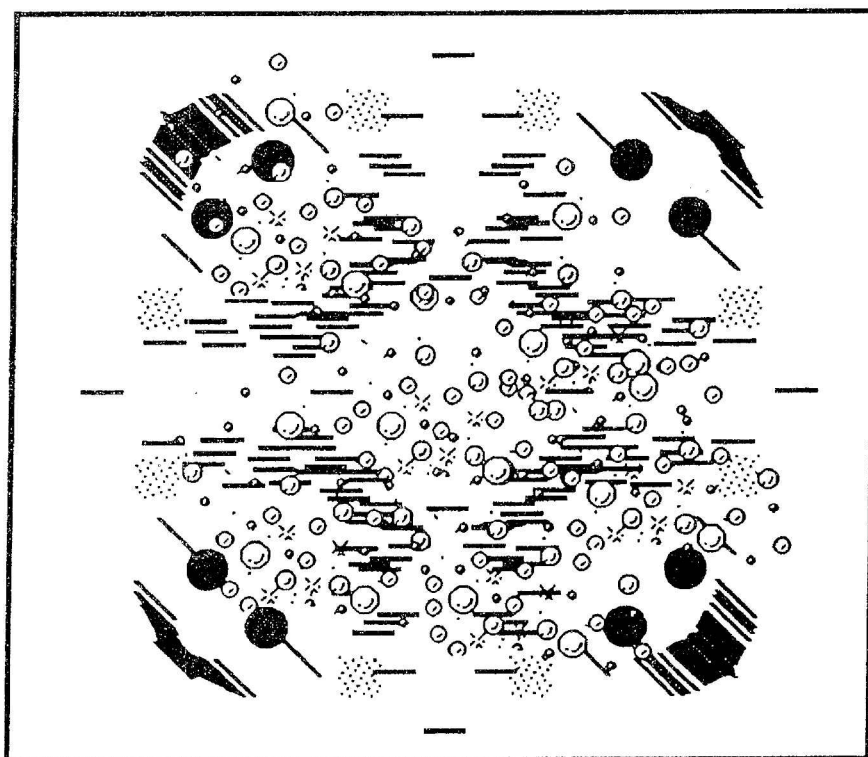


Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Université de Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon 34095 MONTPELLIER CEDEX 5
© 67 14 33 83 ou 67 14 33 84, télécopie 67 14 39 09

*Des activités mathématiques
en classes scientifiques (1S et TS)*



René BERNARD - Christian FAURE - Maryse NOGUÈS
Yvon NOUAZÉ - Luc TROUCHE

1994

Préface

Le groupe Analyse de l'IREM de Montpellier a mené ces deux dernières années une double réflexion :

- d'abord à propos de la généralisation des calculatrices graphiques en lycée. Quelles conséquences pour l'enseignement de l'analyse ?

- ensuite à propos de "l'enseignement modulaire", en classe de Seconde, puis en classe de Première Scientifique. Quel renouvellement possible pour l'enseignement des mathématiques ?

Cette réflexion a débouché sur des actions de formation en 92/93, et en 93/94, et sur deux brochures ¹. Cette nouvelle brochure se situe dans le prolongement des deux précédentes : il s'agit pour nous de donner des pistes de recherche mathématique pour les élèves, comme pour les professeurs. Pour cela, nous avons privilégié l'Analyse, et l'utilisation des calculatrices graphiques qui sont des outils de choix pour émettre des conjectures, stimuler la recherche des élèves. Mais nous avons aussi ouvert quelques pistes en Géométrie.

Cette brochure est divisée en trois chapitres :

- dans le premier d'entre eux, nous examinons des thèmes d'étude ; il s'agit de problèmes mathématiques assez vastes, qui peuvent donner matière à activités dans les classes. Ce ne sont pas des activités prêtes pour l'emploi... Mais des sources d'inspiration possibles pour des problèmes, des activités dirigées, des modules...

- le deuxième chapitre est une compilation d'activités qui ont été données sous cette forme dans des classes de première par les auteurs de cette brochure. Elles peuvent être testées telles quelles, ou adaptées, dans vos classes !

- dans un troisième chapitre, nous essayons d'analyser les effets d'une de ces activités dans une classe de première. Nous voulons ainsi initier une certaine réflexion : une activité "qui marche" dans une classe ne laisse pas toujours chez les élèves les traces espérées ...

Nous sollicitons bien sûr votre indulgence pour d'éventuelles erreurs de frappe, et vos critiques pour les aspects de cette brochure qui vous paraîtraient contestables !

A vos plumes !

René BERNARD - Christian FAURE - Maryse NOGUÈS-
Yvon NOUAZÉ - Luc TROUCHE

¹ C. FAURE, M. NOGUÈS, Y. NOUAZÉ, L. TROUCHE, 1993, *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, IREM de Montpellier.
C. FAURE, M. NOGUÈS, Y. NOUAZÉ, L. TROUCHE, 1993, *Quelques idées pour la mise en pratique des modules en seconde*, IREM de Montpellier.

Sommaire

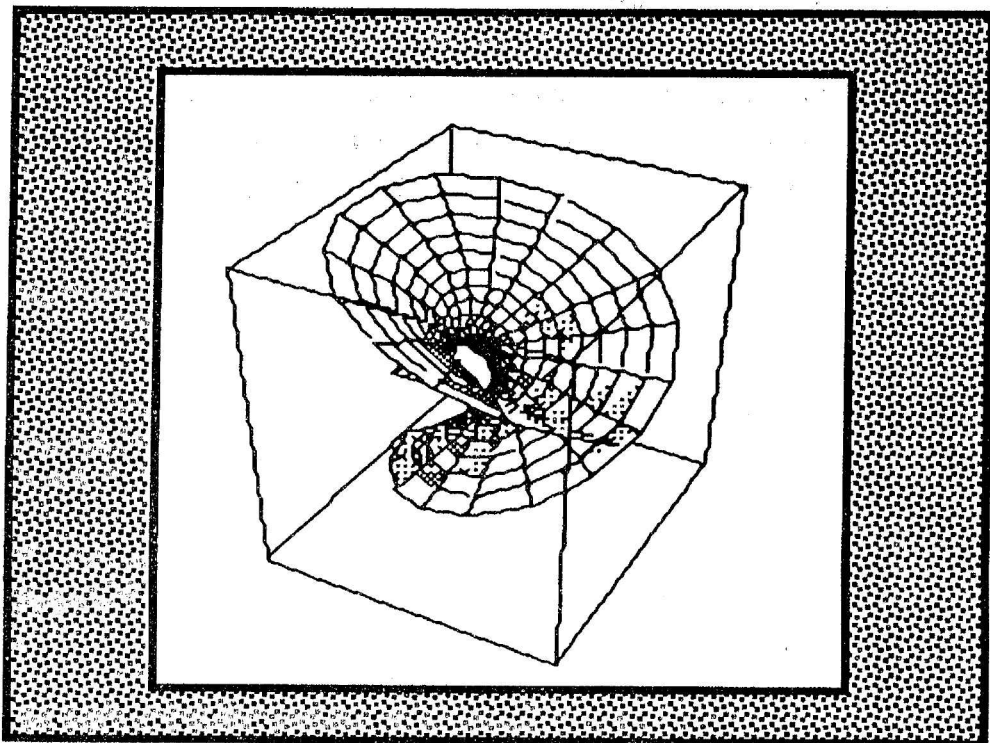
Préface.....	1
Chapitre 1 : Thèmes d'étude	7
A. Calculatrices et algorithmes de calcul	8
1. LES FONCTIONS LN, EXP, ET TRIGONOMETRIQUES AVEC UNE CALCULATRICE	8
A. Représentation des nombres.....	8
B. La fonction ln dans une calculatrice	9
C. La fonction exp et associées.....	10
D. Les fonctions trigonométriques	10
E. Conclusion.....	11
2. DÉRIVATION NUMÉRIQUE, NOMBRE DÉRIVÉ.....	12
A. Dérivée symétrique	12
B. Cas des fonctions polynômes de degré au plus 2.....	14
C. Extensions de la notion de dérivée symétrique.....	14
D. Dérivée seconde symétrique.....	15
3. CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DE SIMPSON.....	20
A. Le principe général des méthodes de calcul approché d'intégrales.....	20
B. Le principe de la méthode de Simpson.....	21
C. Le contrôle de l'erreur.....	23
D. Que faire de tout cela avec les élèves ?	24
4. RECHERCHE DE RACINES.....	26
A. Intervalles emboîtés.	26
B. Point fixe	28
C. Relations entre les méthodes	30
D. Types de convergence.....	31
E. Les programmes	31
F. Exercices.....	33
B. Analyse	34
1. TANGENTES À UNE COURBE	34
A. Activité (elle peut couvrir plusieurs séances.....)	34
B. Solutions et commentaires.....	35

C. Autres méthodes, autres points de vue.....	36
C. Géométrie.....	38
1. CENTRE DE MASSE ET ISOBARYCENTRE	38
A. Cas du triangle.....	38
B. Cas du quadrilatère.....	39
C. Quadrilatères "emboîtés", barycentres et aires	40
2. UN TRIANGLE PARTICULIER	42
A. Des considérations trigonométriques.....	42
B. Singularité du symétrique I' de J par rapport à (AC).....	43
C. On donne à la figure une certaine symétrie.....	43
3. POLYGÔNE DÉFINI PAR LES MILIEUX DE SES CÔTÉS.....	44
4. CHEMINS DE LUMIÈRE ET TRAJETS MINIMAUX DANS LES POLYGÔNES.....	48
A. Des triangles, de la lumière, et des économies d'énergie	48
B. Des quadrilatères, et de la preuve que, quand ils se produisent, les évènements rares se produisent abondamment.....	50
4. TÉTRAÈDRES.....	52
A. Quelques propriétés du tétraèdre régulier.....	52
B. Quelques propriétés du tétraèdre orthocentrique.....	53
C. Tétraèdre isofacial	54
D. Equivalence	54
Chapitre 2 : Des activités.....	55
A. Paraboles et hyperboles.....	56
1. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE ET D'UNE HYPERBOLE.....	56
2. PARABOLE TANGENTE À 3 DROITES DONNÉES.....	57
3. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE COURBES	58
B. Equations et inéquations.....	59
1. LOCALISATION DES ZEROS D'UN POLYNÔME.....	59
2. POLYNÔMES DE DEGRÉ 3.....	60
3. INÉQUATIONS : CAUSES D'ERREURS	61
C. Fonctions.....	62
1. FONCTIONS ASSOCIÉES.....	62
2. COMPARAISON DE COURBES ET DE FONCTIONS.....	63
3. APPROCHE DE LA FONCTION LN AVEC LA CALCULATRICE.....	64
4. ETUDE GRAPHIQUE DE CERTAINS ASPECTS DE $\frac{\sin x}{x}$	65

D. Problèmes et fonctions	66
1. LES PLUVIOMÈTRES	66
2. LA BOÎTE DE LAIT.....	68
E. Espace.....	69
1. COUPER UN CUBE.....	69
Chapitre 3 : Analyse d'une activité proposée aux élèves.....	71
A. L'activité proposée.....	72
B. Les recherches des élèves.....	74
C. Questions et définitions	74
C. Résolution.....	75
D. Qu'auront retenu les élèves de cette activité ?.....	76
E. Conclusions.....	79
Références bibliographiques	81

Chapitre 1

Thèmes d'étude



A. Calculatrices et algorithmes de calcul

Afin de pouvoir utiliser les calculatrices, outils qui permettent d'effectuer des conjectures, des calculs et de les vérifier, il est certainement nécessaire d'en connaître "les contraintes et potentialités²" tant au niveau des calculs que des représentations graphiques. Mais par ailleurs, ces mêmes calculatrices offrent la possibilité d'obtenir les valeurs des fonctions classiques (ln, exp, cos, sin...). Quels algorithmes sont à l'origine de ces valeurs ? La connaissance, même succincte de ces modes de calculs peut éviter parfois certaines surprises³. Nous décrirons dans ce chapitre les algorithmes permettant de donner les valeurs des fonctions de référence ainsi que les modes utilisés pour donner celles de certaines fonctionnalités des calculatrices : dérivée et intégrale.

1. LES FONCTIONS LN, EXP, ET TRIGONOMÉTRIQUES AVEC UNE CALCULATRICE⁴

A. Représentation des nombres

• Dans un ordinateur, la représentation des nombres réels s'appuie sur un codage binaire. Il existe plusieurs formats, on peut citer le standard IEEE utilisé par le langage PASCAL où un réel x est représenté sur quatre octets selon le schéma :



et on a $x = (-1)^{\text{signe}} \times 2^{(\text{exposant} - 127)} \times (1.\text{mantisse})$

² Voir à ce propos le chapitre II. du fascicule "Pour une prise en compte des calculatrices graphiques au lycée" IREM de Montpellier, 1993.

³ Indépendamment des thèmes suivants de ce chapitre, on peut lire à ce sujet l'article d'André Laurent sur l'interprétation de la fonction "abs" par certaines calculatrices, bulletin APMEP, n°392, février-mars 1994, p.41.

⁴ Voir "Le Nouvel Archimède", n°10, oct 86 et Dimathème 1°S, col. Didier 1982.

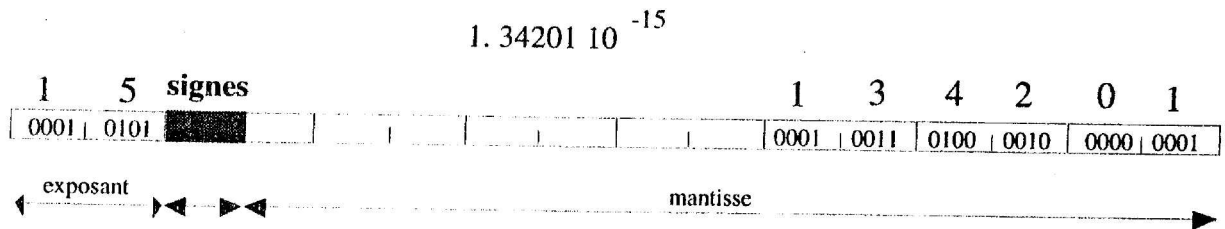
Exemple (0/1) 01110111 00000000000000100000011
 signe exposant mantisse {3/BB800103}
 représente : +1,0117875

D'autres formats existent utilisant 8, 16 octets permettant une plus grande précision. Certains programmes utilisent des représentations de réels avec la précision souhaitée par l'utilisateur (*Dérive*)

En fait, les processeurs actuels sont cablés pour réaliser ces transformations d'écriture.

- Dans les calculatrices, les processeurs sont beaucoup plus rudimentaires. Aussi pour optimiser le codage interne des réels, on utilise un codage DCB (Décimal Codé Binaire) : après une mise sous forme "scientifique" : signe / mantisse $\in [1;10[$ / exposant de 10, chaque chiffre est codé sur quatre bits (un demi octet).

Par exemple, pour la TI 81, les nombres sont représentés sur 8 octets :



Ce qui nous donne 13 chiffres significatifs et une plage d'exposants allant de -99 à 99 (les TI 82 et 85 utilisent un demi octet de plus, soit un chiffre significatif supplémentaire).

Cette représentation n'est certes pas optimale au sens des théories de l'information, mais le codage est nettement plus immédiat que celui exposé plus haut et est donc mieux adapté aux processeurs plus rudimentaires des calculatrices. En outre cette écriture est très bien adaptée à une multiplication par une puissance de 10.

Remarque : tester 100000...2 - 100000 ...0 jusqu'à découvrir le nombre de chiffres significatifs utilisés.

B. La fonction ln dans une calculatrice

- Il n'est pas concevable de stocker une table (évaluation ≈ 8 octets/nombres $\times 900\ 000 = 7\ 200\ 000$ soit 7 mégaoctets, certes optimisable !).

- On pourrait utiliser le développement en série de $\ln(1 + t)$: d'abord écrire x sous forme $t + 2^n$ avec $t \in [1;2[$ et stocker uniquement $\ln 2$, ensuite faire "tourner" un algorithme n'utilisant que les opérations simples (+, -, \times , \div). Mais la convergence de cette série est très lente.

• On préfère, utilisant la représentation DCB, écrire $\ln t = \ln(\text{mantis}) + \text{exposant} \ln 10$ et stocker (en mémoire morte) $\ln 10$ ainsi que la suite $(\ln a_n)$ avec (a_n) définie comme suit :

$$a_n = 1 + 10^{-n} \quad (n \geq 0) \text{ d'où } a_0 = 2 ; a_1 = 1,1 ; a_2 = 1,01 \dots \text{ (qui converge vers 1).}$$

On pose alors $x_0 = x a_0^{n_0}$, avec n_0 tel que $x_0 a_0 > 10$ {autrement dit, on multiplie x par a_0 jusqu'à atteindre 10 sans le dépasser}.

On définit alors $x_k = x_{k-1} a_k^{n_k}$ avec n_k tel que $x_k a_k > 10$.

On a alors $x_k = x a_0^{n_0} \dots a_k^{n_k}$.

Vu l'encadrement des x_k , cette suite (x_k) converge vers 10, d'où (vu les propriétés de continuité de \ln) on a :

$$\ln 10 = \ln x + \sum_i n_i \ln a_i .$$

Cette convergence est très rapide, aussi on peut se contenter d'une table contenant $\ln 10$ ainsi que $\ln a_i$ pour $i = 0, \dots, 6$

• La fonction \log se calcule à partir de $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

C. La fonction exp et associées

• Tout d'abord on écrit x sous la forme $x = x' + n \ln 10$ puis on calcule $e^{x'}$. Pour le calcul de $e^{x'}$:

- on pose : $x_0 = x' - n_0 \ln a_0$ avec $x_0 \geq 0$ et $x_0 - \ln a_0 < 0$

(on soustrait autant que possible tant que le résultat reste positif, sorte de division euclidienne)

(les $\ln a_k$ sont stockés en ROM et sont les mêmes que ceux utilisés pour \ln)

- puis : $x_1 = x_0 - n_1 \ln a_1$ à x_0 avec $x_1 \geq 0$ et $x_1 - \ln a_1 < 0$

- En itérant, on définit ainsi (x_k) et on a :

$$x_k = x' - n_0 \ln a_0 - n_1 \ln a_1 - \dots - n_k \ln a_k$$

• On a ainsi : $x' - n_0 \ln a_0 - n_1 \ln a_1 - \dots = 0$;

d'où
$$\exp(x') = \prod_{i=0}^{+\infty} a_i^{n_i} \quad \text{et} \quad \exp(x) = \prod_{i=0}^{+\infty} a_i^{n_i} \times 10^n$$

• Le fonctionnement de la touche y^x s'appuie sur la formule : $a^x = e^{x \ln a}$

D. Les fonctions trigonométriques

• L'unité utilisée lors des algorithmes est le radian. La machine a en mémoire π et $180/\pi$ pour implémenter les conversions d'unités. Les fonctions \sin et \cos sont calculées à partir de la fonction \tan (par les formules $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ et $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$).

- Les calculs sont faits dans le premier quadrans, quelques simples tests permettent de préciser le signe de la ligne trigonométrique calculée.

- L'algorithme de calcul de $\tan x$ ne s'appuie pas sur un développement limité mais sur une méthode d'approximations successives utilisant ici aussi une table de constantes prédéfinies et stockées en mémoire morte. Ces constantes sont :

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{Arctan } 10^0 = \pi/4 \quad (\approx 0,785\ 398\ 163\ 397\ 450) \\ a_1 &= \text{Arctan } 10^{-1} \\ a_2 &= \text{Arctan } 10^{-2} \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= \text{Arctan } 10^{-n} \end{aligned}$$

En pratique, les valeurs $a_0 \dots a_5$ sont suffisantes pour obtenir la précision usuelle des calculatrices.

- Pour calculer $\tan x$ avec x dans le premier quadrans, on développe x sous la forme : $x = q_0 a_0 + q_1 a_1 + \dots + q_k a_k + \dots$ par des "divisions euclidiennes" successives de x par a_0 ; a_1 puis $a_2 \dots$. On définit alors une suite dans \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} V_{n+1} = A_n^{q_n} V_n \\ V_0 = (1; 0) \end{cases} \quad \text{avec } A_n = \begin{bmatrix} 1 & -10^{-n} \\ 10^{-n} & 1 \end{bmatrix} \text{ soit matriciellement :}$$

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10^{-n} \\ 10^{-n} & 1 \end{bmatrix}^{q_n} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix}$$

On a alors : $\lim \frac{Y_n}{X_n} = \tan x$

En effet, la suite $(\tan(\frac{Y_n}{X_n}))$ est une suite de Cauchy : $\tan(\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}) - \tan(\frac{Y_n}{X_n}) = 10^{-n}$.

- En notation complexes (A_n est un complexe de module $\sqrt{1+10^{-2n}}$ et d'argument a_n ; $Z = X + iY$ et $z_n = X_n + iY_n$), on a le produit infini :

$$Z = \prod_{i=0}^{\infty} z_i^{q_i} \text{ ce qui donne quant aux arguments : } \arg(Z) = q_0 a_0 + q_1 a_1 + \dots + q_k a_k + \dots = x$$

- Géométriquement, on transforme le point I d'affixe 1, par des similitudes centrées à l'origine et d'angles a_i ; le point M d'affixe Z est la limite de la suite de points obtenus par compositions de ces similitudes.

E. Conclusion

- On voit donc des procédures inattendues pour les fonctions usuelles

- De même, on peut aussi remarquer le comportement des calculatrices (TI82/82/85 ou Casio ...) quant au calcul des A_n^P qui ne se font certainement pas à partir de factorielles, ni celui des C_n^P à partir des précédents. Pour preuve essayer le calcul de C_{400}^{100} ($\approx 2.25 \cdot 10^{96}$) puis celui de A_{400}^{100} (impossible sur TI82)

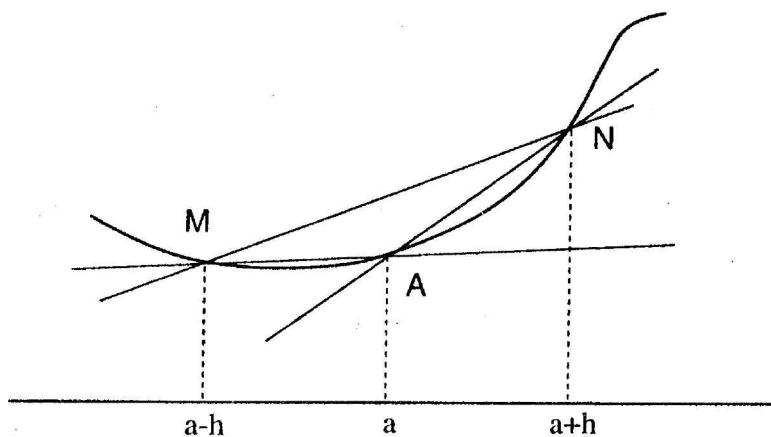
2. DÉRIVATION NUMÉRIQUE, NOMBRE DÉRIVÉ

Les calculatrices qui ne font pas de calcul formel donnent cependant une valeur approchée pour le nombre dérivé d'une fonction f (dérivable !) en a ⁵

Ce nombre (souvent noté "nDériv") est ainsi calculé : pour une valeur a donnée, et un nombre h "petit" donné, la calculatrice donne pour valeur approchée de $f'(a)$, le nombre égal à $g(f, a, h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

A. Dérivée symétrique

1- L'interprétation géométrique de $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est claire : c'est la pente de la droite passant par les deux points M et N de coordonnées respectives $(a-h, f(a-h))$ et $(a+h, f(a+h))$. La dérivée en a de f est la pente de la tangente en A au graphe de f .



Ce schéma montre que $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ est une meilleure approximation de $f'(a)$ que les valeurs $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$. C'est le cas général d'une fonction qui présente une concavité "régulière".

