :



2) Quelle est l'image de B par la réflexion d'axe (AH) ? Celle de C ?

La droite (AH) est la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle.
Donc (AH) est la *de [BC]*
Donc, par définition de la réflexion.

3) Que peut-on dire des images, par la réflexion d'axe (AH), des points H et D ?

Justification :
Conclusion :

4) Déduire des questions précédentes des relations entre les longueurs BH , HC, BD , DC .

Justification :

Conclusion : BH = *; CD =*

5) Quelles sont les images des points B, H, C, D par la réflexion d'axe (BC) ?

Justifications :

Conclusions :

6) En déduire d'autres relations entre les longueurs BH , BD , CD , CH.

Justification :

Conclusion : $BH =$; $CD =$

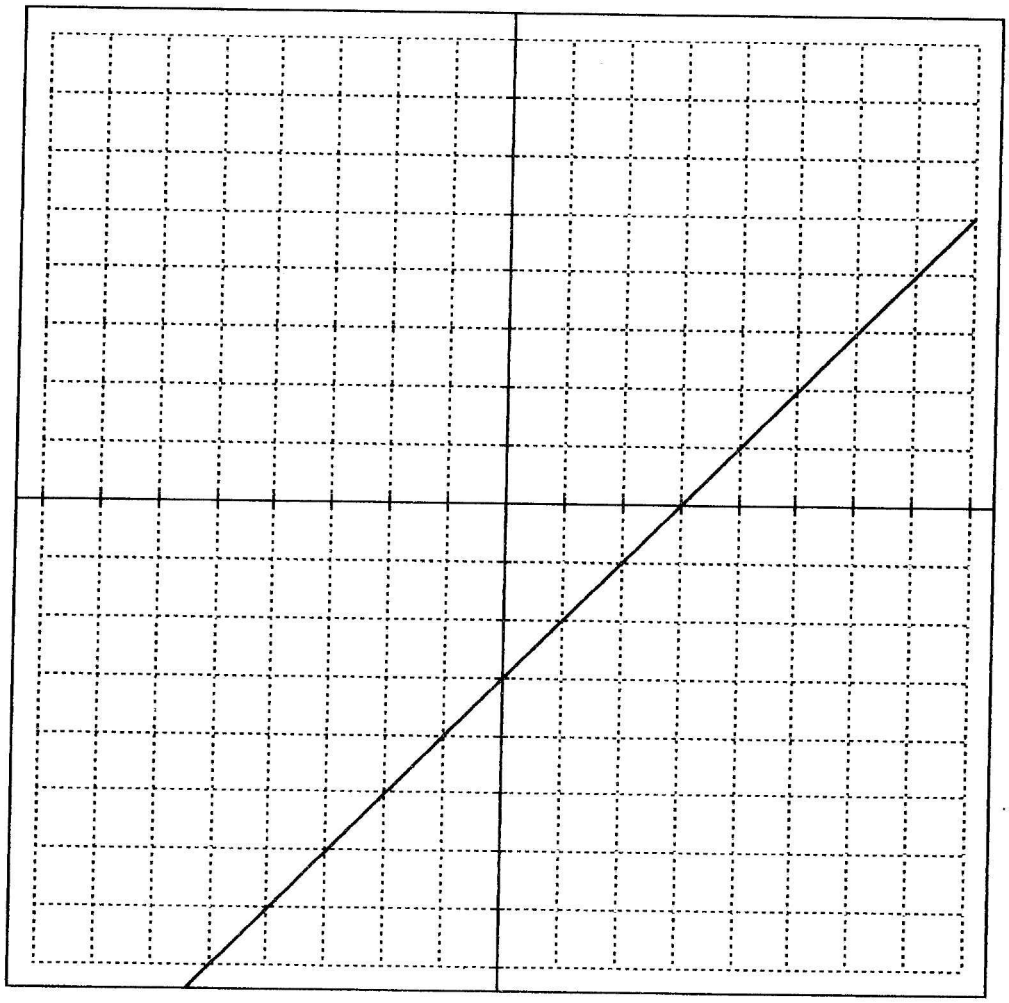
7) Quelle est la nature du quadrilatère BDCH ?

Justification :

Conclusion :

Problème 3

Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. D est la droite d'équation : x - y - 3 = 0 et A le point de coordonnées (1 , 2). On recherche une équation de D', image de la droite D par la symétrie de centre A



1) Compléter la figure, tracer (D') avec précision. Lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de (D'). Donner une conjecture concernant une équation de cette droite.

On va maintenant prouver la conjecture précédente.

2) Soit le point B de coordonnées (3 , 0). Justifier que B est un point de la droite D

2) Soit B', de coordonnées (u , v), l'image de B par la symétrie s de centre A. Quelle égalité vectorielle peut-on écrire ?

3) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB'}$?

$\overrightarrow{AB}$ (,) ; $\overrightarrow{AB'}$ (,)

4) Quelles sont les équations d'inconnues u et v qu'on peut écrire ?

$\{$

5) En déduire les coordonnées de B'

$B'\ (u = \quad ; v = \quad)$

A partir d'ici deux méthodes sont proposées :

6) Le point M de coordonnées (x , y) a pour image M', de coordonnées (x', y'), par la symétrie de centre A.

En procédant comme aux questions précédentes, écrire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ puis en déduire les expressions de x en fonction de x' et de y en fonction de y'.

$\overrightarrow{AM'} =$

d'où : $x =$; $y =$

7) En remplaçant, dans une équation de D, x par son expression en fonction de x' et y par son expression en fonction de y', expliquer pourquoi on obtiendra une équation de D'

Le point M' étant un point quelconque de D', la relation obtenue entre x' et y' est une relation entre

donc cette relation est une

8) Déterminer maintenant une équation de D'

6) Quel est le coefficient directeur de (D') ? Pourquoi ?

$m =$

En effet,

7) La droite (D') ayant une équation de la forme $y = mx + p$ et le point B' étant un point de (D'), comment peut-on calculer p ?

donc $p =$

8) En déduire une équation de (D')

Comparer cette méthode avec celle de gauche.

En quoi celle de gauche est-elle plus générale ?

9) Vérifier la cohérence de l'ensemble des résultats

L'équation trouvée est

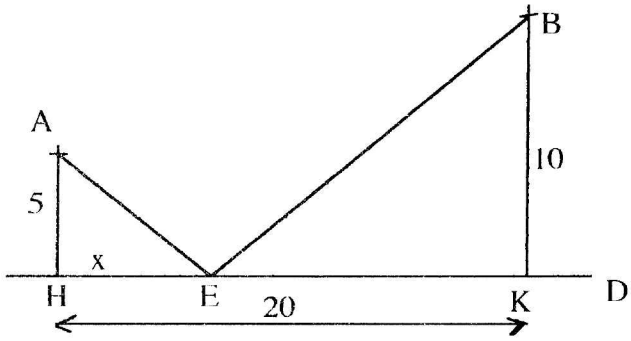
Une longueur minimum

Soit une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à cette droite et dont les projections orthogonales sur D sont respectivement H et K.

On sait que AH = 5 , BK = 10 , HK = 20 (l'unité est le mètre) .

E est un point du segment [AB] et on pose AE = x .

On cherche la valeur de x conduisant au trajet AE + EB le plus court possible



1) Déterminer les longueurs AE et EB puis la longueur AE + EB .

2) Déterminer, par manipulation de la calculatrice, une valeur approchée du minimum de la longueur AE + EB et la valeur correspondante de x.

3) Faire la figure à l'échelle $\frac{1}{100}$ avec la valeur trouvée à la question précédente.

4) Placer le point B' image de B par la symétrie orthogonale d'axe D. Quelle conjecture peut-on faire concernant la position des points A, E, B'?

5) Démontrer cette conjecture et construire le point E tel que,la longueur AE + EB soit minimale.

Construction de fonctions paires ou impaires

Soit une fonction f quelconque. On pose :

$$g : x \longmapsto g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad ; \quad h : x \longmapsto h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Démontrer que g est une fonction paire et h une fonction impaire.

Confrontation

On donne les deux fonctions suivantes :

$$g : x \longmapsto g(x) = x^2 - 4 \quad ; \quad h : x \longmapsto h(x) = \frac{7x^3 - 3x^2 - 28x + 12}{7x - 3}$$

Si j'obtiens leurs courbes à l'aide de la calculatrice graphique, je constate qu'elles sont identiques ! Cependant je prétends que l'une est paire et l'autre pas ! Comment cela est-il possible ? Est-ce contradictoire ? Qui se trompe ? Pourquoi ?

Evaluation (synthèse)

Objectifs :

Observer la présence d'une réflexion ou symétrie dans un problème
Etudier la parité d'une fonction et en déduire une symétrie de la courbe
Obtenir une droite ou une courbe en transformant une courbe connue
Développer des capacités stratégiques et d'expression

1) Soit un parallélogramme ABCD de centre O. Un point M est situé sur [AD].
La droite (MO) coupe [BC] en P.
Démontrer que AM = CP

2) Soit la courbe (V) représentative de la fonction de référence $v : x \mapsto |x|$
et le point A(1 , 2)
a) Tracer la courbe (V) dans un repère orthonormal d'unités 1 cm
b) La symétrie *s* de centre A transforme M(x , y) en M'(x', y').
* Démontrer que : $x = 2 - x'$ et $y = 4 - y'$
* *s* transforme (V) en une courbe (V'). Déterminer une équation de (V').
* Tracer (V') dans le même repère que (V)
c) Résoudre, par un calcul ou un raisonnement, l'inéquation : $4 - |2 - x| > 0$
Vérifier le résultat par une méthode graphique qu'on expliquera.

3) Soit ABCD un rectangle (AB < AD). Où placer le point H sur [AB] et le point K sur [AD] pour que la droite (HC) soit perpendiculaire à [BK] en son milieu ?

Aides

Géométrie du triangle

Les définitions sont données en italique. Toutes les autres propriétés peuvent être démontrées.

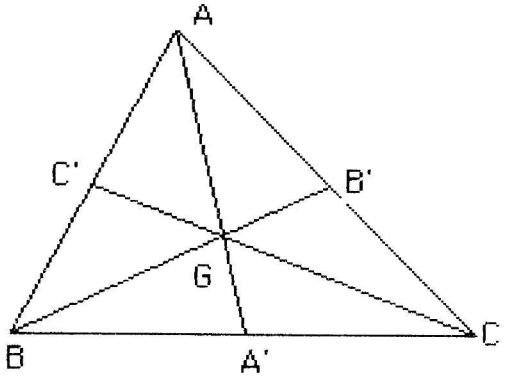


fig. 1

*Les **médianes** d'un triangle sont les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé.*

Une médiane divise le triangle en deux triangles de **même aire**.

Les médianes concourent en point G appelé **centre de gravité** du triangle.

Le centre de gravité coupe chaque médiane aux 2/3 de sa longueur.

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

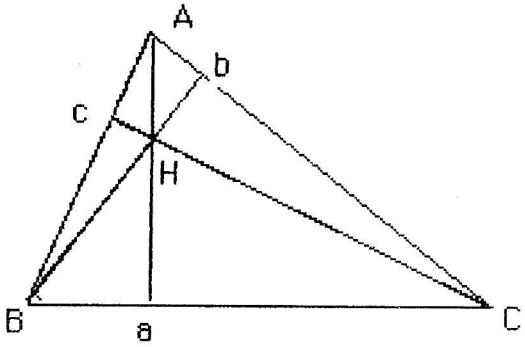


fig. 2

*Les **hauteurs** d'un triangle sont les droites (ou les segments) qui contiennent un sommet et qui sont perpendiculaires au côté opposé.*

Les hauteurs concourent en un point appelé **orthocentre** du triangle.

Dans un triangle rectangle isocèle, l'orthocentre est le sommet principal. Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. De plus, si le côté de l'angle droit mesure "a",

l'hypoténuse mesure $a\sqrt{2}$ et la hauteur $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

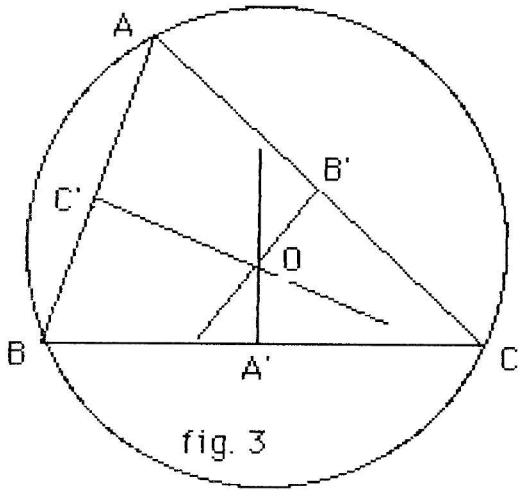


fig. 3

*Les **médiatrices** d'un triangle sont les médiatrices de ses côtés.*

Elles concourent en un point O qui est le **centre du cercle circonscrit** au triangle.

OA=OB=OC

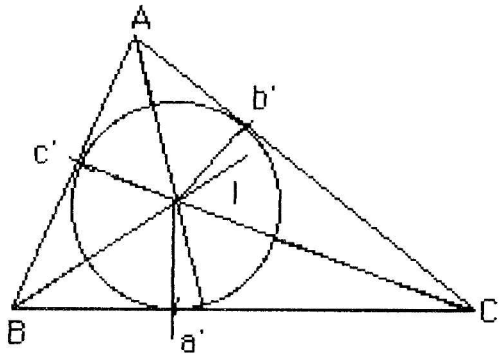


fig. 4

*Les **bissectrices** du triangle sont les droites qui partagent les angles en 2 angles égaux.*

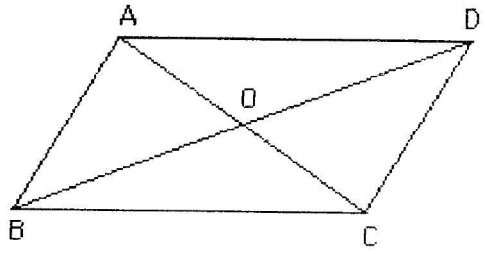
Tout point d'une bissectrice est **équidistant** des côtés adjacents.

