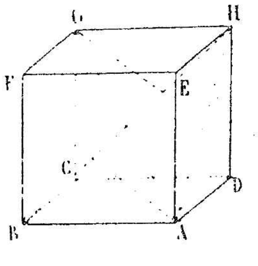
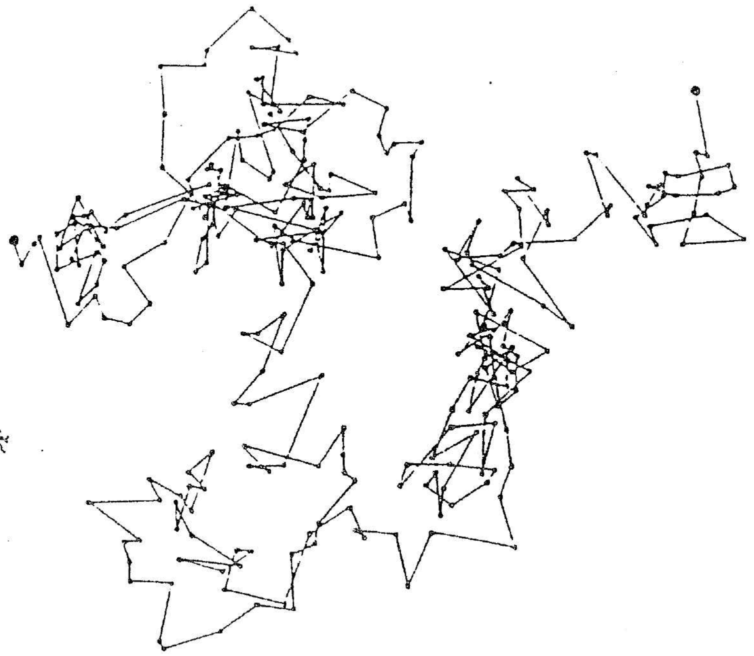
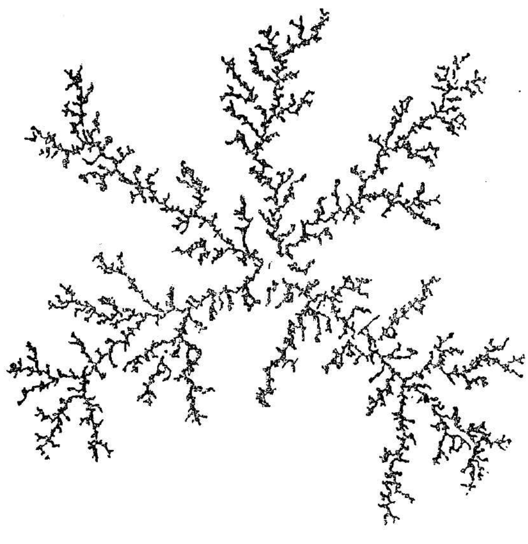
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Université Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
Tél. 67 14 33 83 ou 67 14 33 84
Télécopie 67 14 39 09

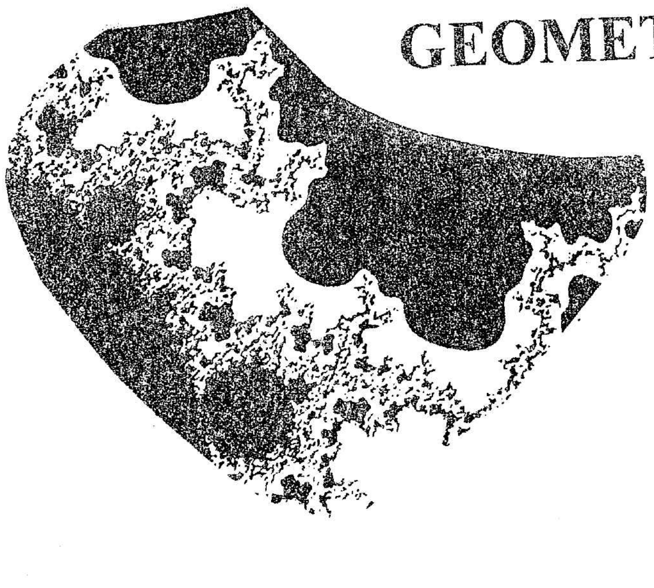


DIX GEOMETRIES





PETIT PARCOURS DE LA GEOMETRIE D' EUCLIDE A LA GEOMETRIE FRACTALE



PRESENTATION

Ce polycopié a servi de base à une initiation à l' histoire des maths lors d' un stage de l' IREM de Montpellier en 1994-1995 .

Je tiens à remercier les stagiaires et les lecteurs des avant-tirages qui m' ont permis de sortir cette première version .

Alain Bernard
Groupe Histoire des Mathématiques
IREM de Montpellier

LE PROBLEME DE L'ESPACE , DE L'ETHER ET DU CHAMP PHYSIQUE

La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique .
Puisque dans cette dernière , le concept d' espace a déjà une fonction fondamentale , établissons et étudions ce concept .
Deux façons d' appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes .
La première méthode s' appelle l' analytique logique .
Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d' emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité , nous la trouvons et la respectons dans la mathématique .
Mais cette sécurité s' obtient au prix d' un contenant sans contenu .

Albert Einstein .
Etudes scientifiques

Le problème est magnifiquement posé
à suivre ....

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE : 5 REFLEXIONS

SECONDE PARTIE : LES GEOMETRIES

CHAPITRE ZERO

GEOMETRIE ET ENSEIGNEMENT

" La géométrie est communément définie comme la science des figures de l'espace. Cette définition un peu incertaine...."
Ainsi commence l'article" géométrie " de l'Encyclopédie Universalis signé par François Russo.

Pour un enseignant en milieu ou en fin de carrière, cette définition est bien à la fois commune et incertaine. Formé durant ses études à la géométrie des figures laquelle finit par prendre le curieux nom de géométrie pure, il dut, à partir de la fin des années 70 enseigner la géométrie vectorielle dans laquelle le dessin devenait très accessoire. A partir de 1985, la géométrie des transformations prit le relais. Ainsi, en une génération, trois méthodes très différentes furent utilisées pour enseigner la géométrie.

Mais ce n'est pas tout.

La géométrie analytique continue de faire l'objet d'un chapitre. Par contre, l'analyse qui est une méthode de résolution de problèmes en géométrie a pris son indépendance.

Voyons du côté de la recherche.

En géométrie algébrique, les chercheurs viennent de démontrer le théorème de Fermat d'essence pourtant purement arithmétique. La géométrie fractale a fait une percée importante en une vingtaine d'années même si elle n'est pas encore enseignée dans le secondaire et guère dans le Supérieur.

Avec la géométrie fractale, la fin du 20^{e} siècle voit la naissance d'une "nouvelle" géométrie.

L'IDEE DU POLYCOPIE

Entre l'enseignement et la recherche, cette fin de 20^{e} siècle voit ainsi s'entremêler nombre de géométries fort diverses en apparence. Ce petit polycopié se propose de répertorier - de façon non exhaustive - une dizaine de géométries, d'essayer de comprendre les raisons de leurs apparitions ,les liens qu'elles peuvent avoir entre elles et surtout avec la première (?) d'entre elles : la géométrie d'Euclide, première science rédigée à partir de définitions de postulats et de théorèmes.

ATTENTION

Ce polycopié ne développe aucune des 10 géométries .

L'idée est simplement de comprendre comment ELLE - la géométrie d'Euclide - a pu donner naissance à autant de rejetons
L' idée est ensuite de montrer leur structure commune .
L' idée est enfin de regarder les différences dans la façon d' aborder la notion d' espace de ces géométries .

Le propos est d'inciter à réfléchir plus que de donner des réponses toutes faites. Répétons bien qu'il est hors-sujet de développer ces géométries, chose impossible en si peu de pages d' autant qu' il existe des dizaines d' ouvrages fort érudits sur la géométrie.

Par contre, à ma connaissance, il n'existe aucun livre cherchant à réunifier de façon simple ces géométries, cette géométrie, cette géométrie que je sais d'ELLE.

TAUTOLOGIE

Nous allons dérouler une dizaine de géométries (ou une seule ....) en suivant l'ordre chronologique de leurs apparitions (ou de son évolution avec ses ruptures).

Raison : Personne, jamais, n' a réinventé les mathématiques .
Avec ses arrêts et ses ruptures, le système a été développé à travers diverses civilisations - sumérienne, babylonnienne, égyptienne, indienne, grecque, européenne, arabe, chinoise - chacune étant indispensable à la construction de l'édifice commun.

La " logique propre " de ce développement m' apparaît primordiale dans la mesure où chaque géométrie est créée et se développe à partir des connaissances antérieures .

Il est fascinant de voir l'esprit créateur de chaque civilisation se développer puis s'éteindre avant qu'une autre civilisation ne vienne reprendre les connaissances acquises pour créer de " nouvelles " mathématiques (les mêmes bien sûr....)

Evident pensez-vous peut-être ?

Mézalor, que n' en tient-on plus compte dans les programmes et dans l'enseignement !

Sans vouloir reprendre la construction des mathématiques selon son ordre historique, le moins serait d'expliquer aussi bien aux élèves qu' aux enseignants les tenants et les aboutissants (provisoires) de cette construction .

C'est aussi un des buts de ces quelques pages .

PREMIERE PARTIE

Quelques réflexions de :

Pascal

Einstein

Piaget

Chasles

Dieudonné

AVANT PROPOS

Avant d'aborder "les" géométries, il me paraît utile de lire 2 textes importants:

1) " **Esprit de finesse et esprit de géométrie** " se trouve dans les pensées de Pascal (Pensées diverses N° 2)
Peut - être pas toujours facile à comprendre à notre époque, il cherche à distinguer entre esprits de finesse et esprit de géométrie ; un géomètre ne pouvant que rarement être un esprit fin.

2) " **La géométrie et l'expérience** " écrit vers 1920 par Einstein tente de définir les liens entre géométrie et réalité . Un objet géométrique peut-il être un objet réel?

3) Ensuite, nous vous proposons une brève réflexion épistémologique à travers le chapitre 4 du livre de Piaget et Garcia :**"Psychogénèse et histoire des sciences".** Les auteurs montrent comment les jeunes construisent leur géométrie personnelle, se repèrent et se structurent à travers la géométrie d'Euclide (les constructions), la géométrie analytique (les repères) et la géométrie des transformations (les structures)

4) " **L'aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie** " de Michel Chasles (paru en 1837) propose une construction du savoir géométrique en 5 époques qui nous mènent jusqu'à la géométrie descriptive de Monge .

5) Nous terminerons ces réflexions d' éminents personnages par des extraits de l' introduction du livre " **Algèbre linéaire et géométrie élémentaire** " écrit en 1964 par Jean Dieudonné à l'attention des enseignants du secondaire " les plus conscients de la nécessité d'une réforme " tout en précisant quelques lignes plus loin : " je m'excuse d'avance auprès de mes collègues de l'enseignement supérieur aux mains de qui tomberaient ce livre, et qui m'accuseraient avec raison d'enfoncer pompeusement des portes ouvertes ".

ESPRIT DE FINESSE
ESPRIT DE GEOMETRIE

1. * On peut avoir le sens droit, & n'aller pas également à toutes choses; car il y en a qui l'ayant droit dans un certain ordre de choses, s'éblouissent dans les autres. Les uns tirent bien les consequences de peu de principes. Les autres tirent bien les consequences des choses où il y a beaucoup de principes. Par exemple, les uns comprennent bien les effets de l'eau, en quoi il y a peu de principes, mais dont les consequences sont si fines, qu'il n'y a qu'une grande penetration qui puisse y aller; & ceux-là ne seroient peut-être pas grans Geometres; parceque la geometrie comprend un grand nombre de principes; & qu'une nature d'esprit peut être telle, qu'elle puisse bien penetrer peu de principes jusqu'au fond, & qu'elle ne puisse penetrer les choses où il y a beaucoup de principes.

Il y a donc deux sortes d'esprits, l'un de penetrer vivement & profondement les consequences des principes; & c'est-là l'esprit de justesse: l'autre de comprendre un grand nombre de principes sans les confondre; & c'est-là l'esprit de geometrie. L'un est force & droiture d'esprit, l'autre est étendue d'esprit. Or l'un peut être sans l'autre, l'esprit pouvant être fort & étroit, & pouvant être aussi étendu & foible.

Il y a beaucoup de difference entre l'esprit de geometrie & l'esprit de finesse. En l'un les principes sont palpables, mais éloignés de l'usage commun, de-sorte qu'on a peine à tourner la tête de ce côté-là, manque d'habitude: mais pour peu qu'on s'y tourne, on voit les principes à plein;

N

& il faudroit avoir tout-à-fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros, qu'il est presque impossible qu'ils échapent.

Mais dans l'esprit de finesse les principes sont dans l'usage commun, & devant les yeux de tout le monde. On n'a que faire de tourner la tête, ni de se faire violence. Il n'est question que d'avoir bonne vûe: mais il faut l'avoir bonne; car les principes en sont si déliés & en si grand nombre, qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un principe mene à l'erreur; ainsi il faut avoir la vûe bien nette, pour voir tous les principes; & ensuite l'esprit juste, pour ne pas raisonner faussement sur des principes connus.

Tous les Geometres seroient donc fins, s'ils avoient la vûe bonne; car ils ne raisonnent pas faux sur des principes qu'ils connoissent; & les esprits fins seroient Geometres, s'ils pouvoient plier leur vûe vers les principes inaccoutumés de geometrie.

Ce qui fait donc que certains esprits fins ne sont pas Geometres, c'est qu'ils ne peuvent du-tout se tourner vers les principes de geometrie: mais ce qui fait que des Geometres ne sont pas fins, c'est qu'ils ne voient pas ce qui est devant eux, & qu'étant accoutumés aux principes nets & grossiers de geometrie, & à ne raisonner qu'après avoir bien vu & manié leurs principes, ils se perdent dans les choses de finesse où les principes ne se laissent pas ainsi manier. On les voit à peine; on les sent plutôt qu'on ne les voit; on a des peines infinies à les faire sentir à ceux qui ne les sentent pas d'eux-mêmes ; ce sont choses tellement délicates & si nombreuses, qu'il faut un sens bien délicat & bien net pour les sentir, & sans pouvoir le plus souvent les démontrer par ordre comme en geometrie, parcequ'on n'en possede pas ainsi les principes, & que ce seroit une chose infinie de l'entreprendre. Il faut tout-d'un-coup voir la chose d'un seul regard, & non par progrès de raisonnement, au-moins jusqu'à un certain degré. Et ainsi il est rare que les Geometres soient fins, & que les fins soient Geometres, à cause que les Geometres veulent traiter geometriquement les choses fines, & se rendent ridicules, voulant commencer par les définitions, & ensuite par les principes ; ce qui n'est pas la maniere d'agir en cette sorte de raisonnement. Ce n'est pas que l'esprit ne le fasse, mais il le fait tacitement, naturellement & sans art ; car l'expression en passe tous les hommes, & le sentiment n'en appartient qu'à peu.

Et les esprits fins au-contraire ayant ainsi accoutumé de juger d'une seule vûe, sont si étonnés quand on leur presente des propositions où ils ne comprennent rien, & où pour entrer il faut passer par des définitions & des principes steriles, & qu'ils n'ont point accoutumé de voir ainsi en détail, qu'ils s'en rebutent & s'en dégoûtent. Mais les esprits faux ne sont jamais ni fins ni Geometres.

Les Geometres qui ne sont que Geometres, ont donc l'esprit droit ; mais pourvû qu'on leur explique bien toutes ces choses

par définitions & par principes; autrement ils sont faux & insupportables ; car ils ne sont droits que sur les principes bien éclaircis. Et les fins qui ne sont que fins, ne peuvent avoir la patience de descendre jusqu'aux premiers principes des choses speculatives & d'imagination, qu'ils n'ont jamais vûes dans le monde & dans l'usage.

LA GEOMETRIE ET L'EXPERIENCE

Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s' adapte d' une si admirable manière aux objets de la réalité ? La raison humaine serait-elle donc capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par son activité seule les propriétés des objets réels ?

A cette question il faut, à mon avis, répondre de la façon suivante : pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu' elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.

Einstein 1921

(Un extrait plus long se trouve dans : Mathématiques au fil des âges, page 287)

Reprenons le texte d' Einstein et allons un peu plus loin en regardant les raisons de ce " contenant sans contenu " .

LE PROBLEME DE L'ESPACE , DE L'ETHER ET DU CHAMP PHYSIQUE

La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique .
Puisque dans cette dernière , le concept d' espace a déjà une fonction fondamentale , établissons et étudions ce concept .
Deux façons d' appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes .
La première méthode s' appelle l' analytique logique .
Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d' emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité , nous la trouvons et la respectons dans la mathématique .
Mais cette sécurité s' obtient au prix d' un contenant sans contenu .
Car les concepts ne correspondent à un contenu que s' ils sont liés , même le plus indirectement aux expériences sensibles . Cependant aucune recherche logique ne peut affirmer cette liaison . Elle ne peut être que vécue . Et c' est justement cette liaison qui détermine la valeur épistémologique des systèmes de concepts .

Nous avançons dans le débat .
1°) Einstein a posé le problème sous la forme : la géométrie , abstraction faite du concept d' espace est un contenant sans contenu ;
2°) Aucune logique ne peut construire un lien entre la géométrie et l' espace qu' elle est sensée décrire .
Ces prémisses nous amènent sur le terrain de l' épistémologie .

EPISTEMOLOGIE

Commençons par la définition du dictionnaire de sémiotique de M. Courtès:
" L'épistémologie est l'analyse des axiomes, des hypothèses et des procédures, voire des résultats qui spécifient une science donnée; elle se donne, en effet, comme objectif d'examiner l' organisation et le fonctionnement des approches scientifiques et d'en apprécier la valeur .... Toute théorie repose sur un nombre plus ou moins grand de concepts non définis qui sont à verser dans ce qu'on appelle l'inventaire épistémologique. Elle doit tout de même viser à réduire au maximum le nombre de ces concepts. "
Avouons que nous sommes au coeur du débat géométrique.

Courtès donne aussi une version plus synthétique :
EPISTEME : Attitude socio-culturelle d'un groupe vis-à-vis de ses propres signes.
(Par sa concision et sa précision cette définition mérite une longue méditation.)