2- Si l'on prend pour f la fonction exponentielle, le tableau suivant, pour diverses valeurs de h donne une évaluation de $g(\exp, 1, h)$ que l'on peut comparer à la valeur de $(\exp)'(1)$ dont la valeur, avec 12 chiffres significatifs est : 2,718 281 828 46.

h	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01
$g(\exp, 1, h)$	2,722 814 564	2,718 327 133	2,718 282 282	2,718 281 833	2,718 281 825

⁵ Il est question ici d'observer le mode de calcul du nombre dérivé, mais cette fonctionnalité des calculatrices peut permettre une approche différente de la notion de dérivée dans les classes. On pourra consulter à ce propos l'article de Pascal Chantriaux, "Introduction progressive de la dérivation et de ses applications en seconde avec l'aide du logiciel Graphe", bulletin APMEP, n°391, Déc 1993. La présentation de cet article lors de l'un de nos stages a suscité de nombreuses réactions et une mise en pratique pour certains dans leurs classes. Les comptes rendus détaillés qu'ils en ont fait, témoignent de leur intérêt pour cette approche.

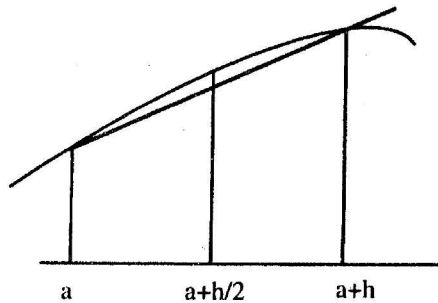
(Calculs effectués sur TI 82)

3- Une valeur approchée de $f'(a)$, plus "conforme aux habitudes" est donnée par $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On peut trouver x_1 et k tels que : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g(f, x_1, k)$, ce qui permet de faire le lien entre l'approximation habituelle de la dérivée de f en a et le nombre $g(f, x_1, k)$. Le dessin ci-après donne la solution.

$$\text{On a : } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f\left(a + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - f\left(a + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{2 \frac{h}{2}}$$

$$\text{De sorte que : } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g\left(f, a + \frac{h}{2}, h\right).$$



4- Le calcul fait à la machine suggère que "plus h est petit, plus le nombre $g(f, x_0, h)$ est proche de $f'(x_0)$ ".

Le résultat suivant est simple à prouver : si f est dérivable en a , la limite de $g(f, a, h)$ quand h tend vers zéro existe et est égale à $f'(a)$.

[Considérer que $g(f, a, h)$ est une fonction de h et appliquer le théorème des accroissements finis]

Par contre, la réciproque est fautive comme le montre l'exemple de la fonction f telle que

$f(x) = |x|$. En effet, en $a = 0$, on a $g(f, 0, h) = 0$ pour tout h , de sorte que $\lim_{h \rightarrow 0} g(f, 0, h) = 0$; mais évidemment, f n'est pas dérivable en zéro.

Dans le cas où $\lim_{h \rightarrow 0} g(f, a, h)$ existe (et est finie), la limite est appelée *la dérivée symétrique de f en a .*

Les calculatrices qui donnent des valeurs approchées de la valeur du nombre dérivé donnent les nombres $g(f, a, h)$ pour un h laissé ou non à l'initiative de l'utilisateur. C'est aussi par cette approximation qu'est tracé le graphe de "la dérivée de f ". En fait, c'est l'ensemble des points de coordonnées $(a+kr, g(f, a+kr, h))$ pour k variant de 0 à $N =$ nombre de pixels de l'écran, r étant égal à $\frac{L}{N}$ où L est la longueur du domaine de variation de x . On se persuadera que c'est cette technique de calcul approché qui est utilisée, en vérifiant (sur TI 82 par exemple)

que l'on a l'égalité entre $nDeriv(Y_1, X, A, H)$ et $\frac{Y_1(A+H) - Y_1(A-H)}{2H}$. Les écrans suivants le montrent (il s'agit de $Y_1 = \exp$)

```
A=?0
H=?001
nDeriv(.....=
1.000000167
<Y1(A+H)-.....)/2H=
1.000000167
```

```
A=?0
H=?0001
nDeriv(.....=
1.000000002
<Y1(A+H)-.....)/2H=
1.000000002
```

```
A=?1
H=?01
nDeriv(.....=
2.718327133
<Y1(A+H)-.....)/2H=
2.718327133
```

```
A=?1
H=?0001
nDeriv(.....=
2.718281833
<Y1(A+H)-.....)/2H=
2.718281833
```

B. Cas des fonctions polynômes de degré au plus 2

1- Soit f une fonction polynôme de degré au plus égal à 2. On vérifie immédiatement que, pour tout a et tout h , on a : $g(f, a, h) = f'(a)$.

* Si f est affine, la droite passant par les points M et N (cf le point 1) est confondue avec la droite, graphe de f .

* Si f est une fonction polynôme du second degré, dont le graphe est une parabole, le résultat démontré dit que la pente de la droite passant par les deux points M et N de la parabole d'abscisses respectives $a+h$ et $a-h$, a le même coefficient directeur que la tangente au point d'abscisse a , ou encore, que la sécante (MN) est parallèle à la tangente au point A (avec les notations ci-dessus).

2- Réciproque du résultat précédent

On se propose de montrer le résultat suivant.

Si f est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie : pour tout x et tout h , $g(f, x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$ (*),

alors f est une fonction polynôme du second degré au plus.

a) Si f est dérivable et vérifie (*), montrer que f est indéfiniment dérivable.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{f'(x+h) + f'(x-h)}{2}$. (**)

[Dériver, en la considérant comme une fonction de h , la fonction $hf'(x)$]

c) En utilisant les relations (*) et (**), montrer que pour tout h réel, on a :

$f'(h) = hf''(0) + f'(0)$, et en déduire le résultat annoncé.

C. Extensions de la notion de dérivée symétrique.

On pourrait penser à généraliser cette situation en considérant la limite en $(0,0)$ de la fonction des deux variables indépendantes h et k , $F(a, h, k) = \frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k}$. (Pour $k=h$, on retrouve l'expression déjà introduite). En posant $a+h = x$ et $a-k = y$, on serait amené à considérer la limite lorsque (x, y) tend vers (a, a) de $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, avec $x \neq y$

"Raisonnement", on pourrait espérer que, dans le cas où f est dérivable en a , la limite existe et soit égale à $f'(a)$. Malheureusement (?), il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant.

Soit f définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

* $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin(\frac{1}{h})$, de sorte que la limite en 0 de $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ est nulle, et que f est

dérivable en zéro, et que sa dérivée vaut donc 0.

[On remarquera que f est dérivable en tout point x non nul mais que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ n'existe pas]

* si $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ a une limite en $(0,0)$, la suite $\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$ doit avoir la même limite pour

tout suite (x_n, y_n) qui tend vers $(0,0)$. Prenons la suite définie par : $\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{(4n+1)\pi}{2}$ et $\frac{1}{y_n} = 2n\pi$. Il est clair que cette suite converge vers $(0,0)$. On a :

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{x_n^2}{x_n-y_n} = \frac{4}{(4n+1)^2\pi^2} \frac{1}{\frac{2}{(4n+1)\pi} - \frac{1}{2n\pi}} = \frac{-8n}{(4n+1)\pi}, \text{ qui a pour limite } \frac{-2}{\pi}.$$

Il résulte que la limite en $(0,0)$, si elle existe, de $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ne peut pas être nulle, et n'est donc pas égale à $f'(0)$.

[On peut montrer en fait que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$; prendre par exemple la suite (x_n, y_n) définie par $\frac{1}{x_n} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$ et $\frac{1}{y_n} = (4n+1)\pi$; la limite en $(0,0)$ de $\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$ est nulle et est donc différente de $\frac{-2}{\pi}$]

On remarquera que si f est dérivable et si f' est continue en a , $\lim_{x \neq y, (x,y) \rightarrow (a,a)} F(x,y)$ existe et vaut $f'(a)$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis :

$f(x)-f(y) = (x-y) f'(c)$, pour un élément c vérifiant : $x < c < y$ (ou $y < c < x$) et de remarquer que $f'(c) = F(x,y)$ tend vers $f'(a)$ quand (x,y) tend vers (a,a) .

On remarquera aussi que si $\lim_{x \neq y, (x,y) \rightarrow (a,a)} F(x,y)$ existe, cette limite est égale à $f'(a)$, dans le cas

où $f'(a)$ existe! [Il suffit de considérer les points (x,y) tels que $x = a+h$; $y = a-h$...]

(Dans l'exemple précédent, on a vu que si $\lim_{x \neq y, (x,y) \rightarrow (a,a)} F(x,y)$ existe, cette limite est égale à

$\frac{-2}{\pi}$. Comme $f'(0)$ vaut 0, on ne peut pas avoir l'égalité, contrairement au résultat établi, de sorte

que

$\lim_{x \neq y, (x,y) \rightarrow (a,a)} F(x,y)$ n'existe pas, et on retrouve d'une autre manière le résultat établi précédemment)

D. Dérivée seconde symétrique.

1- Estimations

Pour montrer que $g(f,a, h/2) = \frac{f(a+h/2)-f(a-h/2)}{h}$ est une approximation de $f'(a)$, nous

écrivons : $f'(a) \approx \frac{1}{h} (f(a+h/2)-f(a-h/2))$ (i), soit encore, avec un léger changement :

$$f'(a+h/2) \approx \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) , \text{ (ii).}$$

Si l'on connaît les valeurs de f avec un pas h , c'est à dire si l'on connaît $f(a)$, $f(a+h)$,..., $f(a+kh)$, on aura une approximation de $f'(a+h/2)$, $f'(a+3h/2)$, ..etc par la relation (ii) ci-dessus. Ainsi, si f est connue en $0 ; 0,2 ; 0,4 ; \dots ; 1,0$, c'est à dire avec un pas égal à $0,2$, on aura une estimation de $f'(0+0,1) = f'(0,1)$; $f'(0,2+0,1) = f'(0,3)$; ..etc, et donc une estimation de f' en des points équidistants de $h = 0,2$ également.

En répétant le procédé, on aura une estimation de f'' en des points équidistants de $h = 0,2$ encore, mais en un nombre réduit de points uniquement. Par exemple, la première valeur obtenue l'est au point $0,2$.

$$\text{On a : } f''(a) \approx \frac{1}{h} (f'(a+h/2) - f'(a-h/2)) ; \text{ (iii)}$$

$$\approx \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) - \frac{1}{(-h)} (f(a-h) - f(a)) \right] = \frac{1}{h^2} (f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)). \text{ (iv)}$$

Le tableau suivant montre ce qui se passe pour la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{1+x}$ qui est connue avec un pas égal à $0,2$ entre 0 et 1 .

$0 + kh/2$	$f(0+kh)$	$f'((2k+1)h/2)$	$-1/(1+x)^2$	$f''(0+kh)$	$2/(1+x)^3$
0	1				
0,1		- 0,833 5	- 0,826 4		
0,2	0,833 33			1,191 5	1,155 74
0,3		- 0,595 2	- 0,591 7		
0,4	0,714 29			0,743 75	0,728 86
0,5		- 0,446 45	- 0,444 4		
0,6	0,625			0,496 25	0,488 28
0,7		- 0,347 2	- 0,346		
0,8	0,555 56			0,347	0,342 94
0,9		- 0,277 8	- 0,277		
1,0	0,5				

On remarque que si l'estimation de la dérivée première est assez bonne, compte tenu du pas choisi, elle l'est un peu moins pour la dérivée seconde.

Ceci montre que, bien que l'on puisse itérer le procédé, d'estimations en estimations la précision diminue ; comme d'autre part, seules les dérivées première et seconde présentent de l'intérêt, on ne poursuit pas le procédé pour obtenir une estimation de la dérivée 3^e, de la dérivée 4^e,..., d'autant plus que le nombre de points où ces dérivées pourraient être estimées diminue ; dans l'exemple ci-dessus, on aurait trois valeurs pour la dérivée troisième et deux pour la dérivée quatrième ! (A chaque itération, on perd une valeur).

2- Vérification et approximations

Soit f une fonction définie et continue au voisinage de a , ayant une dérivée seconde en a . On considère l'expression : $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

(i) Montrer que la limite de cette quantité, quand h tend vers 0, est égale à $f''(a)$.

[Considérer que le numérateur et le dénominateur, sont des fonctions de h et remarquer

que $\frac{N(h)}{D(h)}$ s'écrit sous la forme : $\frac{\frac{N(h)-N(0)}{h}}{\frac{D(h)-D(0)}{h}}$. Le résultat en découle immédiatement]

(ii) Même question, mais en utilisant cette fois-ci la formule de Taylor.

[On pourra faire les hypothèses supplémentaires que l'on voudra sur la dérivabilité de f]

Ce résultat justifie les estimations précédentes et notamment la formule (iv) autrement que par des estimations d'estimations !

La limite de $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$, quand elle existe, est appelée

la dérivée symétrique seconde de f en a .

Comme on l'a vu, cette limite coïncide avec la dérivée seconde de f en a quand celle-ci existe.

Pour un h donné, $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$ constitue une approximation de $f''(a)$. Les

calculatrices utilisent ces propriétés pour donner une valeur approchée de $f''(a)$.

Compte tenu de ce qui précède, nous disposons essentiellement de deux approximations de $f''(a)$:

A- $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$, c'est la formule (iv) ;

B- $\frac{1}{2h} \left[\left(\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} \right) - \left(\frac{f(a)-f(a-2h)}{2h} \right) \right]$, qui résulte de (i) en remplaçant h par $2h$

A ces deux estimations s'ajoute sur la TI 81 ou 82, la valeur approchée de $f''(A)$ donnée par la quantité:

C- $n\text{Deriv}(n\text{Deriv}(f, X, X, H), X, A, H) = \frac{1}{2H} (n\text{Deriv}(f, X, A+H, H) - n\text{Deriv}(f, X, A-H, H))$;

ce n'est autre que l'approximation B ;

Une autre approximation est donnée, en combinant (i) et l'approximation de la dérivée symétrique par $n\text{Deriv}(\dots)$, c'est :

$$D - \frac{1}{H} [n\text{Deriv}(f, X, A+H/2, H/2) - n\text{Deriv}(f, X, A-H/2, H/2)].$$

Les copies d'écran qui suivent donnent, dans l'ordre, les valeurs calculées par A, B, C et D pour la fonction exp au point $A = 0$ pour diverses valeurs de H.

```
A=?0
H=? .01
1.000008334
1.000033334
1.000033334
1.000008334
Done
```

```
A=?0
H=? .001
1.0000001
1.00000333
1.00000333
1.0000007
Done
```

```
A=?0
H=? .0001
.99999925
.99999925
1.000003
Done
```

```
A=?0
H=? .00001
1
1
1
1
Done
```

Remarques.

a- La première valeur affichée est dans les quatre cas considérés, la meilleure approximation de $(\exp)'(0)$. On pourrait penser qu'il aurait été préférable de prendre cette approximation. Il n'en est rien, car dans d'autres cas, par exemple en $A = 1$, c'est la seconde (qui est égale à la troisième) qui est la meilleure.

b- La quatrième approximation fait intervenir, de fait, un pas de $h/2$. Pour le calcul numérique de la dérivée d'une fonction connue aux points $a, a+h, \dots, a+kh, \dots$ etc, cela n'est pas concevable. C'est pourquoi elle n'est pas retenue.

3- Ordre de grandeur de l'erreur commise

Le problème qui se pose est de connaître l'ordre de grandeur de l'erreur commise en remplaçant la valeur exacte de $f'(a)$ par l'estimation qui en est faite. Voici des éléments de réponse.

Désignons par $D_h(f)(a)$ la quantité $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

a) Soit f une fonction dérivable jusqu'à l'ordre $2m+1$. On a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(a) + \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(a+b_1), \text{ avec } 0 < b_1 < h;$$

de même, en remplaçant h par $-h$, on obtient :

$$f(a-h) = f(a) - \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(a) + \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(a+b_2), \text{ avec } -h < b_2 < 0.$$

$$\text{On en déduit que : } D_h(f)(a) = f'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(3)}(a) + \dots + \frac{h^{2m}}{2(2m+1)!} (f^{(2m+1)}(a+b_1) + f^{(2m+1)}(a+b_2)).$$

En prenant $m = 1$, et si $f^{(3)}$ est bornée au voisinage de a , en particulier si $f^{(3)}$ est continue, l'erreur commise est de l'ordre de h^2 . Dans le cas où $f^{(2m+1)}$ est continue, il existe b_3 compris entre $-h$ et $+h$ tel que $\frac{f^{(2m+1)}(a+b_1) + f^{(2m+1)}(a+b_2)}{2}$ est égal à $f^{(2m+1)}(a+b_3)$. (Théorème des valeurs intermédiaires).

b) Reprenant le cas $m = 1$, on a, pour un nombre réel q les deux égalités :

$$D_h(f)(a) = f'(a) + a_1 h^2 + o(h^4);$$

$$D_{qh}(f)(a) = f'(a) + a_1 (qh)^2 + o(h^4), \text{ car } o((qh)^4) = o(h^4).$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues a_1 et $f'(a)$, il vient :

$$f'(a) = \frac{q^2 D_h(f)(a) - D_{qh}(f)(a)}{q^2 - 1} + o(h^4), \text{ ce qui nous donne une erreur de l'ordre de } h^4.$$

En prenant $q = 1/2$, on trouve une autre approximation de $f'(a)$, soit

$$f'(a) = \frac{-f(a+2h)+8f(a+h)-8f(a-h)+f(a-2h)}{12h}.$$

(On remarquera que le pas $h/2$ introduit pour le calcul n'est pas utilisé pour le calcul d'une valeur approchée de $f'(a)$; seul intervient le pas h avec lequel est connue f .)

4- Exemple.

Soit f une fonction polynôme de degré 4, $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + \dots + a_1x + a_0$.

a) Montrer que $f(k) - f(-k) = f(0+k) - f(0-k) = 2a_1k + 2a_3k^3$, et en déduire que l'erreur commise en remplaçant $f'(0)$ par $\frac{1}{2k} (f(0+k) - f(0-k))$ est égale à a_3k^2 .

b) Estimer de la même manière l'erreur commise en remplaçant $f''(0)$ par $\frac{1}{h^2} (f(h) + f(-h) - 2f(0))$.

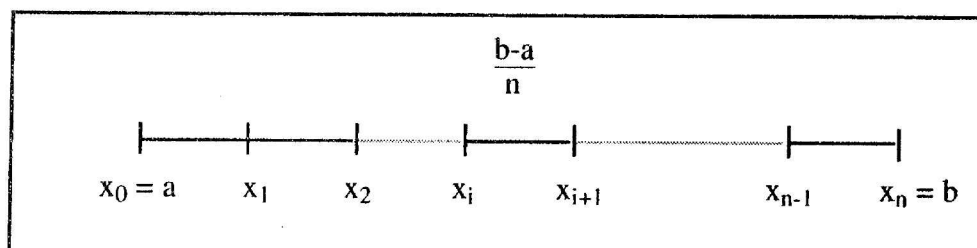
3. CALCUL APPROCHÉ D'INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DE SIMPSON

On utilise pour le calcul approché d'intégrales de fonctions dont on ne dispose pas de primitives (et ce sont hélas "la majorité"...) un certain nombre de méthodes, plus ou moins performantes. Les calculatrices ont parfois un programme intégré (Casio 7800, TI82...), d'autres proposent aux usagers d'entrer un programme basé sur la méthode de Simpson (c'est ce type de méthode que propose par exemple la TI 81)

A. Le principe général des méthodes de calcul approché d'intégrales.

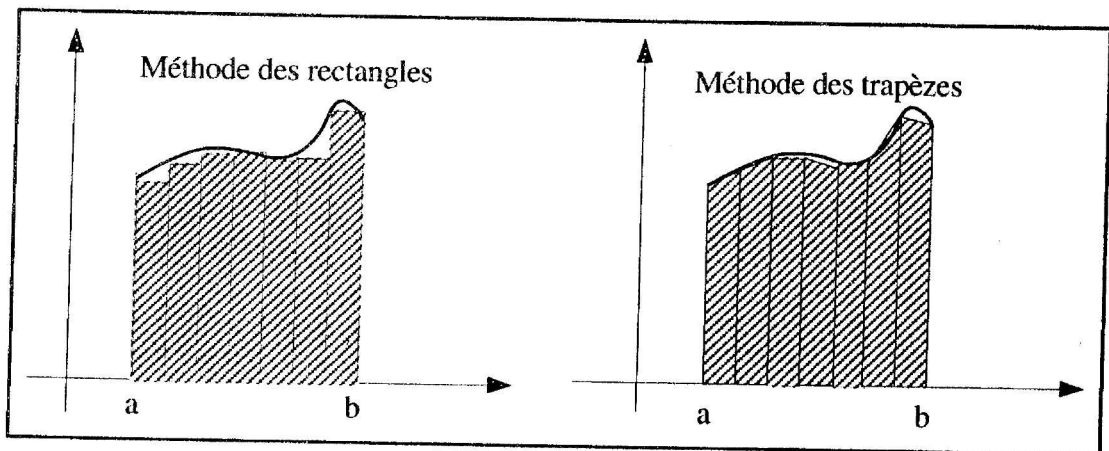
Soit f une fonction que l'on se propose d'intégrer sur l'intervalle $[a;b]$. Le calcul approché repose :

- 1. sur la subdivision de l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude (...en général. D'autres méthodes, plus sophistiquées, reposent sur la détermination de points particuliers de l'intervalle en question) ;



dessin 1

- 2. sur le remplacement de la fonction à intégrer, sur chaque intervalle élémentaire $[a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}]$ par une fonction "plus simple", soit une fonction constante (c'est la méthode des rectangles), soit une fonction affine (c'est la méthode des trapèzes), soit par un polynôme de degré au plus deux (c'est la méthode des paraboles, ou méthode de Simpson).



dessins 2

L'intérêt de la méthode de Simpson, c'est qu'elle donne en général des résultats meilleurs que les deux précédentes.

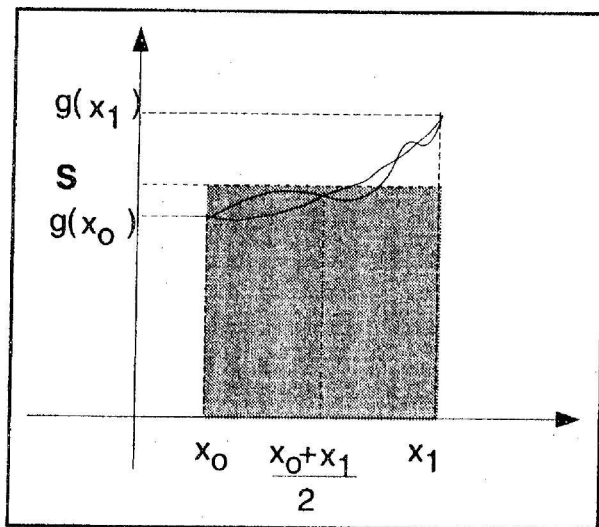
B. Le principe de la méthode de Simpson

Soit une fonction f , définie et intégrable sur $[a;b]$. On veut donc prendre comme valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$ le nombre I' égal à l'intégrale d'un polynôme du deuxième degré, g , "approchant" f sur $[a;b]$. Pour définir un polynôme du deuxième degré, il faut trois points. On conviendra donc que g prend les mêmes valeurs que f en a , en b et en $\frac{a+b}{2}$.

g est parfaitement déterminé par ces trois valeurs. De plus, on dispose d'une formule simple pour calculer l'intégrale d'un polynôme du deuxième degré, c'est la "formule des trois niveaux"

$$I' = \int_a^b g(t)dt = (b-a) \frac{g(a)+g(b)+4 g(\frac{a+b}{2})}{6}.$$

Le caractère barycentrique de la formule n'échappera à personne. Pour donner une image simple en terme d'aire, si g est positive, l'aire délimitée par le courbe en question est égale à l'aire du rectangle de base $(b-a)$, et de hauteur la barycentre des nombres $g(a)$, $g(b)$, et $g(\frac{a+b}{2})$, affectés respectivement des coefficients 1, 1 et 4.



dessin 3

$$S = \frac{1}{6} \left[g(x_0) + g(x_1) + 4 g\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right]$$

Le lecteur curieux pourra démontrer cette formule pour la fonction $x \rightarrow x^2$. Cette formule étant évidemment vraie pour les fonctions affines, elle est donc vraie pour tous les polynômes de degré au plus deux.

Cette formule sympathique est aussi exacte pour les polynômes de degré 3⁶. On sait qu'elle fonctionne aussi pour les calculs de volume, à condition que les sections soient des fonctions du deuxième degré (tronc de cône, de pyramide, boules...)