Les bissectrices concourent en I, **centre du cercle inscrit** dans le triangle.

Dans un triangle isocèle ABC de sommet principal A, la médiane, la hauteur et la bissectrice issues de A sont confondues avec la médiatrice du côté [BC].

Dans un triangle équilatéral, hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices sont confondues et si le côté mesure "a" alors la hauteur mesure $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Géométrie du parallélogramme



ABCD est un **parallélogramme** (plg) ssi **au choix** :

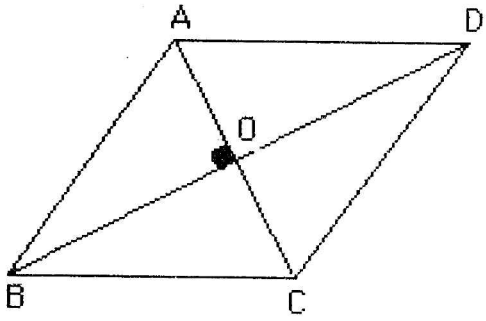
1) [AC] et [BD] ont le même milieu O
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
3) (AB) // (CD) et (AD) // (BC)
4) (AB) // (CD) et AB = CD
5) AB = CD et AD = BC
6) s_O : A→C et B→D
7) $t_{\vec{u}}$: A→D et B→C

Rem: si (AB) // (CD) alors ABCD est un trapèze même si (AD) et (BC) sont sécantes

Si, de plus :

Cas particulier N°1

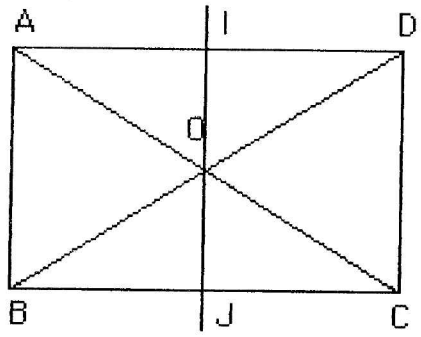
1) AB = AD
OU
2) (AC) ⊥ (BD)
OU
3) $S_{(AC)}$: B→D



ABCD est un **losange**

Cas particulier N°2

1) (AB) ⊥ (AD)
OU
2) AC = BD
OU
3) $S_{(IJ)}$: A→D et B→C



ABCD est un **rectangle**

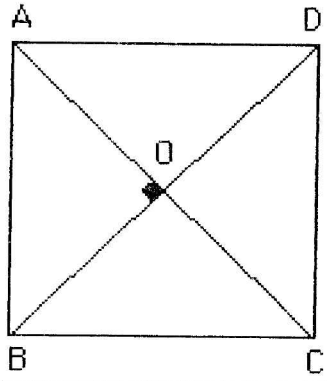
Si, de plus : cas particulier n° 3

1) ABCD est un losange
ET
2) ABCD est un rectangle

OU ALORS SI

3) r $(O, \pm\frac{\pi}{2})$: A→B , B→C , C→D

alors ABCD est un **carré**



Remarque : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD) si et seulement si (AB) // (CD) c.à.d. s'il existe k réel tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$. Si k = 1 alors ABCD est un parallélogramme.

Utiliser le manuel (Séq. 31)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

réflexion |_____|
symétrie centrale |_____|
points invariants |_____|
droite globalement invariante |_____|
identité du plan |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Trouver géométriquement l'image par une réflexion ou symétrie d'un point, d'une droite, d'un cercle	
Trouver analytiquement l'image d'un point, d'une droite par une symétrie	
Observer la présence d'une réflexion ou d'une symétrie pour "transporter" une propriété	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Utiliser le manuel (Séq. 32)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

fonction paire |_____|
centre de symétrie d'une courbe |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Déterminer la parité d'une fonction et en déduire une symétri de la courbe	
Obtenir analytiquement l'image d'une courbe par une symétrie	
Lire l'équation de l'image d'une courbe de référence par réflexion d'axe Oy ou symétrie de centre O	

4) Résoudre chacun de ces exercices. En inventer un au besoin.

Chapitre 4 : Glisser

Séquence 41 - TRANSLATIONS

SITUER

Objectif :

Expérimenter les propriétés fondamentales des translations. Comme pour les symétries et les réflexions, il peut être intéressant d'utiliser un logiciel de Géométrie.

Soit une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à D. Un point M parcourt D. Soit P le point tel que ABPM soit un parallélogramme.

a) Sur le même dessin, placer sur D quatre positions différentes du point M qu'on notera M_1, M_2 , M_3 , M_4 et construire les points P_1 , P_2 , P_3 , P_4 correspondants. (Cette partie du problème est l' **expérimentation** qui permet de "se faire une idée" de ce qui se passe)

b) Quel ensemble le point P parcourt-il ? (Pour rechercher des preuves, on observera les éléments invariants de la figure)

c) Comparer le présent problème avec celui de la séquence 4 (retourner ou renverser)

RETENIR

Translation : Définition

Le vecteur $\vec{v}$ étant donné, on appelle translation de vecteur $\vec{v}$, la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Notation

$t_{\vec{v}} : M \rightarrow M'$ ou $t_{\vec{v}}(M) = M'$

Propriétés

1) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, il n' y a aucun point invariant

2) Si $t_{\vec{v}} : M \rightarrow M'$ et $N \rightarrow N'$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

3) L'image d'une droite (D) est une droite (D'). De plus (D') est parallèle à (D). L'image d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et de centre O' = t(O)

4) La translation conserve toutes les configurations usuelles : alignement, parallélisme, orthogonalité, angles, milieux, longueurs, aires, contact.

Addition des vecteurs

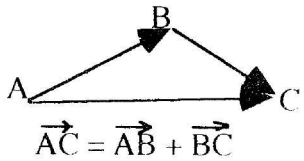
Soit les 2 translations : $t_{\vec{u}} : A \rightarrow B$ et $t_{\vec{v}} : B \rightarrow C$

On admet que c'est une translation qui transforme ***directement*** A en C . On l'appelle la **composée** des 2 translations

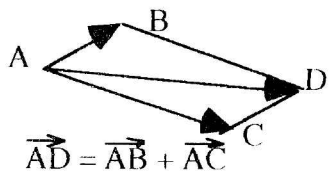
$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} : A \rightarrow C \quad \text{et} \quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

On peut donc écrire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et en particulier $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Pour construire une somme de 2 vecteurs on dispose de la méthode "du triangle" ou de la méthode "du parallélogramme" :



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

On rappelle que la relation de Chasles est une relation entre des vecteurs.
En particulier, elle ne s'applique pas aux longueurs car $AC \leq AB + BC$ (inégalité triangulaire)

EVALUER

Objectifs :

Tracer la somme de 2 vecteurs , utiliser la relation de Chasles
Obtenir l'image d'une configuration usuelle par une translation

1) ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [DC], J est le milieu de [BC]. La symétrie de centre I transforme A en E et la symétrie de centre J transforme A en F.
Démontrer que ACED, ABFC, BDEF sont des parallélogrammes
Quelles sont les images par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ des points B et C
Démontrer que la droite (AC) coupe [EF] en son milieu.

2) Soit la translation de vecteur $\vec{v}(2 , 1)$
Quelle est par cette translation l'image :
A' du point A(0 , -1)
B' du point B(1 , 1)
(D') de la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$

3) ABC étant un triangle, placer les points M, P, R tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \ ; \ \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \ ; \ \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}$$

Séquence 42 - APPLICATION AUX FONCTIONS

SITUER

Objectif :

Expérimenter les effets d'une translation sur les courbes des fonctions de référence. On obtiendra de nouvelles courbes dites "associées par translation". Une équation de la courbe image sera obtenue sous la forme y' = f(x') où (x', y') est le couple de coordonnées du point M' image de M.

Dans un repère orthonormal d'origine O et pour chaque fonction de référence **c , q , r , i** tracer l'image de sa courbe par la translation de vecteur $\vec{v}(3 , 2)$

Déterminer par une observation graphique les coordonnées (x', y') de l'image M' d'un point quelconque M(x , y).

A l'aide de la relation $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ exprimer x en fonction de x' et y en fonction de y'.
Quelles sont les équations des courbes ainsi obtenues ?

RETENIR

Fonctions associées par translation

1) $g : x \mapsto f(x) + b$ a une courbe qui se déduit de C_f par la translation de vecteur $\vec{v}$ (0 , b)
2) $h : x \mapsto f(x + a)$ a une courbe qui se déduit de C_f par la translation de vecteur $\vec{v}$ (-a , 0)

Fonctions périodiques

f est périodique de période **k** ssi pour tout x, $\mathbf{f(x + k) = f(x)}$. Sa courbe est formée d'une partie de longueur **k** répétée par la translation de vecteur de coordonnées (**k**,0)

EVALUER

Objectifs :

Obtenir, par translation, une courbe à l'aide d'une courbe connue
Déterminer un axe ou centre de symétrie d'une courbe

Tracer la courbe d'équation $y = (x + 1)^3 - 2$ et déterminer son centre de symétrie
Même question avec $y = |x - 7| - 4$ et déterminer son axe de symétrie

Séquence 43 - FCTS HOMOGRAPHIQUES, SECOND DEGRE

SITUER

Objectif :

Mettre les équations du type $y = x^2 + bx + c$ et $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ sous leur forme canonique afin de faire apparaître le vecteur des translations par lesquelles les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{k}{x}$ sont les antécédents des précédentes. On pourra alors, en ce qui concerne le second degré, placer le sommet de la parabole et résoudre les équations et inéquations correspondantes en liant graphiques et calculs.

Montrer que $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ et représenter la courbe d'équation $y = x^2 + 6x$.

En déduire la résolution des équations :

$x(x + 6) = 7$; $x^2 + 6x + 10 = 0$; $x^2 + 6x + 5 = 0$

Représenter graphiquement les courbes d'équation :

$y = x(x + 6) - 7$ $y = x^2 + 6x + 10$ $y = x^2 + 6x + 5$

RETENIR

Fonctions homographiques

f est une fonction homographique si on peut l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}}$$

exemples : $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$; $g(x) = \frac{x - 1}{x}$; $h(x) = 2 + \frac{1}{x - 3}$

Pour tracer la courbe :

mettre l'expression sous la forme : $\mathbf{f(x) = \frac{k}{x + a} + b}$

qui fait apparaitre $f(x) = k.\mathbf{i}(x + a) + b$ d'où on déduit que la courbe de f se déduit de celle de la fonction de référence $k.\mathbf{i}$ par la translation de vecteur $\vec{\mathbf{v}}$ **(-a , b)**

Cette courbe est donc une **hyperbole** dont les **asymptotes** sont parallèles aux axes.

Exemple de méthode :

On fait apparaitre au numérateur une expression entre parenthèses égale au dénominateur

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2x - 2 + 2 + 3}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + 5}{x - 1} = \frac{2(x - 1)}{x - 1} + \frac{5}{x - 1} = \frac{5}{x - 1} + 2$$

Fonctions du second degré

Toute fonction du second degré peut s'écrire :

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Pour tracer la courbe :

mettre l'expression sous la forme : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

qui fait apparaitre $f(x) = a.c(x - \alpha) + \beta$ d'où on déduit que la courbe de f se déduit de celle de la fonction de référence a.c par la translation de vecteur $\vec{v}$ (**-a , b**)

La courbe obtenue est une **parabole** d'axe vertical.

Exemple de méthode :

On ajoute et on retranche le nombre permettant de créer une identité remarquable. (Ce nombre est le carré de la moitié du coefficient de x)

$$f(x) = x^2 - 5x + 2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}$$

Factorisation de l'expression du second degré :

A partir de l'expression transformée

$$f(x) = x^2 - 5x + 2 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}$$

on peut obtenir une factorisation en remarquant une "différence de 2 carrés" :

$$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4} = (x - \frac{5}{2})^2 - (\sqrt{\frac{17}{4}})^2 = (x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2})$$

EVALUER

Objectifs :

Tracer les courbes des fonctions homographiques
Tracer les courbes du second degré
Résoudre les équations ou inéquations du second degré

1) Tracer la courbe d'équation $y = x^2 - 5x + 3$ puis résoudre exactement l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$ et l'inéquation $x^2 - 5x + 3 < 0$

2) On donne, en repère orthonormal la courbe C_i de la fonction "inverse" et la courbe C_f d'équation :

$$y = \frac{x - 1}{x - 2}$$

Démontrer que C_f est l'image de C_i par la translation de vecteur $\vec{v}(2 , 1)$

Quelle est par cette translation l'image :

A' du point A(0 , -1)
B' du point B(1 , 1)
(D') de la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$
(P') de la parabole (P) d'équation $y = x^2$
Donner l'intersection (exacte) de (P') et (D')

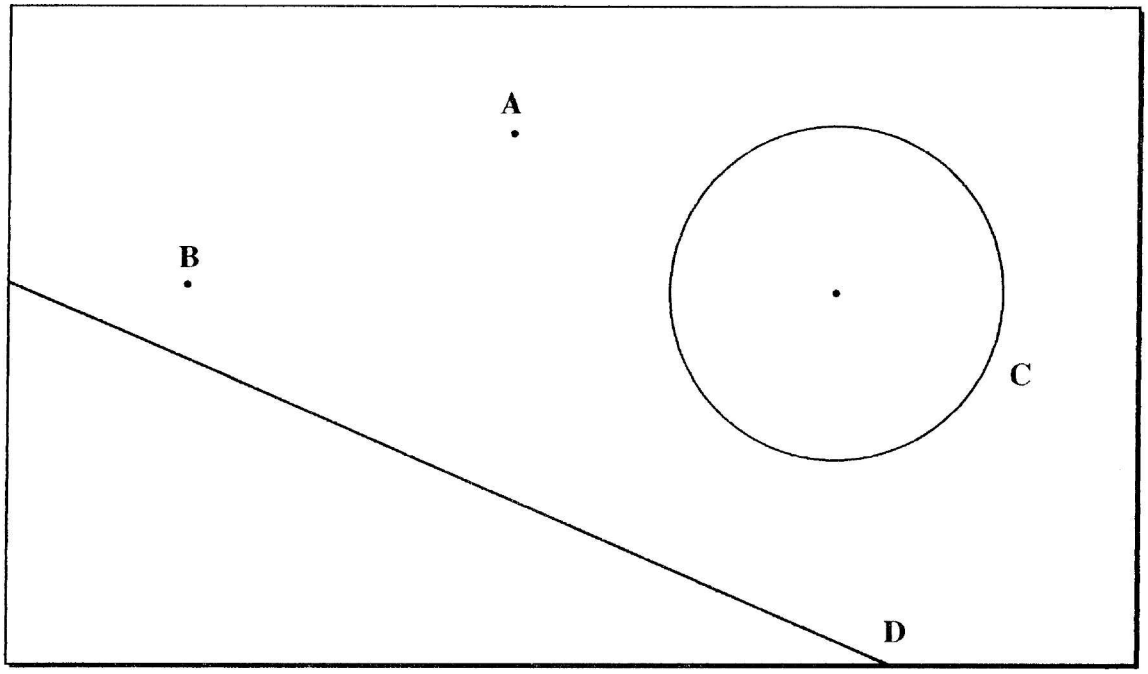
Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n° 5 (soutien)

Problème

La droite D, le cercle C sont donnés. Les points A et B sont donnés distincts et n'appartiennent ni à C ni à D.