Venons-en maintenant au livre de Piaget et Garcia : "Psychogénèse et histoire des sciences " et plus particulièrement au chapitre 4 dans lequel les auteurs montrent la structuration, en 3 stades successifs, de l'espace géométrique chez l'enfant.
Notons auparavant que l'épistémologie génétique distingue 4 stades principaux:
1) Le stade sensori - moteur (0 à 2 ans)
2) Le stade pré-opératoire (2 à 6 ans)
3) Le stade des opérations concrètes (7 à 10 ans)
4) Le stade des opérations formelles (11 à 12 ans)
Lors de l'étude de l'acquisition de la notion d' espace par l'enfant, Piaget et Garcia utilisent des objets concrets (pâte à modeler, bocal, fil à plomb .....) et non des objets géométriques .

Piaget a enseigné durant 10 années l'histoire de la pensée scientifique . Les 3 stades , intrafigural, interfigural et transfigural qu'ils déduisent de leurs travaux suivent chronologiquement 3 étapes importantes de la construction du savoir mathématique .

1) LE STADE INTRAFIGURAL (avant 7 ans)
Le jeune perçoit et se représente à l'intérieur de la figure, du dessin, de l'objet observé. Il dessinera une cheminée penchée perpendiculairement au toit d'une maison et non verticale. Piaget précise : " A ces relations intrafigurales, nous pouvons rattacher celles qui résultent d'une comparaison entre les propriétés internes de deux ou plusieurs figures, ce qui est bien différent de l'interfigural en tant que position des figures dans un espace englobant dont la structuration est alors nécessaire. "
Remarque importante : **Les cas d'égalité des triangles se situent dès lors dans le stade intrafigural.**

2) LE STADE INTERFIGURAL. (7 à 8 ans)
Le jeune **se repère** par rapport à un espace englobant la figure. Piaget précise : " Ils comprennent d'emblée la nécessité de **deux mesures conjointes** pour fixer la position du point " (page 135)
Piaget continue :" A passer aux directions, il est clair que le tracé d' une horizontale ou d' une verticale par le sujet exige des références interfigurales, en opposition avec les perpendiculaires quelconques dont il a été question plus haut." (cheminée ou liquide dans un bocal)
Le jeune atteint ici la notion de repère dégagée par Descartes avec ses 2 directions privilégiée bien différente de la notion d'angle droit tracé au hasard dans le plan. Selon Piaget, ce repérage se fait vers 7 ou 8 ans. Dès cet âge, un jeune peut situer un objet (point ?) dans le plan par 2 mesures (abscisse et ordonnée).
Mais Piaget précise encore : "Tout changement de forme d'une figure est dû à des déplacements de parties et tout déplacement peut se traduire en relations interfigurales puisqu'il s'agit de comparer des positions initiale et finale avec leurs références respectives ."
Remarque là encore importante : une transformation **unique** agissant sur un objet relève du stade interfigural par mesures des positions initiale et finale de l'objet .

3) LE STADE TRANSFIGURAL (11 à 12 ans)
Nous venons de dire qu'il ne s'agit pas seulement de transformer une figure. Pour atteindre ce troisième stade, le jeune doit comprendre la composition des transformations mais aussi il doit savoir " revenir en arrière " avec la transformation réciproque. Ainsi le jeune doit prendre conscience de la notion de groupe de transformation. Bien entendu, ces travaux datent de l'époque du structuralisme. Page 143, Piaget écrit : " Le problème que soulèvent ces premiers faits et que nous retrouverons à propos de tous les autres est de comprendre pourquoi ces compositions de mouvements sont si tardives ."

En mathématiques, nous notons ainsi deux " décalages ". Comprendre les cas d'égalité des triangles ne nécessite pas la compréhension de l'espace englobant les triangles donc il s'agit seulement du stade intrafigural et de même la transformation d'une figure ne nécessite pas de comprendre la structure des transformations donc il s'agit du stade interfigural.

RESUME

STADE	GEOMETRIE	EXEMPLES	ESPACE
INTRAFIGURAL 0-7ans	géométrie d'Euclide propriétés d'une figure comparaisons de 2 figures	droites perpendiculaires hauteur, médiane cas d'égalité des triangles	espace limité à la figure
INTERFIGURAL 7-8ans	géométrie analytique et transformation unique	repère cartésien une homothétie	compréhension de tout l'espace
TRANSFIGURAL 11-12ans	géométrie des transformations groupe de transformations	groupe des translations groupe des similitudes	structuration de tout l'espace

APERÇU HISTORIQUE

SUR L'ORIGINE ET LE DÉVELOPPEMENT

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE

PARTICULIÈREMENT

DE CELLES QUI SE RAPPORTENT A LA GÉOMÉTRIE MODERNE

PAR M. CHASLES,

Les pages qui suivent sont extraites de la réédition par l'IREM de Lille de l' Aperçu historique de Michel Chasles. On notera que la première édition en 1837 fut retardée de 2 ans par la découverte des ouvrages hindous de Brahmagupta . Par contre (2^e époque) la civilisation arabe n'a pas les faveurs de Chasles et l'invention de l'algèbre est attribuée à Viète ! La dernière phrase de cette 2^e époque : " Alliance intime entre l'Algèbre et la Géométrie " , " clef universelle des mathématiques " a un caractère visionnaire quand on connait l'importance actuelle de la géométrie algébrique.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR.

Cet ouvrage a été conçu à l'occasion d'une question proposée par l'Académie de Bruxelles. ----

L'impression commença en 1835, d'abord sans entraves, et assez rapidement, mais fut bientôt ralentie, particulièrement par l'étude des ouvrages indous de Brahmegupta, dont on n'avait pas encore signalé le sujet réel et l'importance spéciale pour la partie géométrique. Enfin le volume parut en 1837.

Une autre objection pouvait se présenter. Depuis 1837, la Géométrie a fait des progrès considérables,

Cette circonstance pouvait rendre fort douteuse l'opportunité d'un travail déjà ancien de près d'une quarantaine d'années. Cependant M. Hayez, imprimeur de l'Académie de Belgique, et M. Gauthier-Villars, qu'il a désiré s'associer, ont bien voulu accomplir la pensée de l'Académie. Qu'ils veuillent bien aussi en agréer mes remerciments.

M. C.

Paris, 20 mai 1875.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRE ÉPOQUE.

§ 1. La Géométrie prit naissance chez les Chaldéens et les Égyptiens.

THALÈS. Né 639 et mort 548 ans avant J.-C.

Thalès qui, né en Phénicie, alla s'instruire en Égypte et vint ensuite s'établir à Milet, y fonda l'école ionienne, d'où sont sorties les sectes des philosophes de la Grèce, et où commencèrent les premiers progrès de la Géométrie.

PYTHAGORE. Né vers 580 avant J.-C.

Pythagore, né à Samos, disciple de Thalès, qui, comme lui, avait voyagé en Égypte, puis dans les Indes, vint se retirer en Italie, et y fonda son école, beaucoup plus célèbre que celle d'où elle dérivait. Ce fut principalement à Pythagore, qui incorpora la Géométrie dans sa philosophie, et à ses disciples que cette science dut ses premières découvertes. Les principales furent la théorie de l'*incommensurabilité* de certaines lignes, comme la diagonale du carré comparée au côté; et la théorie des *corps réguliers*. Ces premiers pas dans la science de l'étendue n'offrirent, du reste, que quelques propositions élémentaires, relatives à la ligne droite et au cercle. Les plus remarquables sont le théorème du *carré de l'hypoténuse* d'un triangle rectangle, dont la découverte coûta, dit l'histoire, ou la fable, une hécatombe à Pythagore; et la propriété qu'ont le cercle et la sphère d'être des *maxima* parmi les figures de même périmètre ou de même surface : propositions qui offrent le premier germe de la doctrine des *isopérimètres*.

§ 2. La Géométrie fut ainsi restreinte jusqu'à la fondation de l'école platonicienne, époque de ses grands progrès.

PLATON. 430—347 avant J.-C.

Platon, comme les sages de la Grèce qui l'avaient précédé, alla s'instruire dans les mathématiques chez les prêtres égyptiens; puis en Italie auprès des pythagoriciens.

De retour à Athènes, ce chef du Lycée introduisit dans la Géométrie la *méthode analytique* [1], les *sections coniques* et la doctrine des *lieux géométriques*. Découvertes mémorables qui firent de la Géométrie, pour ainsi dire, une science nouvelle, d'un ordre plus élevé que la Géométrie élémentaire cultivée jusque-là, et que les disciples de Platon appelèrent *Géométrie transcendante*.

La doctrine des lieux géométriques [2] fut appliquée, dès ce temps, d'une manière très savante, aux fameux problèmes de la *duplication du cube*, des *deux moyennes proportionnelles* et de la *trisection de l'angle*.

CHAPITRE II.

DEUXIEME ÉPOQUE.

§ 9. L'état de stagnation où languirent les lettres, chez les Arabes et les autres nations, après la destruction du Musée d'Alexandrie, dura prés de mille ans; et ce ne fut que vers le milieu du XV^e siècle que la Géométrie, suivant le mouvement général des sciences, reprit faveur.

Ses progrès furent lents d'abord; mais néanmoins les conceptions des géomètres ne tardèrent point à prendre un caractère de généralité et d'abstraction qu'elles n'avaient point encore eu jusqu'alors. Chaque méthode, en effet, ne comportait rien de général, et se bornait à la question particulière qui y avait donné lieu: chaque courbe connue, et le nombre en était très restreint, avait été étudiée isolément, par des moyens qui lui étaient tout spéciaux, sans que ses propriétés, et les procédés qui y avaient conduit, servissent à découvrir les propriétés d'une autre courbe. Nous citerons, par exemple, le fameux problème des tangentes, qui fut résolu pour quelques courbes, telles que les coniques et la spirale d'Archimède, par des considérations profondes, mais essentiellement différentes entre elles, et qui ne donnaient aucune ouverture pour la solution du même problème appliqué à d'autres courbes.

La méthode d'exhaustion, qui reposait sur une idée mère tout à fait générale, n'ôta point à la Géométrie son caractère d'étroitesse et de spécialité, parce que cette conception y manquant de moyens généraux d'application, devenait, dans chaque cas particulier, une question toute nouvelle, qui ne trouvait de ressources que dans les propriétés individuelles de la figure à laquelle on l'appliquait. Cétte méthode néanmoins fait beaucoup d'honneur aux géomètres de l'Antiquité, parce qu'elle est le germe d'une suite de méthodes de *quadratures* qui depuis ont fait, dans tous les temps, l'objet des travaux des plus célèbres mathématiciens, et dont le but final, et nous pouvons dire le triomphe, fut l'invention du calcul infinitésimal.

Ces considérations, qui tendent à faire ressortir la différence du *spécial* au *général*, du *concret* à *l'abstrait*, qui distingue la Géométrie jusqu'au XV^e siècle, de la Géométrie postérieure, nous portent à regarder cette première époque comme formant les *préliminaires* de la science.

Le caractère de généralité et d'abstraction, que prit ensuite la Géométrie, s'est prononcé de plus en plus dans les époques suivantes, et établit aujourd'hui une différence immense entre la Géométrie moderne et celle des Anciens.

§ 2. Les principales découvertes de la Géométrie, à sa renaissance, sont dues à Viète et à Kepler, qui sont, à plusieurs titres, les premiers auteurs de notre supériorité sur les Anciens. (*Voir* la Note XII.)

Viète, après avoir complété la *méthode analytique* de Platon, par l'invention de l'*Algèbre*, ou *logistique spécieuse*, destinée à mettre cette méthode en pratique dans la science des nombres, eut encore la gloire d'introduire cet instrument admirable dans la science de l'étendue, et d'initier les géomètres, par une construction graphique des équations du second et du troisième degré, à l'art de représenter géométriquement les résultats de l'Algèbre; premiers pas vers une alliance plus intime entre l'Algèbre et la Géométrie, qui devait conduire aux grandes découvertes de Descartes, et devenir la clef universelle des mathématiques.

CHAPITRE III.

TROISIÈME ÉPOQUE.

DESCARTES. 1596-1650

§ 1er. Le plus signalé service rendu à la Géométrie est dû à Descartes. Ce philosophe, par son inappréciable conception de l'*Application de l'Algèbre à la théorie des courbes*, se créa les moyens de franchir les obstacles qui, jusqu'alors, avaient arrêté les plus grands géomètres, et changea véritablement la face des sciences mathématiques [1].

Cette doctrine de Descartes, dont aucun germe ne s'est trouvé dans les écrits des géomètres anciens, et la seule peut-être dont on puisse dire, comme Montesquieu de son *Esprit des lois*, PROLEM SINE MATRE CREATAM, cette doctrine, dis-je, eut pour effet de donner à la Géométrie le caractère d'abstraction et d'universalité qui la distingue essentiellement de la Géométrie ancienne. Les méthodes créées par Cavalieri, Fermat, Roberval, Grégoire de St-Vincent, portaient aussi, dans leurs principes métaphysiques, le cachet de cette généralité; mais ne l'avaient point dans leurs applications. La conception de Descartes, seule, procurait les moyens d'appliquer ces méthodes d'une manière uniforme et générale; elle était l'introduction nécessaire aux nouveaux calculs de Leibniz et de Newton, qui dès lors n'ont point tardé à surgir de ces belles méthodes.

La Géométrie de Descartes, outre ce caractère éminent d'universalité, se distingue encore de la Géométrie ancienne sous un rapport particulier, qui mérite d'être remarqué: c'est qu'elle établit, par une seule formule, des propriétés générales de familles entières de courbes; de sorte que l'on ne saurait découvrir par cette voie quelque propriété d'une courbe, qu'elle ne fasse aussitôt connaître des propriétés semblables ou analogues dans une infinité d'autres lignes. Jusque-là, on n'avait étudié que des propriétés particulières de quelques courbes, prises une à une, et toujours par des moyens différents, qui n'établissaient aucune liaison entre différentes courbes.

Aussi la Géométrie prit dès lors un essor rapide, et ses progrès s'étendirent sur toutes les autres sciences qui sont de son domaine. L'Algèbre elle-même en reçut d'utiles secours; ses opérations symboliques devinrent plus faciles à saisir, son importance s'accrut; et ces deux branches principales de nos connaissances positives marchèrent d'un pas également assuré.

Quant à l'Algèbre, nous nous bornerons à dire que l'un des premiers et des plus grands avantages que la Géométrie lui procura, fut l'interprétation et l'usage des racines négatives, que jusque-là on regardait comme insignifiantes, et qui avaient si fort embarrassé les anciens analystes.

La méthode des coefficients indéterminés, que Descartes créa dans sa Géométrie, et dont il fit un si heureux usage pour la construction des lieux solides, est aussi l'une des découvertes les plus ingénieuses et les plus fécondes de l'Analyse.

§ 2. L'esprit et les procédés de la *Géométrie* de Descartes sont trop connus de toutes les personnes qui ont les premières connaissances en mathématiques, pour que nous entrions ici dans aucun développement.'

CHAPITRE IV.

QUATRIÈME ÉPOQUE.

cul infinitésimal

§ 1. Cinquante ans après que Descartes avait mis au jour sa *Géométrie*, une autre grande conception préparée par Fermat et Barrow, le *Calcul infinitésimal* de Leibniz et de Newton, prit naissance (en 1684 et 1687).

Cette sublime invention, qui remplaçait avec un avantage immense les méthodes de Cavalieri, de Roberval, de Fermat, de Grégoire de Saint-Vincent, pour les dimensions des figures et les questions de *maxima* et *minima*, s'appliqua aussi, avec une facilité si prodigieuse, aux grandes questions des phénomènes de la nature, qu'elle devint presque exclusivement l'objet des méditations des plus célèbres géomètres. Dès lors, la Géométrie ancienne et les belles méthodes de Desargues et de Pascal, de La Hire et de Le Poivre, pour l'étude des coniques, furent négligées.

L'Analyse de Descartes, seule des grandes productions de notre deuxième et de notre troisième Époque, survécut à cet abandon général. C'est qu'elle était le véritable fondement des doctrines de Leibniz et de Newton, qui allaient envahir tout le domaine des sciences mathématiques.

Cependant, quelques géomètres, dans les premiers temps, et à leur tête Huygens, quoiqu'il sût apprécier toutes les ressources de l'Analyse infinitésimale, Mac-Laurin, profond commentateur du *Traité des Fluxions* de Newton, et Newton lui-même, furent fidèles à la méthode des Anciens, et surent pénétrer dans les mystères de la plus profonde Géométrie, pour résoudre, avec son seul secours, les plus hautes questions des sciences physico-mathématiques.

Quelques autres géomètres ensuite, tels que Stewart, Lambert, dignes admirateurs de ces grands hommes, marchèrent sur leurs traces et continuèrent leurs savantes méthodes. Mais enfin l'attrait de la nouveauté et les puissantes ressources que présentait l'Analyse infinitésimale, tournèrent tous les esprits vers d'autres idées et d'autres spéculations. De sorte que, si l'on peut dire parfois que la Géométrie d'Huygens et de Newton, après avoir posé les véritables fondements de nos connaissances positives, devenait insuffisante pour continuer son œuvre, il est juste de convenir aussi que des disciples lui ont manqué; car je ne sache pas que, depuis trois quarts de siècle, on ait fait de nouvelles applications de cette méthode; et c'est aujourd'hui par tradition et seulement sur parole, que, légèrement peut-être, on parle de son impuissance et des limites qui en restreignent pour toujours les usages.

§ 2. Nous ne pouvons entreprendre ici d'analyser tous les travaux des grands géomètres que nous avons nommés ; cette tâche n'entre point dans notre cadre et serait au-dessus de nos forces. Nous ne devons citer que ceux de ces travaux qui se rapportent à cette partie de la science de l'étendue, que nous avons appelée *Géométrie des formes et des situations;* qui prend son origine dans l'*Analyse géométrique* des Anciens ; qui, pendant deux mille ans, s'est exercée sur l'inépuisable théorie des sections coniques, et à laquelle enfin Descartes a soumis, d'un trait de plume, l'innombrable famille des courbes géométriques.

Nous allons présenter d'abord un aperçu rapide des découvertes successives des principales propriétés de ces courbes ; puis, en revenant sur nos pas, nous parlerons des progrès que la Géométrie a faits dans diverses

CHAPITRE V.

CINQUIÈME ÉPOQUE

§ 1. Dans ces derniers temps, après un repos de près d'un siècle, la Géométrie pure s'enrichit d'une doctrine nouvelle, la *Géométrie descriptive*, complément nécessaire de la Géométrie analytique de Descartes, et qui, comme elle, devait avoir des résultats immenses, et marquer une ère nouvelle dans l'histoire de la Géométrie.

Cette science est due au génie créateur de Monge.

Elle embrasse deux objets :

Le premier est de représenter sur une aire plane tous les corps d'une forme déterminée, et de transformer ainsi, en constructions planes, les opérations graphiques qu'il serait impossible d'exécuter dans l'espace.