Si on adapte cette formule au calcul approché de I , sur une subdivision de $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude, on obtient pour I' , en posant $x_0=a$, et $x_n=b$

$$I' = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{b-a}{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4 f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}{6}$$

Remarque 1 : on peut alors comprendre le programme "Simpson" donné dans les livrets d'accompagnement des calculatrices. Ainsi, pour la TI 81⁷....

⁶ On démontre, mais avec un peu plus de peine, que toutes les formules de quadrature exactes pour les polynômes de degré pair $2k$ sont aussi exactes pour les polynômes de degré $2k+1$. Cet avantage donné aux fonctions de degré pair, ne fonctionne pas dans l'autre sens...

⁷ Programme donné dans le manuel d'utilisation de la TI 81, p.9-14. Ce même programme peut être utilisé sur la TI 82.

: All Off	: (L+R) / 2 → M
: Disp "BORNE INF"	: L → X
: Input A	: Y ₁ → L
: Disp "BORNE SUP"	: M → X
: Input B	: Y ₁ → M
: Disp "N DIVISIONS"	: R → X
: Input D	: Y ₁ → R
: θ → S	: W(L+4M+R) / 3 + S → S
: (B-A) / 2D → W	: IS>(J,D)
: I → J	: Goto I
: Lbl I	: Disp "AIRE"
: A+2(J-1)W → L	: Disp S
: A+2JW → R	

Remarque 2 : Le problème qui se pose alors est le suivant : peut-on contrôler la qualité de l'approximation ? Quand n tend vers l'infini, est-on assuré que I' tend vers I ? C'est ce qu'on se propose de démontrer ci-dessous, pour des fonctions qui ont un caractère de régularité suffisant sur $[a;b]$ ⁸

C. Le contrôle de l'erreur

Soit donc une fonction f , de classe C sur $[a;b]$, c'est à dire dérivable 4 fois, et telle que la dérivée quatrième de f , notée $f^{(4)}$, soit continue.

Soit $I = \int_a^b f(t)dt$, et $I' = (b-a) \frac{f(a)+f(b)+4f(\frac{a+b}{2})}{6}$, c'est à dire l'intégrale du polynôme du deuxième degré défini en a , b et $c = \frac{a+b}{2}$. On veut donc majorer la valeur absolue de l'écart entre I et I' . Pour cela on pose, pour t élément de $[0, \frac{b-a}{2}]$

$Q(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(t)dt - \frac{t}{3} [f(c+t) + f(c-t) + 4f(c)] + Kt^5 = J(t) - J'(t) + Kt^5$. Il est clair que $J(t)$ est l'intégrale de f entre $c-t$ et $c+t$, que $J'(t)$ est une valeur approchée de la même intégrale obtenue par la méthode de Simpson.

Ainsi $J(\frac{b-a}{2}) = I$, $J'(\frac{b-a}{2}) = I'$, et $Q(\frac{b-a}{2}) = I - I' + K(\frac{b-a}{2})^5$. On convient de choisir K pour que $Q(\frac{b-a}{2}) = 0$, on aura alors l'écart valeur exacte/ valeur approché égal à :

⁸ La démonstration qui suit est de toute évidence hors de portée des élèves de Terminale. Elle n'est cependant pas inutile pour les enseignants, puisqu'elle permet de comprendre les performances plus ou moins bonnes des calculatrices confrontées à des calculs d'intégrales.

$$|I - I'| = \left| K \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \right|.$$

Mais pourquoi faire apparaître cette fonction $Q(t)$? Parce que "cela marche"...

En effet, la fonction Q s'annule (évidemment) pour $t = 0$. Comme on a choisi K pour qu'elle s'annule pour $t = \frac{b-a}{2}$, le théorème de Rolle nous assure que $Q'(t)$ s'annule pour t_1 appartenant à $]0, \frac{b-a}{2}[$.

On trouve (tous calculs faits) :

$$Q'(t) = \frac{1}{3} [2f(c+t) + 2f(c-t) - 4f(c) - tf'(c+t) + tf'(c-t)] + 5Kt^4.$$

Q' s'annule donc pour $t=t_1$, mais aussi, vérification immédiate, pour $t=0$... On applique à nouveau Rolle. $Q''(t)$ s'annule pour t_2 appartenant à $]0, t_1[$

Un calcul du même type aboutit à :

$$Q''(t) = \frac{1}{3} [f'(c+t) - f'(c-t) - tf''(c+t) + tf''(c-t)] + 20Kt^3.$$

On est presque au bout de nos peines. Q'' s'annule pour $t=t_2$... et aussi pour $t=0$. Donc Q''' s'annule pour t_3 appartenant à $]0, t_2[$. Or :

$$Q'''(t) = -\frac{t}{3} [f'''(c+t) - f'''(c-t)] + 60Kt^2.$$

Q''' s'annulant pour $t = t_3$, on peut écrire :

$$K = \frac{f'''(c+t_3) - f'''(c-t_3)}{180t_3}$$

La fonction f''' étant dérivable, on peut, en appliquant le théorème des accroissements finis⁹, écrire qu'il existe ξ appartenant à $]c-t_3, c+t_3[$ tel que :

$$f'''(c+t_3) - f'''(c-t_3) = f^{(4)}(\xi)(c+t_3 - c + t_3) = 2t_3 f^{(4)}(\xi)$$

On obtient alors $K = \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}$. Evidemment le nombre ξ ne peut pas être facilement déterminé, mais la fonction $f^{(4)}$, étant continue, peut être bornée sur l'intervalle $[a; b]$. Ainsi, en posant $M = \sup_{[a; b]} f^{(4)}$, on peut écrire :

$$|I - I'| \leq \frac{M}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5, \text{ c'est à dire}$$

$$|I - I'| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880}$$

Bien entendu, on peut reproduire le même calcul, non plus sur $[a; b]$, mais sur chaque intervalle élémentaire d'une subdivision de $[a; b]$, d'une amplitude de $\frac{b-a}{n}$.

On aurait alors $|I - I'| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^5}$ et en totalisant les erreurs possibles sur les n intervalles, on aurait le résultat final (ouf...)

$$|I - I'| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$$

⁹ Si une fonction h est dérivable sur $[a, b]$, alors il existe c élément de $]ab[$ tel que $h(a) - h(b) = (b-a) h'(c)$, ce qui correspond à : il existe une tangente parallèle à la sécante.

D. Que faire de tout cela avec les élèves ?

Tout cela n'a de sens que si cela incite à réfléchir sur les problèmes de calcul numérique. On peut imaginer trois pistes :

1. Calcul approché d'une intégrale dont on ne connaît pas de primitive.

Soit $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$. On peut indiquer la méthode de Simpson pour approcher cette intégrale, et donner la formule de la majoration de l'erreur. La question qui se pose alors est : combien de subdivision choisir pour être assuré d'avoir une précision donnée ?

Il faut alors déterminer la dérivée 4^e de la fonction, et déterminer un majorant M de sa valeur absolue (soit par observation graphique de la fonction, soit par son étude systématique (en la dérivant à nouveau par exemple)).

Dans le cas considéré, $f^{(4)}(x) = (12 - 48x^2 + 16x^3) e^{-x^2} = g(x) e^{-x^2}$. Sur l'intervalle considéré, g vérifie $12 \leq |g(x)| \leq 20$ (cela se voit en traçant le graphe de g , ou si l'on veut, mais c'est plus long en étudiant le signe de g' , g'' ...etc) et donc puisque $e^{-x^2} \leq 1$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$, on a $|f^{(4)}(x)| \leq 20$.

Il suffira de résoudre alors l'équation

$$\frac{M}{2880n^4} < 10^{-p} \quad (\text{précision voulue...} p \leq 10)$$

On pourra aussi en profiter pour faire une distinction entre condition suffisante et condition nécessaire : en observant les résultats successifs obtenus pour des valeurs croissantes de n , on constatera que la précision voulue est obtenue pour une valeur de n inférieure à la valeur déterminée a priori.

2. Comparaison des performances du même algorithme pour des fonctions différentes.

On pourra remarquer que les résultats ne sont pas très bons si on veut intégrer la fonction \sqrt{x} sur $[0 ; 1]$: et pour cause, le contrôle de l'erreur ne peut pas se faire, à cause des problèmes de dérivabilité en 0.

3. Comparaison des performances de deux algorithmes différents pour la même fonction

On pourra ainsi approcher l'intégrale I évoquée ci-dessus successivement par la méthode des rectangles, des trapèzes, et de Simpson. On verra que la méthode de Simpson est incomparablement plus rapide.

4. RECHERCHE DE RACINES

La recherche des racines¹⁰, ou solutions, d'une équation $f(x) = 0$, ou encore, la recherche des zéros de f , était jusqu'il y a un certain temps une activité hors de portée d'un lycéen quelconque. Tout au plus, pouvait-on décrire le principe de quelques algorithmes sans pouvoir les soumettre à l'épreuve de la réalité ; avec l'avènement des calculatrices programmables, bien souvent munies d'un programme intégré de recherche de zéro, il devient possible de le faire. L'étude de la rapidité de la convergence des méthodes peut-être abordée également. C'est ce que nous proposons dans ce qui suit.

A. Intervalles emboîtés.

Les méthodes décrites supposent que l'on sache séparer les racines d'une équation.

Nous regroupons sous ce titre un certain nombre de méthodes toutes basées sur la propriété des intervalles emboîtés de \mathbb{R} .

A partir d'un intervalle $[x_0, y_0]$ contenant une racine α , on construit une suite d'intervalles emboîtés $([x_n, y_n])$, vérifiant $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subsetneq [x_n, y_n]$, dont la longueur tend vers zéro quand n tend vers l'infini et qui contiennent la racine cherchée. On a donc : $\bigcap [x_n, y_n] = \alpha$. Dans la réalisation pratique, on s'arrête quand la longueur de l'intervalle $[x_n, y_n]$ est inférieure à une quantité E fixée à l'avance, de sorte que a peut être pris égal à $\frac{x_n + y_n}{2}$ avec une erreur inférieure à $\frac{E}{2}$. Les propriétés de f amènent des constructions différentes.

DICHOTOMIE.

La fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et vérifie $f(a)f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution. Nous supposons que dans l'intervalle en question il n'y a qu'une seule solution.

L'idée est simple : on calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et, en fonction de son signe, on remplace a ou b par $\frac{a+b}{2}$, de sorte que la racine est dans un intervalle de longueur moitié que le précédent. On s'arrête quand la longueur de l'intervalle est inférieure à une certaine quantité que l'on s'est fixée. Après n itérations, la racine est dans un intervalle de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.

¹⁰ Voir aussi à ce propos l'activité "Recherche des zéros d'un polynôme", Chap. II. B. 1. de cette brochure.

Voici l'algorithme correspondant.

- 1 $(A+B)/2 \rightarrow X$;
- 2 Si $f(X) = 0$ alors Fin et X est solution ;
- 3 Si $f(X)f(A) > 0$, alors $X \rightarrow A$, sinon $X \rightarrow B$;
- 4 Si $|A-B| > \epsilon$, on va en 1 ;
- 5 Sinon Fin, et $X = (A+B)/2$ est solution (approchée).

METHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES

Le point de départ est le même que ci-dessus. Le segment joignant les points A et B du graphe coupe l'axe des x en un point M dont l'abscisse est donnée par l'équation : $\frac{x-a}{-f(a)} = \frac{b-x}{f(b)}$ qui

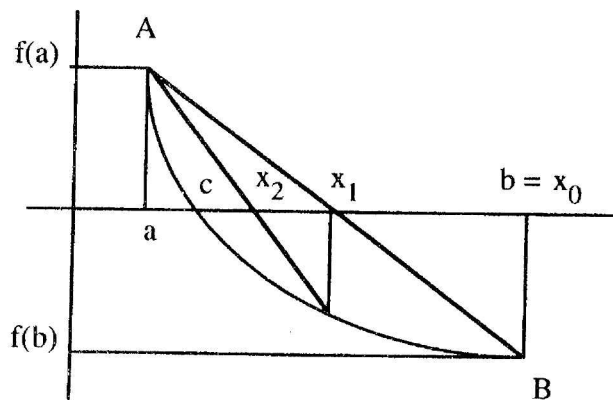
donne

$$x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Dans l'algorithme de la dichotomie on remplace alors l'instruction $(A+B)/2 \rightarrow X$ par l'instruction $\frac{Af(B)-Bf(A)}{f(B)-f(A)} \rightarrow X$.

Cette méthode est en général un peu plus rapide que la dichotomie.

Elle tire son nom du fait que le point M d'abscisse x partage le segment [a,b] en deux segments dont les longueurs sont proportionnelles à $|f(a)|$ et $|f(b)|$.



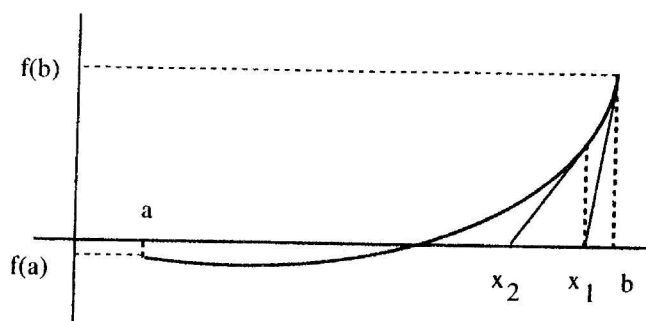
Remarque. Cette méthode est aussi appelée la méthode des sécantes. Mais cela peut prêter à confusion avec une autre méthode, proche de celle-ci, appelée aussi "méthode des sécantes" !

METHODE DE NEWTON-RAPHSON

On part toujours d'une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, mais on la suppose dérivable. L'idée est toujours la même : on construit, à partir de l'un des points A et B du graphe de f un point M de l'intervalle $]a,b[$ dont l'abscisse x vérifie $|x-a| < \sup(|a-\alpha|, |b-\alpha|)$, où α est la racine de f. Pour ce faire, on "trace" la tangente en A (ou B, les conditions initiales permettent de choisir), qui coupe l'axe des x en M d'abscisse x ; on remplace alors a (ou b) par x ...etc.

Dans le cas de la figure, nous avons : $f'(a) = \frac{f(a)}{x-a}$, d'où il résulte $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, et c'est cette valeur qui remplace a ou b.

Cette méthode converge en général plus vite que la méthode des sécantes. Elle présente par contre l'inconvénient de mettre en oeuvre la dérivée de f , dérivée que l'on peut ne pas connaître.



Toutes ces méthodes sont théoriquement correctes. Toutefois, près d'une racine de f , où $f(x)$ est "petit", les erreurs inévitables d'arrondis peuvent être supérieures à $f(x)$. Il en résulte que la précision E demandée peut être quelquefois totalement illusoire. Un moyen d'éviter ces ennuis consiste à remplacer la condition d'arrêt $|A-B| < E$ par $\frac{|A-B|}{|A| + |B|} < E$, ce qui revient à remplacer l'erreur absolue par l'erreur relative.

B. Point fixe

Dans cette méthode, on résout une équation du type $x = g(x)$ où g est continue (qui est équivalente, bien sûr, à une équation $f(x) = 0$. Voir ci-après).

Les racines de l'équation sont appelées les *points fixes* de g .

A partir d'une valeur $x_0 = a$, on construit $x_1 = g(x_0)$, ..., $x_n = g(x_{n-1})$; ceci sera possible si tout x du domaine de définition D de g a une image par g encore située dans D .

Si cette suite est convergente, sa limite est un point fixe de g , puisque g est continue.

L'existence d'un point fixe de g est assurée dans le cas où g est continue et applique $D = [a, b]$ dans lui-même.

Une fois assuré de l'existence d'un point fixe, il reste à savoir à quelle condition la suite (x_n) converge. Les définitions et résultats qui suivent sont bien connus.

- Soit g une application de $I = [a; b]$ dans I . On dit que g est *contractante*, s'il existe un nombre réel k tel que $k < 1$ et $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

Une telle fonction est nécessairement continue, et possède donc un point fixe (au moins un). En fait, ce point fixe est unique : en effet, si u et v sont deux points fixes distincts, on a : $|u - v| = |g(u) - g(v)| \leq k|u - v| < |u - v|$, ce qui est impossible.

La suite (x_n) converge alors vers le point fixe s de g dans I ; de manière plus précise, elle converge au moins aussi rapidement que la suite géométrique de raison k . En effet, on a :

$$|x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| \leq k|x_{n-1} - s| \leq \dots \leq k^n |x_0 - s|.$$

• Un point fixe de g est dit *attirant*, s'il existe un voisinage de s tel que pour tout x_0 dans V la suite (x_n) converge vers s ; il est dit *repoussant*, si pour tout voisinage V de s et tout x_0 de V , il existe un p tel que, à partir de ce rang, tous les x_n sont à l'extérieur de V .

Proposition. Soit s un point fixe de g . On suppose que g est continûment dérivable. Alors :

- (i) si $|g'(s)| < 1$, s est un point attirant ;
- (ii) si $|g'(s)| > 1$, s est repoussant ;
- (iii) si $|g'(s)| = 1$, on ne peut rien dire.

Preuve.

(i) Puisque g' est continue, il existe un voisinage de s dans lequel $|g'(x)| \leq k < 1$. Le théorème des accroissements finis permet d'écrire $|g(x) - g(s)| = |g'(t)(x-s)|$ pour un t compris entre x et s . Il en résulte que g est contractante et que s est attirant.

(ii) La technique est la même, mais g est une application dilatante : la distance entre $g(x)$ et $g(y)$ est strictement supérieure à la distance entre x et y .

(iii) Les arguments employés ci-dessus ne permettent pas de conclure et il existe des exemples où, dans cette situation, la suite $(g(x_i))$ peut converger ou non.

Application bijective.

Supposons que g soit bijective au voisinage du point fixe s de g et que $|g'(s)| > 1$; alors, s est un point repoussant, et la suite des itérés ne converge pas. Si $g^{-1} = h$, il est clair que s est un point fixe de h . Comme $|(g^{-1})'(s)| = \frac{1}{|g'(s)|} < 1$, le point s est attirant ; la suite des itérés construite à partir de h converge alors vers s .

Accélération de la convergence.

Quand la fonction g est contractante, la suite (x_n) est convergente et converge au moins aussi vite qu'une suite géométrique de raison k . Il est clair que cette convergence est d'autant plus rapide que k est petit. L'idée est de remplacer l'application g par une nouvelle fonction g_1 qui ait le même point fixe que g , mais avec un coefficient k plus petit.

Il est clair que l'équation $x = g(x)$ est équivalente à l'équation $x + \alpha x = \alpha x + g(x)$ où α est un nombre réel quelconque. Si $\alpha \neq -1$, on peut encore écrire l'équation sous la forme $x = g_1(x)$,

où $g_1(x) = \frac{\alpha x + g(x)}{1 + \alpha}$ et donc, d'une part, s le point fixe pour g est point fixe pour g_1 , et d'autre

part, $g_1'(x) = \frac{\alpha + g'(x)}{1 + \alpha}$.

*Supposons que $|g'(s)| \leq k < 1$; le point fixe s est attirant, et à partir d'un certain rang, la suite (x_n) converge aussi bien que la suite géométrique de raison k . En prenant $\alpha = -g'(s)$, à **supposer que l'on connaisse $g'(s)$** , on va obtenir une convergence très rapide (on a remplacé k par un K très proche de zéro) pour la suite (y_n) définie à partir de g_1 . On a donc ce que l'on appelle une *accélération de la convergence*.

Si on ne connaît pas $g'(s)$, on pourra remplacer, à chaque pas, α par une valeur approchée de $g'(s)$, à savoir $g'(x_n)$. (voir ci-après).

* Dans certains cas, on pourra avoir la situation suivante : la suite (x_n) définie par g ne converge pas, $g'(s)$ est connu, et la suite définie à partir de g_1 converge vers s .

Exemple. Soit A un nombre réel positif. On cherche à résoudre l'équation $x = \frac{A}{x}$; on cherche donc à calculer \sqrt{A} .

Si l'on calcule la suite (x_n) définie par g , on a : $x_0 = x_0$, $x_1 = g(x_0) = \frac{A}{x_0}$, $x_2 = g(x_1) = A/(A/x_0) = x_0$ et la suite ne converge pas (sauf si $x_0 = \sqrt{A}$!!!!)

Si s est le point fixe de $g(x) = \frac{A}{x}$, (ie $s = \sqrt{A}$), on a : $g'(s) = \frac{-A}{s^2} = -1$ qui est donc connu. En

prenant $\alpha = 1$, on va avoir $g_1(x) = \frac{1}{2} (x + \frac{A}{x})$ et $g_1'(s) = 0$ de sorte que la suite des (y_n)

construite à partir de g_1 va converger très rapidement vers \sqrt{A}

De manière plus précise, la suite (y_n) est définie par :

$$y_{n+1} = \frac{\alpha y_n + g(y_n)}{1 + \alpha} = \frac{y_n + g(y_n)}{2} = \frac{1}{2} (y_n + \frac{A}{y_n}).$$

C. Relations entre les méthodes

Considérons l'équation $f(x) = 0$,

(i). Elle est équivalente à l'équation $\alpha x = \alpha x + f(x)$, qui, si α est non nul, s'écrit

$$x = x + \frac{f(x)}{\alpha} = g(x),$$

(ii). Ceci montre que résoudre une équation $f(x) = 0$ équivaut à résoudre une équation du type $x = g(x)$.

• 1) Nous cherchons à résoudre (ii) par itération, c'est à dire que nous cherchons le (les) point(s) fixe(s) de g .

Il est clair que f et g sont continues en même temps, de sorte que si g est continue, g possède un point fixe. Ce point fixe s sera attirant si $|g'(s)| < 1$ et la suite (y_n) telle que $y_n = g(y_{n-1})$ convergera d'autant plus vite que $|g'(s)|$ sera petit, voire nul. Comme $g'(x) = 1 + \frac{f'(x)}{\alpha}$, on

prendra α égal à $-f'(s)$, si $f'(s)$ est connu! Si $f'(s)$ n'est pas connu, on prendra à chaque pas, pour valeur approchée de $f'(s)$ la valeur $f'(y_n)$. Donc, au lieu de la suite $y_{n+1} = 1 - \frac{f'(y_n)}{f'(s)}$, on aura la suite $y_{n+1} = 1 - \frac{f'(y_n)}{f'(y_n)}$. On retrouve ainsi la suite utilisée pour la méthode de Newton-Raphson.

• 2) Dans ce qui précède, le meilleur choix possible pour α était de le prendre égal à $-f'(s)$. Dans le cas où $f'(s)$ n'était pas connu, nous l'avons remplacé par $f'(y_n)$. Toutefois, comme $f'(y_n)$

est une approximation de $f'(s)$, on peut remplacer $f'(y_n)$ par $\frac{f(y_n) - f(y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}}$ qui constitue, pour n assez grand, une bonne approximation de $f'(s)$. La suite (y_n) est alors remplacée par la nouvelle suite (z_n) telle que $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)(z_n - z_{n-1})}{f(z_n) - f(z_{n-1})} = \frac{z_{n-1}f(z_n) - z_n f(z_{n-1})}{f(z_n) - f(z_{n-1})}$. On reconnaît la suite obtenue par la méthode des parties proportionnelles.

D. Types de convergence.

• 1. Convergence linéaire.

Soit s un point fixe attirant de g . On choisit x_0 dans le domaine d'attraction de g , et on désigne par e_n la quantité $|x_{n+1} - s|$. Le théorème des accroissements finis permet d'écrire :

$e_{n+1} = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = |g'(\xi)| |x_n - s| = |g'(\xi)| e_n$, pour un élément ξ compris entre x_n et s .

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(s)$ et $|g'(s)| = q < 1$, puisque s est un point attirant.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = q$, avec $0 < |q| < 1$, on dit que (x_n) converge linéairement vers s avec le coefficient de convergence q . Dans cette situation, pour n assez grand, la suite converge quasiment comme la suite géométrique de raison q .

• 2. Convergence quadratique.

Si $g'(s) = 0$, la formule de Taylor donne :

$e_{n+1} = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = \frac{1}{2} |g''(\xi)| |x_n - s|^2 = |g''(\xi)| e_n^2$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{1}{2} |g''(s)|$. On

parle dans cette situation de *convergence quadratique*. Dans ce cas la convergence est très rapide, beaucoup plus rapide que celle d'une suite géométrique.