Le problème consiste à construire les points M sur D et P sur C de façon que ABMP soit un parallélogramme



1ère partie

1) Imaginons qu'une solution ABMP a été trouvée. Par quelle transformation, P est-il l'image de M ?

ABMP étant un parallélogramme, les vecteurs
donc P est l'image de M par

2) Le point M est un point de D. Sur quelle figure E le point P se trouve-t-il ? Expliquer la construction de la figure E. Réaliser cette construction.

Justification :
Conclusion :
Explication :

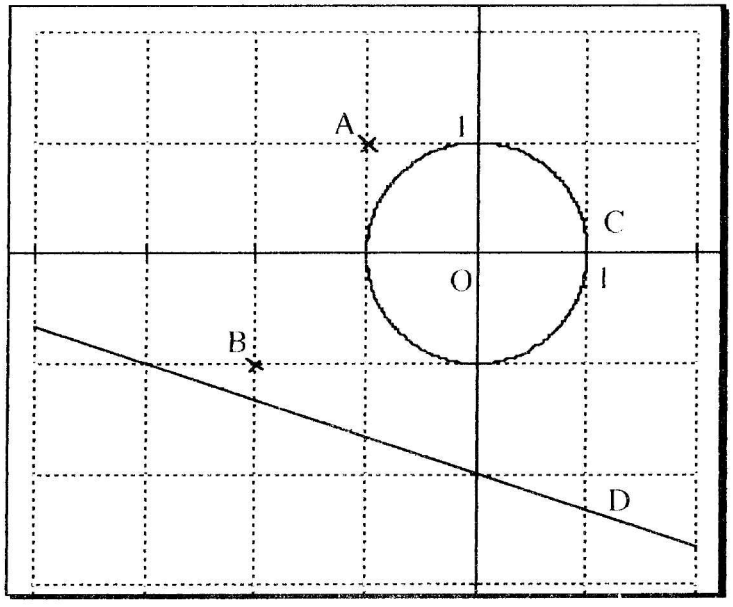
3) On supposera que la longueur AB est choisie de façon que le problème ait une solution. Dans ce cas, préciser la position du point P :

Le point P est un point situé à la fois
donc

4) Dans notre cas de figure, combien y a-t-il de solutions ? Les construire. La solution (s'il en existe une) peut-elle être unique ? Dans quels cas ? Se peut-il qu'il n'y ait aucune solution ? Expliquer.

2ème partie

Dans le repère orthonormal ci-dessous, on donne A de coordonnées (-1 , 1), B de coordonnées (-2 ,-1). La droite D d'équation $x + 3y + 6 = 0$ et C le cercle de centre O et de rayon 1.



1) Déterminer les coordonnées du point J', image de J de coordonnées (0 ,-2) par la translation t de vecteur $\overrightarrow{BA}$

2) Déterminer une équation de D' image de D par t

3) Soit Q un point quelconque de coordonnées (x , y) du cercle C. Quelle est la distance OQ ?

$OQ =$ donc $OQ^2 =$

4) Exprimer OQ^2 en fonction de x et y et en déduire que $x^2 + y^2 = 1$

$OQ^2 =$ donc

5) Expliquer pourquoi $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle C

6) Quel système d'équations vérifient les cordonnées du point P ?

Le point P est sur et sur

donc $\begin{cases} \\ \end{cases}$

7) En déduire que l'abscisse du point P vérifie l'équation $(1 - x)^2 = 9(1 - x^2)$

Des équations du système ci-dessus, on déduit :

$y^2 =$ donc $9y^2 =$

et $y^2 =$ donc $9y^2 =$

d'où :

8) Résoudre cette équation et en déduire les coordonnées des deux points P possibles puis les coordonnées des points M correspondants.

$(1 - x)^2 = 9(1 - x^2)$

$(1 - x)^2 - 9(1 - x^2) = 0$

$(1 - x)($ $) = 0$

donc $x =$ et $y =$

ou $x =$ et $y =$

Les coordonnées de P sont donc (,) ou (,)

Pour obtenir celles de M, on constate que M est l'image de P par

donc :

Droite et fonction "partie entière"

1ère partie

1- Une fonction particulière[6]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe toujours un entier n unique tel que $n \leq x < n+1$.

On note E la fonction qui a x associe n.

Compléter : E(1,23) = ... ; E(5/2) = ... ; E(0,15) = ... ; E(4) = ...

E(x) = 0 si ....≤ x < ....

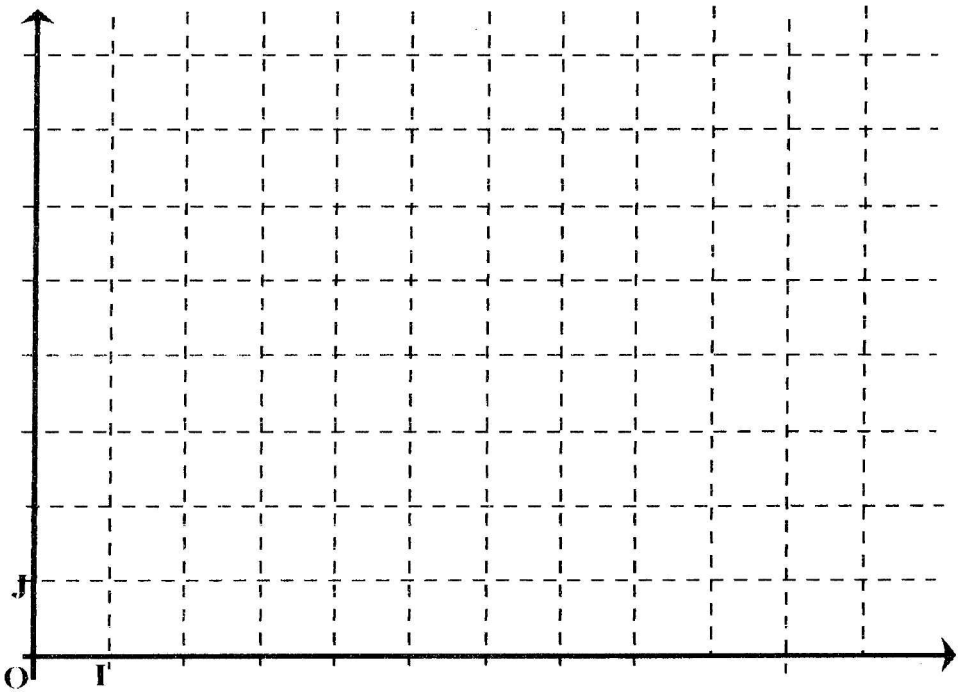
E(x) = 1 si ....≤ x < ....

E(x) = 2 si ....≤ x < ....

E(x) = 3 si ....≤ x < ....

E(x) = 14 si ....≤ x < ....

Représenter la fonction E sur [0;9] dans le repère ci-dessous.



2- Intersection

Tracer sur le schéma précédent une droite d'équation y = mx qui coupe le graphe de E.
Pouvez-vous dire en combien de points la droite choisie coupe le graphe de E ?

3- Observations graphiques et conclusions

La calculatrice graphique permet d'observer le graphe de E. Ce graphe met-il en évidence la valeur prise par E(x) si x est entier ?
En traçant plusieurs droites d'équation y = mx et en observant le nombres de points d'intersection de la droite et du graphe de E, peut-on établir une relation entre m et ce nombre de points d'intersection ?

---

[6] Cette activité est extraite de *"Des fonctions et des graphes" (BERNARD, FAURE, NOGUES, NOUAZE, TROUCHE)* édité à IREM de Montpellier (1995)

2ème partie

1- Détermination de n+1 (nombre de points d'intersection) à partir de m

- En utilisant l'inégalité $\frac{n}{n+1} < m \leq \frac{n+1}{n+2}$, montrer que $\frac{1}{n+2} \leq 1-m < \frac{1}{n+1}$, et $n+1 < \frac{1}{1-m} \leq n+2$
- Que représente n+1 pour le nombre $\frac{1}{1-m}$? (distinguer 2 cas)

2- Application

Déterminer le nombre de points d'intersection du graphe de E et de la droite y = mx si

a) m = 0,898 .....

b) m = 0,98 .....

c) m = 0,99987 .....

3- Contrôle graphique

Pour chacun des cas a, b, c répondre aux deux questions suivantes :

- quelles sont les coordonnées du point d'intersection "le plus éloigné" de 0 ?
- quelle fenêtre d'affichage choisir pour vérifier ?

a) Si m = 0,898

b) Si m = 0,98

c) Si m = 0,99987

Une équation du 3ème degré

Le but du problème est la résolution exacte de l'équation (E) : $x^3 - 2x - 1 = 0$

a) Tracer les courbes (Q) d'équation $y = x^3$ et (D) d'équation $y = 2x + 1$. En déduire les solutions approchées de (E) et vérifier que l'une d'elles est exacte.

b) On admettra que , puisque -1 est solution, on peut mettre (x + 1) en facteur dans l' expression ($x^3 - 2x - 1$). Trouver alors l'expression du second degré qui manque :

$$x^3 - 2x - 1 = (x + 1)(\ldots ? \ldots)$$

c) Achever la résolution de l'équation (E) et comparer les valeurs exactes trouvées avec les valeurs obtenues graphiquement

Deux symétries consécutives

Une symétrie centrale transforme une figure (F) en une figure (F').
Une autre symétrie centrale (de centre différent) transforme la figure (F') en une autre figure (F'').
Par quelle transformation passe-t-on de la figure (F) à la figure (F'') ?
(Il faudra bien entendu faire une conjecture puis la démontrer)

Points à coordonnées entières sur une hyperbole

Pour une introduction "discrète" à la notion de limite

On considère, dans un repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{11x + 37}{4x + 12}$.

En s'aidant de toutes les méthodes envisageables, il s'agit de déterminer le nombre de points de cette hyperbole ayant des coordonnées entières. Bien entendu, il ne suffit pas d'en déterminer quelques uns mais bien de les trouver tous (si on pense qu'ils sont en nombre fini) ou de prouver qu'il y en a une infinité.

Même question pour l'hyperbole d'équation $y = \frac{30100x + 30501}{10000x + 10100}$.

Evaluation (synthèse)

Objectifs :

Utiliser vecteurs et translations dans les problèmes
Obtenir, par translation, une courbe nouvelle
Tracer les courbes homographiques et du second degré
Résoudre les équations ou inéquations du second degré
Manifester des capacités stratégiques et d'expression

Les cercles (C_1) de centre O_1 et (C_2) de centre O_2 se coupent en I et J. De plus A et B sont deux points fixes du cercle (C_1). Tracer, en expliquant, les images de ces cercles par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Construire les points E et F du cercle (C_2) tels que ABFE soit un parallélogramme.

Tracer, en expliquant les procédés, les courbes d'équation $y = x^2 - 4x - 2$ puis $y = 2 + 4x - x^2$ et enfin $y = |x^2 - 4x - 2|$ et résoudre l'équation $|x^2 - 4x - 2| = 5$.

