

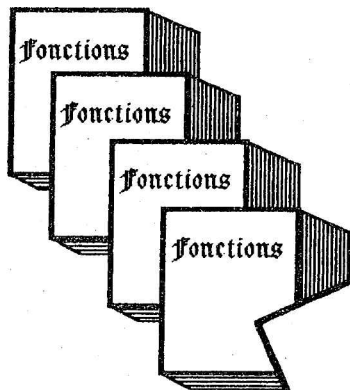
Dossier n°
EFE2IKSE

Le concept de fonction

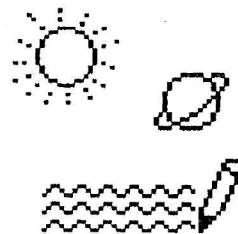
*Rapport sur de curieux cas
de conceptualisation*

par

Maryse Noguès



Affaire non classée
Année universitaire 92/93
Bureaux du D.E.A. de didactique
des disciplines scientifiques.



*Le temps est ce qu'il y a de plus sage
parce qu'il découvre tout.*

(lieu commun)

Le concept de fonction.

SOMMAIRE :

I. Introduction.	p. 2
II. La formation historique du concept.	p. 3
III. Concept et didactique.	p. 9
A. Le concept.	
B. Représentation de la notion de fonction dans différents registres.	
C. Les recherches didactiques sur les fonctions.	
IV. Enseignement et analyse.	p. 16
A. Les programmes depuis les années 1970.	
B. Les manuels depuis les années 1970.	
V. Une représentation du réseau conceptuel de la notion de fonction.	p. 22
VI. Les conceptions des élèves.	p. 26
A. Compte rendu de la séance en seconde.	
B. Le questionnaire en terminale.	
VII. Conclusion.	p. 39
Références bibliographiques et annexes.	

D.E.A. de didactique des disciplines scientifiques
Option : mathématiques
Maryse Noguès

I. Introduction.

D'un point de vue historique, le concept mathématique de fonction a pour origine la perception de corrélations entre des phénomènes de la nature.

Sa formulation actuelle de correspondance univoque, arbitraire entre éléments de deux ensembles de nature quelconque est l'aboutissement de travaux et parfois de querelles qui ont permis d'élucider et rendre plus rigoureuses les "intuitions" liées à ce concept : les notions de correspondance, de variable et de variation, de limite et de continuité... Il est le fondement de toute une partie des mathématiques où les fonctions numériques sont seulement des cas particuliers parmi les fonctions vectorielles, complexes, analytiques...

En se développant, les fonctions ont permis la modélisation de phénomènes qui, auparavant, ne pouvaient pas être décrits même approximativement. Leur utilisation dans tous les domaines, scientifiques ou non, pour peu que ceux-ci se prêtent à une quantification des données et des propriétés étudiées, en fait un des thèmes majeurs de l'enseignement mathématique. Dès que cet enseignement s'éloigne un peu des notions premières et opératoires de base, c'est à dire dès la fin du cycle du collège, les élèves sont confrontés à ce concept dans une formulation qui perdant son aspect général, se limitera aux fonctions numériques étudiées aussi bien d'un point de vue algébrique que graphique...

Mais l'étude de cas trop particuliers, même s'ils intègrent divers modes de représentation, ne donne pas aux élèves la possibilité de se constituer un réseau conceptuel structurant leurs connaissances et permettant de catégoriser les objets mathématiques qu'ils manipulent. Ainsi, notre hypothèse est qu'il y a actuellement, pour eux, un défaut de conceptualisation de ce qui est à la source même du concept : une mise en relation de deux grandeurs. Après un très fort mouvement de formalisme et de structuralisme, les programmes minimisent maintenant cet aspect, mais ceci peut induire une appropriation laborieuse du concept et des notions qui lui sont liées, indépendamment des difficultés propres aux modes de représentation.

Par ailleurs, l'hypothèse didactique : l'abstrait est non communicable par des mots, mais c'est seulement à travers des situations qui le mettent en jeu qu'il peut être appréhendé, a été la source de divers travaux. Ainsi, certaines recherches mettent l'accent sur le fait que l'appropriation de la notion de fonction ne se fonde pas, à priori, sur l'apprentissage de la définition et des notions liées à ce concept, mais repose essentiellement sur la maîtrise des tâches de passage entre différents registres de représentation. Ces recherches, bien malgré elles, ont pu entraîner une dérive au niveau des manuels scolaires qui proposent maintenant beaucoup "d'activités", mais qui laissent dans l'ombre des définitions acceptables et non ambiguës nécessaires à l'institutionnalisation du savoir. Ce mode de fonctionnement nous paraît renforcer les difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour constituer un réseau conceptuel général permettant d'intégrer de nouvelles connaissances.

Après une étude préalable de l'émergence historique des notions liées au concept de fonction et qui font sens pour nous, nous essayerons de caractériser celui-ci au niveau collège/lycée et c'est seulement d'une façon qui court le risque d'être jugée grossière, voire simplificatrice que nous tenterons de rendre compte des conceptions de certains élèves.

II. La formation historique du concept.

Considérons la définition d'une fonction donnée par Bourbaki en 1939 (Théorie des ensembles, § 2 Fonctions), représentative de la conception actuelle d'une fonction :

“Soient E et F deux ensembles, distincts ou non. Une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y , si quel que soit $x \in E$, il existe un élément y de F et un seul, qui soit dans la relation considérée avec x .

On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément $x \in E$, l'élément $y \in F$ qui se trouve dans la relation donnée avec x ; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x , et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée.”

Cette formulation en langage naturel exprime seulement l'idée d'une correspondance entre éléments de deux ensembles de nature quelconque, elle ne propose pas de registre symbolique de représentation, mais simplement un cadre abstrait de classification d'objets. C'est en diversifiant les propriétés des concepts liés aux fonctions (ensembles, correspondance) que se constituent les notions plus particulières de fonction numérique, continue, intégrable...

Avec cette formulation des fonctions, les concepts “classiques” de continuité, continuité uniforme, discontinuité ont pu être élargis en tenant compte des propriétés topologiques des ensembles sur lesquels elles portent. L'analyse fonctionnelle (recherche de fonctions vérifiant certaines conditions) a pris ainsi un nouvel essor, les fonctions étant considérées elles-mêmes comme des éléments d'ensembles et satisfaisants certaines relations fonctionnelles. Cette démarche étant facilitée par l'introduction en analyse de structures algébriques : groupes, espaces vectoriels, algèbres, qui ne sont pas l'expression unique d'un désir de généralisation des concepts mathématiques mais qui permettent aussi d'aborder de manière plus simple de nombreux problèmes classiques.

Les travaux de Frechet¹, au début du XX^{ème} siècle ont permis l'émergence de cette conception alors que jusque là ce sont essentiellement des fonctions numériques (ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$) et même à variable réelle qui ont été étudiées.

Dans l'Antiquité, les tables astronomiques (carrés, cubes, racines carrées..., sinus) établissent “des relations entre des ensembles discrets et finis de quantités constantes, prises isolément, dans un but principalement pratique et numérique”, ces correspondances sont élaborées à partir de l'observation des phénomènes de la nature et l'idée de quantité variable n'apparaît pas.

Au XIV^{ème}, les savants cherchent à quantifier les lois de la nature et en particulier les lois de la cinématique avec tous ses problèmes d'étude de mouvements, de trajectoires. Ils établissent alors des lois de type fonctionnel. Mais, la cinématique qui “repose sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps, c'est-à-dire fonction du temps” (Bourbaki), les oblige à envisager “toute chose mesurable, à l'exception des nombres, comme une quantité

¹ “...l'Analyse générale apparaît maintenant comme l'étude des relations entre deux éléments de nature quelconque (dont l'un pourra jouer le rôle de variable et l'autre de fonctionnelle).

Le cas où la fonctionnelle est un nombre est celui qui a été étudié jusqu'ici avec le plus de détails ; pourtant l'étude des propriétés infinités, des relations entre deux variables de nature quelconque a déjà attiré l'attention. Elle n'est autre que l'étude des transformations abstraites continues ou bicontinues. Nous avons envisagé dès 1909 ces transformations et particulièrement les “homéomorphies” c'est à dire les correspondances biunivoques et bicontinues entre deux éléments de nature quelconque.” (“Les espaces abstraits”, Frechet, 1909).

Tableau récapitulatif des grandes étapes de la constitution du concept de fonction

EPOQUE	NOTION	DOMAINE DES RECHERCHES	INCIDENCES EXTERNES
Antiquité	Relation entre deux grandeurs mesurables exprimée par des nombres entiers.	Tables astronomiques, tables de racines, puissances.	
Moyen-Age (Oresme XIV)	Représentation graphique d'une fonction pour laquelle des considérations sur le temps, rendent nécessaire l'introduction d'une "variable continue".	Cinématique.	
XVII Descartes Newton, Wallis... Leibniz	Représentation par une formule algébrique. Définition par une équation, et opérations algébriques en nombre fini. Définition par des séries infinies de puissances, l'idée de passage à la limite apparaît, ainsi que l'idée de loi de variation Définition par une loi de variation, équation différentielle ou intégrale. <i>Point de vue géométrique sur le calcul infinitésimal</i>	Cinématique (astronomie, chute des corps) Mécanique	Viète (1591) : algèbre littéraire symbolique.
Bernoulli (1718), première définition formelle d'une fonction, notation proposée: ϕx.			
XVIII Euler	Siècle de la mise au point des techniques de calcul infinitésimal <i>Point de vue algébrique.</i> Siècle où les fonctions deviennent la base de l'édifice mathématique <i>Résolution d'équations différentielles.</i> - Classification des fonctions suivant leur mode de définition (uniforme / multiforme) - Première définition d'une fonction continue	Mécanique : - équilibre - milieux déformables - mouvements - moindre action - Problème des cordes vibrantes	
Tentative pour se libérer de la géométrie par des calculs algébriques formels mais pas de distinction analyse - algèbre et pas de préoccupations sur la convergence.			
XIX Gauss, Cauchy, Bolzano, Abel Fourier, Dirichlet, Riemann	Formalisation rigoureuse du calcul infinitésimal (infinitement petit, limite, convergence). Formalisation rigoureuse de la continuité (fonction univoque). - Développement des fonctions en séries trigonométriques. Théorie de la mesure. Distinction continuité et dérivabilité.		Obligation d'enseignement Cantor - Dedekind (1870) - théorie des ensembles - topologie - construction des réels
Les fonctions deviennent des correspondances arbitraires, elles sont classées selon leurs propriétés : continues, dérivables, intégrables, bornées...			

continue" (Nicole Oresme, 1320-1382). Le problème étant pour ce dernier : comment rendre compte de cette variation continue de la variable de départ qui n'est alors plus quantifiable en nombres entiers ou rationnels ? Il utilise alors une représentation graphique pour établir la relation temps-vitesse.

Ainsi, dès les premières études sur la fonctionnalité, est mis à jour le problème de l'absence d'une théorie suffisante des nombres qui puisse rendre compte d'une variable non discrète et auquel le mode de représentation graphique trouvé permet de pallier, mais peut aussi être un frein au développement d'une théorie complète et rigoureuse sur les nombres.

Jusqu'au XVII^{ième}, les courbes sont définies par leurs propriétés géométriques et le concept de fonction n'apparaît pas de façon explicite.

Le XVII^{ième} siècle pourrait être qualifié de "siècle d'émergence" les principaux acteurs étant Descartes (1596-1650), Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Bernoulli (1667-1748). Siècle, dont un aboutissement est la proposition par Bernoulli de la première définition d'une fonction : "on appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que se soit², de cette grandeur variable et de constantes".

Au préalable, les travaux de Viète ont permis l'emploi de formules algébriques qui simplifient les calculs. Avec Descartes (1637) est apparue la notion de fonctionnalité à partir des équations. Une équation entre deux variables x et y permet d'introduire leur relation de dépendance : l'une d'elle permettant de déterminer l'autre. Mais influencé par sa lecture des grecs et de leur système de proportion exacte, Descartes se limite aux relations faisant intervenir des "opérations algébriques" (addition, multiplication, racine) en nombre fini.

Cette restriction introduite par Descartes d'expressions seulement algébriques pouvant définir une relation fonctionnelle vole vite en éclat avec Wallis, Newton, Gregory... (1667) qui introduisent les algorithmes infinis dans la définition des relations fonctionnelles (sommes de séries...).

Avec Newton et Leibniz sont posés les deux principaux problèmes du calcul infinitésimal (différentiation et intégration). Celui-ci permet de passer en mathématique de la recherche d'un nombre solution d'une équation algébrique, à celui d'une fonction donc d'une quantité variable en faisant des équations différentielles ou intégrales un des fondements de l'édifice mathématique. Mais, ces recherches se font dans une formulation essentiellement géométrique (problème inverse des tangentes de Leibniz) ou mécanique (Newton) et la manipulation des infiniments petits ou grands suscite bien des controverses. Ainsi Berkeley reproche au raisonnement de Guillaume de l'Hospital de ne pouvoir énoncer de règle rigoureuse précisant si dx est un infiniment petit, pour quelles valeurs de n , ndx est encore infiniment petit.

Ainsi sont apparues les expressions formelles algébriques pour représenter une fonction, ce qui conduit les mathématiciens à se poser la question de comment définir une fonction, c'est à dire établir la loi fonctionnelle. D'autre part, les calculs de variations et la manipulation des infiniments petits ou grands posent des problèmes qui déboucheront au XIX^{ième} sur le concept de limite, et au

² En disant "de quelque manière que se soit", Bernoulli renvoie aux opérations de l'algèbre et aux sommations infinies.

XX^{ième} sur l'analyse non standard.

Euler surtout, au XVIII^{ième} va essayer de préciser le calcul infinitésimal. Pour l'affranchir de la géométrie et de considérations métaphysiques sur l'infini, il le considère comme une extension de l'algèbre à laquelle il adjoint deux opérations : différentiation et intégration. Ses calculs sur des expressions infinies sont des calculs formels qui ne s'attachent pas à la convergence.

Il est le premier à introduire la lettre f pour désigner une fonction, distinguer les variables x, y, z , des constantes a, b, c . Il classe les fonctions comme algébriques (variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre) ou transcendentes (autres opérations : trigo, log, exp ; ou les mêmes que les précédentes mais répétées une infinité de fois), explicites ou implicites, uniformes (une image) ou multiformes (plusieurs images).