E. Les programmes

Nous n'avons écrit que des versions simples ; notamment, il est admis que l'on connaît deux valeurs a et b telles que $f(a)f(b) < 0$. Pour des versions plus élaborées on pourra se reporter aux programmes diffusés par les divers fabricants de calculatrices, programmes qui sont dans le domaine public, ou à quelques ouvrages qui traitent de certaines calculatrices particulières.

Les programmes sont écrits pour TI 82.

Dichotomie	Parties Prop.	Newton
ClrHome	ClrHome	ClrHome
Disp "A<RACINE<B"	Disp "A<RACINE<B"	Disp "A<RACINE<B"
Prompt A,B	Prompt A,B	Prompt A,B
Disp "PRECIS.=E"	Disp "PRECIS.=E"	Disp "PRECIS.=E"
Prompt E	Prompt E	Prompt E
$0 \rightarrow N$	$1 \rightarrow N$	$0 \rightarrow N$
If $Y_0(A)Y_0(B) \geq 0$	If $Y_0(A)Y_0(B) \geq 0$	If $Y_0(A)Y_0(B) \geq 0$
Then	Then	Then
Disp "REVOIR A,B"	Disp "REVOIR A,B"	Disp "REVOIR A,B"
Else	End	End
While $(B-A) > E$ and $Y_0(A)Y_0(B) \neq 0$	While $(\text{abs } Y_0(A) > E$ and $\text{abs } Y_0(B) > E)$	While $\text{abs } Y_0(B) > E$
$(A+B)/2 \rightarrow C$	$(AY_0(B) - BY_0(A))/(Y_0(B) - Y_0(A)) \rightarrow C$	$B - Y_0(B)/Y_0(B) \rightarrow C$
If $Y_0(A)Y_0(C) > 0$	If $Y_0(A)Y_0(C) > 0$	If $Y_0(B)Y_0(C) > 0$
Then	Then	Then
$C \rightarrow A$	$C \rightarrow A$	$C \rightarrow B$
Else	Else	Else
$C \rightarrow B$	$C \rightarrow B$	$A \rightarrow D$
End	End	$B \rightarrow A$
$N+1 \rightarrow N$	$N+1 \rightarrow N$	$D \rightarrow B$
End	End	End
End	$N+1 \rightarrow N$	$N+1 \rightarrow N$
ClrHome	End	End
Output(1,1,"N="	ClrHome	ClrHome
Output(1,5,N	Output(1,1,"N="	Output(1,1,"N="
Output(2,1,"A="	Output(1,5,N	Output(1,5,N
Output(2,5,A	Output(2,1,"C="	Output(2,1,"C="
Output(3,1,"B="	Output(2,5,C	Output(2,5,B
Output(3,5,B	Output(3,1,"F(C)="	Output(3,1,"Y_0(C)="
Fix 2	Fix 2	Fix 2
Output(4,1,"B-A="	Output(3,7,Y_0(C)	Output(3,7,Y_0(C)
Output(4,5,B-A	Output(4,1,"F(C-E)="	Output(4,1,"Y_0(C-E)="
Float	Output(4,8,Y_0(C-E)	Output(4,9,Y_0(C-E)
	Output(5,1,"F(C+E)="	Output(5,1,"Y_0(C+E)="
	Output(5,8,Y_0(C+E)	Output(5,9,Y_0(C+E)
	Float	Float

Remarques.

1- La fonction f est dans Y_0 .

La dérivée, quand elle intervient (Méthode de Newton Raphson), est dans Y_9 ; on peut éventuellement la remplacer dans le programme par $nDeriv(Y_0, X,X,0,0001)$ par exemple.

2- La précision qui figure dans deux méthodes est en fait un test d'arrêt. Si α est la racine de $f(x) = 0$, et si f est dérivable, on a $f(x) = f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)f'(c)$. Si f' est bornée au voisinage de α , on a bien évidemment $\left| \frac{f(x)}{f'(c)} \right| = |x - \alpha|$, et $|x - \alpha|$ est borné par approximativement $\frac{E}{M}$.

3- Les programmes affichent le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la précision demandée. Cela donne une idée de la rapidité de la convergence.

4- Il peut être utile d'indiquer en début de programme les mémoires et les fonctions utilisées afin d'éviter des interférences. Par exemple, si la fonction Y_0 dépend du paramètre A , il y aura confusion avec la borne inférieure de $[A;B]$.

F. Exercices

1) Déterminer les racines des fonctions suivantes, dans les intervalles considérés.

a) $f(x) = x \ln(x) - 1$ [1,2]

b) $f(x) = x^3 - 10$ [2,3]

c) $f(x) = x^3 - x - 1$ [1,2]

d) $f(x) = x^2 - \sin x$ [0,1]

e) $f(x) = x - \cos x$ [0,1]

f) $f(x) = x^5 + 5x + 1$ [-1,0]

g) $f(x) = xe^x - 1$ [0,1]

2) Calculer π comme racine de l'équation $\sin x = 0$.

3) Déterminer les deux racines de l'équation $xe^{-x} = 1$.

4) Déterminer par itération la plus petite solution positive de l'équation $\tan x = x$. (On se ramène à l'équation $x = \text{Arc tan } x + \pi$).

5) Déterminer, par la méthode signalée au B, une valeur approchée de \sqrt{a} .

B. Analyse

1. TANGENTES À UNE COURBE

On s'intéresse ici à la courbe C représentative de la fonction qui, à x , associe

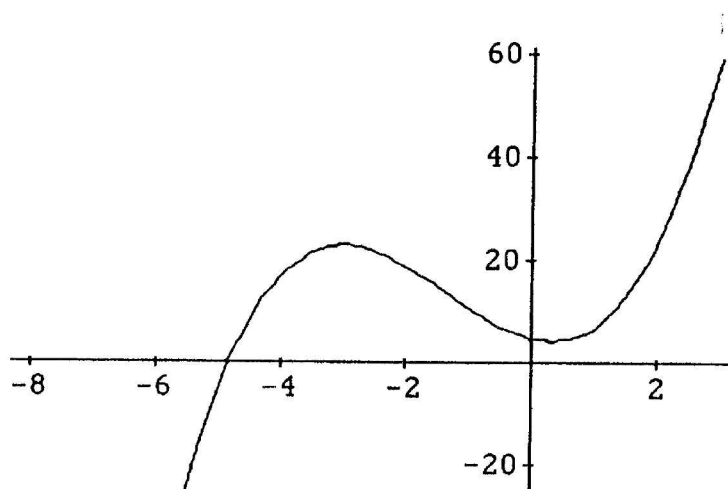
$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

Plus précisément, on veut tracer les tangentes à C passant par un point donné, extérieur à C .

Si dans un premier temps, on essaye de déterminer les solutions à partir d'un écran graphique, la validation demande ensuite d'effectuer de fréquents aller-retour entre graphe, calculs à la main et calculs à la machine.

A. Activité (elle peut couvrir plusieurs séances...)

1. Etudier précisément la fonction, et tracer sa courbe représentative pour x variant entre -8 et $+3$.



2. Placer le point A , de coordonnées $(-5,8; -9,4)$. Le problème consiste à déterminer le nombre, et l'équation des tangentes à C passant par A , ainsi que les coordonnées des points d'intersection entre la courbe et ses tangentes...

a) Quelles conjectures peut-on faire sur le nombre de tangentes répondant à la question ?

b) Montrer que toutes les droites (sauf celle qui est parallèle à l'axe des ordonnées) qui passent par A ont une équation de la forme : $y = -9,4 + a(x+5,8)$. Par approximations successives, en

donnant des valeurs particulières au coefficient directeur a , et en utilisant les écrans graphiques, essayer de trouver des équations "convenables" pour les tangentes à C passant par A .

c) Montrer alors que si une tangente d'équation $y = ax + b$ répond à la question, et est tangente à la courbe C au point M_0 de C , de coordonnées (x_0, y_0) , alors les inconnues a , b , x_0 et y_0 vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} y_0 &= a(x_0 + 5,8) - 9,4 \\ a &= 3x_0^2 + 8x_0 - 3 \\ y_0 &= x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 + 2 \end{aligned}$$

d) Montrer alors que, en exprimant à l'aide de la première équation a en fonction de x_0 et y_0 , on obtient un système à deux inconnues ...

$$\frac{y_0 + 9,4}{x_0 + 5,8} = 3x_0^2 + 8x_0 - 3$$

$$y_0 = x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0 + 2$$

...puis une équation à une inconnue :

$$0 = 2x_0^3 + 21,4x_0^2 + 46,4x_0 - 28,8$$

e) Après avoir déterminé une solution entière à cette équation, déterminer toutes les autres (on pourra bien sûr tracer sur une calculatrice graphique la courbe de la dernière fonction mise en évidence, et conjecturer les solutions de l'équation : si on a deux solutions réelles d'une équation du troisième degré, peut-on trouver la troisième ?) **Mais, attention, on veut des valeurs exactes !**

Une question subsidiaire se pose alors : la calculatrice permet-elle, ici, de s'assurer du caractère exact des racines (autrement dit : le nombre de chiffres significatifs est-il compatible avec les capacités de la machine ?).

f) Déterminer alors les équations des tangentes cherchées. (**penser à vérifier tous les résultats sur les écrans graphiques! On choisira bien sûr des fenêtres adaptées à la visualisation de chaque point de contact...**)

g) Toutes les tangentes "recoupent-elles" la courbe ? Si oui, en quel point ?

h) On conclura en traçant sur le graphique les tangentes trouvées, avec les points de contact.

B. Solutions et commentaires...

Pour les abscisses des points de contact :

$$x_1 = -7,2, x_2 = -4, \text{ et } x_3 = 0,5.$$

Pour les trois équations de tangentes, on trouve :

$$y = 94,92x + 541,136 ; y = 13x + 66 ; y = 1,75x + 0,75$$

Bien sûr, s'agissant d'intersections de courbes du premier degré et de courbe du troisième degré, les tangentes ont de fortes chances de recouper la courbe (d'autant que le point de contact est un point double... Donc, s'il n'est pas triple - si ce n'est pas le point d'inflexion - on doit nécessairement avoir un autre point de rencontre...)

L'objectif de cette activité est d'opérer des aller-retour fréquents entre écrans graphiques, calculs numériques à la main et calculs à la machine.

Le fait qu'il ne s'agisse pas de nombres entiers n'est pas tout à fait rédhibitoire : on ne travaille que sur des décimaux qui n'excèdent pas "trois chiffres après la virgule", et, avec des calculatrices, cela va vite...

Enfin, le fait de voir des tangentes à des courbes qui ne rencontrent pas celles-ci en un seul point n'est sans doute pas tout à fait inutile...

C. Autres méthodes, autres points de vue...

On aurait pu, au lieu de chercher d'abord les points de contact, chercher les coefficients directeurs des tangentes.

Il aurait alors fallu étudier le système :

$$\begin{cases} y = ax + 5,8a - 9,4 & \text{équation générale des droites "non verticales" passant par A} \\ y = x^3 + 4x^2 - 3x + 2 & \text{équation de C,} \end{cases}$$

c'est à dire rechercher les valeurs de a pour lesquelles l'équation suivante admet une racine double

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - x(a+3) - 5,8a + 11,4 = 0$$

- On peut procéder par approximations successives, en donnant à a des valeurs différentes, et en faisant en sorte que la courbe représentative soit tangente à l'axe des abscisses...

- On peut aussi vérifier que pour les valeurs de a précédemment trouvées, on a bien le résultat voulu.

- On peut aussi procéder de façon systématique, et ce encore de différentes façons :

- En écrivant que le discriminant du polynôme est nul (on rappelle que le discriminant d'un polynôme du troisième degré de la forme $x^3 + px + q$ est égal à $4p^3 + 27q^2$). Mais faire ainsi suppose un changement de variable pour se ramener à la forme voulue... Et les discriminants des polynômes de degré supérieur à deux ne sont pas particulièrement au programme des classes de lycée.

- On peut, ce qui revient au même, écrire que le produit $g'(x_1) \cdot g'(x_2) \cdot g'(x_3)$ (si on appelle x_1, x_2, x_3 les trois racines réelles ou complexes de g) doit être nul. On exprime alors ce produit en fonction des coefficients de g , à l'aide des relations coefficients/racines.

• On peut aussi y aller "à la main". En écrivant que le polynôme g et son polynôme dérivé g' admettent une racine commune...

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - x(a+3) - 5,8a + 11,4$$

$$g'(x) = 3x^2 + 8x - (a+3)$$

Mais cette racine est alors racine de $h(x) = 3g(x) - xg'(x) = 4x^2 - 6x - 2ax - 17,4 + 34,2...$

Et elle est aussi racine de $i(x) = 4g'(x) - 3h(x) = 50x + 6ax + 48,2a - 114,6.$

Et comme ce polynôme n'a qu'une racine, c'est réglé : c'est nécessairement $x = \frac{57,3 - 24,1a}{25 + 3a}.$

Cette racine vérifie $g'(x) = 0$, on obtient ainsi par rapport dans l'expression de g' l'équation :

$$3(57,3 - 24,1a)^2 + 8(57,3 - 24,1a)(25 + 3a) - (a+3)(25 + 3a)^2 = 0$$

On a une équation du troisième degré en a , un petit coup de machine, et on retrouve les trois solutions annoncées pour a . On vérifie alors (toujours avec la machine) que ce sont bien des valeurs décimales exactes. Avec une dernière question : si la machine annonce 0, faut-il la croire ? On a des nombres avec 4 décimales, élevés au cube... On est à la limite des possibilités de la machine. Méfiance...

Remarque : on peut limiter le nombre de chiffres issus des multiplications successives en regroupant les termes de degré en a supérieur ou égal à 1, en factorisant a . On doit alors contrôler une égalité du type $k(a) = \frac{\lambda}{a}$. Degré inférieur, moins de chiffres significatifs à gérer, cela soulage d'autant la machine...

Bref, ces questions n'ont (presque) pas de fin...

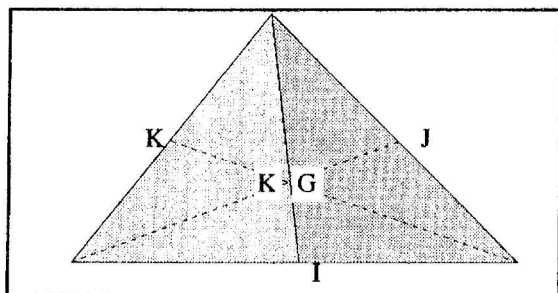
C. Géométrie

1. CENTRE DE MASSE ET ISOBARYCENTRE

Le centre des masses¹¹ (ou centre d'inertie) d'une plaque homogène d'épaisseur constante est situé sur les éventuels axes de symétrie, et par conséquent, au centre de symétrie éventuel de la plaque. On utilise pour vérifier cette propriété, la proportionnalité aire/masse ainsi que la conservation des aires des figures transformées par isométries.

Il s'agit ici de confronter cette notion à celle d'isobarycentre d'un ensemble fini de points définissant un polygone.

A. Cas du triangle



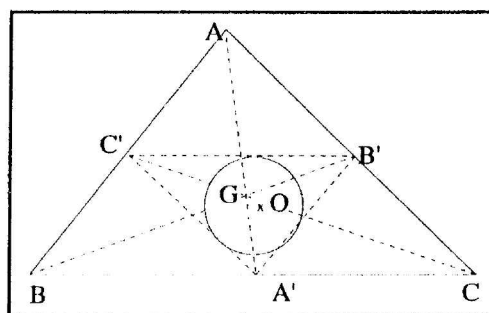
On a, dans le cas du triangle, coïncidence entre l'isobarycentre G et le centre des masses K :

Les deux triangles définis par les côtés du triangle initial et une médiane ont même aire, K se trouve donc sur cette médiane.

K est donc à l'intersection des médianes.

Problème

- Le centre d'inertie O du triangle ABC , dont seuls les côtés formés d'une barre homogène sont pesants, est le centre du cercle inscrit dans le triangle des milieux.
- Dans quel cas y a-t-il coïncidence entre O et l'isobarycentre G de ABC ?



¹¹ Il est peut-être inutile ici d'insister sur la distinction entre centre des masses (ou centre d'inertie) et centre de gravité qui correspond au point d'application des forces résultantes appliquées sur un solide. En effet, dans la mesure où en général le champ gravitationnel considéré est constant, il y a coïncidence entre centre des masses et centre de gravité, mais si le champ gravitationnel est variable, il faut encore établir une différence entre les deux. Ce point est peut être, sans l'ignorer, à laisser à l'appréciation des professeurs de physique. Mais les exercices souvent proposés dans les livres de mathématiques sur les recherches de centre d'inertie, proposent des solides ayant un centre de symétrie qui est de fait l'isobarycentre des sommets (ou de solides composés de parties à centre de symétrie), il s'agit donc ici de voir en quoi les deux notions diffèrent ou coïncident.

- Soit $(A'U)$ bissectrice intérieure de $A'B'C'$

A partir de l'aire de $A'UB'$: $A'H \cdot UB' = UV \cdot A'B'$

A partir de l'aire de $A'UC'$: $A'H \cdot UC' = UW \cdot A'C'$

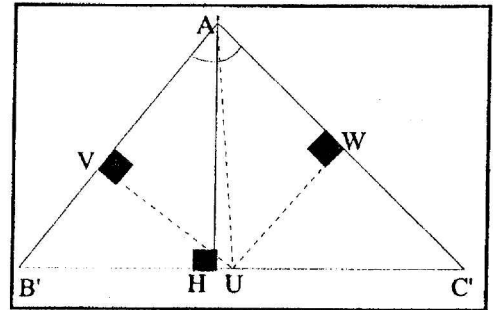
De l'égalité $UV = UW$, on déduit: $\frac{UB'}{A'B'} = \frac{UC'}{A'C'}$

On a donc $A'C' \vec{UB}' + A'B' \vec{UC}' = \vec{0}$.

D'où: $b \vec{UB}' + c \vec{UC}' = \vec{0}$.

(avec les notations conventionnelles $b = AC$, $c = AB$)

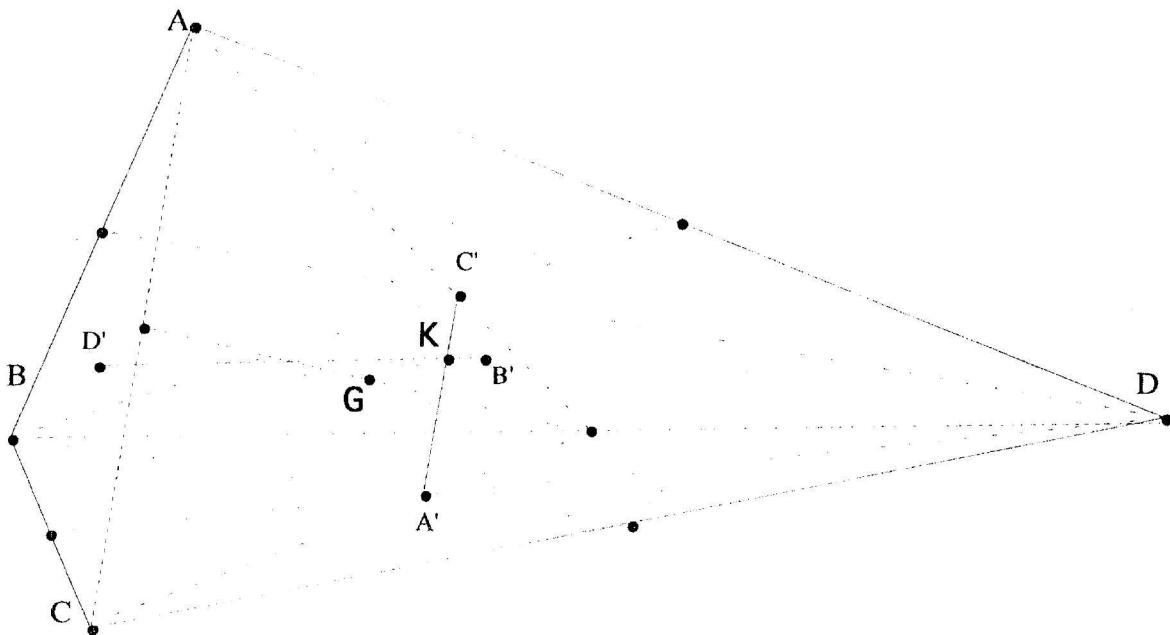
Le barycentre de U affecté de $(b+c)$ et celui de A' affecté de a sera donc sur la bissectrice issue de A' .



- G est aussi isobarycentre de $A'B'C'$,

si $\vec{A'G} = \vec{A'O}$, la diagonale de $A'B'AC'$ est aussi bissectrice donc $A'B'AC'$ est un losange et ABC est isocèle de sommet A ...

B. Cas du quadrilatère



Ici $K \neq G$ (G isobarycentre ; K centre des masses)

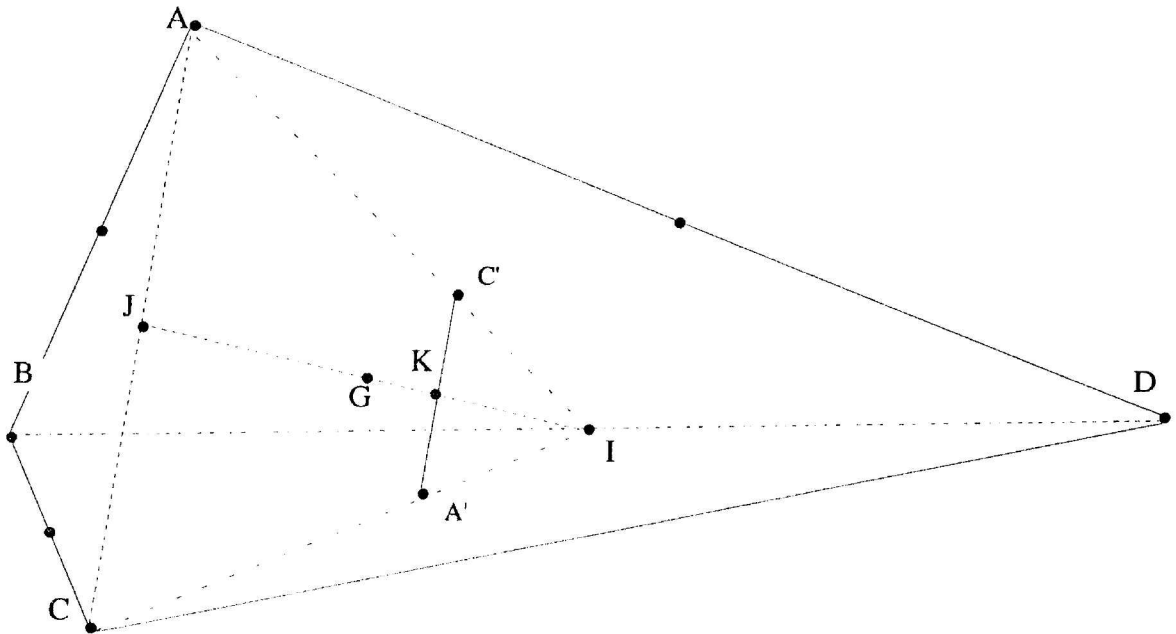
G isobarycentre de A, B, C et D est construit par associativité

K centre des masses : on construit le centre des masses D' , C' , B' et A' des triangles ABC , ABD , ACD et BCD en utilisant la coïncidence mentionnée dans le cas du triangle, puis l'associativité permet de localiser K à l'intersection de $(A' C')$ et $(B' D')$

Problème

Si $ABCD$ admet un centre de symétrie ($ABCD$ parallélogramme), on a alors coïncidence :
isobarycentre = centre des masses (= centre de symétrie)

Si il y a coïncidence $G = K$ que dire de $ABCD$?



C' , isobarycentre (et centre des masses) de ABD vérifie $3 \vec{IC'} = \vec{IA}$, de même on a : $3 \vec{IA'} = \vec{IC}$
d'où $(C'A') \parallel (CA)$.