Aides

La pyramide du problème

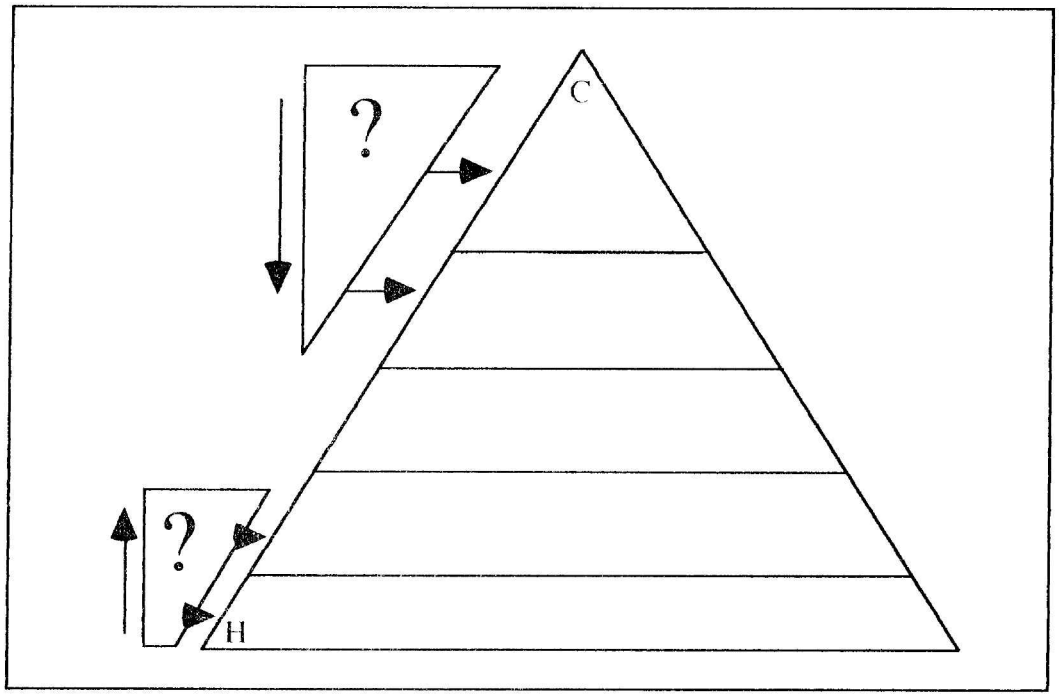
Organiser une démarche de preuve,
ordonner les justifications,
distinguer la "logique de la recherche" de "la logique de la démonstration".

On donne le problème suivant :

Soit un triangle ABC et soit D le point tel que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même direction et même sens et CA = CD.

Démontrer que D est un point de la bissectrice de l'angle $B\hat{A}C$

1) Faire une figure
2) Reproduire la "pyramide" ci-dessous :



2) Ecrire à "l'étage" du bas les **données** du problème.

3) Ecrire à "l'étage" du haut la **conclusion** demandée.

4) Près du "téléphérique descendant", écrire : ***"Pour démontrer ceci, il suffirait de prouver ..."***

5) Près du "téléphérique ascendant", écrire : ***"Ce que je sais peut se traduire ..."***

6) En utilisant ces phrases remplir les étages intermédiaires.

7) Déplacer d'un cran les téléphériques et recommencer les raisonnements jusqu'à ce que la liaison logique soit faite entre la partie descendante et la partie montante.

8) Pour rédiger la démonstration, quel ordre peut-on utiliser ?

On pourra utiliser une pyramide semblable pour résoudre les problèmes suivants :

ABC est isocèle en A, H est l'orthocentre de ABC, et D le symétrique de H par rapport à (BC).
Démontrer que A, B, C, et D sont sur le même cercle.

ou ce problème-ci :

ABCD est un parallélogramme, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Les droites (AJ) et (CI) coupent (BD) respectivement en E et F.
Démontrer que DE = EF = FB

ou encore :

ABC est un triangle non rectangle. Le cercle de diamètre [BC] coupe (AB) en E et (AC) en F. On appelle G le point commun à (BF) et (CE).
Démontrer que (AG) et (BC) sont perpendiculaires.

Utiliser le manuel (Séq. 41)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

translation |_____|
addition vectorielle |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Trouver géométriquement l'image par une translation d'un point, d'une droite, d'un cercle	
Trouver analytiquement l'image d'un point, d'une droite par une translation	
Placer un point défini par une égalité vectorielle	
Observer la présence d'une réflexion ou d'une symétrie pour "transporter" une propriété	

4) Résoudre chacun de ces exercices.

Utiliser le manuel (Séq. 42)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

"Montage" sur fonctions usuelles |_____|
Fonctions périodiques |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :

	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Obtenir par translation une courbe à l'aide d'une courbe connue	
Déterminer un axe ou centre de symétrie d'une courbe	

4) Résoudre chacun de ces exercices. Au besoin, en inventer un.

Utiliser le manuel (Séq. 43)

1) A quelles pages du manuel se trouvent les définitions des notions suivantes (ou des informations précises les concernant) :

Polynôme du 2nd degré |_____|
forme canonique |_____|
Factorisation à l'aide d'une égalité |_____|

2) Existe-t-il des termes utilisés dans le cours et non trouvés dans le livre ?

3) Vous devez être capable de :

	Citer la référence d'un exercice du livre permettant de tester cette capacité :
Tracer les courbes des fonctions homographiques	
Tracer les courbes du Second degré	
Résoudre équations et inéquations du Second degré	

4) Résoudre chacun de ces exercices. En inventer au besoin.

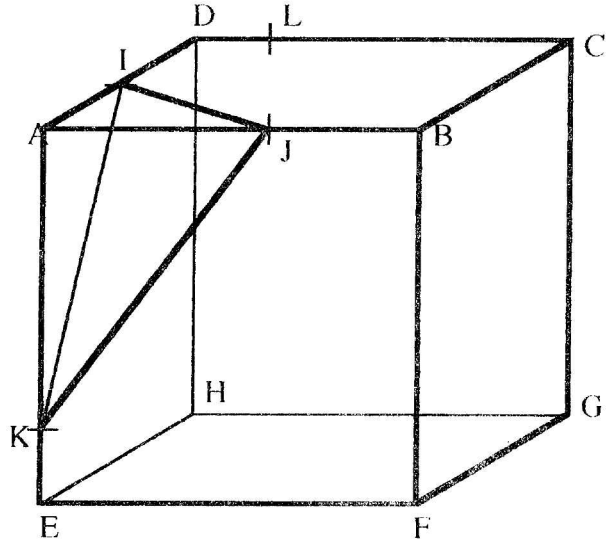
Chapitre 5 : Couper

Séquence 51 - GEOMETRIE DANS L'ESPACE

SITUER

Objectifs :

Percevoir la réalité spatiale dans un dessin en perspective cavalière
Traduire la réalité spatiale par un dessin en perspective cavalière
Se familiariser avec les propriétés élémentaires de la géométrie de l'espace
Réaliser des calculs de longueurs d'angles et de volume.



Le cube ABCDEFGH a des arêtes qui mesurent 10 cm. Les points I, J, K, L sont sur les arêtes et on a :

AI = 5 cm
AJ = 6 cm
AK = 8 cm
DL = 2 cm

Calculer IJ, IK, JK et calculer le volume AIJK

On coupe le cube par un plan (P) qui passe par L et qui est parallèle au plan (IJK)

Dessiner, en s'aidant des résultats "à retenir", les traces laissées sur les faces du cube par le plan (P). On pourra imaginer que plan (P) symbolise une scie dont on verrait les traces sur les faces du cube.

Après avoir coupé ce cube en deux parties par le plan (P), on demande de dessiner en perspective les deux morceaux obtenus. Le morceau contenant le point A sera posé sur la face ADE, les points A et E étant devant. Le morceau contenant le point C sera posé sur la face BCG, les points C et G étant derrière.

RETENIR

Théorèmes d'incidence

1) Trois points non alignés ou deux droites sécantes ou deux droites parallèles déterminent un plan
2) Si deux droites sont coplanaires, elles sont sécantes ou parallèles
3) Si deux points sont dans un plan, la droite qui les joint est dans ce plan
4) Si deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune
5) Si trois points appartiennent à deux plans distincts, ils sont alignés
6) Si deux droites sont coplanaires, il existe un plan unique qui les contient

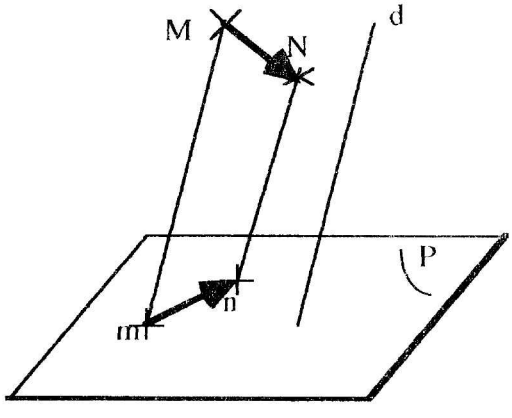
Théorèmes sur le parallélisme

1) Si un plan coupe deux plans parallèles, les intersections sont des droites parallèles
2) Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle au plan
3) Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre

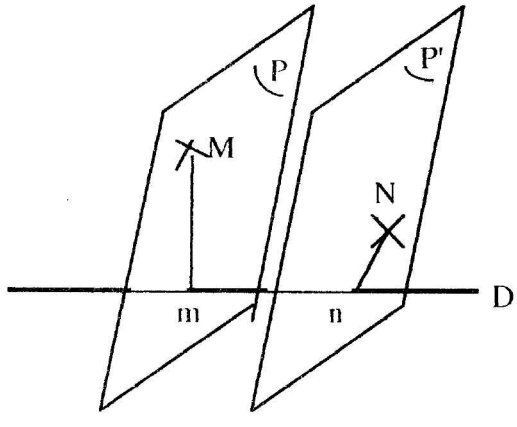
Théorèmes sur l'orthogonalité

1) Deux droites sont orthogonales sis des parallèles à ces droites ayant un point commun sont perpendiculaires
2) Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites du plan
3) Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan
4) Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre
5) Le plan médiateur d'un segment est le plan qui contient toutes les médiatrices du segment

Projections



m et n sont les projetés de M et N sur le plan (P) selon la direction de droite d



m et n sont les projetés de M et N sur la droite D selon la direction du plan (P)

Les projections ne conservent que les alignements, les milieux, le parallélisme

EVALUER

Objectifs :

Interpréter et réaliser un dessin en perspective cavalière
Utiliser les théorèmes de l'espace comme justifications

1)ABCDEFGH est un cube ; I est le milieu de [AD], J le milieu de [EF], K le milieu de [EH], L le milieu de [GH]

a) Calculer les longueurs AG et CK
b) Déterminer, en expliquant, l'intersection du plan (IJH) et du plan (BCG)
c) Prouver que les points A, C, L, K appartiennent à un même plan
d) Prouver que le plan (ACL) est parallèle au plan (IJH).

2)ABC est un triangle et G est son centre de gravité. On projette cette configuration sur un plan P selon une direction de droite d. On appelle A', B', C', G' les projections respectives de A, B, C, G.

Démontrer que G' est le centre de gravité du triangle A'B'C'

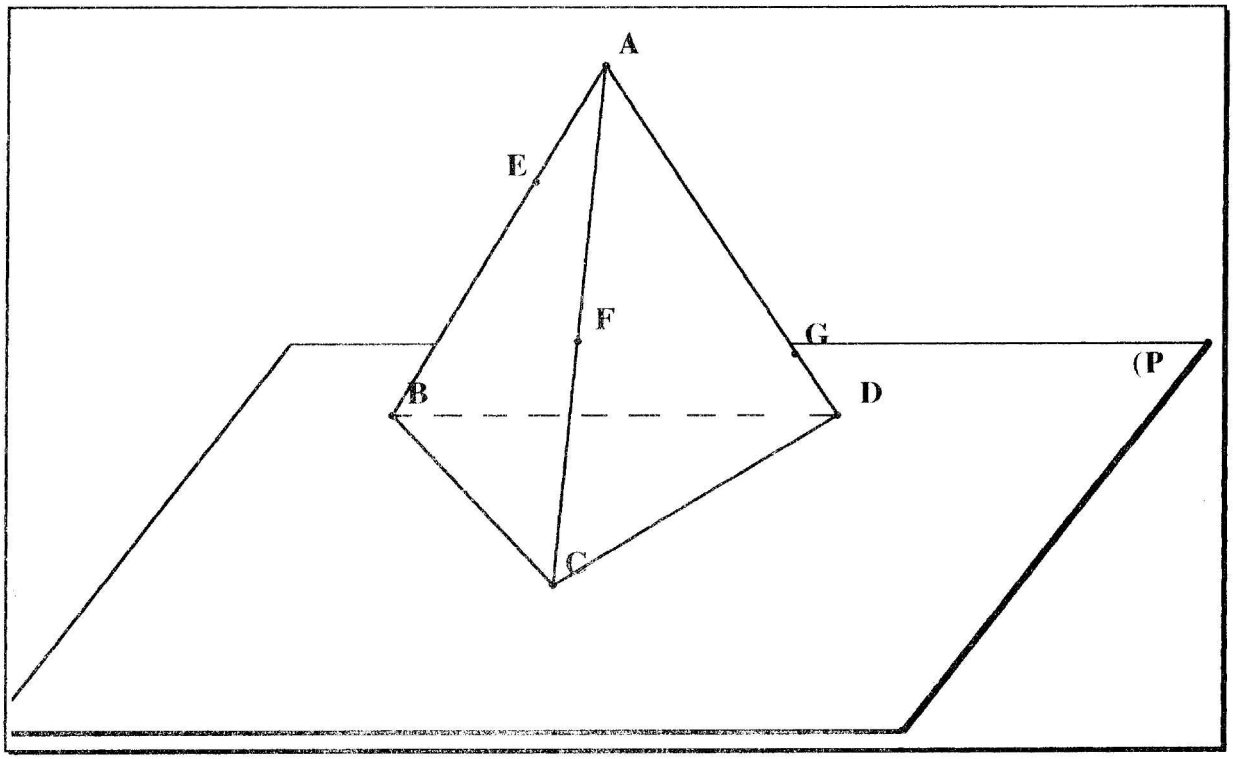
Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n°6 (soutien)

Problème

ABCD est un tétraèdre. Le plan P est défini par la face BCD. Le point E est sur l'arête [AB], F sur [AC] et G sur [AD] de façon que les droites (EF), (EG) et (FG) ne sont pas parallèles au plan P.

On cherche l'intersection du plan P et du plan (EFG).



1) Les droites (EF) et (BC) sont-elles coplanaires ? Quel est leur plan commun ?

2) Citer les théorèmes du cours qui justifient ce résultat

3) Les droites (EF) et (BC) sont-elles sécantes ? Pourquoi ?