Si actuellement seules les fonctions uniformes (ou univoques) ont le nom de fonction, les problèmes soulevés par le logarithme d'un nombre complexe³ ont amené Euler à introduire cette distinction, mettant ainsi fin à la controverse entre Jean Bernoulli et Leibniz, le premier soutenant que $\log(-1) = 0$, l'autre que ce logarithme ne pouvait être qu'imaginaire.

A cette époque, le concept de fonction étant lié à l'étude analytique des courbes, pour Euler, on avait les "vraies" fonctions, celles déterminées par une expression analytique pour tout le domaine de la variable, appelées fonctions continues et les fonctions discontinues ou arbitraires dont les diverses portions ont comme expression des fonctions différentes de x . Mais confronté en particulier au problème des cordes vibrantes, il est obligé d'élargir la classe des fonctions et d'abandonner les expressions analytiques comme la substance principale de la définition d'une fonction et l'idée d'une représentation analytique unique. Sa définition devient : une relation quelconque entre des quantités variables d'une dépendance quelconque.

Ainsi avec Euler, apparaît l'arbitraire nécessaire de la correspondance entre variable et image qui n'est pas forcément exprimable par une relation analytique pour pouvoir modéliser correctement certaines situations de la physique. Les intuitions sur les courbes géométriques rendaient ce passage difficile. De plus l'histoire n'a conservé comme fonctions que celles qui sont univoques.

Leibniz avait déjà essayé de fonder les mathématiques sur une logique débarrassée de l'évidence, des impressions premières et de présenter sous forme axiomatique les éléments du calcul logique, condition nécessaire à une "mathesis universalis". Le pragmatisme du XVIII^{ième} siècle où la tâche essentielle des mathématiciens n'était pas tant de scruter l'origine de leurs énoncés que d'en produire de nouveaux, a reporté au siècle suivant cet effort théorique.

Le XIX^{ième} siècle est bien celui de l'épanouissement de l'analyse, l'effort de rigueur imposé par le souci d'enseignement, mais aussi par les impasses, les contradictions⁴

³ z étant un nombre complexe non nul, il existe une infinité de nombres complexes $\zeta = u + iv$ tels que $e^{u+iv} = z$. Si la partie réelle u de ζ est fixée par la condition $e^u = |z|$, soit $u = \log|z|$, sa partie imaginaire v est une solution quelconque de l'équation $e^{iv} = z/|z|$, c'est à dire une détermination de l'argument de z , celles-ci ne sont égales que modulo 2π .

⁴ Ainsi les "monstres" : "courbes" sans tangente en aucun point, "courbes" remplissant un carré... en opposition flagrante avec "l'intuition" première de l'espace, deviennent des objets rigoureux après les travaux de Weierstrass, Cantor...

auxquelles conduisaient les travaux antérieurs, permet de proposer des définitions acceptables pour la continuité, la convergence...

Lorsque Fourier montre qu'il est possible de représenter par des séries trigonométriques, non seulement des fonctions analytiques (ou continues au sens d'Euler) mais d'autres fonctions quelconques qui ne satisfont pas à une loi simple ni même à diverses lois en diverses parties (discontinues), la notion de continuité eulérienne issue peut être du vieil adage latin "natura non facit saltus" est mise à mal. Cauchy souligne que même sur un exemple très simple, il y a contradiction : fonction égale à $+x$ si $x > 0$, et à $-x$ si $x < 0$, cette fonction n'est pas continue au sens d'Euler, mais notée $\sqrt{x^2}$ elle apparaît comme continue. Il propose dans son cours d'Analyse à L'Ecole Polytechnique en 1821 une définition de la continuité : "la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à la variable x entre des limites données, si, entre ces limites un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même". Ainsi, la notion de fonction cesse d'être subordonnée à l'hypothèse de continuité. Bolzano précisera encore cette notion de continuité, mais cette approche plus rigoureuse peut se faire aussi grâce aux travaux de Dedekind, Cantor, Weierstrass qui élaborent des théories abstraites, fortement axiomatisées : théorie des ensembles, topologie, construction des réels.

La notion plus générale d'une fonction univoque y d'une variable indépendante x conçue comme une correspondance arbitraire a pris forme, les fonctions seront classées par rapport à leurs propriétés : continuité, différentiabilité, intégrabilité, variation bornée...

La fin du XIX^{ième} et le début du XX^{ième} siècle est un moment de polémiques très vives entre analystes français (Borel, Lebesgue, Baire, Hadamard). Leurs discussions portent sur l'existence et les définitions des objets mathématiques, en particulier de l'objet fonction : "peut-on considérer comme parfaitement définies et données des fonctions dont on ne saurait calculer la valeur pour chaque valeur donnée de la variable avec une approximation fixée ?". La réponse positive à cette question de Lebesgue, est contemporaine des travaux de Frechet qui dès 1909 généralise la notion de fonction. On arrive ainsi à la définition de Bourbaki en 1939 dans "les structures fondamentales de l'analyse".

Mais l'analyse classique ne propose pas de concepts susceptibles de modéliser efficacement les microphénomènes imperceptibles qui sont à la source des phénomènes perceptibles. La notion de limite n'étant qu'un détour qui faute de concept intermédiaire ne rend pas suffisamment compte des hiérarchies de phénomènes à frontière floue. Ainsi se développe actuellement l'analyse non standard : théorie des infinitésimaux qui faute d'être intégrés depuis Leibniz à une théorie mathématique avaient été abandonnés au profit du concept de limite que Dedekind et Weierstrass avaient, lui, rendu rigoureux. Celle-ci voudrait proposer une modélisation efficace de ces phénomènes en adjoignant à la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel des éléments dits externes. Les 3 axiomes de base de cette théorie mis au point par E. Nelson à la suite des travaux d'A. Robinson, assurent la cohésion du système interne (ou standard) mais permettent par exemple de concevoir des modélisations discrètes de phénomènes jusque là considérés comme continus par les mathématiciens alors que la réalité perçue (pour des physiciens par exemple) est discrète.

L'analyse non standard qui simplifie les formalismes de l'analyse pourrait-elle être enseignée à un niveau plus élémentaire puisqu'elle s'avère un puissant outil de découverte⁵ ?

Au cours de leur histoire, les mathématiques ont pris conscience de leur nature, elles ne sont pas une science de la nature mais une manière de conduire sa pensée afin que celle-ci soit toujours en accord avec elle-même. C'est en se décontextualisant des situations historiques qui ont présidé à leur apparition, en trouvant place à l'intérieur d'une théorie qui sera généralisante, abstraite que les concepts acquièrent leur statut de concept mathématique. Ainsi, c'est seulement à la fin du XIX^{ème} siècle que les fonctions peuvent acquérir ce statut, lorsque leur étude commence à s'organiser dans une théorie où perdant leur rôle d'outil, elles deviennent des objets mathématiques.

L'enseignement mathématique doit-il, suivant en cela l'ordre historique, dégager les grandes idées organisatrices au terme de son parcours ? Pourquoi ne pas utiliser au départ la puissance des concepts ? La notion générale du concept de fonction, pour simple qu'elle puisse paraître a mis longtemps à être précisée. Malgré toutes les critiques qui peuvent être faites à une présentation abstraite, nous pensons que cette généralité est plus apte à structurer l'acquisition de connaissances et de plus offre un modèle possible à des phénomènes très divers.

⁵ André Deledicq en particulier a essayé de montrer comment l'introduction de l'Analyse Non Standard pouvait permettre une manipulation plus rigoureuse des ordres de grandeur pour les débutants en analyse en Deug et 1S.

III. Concept et didactique.

A. Le concept.

“Le concept est une pensée abstraite relativement stable et désignée par un mot” (Burloud). Mais, en mathématique ce mot ne relève pas du langage naturel. Au cours de la formation historique du concept, ce mot a acquis une caractérisation particulière, de plus en plus structurée et complétée par une représentation symbolique propre.

Pour Britt-Mari Barth⁶ : “un concept est une étiquette, non pas isolée mais qui désigne une liste d'attributs, laquelle est susceptible d'être appliquée à des exemples”.

Ceci permet alors une classification des objets ou des êtres selon leurs attributs. Acquérir un nouveau concept, c'est acquérir une règle de classification d'objets mais cette règle est déjà déterminée par d'autres individus, cela suppose donc une interaction verbale avec l'entourage pour percevoir cette classification.

Elle distingue comme l'américain Bruner trois types de concepts :

- conjonctifs (l'ensemble des attributs est présent dans chaque exemple),
- disjonctifs (l'ensemble des attributs n'est pas nécessairement présent dans chaque exemple),
- relationnels (ces concepts ne peuvent être définis que par rapport à d'autres).

Elle introduit trois autres distinctions sur les aspects d'un concept qui lui semblent pédagogiquement utiles :

- le niveau de complexité : qui dépend du nombre d'attributs (pouvant être eux aussi des concepts complexes) et des relations qu'ont les attributs entre eux.
- le niveau d'abstraction : faisant l'hypothèse que l'individu catégorise pour réduire la complexité des stimuli qui l'entourent, elle appelle, à la suite de Rosch, “niveau de base” le niveau d'abstraction d'un concept qui offre le niveau le plus abstrait possible en même temps qu'un nombre suffisant d'attributs concrets, soit le niveau le plus inclusif possible. Par exemple, le concept de “maison” est plus inclusif que celui de “villa”, celui de “bestiole” plus que celui “d'insecte”, celui “d'être vivant” plus que celui de “mammifère”.
- le niveau de validité : c'est le niveau de consensus d'une définition donnée qui ne sera donc pas le même selon les concepts, exemple : cercle ou beauté.

Comment un enseignant peut-il aider les élèves à construire leur savoir ?

Elle répertorie tout un ensemble d'éléments qui peuvent permettre à l'élève de mieux construire son savoir. Nous ne retiendrons ici que deux aspects sans pour autant sous estimer les autres : “l'importance de la définition” et “le niveau de connaissance”.

Pour elle, des confusions sont faites par les élèves car la définition est souvent ambiguë et peu structurée. Si “les exemples sont nécessaires à l'abstraction, ils ne remplacent pas une définition”. De plus, si les élèves confondent les exemples des attributs du concept avec les exemples de ce concept, ils ne pourront pas arriver à une généralisation, confondrons les objets

⁶ Britt-Mary Barth, “L'apprentissage de l'abstraction”, Editions Retz, 1987.

d'une sous-catégorie et ceux d'une catégorie supérieure. Rosh suggère qu'il faut aborder un concept par son niveau de base, soit le niveau le plus inclusif possible.

Notons également cette phrase : "Il n'est pas possible de définir un concept - scientifique ou empirique - sans référence à d'autres. Un concept n'existe pas seul, mais toujours dans un réseau conceptuel. En élaborant un nouveau concept il est toujours important de le situer par rapport à d'autres faisant partie du même réseau."

Pour Gérard Vergnaud⁷ : "un concept ne peut-être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant".

Ayant ainsi posé ce cadre, Vergnaud caractérise l'acquisition d'un concept par le recours à des "schèmes", organisateurs invariants des conduites du sujet pour une classe de situations donnée. Ces schèmes, ou opérations, s'automatisant au fur et à mesure de l'acquisition. Vergnaud privilégie **l'action** du sujet face à une situation donnée pour vérifier la connaissance **pragmatique** du concept.

Il propose ainsi le triplet caractéristique d'un concept :

S : ensemble de situations donnant du sens (référence).

I : ensemble des invariants rendant possible le recours aux schèmes (signifié).

s : ensemble des formes langagières ou non symbolisant le concept (signifiant).

C'est à travers l'ensemble des exemples et des situations présentées aux élèves, l'ensemble des actions qu'ils vont effectuer, l'ensemble des symbolismes utilisés que va s'élaborer le concept. Mais Vergnaud parle plutôt de **développement, fonctionnement, utilisation** d'un concept dans une optique active et pragmatique.

S'intéressant plus particulièrement aux concepts mathématiques que Britt-Mary Barth, il s'interroge sur ce qui leur donne du sens : "si le sens est donné par les différentes situations, il n'est toutefois pas dans celles-ci, ni dans les mots ou les symboles". Le sens est constitué pour lui par l'ensemble des schèmes que peut mettre en oeuvre un sujet face à une situation ou à un signifiant donné. L'activité langagière étant un instrument privilégié qui permet non seulement de communiquer, de représenter des objets mais aide aussi à structurer l'activité intellectuelle (reconnaissance des relations pertinentes d'une situation donnée, organisation de l'action et de son contrôle).

Parlant du symbolisme mathématique, celui-ci n'est pour lui ni une condition nécessaire ni une condition suffisante à la conceptualisation, le langage naturel étant le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques mais le symbolisme présente l'avantage du laconisme indispensable au traitement de l'information.

*Ainsi la théorie des champs conceptuels de G. Vergnaud repose sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances où interviennent dualement **symbolisme et situations**.*

⁷ Gérard Vergnaud, "La théorie des champs conceptuels". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.10, n°23, pp 133-170, 1990.

De ces deux argumentations qui peuvent se compléter, nous retiendrons la notion de niveau de base pouvant se complexifier et par lequel devrait commencer l'apprentissage, niveau correspondant à un ensemble de situations, à des schèmes qui devront au cours de l'apprentissage non pas se juxtaposer mais former un véritable réseau conceptuel. Nous accorderons une place spéciale à la notion de définition, qui peut prendre diverses formes (langage, schéma...), mais qui ne nous paraît pas devoir être négligée. De plus, ces situations, exemples sont étudiés par l'intermédiaire de symbolismes différents et leur maîtrise sera un élément important pour la conceptualisation. Mais quels sont exactement les divers types de représentation auquel le concept de fonction fait appel ? A l'aide des travaux de Raymond Duval, Ismenia Guzman Rétamal nous proposons la classification suivante.

B. Représentation de la notion de fonction dans différents registres.

Qu'il s'agisse de concept mathématique ou autre, il y a plusieurs manières de présenter ou d'exprimer ce concept. Chacune d'elle étant à un moment donné plus pertinente par rapport aux propriétés que l'on veut mettre en évidence. L'ensemble des signes (traits, symboles, icônes...) appartenant à un même réseau sémantique constitue un registre et permet de donner une représentation particulière d'un objet, d'un concept mathématique.

A quels registres la notion de fonction fait-elle appel ? I. Guzman Rétamal⁸ propose la liste :

- algébrique : une expression algébrique qui permet de calculer l'image $f(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f représente l'objet fonction. Notons que ce registre concerne des fonctions numériques d'une variable réelle et qu'il suppose la règle de correspondance "invariable" au moins sur des intervalles déterminés.