Le second est de déduire, de cette représentation des corps, leurs rapports mathématiques, résultant de leurs formes et de leurs positions respectives.

Cette belle création, qui fut d'abord destinée à la Géométrie pratique et aux arts qui en dépendent, en constitua réellement la *théorie générale*, puisqu'elle réduisit à un petit nombre de principes abstraits et invariables, et à des constructions faciles et toujours certaines, toutes les opérations géométriques qui peuvent se présenter dans la Coupe des pierres, la Charpente, la Perspective, la Fortification, la Gnomonique, etc., et qui auparavant ne s'exécutaient que par des procédés incohérents entre eux, incertains, et souvent peu rigoureux. (*Voir* la Note XXIII.)

§ 2. Mais, outre l'importance due à cette première destination, qui donnait un caractère de rationalité et de précision à tous les arts de construction, la Géométrie descriptive en eut une autre très grande, due aux services réels qu'elle rendit à la Géométrie rationnelle, sous plusieurs rapports, et aux sciences mathématiques en général.

La Géométrie descriptive, en effet, qui n'est que la traduction graphique de la Géométrie générale et rationnelle, servit de flambeau dans les recherches et dans l'appréciation des résultats de la Géométrie analytique; et, par la nature de ses opérations, qui ont pour but d'établir une correspondance complète et sûre entre des figures effectivement tracées sur un plan et des corps fictifs dans l'espace, elle familiarisa avec les formes de ces corps, les fit concevoir idéalement, avec exactitude et promptitude, et doubla de la sorte nos moyens d'investigation dans la science de l'étendue.

La Géométrie devint ainsi en état de répandre plus aisément sa généralité et son évidence intuitive sur la mécanique et sur les sciences physico-mathématiques.

Cette influence utile de la Géométrie descriptive s'étendit naturellement aussi sur notre style et notre langage en mathématiques, qu'elle rendit plus aisés et plus lucides, en les affranchissant de cette complication de figures dont l'usage distrait de l'attention qu'on doit au fond des idées, et entrave l'imagination et la parole.

La Géométrie descriptive, en un mot, fut propre à fortifier et à développer notre puissance de conception; à donner plus de netteté et de sûreté à notre jugement; de précision et de clarté à notre langage; et, sous ce premier rapport, elle fut infiniment utile aux sciences mathématiques en général.

1964 Jean Dieudonné

Algèbre linéaire et géométrie élémentaire

Introduction

Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'Algèbre linéaire élémentaire qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès-sciences au moment où il entre dans les classes du 1^er^ cycle de l'Enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminés par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement *actuel* donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître comme le *prolongement naturel* de ce qu'il a déjà appris.

Le fait qu'à l'heure présente il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement. Il y a déjà plusieurs années que l'on s'est inquiété un peu partout du divorce grandissant entre les méthodes et l'esprit de l'enseignement des mathématiques, dans les lycées d'une part, dans les Universités de l'autre.

Pendant ce temps, l'Enseignement secondaire, qui par sa nature même est fort éloigné du niveau où se font les recherches mathématiques contemporaines, était tranquillement resté, avec quelques additions superficielles, ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et de Descartes, et, dans les classes terminales, un peu de Calcul infinitésimal. Il n'est donc pas surprenant que le fossé entre cet enseignement et celui qu'on donne dès l'entrée à l'Université n'ait cessé de s'élargir. Qu'on veuille bien, par exemple, considérer sans idées préconçues les sujets suivants, qui tiennent encore une place considérable dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

I) Les constructions « par la règle et le compas ».

II) Les propriétés des « figures » traditionnelles, telles que le triangle, les « quadrilatères » variés, les cercles et « systèmes de cercles », les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de « géomètres » spécialisés et de professeurs en quête de problèmes d'examen.

III) La kyrielle des « formules trigonométriques » et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes « résolutions » de « problèmes » relatifs aux triangles, et ce par des « calculs logarithmiques », s'il vous plaît !

Que l'on ouvre maintenant au hasard un livre traitant des matières enseignées à partir de l'entrée à l'Université : on constatera aussitôt qu'il n'y est *jamais* même fait allusion à toutes ces belles choses.

Il est bien vrai aussi que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :

1° les astronomes ;
2° les arpenteurs ;
3° les auteurs de manuels de trigonométrie.

Mais il y a des centaines d'autres professions tout aussi honorables, qui se contentent fort bien, en matière de « trigonométrie », de ce qui tient en 3 ou 4 pages de ce livre (cf. p. 112). Et puis, doit-on considérer que l'Enseignement secondaire est destiné à accumuler toute une série de connaissances particulières, plus ou moins hétéroclites, en vue de préparer à toutes les professions imaginables ; ou au contraire, faut-il essayer avant tout d'apprendre aux enfants à *penser*, sur un petit nombre de notions générales bien choisies, et laisser les techniques spéciales se ranger plus tard sans effort dans une « tête bien faite » ?

Enfin, l'auteur pose le problème de l'unité des mathématiques.

Une autre caractéristique de la méthode mathématique contemporaine (sans doute trop connue pour qu'il y faille beaucoup insister) est qu'elle permet de regrouper suivant leurs affinités profondes des théories d'aspect superficiel souvent fort différent. Or, plus sans doute que nulle part ailleurs, le cloisonnage des disciplines a atteint dans l'enseignement traditionnel un degré dont le ridicule peut difficilement être dépassé. On enseigne en effet peu ou prou, dans les années terminales des lycées et même jusqu'il y a peu de temps dans les classes préparatoires aux grandes Ecoles (ainsi que dans beaucoup d'Universités étrangères) toute une impressionnante liste de « sciences » :

la « Géométrie pure » ;
la « Géométrie analytique » ;
la « Trigonométrie » ;
la « Géométrie projective » ;
la « Géométrie conforme » ;
la « Géométrie non-euclidienne » ;
la « Théorie des nombres complexes » (**)

Non seulement toutes ces disciplines sont-elles en général présentées isolément, mais encore est-il fréquent de voir chacune s'efforcer d'ignorer totalement les autres et se targuer de son « indépendance » : les grotesques ----

Ce livre réclame une " modernisation " de l'enseignement. Elle eut effectivement lieu.

DEUXIEME

PARTIE

LES GEOMETRIES

L'EVOLUTION EN GEOMETRIE : CHRONOLOGIE

Cette brève chronologie contient aussi quelques références concernant l'arithmétique et l'algèbre, branches majeures des mathématiques impossibles à dissocier de la géométrie.

- 3000	Nombres entiers, figures planes usuelles, volumes simples
	Mesures des surfaces et des solides
-2000	Papyrus de Rhind. Inverses des nombres entiers.
-600	Thalès
-500	Pythagore : la géométrie pythagoricienne **GEOMETRIE GRECQUE**
	Eudoxe
-300	Euclide : les 13 livres des Eléments d' Euclide (Alexandrie)
	1) LA GEOMETRIE D'EUCLIDE
+500	Ecole indienne : système de position , nombres négatifs.
+850	Ecole arabe : équation du 2^e degré, l'ALGEBRE.
+1500	Ecole des algèbristes "italiens" (Del Ferro , Cardan ....)
	Nombres complexes.
1650	**2) LA GEOMETRIE ANALYTIQUE** : Les repères de Descartes
1670	**3) LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE** : Newton , Leibniz
	4) LA GEOMETRIE PROJECTIVE : Perspective , projection centrale et point à l'infini
1770	**5) LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE** : Monge
1850	**6) LA GEOMETRIE VECTORIELLE**
	7) LES GEOMETRIES NON-EUCLIDIENNES
	Autres postulats des parallèles
	8) LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS
	Première étude des transformations géométriques
	Groupe des isométries d'une figure
	9) LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE
1970	**10) LA GEOMETRIE FRACTALE**

AVANT THALES, PYTHAGORE, EUDOXE OU EUCLIDE

1) LES NOMBRES ENTIERS

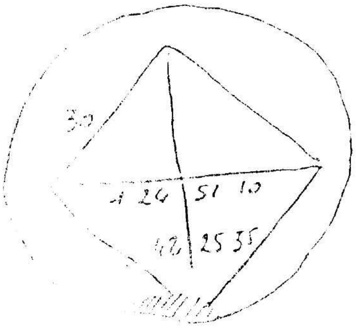
"Les nombres entiers sont un don de Dieu "
Kummer au 19^{e} siècle

" L'histoire universelle des chiffres " de Georges Ifrah montre la grande diversité des systèmes d'écriture des nombres.
Chaque civilisation a développé son système.
Vivre en société impose de disposer d'une méthode de comptage des objets et souvent de pouvoir l'écrire même de façon primitive , à partir de bâtons par exemple.
L' écriture des nombres dans les civilisations de la Méditerranée orientale n'était pas vraiment meilleure que les autres. Effectuer une multiplication ou une division dans les systèmes sumérien, égyptien ou grec n'est guère aisé.
Il faudra attendre 1000 (sic) ans pour que les Indiens créent (vers +500) un bon système d'écriture des nombres et 1000 ans de plus pour qu'il s'impose sur toute la planète. (Seuls quelques villages résistent .....)
Notons enfin que, si la rédaction axiomatique de la géométrie fut réalisée vers - 300, la rédaction axiomatique de l' arithmétique date du début du 20^{e} siècle.... après la construction des nombres réels ! L'usage des axiomes de l'arithmétique reste confidentiel et l'arithmétique - théorie des nombres entiers - a disparu des programmes du secondaire comme du supérieur.
Difficultés pour écrire les nombres , difficultés pour effectuer des opérations , difficultés pour raisonner à partir des seuls nombres , peut-être ces difficultés ont-elles contribué au développement d' une science plus complète.

2) LES SYSTEMES DE MESURE

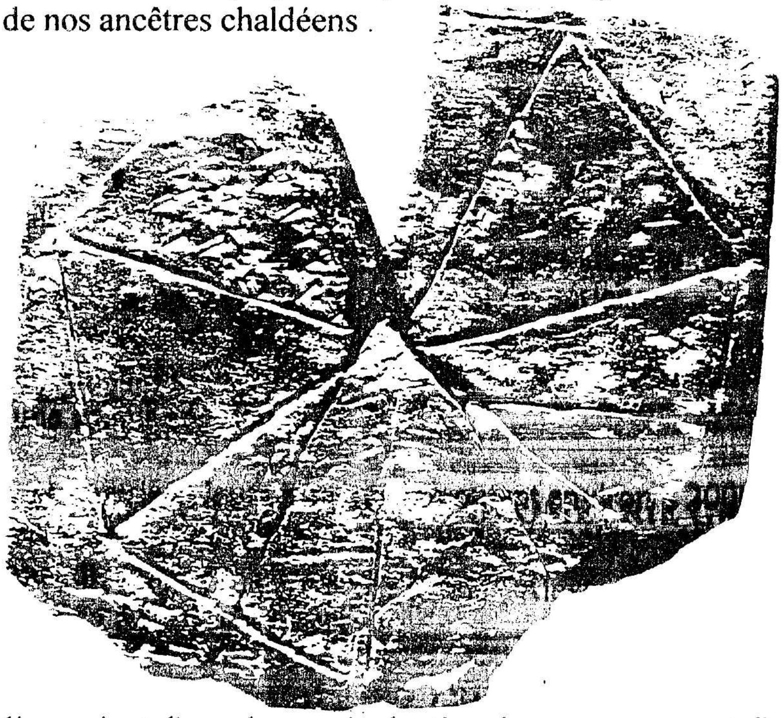
Au 2e millénaire avant notre ère, les Sumériens et les Babyloniens en Asie, les Egyptiens en Afrique, créent des **"objets" simples** : les figures planes - carré, cercle, triangle, trapèze - et les volumes - cylindre, pyramide . Ils apprennent **à mesurer les surfaces et les volumes à l'aide des nombres.**
De plus, principe essentiel en construction, sur un chantier, les babyloniens savent qu'un triangle dont les 3 côtés mesurent 3, 4 et 5 unités a un angle droit. Ils savent aussi que le rapport de la mesure du cercle à celle de son diamètre est un nombre fixe voisin de 3 . Tous ces résultats sont importants dans une société de constructeurs et sont vérifiables à partir d'expériences simples réalisées à l'aide de ficelles , de sable et de boîtes . (La géométrie et l'expérience ....)
Les Egyptiens , à partir de ces mesures sur des figures du plan, ont évalué l'aire du disque en l'approximant par un octogone. Aujourd'hui nous dirions que cette méthode donne une valeur approchée de $\pi = 3{,}11$.

Les figures de la géométrie et leurs mesures remontent environ à 2000 ans avant notre ère . En particulier , cette tablette babylonienne témoigne sans ambiguité d' une étude théorique du carré .



Incroyable tablette sur laquelle on trouve , en base 60 , la mesure du côté d' un carré : ici 30 soit 0,5 puis la mesure de la diagonale d' un carré de côté 1 soit 1 24 51 10 et enfin la mesure de la diagonale dessinée soit : 0 42 25 35

D' autres tablettes de la même époque complète nos renseignements sur les connaissances de nos ancêtres chaldéens .
Par exemple :

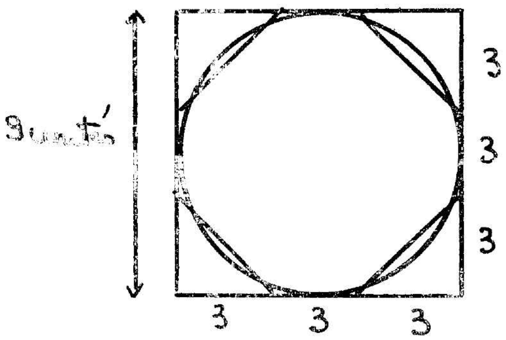


Les Egyptiens disposaient d' une bonne évaluation de π en se servant d' un carré de 9 unités de côté et d' un octogone qui visiblement approche fort bien le cercle .

$$\mathcal{A} = \pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 \simeq 81 - 4\times\frac{3^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \pi\times\frac{81}{4} \simeq 81-18$$

$$\pi \simeq 63\times\frac{4}{81} = 3+\frac{1}{9}$$



RESUME

Rendons aux civilisations sumérienne d'Asie et égyptienne d'Afrique ce qui leur revient : la CREATION des figures géométriques et la MESURE des surfaces et des solides . La notion de triangle rectangle vient aussi des civilisations d'entre Tigre et Euphrate .
La découverte de la constante π et ses premières évaluations furent faites en Asie et en Afrique
Enfin, ce système de mesure ne fut jamais remis en question, nous lui devons beaucoup et nous l'utilisons toujours aujourd'hui.

LA GEOMETRIE PYTHAGORICIENNE : L'ECHEC D'UNE GEOMETRIE

La notion de point, élément sans dimension, n'est pas évidente du tout et sûrement plus délicate à concevoir et définir que celle d'unité de mesure . L'école de Pythagore autour de - 500 ou - 400 est associée aux débuts de la logique appliquée au système de mesure découvert par Pythagore lors de ses voyages en Asie et en Afrique. Le point semble plutôt être un grain de sable, un élément de petite dimension mais de taille non nulle servant ainsi d'unité de mesure. On y revient.
Une ligne ainsi conçue est construite par juxtaposition de points .

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Une surface formée de lignes juxtaposées avait une petite épaisseur. En empilant des surfaces on obtenait un solide . Toute cette construction (sic) se déroule à peu près bien autour des nombres entiers et des rapports de nombres entiers . Surtout toutes ces lignes étaient mesurables et même commensurables entre elles jusqu'à ce que la diagonale du carré et le théorème de Pythagore ne viennent mettre leur ...... grain de sable !
On retrouve encore chez Aristote - ou du moins dans les textes que nous lui attribuons - ces points juxtaposés avant qu' Aristote n'abandonne cette géométrie . On attribue d'ailleurs à Aristote la démonstration par l'absurde de l'incommensurabilité de la diagonale du carré , cette démonstration ayant probablement entraîné la fin de la géométrie pythagoricienne .

Le point sans dimension allait pouvoir faire son entrée et régner sans partage sur la géométrie .

1) LA GEOMETRIE D'EUCLIDE

Euclide arrive au bon moment. Installé vers - 300 à l'université d'Alexandrie, il va pouvoir rédiger et synthétiser les travaux de Thalès, Pythagore, Eudoxe , Aristote et autres. La géométrie d'Euclide est la première science rédigée selon la méthode axiomatique : 1°) Définitions

2°) Axiomes et postulats

3°) Théorèmes ou propositions

En 13 livres qui nous sont intégralement parvenus, Euclide donne une méthode définitive. Elle va traverser 23 siècles sans aucune altération aussi est-il indispensable de préciser cette géométrie d'Euclide qui donnera naissance à toutes les autres.

LIVRE 1

Mise en place des figures et de leurs propriétés.

**1) Définition de 23 objets simples : point, droite, surface, cercle, droites parallèles etc ...

2) **5 Postulats : les axiomes de la géométrie.

Tout d'abord 3 postulats de construction :

1) **Tracer** une ligne d'un point quelconque à un autre point

2) Toute droite finie peut être **prolongée** indéfiniment et continûment

3) Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut **tracer** un cercle

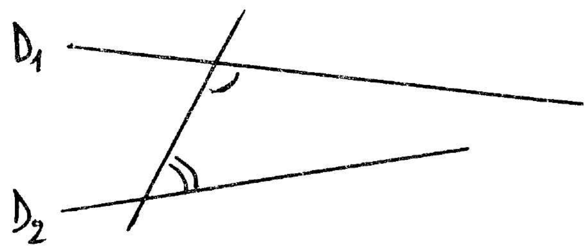
Euclide poursuit avec 1 postulat d'égalité entre figures :

4) Tous les angles droits sont égaux entre eux

Enfin vient celui qui deviendra le fameux postulat dEuclide :

5) Si une sécante rencontre 2 autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à 2 droits, ces 2 droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à 2 angles droits .

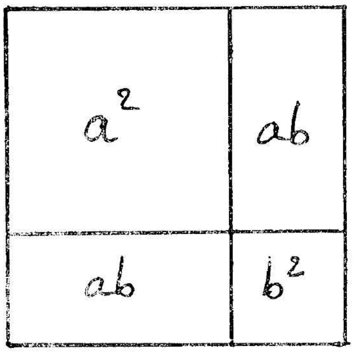
Le postulat sera reformulé au 18^{e} siècle : par un point extérieur à une droite, il passe une seule parallèle à cette droite.