Si $K = G$ on a I, K et J alignés vérifiant $\vec{IJ} = 3 \vec{IK}$ or G est le milieu de $[IJ]$

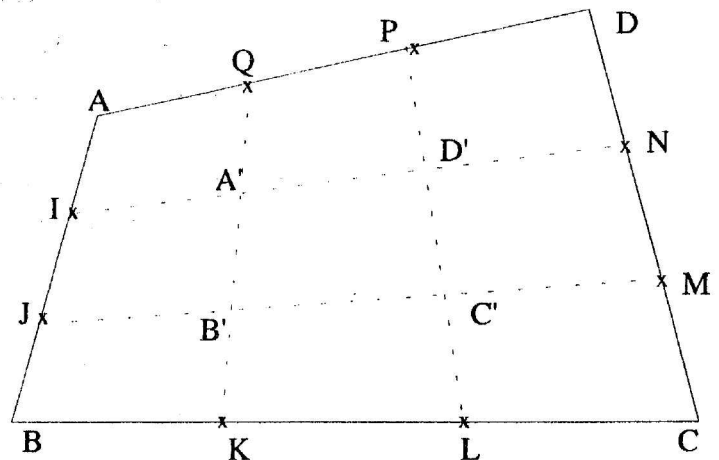
donc $\vec{IJ} = 2 \vec{IG} = 2 \vec{IK}$ d'après l'hypothèse $G = K$.

Il s'ensuit que $\vec{IJ} = \vec{0}$ donc que $ABCD$ est un parallélogramme

C. Quadrilatères "emboîtés", barycentres et aires

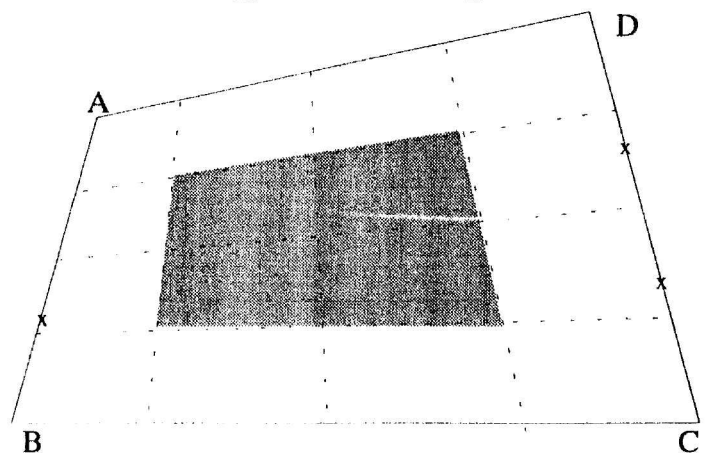
Les points I ; J ; K ... partagent régulièrement en 3 les côtés du quadrilatère ABCD.

- Isobarycentre de A'B'C'D' par rapport à celui de ABCD ?
- Aire de A'B'C'D' par rapport à celle de ABCD ?



Généralisation

Si on partage les côtés du quadrilatère ABCD en n segments de même longueur, selon que n est impair ou pair le quadrilatère "central" A'B'C'D' change. Comment se généralise la relation entre leurs aires, trouvée si n = 3 ?



Indépendamment de la parité de n, on peut établir : $Aire_{ABCD} = \frac{n^2}{(n-2)^2} Aire_{A_1B_1C_1D_1}$, en

désignant par $A_1B_1C_1D_1$ le quadrilatère obtenu en laissant "un carreau" sur les côtés.

Il suffit de considérer A_1 comme le barycentre du système : $A(n-1)^2 ; B(n-1) ; D(n-1)$ et $C(1)$ et d'exprimer $\vec{A_1C_1}$ en fonction de $\vec{A_1C_1}$. En itérant le processus, on obtient alors

- si n impair : $Aire_{ABCD} = n^2 Aire_{A'B'C'D'}$
- si n pair : $Aire_{ABCD} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 Aire_{A'B'C'D'}$

D'autres relations peuvent être trouvées :

- par exemple, entre l'aire de ABCD et de $A_kB_kC_kD_k$, en désignant ici le quadrilatère obtenu en laissant "k carreaux" sur les côtés.

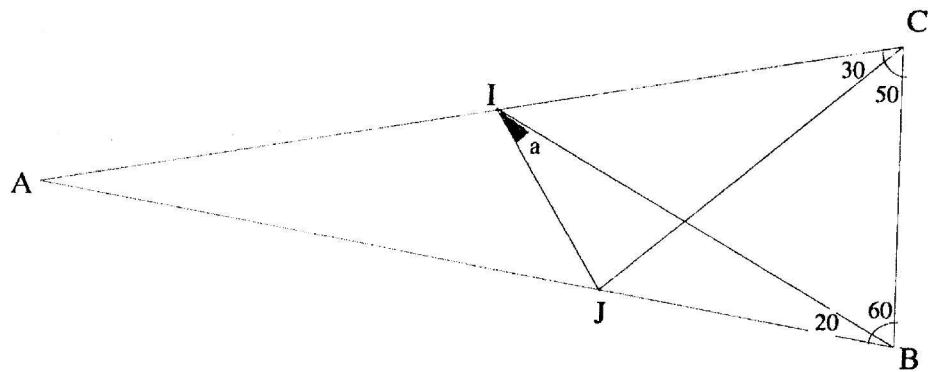
$$Aire_{ABCD} = \left(\frac{n}{n-2k}\right)^2 Aire_{A_kB_kC_kD_k}$$

- on peut aussi essayer de trouver des relations avec les aires des "bordures".

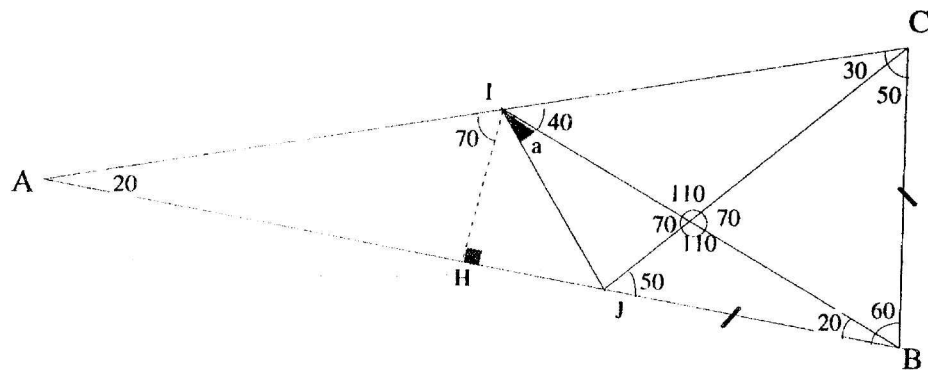
Remarque : ce travail suppose comme préalable avec les élèves d'exprimer l'aire d'un quadrilatère quelconque à partir des longueurs de ses diagonales.

2. UN TRIANGLE PARTICULIER

Un triangle isocèle ayant des angles à la base de 80° , des droites issues de B et C avec des inclinaisons respectives de 60° et 50° par rapport à la base, qui coupent les côtés [AC] et [AB] en I et J et voilà une mesure pour l'angle a bien particulière. Une démonstration trigonométrique donne bien le résultat mais quelles propriétés spécifiques à ce triangle peuvent en être à l'origine ? Des considérations de symétrie permettent également d'obtenir le résultat et d'observer aussi d'autres propriétés de ce triangle. Le tour de celles-ci n'est peut-être pas complètement établi...



A. Des considérations trigonométriques



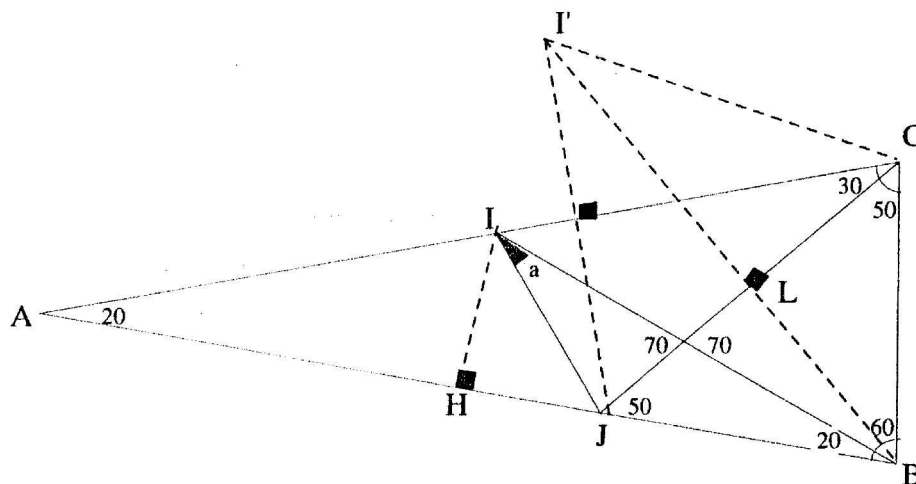
On note $AB = 2x$;

Dans ABC isocèle de sommet A : $BC = 4x \sin 10$

Or $BC = BJ$ et $AH = HB = x$ dans AIB isocèle de sommet I, donc $HJ = x - 4x \sin 10$

$HI = x \tan 20$ d'où : $\tan(70 - a) = \frac{HJ}{HI} = \frac{1 - 4 \sin 10}{\tan 20}$, on constate $a = 30^\circ$

B. Singularité du symétrique I' de J par rapport à (AC)



On montre d'abord que le triangle $I'JC$ est équilatéral.

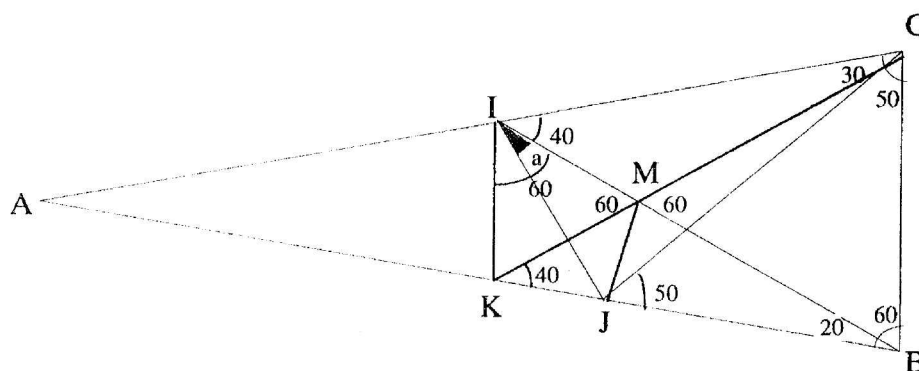
Comme JCB isocèle de sommet principal B , on peut en déduire que $(I'B)$ est axe de symétrie du quadrilatère $I'CBJ$ et de là, que la mesure de l'angle $I'BI$ est 20° (angles à côtés perpendiculaires).

Le triangle $AI'B$ est isocèle de sommet principal I' (angles à la base de 40°).

On a ainsi I', I, H alignés (médiatrice de $[AB]$) et l'angle $HI'J = 20^\circ$.

Pour terminer, on a $HIJ = 40^\circ$ d'où $a = 30^\circ$.

C. On donne à la figure une certaine symétrie.



On construit le triangle équilatéral BCM et le point K . De façon immédiate MIK est aussi équilatéral.

Comme BCJ est isocèle de sommet principal B (angles à la base de 50°), on a BJM isocèle de sommet principal B et les angles à la base de 80° .

JKM est alors isocèle de sommet principal J (angle $MJK = 100$ et $JKM = 40$).

(JI) est donc axe de symétrie du quadrilatère $KIMJ$ et $a = 30^\circ$.

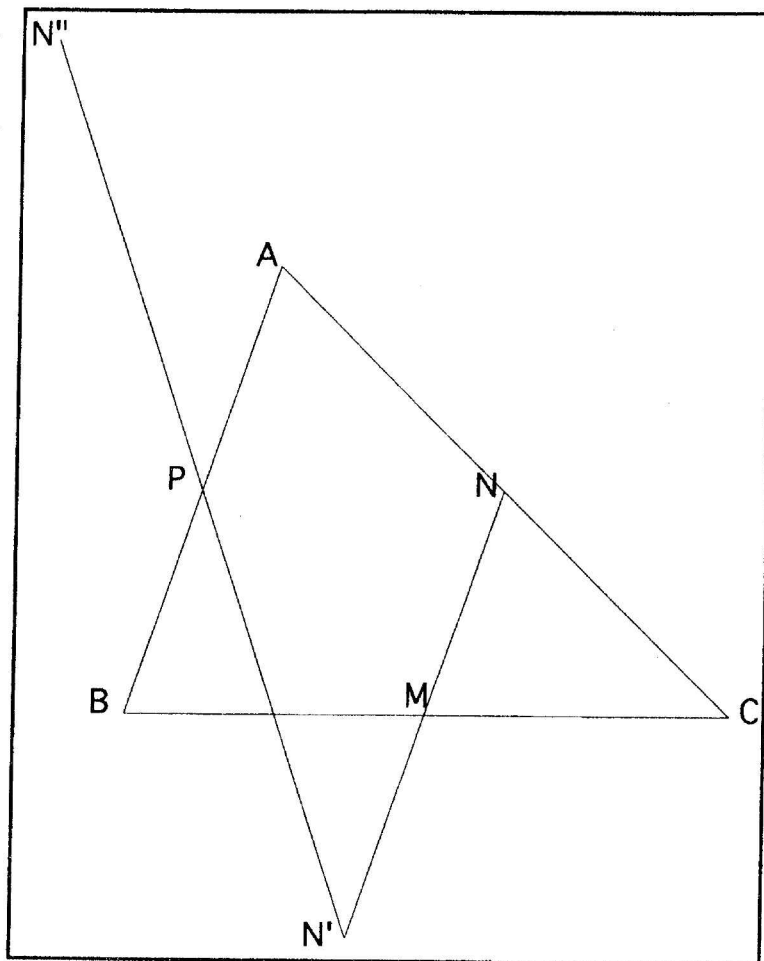
3. POLYGÔNE DÉFINI PAR LES MILIEUX DE SES CÔTÉS

On s'intéresse ici à la construction d'un (du ? des ?) polygône (s) dont on connaît les milieux des côtés.

1) Soient trois points distincts M , N , et P , supposés être les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$ d'un triangle. Peut-on déterminer A , B et C ? De façon unique ? Par quelles méthodes peut-on construire pratiquement A , B et C ?

On pourra faire remarquer aux élèves l'intérêt, pour les problèmes de construction, qu'il y a à raisonner sur deux figures juxtaposées : la première, avec les seules données du problème, la deuxième, avec la construction supposée réalisée.

L'observation de la deuxième figure, bien connue par ailleurs des élèves, met en évidence par exemple le parallélogramme $MNPB$, ce qui assure à la fois l'existence et l'unicité du triangle cherché. On pourra évidemment discuter le cas où les trois points M , N , et P sont alignés, ce qui amène à la détermination d'un triangle certes aplati, mais bien unique.



Les techniques de construction du triangle ABC sont nombreuses, et peuvent amener à une sorte de défi pour les élèves : qui en trouvera le plus ? Cette recherche a un intérêt autre que purement sportif : certaines méthodes seront généralisables à plus de trois points, d'autres non.

On peut ainsi obtenir A comme :

- image de P par la translation de vecteur \vec{MN}
- image de M par la symétrie de centre le milieu de $[PN]$
- image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -2 (car les triangles MNP et ABC ont même centre de gravité G ...)

- on peut aussi considérer l'application f , composée des symétries de centre N , M et P . Comme composée de trois rotations d'angle π , c'est aussi une rotation d'angle π , c'est à dire une symétrie centrale. Comme A reste invariant par f , f est la symétrie centrale de centre A .

Il "suffit" alors de déterminer l'image par f de N (comme N est invariant par la première symétrie centrale de centre N , il suffit de déterminer deux images successives N' et N'').

A est alors milieu de $[NN'']$...

- on peut procéder aussi analytiquement, en recherchant les coordonnées (ou les affixes complexes) de A , B , et C à partir de celles de M , N , et P . On résoud alors un système de trois équations à trois inconnues.

- liste non limitative...

2) On se pose la même question, pour quatre points.

Il est clair ici que le problème, pour avoir une solution, nécessite des positions particulières pour les points $MNOP$: ils doivent nécessairement constituer un parallélogramme.

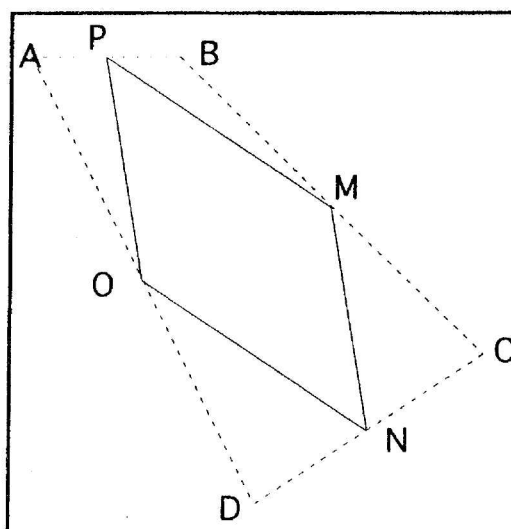
Réciproquement, si $MNOP$ est un parallélogramme... tout point A convient. A étant fixé, la construction de B , C , D est alors unique.

On peut alors voir ce qui, dans les méthodes exhibées pour trois points, ne marche plus :

- les méthodes 1, 2 ou 3 ne conviennent plus (on ne peut plus obtenir un des points cherchés par une symétrie, une translation, ou une homothétie à partir des points donnés.)

- la méthode 4 non plus, car on devrait faire ici le produit de quatre symétries centrales, ce qui donne une translation...

- et la méthode analytique aboutit à un système de quatre équations, avec un déterminant principal égal à 0...



Remarque 1 : $MNOP$ étant un parallélogramme, on peut éventuellement choisir A hors du plan de ces quatre points. On obtient alors un quadrilatère gauche $ABCD$, qui répond parfaitement à la question.

Remarque 2 : il est alors tentant de prolonger le problème. L'existence et l'unicité des solutions dépendent-elles de la parité du nombre de milieux choisis ? C'est ce que l'on se propose d'étudier maintenant...

3) On prend maintenant 5 points quelconques, MNO PQ. Peut-on reconstruire le pentagone ABCDE, et ceci de façon unique ?

(on pourra éventuellement prendre 5 points non coplanaires, cela ne change rien à ce qui suit ; on pourra aussi passer directement au cas général, avec n points, n impair)

On se placera d'emblée dans le cas général ici, avec un polygone de sommets $A_1, A_2, \dots, A_{2p+1}$. On notera $M_1, M_2, \dots, M_{2p+1}$ les milieux des côtés $[A_1, A_2], \dots$, et $a_i ; m_i$ les affixes des sommets et des milieux.

- Géométriquement, il apparaît assez simplement que l'application f composée des $2p+1$ symétries de centre $M_1, M_2, \dots, M_{2p+1}$ est une symétrie, et qu'elle laisse invariant le point A_1 . C'est donc la symétrie de centre A_1 . Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'image N de M_1 , par f , et A_1 sera le milieu de $[M_1, N]$. On a bien, d'un coup, l'existence et l'unicité du polygone cherché. On pourra là aussi remarquer que le polygone des milieux et le polygone final ont même isobarycentre (attention, cela ne veut pas dire qu'ils ont même centre d'inertie ! cf activité n°1 Géométrie)

- Analytiquement : on va chercher les affixes des sommets, connaissant les affixes des milieux (si on veut éviter de se situer dans \mathbb{C} , ou si on veut se situer dans l'espace, on cherchera successivement les abscisses, les ordonnées et les côtés des sommets du polygone)

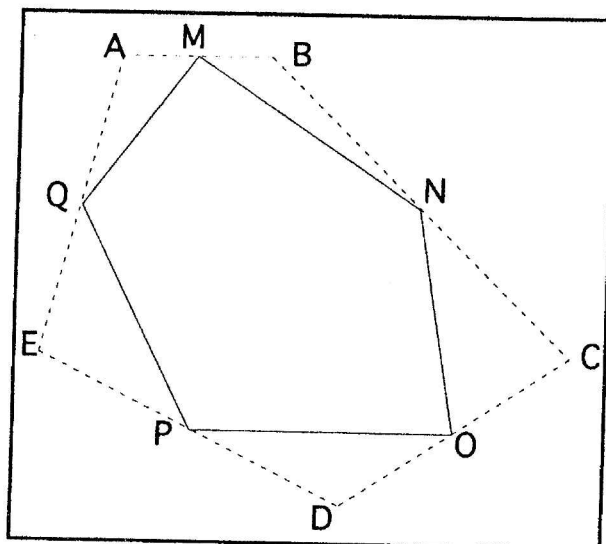
On dispose alors d'un système de $2p+1$ équations à $2p+1$ inconnues :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 2m_1 \\ a_2 + a_3 &= 2m_2 \end{aligned}$$

.....

$$a_{2p} + a_{2p+1} = 2m_{2p}$$

$$a_1 + a_{2p+1} = 2m_{2p+1}$$



Par addition, on obtient immédiatement que la somme des a_i est égale à la somme des m_i , ce qui traduit l'égalité des deux isobarycentres.

Il suffit alors de soustraire l'équation obtenue et les p équations du système de rang pair, on obtient alors :

$$a_1 = m_1 - m_2 + m_3 - m_4 + \dots - m_{2p} + m_{2p+1} .$$

On trouve alors les affixes des autres sommets.

4) On finit alors en étudiant le problème avec un nombre pair de points (d'abord 6, puis $2p$ points)

L'étude est laissée au lecteur curieux... Tout vient du fait que :

- géométriquement le produit d'un nombre pair de symétries centrales est une translation, et c'est en fait la translation de vecteur nul puisque l'image de A_1 par cette application composée est lui même. Ceci impose, en regroupant les symétries deux par deux : $M_1\vec{M}_2 + M_3\vec{M}_4 + \dots = \vec{0}$.

Si cette condition est réalisée, alors on peut prendre pour premier sommet de l'hexagone n'importe quel point. Les autres sommets sont alors imposés. Si la condition n'est pas réalisée, aucune solution...

- analytiquement, le traitement du système fait apparaître la même condition, et les mêmes solutions...

5) On peut poursuivre avec une question ouverte (ou plutôt semi-ouverte, ne soyons pas hypocrites...) : dans quel autre problème concernant les polygones doit-on distinguer suivant la parité du nombre de sommets ?

Indication : on pourra s'intéresser à la recherche des chemins les plus courts joignant les côtés d'un polygone. Pour un triangle (tous les triangles ?), on dispose du triangle orthique, formé par les pieds des hauteurs. Il y aurait donc unicité. Et pour un quadrilatère ?

Se reporter à l'activité suivante ("Chemins de lumière") pour des éléments de réponse...

4. CHEMINS DE LUMIÈRE ET TRAJETS MINIMAUX DANS LES POLYGONES

On s'intéresse ici à la question suivante : existe-t-il dans tout polygône des chemins de lumière (c'est à dire angle d'incidence égal à angle de réflexion) ? Ces chemins sont-ils uniques ? La nature faisant toujours bien les choses, et suivant le principe d'énergie minimale, ces chemins de lumière sont-ils toujours les plus courts chemins joignant les côtés d'un polygône ?

En fait, on s'intéressera seulement aux triangles et aux quadrilatères. Le lecteur curieux pourra essayer d'étendre les résultats ci-dessous aux polygones ayant un nombre pair ou impair de côtés. Il pourra aussi se reporter aux bons auteurs qui nous ont beaucoup inspirés...¹²

A. Des triangles, de la lumière, et des économies d'énergie

Considérons un triangle ABC. Alors on dispose des résultats suivants :

1. Le triangle orthique IJK (qui relie les pieds des hauteurs) est un "chemin de lumière".

C'est à dire que les droites (IJ) et (IK) se correspondent dans la réflexion d'axe (BC), etc.... La preuve repose sur des considérations de cocyclicité : si on appelle H l'orthocentre de ABC, les points BIHK sont cocycliques pour cause d'angles droits, et l'angle HIK est donc égal à l'angle HBK. De la même façon BKJC sont cocycliques, et HBK est égal à HCJ. Enfin IHJC sont cocycliques, et HCJ est égal à HIJ. Finalement, on a bien par transitivité l'égalité des angles HIK et HIJ et la symétrie annoncée des droites (IJ) et (IK) par rapport à (BC). On procède de la même façon pour les autres droites.