- graphique : une courbe est un modèle de représentation de l'objet fonction comme ensemble de points du plan. Cette représentation concerne ici encore essentiellement des fonctions numériques de variable réelle, mais la relation de dépendance entre un élément et son image n'est pas obligatoirement exprimable par une "loi algébrique" simple.

- programmation : un processus permet d'obtenir l'image d'un nombre à partir de l'antécédent correspondant. C'est la calculatrice ou l'ordinateur qui établissent la correspondance selon une procédure qui peut être connue des élèves ou non.

- tableaux : la correspondance entre éléments est explicitement établie, à tout élément de l'ensemble de départ est associé sur la ligne (ou colonne) suivante la valeur de son image. Une telle représentation peut être utilisées pour des fonctions non numériques mais pour être vraiment explicite, elle suppose une variable discrète et un ensemble de départ fini.

Nous ajouterons les registres

- verbal : la correspondance est exprimée en langage naturel.
- ensembliste : un diagramme sagittal établit la correspondance de façon générale, la nature exacte des ensembles de départ et d'arrivée ainsi que le type de relation n'ont pas forcément besoin d'être précisés.

Tous ces registres ne sont pas pertinents pour représenter une fonction selon la situation considérée, mais il est nécessaire lors de l'apprentissage de montrer comment il est parfois possible de passer de l'un à l'autre. Toutefois, chaque registre met en jeu des

⁸ Ismenia del Carmen Guzman Rétamal, "Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction", Thèse de Doctorat, IRMA Strasbourg, 1990.

“variables”⁹ différentes qu’il est nécessaire de discriminer et d’associer correctement aux variables d’un autre registre pour pouvoir réaliser des activités de passage. Ainsi, Raymond Duval¹⁰ a étudié l’articulation des registres graphique et algébrique, montrant en particulier que même pour les fonctions affines, il n’y a pas équivalence (congruence) entre les variables pertinentes de ces deux registres et que les élèves ne discriminent pas correctement ces variables.

C. Les recherches didactiques sur les fonctions.

Les recherches sur les fonctions nous paraissent s’organiser autour de trois pôles : celles qui ont plutôt pour but d’évaluer les conceptions des élèves, celles qui s’intéressent davantage à travers diverses situations au signifiant (registres de représentation) et enfin celles s’attachant à la conceptualisation d’un attribut particulier (variation, continuité, limite...).

I. Guzman Rétamal propose dans son travail de thèse un panorama des recherches didactiques sur la notion de fonction. Les recherches décrites concernent plus particulièrement le moment où sont introduites les fonctions : fin de collège et seconde. Ce panorama n’inclue pas toutes les recherches qui ont pu être faites par ailleurs sur les notions de limite, calcul infinitésimal, continuité, suites...par exemple.

Mais nous attachant nous même davantage à l’introduction du concept de fonction, c’est à partir de son étude et des travaux de S.René de Cotret¹¹ que nous soulignerons quelques aspects de ces recherches.

Conceptions des élèves :

Shlomo Vinner (1983). Définition d’un concept, image d’un concept et notion de fonction.

Celui-ci établit un modèle simple du processus cognitif de la construction d’un concept autour des notions d’**image d’un concept** (ensemble des propriétés ainsi que le tableau mental i.e. les représentations) et de **définition d’un concept** (formulation verbale qui explique avec précision).

Ce modèle simple présente pour nous l’avantage d’associer une définition que nous pensons fortement codifiée (même si sa stabilité relative dépend de l’époque, du consensus, ou de la transposition didactique opérée entre savoir savant et enseigné) pour les concepts mathématiques et une image mentale qui renverra beaucoup plus aux situations dans lesquelles pourront être testées l’opérationnalité de certains schèmes.

L’étude de Shlomo Vinner correspond à l’objectif que nous viserons, puisqu’il cherche à déterminer au stade de la formation du concept, la définition que les élèves peuvent en donner. Il groupe en 4 catégories les réponses des élèves :

1. définition du manuel ;
2. règle de correspondance ;

⁹ Dans le registre graphique, la position de la courbe par rapport aux axes, ses points d’intersection avec les axes, sa convexité... peuvent être des exemples de “variables”. Dans le registre numérique, les coefficients de l’expression algébrique, la puissance des variables...seront de telles variables.

¹⁰ Raymond Duval, “Graphiques et équations”, Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, I, pp 235-253, IREM de Strasbourg, 1988.

¹¹ Sophie René de Cotret, “une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d’accéder au concept de fonction ou de variable dépendante”, Petit x, n°17, pp. 5 à 27, 1988.

3. formule algébrique, équation ;
4. éléments de l'image mentale (propriétés, représentations...).

Un de ses constats est qu'une correspondance arbitraire entre éléments n'est pas considérée par les élèves comme une règle fonctionnelle. C'est un cas flagrant de non généralisation qui est pourtant inclus dans la définition actuelle. Un autre de ses constats est qu'il peut y avoir réussite aux tests proposés quand bien même les élèves ont une image erronée du concept, mais jusqu'où peuvent-ils réussir ainsi : tant que les situations proposées ne font pas appel à autre chose que des techniques opératoires reconnues et utilisables ?

Il manque peut-être à cette recherche, comme le souligne I. Guzman Rétamal, la mise en évidence des différents registres de représentation du concept.

Signifiants :

- I. Guzman Rétamal (1990). *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.*

Elle s'intéresse essentiellement aux difficultés de passage pour les élèves d'un registre -graphique, numérique, tableaux, voire programmation- à un autre : produire une expression algébrique à partir d'une représentation graphique ou l'inverse... Un certain nombre de propriétés sont testées : reconnaissance de l'ensemble de définition, du sens de variation... Son étude concerne une classe de 3^e et sont uniquement testées des fonctions linéaires, affines ou affines par morceaux qui sont au programme. Il ne s'agit donc pas à ce niveau d'introduire la notion générale de fonction numérique mais d'appréhender quelques types particuliers de fonction.

I. Guzman Rétamal conclut en demandant que ne soient pas sous-estimées les difficultés de passage d'un registre à l'autre, en effet "on peut même conjecturer qu'une amélioration importante des performances dans les différents passages entre registres s'accompagnerait d'une réussite presque totale dans les tâches qui se situent à l'intérieur d'un même registre... Les difficultés que rencontrent les élèves relèvent plus d'aspects sémiotiques que conceptuels". L'enseignement des fonctions semble, à partir d'une étude rigoureuse des manuels, montrer que les activités correspondant à la maîtrise de ces tâches de passage sont particulièrement négligées.

Attribut :

- S. René de Cotret (1988). *Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante.*

Pour elle, certains attributs parmi ceux liés à la notion de fonction sont plus adaptés que d'autres à l'enseignement car ils permettent une approche plus intuitive et plus pratique. Ainsi, constate-t-elle, alors qu'il y a 100 ans la définition des fonctions contenait les notions de variation, dépendance, correspondance, les définitions ensemblistes actuelles ne conservent que le 3^{ième} aspect. C'est de l'uniformité de la règle de correspondance entre éléments de l'ensemble de départ et d'arrivée que pourra ressortir la dépendance de ces éléments et ainsi la possibilité de tester l'influence d'une variation. Pour elle, cette manière de voir est en accord avec la formation historique du concept de fonction (référence à Cauchy, Euler, Bernouilli et même Oresme). Il lui importe de proposer aux élèves la construction de

leur concept à partir de ses origines, en particulier donc de la notion de mouvement et de vitesse.

Les situations tests proposées aux élèves permettent de déceler comment ils modélisent des situations concrètes liées à une variation dans le temps : remplissage d'un récipient (cylindrique puis conique), élévation d'une tige (simulation ordinateur) à vitesse constante puis variable, remplissage d'un carré par des points. Les élèves doivent donner de ces expériences des modèles graphiques.

Son constat est que les élèves ne perçoivent pas le mouvement comme une relation distance/temps, Mais elle ajoute : " tous les problèmes... faisaient référence au mouvement, il nous est difficile de savoir jusqu'à quel point c'est directement la notion de fonction qui fait problème ou si c'est la conception du mouvement, de la vitesse qui fait obstacle à celle de variable dépendante".

Mais si c'est justement pour elle, ce concept originel de mouvement qui devait permettre une meilleure appropriation des notions de dépendance et variation intimement liées à celui de fonction, sa conclusion nous laisse alors bien sceptique.

Nous avons fait une distinction concernant ce qui est testé par les didacticiens relativement au concept de fonction. Il semble que des conceptions différentes au départ soit à la source de ces divers travaux. Ainsi, I. Guzman Rétamal s'intéresse plus particulièrement aux divers registres de représentation alors que pour Vinner l'idée de correspondance arbitraire est dominante et pour S. René de Cotret c'est plutôt une règle fonctionnelle non arbitraire, mais de dépendance qui peut permettre l'appropriation du concept de variation intimement lié à celui de fonction. Ce qui pour les chercheurs en didactique (et à fortiori les enseignants) semble faire le plus de sens pour aider à l'appropriation de ce concept par les élèves est donc "variable". Comment tenir compte de cette diversité et l'organiser dans un système qui pourrait être qualifié de cohérent sans se laisser prendre au piège de ses propres conceptions ?

Les différentes recherches qui viennent d'être énumérées sont relativement récentes (1983 pour la plus ancienne), mais les problèmes que pouvaient susciter l'enseignement de l'analyse ont entraîné des questionnements antérieurs. Ainsi, en 1976, l'I.R.E.M. de Poitiers, publiait un fascicule "Sur l'enseignement de l'analyse, n°1 : fonctions". Celui-ci, dans le cadre des programmes et des orientations de l'époque essaye de dégager ce qui constitue l'essentiel du concept au niveau secondaire, précisant que le verbalisme ne peut permettre aux élèves d'appréhender cette notion. Il propose aussi une liste de situations (de construction, ou de définition de fonctions), utilisables dès la seconde, voire le collège pouvant amener les élèves à ne pas "dépouiller le concept de sa généralité" et à "concevoir d'autres fonctions que celles du type étudié". Ceci à la suite d'un test que 428 élèves de première et terminale ont passé et qui met en évidence, pour les auteurs, le fait que les élèves n'ont pas intégré une des données essentielle : celle de correspondance arbitraire entre un élément d'un ensemble de départ et un élément d'un ensemble d'arrivée.

Mais si lors de sa formation historique, la formulation du concept de fonction ou de ses sous-concepts¹⁷ a pris plusieurs aspects successifs, en ce qui concerne l'enseignement, cette formulation n'est pas non plus immuable. Ce qui peut sembler essentiel à une époque donnée le sera moins à une autre. Quels choix et à quelles époques sont alors faits ?

¹⁷ Par exemple, les fonctions discontinues d'Euler sont en fait les fonctions différentiables par morceaux.

Il nous semble que les recherches faites sur la notion de fonction s'inscrivent directement par rapport à ces choix, que le chapitre suivant va essayer d'explicitier. En effet, si des travaux comme ceux de I.L.R.E.M. de Poitiers sont plus axés sur des propositions de situations pouvant permettre d'assimiler le concept de fonction à une époque (1976) où l'enseignement est surtout très formel, les travaux de I. Guzman Retamal (1990) s'inscrivent, eux à une époque où est privilégié le caractère outil des mathématiques. La nécessité d'introduire des situations variées afin de donner du sens au concept semble alors acquise, mais il reste à analyser comment les registres symboliques auxquels renvoient ces situations peuvent aider ou être un frein à la conceptualisation.

IV. Enseignement et analyse.

Pendant tout le XIX^{ème} les mathématiques enseignées reposent surtout sur les éléments d'Euclide. Calcul infinitésimal, analyse qui constituent alors de grands domaines de recherche ne relèvent que d'un enseignement pour initiés (l'enseignement scientifique n'est quasiment dispensé qu'à travers les grandes écoles : Ecole des Ponts et des Mines, Ecole Centrale, Ecole Polytechnique).

C'est seulement au début du XX^{ème} qu'un mouvement international pour un enseignement mathématique plus proche de l'état de cette science apparaît. Ce mouvement international se concrétise en France par l'adoption d'un nouveau programme (1902) qui est très semblable au projet allemand : "les principes de ce programme sont la restructuration de tout l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires autour du concept de fonction, l'orientation de la didactique vers la visualisation, l'introduction d'une géométrie propédeutique dans les classes inférieures et du calcul infinitésimal dans les classes terminales¹³". Euclide a vécu... Un organisme comme la CIEM (Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques) fondé en 1908 participe activement à la diffusion des conceptions relatives à ce nouvel enseignement. Ces réformes donnent non seulement une impulsion à l'enseignement mathématique mais favorisent le développement de la méthodologie et de la didactique.

Une deuxième réforme internationale a lieu en 1957. La théorie des ensembles proposée par le groupe Bourbaki à partir des années 1930 devient la base d'un enseignement mathématique unifié, structuré qui se veut un système cohérent pour tout le cursus scolaire. Cursus qui s'intègre maintenant à un système scolaire général complet avant la formation professionnelle puisque les écoles primaires ne sont plus des voies d'enseignement séparées destinées aux catégories sociales "inférieures" mais début d'un enseignement.

A la suite de ce mouvement, au début des années 70 (68-71), sont mis en place du collège au lycée de nouveaux programmes qui reposent sur un formalisme fort ("math. modernes"). L'apprentissage des structures et du symbolisme est privilégié, mais les difficultés rencontrées par ce procédé mènent de révisions en révisions aux années 85/86 où, avec un nouveau programme de collège et l'apparition d'une seconde indifférenciée, toute "l'axiomatique" disparaît. C'est à travers l'usage des outils dont ils disposent ou mis à leur disposition que seront testés les progrès des élèves.

Nous examinerons l'évolution des programmes du collège et de la classe de seconde des Lycées (A,C,T jusqu'en 86 puis seconde indifférenciée) par rapport à la notion de fonction ainsi que l'incidence de ces programmes sur certains manuels.

A. Les programmes depuis les années 1970.

I - L'enseignement mathématique est structuré à partir des définitions et notations ensemblistes.

¹³ Vérifier la validité de cette assertion de Gert Schubring demanderait que soient observés les programmes de cette époque. La géométrie a certainement continué à occuper une place importante dans l'enseignement secondaire, mais c'est plutôt le souci de réduire l'écart entre enseignement et recherche qui est à l'origine de ce mouvement.