Suivent 10 axiomes, principes de base des mesures et non spécifiques à la géométrie .
1) Les **égaux** à un même tiers sont **égaux** entre eux.
2) Si des **égaux** sont ajoutés a des **égaux**, les sommes sont égales .
....
8) **Les figures superposables sont égales .**
Cet axiome de géométrie répondant à un **principe d'égalité** est une méthode , peut-être **LA grande méthode dont Euclide va user voire abuser pour construire sa géométrie.**
Le livre déroule alors 48 propositions comprenant :
*) Les constructions usuelles à la règle et au compas.
*) Les cas d' égalité des triangles.
*) Les propriétés des droites parallèles.
*) 47 : Théorème de Pythagore.
*) 48 : Réciproque du théorème de Pythagore.

LIVRE 2

On y trouve, par exemple, les identités remarquables démontrées avec des figures géométriques.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Toute la géométrie est là ! Ainsi que ses limites.
Dans un monde compliqué à appréhender, **CREER** des objets simples, **MESURER** les éléments de ces objets et en **DEDUIRE** des propriétés certaines de ces objets.

Par contre, cette esprit de mesure, cette méthode, empêche de penser à créer des nombres négatifs et limitera longtemps la géométrie à des mesures d'objets .
(la théorie de la mesure sera mise au point à la fin du 19^{e} siècle !!)

LIVRE 3

Euclide applique la méthode géométrique , mise en place dans le livre 1 , au cercle. Le livre 3 contient 11 définitions de figures :cercles égaux , tangente, cercles tangents , etc ...
Le livre 3 contient 37 propositions dont :
Proposition 20 : dans un cercle , l' angle au centre est double de l' angle à la circonférence , quand ces angles ont pour base le même arc .

LIVRE 4

La méthode géométrique est cette fois appliquée aux polygones .
? définitions dont : une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle , lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle .
Seulement 16 propositions , surtout des constructions .
1) Dans un cercle , construire un segment ayant ses extrémités sur le cercle et égal à un segment donné .
2) Dans un cercle , construire un triangle donné et équiangle avec un triangle donné .

LIVRES 5 - 6

Le livre 1 est le livre - clé de l'exposé de la méthode contenant les postulats, les cas d'égalité des triangles et le théorème de Pythagore.
Le livre 5, accompagné du livre 6 , est le second livre - clé.
Ils contiennent la théorie des proportions ou **égalités** de rapports attribuée à Eudoxe.
Notre propos n'est pas d'analyser en profondeur les Eléments d'Euclide mais seulement de préciser le problème.

> Dans les 4 premiers livres, Euclide raisonne sur des segments, des angles, des surfaces i.e. il n' attache pas à chaque élément de ses figures un nombre **mais il raisonne par égalités de figures !**
> * Egalité de 2 triangles : **égalité des côtés et des angles**.
> * $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ 2 droits dans le triangle par **égalités d'angles**
> * Théorème de Pythagore démontré par construction de triangles superposables ou égaux (axiomes 1 , 2 ou 8) .
> * Identités remarquables du livre 2 .

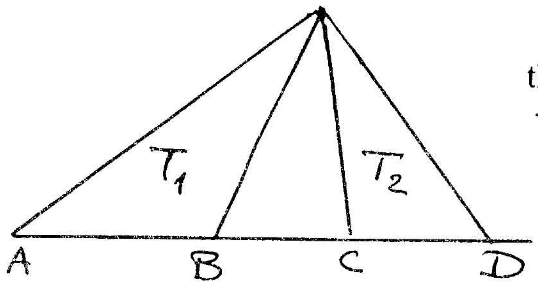
Donnons 2 traductions de la $1^{ère}$ définition du livre 5
Peyrard (1809) traduction " officielle " :
" Une grandeur est une partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande "
A -------------------
E ----
Autre traduction : " on appelle sous - multiple ou partie aliquote (une part) d'une grandeur sa partie la plus petite quand celle - ci (prise comme unité) mesure la partie la plus grande ".

Le propos du livre 5 est de casser l'unité de mesure
L' unité A est trop grande ==> on utilise une unité E qui mesure A
(ce que nous appelons sous - multiple)

Euclide donne comme exemple les segments mais la méthode s'étend dans son esprit au surfaces et aux volumes.
Il ne semble pas définir la notion de grandeur. Une fois ces sous-multiples de l'unité mis en place, Euclide peut mesurer des objets plus petits et nous savons qu' Eudoxe et Pythagore pensaient avoir une précision suffisante pour mesurer TOUS les objets.

LIVRE 6 : Théorème de Thalès

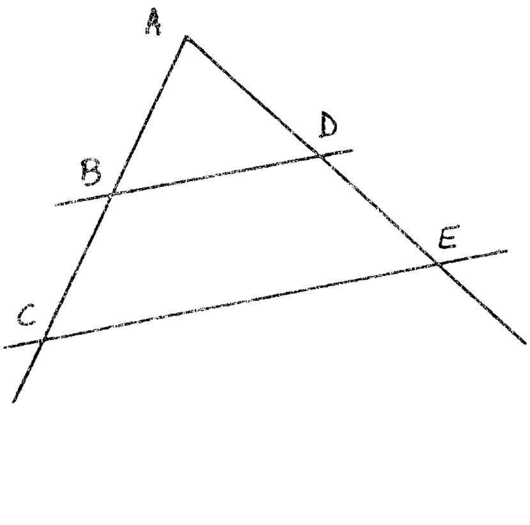
La proposition 1 est un lemme technique (en vue de la proposition 2) :
Les triangles et les parallélogrammes de même hauteur sont dans le rapport de leurs bases .



théorème
<====>

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{AB}{CD}$$

Proposition 2 : Théorème de Thalès (avec sa réciproque)
La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles (et réciproquement).



théorème
<====>

$$\frac{BC}{BA} = \frac{DE}{DA}$$

LIVRE 7

Le nombre, indépendant (?) de son objet géométrique, apparaît par une magnifique définition :

Définition 1 : L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une .(si !)
Définition 2 : Le nombre est une multitude composée d'unités.

La définition 1 est importante . Comme les autres définitions, elle est critiquable et ne définit pas grand chose en apparence . Cependant :
1°) Elle montre bien que les mathématiques usent fondamentalement d'une unité (voir les fameuses " unités d'aires " alors que l'on ne voit jamais d' " unités de longueurs ")
2°) Elle donne une des bases du raisonnement mathématique **. Il y aurait une unique unité (pléonasme ?) en mathématiques**
Descartes dira 2000 ans plus tard : " il doit y avoir une science générale qui explique tout ce que l'on peut chercher concernant l'ordre et la **mesure** sans les appliquer à une matière spéciale ".
Euclide a dû chercher à unifier complètement son exposé et regretter que l'espace ait 3 dimensions lui imposant 3 unités de grandeurs : unité de longueur, unité d'aire, unité de volume que l'on retrouve dans les définitions de ce même livre 7 .
Définition 17 : Le produit de 2 nombres est un nombre plan dont les facteurs sont les côtés.
Définition 18 : Le produit de 3 nombres est un nombre solide dont les facteurs sont les 3 arètes.
Euclide pousse ici très loin l'identification entre le nombre et l'objet géométrique . Le produit de plus de 3 nombres n'existe pas dans sa méthode.
Chassez la physique, elle revient au galop !

UNE CONCLUSION

13 livres et 465 propositions
On peut critiquer cet ouvrage - aucun livre n'est parfait - mais il donne un exposé clair et définitif de la géométrie .

1) CREATION **de figures simples**
2) MESURES **des éléments de ces figures**
3) DEDUCTION LOGIQUE **des propriétés de ces figures**
   a) par égalités de figures (livres 1 à 4)
   b) par division du segment unité (livre 5)

Les nombres interviennent ensuite comme un caractère des objets géométriques puis sont étudiés à partir du livre 7 en tant que nombres.

La théorie euclidienne crée le nombre à partir de la figure

(L'exposé axiomatique des Naturels ne sera fait que vers 1900 répétons-le !)
En introduisant la logique dans le système de mesure des Egyptiens et des Chaldéens, les Grecs construisent leur savoir scientifique sur la figure dont le nombre sera un corollaire.

QUE RETENIR ?

Dans un exposé, chacun retient ce qu'il veut.
De l'exposé d'Euclide nous retenons souvent aujourd'hui la structure " définitions, axiomes, théorèmes " reprise par tous les livres de mathématiques jusqu'à nos jours.
L'objet n'en était-il pas plutôt de TOUT déduire des objets géométriques dont la simplicité seule permettait ces déductions logiques si chères aux géomètres grecs.
Nous allons voir combien dans les géométries déduites de la géométrie d'Euclide, l'objet géométrique est premier et combien le système de mesure logique mis en place par Euclide a marqué la construction des mathématiques.

Ce système de mesure logique fut mis au point avec des connaissances élaborées sur 3 continents. Il reste unique dans l' histoire de l' Humanité. Aujourd'hui la géométrie est universelle.

Remarque sur la géométrie et l'expérience :
La géométrie d' Euclide comporte :
un tiers de figure
un tiers de nombre
un tiers de logique
et un tiers de ....
Non, on s'arrête là. Tout est en place.
Un premier résultat : cette géométrie reprend pour ses 2 premiers tiers les travaux et méthodes des " tendeurs de ficelles " égyptiens ou babyloniens.
Aussi, à priori, le propos d' Einstein sur la géométrie et l'expérience surprend.
Cette géométrie est fondée sur l'expérience, sur ces fameuses mesures de terrains (crues du Nil). Si ses objets sont bien des créations de l'esprit, il est moins surprenant qu'ils s'adaptent aux objets de la réalité puisque ces objets et cette méthode furent inventés pour mesurer des étendues.

(à suivre).

LE PROBLEME DE L'ESPACE , DE L'ETHER ET DU CHAMP PHYSIQUE

La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique .
Puisque dans cette dernière , le concept d' espace a déjà une fonction fondamentale , établissons et étudions ce concept .
Deux façons d' appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes .
La première méthode s' appelle l' analytique logique .
Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d' emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité , nous la trouvons et la respectons dans la mathématique .
Mais cette sécurité s' obtient au prix d' un contenant sans contenu .
Car les concepts ne correspondent à un contenu que s' ils sont liés , même le plus indirectement aux expériences sensibles . Cependant aucune recherche logique ne peut affirmer cette liaison . Elle ne peut être que vécue . Et c' est justement cette liaison qui détermine la valeur épistémologique des systèmes de concepts .
Exemple : un archéologue d' une future civilisation découvre un traité de géométrie d' Euclide , mais sans figure .
Par la lecture des théorèmes, il reconstituera bien l' emploi des mots point , droite, plan . Il reconstituera aussi la chaîne des théorèmes et même , d' après les règles connues , il pourra en inventer de nouveaux . Mais cette élaboration de théorèmes restera pour lui **un vrai jeu avec des mots , tant qu' il ne pourra pas " se figurer quelque chose " avec les expressions point , droite , plan , etc ...**
Mais s' il le peut et seulement s' il le peut , la géométrie deviendra pour lui un réel contenu .
Le même raisonnement s' applique à la mécanique analytique et en général à toutes les sciences logico-déductives .

Albert Einstein .
Etudes scientifiques

NON - CONTRADICTION ET ARITHMETIQUE

La seule contrainte du mathématicien serait la non - contradiction .
Celle-ci a posé problème particulièrement avec les paradoxes générés par la théorie des ensembles mais aussi dès l' Antiquité grecque . Voir les paradoxes de Zénon d' Elée, paradoxe de la flèche d' Achille etc ....
L' exposé d' Euclide ne comporte pas d' axiomatique des entiers naturels .
Kummer, au 19^{e} siècle, disait : "les nombres entiers sont un don de Dieu"
Dédekind et Cantor, vers 1880, ont construit axiomatiquement les corps **Q** et **R** à partir de l' ensemble **N** considéré comme intuitivement connu .

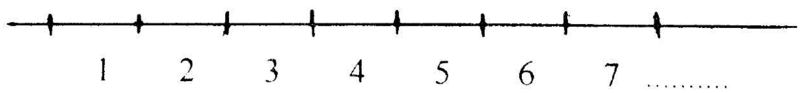
Remarque 1 : Est-il raisonnable, sans risque de contradiction, d' effectuer une construction axiomatique du savoir géométrique ET une construction axiomatique des nombres entiers utilisés en géométrie ?
Euclide semble avoir répondu par la négative à cette question .
L' objet géométrique , par sa mesure , suffisait pour construire le nombre .
Euclide a-t-il perçu le danger d' une contradiction entre un système d' axiomes pour la géométrie et simultanément des axiomes pour les nombres ?

Remarque 2 : Le choix est fait d' utiliser les objets géométriques comme objets premiers .

Dès lors, si l' on rapproche :

1) le postulat 2 : Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie
2) les définitions du livre 7 :
   a) l' unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une .
   b) le nombre est une multitude composée d' unités .

On ne doit pas être bien loin d' avoir une construction axiomatique de **N** (ou du moins de **N***) .

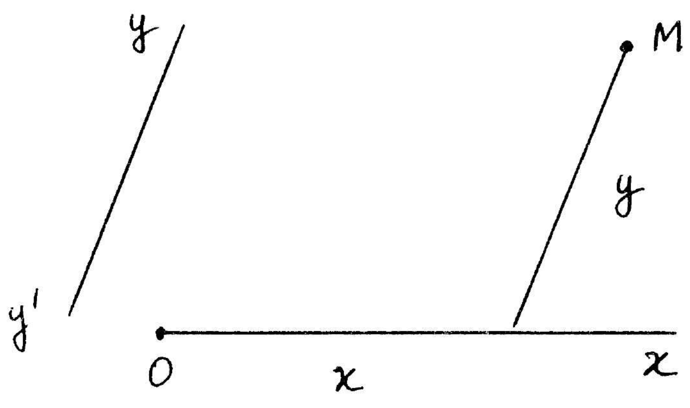


2 LA GEOMETRIE ANALYTIQUE

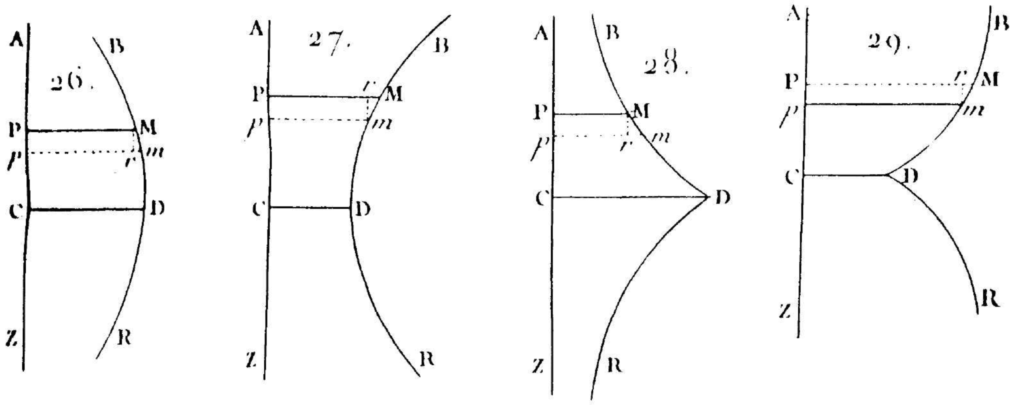
René Descartes 1596 - 1650

En 1650, la géométrie d' Euclide a 2000 ans .Transmise par la civilisation arabe, elle sert de base au travail des géomètres d' Europe de l' ouest .
Au 20ème siècle , tout esprit cartésien - ils seraient nombreux en France - raisonne selon les préceptes énoncés par Descartes dans son " discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences " à savoir: le doute, l' analyse, la synthèse et la complétude .
Ce " Discours de la Méthode " est suivi de " la Géométrie " seul livre de mathématiques écrit par Descartes et dont nous donnons les 2 premières pages de la 1 ère édition du 8 juin 1637 .
Descartes fait de la géométrie . Il cherche à représenter graphiquement les solutions des équations algébriques en x , y qu' il a contribué à mettre au point .
Dans le plan, Descartes privilégie 2 directions . Il reporte x (positif et donné) selon un demi - axe Ox et y (positif et calculé) selon une direction Oy .
Il calcule y en fonction de x . En reliant les points M(x, y) obtenus, il trace une courbe .

Fermat, avec lequel il est en relation épistolaire, parvient à montrer que les courbes du 2è degré correspondent aux bonnes vieilles coniques d' Appolonius. Le succès de la géométrie analytique est assuré . Un siècle sera nécessaire pour voir un repère cartésien complet avec ses 2 axes mais les repères cartésiens vont être à l' origine d' une nouvelle branche des mathématiques : l' analyse .

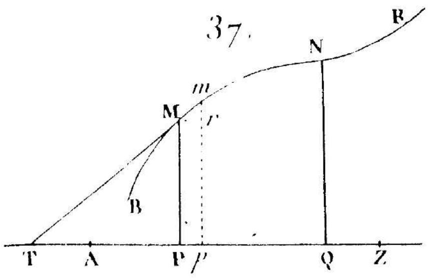


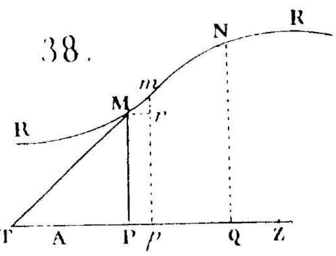
Exemples : En l' an 6 de la République , soit plus d' un siècle et demi après leur création , voilà ce que sont devenus les repères cartésiens dans le traité de calcul différentiel et de calcul intégral de Charles Bossut un rédacteur de l'encyclopédie.



Vous avez reconnu l' axe des abscisses AZ vertical et la courbe BMDR . La direction du second axe est ici implicite , par contre PM ou CD donne correctement la mesure du phénomène étudié ce que nous ne notons plus de nos jours (ce n' est peut-être pas un progrès)

Dans la même planche , voici les dessins 37 et 38 :





Les repères sont toujours incomplets mais l'axe AZ de la variable est horizontal. Ce dessin est plus conforme à nos habitudes

DU COTE DE L' ENSEIGNEMENT

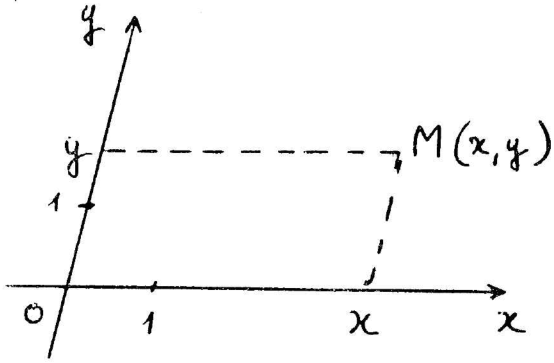
La méthode analytique .