4) Soit Q le point commun à (EF) et (BC). Expliquer pourquoi Q est un point commun aux deux plans (P) et (EFG)

5) Déterminer de même, en justifiant son existence, le point R intersection de(EG) et (BD)

6) Déduire des questions précédentes, en citant les théorèmes utilisés, l'intersection des plans (P) et (EFG)

7) Soit S l'intersection de (FG) et (CD) si elle existe. Existe-t-elle ? Justifier.

8) Démontrer que S est un point de la droite (QR). Citer le théorème de cours utilisé.

Dans un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AD], G le centre de gravité du triangle ABC.
a) Démontrer que la droite (IG) coupe le plan BCD en un point E.
b) Quelle est la nature du quadrilatère BECD ?

ABCD est un tétraèdre régulier (ses faces sont 4 triangles équilatéraux) d'arête a. Déterminer les longueurs des hauteurs de ce tétraèdre.

Confrontation olympique

Une course internationale de ski de fond a lieu à Bellin au Québec (longitude 70°W ; latitude 60°N). Une délégation de skieurs russes s'y rend depuis St-Pétersbourg (longit. 30°E ; latit. 60°N).

Leur avion a-t-il intéret à passer par le pôle ou par le 60° parallèle ?

Encore le cube !

Le cube ABCDEFGH est reconstitué. (voir SITUER)

On le coupe par le plan (IJK). Le morceau qui contient A tombe.
Ce qui reste est coupé par le plan (ACF) et le morceau qui contient B tombe.

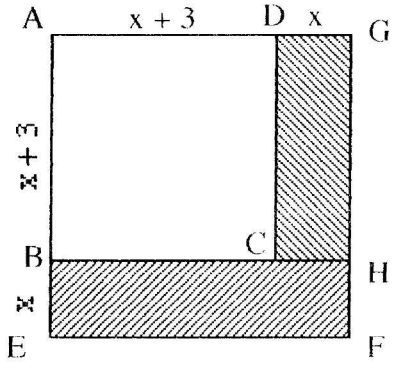
Il s'agit de dessiner en plan et non en perspective le morceau restant après ces deux coups de scie en :

a) vue de face
b) vue de profil gauche
c) vue de dessus

Evaluation (révision)

Objectif

- Récapituler les techniques de base



1) ABCD et AEFG sont des carrés.
Leur dimension est indiquée sur la figure ($x > 0$).

En observant la figure, expliquer pourquoi on a :
$(2x + 3)^2 - (x + 3)^2 = x(x + 3) + x(2x + 3)$

Démontrer cette égalité par un calcul algébrique

Résoudre l'équation :

$(2x + 3)^2 - (x + 3)^2 = (x + 2)^2$

2) Résoudre :

a) $|x + 2| \leq 5$ b) $|2x - 5| = -1$ c) $|x + 3| = |x - 5|$

d) $x^2 - 4x + 1 = 0$ e) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$

3) Représenter graphiquement : $f : x \mapsto \sqrt{x - 3} - 4$ $g : x \mapsto \dfrac{4x + 9}{x + 2}$

4) On donne en repère orthonormal A(1 , 2) et B(-2 , 5) . Donner une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (AB)

5) Le cercle (C) de centre O est tangent en T à la droite (D) . Le point A n'est ni sur (C) ni sur (D). Construire le parallélogramme IJKL de centre A tel que I et J soient sur (C) et K et L soient sur (D).

Chapitre 6 : Classer

Séquence 61 - STATISTIQUES

SITUER

Objectif :

| *Définir le vocabulaire statistique du programme*

Voici les résultats de 2°X au 2° trimestre en Maths et Histoire-Géographie.
On se propose d'étudier ces 2 séries statistiques séparément puis de comparer les résultats dans les deux disciplines

N°	HG	Math	N°	HG	Math	N°	HG	Math
1	15	16	12	8	12	23	12	14
2	14	11	13	9	10	24	13	10
3	8	8	14	11	15	25	8	10
4	11	12	15	10	14	26	15	13
5	12	13	16	9	9	27	10	11
6	8	9	17	6	6	28	11	8
7	16	19	18	9	10	29	11	13
8	13	12	19	12	12	30	9	18
9	11	10	20	9	11	31	10	11
10	11	13	21	9	11	32	12	12
11	8	10	22	9	11			

1. - A l'aide du document joint (RETENIR), donner du sens par une explication ou des calculs aux termes suivants en ce qui concerne la note d'Histoire-Géo :

population
caractère
valeurs du caractère
effectifs des valeurs du caractère
effectif total
fréquences des valeurs du caractère
mode
médiane
moyenne $\bar{x}$
amplitude
quartiles
variance et écart-type σ
Faire une représentation graphique adaptée

2. - Faire de même en ce qui concerne les résultats de Maths

3. - Peut-on dire que les résultats sont "meilleurs" dans l'une des deux matières ?

RETENIR

Vocabulaire de base

Une **population** étant donnée (élèves d'une classe) on peut étudier divers **caractères** (note de ...). Le caractère étudié peut prendre diverses **valeurs**.

Chaque **valeur du caractère** est obtenue par un certain nombre **d'individus**. Ce nombre s'appelle **l'effectif de la valeur du caractère.** Le nombre d'individus de la population est **l'effectif total.**

Si les valeurs du caractère sont nombreuses, on aura intérêt à regrouper ces valeurs en **classes** et on obtiendra l'effectif de chaque classe.

Une valeur du caractère est notée x_i, l'effectif de cette valeur est n_i et l'effectif total est N

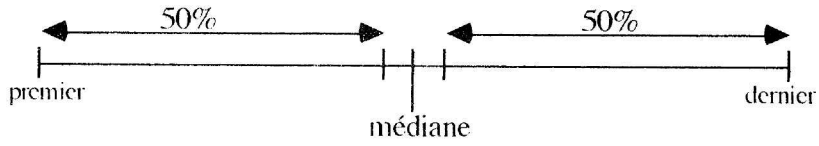
La **fréquence** d'une valeur du caractère est $f_i = {}^{ni}/_{N}$

La **fréquence cumulée croissante** d'une valeur est $fc_i = f_1+f_2+f_3+...+f_i$

Caractéristiques de position

Le **mode** ou **dominante** est la valeur du caractère ayant le plus fort effectif. En cas d'égalité il y aura plusieures modes

Une **médiane** est une valeur du caractère qui partage la série RANGEE totale en 2 séries de même effectif :



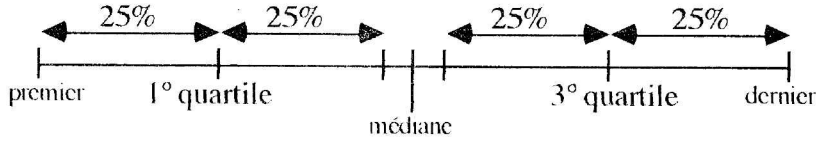
La **moyenne** est :

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{N}$$

Caractéristiques de dispersion

L'**amplitude** est la différence entre la plus forte et la plus faible valeur du caractère

Les **quartiles** sont des valeurs du caractère partageant la série en 4 séries de même effectif :



La **variance** est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$$v = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{n_1 (x_1 - \overline{x})^2 + n_2 (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + n_k (x_k - \overline{x})^2}{N}$$

ou sous une forme équivalente :

$$v = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \cdots + n_k x_k^2}{N} - \overline{x}^2$$

Remarquons que $v \geq 0$

L'**écart-type** est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{v}$$

L'écart-type est une mesure de la dispersion (homogénéité ou hétérogénéité) d'une série

EVALUER

Objectifs :

Classer les données, dresser un graphique d'effectifs ou fréquences
Calculer les caractéristiques de position et de dispersion d'une série

Dans un journal on étudie le nombre de lignes que comportent les petites annonces. On obtient :

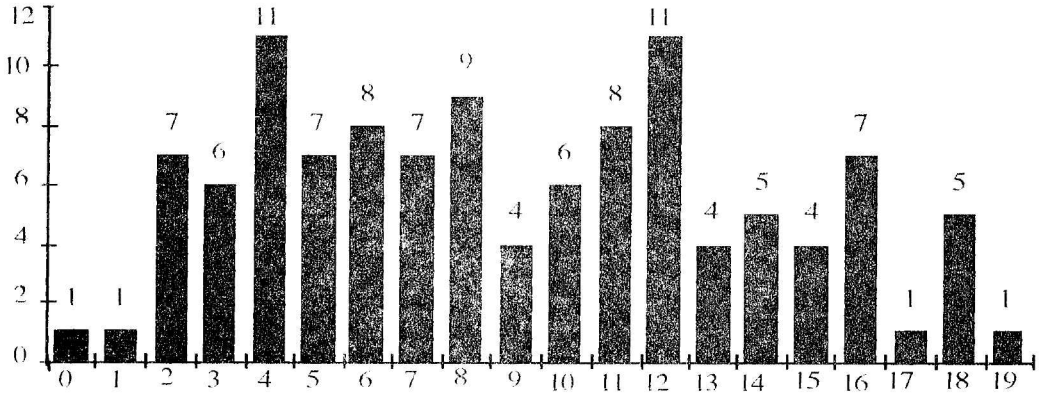
nombre de lignes :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
nombre d'annonces :	**3**	**8**	**21**	**39**	**22**	**7**

Calculer une médiane, la moyenne, l'écart-type.
Quel est le pourcentage de la population dont l'écart à la moyenne est inférieur à l'écart-type ?

Activités complémentaires

Regrouper n'est pas neutre

Voici le graphique donnant les résultats trimestriels d'un niveau :



1) regroupement du professeur : E = [0 , 4[, D = [4 , 8[, C = [8 , 12[, B = [12 , 16[, A = [16 , 20[
Histogramme, moyenne et écart-type dans ce cas-là ?
2) regroupement d'un parent délégué : faible: [0 , 5[, médiocre: [5 , 10[, correct: [10 , 15[, bien: [15 , 20[.Même travail que ci-dessus
4) Comparer les résultats selon les regroupements utilisés. Que peut-on en conclure ?

Confrontation chiffrée

Voici les résultats de la classe de TX au Bac en 1992 et en 1993.

	1992		1993	
	candidats	reçus	candidats	reçus
non-redoubl	22	12	15	8
redoubl	3	3	10	9
total	25	15	25	17

Peut-on dire que les résultats de 1993 sont meilleurs ou moins bons que ceux de 1992 ?

Les avis sont partagés ? Qui a raison ? Ce qui est important dans les statistiques ce n'est pas les "chiffres" mais leur interprétation !

Chapitre 7 : Agrandir, réduire

Séquence 71 - HOMOTHETIE

SITUER

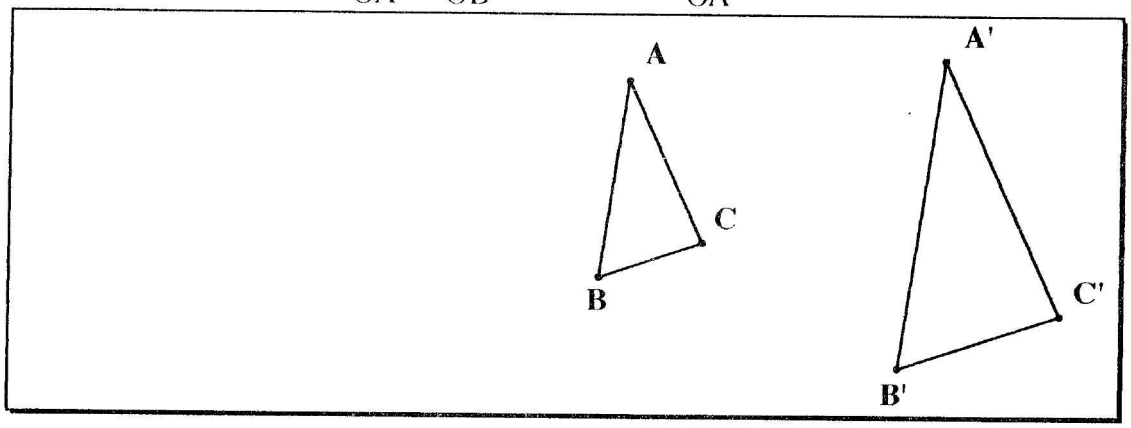
Objectif :

Découvrir les propriétés de base de l'homothétie (concours, alignement, parallélisme, conservations) Il s'agit essentiellement de mettre en évidence la notion de centre et de rapport dont la connaissance suffit à déterminer l'image d'une figure.

Problème 1

Les triangles ABC et A'B'C' ont leurs côtés parallèles deux à deux.

AA' coupe BB' en O. Pourquoi $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$? On posera $\frac{OA'}{OA} = k$



2) On joint O et C. Pensez-vous que le point C' est sur la droite (OC) ? Comment le prouver ? *(stratégie à élaborer collectivement)*

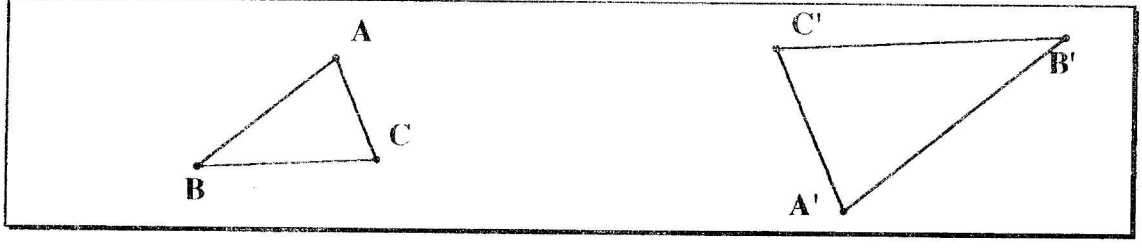
3) Quel est le rapport $\frac{OC'}{OC}$?

4) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$

puis les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

Problème 2

Mêmes consignes avec les triangles ci-dessous :



Problème 3

Soit un triangle ABC et un segment [A'B'] tel que (A'B') // (AB) et A'B' ≠ AB .

Construire C' de façon que les triangles ABC et A'B'C' aient leurs côtés parallèles et proportionnels.

RETENIR

Multiplication d'un vecteur par un réel (rappel et compléments)

Le **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel** a est le vecteur $\vec{v}$ noté $a\vec{u}$ et tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, le même sens si a est positif et le sens contraire si a est négatif.

De plus la **norme** (longueur) de $\vec{v}$ est égale à $|a|$ fois la norme de $\vec{u}$

$$\|\vec{v}\| = |a| \cdot \|\vec{u}\|$$

Si $a\vec{u} = \vec{0}$ alors $a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Deux vecteurs sont **colinéaires** s'il existe un réel k qui, multiplié par l'un donne l'autre.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Définition de l'homothétie

L'homothétie de centre A et de rapport k ($k \neq 0$) est la transformation du plan qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = k\ \overrightarrow{AM}$$

Propriétés de l'homothétie :

1) Si $k \neq 1$ alors A est le seul point invariant

2) Si $h(M) = M'$ et $h(P) = P'$ alors $\overrightarrow{M'P'} = k\ \overrightarrow{MP}$

3) L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle et l'image d'un cercle est un cercle dont le rayon est multiplié par $|k|$

4) L'homothétie conserve : l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et orientés, les milieux. Elle multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.

EVALUER

Objectifs :

Trouver l'image d'un point, d'une droite, d'un cercle par une homothétie

Observer la présence d'une homothétie afin de démontrer une propriété par conservation

1) La droite (D) a pour équation $y = 2x - 3$. Donner l'équation de son image par l'homothétie de centre O (0 , 0) et de rapport -2. Quelle est son antécédent par la même homothétie ?

2) On donne 3 droites (D_1), (D_2), (D_3) concourantes en O et 2 points A et D sur (D_1). On place B sur (D_2) et C sur (D_3) tels que ABC ne soient pas alignés. Par D on trace la parallèle à (AB) qui coupe (D_2) en E et la parallèle à (AC) qui coupe (D_3) en F. On appelle G le centre de gravité du triangle ABC et H le centre de gravité du triangle DEF. En envisageant l'homothétie h de centre O qui transforme A en D, démontrer que O, G et H sont alignés

3) Le point M (x , y) est transformé en M'(x',y') par l'homothétie de centre A(2 ,-3) et de rapport -2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. Préciser l'image de la droite (D) d'équation $2x - 3y + 6 = 0$ et de la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

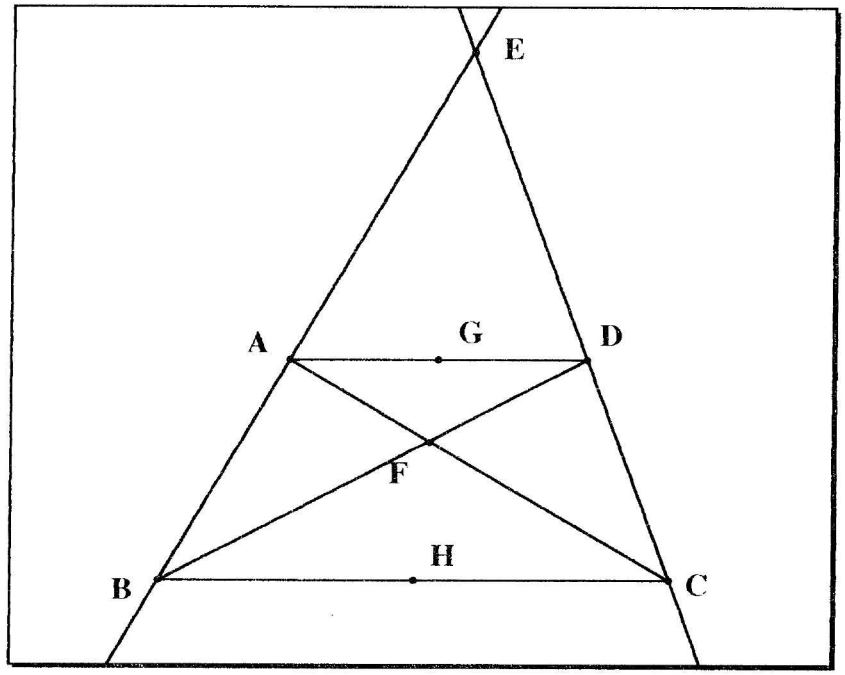
Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n°7 (soutien)

Problème

ABCD est un trapèze de bases [AD] et [BC] tel que (AB) et (CD) se coupent en E, (AC) et (BD) en F.

Soit G et H les milieux respectifs de [AD] et [BC]. On se propose de montrer que E, F, G, H sont alignés.



1) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EB}$? Quelle relation lie ces deux vecteurs ?

Ces vecteurs sont *donc, il existe* *tel que* $\overrightarrow{EB} =$

2) Peut-on en déduire qu'il existe une homothétie qui transforme A en B ? Quel est son centre ? Quel est son rapport ?

La relation $\overrightarrow{EB} =$ *signifie que B est l'image de A par*

3) Par cette même homothétie (notée h), quelle est l'image de D ? Pourquoi ?

La figure EABDC est une configuration ...
donc l'image de D est

4) Quelle est l'image de la droite (AD) ? Quelle est l'image du segment [AD] ?

L'image de (AD) est
L'image de [AD] est

5) Quelle est l'image de G par l'homothétie h ? Citer le résultat du cours qui justifie cette réponse ?

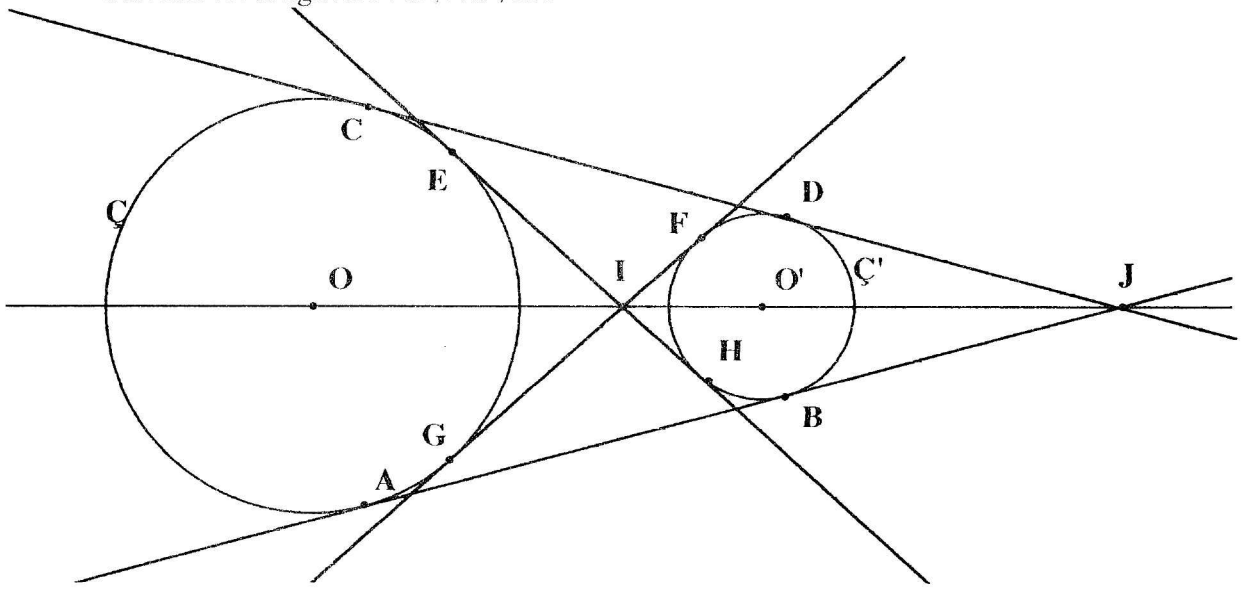
6) Expliquer pourquoi le résultat de la question précédente permet de conclure à l'alignement des points E, G, H.

7) En s'inspirant des questions précédentes et en utilisant une autre homothétie h', démontrer que F, G et H sont alignés

Entre deux cercles

Le cercle (G) a pour rayon 3,5 cm et (G') pour rayon 1,5 cm. On sait que OO' égale 7 cm. Les diverses droites tracées sont les tangentes communes aux deux cercles.

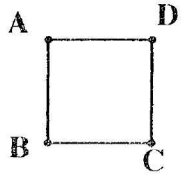
Calculer les longueurs : IJ , AB , EH

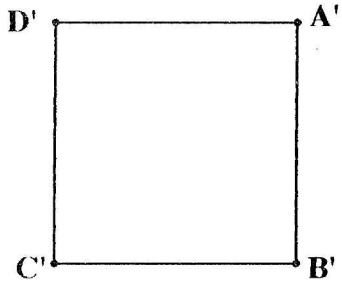


Confrontation

A) La courbe C_f d'équation $y = 2x^2$ est-elle l'image par une certaine homothétie de la courbe C_c d'équation $y = x^2$? Donner les preuves nécessaires.

B) Soit la figure ci-contre où ABCD et A'B'C'D' sont des carrés ayant leurs côtés parallèles et proportionnels.
Existe-t-il une homothétie qui transforme A en A', B en B', C en C' et D en D'?





Evaluation (à propos des transformations)

Objectifs :

Trouver l'image d'une figure par une transformation
Repérer une transformation afin d'en déduire une propriété
Développer des capacités stratégiques et d'expression

Deux points P et Q sont transformés en P_1 et Q_1 par l'homothétie h de centre A donné et de rapport 2, puis P_1 et Q_1 sont transformés en P' et Q' par la translation de vecteur $\vec{v}$ donné. Faire une figure.

Démontrer que P et Q se transforment en P' et Q' par une homothétie dont on précisera le rapport et le centre B.

Chapitre 8 : Tourner

Séquence 81 - ANGLES ORIENTES

SITUER

Objectifs :

Faire apparaître la proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle au centre. Expérimenter la notion d'angle et d'arc orientés. Définir les mesures d'angles à l'aide des longueurs d'arcs sur le cercle de rayon unité.

Sur une piste circulaire de centre O et de rayon 1 km, deux cyclistes X et Y tournent dans le même sens : X à la vitesse de 41,89 km/h* et Y à la vitesse de 31,42 km/h*. Ils partent ensemble du même point A de la piste.

Pendant que Y a parcouru exactement 1 tour, quelle distance a parcouru X ? La question : "Quelle distance sépare X de Y ?" a-t-elle une seule signification ? Quelles réponses peut-on donner à cette question ? Quel est l'angle XOY ? Quelles remarques peut-on faire sur la précision de cette question ?

Mêmes questions lorsque Y a fait 2 tours.... 3 tours.....

X et Y ont roulé pendant 20 minutes. Quelles distances ont-ils parcourues ? Quelles sont leurs positions ? Quel est l'angle XOY ? Quelle distance les sépare ?

X et Y tournent maintenant en sens contraire . Combien y a-t-il de points où ils peuvent se croiser ? Quelles sont les positions de ces points ?

**Remarque* : $\pi \approx 3{,}142$ donc $31{,}42 \approx 10\pi$ et $41{,}49 \approx 40\pi/3$

RETENIR

Cercle trigonométrique

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle. Il y a donc 2 orientations possibles : positive (directe) ou négative (indirecte). On dit alors que le plan est orienté.
Dans un repère orthonormal d'origine O, le cercle de centre O et de rayon 1 orienté positivement est appelé cercle trigonométrique.

Arc et angle orientés

A et B étant sur le cercle trigonométrique, l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est l'ensemble des "*chemins*" sur le cercle pour aller de A à B. Un arc orienté est représenté par une infinité de "chemins" dans le sens positif et dans le sens négatif.

Sur le cercle trigonométrique de centre O, l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ détermine l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ qui est l'ensemble des manières d'amener [OA) sur [OB).

Mesures d'arcs et angles orientés

Le périmètre (longueur) du cercle trigonométrique est 2π. Donc l'arc $\overset{\frown}{AA}$ mesure $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Si un arc $\overset{\frown}{AB}$ mesure α unités, il mesure aussi (par un autre chemin) $\alpha + 2k\pi$ unités avec $k \in \mathbb{Z}$
La longueur de l'arc de cercle trigonométrique est égale par définition à la **mesure en radians** de l'angle associé. Donc : $\overset{\frown}{AB} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi$

La mesure principale

de cet angle est celle de ses mesures qui appartient à l'intervalle $]-\pi, +\pi]$.

EVALUER

Objectifs :

Lire sur le cercle trigonométrique les mesures d'angles remarquables.

Déterminer la mesure principale d'un angle

1) Déterminer la mesure principale de $\frac{-1789\pi}{6}$, $\frac{151\pi}{8}$

2) Convertir 1 radian en degrés et 1 degré en radians

3) $\frac{27\pi}{6}$ et $\frac{-21\pi}{6}$ mesurent-ils le même angle ? Y a-t-il un calcul rapide pour le savoir ?

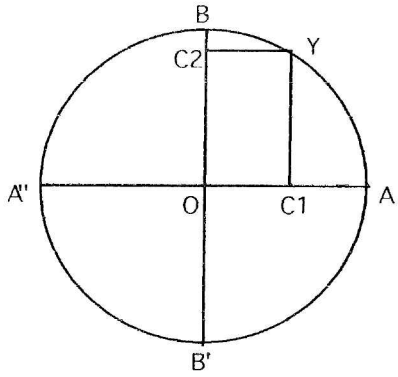
Séquence 82 - TRIGONOMETRIE

SITUER

Objectif **:**

Découvrir les fonctions sinus et cosinus.et leurs courbes représentatives que l'on considérera comme deux nouvelles courbes de référence.