Parution :	Collège	Lycée (seconde)
1968 :	B.O. du 31/10/68	1968 : B.O. du 31/10/68
		1973 : B.O. n° 25 du 21/6/73

Au collège : dès la sixième, les notions d'ensemble, de relation et de leurs propriétés constituent un apprentissage en soi. Le chapitre 1 des programmes, de la sixième à la quatrième, leur est consacré. En troisième, cette dénomination disparaît, la partie 1 s'appelle "Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques".

Des phrases de programme comme :

- "résumé des propriétés fondamentales de l'ensemble ainsi structuré"
 - "la géométrie ... devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique ; c'est à dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes)"
- soulignent si besoin était la volonté d'organiser les concepts, objets de l'apprentissage, dans cette perspective structuraliste.

Au lycée : l'apprentissage des notions aussi bien en analyse qu'en géométrie est organisée à partir du formalisme ensembliste et des structures algébriques. Dans le programme de 1968, la première partie s'appelle dans toutes les sections : "Langage des ensembles". La partie 3 est consacrée à l'étude des "Fonctions numériques d'une variable réelle" mais elle est à associer avec la partie 5 "Géométrie et calcul vectoriel" où une étude des applications linéaires est faite à partir de la structure d'espace vectoriel.

II - Les modèles et concepts mathématiques sont des moyens permettant de résoudre des problèmes simples.

Parution :	Collège	Lycée (seconde)
1977 :	B.O. du 17/3/77	1981 : B.O. spécial n° 1 du 5/3/81

Au collège : par problèmes simples, sont entendus problèmes de la vie courante ou posés par d'autres disciplines.

La partie "relation" des programmes antérieurs a disparu, ceux-ci sont maintenant divisés en deux parties, "calcul" ou "algèbre" et "géométrie plane" ou "géométrie". Le préliminaire au programme de quatrième :

"Les notions suivantes :

- applications ; composition des applications ;
- bijection ; bijection réciproque ;
- partition d'un ensemble et relation d'équivalence,

n'ont pas à faire l'objet d'un apprentissage pour elles-mêmes ; on les dégagera progressivement à partir des exemples qui se présenteront dans l'étude du programme." indique le souci de ne pas introduire un formalisme qui masquerait les problèmes concrets.

Au lycée : le programme est de manière générale beaucoup plus précis, et il l'est en particulier sur les fonctions. Les divers types de fonctions devant être étudiés sont précisés, leur introduction devra se faire à partir de divers exemples faisant intervenir plusieurs registres de représentation : tableau, formule, calculatrice ; et devront être pris à des champs variés : physique, biologie, économie ... L'algèbre linéaire a disparu et le mot application aussi.

III - L'enseignement mathématique est orienté vers le caractère "outil" de ses techniques.

Parution : **Collège****Lycée** (seconde)

1985 : Sup. B.O. n° 44 du 12/12/85

1987 : B.O. spécial n° 1 du 5/2/87

1990 : B.O. n° 20 du 17/5/90

Au collège : L'enseignement mathématique doit apprendre à relier les observations du réel à diverses représentations (schémas, tableaux, figures) et à relier ses représentations aux concepts. Cette démarche permet de partir de problèmes rencontrés dans d'autres disciplines et de faire mieux percevoir aux élèves le caractère "d'outil" de cette discipline.

Les mots application, relation... disparaissent des programmes, leur présentation est organisée de manière uniforme pour tout le cursus en

- 1 - Travaux géométriques
- 2 - Travaux numériques
- 3 - Organisation et gestion des données. Fonctions.

Pour cette dernière partie, des exemples numériques ou géométriques, la lecture ou l'utilisation de tableaux ou de représentations graphiques doivent permettre d'explicitier la proportionnalité et les applications linéaires, puis les applications affines.

Au Lycée : le programme 1987 précise pour les fonctions que tout exposé théorique (composition, relation d'ordre...) doit être évité. C'est toujours à partir d'exemples variés que doivent être définies les fonctions étudiées qui le sont sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Si les fonctions usuelles étudiées et les propriétés à mettre en évidence sont sensiblement identiques à celles du programme précédent, une attention particulière est accordée aux fonctions linéaires qui doivent être associées à la proportionnalité et le taux de variation n'est plus au programme. Les suites numériques ne sont plus au programme des classes de seconde.

Le programme 1990, "conserve pour l'essentiel, les objectifs du programme précédent... Cependant il était nécessaire d'infléchir le programme pour assurer une bonne continuité avec les nouveaux programmes de collège qui font davantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications".

B. Les manuels depuis les années 1970.

Comment se traduisent au niveau de l'enseignement donné ces variations ?

Les manuels ne sont certainement pas le reflet exact des démarches individuelles de chaque enseignant, mais dans la mesure où ils constituent pour ceux-ci une référence, peut-être plus que les programmes eux-mêmes, nous les utiliserons comme tests.

Au collège :

- *Mathématique 4^e, Collection Queysanne-Revuz, Edition Nathan, 1971.*

Programme 1968.

Dans les chapitres I (Relations) et II (Application), sont données des définitions générales :

"On dit qu'une relation f d'un ensemble A vers un ensemble B est une fonction si et seulement si pour tout élément x de A , il y a au plus un élément y de B tel que le couple (x,y) soit lié par f . On dit qu'une relation est une application si et seulement si..."

Des diagrammes sagitaux, cartésiens, et des représentations symboliques algébriques illustrent ces définitions.

Les notions d'égalité de fonction, bijection, fonction réciproque, fonction composée sont très

détaillées. Les exercices proposés ne font référence à aucune situation concrète mais ont pour but la vérification des notions exposées dans le cours : égalité, image, antécédent, bijection, composition. Les fonctions y sont définies par une expression algébrique ($f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; x \rightarrow x^2$) ou par un lien verbal (soit h de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ qui à tout entier relatif associe sa valeur absolue).

Dans le chapitre XV (Fonctions polynômes) on trouve la définition introductive :

“On appelle fonction numérique d’une variable réelle toute application f d’une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La source A de cette application est le domaine de définition de la fonction f .”

Il n’y a aucun graphe de fonction, les fonctions affines ne sont pas différenciées et le chapitre sert surtout à mettre en place des techniques de calcul sur les polynômes. Aucune situation concrète pouvant faire intervenir une modélisation par ce type de fonction n’apparaît.

Les translations sont des applications bijectives du plan dans lui-même.

- *Mathématique contemporaine 4^e*, Edition Magnard, Thitrioux, Sanchez, Duval, 1979.

Programme 1977.

Malgré le préliminaire au programme au programme de 4^e, le chapitre III du manuel s’appelle “Relations : révisions et compléments”. Seuls les mots relation et application sont définis, le mot graphe est plus employé et les exercices sont du type des précédents mais les représentations sous forme de tableaux sont plus utilisées, la recherche de graphes (ensembles de couples) plus fréquente. Pour deux situations proposées, l’une fait appel à la géométrie, l’autre à la lecture d’une carte géographique.

Dans le chapitre IX “Calcul littéral”, on trouve davantage d’exercices que le précédent concernant les fonctions polynômes en plus du calcul (factorisation, développement...). Aucune représentation graphique de fonction n’apparaît dans l’ensemble du manuel.

- *Mathématique 4^e*, Edition Magnard, Julien, Bras, Le Goff, Penninck, 1988.

Programme 1985.

Chapitre VI : “Proportionnalité - Application linéaire”. La définition suivante est donnée : “une application linéaire associe à tout nombre x le nombre $y = ax$ ”, ainsi que : “la représentation graphique d’une application linéaire est une droite passant par l’origine du repère”. Les situations proposées dans les exercices utilisent très souvent des thèmes empruntés à la physique, géographie... et les représentations proposées utilisent les registres algébrique, graphique ou des tableaux mettant en jeu des activités de passage d’un registre à l’autre.

Les translations sont “des déplacements suivant une direction constante qui conservent les longueurs et le parallélisme”.

Au lycée :

- *Mathématique 2^e A, B, C et T*, Collection Durrande, Thuizat et Girault, 1975.

Programme 1973.

Une grande place aux définitions ensemblistes des fonctions et applications est accordée, les exemples ne font pas uniquement appel à des situations numériques. Les fonctions numériques d’une variable réelle sont toujours définies par une expression algébrique, les représentations graphiques sont peu nombreuses, non données en général mais à réaliser, et les notions de variation sont citées en rappel pour les fonctions affines.

- *Mathématique 2^e, Nouvelle Collection Durrande, Thuizat et Girault, 1981.*

Programme 1981.

Le cadre général des définitions ensembliste d'une fonction est rappelé mais aucun exercice ne porte sur cet aspect et ce sont les "Fonctions numériques, suites numériques" (chap 6) qui sont étudiées. Aux exemples de fonctions définies par des formules algébriques, sont ajoutés des tableaux et des représentations graphiques en prenant des situations dans divers domaines : physique, biologie... Les suites sont des cas particuliers de fonctions numériques. Un plan d'étude d'une fonction est donné. Dans les exercices les représentations graphiques ne sont pas un support pour les questions, mais à réaliser.

- *Mathématique 2^e, Collection Hachette, Gautier, 1985.*

Programme 1981 et nouvelles instructions publiées au B.O du 25/10/1984.

L'esprit du précédent est conservé, mais le mot application disparaît. On y parle toujours d'ensemble de définition par exemple et les procédés pouvant définir une fonction numérique sont énumérés, les suites sont toujours étudiées comme cas particuliers de fonctions. Certains exercices sont conçus à partir d'une représentation graphique donnée : reconnaître le graphe d'une fonction, lecture d'image...

Programme 1990.

- *Mathématique 2^e, Collection Hachette, Terracher, 1990 :*

La définition : "une fonction définie sur un intervalle associe à chaque nombre de cet intervalle un nombre réel et un seul" est proposée ainsi qu'une notation formelle algébrique et la courbe représentative d'une fonction donnée est définie. L'expression "ensemble de définition" a totalement disparu. Les lectures graphiques sont nécessaires pour nombre d'exercice. Les fonctions peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes (équation, optimisation). Rappelons que l'étude des suites ne fait plus partie du programme de seconde.

- *Mathématique 2^e, Collection Bordas, Fractale, 1990 :*

La définition proposée est : "A et B désignent deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On dit qu'une correspondance entre A et B est une fonction lorsque, à tout élément de A, elle associe au plus un élément de B". On précise ensuite "on dit souvent que f est une fonction numérique d'une variable réelle". Les termes d'ensemble de définition et de courbe représentative sont définis. Ces dernières apparaissent dans les exemples mais dans les exercices aucune lecture de graphe n'est sollicitée et les fonctions proposées ne demandent jamais de recherche d'ensemble de définition.

Notons que dans deux autres livres de 1990 (Didier et Nathan) ce sont également des fonctions numériques à variable réelle qui sont définies sous le terme de fonction, mais sans que ce terme apparaisse. Le premier propose la définition du Bordas et des exercices de recherche d'ensemble de définition, le second celle du Terracher et le terme ensemble de définition n'est absolument pas cité.

Ainsi, le souci de donner aux élèves des situations de référence qu'ils pourront adapter à divers domaines (physique, biologie...), et de leur permettre l'utilisation de divers outils mathématiques (calcul numérique, représentations graphiques...), fait que sont de plus en plus limitées les formulations théoriques trop abstraites et qui peuvent ne renvoyer à rien.

Les fonctions étudiées sont des fonctions numériques à variable réelle qui récupèrent la dénomination fonction et les définitions proposées ne sont pas uniformes en ce qui concerne la règle de correspondance.

Les attributs d'un concept peuvent changer dans le temps, comme la partie II l'a montré lors de sa formation, ils changent aussi dans le temps selon les différentes options choisies pour un enseignement : ainsi la généralité des définitions ensemblistes a disparu pour laisser place à une caractérisation essentiellement numérique mais privilégiant plus les exemples concrets et tout ce qui a trait aux représentations graphiques. Ils peuvent aussi changer dans le temps, lors d'un apprentissage puisque celui-ci va permettre d'intégrer des notions de plus en plus complexes (la notion de linéarité par exemple ne sera pas introduite de la même façon au collège/lycée et dans un cursus ultérieur), **mais, la question que nous nous posons est : y-a-t-il consensus à un moment donné pour un niveau d'apprentissage donné sur les attributs d'un concept ?** La dernière remarque concernant les diverses propositions de définitions des manuels nous laisse penser qu'un consensus est difficilement réalisable.

VI. Une représentation du réseau conceptuel de la notion de fonction.

Si l'apprentissage d'un concept résulte de la mise en réseau à partir d'un niveau d'abstraction de base d'un certain nombre de sous-concepts, quel réseau peut représenter le concept de fonction au niveau collège/lycée ?