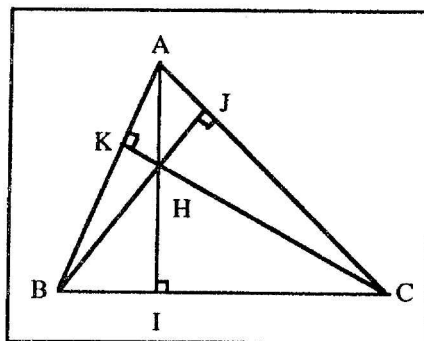


Figure 1

2. Si dans un triangle un chemin de lumière existe, alors il est unique.

Considérons en effet un chemin de lumière IJK, I sur la droite (BC), J sur (AC) et K sur (AB) et les réflexions successives R_1, R_2, R_3 , par rapport aux droites (AB), (BC) et (AC). Alors

¹² Marcel Berger, Géométrie, 9.3.7

l'image de (KJ) par $R_3R_2R_1$ est la droite (KJ) elle-même. Or la composée de trois isométries négatives est une isométrie négative, qui n'a qu'une droite de points invariants. Donc (KJ) est unique, et donc le chemin de lumière aussi.

Conclusion : dans tout triangle, il existe un chemin de lumière, et ce chemin est unique.

3. De plus, si le triangle ABC est "acutangle", c'est à dire si ses trois angles sont aigus, le chemin de lumière est le plus court chemin reliant les trois côtés du triangle du triangle ABC.

La preuve passe encore par les réflexions. Supposons en effet le point I répondant à la question connu, sur le côté [BC]. On construit alors les symétriques I' et I'' de I par rapport aux côtés (AB) et (AC) (voir fig 2)

On dispose alors de l'égalité $IK + KJ + JI = I'K + KJ + JI''$. Les points I' et I'' étant fixés, le trajet sera minimal si K et J sont alignés avec I' et I'' (les points K et J seront bien sur les segments [AB] et [AC] puisque l'angle A est aigu).

Considérons alors la figure ainsi construite (fig 3). La somme $I'K + KJ + JI''$ est alors égale à $I'I''$, qu'il s'agit de minimiser. Pour des raisons de symétrie, I, I' et I'' sont sur un cercle de centre A et de rayon AI, et l'angle IAI'' est égal au double de l'angle BAC.

La distance I'I'' est alors égale à $2AI \sin BAC$. Elle est minimale pour AI minimal, c'est à dire si I est le pied de la hauteur abaissée de A sur [BC]. Le chemin de lumière est bien le triangle orthique.

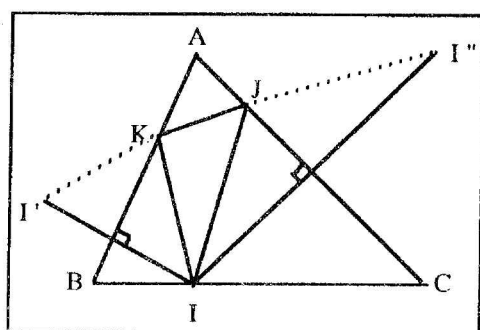


Figure 2

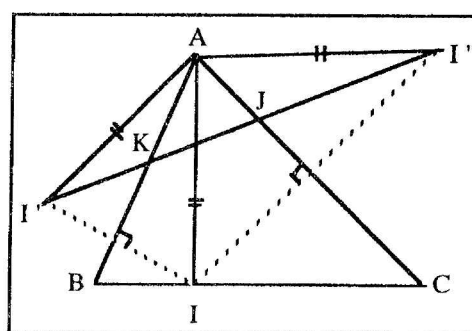


Figure 3

Résumons nous... Dans tout triangle, il y a un unique chemin de lumière, et c'est le triangle orthique. Si de plus le triangle est acutangle, alors ce chemin de lumière est le plus court chemin joignant les trois côtés du triangle.¹³

¹³ On peut légitimement se poser la question : que se passe-t-il si le triangle n'est pas acutangle ? Le lecteur curieux pourra vérifier que le plus court chemin joignant les trois côtés du triangle est alors le segment joignant "l'angle obtus" au côté opposé.

B. Des quadrilatères, et de la preuve que, quand ils se produisent, les évènements rares se produisent abondamment

1. S'il y a un chemin de lumière, alors il y en a une infinité...

Supposons en effet l'existence dans ABCD d'un chemin de lumière IJKL (fig 4). On trace alors (I'J') parallèle à (IJ), (J'K') parallèle à (JK), etc... On démontre sans peine que on revient ainsi à I' (par l'incontournable Thalès par exemple). Pour des raisons de parallélisme, si IJKL est un chemin de lumière, I'J'K'L' aussi.

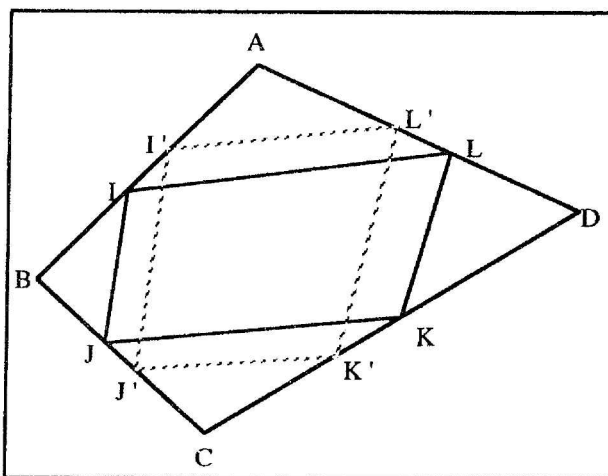


Figure 4

2. Il n'y a donc pas unicité du chemin de lumière. Y a-t-il en général existence ?

On note R_1, R_2, R_3 et R_4 les réflexions d'axe (AB), (BC), (CD), (DA). L'image de (LI) par $R_4 \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1$ est (L'I'). Le produit de ces 4 réflexions est une isométrie positive qui laisse une droite globalement invariante. Cette isométrie est soit une rotation d'angle π et de centre O appartenant à (LI), soit une translation de vecteur "parallèle" à (LI). La rotation est impossible, puisque O devrait aussi appartenir à toute droite (L'I') parallèle à (LI) (voir paragraphe ci-dessus). C'est donc une translation. Mais si on regroupe les quatre réflexions deux par deux on obtient :

$(R_4 \circ R_3) \circ (R_2 \circ R_1) = \text{Rot}(D, \alpha) \circ \text{Rot}(B, \beta)$, si on désigne par α l'angle $2(\vec{DC}, \vec{DA})$ et par β l'angle $2(\vec{BA}, \vec{BC})$. La composée de ces deux rotations étant une translation, on a donc $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$, ou, mieux, $(\vec{DC}, \vec{DA}) = (\vec{BC}, \vec{BA}) \pmod{\pi}$, ce qui traduit la cocyclicité des quatre points.

D'où ce résultat curieux : il n'existe des chemins de lumière qu'à l'intérieur des quadrilatères inscrits dans un cercle, et ces chemins de lumière se déduisent de l'un d'entre eux par "parallélisme".

Notons que la démonstration qui précède fournit aussi un procédé de construction de ces chemins de lumière dans des quadrilatères inscrits. Soit ABCD un tel quadrilatère, et I un point quelconque de (AB). On construit alors l'image de I par $R_4 \circ R_3 \circ R_2 \circ R_1$, soit H (voir fig 5). Alors la direction de (IH) est la direction de la droite (IL), ce qui permet de finir la construction.

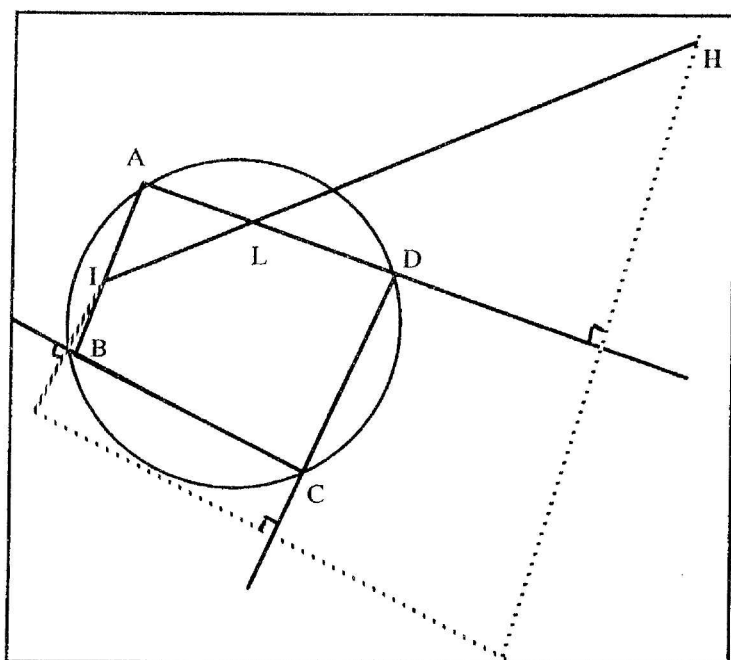


Figure 5

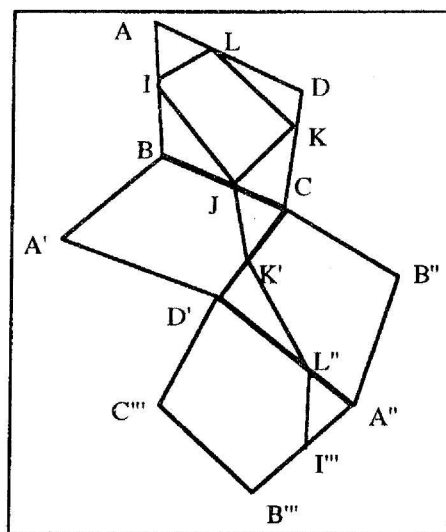


Figure 6

3. Enfin, quid des chemins de trajet minimal ?

On démontre que s'il existe dans un quadrilatère ABCD un chemin de lumière strictement inscrit à l'intérieur de celui-ci (c'est à dire que I est sur]AB], J sur ...), alors c'est un trajet minimal. Il suffit pour cela de considérer un quadrilatère ABCD, et IJKL un chemin reliant les côtés de celui-ci (voir figure 6). On construit successivement les images de ce quadrilatère par 3 réflexions d'axe (BC), puis (CD'), puis (D'A''). On constatera facilement que, le point I étant fixé, le chemin le plus court est obtenu par l'alignement de J, K' et L'' avec I et I'', c'est à dire quand la trajectoire est un chemin de lumière, ce qu'on voulait prouver...

On peut remarquer pour finir que, dans le problème des milieux des côtés d'un polygône, comme dans celui des chemins de lumière, la parité du nombre de côtés du dit polygône est décisive. La raison en est toute simple :

-dans le premier cas, si on compose des rotations d'angle π , le résultat n'est pas le même si on a π ou 2π ...

-dans le deuxième cas, on n'obtient pas la même chose si on compose un nombre pair, ou un nombre impair, d'isométries négatives...

Cependant, pour le deuxième problème, la généralisation est plus délicate. En effet, si l'existence d'un chemin minimal est toujours assurée (pour des raisons de compacité des segments, et de continuité de l'application distance), l'existence d'un chemin de lumière, et la coïncidence de celui-ci avec le trajet minimal ne vont pas de soi. Vaste terrain pour l'expérimentation, et la réflexion...

4. TÉTRAÈDRES

Tétraèdre régulier, orthocentrique, isofacial et un aperçu de leurs propriétés pour découvrir en fin de compte une équivalence...

A. Quelques propriétés du tétraèdre régulier

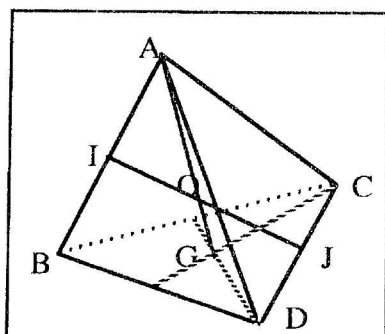
Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont même longueur a .

Deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.

- Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$; $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
- Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- En déduire que (AC) et (BD) puis (AD) et (BC) sont orthogonales.

La droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées est orthogonale à ces arêtes.

- I est le milieu de [AB] et J celui de [CD] ; démontrez que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CD}$
- En déduire que (IJ) est orthogonale à (AB) et (CD).



Une hauteur joint un sommet à l'isobarycentre de la face opposée.

- G est l'isobarycentre de B, C et D. Calculer $\vec{AG} \cdot \vec{CD}$ et $\vec{AG} \cdot \vec{BD}$. Conclure.

L'isobarycentre O du tétraèdre est le centre de la sphère circonscrite à celui-ci.

- Calculer les longueurs GC, AG, OG et OC, conclure en donnant le rayon de la sphère circonscrite.

Calcul de l'angle géométrique (AOC)

- En utilisant la relation $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OC}$, déterminer la valeur de $\cos(AOC)$ puis une valeur approchée de la mesure de (AOC).

On obtient ainsi l'angle de l'atome de carbone $\text{Arc cos}(-1/3)$. On peut d'ailleurs se poser la question : étant donné 4 vecteurs unitaires de l'espace, peut-on prouver que nécessairement deux d'entre eux au moins font un angle inférieur à $\text{Arc cos}(-1/3)$?

On peut procéder par l'absurde. Supposons que 4 vecteurs u, v, w, t , unitaires de l'espace ont deux à deux des angles strictement supérieurs à $\text{Arc cos}(-1/3)$. On a ainsi (la fonction Arc cos

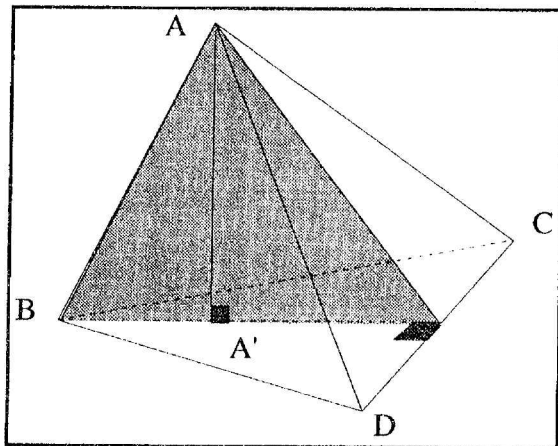
est strictement décroissante !) $\cos(u,v) < -1/3$, et de même pour les autres cosinus. Mais alors $(u+v+w+t)^2 = 4 + 2 \cos(u,v) + 2 \cos(u,w) + 2 \cos(u,t) + 2 \cos(v,w) + 2 \cos(v,t) + 2 \cos(w,t) < 0$, d'où la contradiction...

B. Quelques propriétés du tétraèdre orthocentrique

Un tétraèdre orthocentrique a ses arêtes opposées orthogonales : $(AB) \perp (CD)$; $(AC) \perp (BD)$ et $(AD) \perp (BC)$.

Le tétraèdre régulier est donc un cas particulier de tétraèdre orthocentrique. Dans un tétraèdre les hauteurs ne sont pas nécessairement concourantes, On peut démontrer que seuls, les tétraèdres orthocentriques ont cette propriété (d'où le nom!).

- Trouver un contre exemple à "dans un tétraèdre les hauteurs sont concourantes".



Dans un tétraèdre, il y a 3 paires d'arêtes opposées. Si deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, la troisième paire l'est aussi (et le tétraèdre est donc orthocentrique)

- Démontrer que dans un tétraèdre quelconque on a : $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$

Puis en déduire que pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique il faut et il suffit que 2 paires d'arêtes opposées soient orthogonales.

On va montrer alors l'équivalence suivante : un tétraèdre est orthocentrique (c'est à dire a ses arêtes opposées orthogonales) si et seulement si ses hauteurs sont concourantes.

- a) Si les arêtes opposées sont orthogonales, alors les hauteurs sont concourantes.**

On appelle A' le projeté orthogonal de A sur (BCD) et (AA') sera la hauteur issue de A .

- Justifier que $(AA') \perp (CD)$ puis que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA') .

En déduire que $(BA') \perp (CD)$.

- De façon similaire démontrer que $(CA') \perp (BD)$. En déduire que A' est l'orthocentre de BCD .
- Montrer que les hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

- b) Si les hauteurs sont concourantes, alors les arêtes opposées sont orthogonales**

On appelle B' le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD) .

- Démontrer que (AA') et (BB') définissent un plan orthogonal à (CD) et conclure.

C. Tétraèdre isofacial

Un tétraèdre isofacial est un tétraèdre dont toutes les faces ont la même aire (le tétraèdre régulier en est bien sûr un cas particulier).

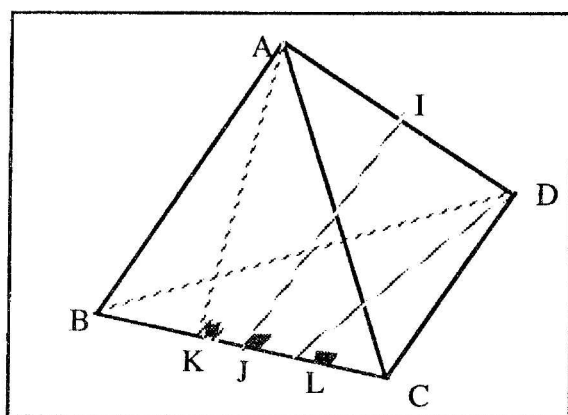
On va montrer l'équivalence : un tétraèdre est isofacial si et seulement si ses arêtes opposées ont même longueur.

a) Si les arêtes opposées ont même longueur, alors on a un tétraèdre isofacial

En effet, il est aisé de prouver que les faces ont alors des côtés deux à deux égaux : elles sont isométriques.

b) Réciproquement, un tétraèdre isofacial a ses arêtes opposées de même longueur.

- Montrer que I, milieu de [AD], se projette orthogonalement sur [BC] en J milieu de [KL].
- Montrer que $AK = DL$; en déduire que le triangle AJD est isocèle de sommet principal J.
- En déduire que $(JI) \perp (AD)$, puis que (IJ) est la perpendiculaire commune à (BC) et (AD).
- J' est le milieu de [BC], I' sa projection orthogonale sur (AD). Montrer que (I'J') est la perpendiculaire commune à (BC) et (AD). En déduire que $I = I'$ et $J = J'$.
- Quelle isométrie de l'espace transforme [AB] en [DC] ? Conclure.



D. Equivalence

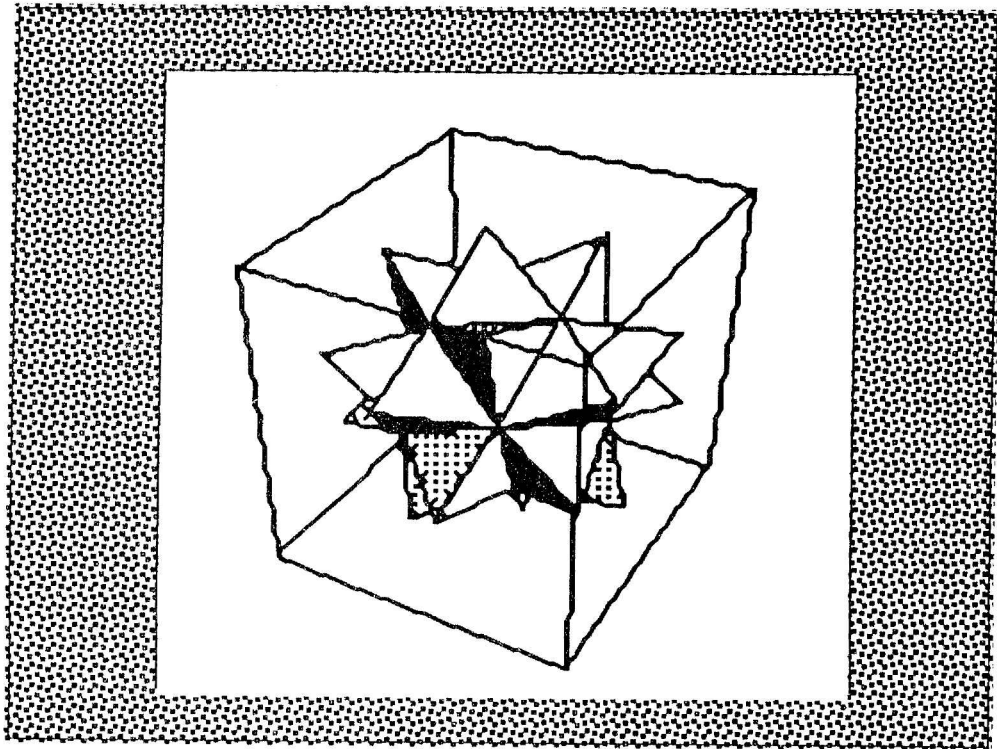
Un tétraèdre régulier est évidemment orthocentrique et isofacial.

On va prouver pour finir la réciproque : si un tétraèdre est à la fois isofacial et orthocentrique, alors il est régulier.

- En utilisant les propriétés du tétraèdre isofacial montrer que le plan médiateur de [AD] passe par J milieu de [BC].
- En déduire puisque les arêtes opposées sont orthogonales (tétraèdre orthocentrique) que (BC) appartient au plan médiateur de [AD]
- Conclure.

Chapitre 2

Des activités



A. Paraboles et hyperboles.

1. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PARABOLE ET D'UNE HYPERBOLE

La parabole et l'hyperbole sont des courbes de référence. Elles sont connues par leur équation. Une construction géométrique permet de découvrir certaines propriétés de ces courbes.

Problème 1

Dans un repère orthonormal (d'unité 4 cm), on place le point $F(0 ; 1/4)$ et la droite D d'équation $y = -1/4$. Le point $P(x ; -1/4)$ se déplace sur D . On appelle Δ_P la perpendiculaire à D passant par P et Δ la médiatrice de $[FP]$. M est l'intersection de Δ et Δ_P .

Construire un nombre suffisant de points M pour obtenir la courbe qui est l'ensemble des points M lorsque P décrit D .

Reconnaître cette courbe et déterminer par calcul son équation.

Problème 2

Dans un repère orthonormal (d'unité 2 cm), on place la droite D d'équation $y = -1$ et la droite Δ d'équation $x = -1$. D et Δ se coupent en I . Une droite variable passant par O coupe D en $A(x, -1)$ et coupe Δ en $B(-1, y)$. On construit ensuite le rectangle $AIBM$.

Construire un nombre suffisant de points M pour obtenir la courbe qui est l'ensemble des points M lorsque (AB) tourne autour de O .

Reconnaître cette courbe et déterminer par calcul son équation.

Conclusion

- Énoncer une propriété de la parabole déduite de l'étude précédente : “ La parabole de référence est l'ensemble des points situés à égale distance de...”
- Énoncer de même une propriété de l'hyperbole : “ L'hyperbole de référence est l'ensemble des points...”

2. PARABOLE TANGENTE À 3 DROITES DONNÉES

On suppose connu ici un théorème simple : la représentation graphique d'un polynôme du 2^o degré, c'est à dire d'une fonction $f : x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), est une parabole d'axe "vertical". On se propose de déterminer la, ou les parabole(s), vérifiant un certain nombre de propriétés, en procédant par approximations successives¹⁴.

Problème :

On veut déterminer la, ou les, paraboles, tangentes simultanément aux trois droites d'équation $y = -7,3x - 24,075$; $y = -1,3x - 9,075$; $y = 7,7x - 9,075$

a) Etude expérimentale

1. Observer sur un écran graphique les trois droites d'équation :

$$y = -7,3x - 24,075$$

$$y = -1,3x - 9,075$$

$$y = 7,7x - 9,075$$

2. Choisir un repère adapté pour tracer, avec la plus grande précision, ces trois droites dans le même repère orthonormé.

3. On cherche maintenant une, ou des, parabole(s), tangente(s) à ces trois droites.

- Combien de paraboles solutions imaginez-vous ?

- Chercher des équations s'approchant le plus possible de l'objet souhaité. Préciser la méthode suivie.

- Utiliser les tentatives successives pour préciser l'influence des coefficients a, b et c sur la forme et la position de la parabole.

b) Etude théorique

On se propose ici de déterminer par le calcul l'unique parabole vérifiant les conditions données.

- Si on admet que si une droite est tangente à une parabole alors elle a un unique point commun avec elle, écrire la condition pour que le système

$$y = -7,3x - 24,075 \text{ et } y = ax^2 + bx + c$$

admette une solution x unique.

- En reproduisant le même raisonnement pour les deux autres droites, établir un système de trois équations à trois inconnues, a, b et c.