Sur la piste circulaire de rayon 1 km, le cycliste Y tourne seul à la vitesse de 31,42 km/h



Les deux caméras C_1 et C_2 se déplacent sur les rails AA' et BB' et visent le cycliste en permanence dans la position qui est la plus proche de lui.

Au départ Y est en A. Calculer la distance au point O de C_1 et celle de C_2 toutes les 30 secondes et dessiner les courbes du mouvement des 2 caméras (distance parcourue par Y en abscisses et mesure algébrique de $\overline{OC_1}$ ou de $\overline{OC_2}$ en ordonnées)

RETENIR

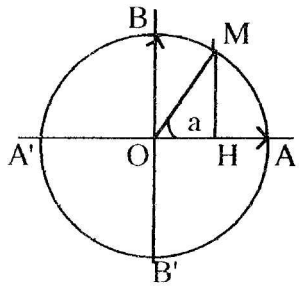
Définitions de cosinus et sinus

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Le point M est sur le cercle trigonométrique.

Soit l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM}) = a + 2k\pi$

Le point M ayant pour coordonnées (x , y) , on pose par définition :

x = cos a
y = sin a



Relations trigonométriques

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ *(en utilisant le théorème de Pythagore)*

On pose : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

En utilisant diverses réflexions et symétries, on démontre :

$\cos(a+2\pi) = \cos a$ $\quad \cos(-a) = \cos a$ $\quad \cos(\pi - a) = -\cos a$ $\quad \cos(\pi + a) = -\cos a$

$\sin(a+2\pi) = \sin a$ $\quad \sin(-a) = -\sin a$ $\quad \sin(\pi - a) = \sin a$ $\quad \sin(\pi + a) = -\sin a$

$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$

En utilisant le théorème de Pythagore, on démontre :

$\sin 0 = 0$; $\sin \pi/6 = 1/2$; $\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$

$\cos 0 = 1$; $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$; $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$

EVALUER

Objectifs :

Lire sur le cercle les sinus et cosinus d'angles remarquables,
Résoudre les équations sinx = a et cos x = b
Connaitre les fonctions de référence sinus et cosinus

1) Déterminer : $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\sin(-\frac{5\pi}{6})$, $\tan\frac{4\pi}{3}$

2) Résoudre les équations : $4\sin x = 7$; $2\sin x = 1$; $\cos x = -0{,}5$; $\sin x = \cos x$; $\sin x = \sin(-x)$

3) Trouver a pour que $\cos a = \frac{1}{2}$ avec $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

4) Résoudre : $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin x$

5) Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$

Séquence 83 - ROTATIONS

SITUER

Objectif :

Découvrir les propriétés de base de la rotation. Voir les objectifs exprimés pour les autres transformations

1) Un triangle rectangle isocèle AMP de sens direct a un sommet, A, fixe et un autre, M, qui se déplace sur un cercle (C). Sur quelle figure se déplace le troisième sommet P ?

2) Même question si le triangle est équilatéral de sens indirect.

RETENIR

Définition de la rotation

On appelle rotation de centre A et d'angle α la transformation du plan qui, à tout point M associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} AM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Propriétés :

1) Le centre A est le seul point invariant.

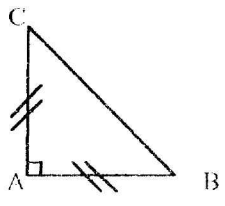
2) Si r(M) = M' et r(P) = P' alors :

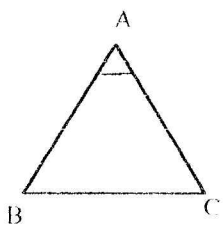
$$\begin{cases} M'P' = MP \\ (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{M'P'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

3) Une rotation transforme une droite en droite et un cercle en cercle de même rayon.

4) La rotation conserve : les longueurs et les aires
le parallélisme et l'orthogonalité
les milieux
les angles orientés ou non
les rapports de proportionnalité

Des rotations utiles :





Le **triangle rectangle isocèle** caractérise les rotations de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct) ou $-\frac{\pi}{2}$ (quart de tour indirect).

Le **triangle équilatéral** caractérise les rotations de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$

Remarque

La réflexion d'axe (D) conserve les angles géométriques mais ne conserve pas les angles orientés. Elle les transforme en leurs opposés.

EVALUER

Objectifs :

Observer la présence d'une rotation afin de démontrer une propriété par conservation

1) On donne les deux droites D_1 et D_2 non perpendiculaires entre elles et A un point n'appartenant ni à D_1 ni à D_2. Construire les deux carrés ABCD tels que B soit sur D_1 et D sur D_2

2) A et O sont deux points distants de 4 cm. Soit (C) le cercle le cercle de centre O et de rayon 2 cm.
a) Soit M un point variable de (C). Construire le point M' tel que le triangle AMM' soit direct, rectangle et isocèle en A.
b) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit (C) ?

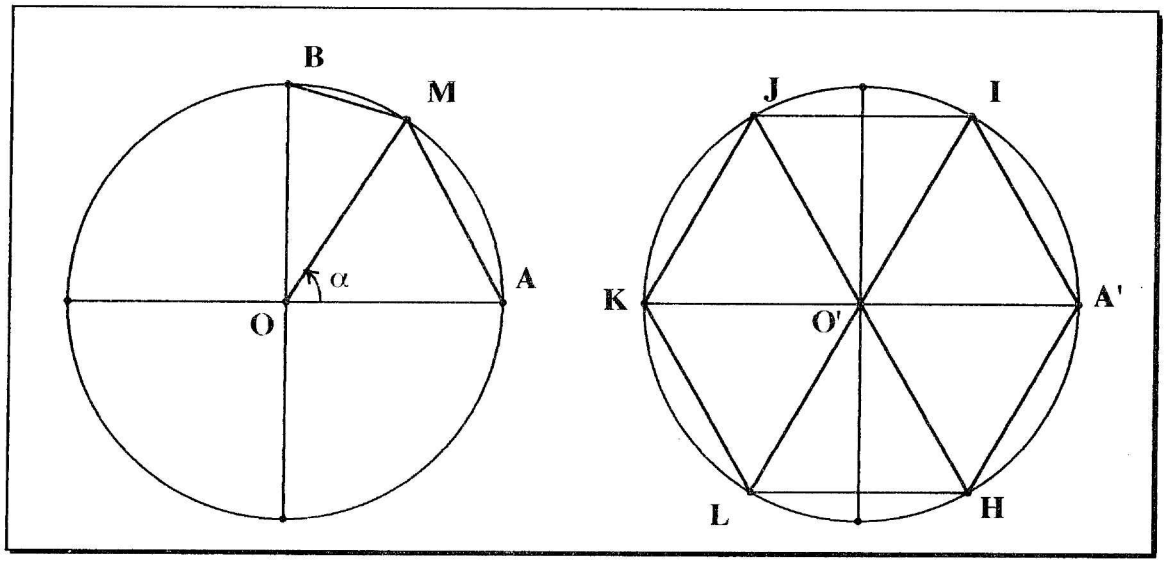
3) Soit ABCD un carré direct de centre O et soit ***r*** le quart de tour direct de centre O. Soit P un point du segment [AB] et Q le point du segment [BC] tel que BQ = AP.
a) Quelle est l'image de [AB] par ***r*** ?
b) Quelle est l'image de P par ***r*** ? Que dire du triangle OPQ ?

Activités complémentaires

Fiche de travail personnel n°8

Problème

Les deux cercles ont pour rayon 1 (une unité de longueur). La figure A'IJKLH est un hexagone régulier. Le point M se déplace sur l'arc de cercle AB (premier quadrant). On veut déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ de façon que certaines aires soient égales.



1ère partie (soutien)

Le point M parcourt le demi-cercle supérieur. Soit α la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ Donc α varie sur l'intervalle $]0, \pi]$.

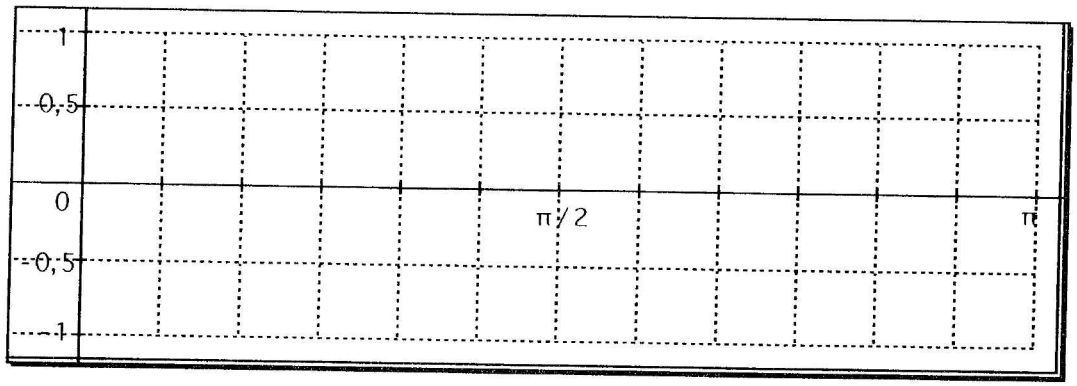
1) Déterminer en fonction de α l'aire du triangle OAM

2) Déterminer de même l'aire du triangle OBM

3) Quel est le sens de variation de la fonction qui à α associe l'aire du triangle OAM ? Pourquoi ?

3) Quel est le sens de variation de la fonction qui à α associe l'aire du triangle OMB ? Pourquoi ?

4) Représenter graphiquement ces deux fonctions lorsque α varie sur $[0 , \pi]$



5) Pour quelles valeurs de α les aires des triangles OAM et OMB sont-elles égales ?

6) Pour quelles valeurs de α le rapport des aires des triangles OAM et OMB est-il égal à $\sqrt{3}$?

2ème partie (approfondissement)

Le point M se déplace maintenant sur l'arc AB (premier quadrant).

1) On cherche les valeurs qu'il faut donner à α pour que l'aire du quadrilatère OAMB soit égale à l'aire du secteur de cercle O'A'I ? On se contentera de rechercher des valeurs approchées.

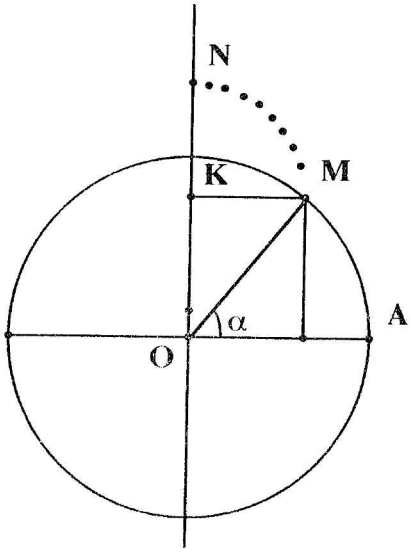
L'aire de OAMB s'écrit :

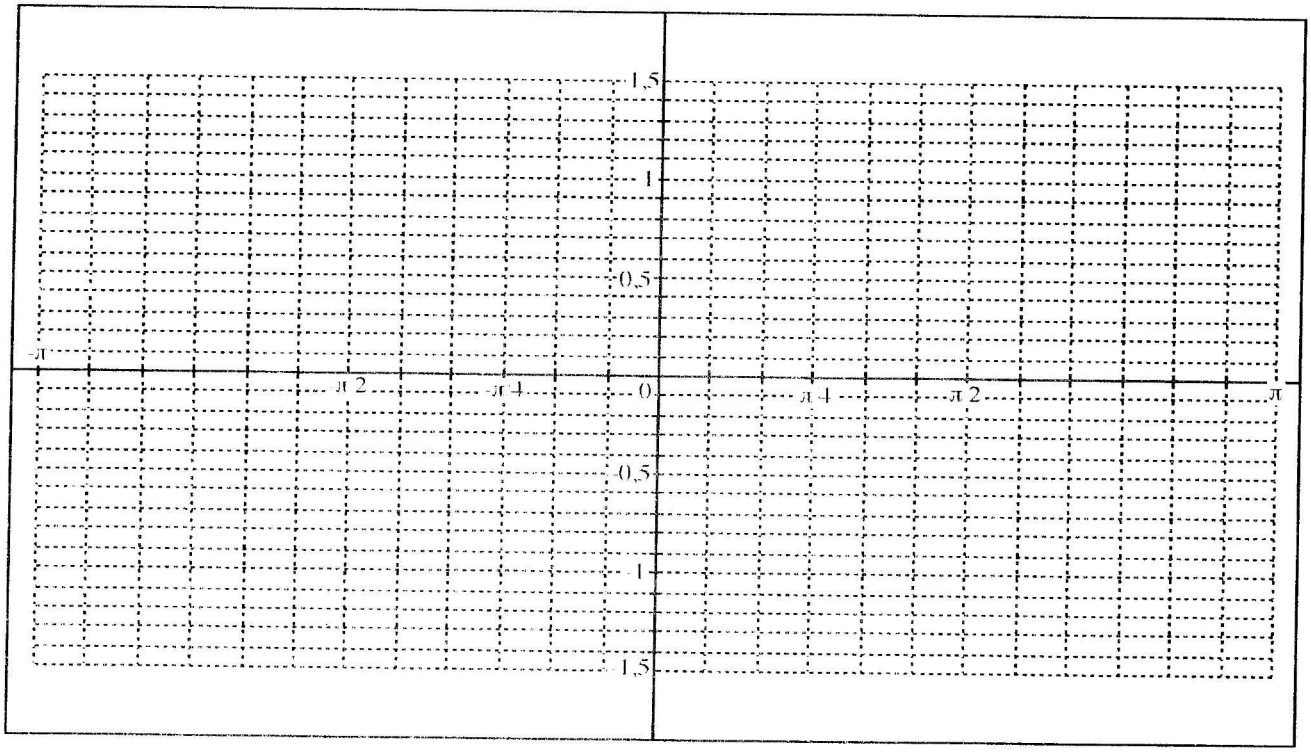
et grâce à la calculatrice

2) Est-il possible que cette aire soit égale celle du triangle O'A'I ?