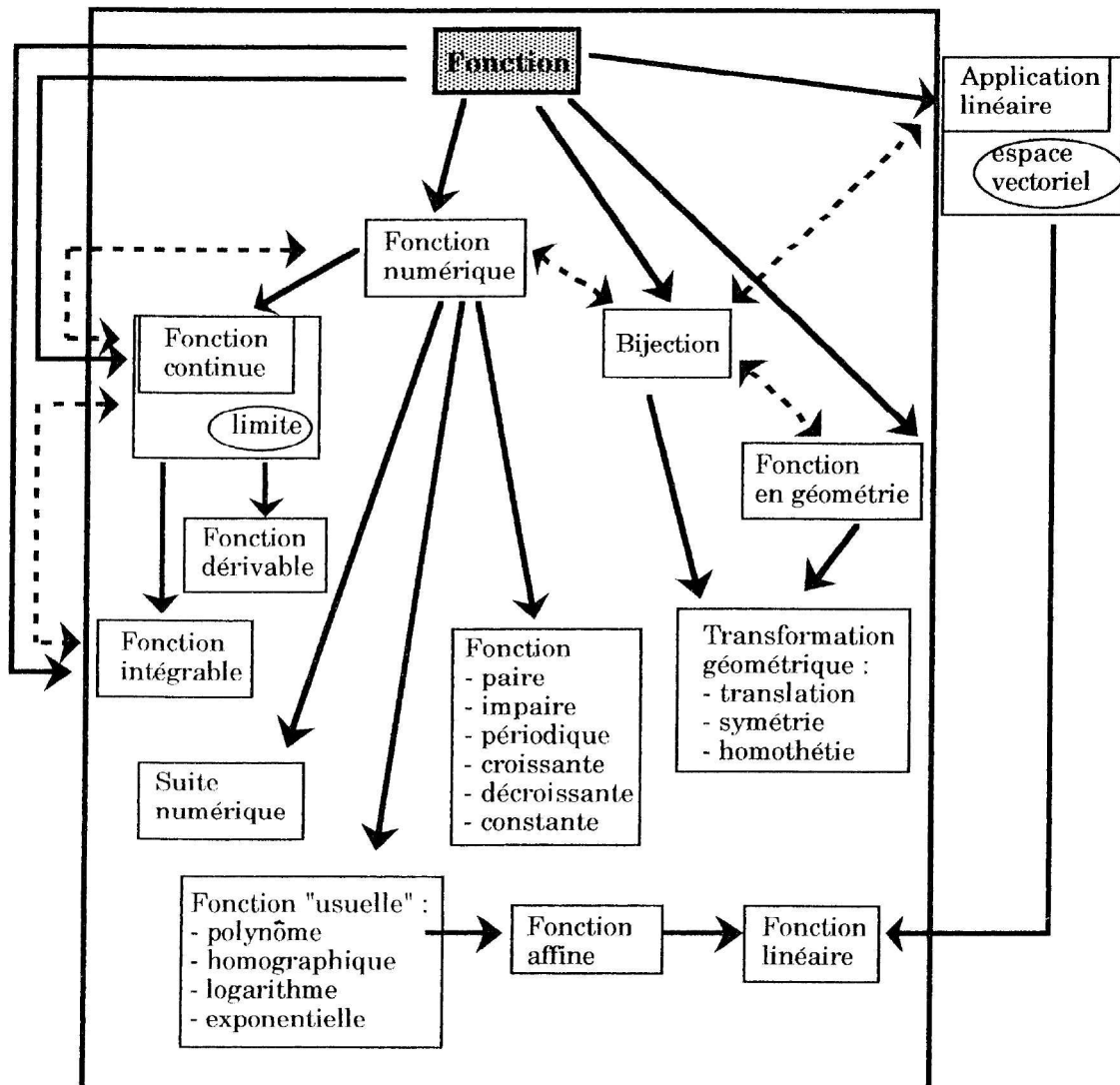
Voici un essai de modélisation de ce réseau. Chaque case désignée par un mot renvoie à des attributs obligatoires que devront posséder les objets, les exemples pour être classés dans cette catégorie. Les diverses modalités que peuvent prendre les attributs obligatoires d'une "case" donnée entraînent la formation d'un sous-concept ou d'une catégorisation plus fine. Mais si d'une part, les relations entre "cases" ne sont pas seulement de type hiérarchique, les liaisons transversales étant aussi possibles, d'autre part des concepts extérieurs peuvent être nécessaire à la définition des attributs (exemple : limite, espace vectoriel). Toutes ces relations, si elles vont enrichir le concept, vont aussi le complexifier et rendre plus difficile son apprentissage.

Sur le schéma, les flèches pleines indiquent que les attributs de la case de départ sont conservés dans la sous-catégorie, elles peuvent être considérées comme des voies qui permettent de retrouver le niveau de base du concept. Les flèches en pointillé indiquent seulement une présence possible de ces attributs et ne sont pas forcément des voies permettant de retrouver le niveau de base du concept.

Il reste à préciser à la suite de ce schéma, pour le niveau de base et ses sous-catégories (chaque case) les attributs pertinents et obligatoires, une proposition de différenciation à partir des deux invariants : ensemble et correspondance, sera faite pour quelques-unes des cases du schéma.

Toutefois, ces attributs sont liés aux options définies par les programmes, ceux-ci sont-ils en accord avec les attributs qui seraient retenus par des spécialistes ? Dans le cas où une différence existe, le modèle du collège/lycée peut-il être une gêne pour des acquisitions ultérieures ou bien les nouvelles connaissances pourront-elles s'intégrer à ce modèle ?

Ainsi, si la case application linéaire est représentée extérieurement au cadre collège/lycée, c'est parce que ce concept ne fait plus partie des apprentissages à ce niveau. Toutefois, il nous a semblé intéressant de l'indiquer comme un exemple de notion qui devra justement permettre d'intégrer autrement le concept de fonction linéaire. De même si les concepts de fonction continue ou intégrable sont présents au lycée, ceux-ci sont liés à la notion de fonction numérique, or le cadre des spécialistes est beaucoup plus général.



Un réseau conceptuel possible pour la notion de fonction au collégel/lycée

Les attributs pertinents : savoir du collège/lycée, savoir des spécialistes.

- Pour le terme même de fonction, nous retenons comme attributs pertinents pour le savoir des spécialistes ceux correspondant à la définition Bourbaki :

- ensemble : de départ et d'arrivée de nature quelconque.
- correspondance : tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image.

En ce qui concerne le collège/lycée, nous avons déjà observé que cette caractérisation tend à disparaître de façon explicite, même si certains termes se retrouvent dans des situations non numériques, comme par exemple en géométrie.

- Fonction numérique : Au niveau collège/lycée, on observe

- ensemble : de départ : R ou partie de R , d'arrivée : R .
- correspondance : tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule.

Avec les anciens programmes et manuels de collège/lycée, héritiers direct du formalisme ensembliste, pour une fonction, même numérique, la correspondance établie ne changeait pas par rapport au cas général "fonction". Introduire la notion d'application qui correspond à cette caractérisation de la relation entre éléments était alors nécessaire. Pour les spécialistes, la définition suivante est donnée pour fonction numérique : " nous appellerons fonction numérique, sur un ensemble quelconque X , toute application de X dans R " (Lelong-Ferrand)¹⁴. Ainsi, les attributs d'une fonction ne sont pas remis en cause par les spécialistes, notons toutefois que les termes de fonction ou application seront alors utilisés indifféremment dans le cadre numérique et que la distinction ne fait plus beaucoup sens. Mais, rechercher si une fonction numérique peut-être solution d'une équation différentielle par exemple, c'est en particulier déterminer l'ensemble des éléments qui auront une image, sur lequel elle est "définie".

Au collège/lycée par contre, le cadre plus général disparaissant, les fonctions deviennent : "une fonction définie sur un intervalle associe à chaque nombre de cet intervalle un nombre réel et un seul" (Math seconde, Hachette, Terracher, 1990, rubrique : "généralités sur les fonctions"). Même le terme numérique disparaît... Cette formulation évite le problème : quels éléments ont une image ? Si pour les spécialistes, parler des applications numériques n'enlève en rien ce questionnement, puisque leur préoccupation dans la recherche de solutions est bien : où sont définies ces solutions, c'est à dire pour quelles valeurs de la variable l'image existe-t-elle ? ; dans les collège et lycée les fonctions deviennent des objets donnés sur un ensemble où les images existent, la recherche des conditions d'existence disparaît, ce qui était appelé recherche de l'ensemble de définition.

De plus, la distinction, à variable réelle, n'apparaît plus au collège/lycée pour les fonctions numériques.

- Fonction linéaire : au niveau collège/lycée

- ensemble : ensemble ou intervalle de nombres réels
- correspondance : l'image est proportionnelle à son antécédent

L'écart avec les attributs pertinent du savoir des spécialistes est ici grand, puisque celui-ci fait intervenir sur les ensembles considérés la notion de structure algébrique et de "transport" de cette structure pour la correspondance.

¹⁴ La formulation générale d'une fonction n'interdit pas le cas, un ensemble de départ et d'arrivée sont donnés, mais aucun élément n'a d'image. Peut-on alors dire qu'une fonction "existe" ?

- Fonction continue : une définition telle que celle-ci

“On dit qu’une application f d’un espace topologique X dans un espace topologique X' est continue en un point $x_0 \in X$ si quel que soit le voisinage V' de $f(x_0)$ dans X' , il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que la relation $x \in V$ entraîne $f(x) \in V'$. (Bourbaki, *Eléments de Mathématique, Topologie générale*, chapitre I, 1971)”

met en jeu des ensembles topologiques dont l’étude ne relève pas du niveau collège/lycée. A ce niveau, le concept de continuité est introduit en terminale, il s’appuie sur une initiation à la notion de limite, approche essentiellement intuitive :

“soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a . On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en a . (Terminale C et E, Hachette, Terracher, 1992)”.

C’est pour les spécialistes, la notion d’ensemble topologique qui permet d’observer si la correspondance étudiée est continue ou non. Au lycée, la continuité est abordée à partir des fonctions numériques et rattachée aux intuitions sur les courbes représentatives (trait continu de crayon par exemple).

Sans poursuivre cette caractérisation, nous pouvons constater que c’est par un réajustement permanent de leurs connaissances que les élèves pourront intégrer au concept de fonction leurs nouvelles connaissances, encore faut-il qu’un cadre suffisamment général leur soit donné pour pouvoir y accéder.

Les attributs, au collège et lycée s’organisent davantage autour d’une intuition, d’une façon de voir, d’une technicité parfois renforcée par les symbolismes utilisés (continuité par exemple). Cette démarche si elle permet d’aborder d’une certaine manière des concepts difficiles demandera toutefois lors d’apprentissages ultérieurs une modification des conceptions pour insérer correctement les nouvelles connaissances à un réseau.

Parallèlement à ce schéma, il serait absolument nécessaire d’ajouter les différentes formes de représentation, de symbolisme que prendront les concepts, mais avons déjà énuméré ces modes là dans le paragraphe “registre”, soulignant qu’au niveau collège-lycée, tous ces modes doivent être développés à tous les niveaux de complexité du concept.

VI. Les conceptions des élèves.

Notre propos est ici essentiellement d'essayer d'établir un état des lieux, un descriptif, des conceptions des élèves. Nous avons choisi pour cela deux classes, une seconde et une terminale A1. 36 élèves de seconde et 20 de terminale ont ainsi répondu par écrit à la question ouverte : "qu'évoque pour vous le mot fonction ?". Le temps qui leur a été accordé étant de 10 minutes environ. Ces réponses ne peuvent constituer (en raison de leur faible nombre) un état des lieux général des conceptions des élèves de seconde ou de terminale A1, mais seulement un indicateur de celles-ci.

L'analyse d'une question ouverte, nous a obligé à des choix pour relever ce qui était pertinent dans les réponses données. Mais ces réponses étant différentes entre la seconde et la terminale, les choix ont été différents pour les deux séries de réponses. Ainsi, en seconde l'analyse proposée est une description plus exhaustive des notations ou des termes employés par les élèves et qui s'attache davantage au sens donné à ces termes. En terminale, nous avons essayé de catégoriser les réponses à partir d'un certain nombre de critères auquel nous semblaient pouvoir renvoyer les fonctions. C'est la variété même des réponses obtenues qui a entraîné ces approches différentes.

Toutefois en seconde, nous avons aussi voulu essayer de vérifier, à la suite de ce questionnement, quelles situations fonctionnelles pouvaient être reconnues par ces élèves et si la donnée d'une définition de référence "large" pouvait permettre de modifier des réponses erronées. Il ne s'agit pas d'une expérimentation, cette démarche est trop ponctuelle, il resterait donc à établir les conditions véritables d'une expérimentation qui mettrait en évidence : qu'une conception "large" permettrait d'établir chez les élèves un réseau conceptuel auquel pourrait s'intégrer les nouvelles connaissances ; l'importance des définitions données pour les termes mathématiques et le recours possible à celles-ci.

Nous relaterons tout d'abord la séance en seconde, et observerons les réponses obtenues pour ensuite analyser les réponses des terminales.

A. Compte rendu de la séance en seconde.

Les élèves n'arrivent pas "neufs" par rapport à ce thème puisque le collège a apporté de premiers éléments de formulation du concept. Le propos est de vérifier quelles représentations leur restent mais aussi si la donnée d'une référence de base axée essentiellement sur une définition des mots employés et assez peu explicitée par des situations et des exemples peut permettre de modifier une conception initiale que nous pensons erronée.

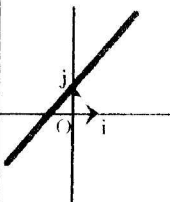
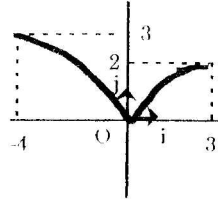
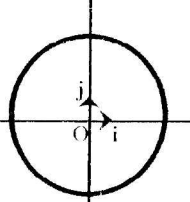
La séance de 2h qui est analysée concerne une classe de seconde de 37 élèves, 36 étaient présents. Les élèves, tous latinistes, y sont considérés comme "bons". C'est la première fois de l'année où il s'agira de fonction.

DESCRIPTION DE LA SÉANCE :

Prévisions.

- Dans un premier temps (10 minutes), ils vont répondre par écrit à la question : "qu'évoque pour vous le mot fonction ?"
- Ensuite, une fiche leur propose cinq situations pour lesquelles ils doivent dire s'il s'agit d'une situation fonctionnelle ou non. Après ce travail, une définition leur est proposée, et revenant sur la fiche, ils la corrigent s'ils l'estiment nécessaire.

FICHE ELEVE

Reconnaissez-vous une fonction dans les situations suivantes : Si oui, répondez alors aux questions suivantes : a) quelles valeurs prend la variable ? b) quelles valeurs prend l'image ? c) toutes les valeurs de la variable ont-elles une image ? (sinon quelles sont celles qui n'ont pas d'image ?)		REMARQUES													
S1 A tout élève de la classe (que je désigne par son prénom) j'associe sa date de naissance. - a) - b) - c)	Il s'agit ici de tester si les élèves considèrent qu'il peut y avoir fonctionnalité entre deux grandeurs qui ne sont pas forcément numériques.														
S2 $\begin{array}{l} R \rightarrow R \\ x \rightarrow f(x) = 2x + 3 \end{array}$ - a) - b) - c)	Retour à une situation qu'ils connaissent : nombres, présentation symbolique algébrique, fonction affine.														
S3 On vend dans un magasin des articles à l'unité ou par paquet de 2, 3, 5, 10, 20. On dresse le tableau suivant : <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>Nombre d'article</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> <td>10</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>Prix en F</td> <td>3</td> <td>5,5</td> <td>8</td> <td>13,5</td> <td>27</td> <td>55</td> </tr> </table> - a) - b) - c)	Nombre d'article	1	2	3	5	10	20	Prix en F	3	5,5	8	13,5	27	55	On donne ici un ensemble de nombre discret, une présentation extensive sous forme de tableau, et pas de relation "évidente" (proportionnalité) entre les nombres.
Nombre d'article	1	2	3	5	10	20									
Prix en F	3	5,5	8	13,5	27	55									
S4 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, i, j) , je dessine une courbe dont les coordonnées de tous les points vérifient une équation de la forme : S41 : $y = x + 1$  S42 : $y = f(x)$  S43 : $y^2 + x^2 - 9 = 0$  Question préliminaire : dans les trois cas entre quels éléments peut-on établir une relation ? - a) - b) - c)	Les représentations proposées sont graphiques. La question préliminaire voudrait permettre aux élèves de s'expliquer les termes de la relation fonctionnelle. Le cas 1 est connu des élèves. Le cas 2 moins et présente la difficulté d'un point singulier, le cas 3 du cercle voudrait mettre en évidence l'unicité nécessaire de l'image.														
S5 A tout nombre réel compris strictement entre -1 et 1, j'associe le nombre réel égal à son inverse. Pour cet exemple, si vous pensez reconnaître une fonction, pouvez-vous proposer d'autres manières pour la désigner, la représenter ? - a) - b) - c)	Il s'agit ici d'une relation entre nombres, mais le registre verbal utilisé peut-il dérouter les élèves ? Savent-ils traduire autrement cet énoncé ? L'absence d'image d'un élément pose-t-elle problème ?														