- Résoudre ce système, et vérifier que l'unique parabole ainsi trouvée est bien solution.

Note : la fonction cherchée est $x \rightarrow 1,5x^2 + 3,2x - 5,7$

¹⁴ On trouvera une analyse de cette activité proposée à une classe de 1^oS dans la partie III de cette brochure. Par ailleurs, une étude très fouillée de ce problème se trouve dans "La géométrie du triangle" (voir bibliographie). Si on recherchait toutes les paraboles (sans contrainte sur l'axe), tangentes à 3 droites données, il en existe une infinité et les foyers de ces paraboles sont sur le cercle circonscrit au triangle formé par ces 3 droites.

3. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE COURBES

Etude de la famille de courbes d'équation : $y = mx^2 + x + 1$ pour les valeurs suivantes de m : -2 ; 0,6 ; 2 ; 3, avec la calculatrice graphique.

Problème :

1. Utiliser la calculatrice pour représenter les quatre courbes correspondantes. (Une telle courbe est appelée parabole)
2. Pour chacune des valeurs de m , trouver le sens de variation et donner le tableau de variation de la fonction correspondante.
3. Pour chacune des valeurs de m , résoudre, de manière approchée, l'équation $y = 0$. (Chercher a et b tels que la solution S , si elle existe (!), vérifie $a \leq S \leq b$ avec a et b "assez proches" l'un de l'autre, par exemple tels que $b - a \leq 0,01$)
4. Les paraboles semblent-elles avoir un point commun ? Si oui, donner les coordonnées de ce point et démontrer que c'est effectivement un point commun.
5. Quelle hypothèse peut-on faire sur la droite d'équation $y = 3x - 1$?
6. Quelle hypothèse peut-on faire sur la disposition des sommets des paraboles ?

Note : Si cette activité peut permettre de mettre en évidence la relation entre signe de m et sens de variation de la fonction correspondante, on peut aussi essayer d'observer la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses en fonction des différentes valeurs de m et donc le nombre de solutions de l'équation $y = 0$. A ce propos il est peut-être bon de donner à m d'autres valeurs, par exemple -0,1 pour éviter toute déduction trop hâtive.

B. Equations et inéquations

1. LOCALISATION DES ZEROS D'UN POLYNÔME

Soit $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ avec $a_n \neq 0$, et soit $a = \max(|a_i|)$, de sorte que $a > 0$.

On se propose de prouver que tout x tel que $|x| \geq 1 + a$ n'est pas un zéro de f^{15} .

La localisation des racines d'un polynôme se ramène au cas ci-dessus par division par a_0 et/ou par factorisation de x .

Le réel x est une racine de $f(x)$ si et seulement s'il est une racine de $\frac{f(x)}{x^n}$, c'est-à-dire si et seulement s'il est solution de l'équation $1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} = 0$

En posant $h(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$, le problème se ramène à prouver que si $|x| \geq 1 + a$, alors x n'est pas solution de l'équation $h(x) = -1$

Par une majoration simple, on obtient :

$$|h(x)| \leq \frac{|a_1|}{|x|} + \frac{|a_2|}{|x|^2} + \dots + \frac{|a_n|}{|x|^n} \leq a \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{1}{|x|^n} \right)$$

Sachant que $|x| \geq 1 + a$, on a $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{1+a}$.

D'où, en posant $\frac{1}{1+a} = q$, il vient : $a = \frac{1-q}{q}$ avec $q > 0$

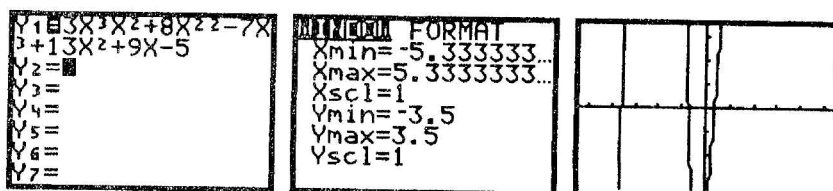
On obtient alors : $|h(x)| \leq a(q + q^2 + \dots + q^n)$. D'où, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique : $|h(x)| \leq \frac{1-q}{q} \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ et finalement : $|h(x)| \leq 1 - q^n$

Sachant que $q^n > 0$, il reste $|h(x)| < 1$ et donc $h(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 0$

D'où le résultat :

Toutes les racines (réelles) du polynôme sont dans l'intervalle $] -a - 1, 1 + a [$

Exemple : Le polynôme $P(x) = 3x^5 + 8x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 9x - 5$ possède au moins une racine. Les racines sont situées dans l'intervalle $] -\frac{16}{3}; \frac{16}{3} [$. D'où le choix de la "fenêtre" sur la calculatrice :



$P(x)$ possède donc 3 racines. Il est inutile d'en rechercher d'autres en "zoomant"

¹⁵ Voir Math 1^oS IREM de Strasbourg, éd. Istra, 1988, p73.

2. POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

Cette activité se fixe comme objectifs :

- *d'utiliser la calculatrice (graphique de préférence) pour formuler des conjectures "raisonnables" sur la valeur d'un zéro du polynôme ;*
- *d'observer la nécessité de vérifier les conjectures par un calcul exact ;*
- *de pousser l'usage de la calculatrice au-delà des conditions "standard" de travail.*

Il s'agit dans les trois exemples de résoudre l'équation $P(x) = 0$

Exemple 1

On prendra $P(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$

La racine "apparente" de $P(x)$ est aisée à trouver. Factoriser et déterminer les autres solutions de l'équation $P(x) = 0$

Exemple 2

On prendra $P(x) = x^3 - 7,3x^2 + 15,2x - 6,6$

Il n'est pas simple de trouver une racine "apparente" de $P(x)$. Une utilisation de la calculatrice serait bénéfique. Comment ?

Exemple 3

Résoudre l'équation : $x^3 - 0,81x^2 + 0,2186x - 0,019656 = 0$

Quels sont les problèmes rencontrés ?

Comment les résoudre ?

Note : pour chacune des équations, si la calculatrice permet de trouver au moins une racine, on peut vérifier l'exactitude de celle-ci (celles-ci) en factorisant le polynôme.

3. INÉQUATIONS : CAUSES D'ERREURS

La résolution des inéquations présente quelques difficultés qu'on ne rencontre pas avec les équations. En voici une, qui est une cause fréquente d'erreurs !

Problème 1

Je cherche à résoudre l'inéquation $x^2 > 1/x$. Pour cela j'envisage 2 méthodes :

Méthode 1 : Je trace sur le même repère les courbes C_c et C_i des fonctions :

$$c : x \mapsto x^2 \text{ et } i : x \mapsto 1/x$$

Ensuite, je regarde les abscisses des points de C_c situés au-dessus des points correspondants de C_i .

Méthode 2 : En multipliant les 2 membres de l'inéquation par x , j'obtiens $x^3 > 1$.

Ensuite, je trace la courbe C_q de la fonction $q : x \mapsto x^3$ et je regarde les abscisses des points de C_q situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$

Constatez que les résultats sont différents. Laquelle de ces deux méthodes est correcte ?

Problème 2

Pour résoudre l'inéquation : $\frac{x+1}{3x+11} < \frac{x+3}{5x-4}$

j'écris :

“si $x \neq -11/3$ et $x \neq 4/5$, je fais le *produit en croix* et j'obtiens :

$$(x+1)(5x-4) < (x+3)(3x+11)$$

ensuite, je développe

1. Achever la résolution
2. Vérifier si le réel 2 est solution de l'inéquation :
 - en regardant l'ensemble des solutions trouvé par cette méthode.
 - en remplaçant x par 2 dans l'inéquation donnée.
3. A quel endroit de la démarche se trouve l'erreur ?

Conclusion

Dans la résolution d'une inéquation, que faut-il éviter de faire ?

C. Fonctions

1. FONCTIONS ASSOCIÉES

| Découvrir graphiquement les propriétés de symétrie des fonctions associées¹⁶.

Problème 1

A partir de la fonction “carré” $c : x \mapsto x^2$, tracer les courbes symétriques de C_c par rapport :

- 1) au point $A(1, 2)$
- 2) au point $B(-2, 3)$
- 3) à la droite D d'équation $y = 2$
- 4) à la droite D' d'équation $x = -3$

Rendre les équations ci-dessous aux courbes des questions précédentes

- a) $y = -x^2 + 4$
- b) $y = -x^2 - 8x - 10$
- c) $y = x^2 + 12x + 36$
- d) $y = -x^2 + 4x$

Problème 2

Voici des courbes données par leurs équations:

$$y = -x^2 + 3x - 4$$

$$y = x^2 - 6x + 9$$

$$y = -x^2 - 4x + 6$$

$$y = -x^2 + 5$$

Préciser pour chacune d'elles les coordonnées du centre de la symétrie (ou l'équation de l'axe de la réflexion) qui transforme cette courbe en la courbe C_c .

Problème 3

A partir de la fonction “inverse” $i : x \mapsto 1/x$ tracer les courbes symétriques de C_i par rapport :

- 1) au point $A(1, 2)$
- 2) au point $B(-2, 3)$
- 3) à la droite D d'équation $y = 2$
- 4) à la droite D' d'équation $x = -3$

Rendre les équations ci-dessous aux courbes des questions précédentes

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{4x-1}{x} & \text{c) } y = \frac{-1}{x+6} \\ \text{b) } y = \frac{2x-7}{x-2} & \text{d) } y = \frac{6x+25}{x+4} \end{array}$$

¹⁶ Voir dans “Pour une prise en compte...” quelques programmes simples liés à cette activité.

2. COMPARAISON DE COURBES ET DE FONCTIONS

*La comparaison des courbes n'est pas suffisante pour comparer deux fonctions.
Les problèmes qui suivent montrent des contradictions apparentes qu'il s'agit de lever.*

Problème 1

On donne les deux fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto g(x) = x^2 - 4$$

$$h : x \mapsto h(x) = \frac{7x^3 - 4x^2 - 28x + 16}{7x - 4}$$

Leurs courbes obtenues à l'aide de la calculatrice graphique semblent identiques.

Cependant, je prétends que l'une est paire et l'autre pas !

Comment cela est-il possible ? Est-ce contradictoire ?

Problème 2

On donne maintenant les deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin x$$

$$g : x \mapsto \cos x \cdot \tan x$$

Leurs courbes sont-elles identiques ?

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Conclusion

- Les deux cas sont-ils similaires ?
- En comparant deux fonctions, à quoi faut-il être attentif ?

3. APPROCHE DE LA FONCTION LN AVEC LA CALCULATRICE¹⁷

Utiliser la calculatrice (graphique ou non) pour formuler et tester des conjectures en vue de la résolution de problèmes.

L'objectif est de se familiariser avec les fonctions graphiques de la machine.

Problème

La fonction \ln (logarithme népérien) est étudiée dans le programme de Terminale. $\ln x$ s'obtient à l'aide de la touche correspondante sur la calculatrice.

Conjecturer :

- l'ensemble de définition de la fonction \ln
- les valeurs de $\ln 1$, $\ln 2$
- la solution de l'équation $\ln x = 1$
- le sens de variation de la fonction \ln
- la limite de $\ln x$ en 0
- la limite de $\ln x$ en $+\infty$
- sa fonction dérivée
- examiner $\ln(ab)$, $\ln a^2$, $\ln a^n$
- examiner $\ln \sqrt{a}$

Conclusion

Le travail est aisé avec une calculatrice graphique, un peu plus lent avec une simple programmable. Dans ce cas, il faudra s'aider d'une feuille de papier millimétré pour tracer les courbes nécessaires.

A l'occasion de ce travail, on aura manipulé pour les programmables graphiques :

TI 81,82 : Y= ; RANGE (WINDOW) ; ZOOM ; Set Factors ; Box ;
TRACE ; GRAPH ; NDERIV(

Casio 6800G : MODE 2 ; MODE 1 ; Prog ; Graph ; Range ; Zoomxf
Factor ; Trace ; Value X'Y

Casio 7800G : F MEM ; Range ; ZM ; TRC ; BOX

¹⁷ Voir "Pour une prise en compte..." III. 12-13, pour une activité du même type.

4. ETUDE GRAPHIQUE DE CERTAINS ASPECTS DE $\frac{\sin x}{x}$ SUR \mathbb{R}_+^*

Dans tout ce qui suit, on utilisera à la fois les résultats affichés par les calculatrices graphiques et les outils théoriques du cours de mathématique.

Problème

Les incohérences apparentes des graphiques qui apparaîtront à la question 1 de cette activité découlent des contraintes graphiques de la machine : une calculatrice graphique ordinaire (Type TI 81) trace environ 95 points pour la représentation graphique d'une fonction. Or 600 est égal à peu près au produit de 95 par 2π . Apparaissent donc des phénomènes pseudo-périodiques qui perturbent la représentation graphique attendue. On pourra consulter sur ce point la brochure "Pour une prise en compte des calculatrices graphiques" précédemment publiée par notre groupe .

1. On veut observer sur les écrans la représentation graphique que donnent les calculatrices pour cette fonction sur les intervalles :

$]0;550]$, $]0;590]$, $]0;600]$, $]0;650]$.

- Quel intervalle doit-on choisir pour les y afin de voir une image convenable ?
- Que constatez-vous ? Les 4 tracés sont-ils compatibles ?
- Comment expliquer cette situation ?

2. On veut résoudre l'équation $\frac{\sin x}{x} = 0$ sur l'intervalle $]0;600]$

- Quel graphique choisir pour avoir une idée du nombre de solutions ?
- Combien de solutions donne l'étude théorique de cette équation ?
- Les résultats théoriques et l'observation de l'écran sont-ils compatibles ? Pourquoi ?

3. Combien l'équation $\frac{\sin x}{x} = k$ a-t-elle de solutions sur \mathbb{R}^{*+} ...

- Si $k = 2$
- Si $k = 1$
- Si $k = 0,1$
- Si $k = 0,00001$. Pouvez-vous dans ce dernier cas donner une valeur approchée à 10^{-7} près de la 1993^e solution ?

D. Problèmes et fonctions

1. LES PLUVIOMÈTRES

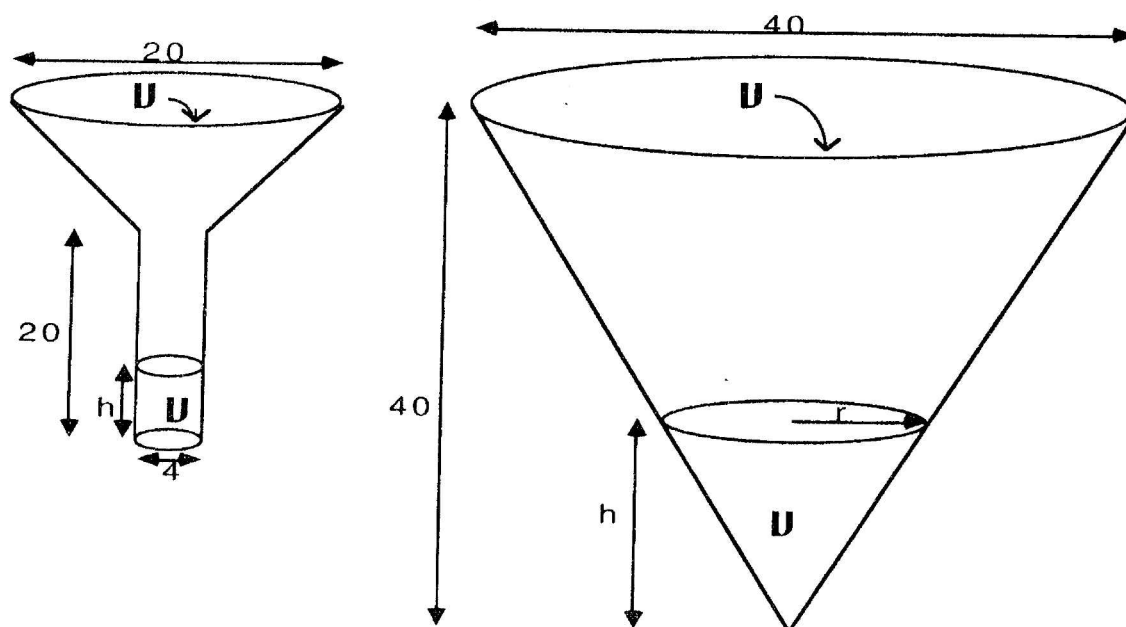
Utilisation des fonctions dans un problème de graduations.

On pourra être ici amené à utiliser les fonctions "cube" et "racine cubique" mais aussi une homothétie ou la propriété de Thalés.

Problème

On dit qu'il est tombé 1 mm de pluie lorsque le volume tombé sur une surface donnée (par exemple celle de l'ouverture du pluviomètre) permettrait, si cette eau ne s'écoulait pas, d'occuper une hauteur de 1 mm.

Il s'agit de graduer ces 2 pluviomètres en "mm de pluie". Les côtés ci-dessous sont exprimés en centimètres.



Le premier pluviomètre doit être gradué dans sa partie cylindrique seulement.

1) S'il est tombé x mm de pluie, quel volume d'eau (en fonction de x) est entré dans le pluviomètre ?

2) Calculer en fonction de h le volume d'eau tombée et en déduire x en fonction de h .

On pourra écrire $x = f(h)$.

3) Tracer la courbe de f et en déduire à l'échelle 1 une graduation en "mm de pluie" à coller sur la partie cylindrique du pluviomètre.

Le second pluviomètre doit être gradué jusqu'à une hauteur de 20 cm environ

1) S'il est tombé x mm de pluie, quel volume d'eau (en fonction de x) est entré dans le pluviomètre ?

2) Calculer r en fonction de h (à l'aide de "Thalès" ou d'une homothétie)

3) Calculer en fonction de h le volume d'eau tombée et en déduire x en fonction de h [$x = f(h)$]

4) Tracer la courbe de f et en déduire à l'échelle 1 une graduation en "mm de pluie" à installer verticalement dans le pluviomètre.

2. LA BOÎTE DE LAIT

Utilisation d'une fonction dans un problème de recherche d'extremum.

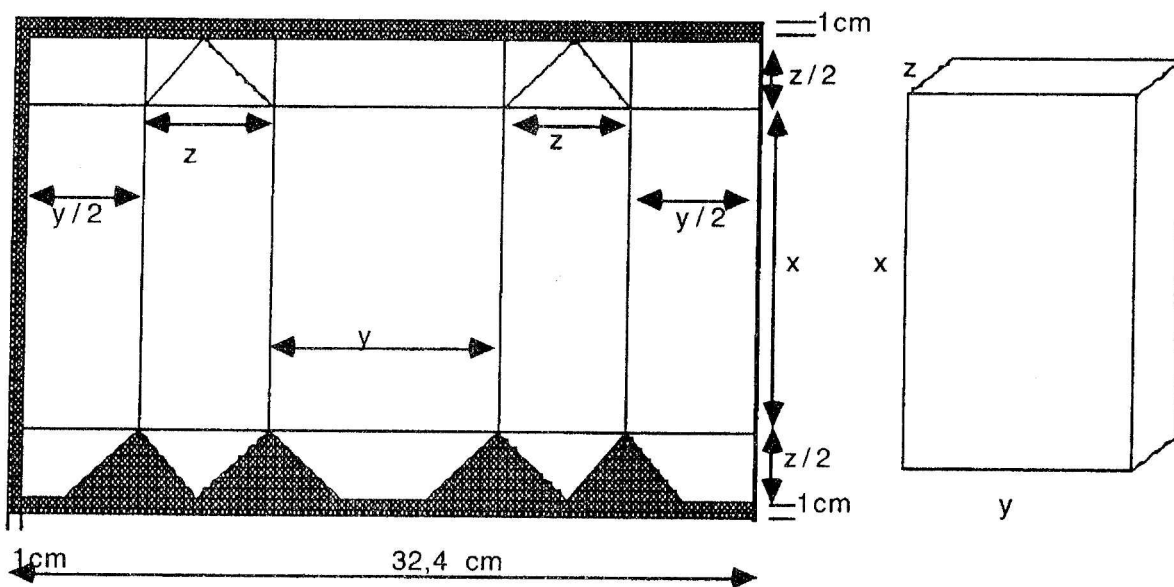
Dans un problème "réel", il n'y a aucune raison que les calculs "tombent juste".

Les valeurs données et obtenues doivent être arrondies avec la précision que le bon sens indique.

Problème

La fabrication d'un emballage de lait se fait à partir d'un rouleau de carton métallisé de 32,4 cm de largeur. Le volume de la boîte doit être de 1002 cm^3 . Les parties grisées sur le patron ci-dessous représentent les parties réservées aux collages. Les traits sont les lignes de pliage.

L'intérêt de l'industriel et du consommateur est de réduire au minimum le prix de l'emballage donc de réduire la longueur de carton à utiliser.



- Exprimer la longueur L de la bande de carton en fonction de x et de z
- Donner la valeur de $y+z$
- Exprimer le produit xyz
- En déduire une expression de L en fonction de y
- Déterminer la longueur minimale de carton nécessaire à la réalisation de cette boîte et les dimensions de la boîte dans ce cas.

Conclusion

Les dimensions données sont (à peu de choses près) celles d'une boîte standard de lait ou de jus de fruit. La recherche de la quantité minimale de matière permettant de réaliser l'emballage est un important problème d'entreprise : c'est celui de la recherche du coût minimal

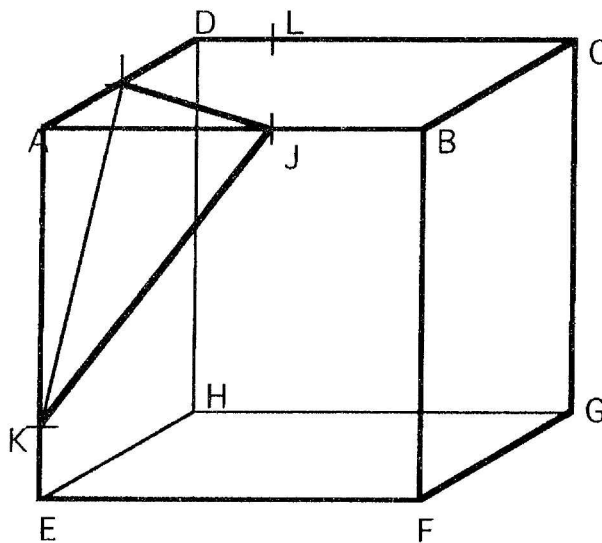
E. Espace

1. COUPER UN CUBE

Représentation en perspective et en projection

La construction des intersections du cube et d'un plan repose sur quelques théorèmes simples d'incidence et de parallélisme qu'on rappelle en début de séance.

Problème, première séance



Le cube ABCDEFGH a des arêtes qui mesurent 10 cm. Les points I, J, K, L sont sur les arêtes et on a :

$$AI = 5 \text{ cm}$$

$$AJ = 6 \text{ cm}$$

$$AK = 8 \text{ cm}$$

$$DL = 2 \text{ cm}$$

On coupe le cube par un plan (P) qui passe par L et qui est parallèle au plan (IJK)

Dessiner, en s'aidant des résultats "à retenir", les traces laissées sur les faces du cube par le plan (P). On pourra imaginer que le plan (P) symbolise une scie dont on verrait les "coupes" sur le cube.

Après avoir coupé ce cube en deux parties par le plan (P), on demande de dessiner en perspective les deux morceaux obtenus. Le morceau contenant le point A sera posé sur la face ADE, les points A et E étant devant. Le morceau contenant le point C sera posé sur la face BCG, les points C et G étant derrière.

Séance suivante :

Le cube ABCDEFGH est maintenant reconstitué.

On le coupe par le plan (IJK). Le morceau qui contient A tombe.