La méthode synthétique va du connu vers l' inconnu que l' on recherche .
La " nouvelle " méthode dite analytique part de l' inconnue appelée x , met le problème en équations puis le résout allant ainsi de l' inconnue vers la solution , de l' inconnu vers le connu .

Quid des repères cartésiens ?

Ils permettent de repérer tout point M du plan par 2 mesures notées x et y .
Grande nouveauté : le repérage ne se limite plus à la seule figure considérée .
(Notons qu' il est aujourd'hui encore plus aisé de situer le point M dans le quadran où x et y sont positifs .)
Au niveau du lycée, la réussite des élèves est assez bonne en " analyse " car la logique intervient peu de façon explicite . A l' exception du théorème de variation d' une fonction , l' essentiel du travail consiste en des calculs algébriques .
Dans le " Journal de mathématiques élémentaires " , au début du 20ème siècle , l' étude des variations d' une fonction se situe en algèbre (voire en trigonométrie) ; Il n' y a pas de rubrique " analyse " !
(Il n' y a pas non plus de calcul intégral)
Dans l' étude des variations d' une fonction , la figure disparaît ou plutôt apparaît automatiquement sur la calculatrice .
Ainsi l' essentiel du travail se fait au niveau du calcul algébrique dans les cas usuels : étude de fonction , intersection de courbes , tangente , asymptote , limite .
La résolution du problème se ramène à des calculs plus ou moins répétitifs .
La logique et la figure voient leurs parts réduites . Ceci facilite le travail des élèves mais les difficultés demeurent et sont loin d' être surmontées par tous .
D' autant que nous sommes en pleine géométrie ! Chut ! Ne pas dire !

A ses débuts dans l' enseignement, l' analyse revient au système de mesure pré-hellène , mesures de x , f(x) augmenté de la notion d' infiniment petit pour certaines mesures :pente de tangente , recherche d' asymptote ou étude des variations .
La figure n' intervient plus dans la construction de la solution des problèmes.
Le calcul infinitésimal a rendu cette figure secondaire dans le cours i.e. la construction du savoir .



GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

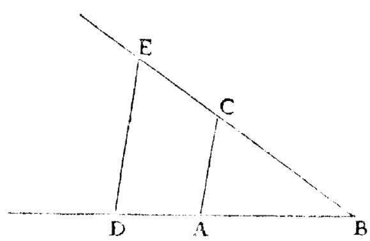
Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

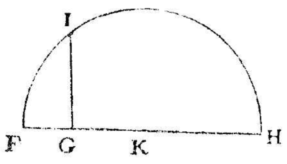


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.

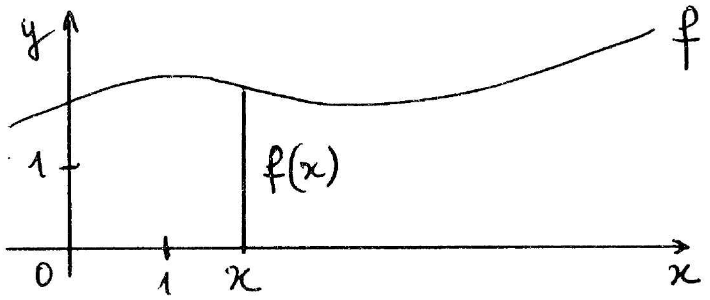


Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

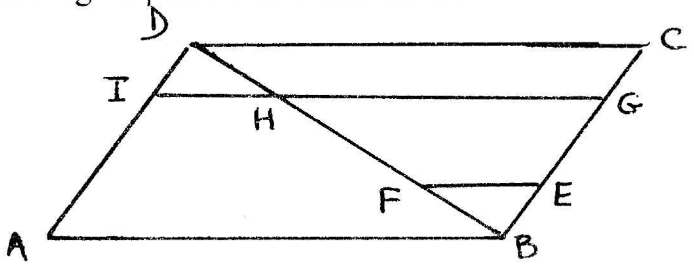
3 LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

NEWTON et LEIBNIZ vers 1670

A partir de la fin du 17^e siècle, les événements vont se précipiter et nous allons voir naître 8 géométries (pas moins et plutôt plus) en 3 siècles.
L' énoncé du problème est très simple. Depuis l' Antiquité grecque, notre système de mesure est en sommeil. En 1650, on sait mesurer l' aire d' un polygone, d' un cercle et assez mal l' aire d' une portion de parabole.
Il paraît raisonnable de remplacer un côté du polygone par une courbe DEJA MESUREE, i. e. la " hauteur " définie par une fonction puis de sommer ces valeurs de f(x).



Cavalieri, selon ce principe, met au point vers 1635, la méthode des indivisibles dans laquelle une surface plane est la " somme " des segments qui la compose.
Cette méthode visuellement fondée ne donne pas bien satisfaction côté mesure .Comment la réunion de segments d' aire nulle mais en quantité infinie peut-elle donner une figure plane d' aire non nulle ?



Considérant FE = IH pour chaque ligne, il obtient des sommations du type :

$$\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$$

Au 17^e siècle, la transmission des découvertes scientifiques est rapide et Leibniz aura connaissance des résultats de Cavaliéri mais aussi des résultats de nombreux géomètres qui travaillent sur le sujet : Mercator, Grégory, Barrow, Wallis ....
Cependant, cette réunion d' indivisibles n' est pas claire et Leibniz comme Newton devront prendre le problème par l' autre bout et rendre un segment infiniment petit ce qui est tout autant une escroquerie à priori.

Leibniz , tenons-nous en à lui, puise son inspiration dans 2 domaines .(au moins)

1) Le calcul des différences en arithmétique

Exemple : Soit la suite des cubes : 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 , ...

1ère différence : 7 , 19 , 37 , 61 , 91 , ...

2ème différence : 12 , 18 , 24 , 30 , ...

3ème différence : 6 , 6 , 6 , ...

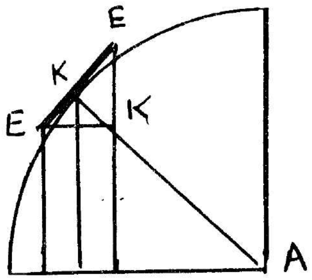
De ces manipulations de nombres entiers , il tire l' idée du calcul des différences . Encore doit-il passer du cas discret de l' arithmétique au cas continu des droites et des courbes .

2) Le triangle caractéristique de Pascal .

Eh oui , les nombres entiers et le triangle ....

Utilisé par Barrow en Angleterre , ce triangle caractéristique , apparaît dans le " traité des sinus du quart de cercle " publié par Pascal en 1658 .

EKE est le triangle caractéristique .



En 1673 , à la lecture des publications de Pascal , Leibniz déclare : " Sur une démonstration très facile dans son espèce , quel fut mon étonnement de voir que Pascal avait eu les yeux fermés comme par un sort " .

Dans ses recherches , Leibniz parvient à montrer , par un calcul " sommatoire " assez compliqué mais basé sur la figure qu' une somme de y^2 donne $1/3\ y^3$.

UNE APPLICATION DU THEOREME DE THALES !

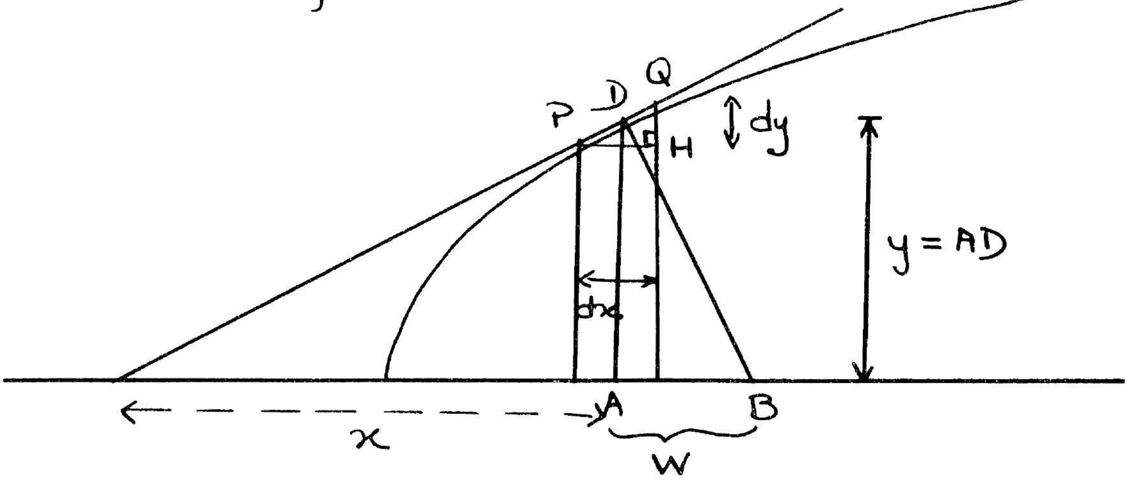
A cette époque , une méthode est exposée sur un exemple , disons , bien choisi . Cet exemple est ici un problème inverse des tangentes i.e. connaissant les tangentes à une courbe , déterminer cette courbe .

Ce problème a longtemps hanté les manuels sous la forme : Soit une propriété différentielle des tangentes ou des normales à une courbe , déterminer cette courbe .

Etudions l' exemple de Leibniz :

Soit à déterminer une courbe dont la sous- normale AB est inversement proportionnelle à l' ordonnée y des points de la courbe .

i.e. : $AB = \frac{K}{y} = w$ avec $k > 0$



En un point D (x , y) de la courbe , Leibniz applique le théorème de Thalès au triangle (caractéristique) " infiniment petit " PQH et au triangle DAB qui lui est semblable .

Il obtient : $\frac{HQ}{PH} = \frac{AB}{AD}$ soit aussi ; $\frac{dy}{dx} = \frac{w}{y}$

Les calculs donnent : $y\,dy = w\,dx$

$$y\,dy = k\,dx$$

$$y^2\,dy = k\,dx$$

$$dx = \frac{1}{k}\,y^2\,dy$$

et comme il sait sommer y^2 en $y^3/3$ il obtient en sommant :

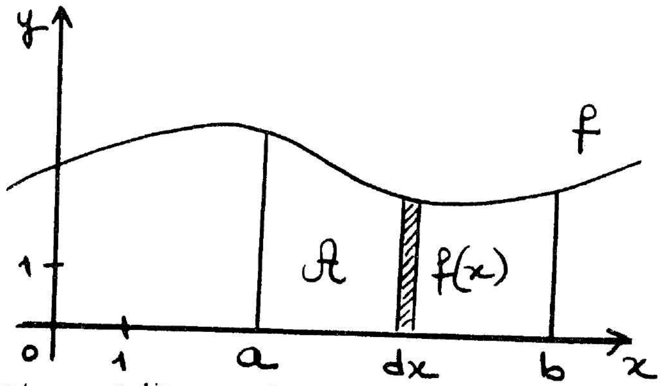
$$x = \frac{1}{3K}y^3$$

Pour nous cela donne : $3\,k\,x = y^3$ et $y = \sqrt[3]{3\,k\,x}$

dont on vérifiera que la sous-normale est bien en $\frac{K}{y}$

Résumé : Peu rigoureuse application du théorème de Thalès sur un exemple , le calcul sommatoire de Leibniz (et le calcul des fluxions de Newton en physique) va connaître un immense succès dès son premier siècle d' existence .

Par affinages successifs , il donnera :



<===> $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

où F est une primitive de f

Autrement dit , quand on remplace un côté d' un triangle par la courbe d' une fonction f et que l' on sait par là même mesurer les " indivisibles " de la surface , alors on sait calculer l' aire de cette surface , mesurer cette surface.
Comment le fait-on ?
En découpant la surface en rectangles élémentaires d' aire f(x) dx que l' on somme ....!!

4 LA GEOMETRIE PROJECTIVE

Ses origines remontent au moins à la Renaissance italienne et probablement plus loin . Les peintres du Quattrocento recherchent une représentation scientifique du monde sur leurs tableaux , leurs peintures .
L' usage d' une boîte noire et de divers systèmes de visée - grilles , ficelles - permettent aux peintres **une meilleure projection de l' espace sur leurs toiles .**
Citons dans l' école florentine du Quattrocento :

Brunelleschi (1377 - 1446)
Ghiberti (1378 - 1455)
Donatello (1386 - 1466)
Alberti (1404 - 1472)
Ucello (1397 - 1475)

La peinture d' Ucello est particulièrement caractéristique de cette recherche d' une perspective dans le but de mieux décrire l' espace .

Della Francesca (1410 - 1492)
Léonard de Vinci (1452 - 1519)

et les traités de perspective de Della Francesca en 1470 ,
d' Alberti en 1511
mais aussi d' Albert Dürer en 1525 .

L' étape suivante est marquée par le lyonnais Gérard Desargues (1593 - 1661) - architecte - et son " Brouillon Project " .
Il étudie , en partant des traités d' Appolonius , le passage du " relief " au " plan " et les " événements des rencontres d' un cône avec un plan " .
Toutes ces études se situent dans le domaine des constructions géométriques par projections . Ensuite le dessin technique prend le pas sur l' art avec la géométrie descriptive de Monge vers 1800 .
Il faut attendre le 19^{e} siècle pour parvenir à mieux unifier ces méthodes et principes de représentation de l' espace sur une feuille autour du groupe projectif et de la géométrie projective moderne dont les études se situent cette fois dans un tout autre domaine : **les transformations géométriques structurées par les groupes algébriques .**
On mesurera (sic) l' évolution de la géométrie projective passant des constructions géométriques du 15^{e} siècle aux groupes de transformations du 19^{e} siècle .
Cette évolution mérite de plus amples développements .

5 LA GEOMETRIE DESCRIPTIVE

Après de remarquables études , Gaspard Monge (1748 - 1818) se voit confier un poste d' enseignant de physique dès l' âge de 16 ans . Passionné par le dessin technique , il crée une nouvelle technique géométrique dans ses 9 leçons de l' Ecole Normale .
Il énonce : " la géométrie descriptive sert à représenter sur une feuille de dessin , qui n' a que 2 dimensions , tous les corps de la nature qui en ont 3 , pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement ".
Ainsi le principe de la géométrie descriptive est de projeter un " objet rigoureusement défini " sur 2 plans perpendiculaires , un plan de base horizontal et un plan frontal vertical , plans se coupant suivant la ligne de terre .
Cette méthode permet d' avoir 2 vues en vraie grandeur de l' objet . Pour ce qui nous intéresse , nous retiendrons :

1) Monge reprend un principe de projection proche de celui des repères cartésiens .

2) La géométrie est une méthode de construction .

3) La partie mesure des objets reste implicite . Monge ne mesure pas ses objets avec des nombres mais bien sûr cherche à obtenir des résultats métriques avec de vraies grandeurs sur les plans de projection .

4) La partie logique de la géométrie reste aussi implicite même si le raisonnement est sous-jacent .

5) La géométrie descriptive est restreinte aux " corps rigoureusement définis " i.e. les objets de la géométrie (et pas les objets de la nature).

A l' aube de la révolution industrielle , la géométrie descriptive , inventée par un des créateurs de l' école Polytechnique , connaîtra un franc succès .
Bien que la partie mesure et la partie logique restent implicites , elle donne incontestablement une bonne vision dans l' espace , une bonne description des objets étudiés.

Page suivante , un problème de géométrie descriptive extrait du " Journal de mathématiques élémentaires " de Juillet 1911 .

7407. — *La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille.*

Une droite de front F a pour trace horizontale un point situé à 10^{cm} en avant de xy et à 10^{cm} à gauche du grand axe zz' de la feuille ; de plus, la projection verticale de F, dirigée vers la droite et au-dessus de xy, fait avec xy un angle de 30°.

La droite F est l'axe d'un cône de révolution dont le sommet se projette à 10^{cm} à droite de zz', et dont le demi-angle au sommet vaut 30°.

On considère le tronc de cône obtenu en coupant ce cône par deux plans perpendiculaires à son axe, menés à gauche du sommet, et à des distances de ce sommet égales à 5^{cm} et 15^{cm}.

Représenter par ses deux projections la partie du volume de ce tronc de cône située au-dessus du plan horizontal de projection et au-dessous du plan symétrique du plan de la grande base du tronc par rapport au plan horizontal qui contient le centre de cette base.

On fera la distinction des parties vues et cachées en supposant le cône opaque.

Le cône a un plan tangent horizontal. On obtient sans difficulté ses contours apparents en menant des points s et s' des tangentes aux contours apparents de même nom de la sphère inscrite (o, o').

La projection verticale du solide restant se compose de l'hexagone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'o'\varepsilon'$. La projection horizontale se compose, outre les contours apparents du cône, de l'ellipse projection horizontale du cercle projeté verticalement en $\alpha'\beta'$, des arcs d'ellipse projection de $o'\delta'$, et de deux arcs de parabole, dont les projections verticales sont les droites $o'\varepsilon'$ et $\gamma'\delta'$.

Détermination d'un point quelconque et de la tangente en ce point. — Toutes ces sections peuvent être considérées comme perspectives de l'une d'elles, par exemple du cercle section par le plan de bout $o'\delta'$. Ce cercle se rabat sur un plan de front autour de la droite GG'. Le point a' est rabattu en a'_1, d'où sa projection horizontale a, telle que

$$ai = a'a'_1.$$

Les intersections de la droite $(sa, s'a')$ avec les plans de bout $o'\varepsilon'$ et $\alpha'\beta'$ donnent les points (m, m') et (n, n') des sections du cône par ces plans.

Les tangentes s'obtiennent de même : la tangente en (a', a) au cercle de base est rabattue suivant a_1a_2 ; la droite $(s't_2, sa)$ rencontre les plans de bout $o'\varepsilon'$ et $\alpha'\beta'$ en t et θ' d'où les tangentes mt, $m't$, et $n\theta$ $n'\theta'$.