Note : à propos de la situation S1, tous les élèves de la classe en question avaient des prénoms différents.

Déroulement et observations.

Il a été précisé au préalable que cette séance n'était pas une évaluation pouvant être notée et comptabilisée mais une manière de faire le point avant de poursuivre leur apprentissage. Précaution qui semblait nécessaire pour essayer d'éviter des comportements d'abandon ou de peur.

La première question, "qu'évoque pour vous le mot fonction ?" avait pour but de confronter l'élève au concept, lui demandant d'essayer d'exprimer ses représentations. Ce temps de réflexion et de récapitulation (10 minutes environ) devant lui permettre d'être mieux armé pour dire s'il reconnaissait ou non une fonction dans les cinq situations proposées.

Ensuite, la fiche a été distribuée aux élèves et il leur a été précisé oralement que leurs réponses concernant la reconnaissance ou non d'une fonction devait être justifiée. Pendant cette partie de la séance, environ 3/4 d'heure, les élèves ont essayé de répondre avec beaucoup de sérieux aux questions posées. Le constat quasi unanime et qui se manifestait par une certaine exaspération en découvrant au fur et à mesure les situations était : "comment répondre puisque nous ne savons pas ce qu'est une fonction ?" Pourtant, et le dépouillement des questionnaires va le montrer, les élèves ont tous répondu à : "qu'évoque pour vous le mot fonction ?" Ils n'ont pas trouvé à priori la tâche infaisable lorsqu'il leur a été dit devoir reconnaître des situations fonctionnelles ou non, c'est seulement à la lecture des énoncés qu'ils se sont trouvés démunis et ont manifesté avoir une insuffisance de référence.

Au début de la deuxième partie de la séance, une définition, que nous pensons correspondre au niveau de base du concept de fonction, a été mise en place sous forme de questions-réponses avec les élèves. Nous retranscrivons ci-dessous la formulation d'un élève : "On appelle fonction (souvent désignée par f , g , h , u ou v) l'opération qui associe à tout élément (souvent noté x) d'un ensemble de départ (parfois noté E) un élément (souvent noté y ou $f(x)$) au maximum d'un ensemble d'arrivée (parfois noté F).

compléments :

- on dira que y ou $f(x)$ est l'image de x par la fonction f .
- x peut prendre toutes les "valeurs" de E , certaines valeurs n'auront pas d'image, aucune valeur ne peut avoir plus d'une image ; x "varie" dans E , on l'appelle la variable.
- une fonction sera définie si on connaît E , F et la relation entre E et F (à toute valeur x de E , je sais associer son image si elle existe). La relation pourra être définie par un lien verbal, par un lien numérique ou par un lien graphique."

Les termes "d'opération" et de "maximum", ne sont peut-être pas judicieux, puisqu'ils peuvent renvoyer à d'autres concepts mathématiques fortement codifiés, d'autres termes ont été utilisés lors des explications verbales : correspondance, au plus... Ce ne sont pas ces termes qui apparaissent dans la transcription d'un élève. Ainsi le souci de donner une définition que nous pensons plus générale ne nous a pas permis d'éviter l'écueil de "l'exactitude" des termes employés.

Les questions posées par les élèves ont été explicitées : ensemble, élément, variable, image. Certains ont proposé des exemples. Cette partie de la séance a duré 20 minutes environ. Les élèves savaient qu'après cette mise au point, ils pourraient corriger, si cela leur semblait nécessaire, leurs premières réponses. En général, ils ont dit avoir des corrections à apporter. Il leur restait une trentaine de minutes pour le faire.

ANALYSE DES REPONSES :

Première question.

Sur les 36 réponses observées (cf. le tableau récapitulatif de l'annexe 1), les fonctions sont des objets mathématiques assez clairement identifiables :

“il y a” les fonctions affines (23 réponses) et les fonctions linéaires (21 réponses)...

Le “il y a” introductif étant précisé 6 fois par : deux sortes (ou types ou formes) de fonction. Etant ainsi bien établi le domaine d'étude, les élèves précisent leur idée de fonction en utilisant des notations, des substantifs, des verbes, ils précisent aussi les objets concernés par les fonctions et les liens avec les graphes.

* *Les notations* : 18 élèves les emploient, elles sont prioritairement de type égalité :

$$\begin{array}{llll} y = f(x) & (6)^{15} & y = ax & (6) \\ f(x) = ax + b & (3) & f(x) = a & (2) \end{array} \quad \begin{array}{l} y = ax + b \quad (6)^{16} \end{array}$$

Les notations mettant en jeu l'idée de correspondance matérialisée par une flèche, sont moins nombreuses, 7 au lieu de 23, et manifestent parfois une confusion :

$$\begin{array}{llll} x \rightarrow f(x) & (1) & x \rightarrow ax & (2) \\ f(x) \rightarrow ax & (1) & f(x) \rightarrow ax + b & (1) \end{array} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow ax + b \quad (2) \\ \dots??? \end{array}$$

* *Les substantifs* : 19 élèves cherchent à caractériser l'objet fonction en utilisant une phrase du type : “une fonction est un(e) ...(substantif).”

Sont utilisés :

chose (2) qui ne nous apprend pas grand chose (!) sur les représentations des élèves.

application (3) mais à quoi renvoie ce terme ? Il semble difficile de voir là l'énonciation d'un concept mathématique d'autant plus que les élèves concernés n'apportent aucune précision. Cela ressemble à une définition en boucle qui n'apprend rien.

Les termes :

correspondance (2), relation (2), modification (1), rôle (1), rapport (1), valeur (3), variation (1)

semblent renvoyer à une “image” mentale plus précise dans la mesure où nous attribuons à ces mots une caractérisation qui n'est pas codifiée uniquement par les mathématiques mais par un usage courant.

Quant au terme le plus cité, équation (5), que caractérise-t-il ? Une confusion entre deux concepts ou un renvoi aux notations utilisées ? (Citons même parmi ces derniers élèves l'un d'eux qui parle de système d'équation).

* *Les verbes* : pour 13 élèves les fonctions agissent ou permettent d'agir sur certains objets. Les *verbes* qu'ils utilisent pour caractériser ces actions semblent

- soit intrinsèquement lié à la fonction, décrivant ainsi un état de fait :

associer (3), transformer (3), dépendre (2), changer (1), valoir (1), correspondre (1)

- soit paraissent indiquer le recours possible aux fonctions pour élucider un état donné, mais cette caractérisation n'est vraiment pas dominante :

déterminer (1), calculer (1), chercher (1).

- le verbe appliquer (2) ne paraît pas très significatif.

¹⁵ Le nombre entre parenthèses indique le nombre de citations.

¹⁶ Pour ces deux dernières expressions, de quoi s'agit-il de l'équation d'une droite ou de l'expression d'une fonction affine ou linéaire ?

* *Les objets* sur lesquels agissent les fonctions, lorsqu'ils sont mentionnés de façon explicite (14 fois) sont de type essentiellement numérique : 9 élèves utilisent le terme nombre x (ou A), et 4 l'adjectif numérique. Un seul élève utilise les termes d'ensemble et de variable plus génériques. Mais un élève parle d'une fonction pouvant transformer des nombres ou ... des figures.

* *Les graphes* : 11 élèves utilisent le mot droite ou courbe (droite seul : 5, droite et courbe : 5, courbe seul : 1). Sur ces 11 élèves, 5 affirment sans ambiguïté qu'une fonction est représentée par une droite ou une courbe, deux posent clairement une fonction est une droite mais les 4 autres réponses sont plus difficilement interprétables : la tournure employée masque le camp choisi tout en établissant une relation entre les termes.

L'analyse des réponses à cette première question semble bien confirmer le fait que les élèves à l'issue du collège ont comme seule référence les fonctions affines ou linéaires, la notion de correspondance générique entre éléments de 2 ensembles est quasi totalement exclue de leurs représentations (à par pour un). Même dans un cadre numérique, cette correspondance n'arrive pas à être clairement exprimable, les substantifs qu'ils utilisent sont soit très "flous" (chose, rôle) soit renvoient à des confusions de concepts (équation). Les actions que pourront permettre l'utilisation des fonctions semblent mieux établies (calculer, chercher...), peut-être retrouve-t-on là le caractère pratique, outil des exemples qu'ils ont étudiés. Les représentations des fonctions sont le plus souvent algébriques et le statut des graphes est confus.

Les cinq situations.

Le tableau suivant permet de comparer les réponses des élèves (s'agit-il d'une fonction ?) pour les cinq situations proposées et les corrections qu'ils y ont apporté.

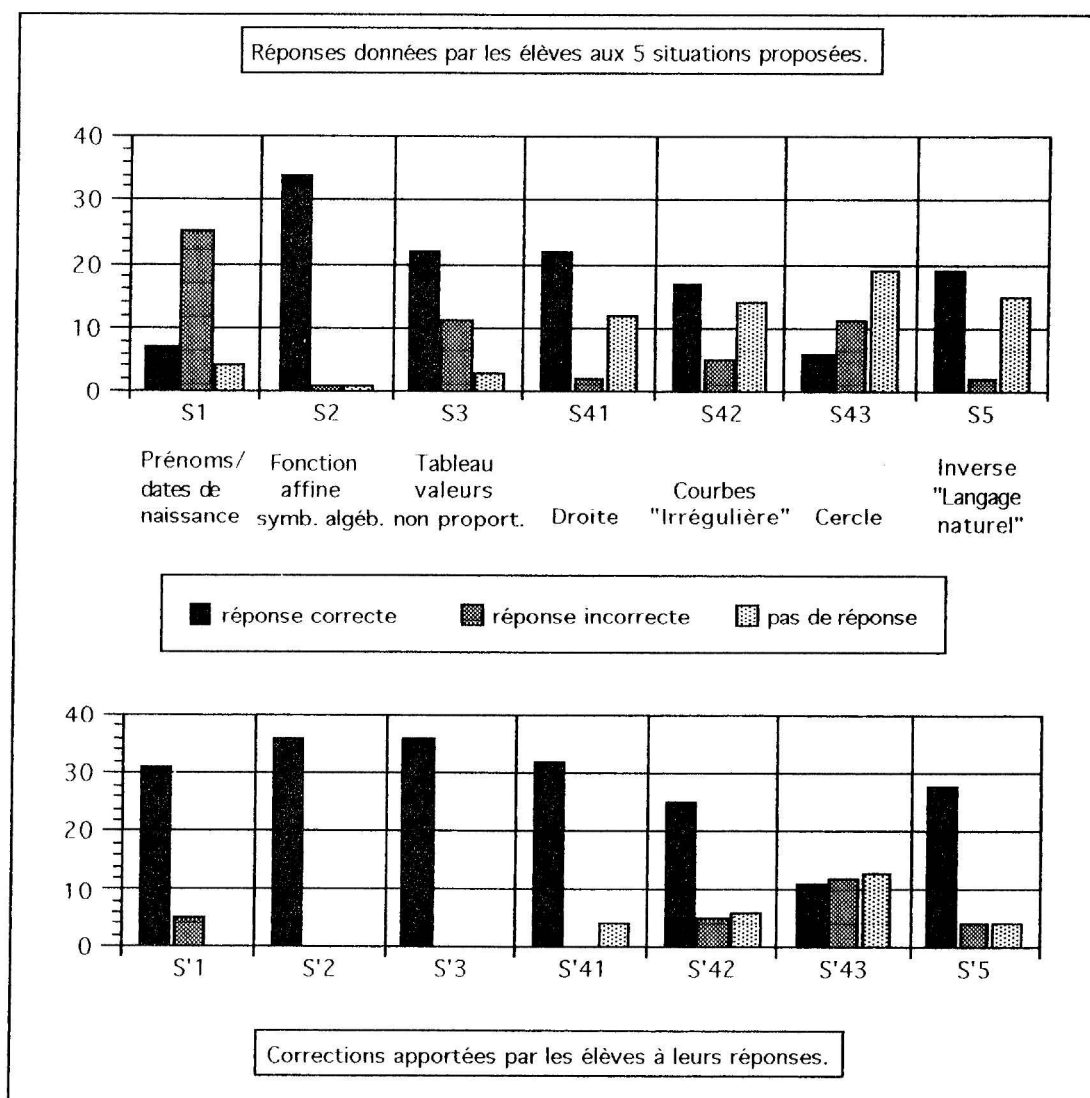
Situation 1 : 4 élèves ne répondent pas et 7 reconnaissent une situation fonctionnelle. Notons que parmi les 25 réponses négatives, 21 justifient leur réponse selon d'un des mode suivant :

- les prénoms et les dates de naissance
 - n'ont rien à voir (2)
 - n'ont pas de rapport (3)
 - ne s'associent pas (5)
 - ne sont pas en relation (3)
 - il n'y a pas de concordance entre eux (1)
- les dates de naissance ne dépendent pas des prénoms (3)
 - " " ne varient pas avec les " " (1)
- car il y a les prénoms (1)
- il n'y a pas une seule date de naissance pour tous les prénoms (2)

La réponse "car il y a les prénoms", malgré sa brièveté indique plus que les autres ce qui gêne les élèves : les prénoms ne sont pas des nombres ! En effet quel rapport, quelle association, quelle relation ou concordance cherchent les élèves, comment peuvent-ils se dire il n'y a pas de rapport entre leur prénom et leur date de naissance puisqu'il s'agit bien de la leur. De même à quoi renvoient pour eux les notions de dépendance et variation ? Celle-ci est-elle inexistante parce que non quantifiable, exprimable par une règle algébrique ?