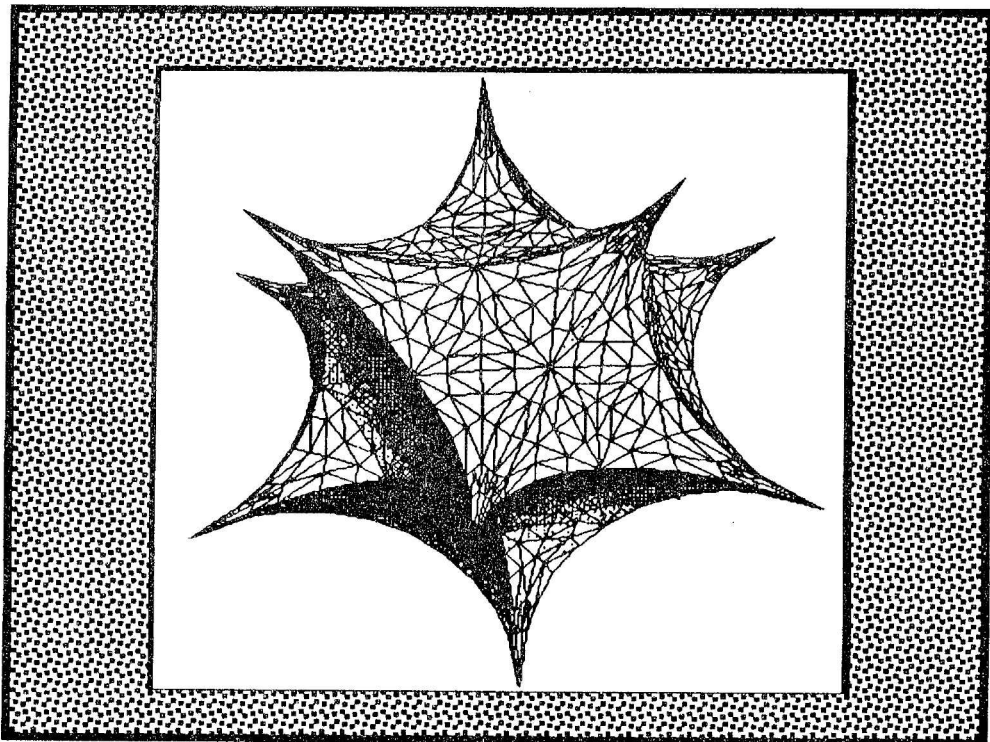
Ce qui reste est coupé par le plan (ACF) et le morceau qui contient B tombe.

Il s'agit de dessiner en plan et non en perspective le morceau restant après ces deux coups de scie en :

- vue de face ;
- vue de profil gauche ;
- vue de dessus.

Chapitre 3

Analyse d'une activité proposée aux élèves



*On trouvera ci-dessous l'analyse d'une activité proposée à des élèves de 1^oS.
L'objectif de celle-ci était de fixer le rôle des coefficients a , b et c dans l'équation d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$
Pour cela, un problème de recherche a été donné aux élèves, dans le cadre de TD en demis groupes.
On remarquera que, alors que l'activité elle-même s'est relativement bien déroulée, les traces qui en sont restées pour les élèves sont tout à fait floues.
Ainsi, le fait que les élèves ne s'ennuient pas, pendant le cours de Math, et trouvent les solutions au problème posé, n'est pas en lui même une garantie que la connaissance visée a été installée, et pourra être réinvestie dans un problème voisin.
Les choses sont autrement complexes.
Ainsi apparaissent liés les moments de recherche des élèves, et les moments d'évaluation du travail réalisé.
Une histoire sans fin en quelque sorte...*

A. L'activité proposée

Le travail ci-dessous a été donné en module à une classe de 1^oS pour une durée d'une heure.

*On suppose connu ici un théorème simple : la représentation graphique d'un polynôme du 2^o degré, c'est à dire d'une fonction $f : x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), est une parabole.
On se propose de déterminer la, ou les parabole(s), vérifiant un certain nombre de propriétés, en procédant par approximations successives.*

1/ Observer sur un écran graphique les trois droites d'équation :

$$y = -7,3x - 24,075$$

$$y = -1,3x - 9,075$$

$$y = 7,7x - 9,075$$

2/ Choisir un repère adapté pour tracer, avec la plus grande précision, ces trois droites dans le même repère orthonormé.

3/ On cherche maintenant une, ou des, parabole(s), tangentes à ces trois droites.

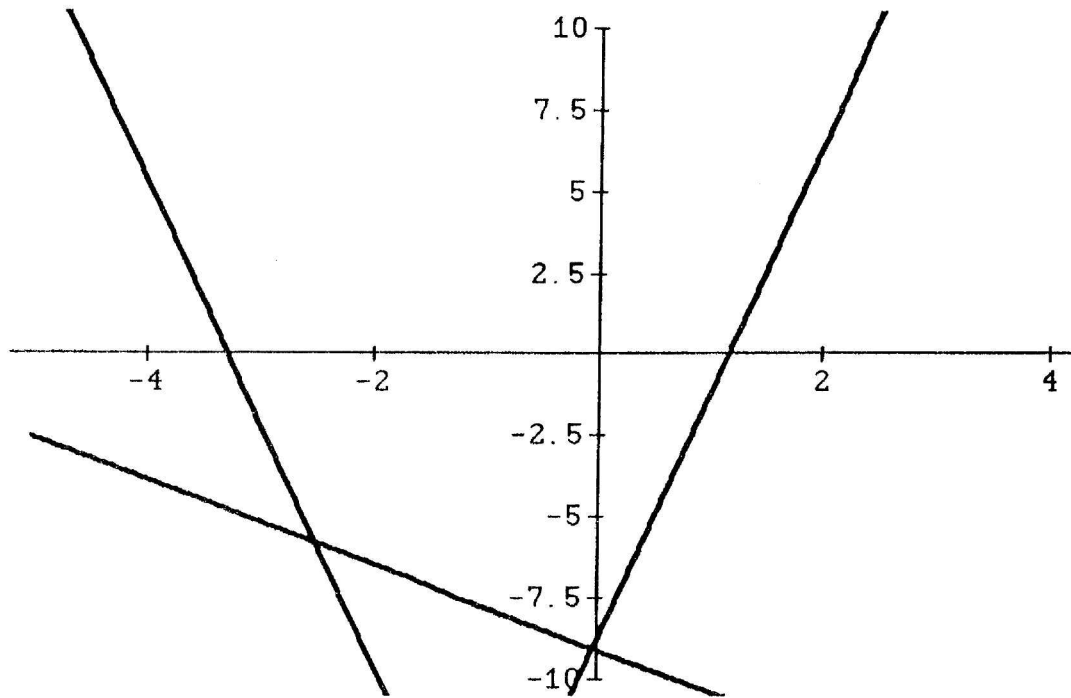
- Combien de paraboles solutions **imaginez-vous?**

- **Chercher** des équations s'approchant le plus possible de l'objet souhaité.

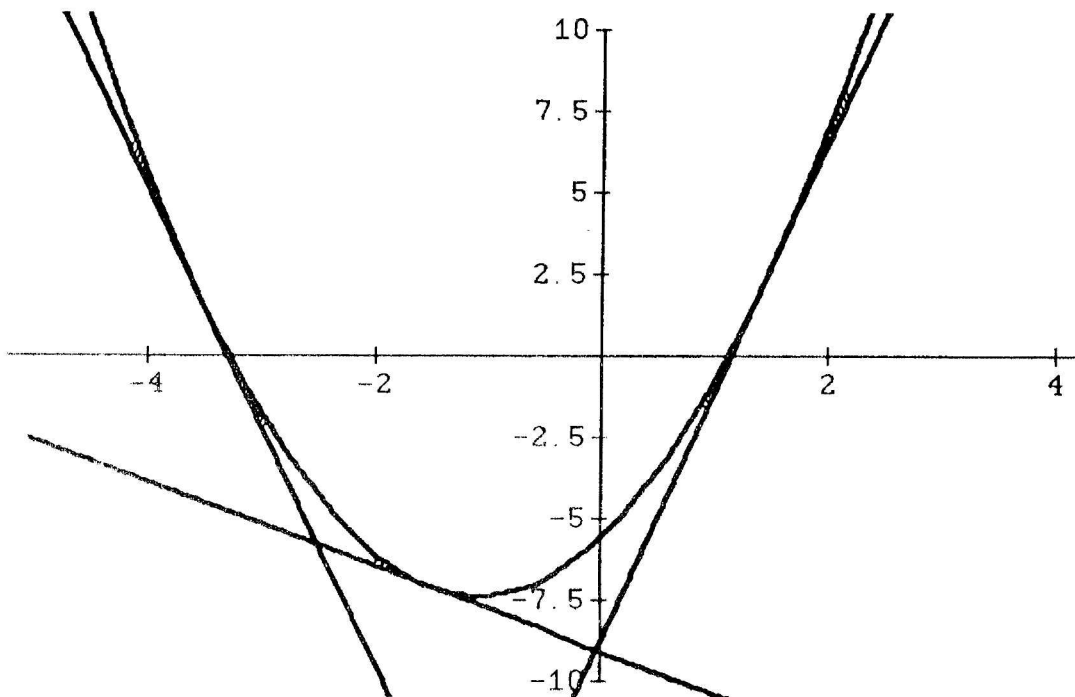
Préciser la méthode suivie.

- **Utiliser les tentatives successives pour préciser l'influence des coefficients a , b et c sur la forme, la position, de la parabole.**

Pour comprendre ce qui va suivre, voilà ce que les élèves voient sur leurs écrans, ainsi que la parabole solution.



Une vue des trois droites



...avec la parabole solution
 $y = 1,5x^2 + 3,2x - 5,7$

B. Les recherches des élèves

La recherche des élèves va passer par plusieurs étapes :

Première étape : recherche brouillonne

Deuxième étape : rationalisation des démarches

La méthode utilisée en général est "bonne" :

les élèves laissent fixes deux des trois coefficients a , b ou c , et font varier le troisième.

Les résultats exprimés évoquent le mouvement :

quand a augmente, la parabole s'allonge ;

quand b augmente, la parabole se déplace à gauche, monte puis descend ;

quand c augmente, la parabole monte.

Les ambiguïtés de ces expressions sont nombreuses, mais ces "théorèmes en actes" permettent à la majorité des élèves de résoudre le problème posé.

Troisième étape : validation délicate

L'observation graphique (zoom) laisse perplexe et pose la question : qu'est-ce qu'une tangente ? Une définition surgit : *plus une droite est tangente à une courbe, plus elle a de points communs avec elle.*

C. Questions et définitions

Cette première séance pose un certain nombre de questions...

Question 1

Faut-il laisser les élèves découvrir, puis écrire, leurs propres théorèmes, avant de corriger et de donner une version correcte de ceux-ci ?

Question 2

Faut-il laisser les élèves découvrir eux-mêmes certains objets avant toute définition mathématique ? (ici la tangente à une courbe)

Question 3

Est-ce la manipulation d'une calculatrice graphique qui développe une intuition, un vocabulaire, une rédaction plus dynamique que statique ?

Question 4

Est-ce que cette vision des choses est positive, ou négative, pour l'enseignement de l'analyse dans les classes de lycée ?

Les réponses sont laissées à la discrétion du lecteur. Mais, comme bien souvent, poser la question, c'est y répondre, au moins implicitement...

Une semaine plus tard, toujours en module, on revient sur l'activité précédente, avec pour objectif de valider par le calcul les découvertes expérimentales. Et on commence par ce qui avait terminé la séance : la définition d'une tangente. Successivement sont proposées par la classe les définitions et les objections suivantes :

Première définition :

Une droite est d'autant plus tangente à une courbe qu'elle a plus de points communs avec elle

Objection : *une droite est droite, et une courbe... est courbe.*

Deuxième définition proposée :

Une droite est tangente à une courbe si et seulement si elle a exactement un point commun avec cette courbe.

Objection : *il y a l'axe de la parabole...*

Troisième définition proposée :

Une droite est tangente à une courbe si elle a exactement un point commun avec elle, et si toute la courbe est située du même côté de la droite.

Objection : *cela ne marche pas pour toutes les courbes...*

Quatrième définition :

Idem que la 3°, en remplaçant courbe par parabole...

On convient alors que cette définition, au domaine de validité clairement fixé (la parabole) est provisoire. Il est annoncé par le professeur qu'une définition plus générale sera vue pendant l'année, à l'occasion du cours sur les dérivées.

La définition ayant été fixée, la résolution peut alors avoir lieu..

D. Résolution...

On recherche $a \neq 0$, b et c , tels que les équations suivantes aient chacune une solution unique :

$$ax^2 + bx + c = -7,3x - 24,075$$

$$ax^2 + bx + c = -1,3x - 9,075$$

$$ax^2 + bx + c = 7,7x - 9,075$$

L'écriture de la nullité des trois discriminants pose un problème : les rôles de a , b et c ne sont pas habituels...

$$(b + 7,3)^2 - 4a(c + 24,075) = 0$$

$$(b + 1,3)^2 - 4a(c + 9,075) = 0$$

$$(b - 7,7)^2 - 4a(c + 9,075) = 0$$

La résolution du système n'est pas immédiate... Mais les nombres ont été choisis pour que le calcul de b , puis de a et c , soit possible.

Le calcul de a, b, et c dissipe tout malentendu : la définition des tangentes était la bonne, le calcul exact, puisque... ça marche. Ceux qui avaient trouvé expérimentalement sont confortés dans leur certitude, les autres sont séduits par le résultat, et sa vérification graphique immédiate.

E. Qu'auront retenu les élèves de cette activité ?

Une semaine plus tard, les élèves ont un contrôle de deux heures, dont un exercice est

- a) Tracer le plus précisément possible la parabole d'équation $y = 2x^2 + 6x - 5$
 b) Vérifier que le point A de coordonnées (1; 3) appartient à cette parabole. Démontrer que les droites passant par A, et qui ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, ont pour équation $y = ax + 3 - a$.
 c) On sait que, si une droite est tangente à une parabole alors elle a un unique point commun avec elle. En utilisant cette propriété, déterminer l'équation de la tangente à la parabole en A.

Précision importante : les élèves n'ont pas de calculatrices graphiques à leur disposition...

Les résultats ne sont pas bons : un élève sur deux trace une parabole "insensée", n'utilisant aucun enseignement des modules .

La connaissance acquise est restée étroitement liée à l'objet manipulé.

Avec la correction du contrôle, retour sur les rôles de a, b et c.

Les élèves notent :

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut ;
Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas ;
Si $a = a'$, les deux paraboles sont superposables.
Le sommet d'une parabole a pour coordonnées

$$\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

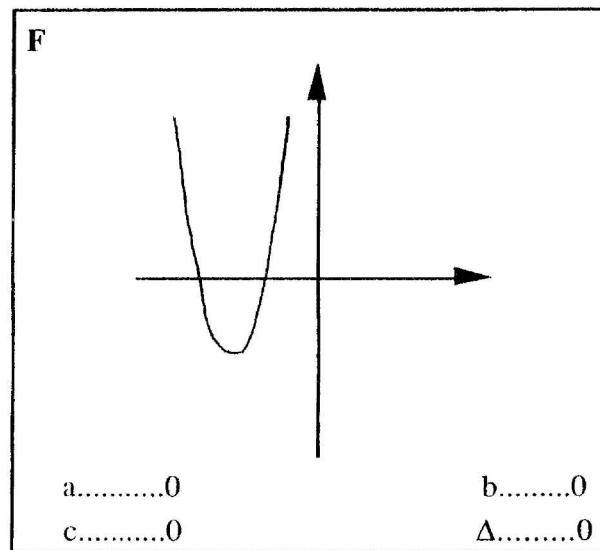
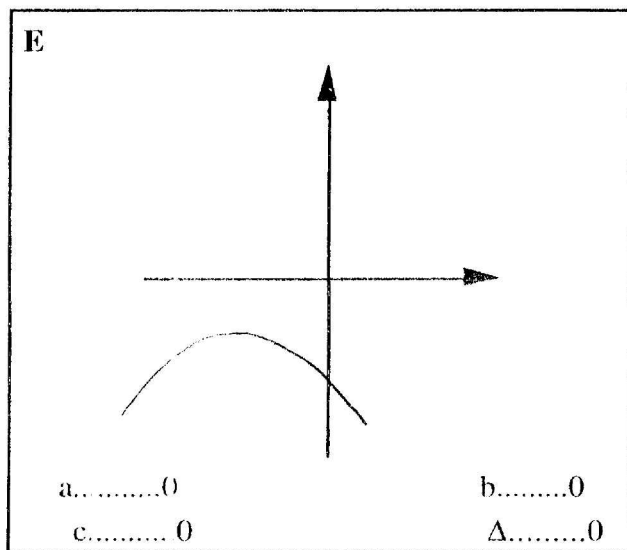
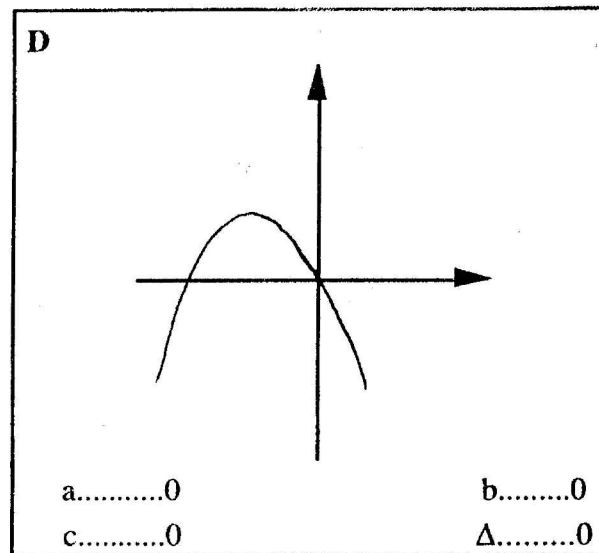
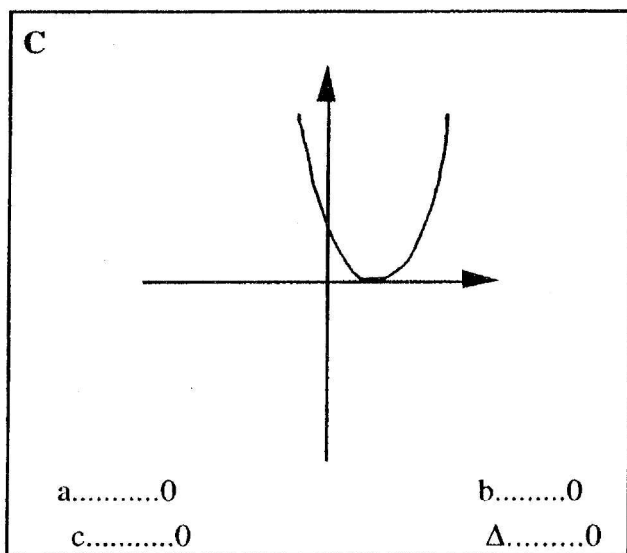
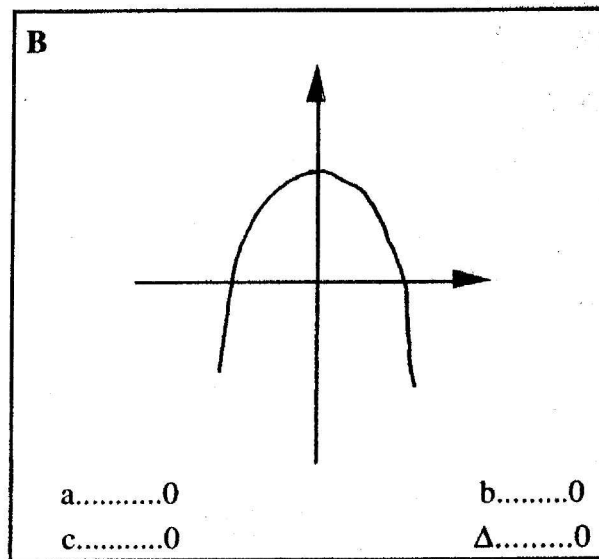
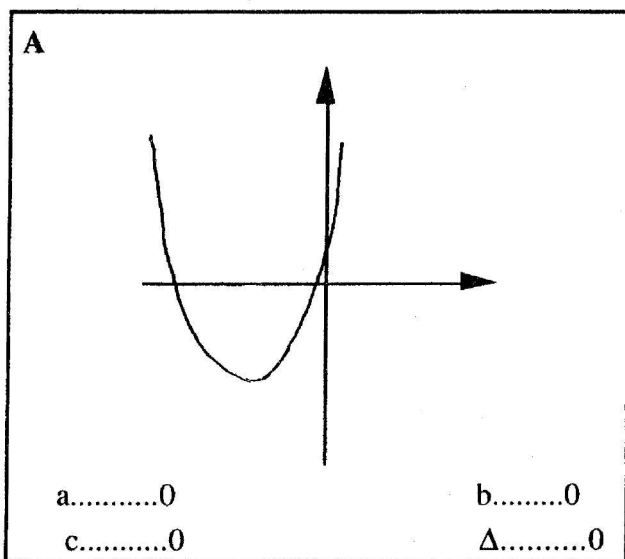
Le coefficient "c" est "l'ordonnée à l'origine".

Toute intervention du mouvement a été exclue dans ces propriétés (sauf éventuellement le "superposable").

Un contrôle est annoncé pour la semaine suivante, portant uniquement sur la représentation graphique des trinômes du deuxième degré.

Il est précisé en fin que l'utilisation de la calculatrice sera exclue.

Les élèves ont une heure pour compléter les cadres ci-dessous, et justifier au verso.



F. Conclusions

Pour a et Δ , ce n'est pas mal, cependant apparaissent des "erreurs" significatives :

Contagion de la "rationalité du quotidien" sur la rationalité mathématique

Plus a est petit, plus la parabole est étroite

Si a est positif, il y a un maximum,

si a est négatif, il y a un minimum

Contagion du cadre géométrique sur le cadre algébrique

La courbe admet un minimum, un maximum

Quand $\Delta = 0$, la courbe s'annule en un point.

Relative étanchéité des cadres algébriques et analytiques

Pour déterminer le signe de Δ , plus de la moitié des élèves passe par l'ordonnée du sommet, et non pas par un dénombrement, plus simple pourtant, des racines du trinôme.

Pour la détermination de b et c , c'est beaucoup plus mauvais...

La détermination de b est perturbée par des considérations de mouvement

C'est ce qui explique sans doute que les résultats sont plus mauvais que pour Δ , alors que la méthode utilisée est souvent la même (coordonnées du sommet)

b définit le déplacement latéral de la parabole ;

quand b est positif, la parabole se déplace vers la gauche, quand b est négatif, la parabole se déplace vers la droite.

La détermination de " c " est perturbée par des considérations "géométrico-dynamiques"

c détermine la hauteur de la parabole

" c " est négatif car la parabole est basse

" c " est nul parce que la parabole est au niveau 0, sur l'axe des abscisses.

Enfin des problèmes logiques, toujours pour c

Si Δ est positif, alors a et c sont de signe contraire

Il y a une grande résistance, chez les élèves, à modifier leurs conceptions initiales.

La calculatrice renforce un certain nombre de ces conceptions. En particulier, elle renforce :

- la domination d'un point de vue géométrique sur un point de vue analytique ;
- la domination d'un point de vue dynamique sur un point de vue statique.

Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas s'en servir... Mais en être conscient suppose :

- de contrôler l'utilisation qu'en font les élèves;
- d'alterner activités avec, et activités sans, calculatrices ;
- de laisser s'exprimer les "modèles spontanés" des élèves pour mieux les dépasser.

Les modules ne sont-ils pas un cadre adapté pour cela ?

Références bibliographiques

Livres

- Berger M. *Géométrie* ; Col. Cédic ; édit. Nathan ; 1979.
- Sortais Y. et R. *La géométrie du triangle* ; édit. Hermann ; 1987.
- Théodor R. *Initiation à l'analyse numérique* ; édit. Masson ; 1989.

Articles et revues

- Chantriaux P. "Introduction progressive en 1° de la dérivation et de ses applications avec l'aide du logiciel GRAPHE" ; *bulletin APMEP* ; n°391 , déc. 1993 ; p.580.
- Laurent A. "Interperprétation de "abs" par certaines calculatrices" ; *bulletin APMEP* ; n°392 , février-mars 1994 ; p.41.
- Le nouvel Archimède* ; n°10 ; oct 86.

Manuels

- Dimathème, 1°S ; édit. Didier ; 1982
- Math 1°S ; IREM de Strasbourg ; édit. Istra, 1988.

Brochures

- C.Faure, M. Noguès, Y. Nouazé, L. Trouche
- *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, IREM de Montpellier, 1993.
 - *Quelques idées pour la mise en pratique des modules en seconde*, IREM de Montpellier, 1993.

ISBN 2 909916-08-1

Prix fascicule : 40,00F