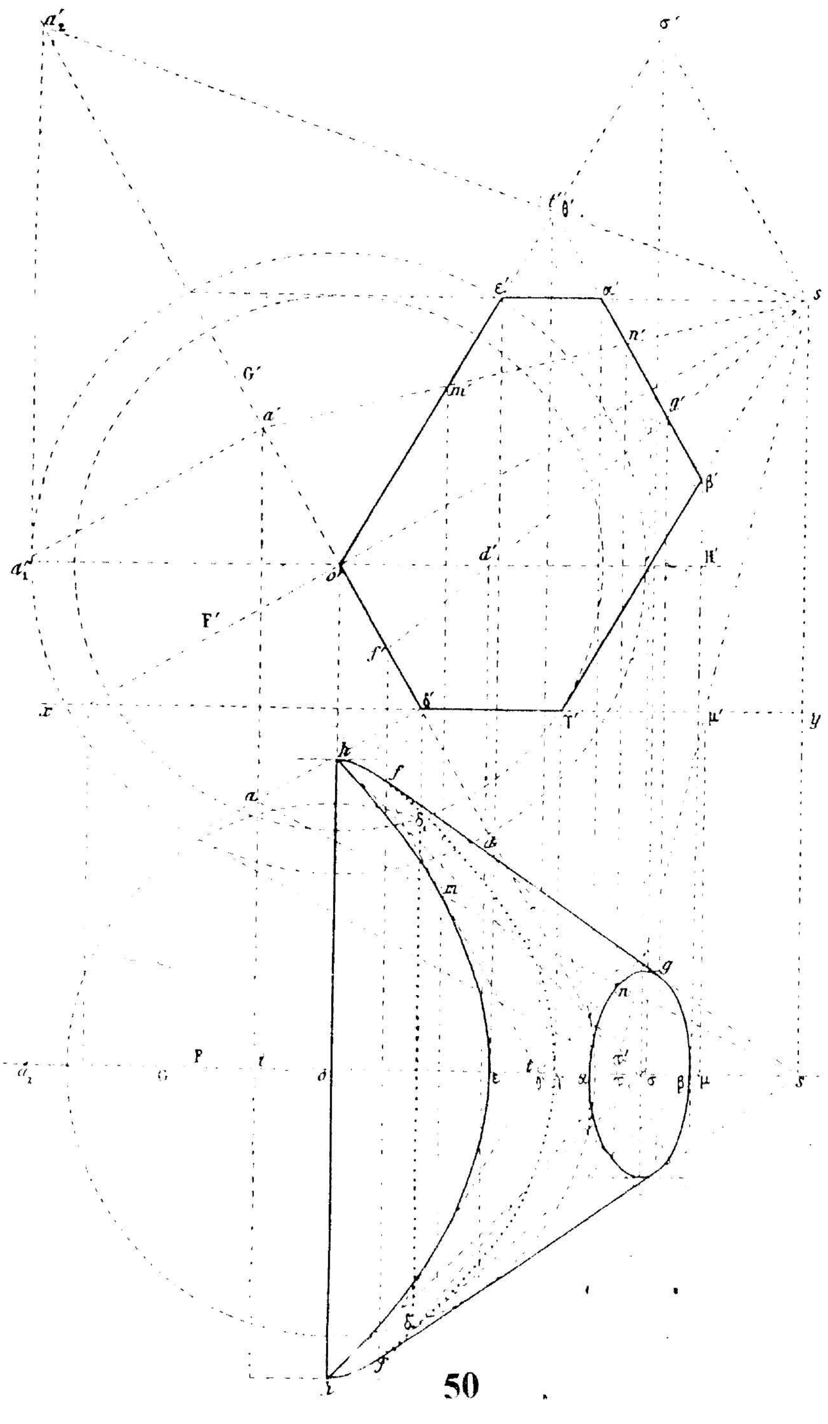
Points remarquables. — 1° *Points sur le contour apparent horizontal.* La droite sd tangente à la sphère inscrite touche cette sphère au point d, dont la projection verticale est d dans le plan horizontal H' du centre. La droite sd, $s'd'$ rencontre les plans des bases en (g, g') et (f, f'), qui sont les points cherchés.

2° La détermination des autres points remarquables et des tangentes en ces points se fait par la méthode indiquée plus haut : ainsi les tangentes en (δ, δ') sont $\delta\tau$, $\delta'\tau'$ et $\delta\mu$, $\delta'\mu'$.

Visibilité. — On voit facilement que l'ellipse $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ est vue en projection horizontale, ainsi que l'arc de parabole ε. L'ellipse projection du cercle de base est vue dans la portion hf ; la portion $f\delta$ est cachée, ainsi que l'arc de parabole de sommet γ. Il en est de même de $\delta\delta_1$, intersection des plans des deux sections.

(GABRIEL ROUX, à Nîmes.)

Remarque. — On peut opérer beaucoup plus simplement. On sait en effet que le cône et le cylindre projetant horizontalement le cercle o se coupent suivant deux ellipses, situées par raison de symétrie dans des plans de bout (*Bases de Monge*). On pourrait prendre pour base du cône une de ces ellipses. Les constructions seraient très simples, car cette ellipse se projette horizontalement suivant le cercle o et verticalement suivant une droite.



ELEMENTS

DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. M. LEGENDRE,

AVEC ADDITIONS ET MODIFICATIONS,

PAR M. A. BLANCHET,

Ancien élève de l'École polytechnique,
directeur des études mathématiques de Sainte-Barbe.

TROISIÈME ÉDITION.

PARIS,

LIBRAIRIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT DE FRANCE,

RUE JACOB, N° 56.

1854.

En 1794 , la Convention demande à A . Legendre d' écrire un livre de mathématiques destiné à l' enseignement .Les " Eléments de géométrie " de Legendre seront un des livres de référence dans l' enseignementjusque vers 1850 .

Cette démonstration faisant intervenir la continuité serait elle aujourd'hui considérée comme une démonstration ?

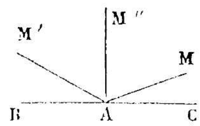
Legendre démontre le 4ème postulat d' Euclide !

LIVRE I. 7

PROPOSITION PREMIÈRE.

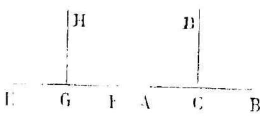
THÉORÈME.

Par un point pris sur une droite on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.



En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A : elle formera deux angles adjacents, MAC, MAB, dont l'un, MAC, d'abord très-petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre, MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position AM'' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.



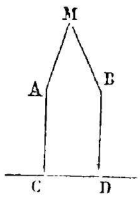
Corollaire. Tous les angles droits sont égaux.

Soient DC perpendiculaire sur AB, et HG perpendiculaire sur EF: je dis que l'angle DCB est égal à HGF. En effet, si l'on porte la droite EF sur AB, de manière que le point G tombe en C, GH prendra la direction CD; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite.

THÉORIE DES PARALLÈLES.

PROPOSITION XXI.

THÉORÈME.



Deux droites AC, BD, *perpendiculaires sur une même droite* CD, *sont parallèles.*

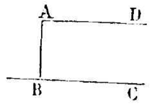
Car, si elles se rencontraient en un point M, par exemple, on pourrait de ce point abaisser deux perpendiculaires sur CD.

PROPOSITION XXII.

THÉORÈME.

Quand le 5 ème postulat devient un théorème ......

Par un point on peut mener une parallèle à une droite.



Du point A abaissez AB perpendiculaire sur BC, et au même point menez AD perpendiculaire sur AB les deux droites AD et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AB, seront parallèles.

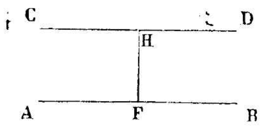
Admis et .... évident . (Ouf !)

On admettra en second lieu, comme une proposition évidente, que par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÈME.

Si deux droites CD, AB, *sont parallèles, toute droite* FH *perpendiculaire sur l'une d'elles* AB *est perpendiculaire sur l'autre* CD.

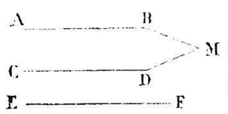


Il est d'abord évident que FH doit rencontrer CD ; autrement on pourrait par le point F mener deux parallèles à CD. Enfin CD est perpendiculaire sur FH ; car, si la ligne CD était oblique sur FH, on pourrait au point H élever une perpendiculaire sur FH, laquelle serait parallèle à AB, et l'on aurait ainsi deux droites passant par le point H et parallèles à AB.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÈME.

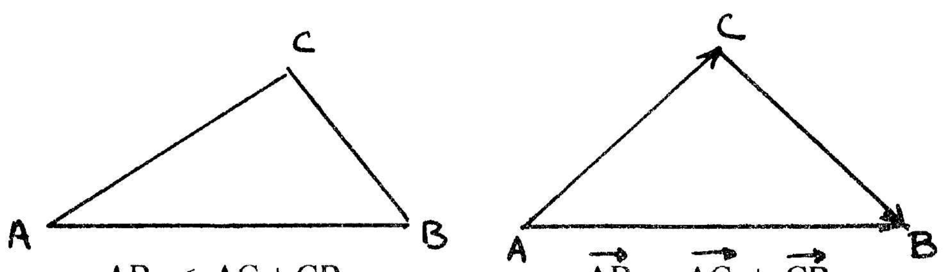
Deux droites AB, CD, *parallèles à une troisième* EF *sont parallèles entre elles.*



Car, si les droites AB, CD, se rencontraient en un point M, on pourrait par ce point mener deux parallèles à EF.

6 LA GEOMETRIE VECTORIELLE

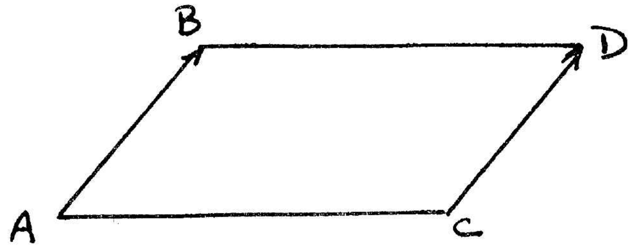
Le vecteur des mathématiques modernes.
Qu' est-ce qu' un vecteur ?
Comment comprendre simplement les malheurs - non encore résolus - du vecteur dans l' enseignement ?
Du côté des mathématiques :
En 1832 puis en 1844 , Grassmann , dans 2 mémoires , définit des grandeurs orientées de l' espace mais la mise au point de la notion de vecteur prendra la seconde moitié du siècle . Son invention est certes liée à la notion de force en physique mais aussi à la résolution des problèmes du 1er degré dans les espaces de dimension quelconque .
Ainsi d' une part , le vecteur cherche à représenter un phénomène naturel compliqué et , d' autre part , il doit être un élément d' un espace artificiel de dimension quelconque en algèbre linéaire .
Enfin et surtout , si l' on veut faire un dessin , ce vecteur , pour 3 points A , B , C non alignés transforme l' inégalité triangulaire des longueurs (le plus court chemin d' un point à un autre est la ligne droite) en une égalité pour la somme des vecteurs .



$AB < AC + CB$ $\qquad$ $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$

Clairement , la notion de vecteur ne se comprend en mathématique que comme élément d' une structure d' espace vectoriel ce qui va poser problème lors de son introduction dans l' enseignement .
Du côté de l' enseignement :
Avec beaucoup de retard , les vecteurs vont rentrer massivement dans l' enseignement secondaire et - forcément - comme élément d' un espace vectoriel .
Comment faire autrement ?
Malheureusement , cette structure correspond à un stade avancé de la construction de l' espace chez le jeune , aussi les concepteurs des maths modernes ont cherché un " biais " d' apprentissage .
Ce fut la " géométrie du parallélogramme " et l' équipollence (si !) des bipoints utilisant seulement le stade N° 1 de Piaget .
(Ni repère cartésien , ni structure) .

$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



L' apprentissage se poursuivait par un rude passage aux espaces vectoriels dès la seconde .

Pour comprendre la genèse et l' histoire de la réforme dite des " maths modernes " lire l' excellent article de B. Charlot dans les publications de la commission inter - IREM Histoire des maths .

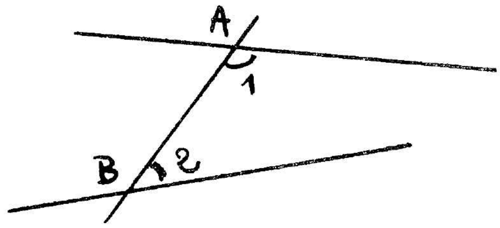
Aujourd'hui le calcul vectoriel reste dans les programmes du secondaire sans la notion de structure . Nous sommes ainsi revenus à un stade médian - au sens de Piaget - déduit du repérage du plan . Nous ne sommes plus restreints à la " géométrie du parallélogramme " mais nous n' avons plus droit aux structures algébriques .

7 LES GEOMETRIES NON - EUCLIDIENNES

Riemann (1826 - 1866)
Lobatchevski (1793 - 1856)

Rappelons les 5 postulats de la géométrie selon Euclide .
Trois postulats de construction :
1) De tout point à tout autre point , on peut tracer une ligne droite .
2) Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment .
3) Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence .
Un postulat d' égalité de figures :
4) Tous les angles droits sont égaux entre eux .
Le postulat d' Euclide :
5) Si une sécante rencontre 2 autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à 2 droits , ces 2 droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à 2 droits .

$\hat{A}_1 + \hat{B}_2 <$ 2 droits



Reformulé au 18^{e} siècle sous une forme équivalente : Par un point n' appartenant pas à une droite , il passe une seule parallèle à cette droite .
Cette formulation ouvre la voie aux géométries non - euclidiennes .
(D' où l' importance de l' écriture ...)
Chaque école mathématique depuis Euclide a eu l' impression que le 5^{e} postulat devait pouvoir se démontrer à partir des 4 précédents . Après de nombreux échecs, , il restait la possibilité de remplacer cet axiome par un autre .
Lobatchevski choisit : Par un point n' appartenant pas à une droite , il passe une infinité de parallèles à cette droite .
Conséquence : La somme des angles d' un triangle est alors inférieure à 180 ^{d} .
Riemann choisit : Par un point n' appartenant pas à une droite , il ne passe pas de parallèle à cette droite .
Conséquence : La somme des angles d' un triangle est alors supérieure à 180 ^{d} .
Ils développèrent de nouvelles géométries parfaitement logiques mais moins naturelles .
La grande nouveauté est liée à la nature de l' espace qui dépend de la géométrie mise en place . La géométrie ne se contente plus de mesurer l' espace , elle " définit " cet espace .

D' où la notion de courbure de l' espace et les idées sur la relativité développées à la suite de l' invention de ces nouvelles géométries .
Les géométries dites non - euclidiennes conservent quand même 4 des 5 axiomes d' Euclide et restent euclidiennes à 80 % .
La description de l' espace attachée à ces géométries semble bien ne pas correspondre à l' espace dans lequel nous vivons . En ce sens , ces géométries sont non-euclidiennes .
Mais doit-on se fier à l' apparence où faire confiance aux informations données par les modèles mathématiques ?
Nous laisserons la conclusion à Poincaré : " Imaginant un monde sphérique conforme à la géométrie de Lobatchevski , Poincaré dit : "**Des êtres qui y feraient leur éducation trouveraient sans doute plus commode de créer cette géométrie , qui s' adapterait mieux à leurs impressions .**
Quant à nous , en face de ces mêmes impressions , il est certain que nous trouverions plus commode de ne pas changer nos habitudes ".

Superbe !

8 LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS OU GEOMETRIE DE SITUATION.

En janvier 1980 , Griess a explicité le 26^{e} et dernier groupe sporadique (groupe fini simple) - le monstre de Fisher - comme étant un groupe de transformations géométriques dans un espace de dimension 196 883 . Ce groupe a environ 8×10^{53} éléments - environ c' est- à-dire à 5×10^{52} près ....)

Il existe entre les diverses parties de toute figure géométrique 2 sortes de rapports : les rapports de grandeur et les rapports de position .

Lazare Carnot.

L' objet de la géométrie considérée d' une manière générale est d' étudier les propriétés des corps sous le rapport de leur étendue ou de leur configuration ..... Malgré la distinction que nous venons d' établir entre ces 2 sortes de propriétés , on sent toutefois qu' elles ont entre elles la dépendance la plus intime et que souvent celles d' une espèce pourront conduire immédiatement à celles de l' autre . On a constamment réuni dans les recherches purement géométriques ces deux genres de propriétés parce que , en effet , il n' est aucun moyen de les isoler d' une manière absolument parfaite .

Poncelet 1818

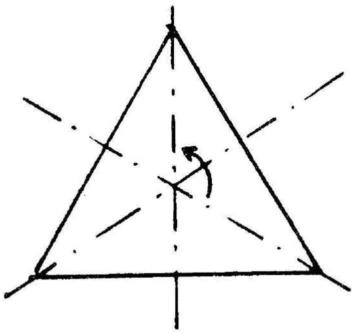
Les géométries descriptive et projective ont ouvert des voies dans l' étude de l' espace , sa description . Le dessin technique est nettement lié à la géométrie descriptive . Le dessin d' art et l' architecture sont liés à la géométrie projective . En ce début de 19^{e} siècle , la géométrie améliore ses méthodes pour décrire l' espace et le ramener au plan de la feuille de papier, que ce soit celle de l' ingénieur ou celle de l' artiste .

La notion de transformation , de déplacement de points , ne va apparaître qu' au cours du 19^{e} siècle .

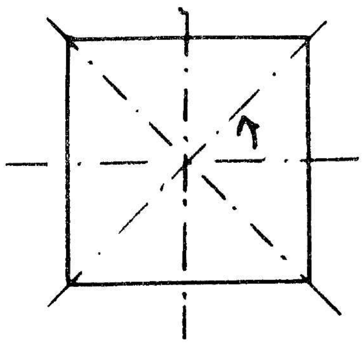
Le théoréme de Thalès aurait pu amener à la notion d' homothétie , la mesure des angles aurait pu mener à la notion de rotation , tel ne fut pas le cas . Lazare Carnot , ingénieur et militaire , élève de Monge , et Poncelet , ingénieur et aussi élève de Monge furent des précurseurs dans la géométrie de position . Celle-ci doit beaucoup à Monge et à la technique .

Les travaux du célèbre Evariste Galois mort en duel à 20 ans et 7 mois après avoir trouvé la solution du problème de la " Résolubilité des équations par radicaux " datent de 1830 . Ces travaux furent " enterrés " par l' Académie et il fallut attendre 1870 - 1872 pour que Jordan les exhume .Galois avait eu l' idée des groupes finis (utilisés sur les racines d' une équation) .

Klein imagine son programme d' Erlangen sur une classification des géométries . Les transformations géométriques sont enfin étudiées dans le corpus mathématique . Très curieusement , cette étude est une application des ......groupes algébriques aux invariants d' une figure géométrique !



Groupe des isométries
du triangle équilatéral



Groupe des isométries
du carré .

UNE CONCLUSION

Les équations algébriques trouvent un aboutissement dans les équations de Maxwell en 1860 .
Les structures algébriques trouvent très vite un (premier) aboutissement dans la théorie de la relativité (groupe de Lorentz) et tous les usages des groupes en physique .Lire à ce sujet le chapitre "les groupes prennent le pouvoir " du livre de Lochak intitulé : " la géométrisation de la physique " .
Les structures algébriques vont aussi permettre au groupe Bourbaki (toujours les structures ....) de s' exprimer brillamment à partir de 1930 .