La dernière réponse, est plus difficilement interprétable : l'aspect non numérique ne semble pas mis en cause, mais alors quelle manière bizarre d'imaginer une fonction : tous les éléments devraient avoir la même image ?

Situation 2 : le nombre de réponses correctes (34) à la situation 2 était attendu, mais en comparant avec la situation 41 (22 réponses correctes), nous constatons que si une fonction affine est parfaitement reconnue dans le cas d'une représentation symbolique algébrique, la donnée d'une représentation graphique pour définir une fonction même connue n'est pas vraiment pertinente pour les élèves et les met, 1 fois sur 3 dans l'embarras (12 non réponses).



Situation 3 : elle les met moins dans l'embarras (3 non réponses seulement), mais 11 élèves ne reconnaissent pas une fonction. Le motif invoqué étant

- il n'y a pas proportionnalité (4)
- la variation n'est pas régulière (1)
- si y prix et x nombre d'articles, on n'a pas $y = f(x)$ (1)
- il n'y a pas de constante (1)
- il n'y a pas de facteur commun (1)
- le prix ne dépend pas du nombre d'articles (1).

Ainsi pour un tiers des élèves environ, il va falloir "desassocier" fonction et proportionnalité ou variation régulière quantifiable par une "loi simple", mais cela est peut-être facilement

rectifiable puisque tous les élèves ont corrigé correctement.

Situations 4 : si la situation 41 était déjà difficile à interpréter par les élèves, les situations 42 et 43 les rendent de plus en plus perplexes, le nombre de non réponses (14 et 19) augmente, est-ce l'irrégularité de la courbe invoquée dans les 5 cas de réponse négative pour S42, le cercle de S43 qui gênent ou le fait de se trouver dans un cadre graphique ? Les non réponses aux situations 4 nous laissent penser que le registre de représentation graphique est mal connu, les élèves n'ont quasiment jamais su dire clairement entre quels éléments ils pouvaient établir une relation. Si les corrections apportés aux cas S41 et S42 sont satisfaisantes dans un premier temps, le cas S43 est toujours assez mal traité, l'unicité nécessaire de l'image n'est pas facile à intégrer.

Situation 5 : si une expression utilisant le registre verbal ne pose pas problème pour 21 élèves qui estiment être dans une situation décidable (dont 19 réponses correctes), pour 15 d'entre eux ce registre ne permet pas dans un premier temps de décider. Il est certain que le mot "inverse", mot codifié qui renvoie à une opération précise n'est pas connu. Ainsi, le langage n'est pas une aide pour eux, ils n'ont pas associés à l'opération de division de 1 par un nombre, une étiquette (mot) qui puisse être plus économique.

Notons que parmi les 21 élèves pouvant décider, le mot inverse renvoyant certainement plus pour eux à une opération, seul 7 élèves proposent une autre formulation pour cette fonction :

- pour 2 d'entre eux la proposition est correcte de la forme :

$$f(x) = 1/x \qquad x \rightarrow f(x)$$

(seul à dire que 0 n'a pas d'image) $-1 < x < 1 \rightarrow x^{-1}$ ou $1/x$

- 3 autres propositions manifestent une confusion entre inverse et opposé :

$$\begin{array}{lll} f(x) = -x & x \rightarrow f(x) = -x & y = -x \\ x \rightarrow -x & & \end{array}$$

à laquelle il faut peut être joindre : $-1 < x < 1 \Rightarrow f(x) ; f = -1x$

- 1 élève propose : $f(x) = 1/x + y$ (quel est le statut de y et de f(x) ?)

Lors de la correction, les élèves reconnaissent une situation décidable pour eux (32 réponses dont 28 correctes) mais ne savent toujours pas répondre à la question de reformulation, seul trois élèves de plus ont essayé de répondre, mais en utilisant une formulation erronée.

Ainsi la donnée d'une définition générale même si elle reste à préciser, nous semble être un moyen pouvant permettre de rectifier des conceptions d'élèves, les corrections ayant été apportées pouvant être qualifiées de satisfaisantes dans un premier temps.

Variable et image.

En ce qui concerne les questions portant sur : valeurs de la variable, valeurs de l'image, valeurs de la variable ayant une image seule la situation S43 ne demandait pas de réponse puisqu'il était précisé de répondre à ces questions si une situation fonctionnelle était reconnue. Les élèves n'ayant pas reconnu de fonctions dans d'autres situations n'ont pas répondu à ces questions ce qui était normal, lorsqu'ils ont reconnu une fonction quelles réponses ont-ils donné ?

Le tableau suivant comptabilise les réponses correctes données à ces questions, les non réponses ainsi que les corrections pour les élèves ayant reconnu une fonction dans les situations S1, S2, S3, S41, S42, S5.

Pour la situation 1, les réponses attendues étaient les prénoms des élèves de la classe, leurs dates de naissance et à tout prénom on peut associer une date de naissance. Si le faible nombre de réponse au départ (3), est à mettre en relation avec celui des élèves ayant reconnu une fonction, lors de la correction les erreurs faites par les élèves qui ont reconnu une fonction sont liées essentiellement au terme de valeur. En effet les élèves désignent la variable ou l'image mais ne caractérisent pas les valeurs prises. Cette erreur apparaît de façon plus marquée encore pour la situation 2. Les réponses attendues étaient R et R, les élèves qui ne donnent pas cette réponse désignent la variable x et ensuite son image $2x + 3$ ou $f(x)$.

Pour la situation 3, cette erreur est moins apparente si nous acceptons les réponses "nombre d'articles" et "prix des articles" comme correctes, mais beaucoup d'élèves ayant fait une erreur ont donné comme variable le prix, le nombre d'article étant l'image, est-ce à cause de la présentation sous forme de tableau ou bien une référence à une situation de la vie courante : "les prix varient" ?

	REponses			CORRECTIONS		
	Fonction reconnue	Variable et image correcte	Non réponses	Fonction reconnue	Variable et image correcte	Non réponses
S1	7	3	2	31	21	1
S2	34	5	6	36	15	0
S3	22	8	8	36	22	2
S41	22	2	7	32	8	4
S42	17	0	7	25	1	3
S5	19	1	7	28	1	4

Pour les situations graphiques, très peu d'élèves donnent R comme valeurs prise par la variable et l'image dans le cas S41. Les réponses incorrectes sont du toujours du type x et $x+1$. La situation S42 reflète le même problème où l'on désigne variable et image plutôt que valeurs prises, un seul élève donnera les intervalles $[-4 ; 3]$ et $[0 ; 3]$. D'autre part, sur 2 copies 0 n'a pas d'image...

Indépendamment des réponses du type x et l'inverse de x , parmi les élèves qui essaient de donner vraiment des ensembles de valeurs, si les valeurs de la variable correspondent à la réponse attendue $[-1 ; 1]$ caractériser les valeurs de l'image pose problème, un seul dira R pour les autres $[-1 ; 1]$ est l'ensemble donné. Un seul élève donne des réponses correctes, notons toutefois lors de la correction que 4 autres élèves signalent que 0 n'a pas d'image, mais sans avoir pu caractériser auparavant les valeurs de l'image.

Les élèves qui reconnaissent une fonction essayent de répondre aux questions concernant variable et image : 30,6 % d'élèves en moyenne ayant reconnu une fonction ne répondent pas à

ces questions et lors de la correction ce pourcentage est de 7,5 %. Mais la réussite à ces questions est faible (15,7 % puis 36,2 % en moyenne lors de la correction). Les erreurs relevées concernent plus la signification du mot valeur, les élèves ont cherché le plus souvent à désigner la variable ou l'image qu'à dire où variaient ces éléments.

L'analyse des réponses aux cinq situations confirme pour nous le fait que les élèves n'ont pas en général pour les fonctions une référence large leur permettant de considérer qu'il y a fonction hors du cadre numérique affine ou linéaire. D'autre part, reconnaître une fonction donnée sous forme graphique pose problème et les mots de variable, image, valeur de la variable ou de l'image ne sont pas connus.

B. Le questionnaire en terminale.

En ce qui concerne les terminales, il s'agissait avant de poursuivre les apprentissages demandés à ce niveau (limites, dérivation, intégration, fonction logarithme, exponentielle) d'observer ce qu'était pour les élèves ce concept alors qu'ils avaient déjà eu plusieurs temps d'étude depuis leur classe de troisième.

La classe est une classe de terminale A1, classe littéraire mais où l'enseignement mathématique est assez fortement présent : 5h hebdomadaires, coefficient élevé à l'examen terminal. Les élèves ne se sentent pas "scientifiques", mais ne sont pas complètement démunis face aux mathématiques.

Sur les 24 élèves que la classe comprend, 20 élèves ont répondu, avant de commencer le cours sur les fonctions et en guise d'introduction à celui-ci, à la question : "qu'évoque pour vous le mot de fonction ?". Ce sont les réponses écrites à cette question qui sont étudiées. Les termes qu'ils ont utilisé, ont été relevés et le tableau ci-dessous en donne le détail en indiquant le nombre de citations.

Les termes employés recouvrent le champ de ce que des élèves arrivant en terminale ont pu étudier et manifestent d'une certaine richesse du concept. Si, un élève cite les mots (non relevés dans le tableau) : division et schéma de Hörner, algorithme plus approprié au cadre de résolution d'équation, tous les autres termes concernent effectivement le cadre des fonctions.

Mais, comment les élèves organisent-ils ces termes ?

Cinq élèves proposent une définition puis organisent leur réponse à partir de : "pour étudier une fonction..." Tous les autres établissent seulement une liste.

La présentation sous forme de liste adoptée par les 3/4 des élèves donne l'impression d'une juxtaposition d'éléments. Ceux-ci vont ensemble mais ne sont pas structurés, les élèves semblent redire tout ce qu'ils ont eu l'impression de faire lors de leurs études antérieures sur les fonctions sans manifester qu'un lien ait pu assembler toutes ces choses.

Notons d'autre part que, parmi les cinq définitions, quatre ont une formulation ensembliste générale indiquant qu'un élément à une image au plus, la dernière propose simplement une relation numérique sans précision.

	Nombre		Nombre
Domaine 1 : étude de fonction		domaine 4 : correspondance	
Etude de fonction	10	associer	5
ensemble de définition	10	relation	3
tableau de variation	8	lien	1
sens de variation	3		
représentation graphique	8	Domaine 5 : représ. utilisée	
domaine 2 : types		$x \rightarrow f(x)$ (algébrique)	14
fonction affine	12	diagramme cartésien	2
fonction linéaire	9	diagramme sagittal	2
fonction polynôme	8		
$ax^2 + bx + c$	9	domaine 6 : caractérisation	
x^2	4	application	1
$ax + b$	4	formule	1
ax	1	équation	1
$ax + by + c$	2	bijection	4
$1/x$	2		
x	1	domaine 7 : vocabulaire ensembliste	
ax^2	1	élément	4
fonction sin, cos	1	ensemble de départ	4
fonction trigonométrique	1	ensemble d'arrivée	4
fonction parabole	1	image	2
		antécédent	1
		ensemble de points	1
		terme	1
Domaine 3 : propriétés		domaine 8 : courbes	
parité	6	courbe	3
pair	18	hyperbole	5
impair	18	droite	5
symétrie/O	3	parabole	3
symétrie/(Oy)	3		
monotonie	6		
croissance	4		
décroissance	4		
dérivée	16		
limite	3		
maximum	1		
minimum	1		
signe de f	2		
signe de f'	2		

Il semblait intéressant, sans tenir compte de cette absence d'organisation, de classer les réponses selon certains critères que nous pensons pertinents.

Les critères suivants ont été utilisés pour distinguer les réponses:

RELATION : il s'agit de vérifier si l'acceptation première de "correspondance, relation..." est acquise. Sans s'attacher pour cela à la rigueur de l'expression utilisée, cet aspect apparaît-il de manière explicite dans un langage "naturel" ?

MODELE : une fonction exprime-t-elle pour les élèves la modélisation d'une situation plus complexe ?

DESCRIPTION : les fonctions renvoient-elles à un catalogue de *types* particuliers (affines, linéaires, polynômes,...), de *propriétés* (paires, impaires, dérivables) ?

REGISTRE : pour désigner une fonction les élèves utilisent-il un registre *algébrique* ($x \rightarrow f(x)$),

graphique (dessin, schéma), ou encore *ensembliste* (diagramme sagittal) ?

Cette classification nous permet de mieux percevoir la formulation des réponses, et ce qui est privilégié par les élèves pour parler des fonctions. Ainsi, nous constatons :

REGISTRE :

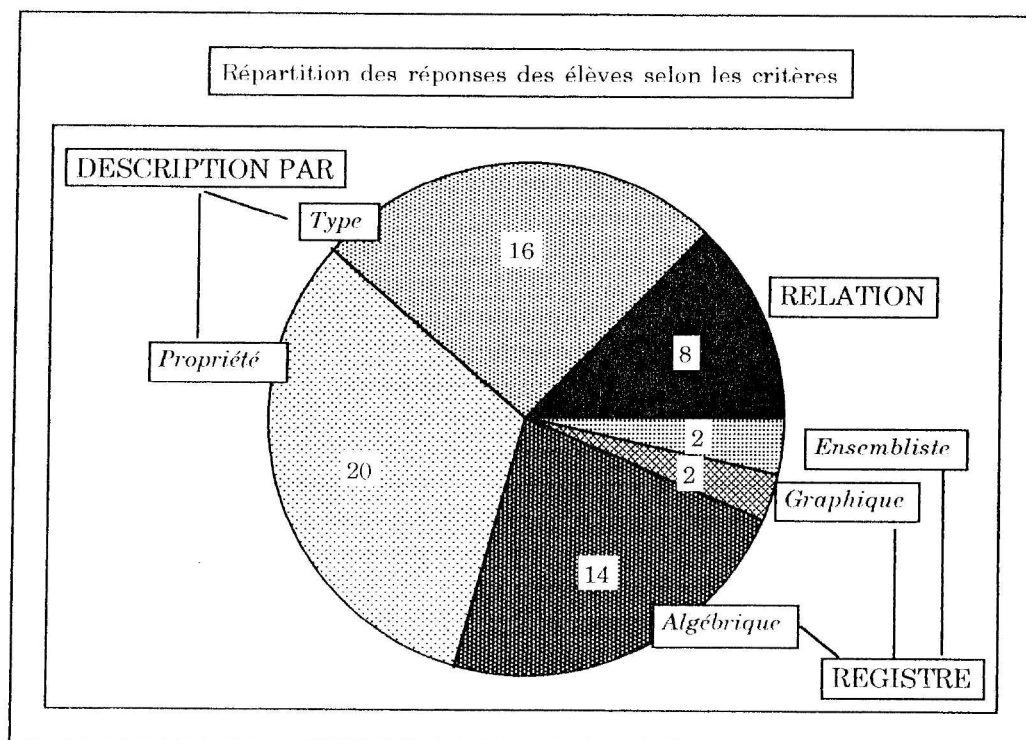
Si la majorité des élèves (14) utilisent une notation formelle algébrique pour décrire les fonctions seulement 8 d'entre eux peuvent rendre compte de ce formalisme en langage "naturel" par des termes comme correspondance, associer, relation. Il n'est donc pas sûr que la notation $x \rightarrow f(x)$ ou les notations "similaires" (confer étude suivante) renvoient à ce sens.