3) Est-il possible que cette aire soit égale celle du parallélogramme O'A'I J ?

4) Sur la figure ci-contre, on construit le point N image de M par le quart de tour direct de centre K. Calculer en fonction de α l'ordonnée de N. Représenter les variations de cette ordonnée lorsque α varie sur $]-\pi : +\pi]$

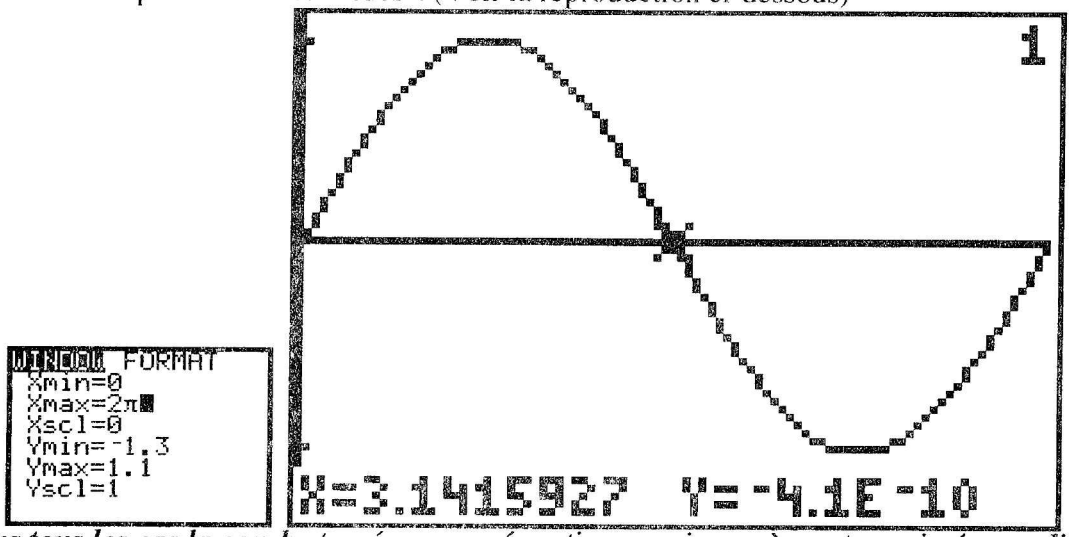




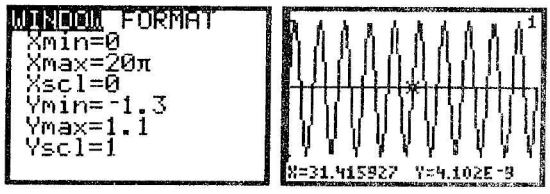
La fonction sinus et la calculatrice

Le caractère irrémédiablement discret de l'affichage sur un écran peut, dans certains cas, conduire à des aberrations qu'il est important de constater pour ne pas s'habituer à faire aveuglément confiance au matériel, quel qu'il soit.

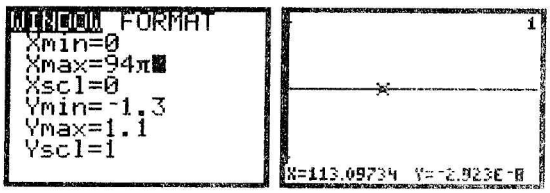
La calculatrice utilisée ici (TI 82) détermine 95 valeurs de x (donc 94 intervalles) également réparties sur l'intervalle $[x_{min} ; x_{max}]$ et calcule les valeurs de f(x) pour ces 95 valeurs de x sélectionnées. Elle allume ensuite les "pixels" situés aussi près que possible des points dont les coordonnées (x , f(x)) ont été calculées. Deux points "consécutifs" ainsi obtenus sont joints par un segment de droite pour éviter les "vides". (Voir la reproduction ci-dessous)



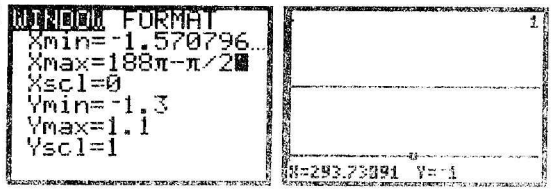
Dans tous les cas la courbe tracée a pour équation y = sin x où x est exprimé en radians



Comment expliquez-vous que le graphe ci-contre soit constitué de segments "verticaux" ?
Comment expliquez-vous que les extrema n'aient pas tous la même ordonnée ?
Pourquoi l'ordonnée du point marqué n'est-elle pas nulle ?

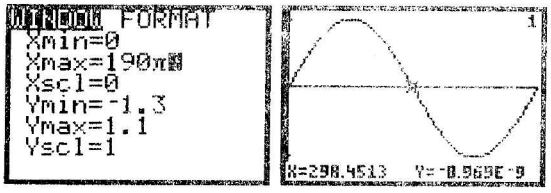


Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la machine a calculé f(x) ?
Quelles sont les valeurs correspondantes de f(x) ?
Comment est donc la courbe tracée par la machine ?
Comment justifier les coordonnées du point affiché ?



Après avoir examiné les valeurs de x_{min} et x_{max}, justifier l'affichage donné par la calculatrice.

Combien de périodes, la courbe devrait-elle faire apparaître ?



Combien de périodes, la courbe devrait-elle faire apparaître ?

Pourquoi cette courbe semble-t-elle ne dessiner qu'une période ?

Confrontation

L'équation $\sin 3x = 1$ admet bien évidemment $\frac{\pi}{6}$ comme solution. Ce n'est pas la seule. Par exemple, $\frac{5\pi}{6}$ est une autre solution.

Déterminer toutes les solutions de cette équation.

Evaluation (Problèmes divers)

Objectifs :

Résoudre des problèmes dans les champs : des configurations, des transformations, vectoriel, analytique

Résoudre des problèmes concernant les fonctions

1) Soit un rectangle dont le périmètre est 200 mm et dont un des côtés mesure **x** mm. Quelles doivent être les dimensions de ce rectangle pour que son aire soit maximum. (On veillera à ne pas utiliser des méthodes approchées.)

2) Par les sommets B et D d'un parallélogramme ABCD de centre O, on trace deux droites parallèles distinctes Δ et Δ' coupant respectivement la droite (AC) en M et N.

a) Montrer que O est le milieu de [MN].

b) Montrer que les droites (BN) et (DM) sont parallèles.

Transformations planes avec "Cabri-Géomètre"

Le logiciel "Cabri-Géomètre" permet de réaliser des figures de géométrie et surtout de les faire bouger. Ce qui facilitera la recherche des conjectures et peut-être (mais ce n'est pas sûr) la recherche des preuves.

Voici le problème posé :

Soit une droite D et deux points A et B n'appartenant pas à cette droite. Un point M se déplace sur la droite D.

1) Le point N est construit de façon que AMBN soit un parallélogramme. Sur quelle figure se déplace le point N ? Y a-t-il des positions de A et B qui rendent le problème impossible ?

2) Le point P est construit de façon que [AB] soit la médiatrice de [MP]. Sur quelle figure se déplace le point P ? Y a-t-il des positions de A et B qui rendent le problème impossible ?

3) Le point Q est construit de façon que ABMQ soit un parallélogramme. Sur quelle figure se déplace le point Q ? Y a-t-il des positions de A et B qui rendent le problème impossible ?

4) Le point R est construit de façon que AMR soit un triangle rectangle et isocèle en A. Sur quelle figure se déplace le point R ? Y a-t-il plusieurs solutions ? Y a-t-il des positions de A qui rendent le problème impossible ?

5) Le point S est construit de façon que BMR soit un triangle équilatéral. Sur quelle figure se déplace le point S ? Y a-t-il plusieurs solutions ? Y a-t-il des positions de B qui rendent le problème impossible ?

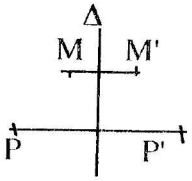
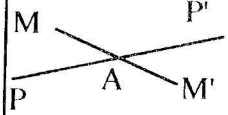
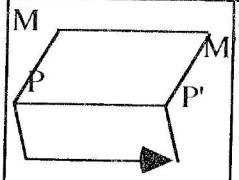
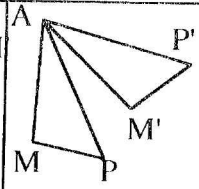
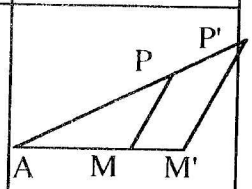
***Attention* ! Suivre exactement les indications orales lors du démarrage du logiciel.**

Vous trouverez dans le bandeau de l'écran :

Fichier	**Edition**	**Création**	**Construction**	**Divers**
-	-	Point de base	Lieu de pts	Supprimer
-	-	Droite de base	- - - - -	Redéfinir
Enregistrer	-	Cercle de base	Pt sur objet	-
-	Aspect	- - - - - - -	intersection	-
-	Nommer	Segment	- - - - - - - -	-
Quitter	-	Droite par 2 pts	Milieu	Macro construction
-	-	Triangle	Médiatrice	-
-	-	Cercle p. cent. et pt	droite //	-
			droite ⊥	
			Centre de cercle	
			- - - - - - - -	
			Symétrique d'un pt	
			Bissectrice	

Aides

Les transformations planes usuelles

	Réflexion	*Symétrie*	*Translation*	*Rotation*	*Homothétie*
Eléments géométriques	d'axe Δ	de centre A	de vecteur $\vec{v}$	de centre A et d'angl ß +2kπ	de centre A et de rapport k
Définition Transformation qui à tout M associe M' tel que :	**Δ est la médiatrice de [MM']** ou ***(MM')//Δ et*** $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'}$	$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ ou ***M est le milieu de [MM']***	$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ ou ***si*** $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ***alors MM'BA est un plg***	$AM' = AM$ $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = ß$ **modulo 2π**	$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$
Dessin					
Points invariants	Δ est invariante point par point La droite (MM') est globalement invariante	A est le seul point invariant	Aucun point invariant sauf si le vecteur est nul : la translation est l'identité (id)	A est le seul point invariant sauf si ß=0 (2π), alors r = id si ß=π , r = s_A	A est le seul point invariant sauf si k =1 où h = id Si k =-1 , h = s_A
propriétés caractéristiques	M'P' = MP et (M'P') coupe (MP) sur Δ sauf (MP) // Δ	$\overrightarrow{M'P'} = -\overrightarrow{MP}$	$\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{MP}$	M'P' = MP et $(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{M'P'}) = ß(2\pi)$	$\overrightarrow{M'P'} = k\overrightarrow{MP}$
autres propriétés	L'image d'une droite est une droite. * L'image d'un cercle est un cercle de même rayon et le centre de l'un est l'image du centre de l'autre				L'image d'un cercle de rayon r est un cercle de rayon r' = |k| r

conservations	*distances*	o	o	o	o	x
	angles géom.	o	o	o	o	o
	angl orientés	x	o	o	o	o
	milieux	o	o	o	o	o
o : *oui*	*parallélisme*	o	o	o	o	o
x : *non*	*orthogonalité*	o	o	o	o	o
	contact	o	o	o	o	o
	barycentres	o	o	o	o	o
	aire	o	o	o	o	x
Remarques	*L'image d'une droite n'est pas une droite parallèle en général		*La symétrie centrale est un cas particulier de rotation et un cas particulier d'homothétie		*q_1 est le quart de tour direct. de centre A et $M = q_1(M)$, alors $\overrightarrow{AM'} = \cos ß\,\overrightarrow{AM} + \sin ß\,\overrightarrow{AN}$	*Les points A, M, M' sont alignés. *A est le barycentre de (M, k) et (M', 1)
Configurations remarquables	*segment et médiatrice *triangle isocèle		*plg avec ses diagonales	*plg avec ses côtés	*tri. isocèle (angle const) *tr. équilatéral *carré ou tr, rect. isocèle	*figure de Thalès * triangle avec centre de gravité

TITRE
OBSERVER ET AGIR, MATHÉMATIQUES, SECONDE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE
AUTEUR
RENÉ BERNARD
DATE
OCTOBRE 1995
EDITEUR
IREM DE MONTPELLIER
MOTS CLÉS
CLASSE DE SECONDE - FONCTIONS - TRANSFORMATIONS PLANES - ACTIVITÉS - CONJECTURE - PREUVE - CALCULATRICES GRAPHIQUES.
RÉSUMÉ
Cet ouvrage s'adresse aux professeurs

- désireux de donner une unité à leur cours de Seconde
  - *l'organisation du programme est centrée sur les fonctions et les transformations planes usuelles ;*
  - *l'ensemble du cours est disposé en huit chapîtres construits autour d'une action : tracer, résoudre, retourner ou renverser, glisser, couper, classer, agrandir ou réduire, tourner ;*
  - *chaque chapître mobilise les domaines algébrique, analytique, géométrique.*
- souhaitant enseigner les mathématiques par l'activité des élèves
  - *de nombreuses activités guidées pour introduire une notion, pour la faire "fonctionner", pour aider les élèves en difficulté ;*
  - *des activités moins guidées pour donner l'envie de chercher ;*
  - *quelques fiches de synthèse et d'aide méthologique.*
- utiliser en classe les possibilités des calculatrices graphiques
  - *les activités sont, en général, construites en deux parties :*
    1) établir des conjectures à l'aide d'une recherche graphique ou d'une démarche inductive ;
    2) démontrer ces conjectures par une démarche déductive.
  - *des activités permettent d'apprendre à utiliser les calculatrices graphiques et d'en repérer les limites.*
NOMBRE DE PAGES
110 pages
ISBN : 2-909916-16-2