Pendant ce temps , l' enseignement secondaire prend beaucoup , beaucoup de retard et ronronne sur la géométrie d' Euclide réduite depuis le 19^{e} siècle à la " géométrie pure ".
Le réveil sera brutal .

VERS LES GEOMETRIES ABSTRAITES

Revenons à Einstein qui disait : " Comment se fait-il que la mathématique qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience s' adapte d' une si admirable manière aux objets de la réalité ? " .
Cette question nous surprend si l' on considère les travaux des arpenteurs de l' Antiquité créateurs du système de mesure sur lequel furent bâties les mathématiques . Mais quelle est la situation à la fin du 19^{e} siècle , juste avant l' apparition de la théorie des ensembles ? Les mathématiques sont en train de perdre leur ....unité et en particulier le nombre des géométries , pourtant sensées décrire un unique monde , croît dangereusement .
Retour à l' unité : Klein , Lie et quelques autres réunifient les géométries autour de la notion de groupe .
A chaque groupe de transformation , ils attachent une géométrie .

1) Géométrie métrique (pléonasme)
Les translations , les rotations et les symétries forment le groupe des isométries laissant " invariantes " les figures au sens de ce groupe (loi interne) . Les isométries ou mouvements forment **le groupe principal de la géométrie métrique** .
L' espace cartésien est associé à cette géométrie .

2) Géométrie euclidienne
Les similitudes (y compris les isométries) forment un groupe laissant invariantes les figures au sens de ce groupe .
Le groupe des similitudes est **le groupe principal de la géométrie euclidienne** .
L' espace euclidien (ou cartésien) est associé à la géométrie euclidienne .

3) Géométrie affine
Le groupe des affinités ou groupe affine est , bien sûr , le groupe principal de la géométrie affine .
L' espace associé est l' espace affine ou arguésien (Desargues) .

4) Géométrie projective
Le groupe projectif est le groupe principal de cette géométrie . Ses transformations laissent invariantes les figures dans ce groupe .
L' espace projectif , avec point à l' infini , lui est associé .

En 1872, Klein généralise cette méthode dans le fameux programme d' Erlangen .

Une géométrie abstraite est définie par :
Définition : Soit une variété V d' éléments appelés points .
Soit un groupe G de transformations opérant sur les points de V
Alors ===> la géométrie définie sur V par le groupe (principal) G est formée des propriétés de l' espace V **invariantes** par G

Chaque géométrie (V , G) structure un espace associé .
La nouveauté est d' importance car la géométrie , à travers les transformations autorisées , **AGIT** sur l' espace . La géométrie ne se contente plus de mesurer des objets , elle les transforme .Or , le théorème de Thalès n' a pas donné à son auteur l' idée d' homothétie . La rotation n' est pas plus étudiée dans l' Antiquité et la symétrie est une propriété interne d' une figure , pas une transformation !
Homothétie , rotation , symétrie ne deviennent des transformations qu' au 19è siècle , pas avant !
Encore cette métamorphose ne s' effectue- t-elle qu' avec moult précautions que vous aurez notées : structure , invariance , loi interne . Les garde-fous sont nombreux . (Sans oublier les 2 propriétés d' un groupe : élément neutre et pouvoir revenir en arrière avec une transformation réciproque !).
Que de précautions pour se décider à transformer !
Voilà pourquoi Einstein évoque " une " géométrie indépendante de toute expérience. L' espace de la relativité est structuré par le groupe de Lorentz .
Aucune expérience n' avait eu lieu mais une géométrie abstraite décrivait son espace .
Abstraction , abstraction , nous prenons la direction des maths dites modernes et de quelques malheurs de l' enseignement ....
Peu à peu , les avancées du savoir font disparaître la figure au profit des calculs vectoriel et matriciel ou des groupes voire des raisonnements .
Jusqu' à ce qu' un Mandelbrot fasse resurgir la figure comme élément fondateur d' une " nouvelle " géométrie . Et puis Einstein pouvait-il réellement se passer de la géométrie d' Euclide ?
Et jusqu' où une géométrie est-elle abstraite ?

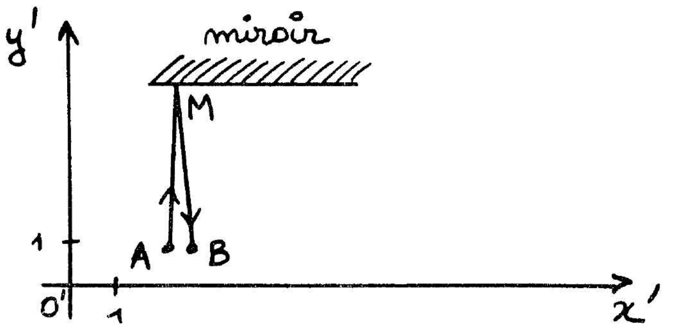
LE TEMPS EST RELATIF

Où l' on voit une application conjointe des 3 stades de l' épistémologie vue par Piaget .

1) Le théorème de Pythagore (encore !)
2) Les repéres du plan
3) Les déplacements

La théorie de la relativité est probablement la plus célèbre des théories scientifiques du 20^{e} siècle .
En 1905 , Einstein a 26 ans .
Depuis 1888 , les scientifiques savent , par les expériences de Michelson , que la vitesse de la lumiére est constante dans toutes les directions et ne s' ajoute ni ne se retranche dans 2 mouvement relatifs .
Einstein est physicien et doit obéir à l' expérience .
Il imagine , selon sa méthode habituelle , une expérience par la pensée devant tirer les conséquences des expériences de Michelson .
Cette expérience est plus facile à monter et avouons qu' il n' est pas loin de faire des mathématiques .
En physique , la distance d , la vitesse v et la durée t sont liées par la relation du 1er degré : $d = v.t$

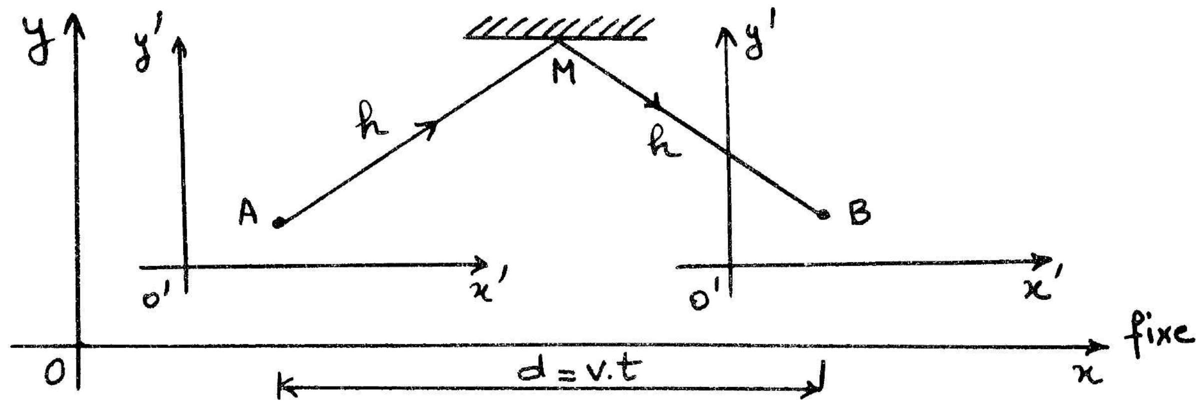
AM = α



Un rayon lumineux va de A à M puis de M à B parcourant la distance 2α pendant la durée t'

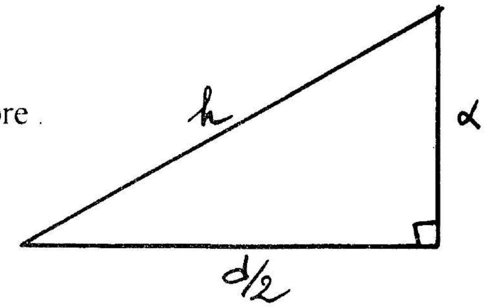
on a : $2\alpha = c\,t'$ où c est la vitesse de la lumière .

Plaçons ce repère x' o' y' dans un repère fixe x o y et faisons se translater le repère x' o' y' d' une distance d pendant le trajet du rayon lumineux . (il faut aller vite)



Pendant le déplacement de longueur d , d' une durée t le rayon lumineux parcourt la distance 2 h ce qui donne $2h = c\,t$ selon Michelson .

Appliquons l' inévitable théorème de Pythagore .



$h^2 = \frac{d^2}{4} + \alpha^2$

Remplaçons $h = c\,t$, $d = v\,t$ et $\alpha = \frac{c\,t'}{2}$

$$\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \frac{v^2t^2}{4} + \left(\frac{ct'}{2}\right)^2$$

$$c^2t^2 = v^2t^2 + c^2t'^2$$

$$t^2(c^2-v^2) = c^2t'^2$$

$$t^2 = \frac{t'^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Comme on pouvait s' en douter , cette célèbre relation - clairement du $2^{ème}$ degré - entre le temps dans le repère x o y et le temps dans le repère x' o' y' est une simple application du théorème de Pythagore

Pour le même mouvement , un observateur situé dans le repère mobile mesurera un temps t' inférieur au temps t du repère fixe . Il vieillira moins vite que l' observateur resté immobile.(d' où l' intérêt de bouger)

Pour ce qui nous concerne , 3 types de géométries interviennent , toutes 3 indispensables .

1) La géométrie d' Euclide (ou de Pythagore).

2) La géométrie analytique (pour se repérer)

3) la géométrie des transformations (pour le mouvement)

Laissons à Einstein la conclusion sur cette expérience théorique : " si la théorie de la relativité se révèle juste , les Allemands diront que je suis allemand , les Suisses que je suis suisse et les Français que je suis un grand homme de science . Si la théorie de la relativité se révèle fausse , les Français diront que je suis suisse, les Suisses que je suis allemand et les Allemands que je suis juif ".

L' APPRENTISSAGE DE L' ESPACE EN FRANCE EN 1994

La raison première de la géométrie est de mieux nous faire appréhender l' espace , un monde que nous n' avons pas créé . Pour ce faire , les géomètres ont " créé " des objets simplifiés qu' ils ont appris à mesurer et à étudier .
Comment un jeune français apprend-il la notion d' espace durant son cursus scolaire ?
Durant les 5 années d' école primaire , il apprend à construire les figures usuelles de la géométrie élémentaire et à mesurer des segments et des surfaces . Ce premier stade de l' épistémologie de Piaget est complété en 6ème et en 5ème : constructions , mesures et propriétés des figures .
Durant les 7 années de l' enseignement secondaire , l' apprentissage de la géométrie se centre sur les transformations du plan (sans la notion de groupe) par action sur des figures . Les notions de composition et de d' application réciproque sont abordées dans la seconde partie des études secondaires .
Cet apprentissage de la géométrie est complété par l' étude de l' analyse soigneusement séparée de la géométrie . Elle permet de préciser la notion de repérage dans le plan et dans l' espace tout au long de ces 7 années .
La géométrie analytique devenue Analyse avec le temps , deuxième stade de l' épistémologie de Piaget ne participe plus à l' étude de l' espace .
De plus l' apprentissage des stades 2 et 3 (celui-ci amputé de la notion de groupe) se fait simultanément et pour la majorité des jeunes l' apprentissage mathématique de la notion d' espace s' arrête là .Seule une toute petite minorité la poursuivra à travers l' étude des groupes et de l' algèbre linéaire complétant l' étude du stade 3 de Piaget . Cependant , pour ces derniers , la notion même d' espace et de géométrie disparaît au profit du calcul , matriciel ou vectoriel , dans l' algèbre linéaire .(1er degré : les seuls problèmes que l' on sache vraiment résoudre) .
Peut-être serait-il judicieux de remettre un peu d' intuition en algèbre linéaire laquelle deviendrait en quelque sorte de la géométrie linéaire .

Questions :

Dans le secondaire , ne devrait-on pas avoir en application l' étude des groupes de transformation des figures usuelles , triangle équilatéral , carré et cube dont la visualisation est facile et permet justement un bon apprentissage de la notion de transformation mais surtout du plan ou de l' espace ?
Dans le supérieur , ne devrait-on pas réinsérer l' algèbre linéaire plus clairement en géométrie ? D' autant que l' algèbre linéaire utilise , et pour cause , le vocabulaire de la géométrie : point , droite , plan !

9 LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

La géométrie est " l' art de raisonner juste sur des figures fausses " . Depuis leur création , les figures sont des objets idéaux . Leur dessin est une représentation imparfaite mais suffisante pour l' usage humain . Par contre , insistons , les mathématiciens sont tenus de raisonner juste ; ce devrait être une de leurs rares qualités . Plus la figure se complique , plus elle est imparfaite et ce qui devait arriver , arriva peu à peu . Les matheux ont continué à raisonner - plus ou moins juste - (voir la citation de Dieudonné) , sur des figures de plus en plus fausses puis plus de figure du tout comme en algèbre linéaire , dans R^n , où le dessin d' un pavé est bel et bien superflu (voire difficile pour $n > 3$) .
La géométrie algébrique fait encore mieux . Une difficulté de l' algèbre est l' existence ou non des racines d' une équation . Dans le corps des nombres complexes , **C** , une équation de degré n , a exactement n racines ce qui permet en théorie , de ramener toute équation à une factorisation du 1er degré :

$$(x- x_1)(x-x_2) \ldots\ldots(x-x_n) = 0$$

Le rêve du mathématicien .
Tout problème est découpé en n problèmes du 1er degré .Dès lors , au lieu de considérer les points de R^n à coordonnées réelles , il est plus " logique " (si !) de considérer les points de C^n à coordonnées complexes .
Par exemple , $x^2 + y^2 = 1$ est l' équation du cercle de centre (0 , 0) et de rayon 1 passant par le point A (1 , 0) .
$x^2 + y^2 = -1$ est l' équation du cercle de centre (0 , 0) et de rayon i passant par A (0 , i) .
(Ne pas faire de dessin)
La géométrie algébrique réclame une haute technicité . Cependant , elle reprend les méthodes de la bonne vieille géométrie euclidienne au niveau des courbes en y intégrant les résultats des structures algébriques .
Le théorème de Fermat (ça y est , c' est un théorème !) : $x^n + y^n = z^n$ est impossible en nombres entiers pour $n > 2$ est à priori un théorème d' arithmétique pure .Sa démonstration en 1994 est une victoire de la géométrie algébrique .
La démonstration donnée par Andrew Wiles en juin 1993 comportait des " trous " et sa longueur , de l' ordre de 1000 pages en y incluant certains résultats antérieurs ne permettait pas à une seule personne , même dotée de dons exceptionnels en mathématiques , de la vérifier . Les spécialistes nous assure aujourd' hui de sa consistance mais nous ne sommes pas près de la vérifier par nous - même . Comme pour les autres théorèmes cette démonstration sera améliorée , raccourcie , et rendue compréhensible par le plus grand nombre mais ces améliorations ont pris environ 2000 ans pour les théorèmes de Thalès et Pythagore , alors , combien de temps pour Fermat ?

Nous laisserons la conclusion à Dieudonné , grand prêtre (laïque) de la recherche mathématique française du 20è siècle et qui regrettait un jour , lors d' une émission de télévision de n' être compris ni par ses collègues de l' Académie des Sciences , ni même souvent par des collègues chercheurs d' autres branches des mathématiques : " On sait que malgré les efforts de Dédekind , Weber et Kronecker , le relâchement dans la conception de ce qui constituait une démonstration correcte , déjà sensible dans l' école allemande de géométrie algébrique des années 1870 - 1880 ne devait que s' aggraver de plus en plus dans les travaux des géomètres français et surtout italiens des deux générations suivantes .... les brillants succès obtenus contrastant avec le fait que , jusque vers 1940 , les successeurs orthodoxes de Dédekind s' étaient révélés incapables de formuler avec assez de souplesse et de puissance les notions algébriques qui eussent permis de donner de ces résultats des démonstrations correctes " .

LE PARADOXE DE BANACH - TARSKI

En cette fin de 19è siècle, les groupes de transformations et la théorie des ensembles génèrent de nouveaux paradoxes. Banach et Tarski sont deux brillants sujets de l' école polonaise de mathématique. Tarski s' intéresse particulièrement à la logique mais la démonstration - délicate - passe bel et bien par les groupes de transformations.

L' énoncé est simple : Vous prenez 2 boules (sphères pleines), par exemple une orange et la Terre. Alors ===> il existe une façon de découper la Terre pour la faire entrer dans l' orange !

(Pour la démonstration, non triviale comme déjà dit, voir le petit livre de Marc Guinot : le paradoxe de Banach - Tarski)
Essayons de préciser l' idée qui montre bien le lien entre l' espace qui nous entoure et le travail des mathématiciens qui cherchent à le décrire pour mieux le comprendre.
Cette idée est très simple. **Nous pensons bien connaître la droite réelle et plus précisément la MESURE de TOUS les sous-ensembles de cette droite rélle**.Une (in)certaine logique voudrait que la mesure des intervalles de R se prolonge à TOUS les sous-ensembles de **R** avec quelques propriétés usuelles.

1) La mesure d' un intervalle I = [a , b] est la longueur habituelle b - a.

2) La mesure de la réunion d' ensembles disjoints E_n est la somme des mesures des ensembles E_n.

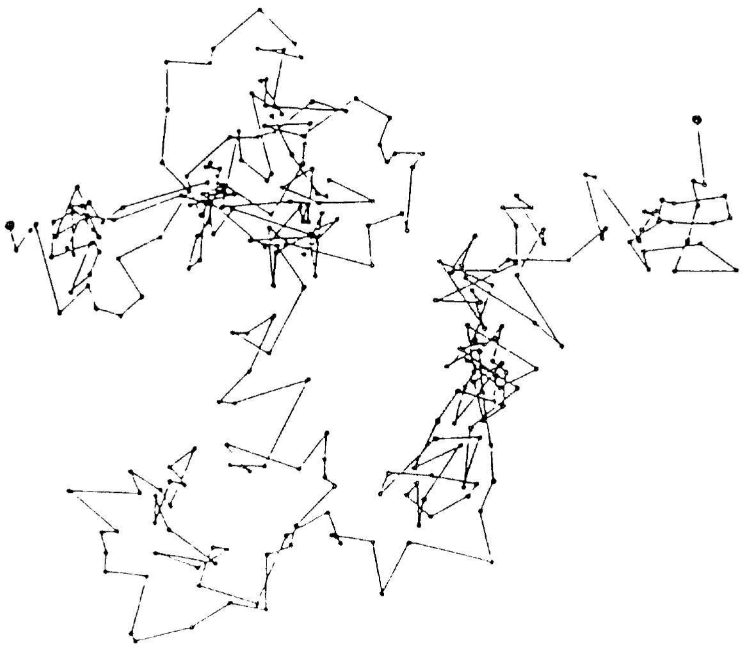
3) La mesure est invariante par translation. (il vaut mieux ....).

4) TOUTES les parties de la droite réelle ont une mesure.

Malheureusement cette hypothétique mesure universelle n' existe pas. (voir encore Guinot).
Seuls les ensembles pas trop éloignés des intervalles sont mesurables avec l' unité habituelle.
Ceci explique :
1) la possibilité de découper - en théorie - la grosse boule en sous-ensembles NON-mesurables qu' il sera loisible de faire entrer dans l' orange (vidée ou non).
2) les inévitables tribus et clans des cours du supérieur. Les intervalles ont l' esprit de tribu. Quand ils se réunissent entre eux, tout va bien : sortir de la tribu dépasse la mesure !

10 LA GEOMETRIE FRACTALE

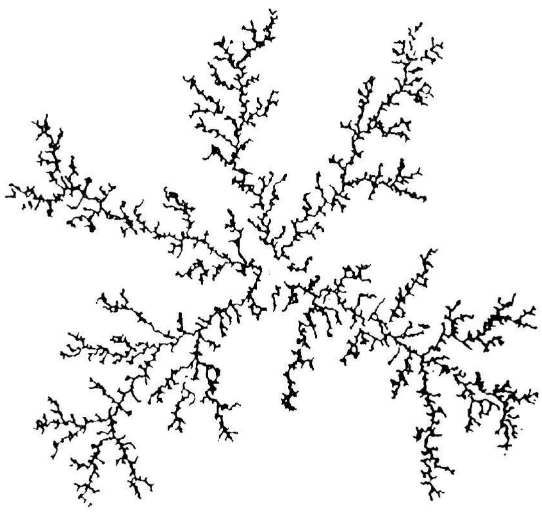
Les idées géométriques du créateur de la géométrie fractale , Benoît Mandelbrot, sont originales .
Le principe de base de la géométrie est de créer (?) des objets si simples qu' ils n' ont plus guère de points (sic !) communs avec les objets de la nature .
Conformément à ce qu' a dit Galilée , ces objets sont alors des intermédiaires permettant aux humains de comprendre la nature , l' espace dans lequel nous vivons . Mandelbrot cherche , à partir des objets géométriques à se rapprocher des objets de la nature , la côte de Bretagne étant le symbole de ceux-ci .
Mais les origines de la géométrie fractale , selon son créateur , remontent au mouvement brownien particulièrement étudié par Jean Perrin au début du siècle .



Mouvement brownien (approché) d' une particule

Aujourd' hui , s' approcher de la nature consiste à étudier des phénomènes complexes : diffusion dans un solide , turbulence , distribution des galaxies ou plus simplement recherche de modèles du relief terrestre car il semblerait bien , à y regarder de plus près , que la Terre ne soit pas tout-à-fait une boule .

Diffusion dans un solide



Les mathématiciens ont , avant lui , exploité 2 méthodes pour " tendre " vers l' infini :
* Le postulat N°2 de la géométrie d' Euclide permet de tendre vers l' infini par juxtaposition de segments (unités) identiques .
* La géométrie différentielle de Newton et Leibniz permet de tendre vers l' infini par découpages successifs de ce même segment-unité ===> les infiniment petits.
* La géométrie fractale permet de tendre vers l' infini en tout point de l' objet par répétition des mêmes opérations sur tout l' objet de départ et non plus en un seul point comme dans les méthodes précédentes .

Le modèle pratique évoqué est la côte de Bretagne , découpée s' il en est , sur toute sa longueur . (la géométrie et l' expérience toujours ...)
Un modèle simplifié (les mathématiques toujours ...) est la courbe de Von Koch.

C1 C2 C3 et jusqu' à l' infini .

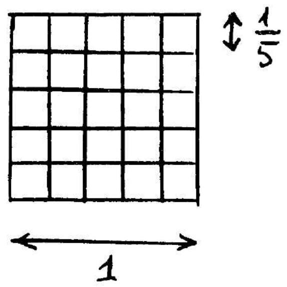
Mandelbrot définit une dimension pour ses courbes car leur " longueur " est infinie donc elles ne sont pas de dimension 1 .

$l(C_1) = 1$, $l(C_2) = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, $l(C_3) = 1 \times (\frac{4}{3})^2$,

$l(C_n) = 1 \times (\frac{4}{3})^{n-1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} l(C_n) = +\infty$

Ces idées d' une grande simplicité repartent une fois de plus du système de mesure primitif. Développées depuis les années soixante-dix pour le compte de la société I.B.M. par Mandelbrot, elles débouchent sur les images de synthèse .

<u>La dimension d' homothétie</u> :



En dimension 2 , une homothétie de rapport $\frac{1}{5}$ donne $5^2 = 25$ petits carrés .

i.e. $\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)^2 = 25$ ===> le plan est de dimension (euclidienne) 2 .

Généralisons : une homothétie de rapport $\frac{1}{N}$ en dimension D donne K petits objets selon la formule $\left(\frac{1}{\frac{1}{N}}\right)^D = K$

Dans la courbe de Von Koch , le rapport d' homothétie est $\frac{1}{3}$ et on crée 4 nouveaux objets ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^D = 4$$

D = ln4 / ln3 est la dimension d' homothétie de la courbe fractale de Von Koch .

UNE CONCLUSION PARMI TANT D' AUTRES

Un célèbre " A bas Euclide ! " de Dieudonné avait ponctué la réforme dite des " maths modernes " et son auteur avait vite regretté ses paroles prises un peu trop à la lettre. Il ne semble pas envisageable aujourd'hui comme hier de se passer de la géométrie d' Euclide et il semblerait même important de mieux la connaître pour éviter de graves déformations, par exemple de croire que la géométrie d' Euclide est une " géométrie pure ".

CONSTRUIRE des figures, MESURER ces figures, DEDUIRE des propriétés certaines de ces figures reste l' activité de base du mathématicien : voir par exemple la géométrie fractale.

Par contre, se limiter à la géométrie d' Euclide, serait une erreur tout aussi grave. Se priver des idées développées pendant 25 siècles, il n' en est même pas question ! Newton et Leibniz avaient appris les mathématiques dans les Eléments d' Euclide et dans les livres de leurs contemporains. Le 18 ^{e} siècle fut marqué par le développement fulgurant des calculs différentiel et intégral.
Ils permirent de résoudre de très nombreux problèmes de physique (cordes vibrantes, équation de la chaleur ...) que la géométrie d' Euclide n' aurait évidemment jamais permis de résoudre !

Si bien qu' à la fin du 18 ^{e} siècle Euler, D' Alembert, Lagrange et d' autres pensent que l' avenir des mathématiques paraît limité et qu' il est préférable pour les meilleurs esprits de se tourner vers d' autres sciences - la physique, la chimie - plus prometteuses ce que fera, par exemple Ampère.

Or au moins 4 géométries très novatrices vont apparaître au cours du 19 ^{e} siècle ! Ceci donne à réfléchir en matière de prédiction !

La géométrie, science en apparence " indépendante de toute expérience " mais " qui s' adapte d' une si admirable manière au objet de la réalité " a-t-elle encore des ressources insoupçonnées comme l' a montré la géométrie fractale ?

Ou bien le très logique système de mesure babylo- égypto- grec a-t-il donné tout ce qu'il pouvait donner ?

ET POUR QUELQUES GEOMETRIES DE PLUS ......

Pourquoi se limiter à 10 géométries ?

La géométrie affine :
A l' époque où la géométrie était construite à partir des structures vectorielles , il fallait bien , quand même revenir aux points .

La géométrie de Bolyaï :
Le hongrois Bolyaï (1775 - 1856) introduit en 1829 une " science absolue de l' espace " à ranger dans les géométries non-euclidiennes . Ce fut un précurseur .

La géométrie birationnelle de Riemann :

Vers 1850 , le visionnaire Riemann ouvre les portes de la géométrie algébrique moderne .

La géométrie discrète :

L' écran de l' ordinateur est un ensemble discret de points sur lequel on souhaite tracer les courbes représentatives de fonctions continues d'où la nécessité d'étudier cet espace discret , peut-être proche de la géométrie ...pythagoricienne !

La géométrie élémentaire :

" élémentaire " qualifie en général la géométrie d' Euclide

La géométrie imaginaire :

Lobatchevski (1793 - 1856) construit en 1826 une première géométrie non-euclidienne

La géométrie métrique :

Nous avons déjà rencontré ce joli pléonasme qui oriente vers les mesures et les isométries .

La géométrie pure
Le plus simple est ici de citer Dieudonné dans l' introduction de son cours de géométrie algébrique (PUF 1974): " En premier lieu , et contrairement à ce que l' on croit souvent, la Géométrie des Grecs est tout le contraire d' une Géométrie " pure ", c'est-à-dire d'où les calculs ont été éliminés le plus possible : une telle conception ne remonte qu'au 19è siècle ".
Existerait-il une géométrie impure ?

La géométrie supérieure :

Existerait-il une géométrie inférieure ?

Mais ce n' est pas fini ; loin de là :
La géométrie synthétique de Poncelet eût son heure de gloire au 19è siècle .

Les géométries subordonnées .

La géométrie réglée .

Les géométries cayleyennes .

La géométrie finie .

La géométrie infinitésimale directe .

La géométrie cotée : une cousine de la géométrie descriptive enseignée au 20è siècle .

Pour clore cette liste , non exhaustive , la revue La Recherche de décembre 1994 contient un article sur la géométrie symplectique (entrelacée) issue , elle aussi , des groupes de transformations et étudiée en cette fin de 20è siècle .

L' espèce humaine fait preuve de beaucoup d' imagination quand il s' agit d' étudier l' espace qui nous entoure .Heureusement !

EN RESUME

La géométrie d' Euclide , en proposant de construire , mesurer , déduire , comporte 3 composantes indissociables : la figure , le nombre , la logique . Qu' en est-il pour les " autres " géométries ?

GEOMETRIE	FIGURE	NOMBRE	LOGIQUE
	construction	mesure	déduction
AVANT EUCLIDE	X	X	
EUCLIDE	X	X	X
ANALYTIQUE	X	X	
DIFFERENTIELLE	X	X	X
DESCRIPTIVE	X		
PROJECTIVE	X	X	X
VECTORIELLE		X	X
NON-EUCLIDIENNE	X		X
TRANSFORMATIONS	X	X	X
ALGEBRIQUE		X	
FRACTALE	X	X	

Difficile , en fait , de ne pas mettre une croix partout !
Chaque géométrie utilise de façon explicite ou implicite ces 3 composantes . Une géométrie non- euclidienne utilise-t-elle les constructions ?
Non , elle est déductive par essence mais oui quand même , car ... une géométrie est-elle complète sans figure ?
La part implicite de la figure , comme en géométrie vectorielle , donne à réfléchir.
On ne peut dessiner un vecteur , mais.... que celui qui n' a jamais dessiner un vecteur me jette la première pierre .
Vieille histoire !

BIBLIOGRAPHIE 1

A part :

Michel Chasles : " L' Aperçu historique " .

Ce livre de 1837 réédité par l' IREM de Lille fut un livre de référence au 19^{e} siècle .

Emile Fourrey : " Curiosités geométriques " .

Livre de 1907 réédité en 1994 par la librairie Vuibert .
Il commence par une " Esquisse de l' histoire de la géométrie élémentaire ".
La première partie contient un chapitre sur le théorème de Pythagore.
La deuxième partie traite la " géométrie de mesure ".

Jean Dhombres : Nombre , mesure et continu (Cédic- Nathan)

Importante étude sur la notion de mesure en mathématiques commençant par une étude détaillée du livre 5 des Eléments d' Euclide .
D' un contenu moins élémentaire que les autres ouvrages , il traite aussi de la théorie ....de la mesure , des constructions des nombres réels et de la naissance de .... la logique au 20^{e} siècle !

BIBLIOGRAPHIE 2

LES CLASSIQUES :

COLLETTE : Histoire des mathématiques
DAHAN : Routes et dédales
DEDRON - ITARD : Mathématiques et mathématiciens
DIEUDONNE : Pour l' honneur de l' esprit humain
Encyclopédie Universalis : Article géométrie
IFRAH : Histoire universelle des chiffres
IREM : Maths au fil des âges
PETIT : Le géométricon (B . D .)
SERRES : Les origines de la géométrie

MAIS AUSSI :

CHASLES : L' aperçu historique
CONDORCET : Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain
DELACHET : Géometrie (Que sais-je ?)
DIEUDONNE :Cours de géométrie algébrique
EINSTEIN : La géométrie et l' expérience
GODEAUX : Les géométries
GUINOT : Le paradoxe de Banach- Tarski
HADAMARD :Leçons de géométrie élémentaire
MANDELBROT : La géométrie fractale
SMITH : The geometry of René Descartes .

FAUT-IL JETER EUCLIDE AUX ORTIES ?

QUESTION À

GEORGES LOCHAK, DIRECTEUR DE RECHERCHES (MÉCANIQUE QUANTIQUE) AU CNRS ET DIRECTEUR DE LA FONDATION LOUIS-DE-BROGLIE*

Bien sûr que oui et bien sûr que non ! Non, parce que nous vivons au milieu d'Euclide. Oui, parce que dans la physique théorique d'un niveau élevé, on n'obéit pas à Euclide.

Euclide a été le maître de notre vision du monde jusqu'au XVIIe siècle. Sa géométrie correspond avec une extraordinaire précision à toutes les mesures que nous sommes capables de faire à notre échelle, y compris les mesures astronomiques.

Pour ce qui concerne l'astronomie, ce n'est évidemment plus tout à fait vrai depuis la relativité. Mais la relativité ne concerne qu'une toute petite partie des mesures : une sonde comme *Voyager II*, qui se promène depuis de longues années à travers le système solaire, fonctionne avec la mécanique de Newton et la géométrie d'Euclide. C'est donc que cette géométrie ne se trompe vraiment pas beaucoup !

Le règne d'Euclide a duré deux mille ans et connaît son apogée avec Newton. Ce dernier, bien qu'il ait inventé le calcul différentiel et intégral, reste un géomètre : comme il ignore les procédés algébriques de ce calcul, il additionne des surfaces « euclidiennes » de plus en plus petites et s'en sert comme d'un tuteur pour faire tenir ses raisonnements. Les *Principia* de Newton, qui décrivent pour la première fois avec exactitude les mouvements des planètes autour du soleil, représentent l'ultime couronnement de la géométrie euclidienne.

La fin des «figures»

Tout change au XVIIIe siècle. Lagrange écrit un livre de mécanique céleste, qui rompt radicalement avec la géométrie. Lagrange annonce d'entrée : *« Il n'y aura point de figure dans cet ouvrage. »* Pas de figure, donc pas de géométrie et pas d'Euclide. Ce fut l'une des grandes ruptures dans la description mathématique des lois de la nature. Depuis lors, les mathématiciens et les physiciens en sont largement revenus et ne se sont pas privés de faire de petits dessins comme du temps de Newton !

En montrant qu'il était possible de faire de la physique sans géométrie, Lagrange a paradoxalement ouvert la voie à de nouvelles géométries : si Euclide n'était pas indispensable, il devenait légitime de chercher d'autres modèles géométriques. Les mathématiciens du XIXe siècle s'engouffrèrent dans la brèche et comprirent que la géométrie classique était une théorie physique comme une autre, érigée en système mathématique axiomatisé. Ils s'aperçurent que les principes d'Euclide s'appliquaient à l'espace qui nous entoure et aux phénomènes que nous connaissons mais qu'ils ne s'imposaient pas, qu'on adopte un point de vue logique ou physique. Riemann, vers 1860, réalise la première synthèse de toutes ces géométries.

L'explosion des dimensions

Riemann a donc libéré la notion de géométrie de celle qui avait été en vigueur pendant deux mille ans. La physique s'est ainsi mise à utiliser des espaces non euclidiens qui, en outre, ont un nombre quelconque de dimensions. Le cas le plus simple est celui de la relativité, qui utilise quatre dimensions, en ajoutant le temps aux trois dimensions de l'espace. [illegible] les théories atomiques, [illegible] des espaces qui ont des milliards de dimensions. Cela ne signifie pas que les atomes se promènent réellement dans de tels espaces ! Ce sont des espaces [illegible] dans lesquels la théorie raconte [illegible] physiques.

La théorie doit ensuite redescendre dans l'espace ordinaire qui est le nôtre, celui des expérimentateurs, pour leur suggérer de nouvelles pistes. La géométrie est ainsi devenue un instrument abstrait : un espace à n dimensions n'a aucune signification concrète, mais dans cet espace [illegible] ne les raconte dans notre espace à nous.

Cohabitation

Dans ce contexte, l'un des membres du célèbre groupe de mathématiciens français qui a pris le nom de Bourbaki avait dit : *« À bas Euclide ! »*. Il voulait dire : « à bas la réduction des mathématiques à la géométrie d'Euclide à l'école ». Il ne voulait pas enseigner Riemann dès l'école primaire ! Mais il trouvait qu'il fallait l'ouvrir sur des mathématiques plus actuelles. Dans l'enseignement primaire et secondaire, au nom des « maths modernes », on a supprimé la géométrie, l'intuition et toute la chair des mathématiques. On est déjà revenu de cet excès. La géométrie fut d'abord toute-puissante en physique sous sa forme euclidienne. Chassée de la première place par l'algèbre et l'analyse, son influence commença à décroître au point que Lagrange crut l'abolir. Mais nous voyons son retour, au début du XXe siècle, avec la relativité et la mécanique quantique. Il serait absurde de croire que la nouvelle géométrie a réfuté l'ancienne. Les historiens des sciences du début du siècle s'imaginaient les théories comme des poupées russes : la plus vieille théorie englobée par une plus récente, etc. Mais la nouvelle théorie n'englobe rien du tout ! Elle recouvre un tout petit bout de l'ancienne. Elle raconte des choses que la théorie ancienne ne décrivait pas mais, inversement, elle ne sait pas faire certaines choses que la théorie ancienne savait faire. Et Euclide, s'il ne suffit plus, n'est pas près d'être détrôné.

> LAGRANGE, AU XVIIIE A OUVERT UNE BRÈCHE : SI ON POUVAIT SE PASSER D'EUCLIDE IL DEVENAIT LÉGITIME DE CHERCHER D'AUTRES MODÈLES DE GÉOMÉTRIE

[illegible]

*Auteur de la Géométrisation de la physique, Flammarion, 272 p., 125 F.

Nous espérons que ce petit voyage dans l' espace vous aura plu et nous espérons vous retrouver bientôt sur ....nos lignes.