L'utilisation d'un diagramme qu'il soit cartésien ou ensembliste pour parler de façon générale d'une fonction est très faible. D'autre part, un des deux élèves qui caractérise une fonction avec un graphe propose quelque chose qui s'éloigne d'un type précis et qui pourrait être assez général, mais il s'en éloigne même trop pour obtenir le graphe d'une fonction puisque certains éléments pourraient avoir plusieurs images...

Cela ne signifie pas que le terme de représentation graphique n'apparaît pas, mais il renvoie à un but à atteindre, quelque chose qui va avec les fonctions mais qui ne les définit pas. La réponse :

"fonction : une phrase mathématique qui engendre une représentation graphique et qui peut donner lieu à des études..."

étant la plus représentative à cet égard.



DESCRIPTION :

Les élèves utilisent tous un catalogue des propriétés des fonctions, souvenir

des années précédentes, fonction renvoie pour eux à étude de fonction et donc à parité, variation, dérivée, limites. On pourrait noter que le mot de continuité est totalement absent, il est vrai que cette notion est jusqu'en terminale implicite dans les situations étudiées.

La caractérisation par types est-elle aussi assez unanime (16), linéaire et affine le plus souvent mais aussi polynômes, voire "parabole". Les suites pourtant étudiées en première ne sont jamais mentionnées comme types particuliers de fonctions et aucun élève n'a fait allusion à une fonction qui pourrait être définie sur d'autres éléments que des nombres.

MODELE :

Les fonctions ne sont perçues par aucun élève comme des objets pouvant modéliser une réalité, ce sont des objets en soi que l'on étudie pour eux-mêmes. Pourtant en première, ils ont certainement été confrontés à des problèmes d'optimisation prenant en général des thèmes géométriques.

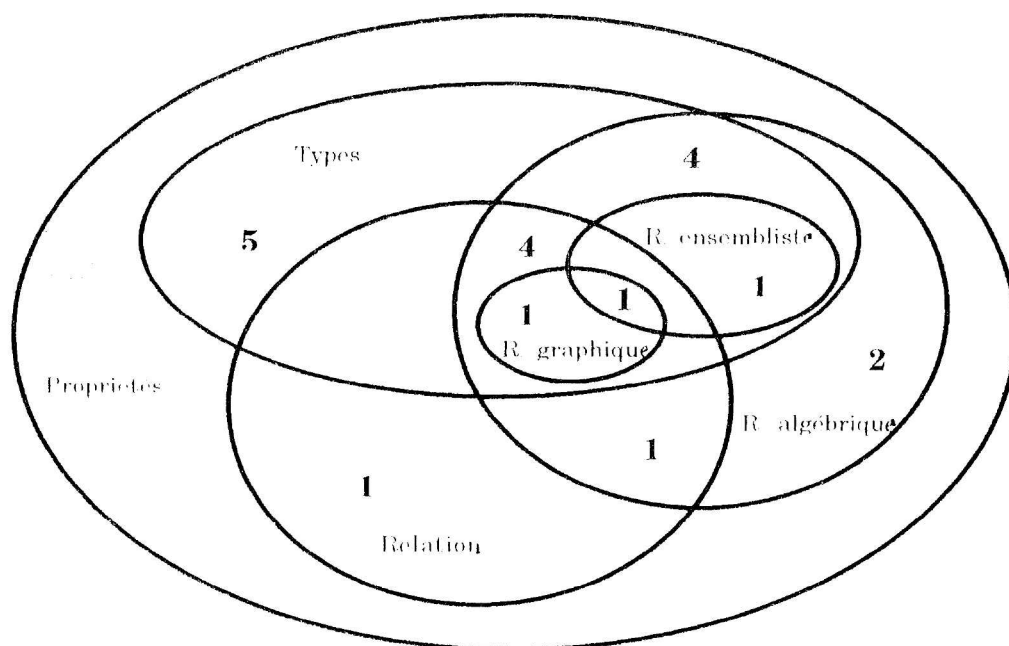
Le symbolisme algébrique utilisé

Par souci de simplification, il n'a pas été tenu compte plus haut des modalités que pouvaient prendre le symbolisme algébrique, une observation plus précise fait apparaître :

$f(x) : R \rightarrow R$ $x \rightarrow f(x)$	Cette notation apparaît 7 fois et dénote la confusion entre la fonction et sa valeur en un point.
$R \rightarrow R$ $f(x) \rightarrow ax^2 + bx + c$ ou $ax + by + c$	Forme prise par deux autres réponses. Comment un élève qui établit cette relation pourra-t-il calculer $f(5)$ par exemple pour une fonction donnée ?
$R \rightarrow R$ $x \rightarrow f(x)$ ou x^2	Les trois élèves s'approchent d'une forme symbolique correcte mais comment interpréter l'absence du "f", la distinction f et $f(x)$ est-elle acquise ?
$f : R \rightarrow R$ $x \rightarrow f(x)$ ou x^2	Forme proposée par deux élèves...

D'autre part trois élèves proposent en langage "naturel" une relation entre un élément x d'un ensemble de départ et un élément y d'un ensemble d'arrivée, mais dans le symbolisme algébrique qu'ils utilisent qui est soit du premier des types précédent (2 cas), soit du dernier, où est y ? Il n'y a pas de réponse.

Utilisant toujours la classification des réponses selon les critères précédents, le schéma suivant essaye de rendre compte de la façon dont les réponses renvoient à un ou plusieurs critères.



En conclusion à cette observation au niveau terminale, il nous semble que la diversité mise en jeu par les élèves pour parler des fonctions ne masque pas l'absence d'une référence de base à laquelle ils pourraient associer des outils (propriétés, types particuliers) qu'ils connaissent et passent leur temps à mettre en application. Mais l'absence de typologie explicite (le mot type par exemple apparaît dans une seule réponse et celui de propriété jamais) ne confère à tous ces termes aucun statut. Nous avons aussi relevé que seuls 5 élèves avaient le souci d'organiser leur réponse. Les élèves ont-ils seulement un catalogue de techniques opératoires à leur disposition ou un concept qui s'est élaboré et complexifié ? Dans la plupart des cas la réponse semble devoir être la première proposition.

VII. Conclusion.

Une fonction est une correspondance arbitraire entre éléments d'ensembles de nature quelconque. Les situations proposées au collège ne permettent pas aux élèves de formuler ainsi ce concept. Ils étudient des exemples particuliers, fonction affine, linéaire qui masquent la généralité du concept. La manipulation actuelle des outils fonction affine et linéaire au collège à travers un ensemble de situations, quand bien même faisant intervenir divers modes de représentation (cf. programmes actuels), ne suffit pas à faire émerger le niveau de base, large qui correspond dans le schéma de la page 22 à la case grisée. Les élèves qui arrivent en seconde, ont seulement à leur disposition des exemples particuliers de fonctions. Ils ne peuvent donc intégrer celles-ci à une conception plus générale où ce qui sera mis en jeu est la notion de correspondance arbitraire mais suivant un mode défini entre éléments de deux ensembles de nature quelconque. L'introduction de fonctions même numériques mais non affines peut alors poser des problèmes de reconnaissance. Est-il nécessaire alors d'introduire le mot de fonction au niveau collège ? Ou, sans recourir à un formalisme encombrant ne peut-on proposer diverses situations, utilisant différents registres, qui permettraient de rendre compte de la généralité du concept ? D'autre part, même si les définitions verbales ne constituent pas le mode d'acquisition d'un concept, celles-ci peuvent constituer une référence qui est peut-être sous estimée.

L'enseignement du lycée privilégie lui aussi l'aspect utilitaire des concepts. Les situations proposées demandent peut-être trop aux élèves de mettre en oeuvre des techniques opératoires ou des schèmes suffisants pour une réussite immédiate à leurs évaluations, et ne sollicitent pas assez la constitution d'un réseau formel de référence et de sens. Les élèves remplacent ainsi ce qui devrait être la mise en réseau de leurs apprentissages successifs, par la constitution d'un catalogue, répertoire indispensable mais insuffisant.

Il reste alors à préciser et étudier :

- quelles situations pour introduire le concept de fonction ?

Situations qui pourraient s'organiser à partir de la diversité possible des notions :

- d'ensemble (numérique ou non, discret ou non...)

- de correspondance (type différent, expression dans divers registre...)

(le recours à des situations graphiques moins particulières que la situation affine pouvant d'ailleurs être facilité par l'emploi des "outils" : calculatrices graphiques et ordinateurs)

- quel type de définition proposer et quand ?

- une telle approche favoriserait-elle ensuite l'insertion des autres concepts liés à celui de fonction à un réseau ?

Références bibliographiques.

Barra R. et Pensec J.J., *“Sur l'enseignement de l'analyse. N° 1 Fonctions”*, Publication de l'I.R.E.M. de Poitiers, 1976.

Britt-Mary Barth, *“L'apprentissage de l'abstraction”*, Editions Retz, Paris, 1987.

Sophie René de Cotret, *“Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante”*, Petit x, n°17, pp. 5 à 27, 1988.

Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J., *“Une histoire des mathématiques, Routes et dédales”*, Editions du Seuil, Paris, 1986.

André Deledicq, *“De l'analyse non standard au calcul infinitésimal”*, Actes de la journée de Nice du 18/5/91: “l'enseignement de l'analyse au lycée, pourquoi et comment ?”, IREM de Nice, 1991.

Raymond Duval, *“Graphiques et équations”*, Annales de Didactiques et de Sciences cognitives, 1, pp 235-253, IREM de Strasbourg, 1988.

Robert Lutz, Michel Goze, *“Analyse non standard”*, Encyclopédie universalis, tome 1.

Jacques Harthon, *“L'analyse non-standard”*, La recherche, pp 1194-1201, n° 148, octobre 1983.

Ismenia del Carmen Guzman Rétamal, *“Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction”*, thèse de Doctorat, IRMA Strasbourg, 1990.

Gert Schubring, *“Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, particulièrement en France et en Prusse”*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.5, n°3, pp. 343-385, 1985.

Gérard Vergnaud, *“La théorie des champs conceptuels”*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.10, n°23, pp. 133-170, 1990.

Shlomo Vinner, *“Concept definition, concept image and the notion of function”*, Math. Educ. Sci. Technol., vol. 11, n°3, pp 293-305, 1983.

Annexe 1

[illegible]

Annexe 2

Codes :		0 pas de réponse, 1réponse correcte, 2 réponse incorrecte																																				Total				
		Elève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	code	1	2	3
situation1	S1	2	1	2	2	0	2	1	0	1	2	2	1	2	2	2	0	2	2	0	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	7	25	4	
variable		0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
image		0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
pas d'image		0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
corrections	S'1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	31	5	0	
variable		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	2	1	0	1	0	2	2	0	1					
image		2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	2	1	0	1	0	2	2	0	1					
pas d'image		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	2	1	0	1				
situation 2	S2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	34	1	1		
variable		1	2	0	1	2	2	2	1	2	2	2	1	1	1	0	2	2	1	0	1	2	1	0	1	1	0	1	0	2	2	2	0	1	2	2	0					
image		1	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	1	0	2	0	2	0	2	2	0	1	2	2	0				
pas d'image		1	2	0	0	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	2	0	1	1	1	0					
corrections	S'2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	36	0	0		
variable		1	2	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1			
image		1	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	1	1	1	0	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2				
pas d'image		1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
situation 3	S3	2	2	0	1	2	2	2	0	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	22	11	3	
variable		0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1					
image		0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1					
pas d'image		0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	2	1					
corrections	S'3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	36	0	0		
variable		2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	1				
image		2	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1				
pas d'image		1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1			
situation 4	S41	0	0	0	0	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	22	2	12	
variable		0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	2	2	2				
image		0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2					
pas d'image		0	0	0	0	0	1	2	1	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1				
corrections	S'41	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32	0	4		
variable		1	2	1	1	0	2	2	0	0	2	0	2	1	1	1	2	2	0	1	1	2	0	1	0	1	0	2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2				
image		1	2	1	1	0	2	2	0	0	2	0	2	1	1	1	2	2	0	1	2	2	0	2	0	1	0	2	0	2	2	2	2	2	2	2	2					
pas d'image		1	1	1	1	0	1	2	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
variable	S42	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	1	1	1	1	17	5	14	
image		0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2				
pas d'image		0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2				
corrections	S'42	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	0	1	0	0	2	0	1	1	1	1	1	1	1	25	5	6		
variable		1	2	2	1	0	2	2	0	0	2	0	2	0	2	1	2	0	2	0	2	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2				
image		2	2	2	1	0	2	2	0	0	2	0	2	0	2	1	2	0	0	2	0	2	2	0	0	2	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2				
pas d'image		1	2	1	1	0	2	1	0	0	1	0	2	0	2	2	1	0	0	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0	2	2	2	1	2	2	2	2					
variable	S43	0	0	0	0	2	2	1	0	2	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	2	2	2	0	0	1	1	2	2	6	11	19		
image		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0					
pas d'image		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
corrections	S'43	1	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	2	1	1	1	2	1	0	2	2	0	1	2	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	1	1	2	2	11	12	13	
variable		0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2					
image		0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2					
pas d'image		0	0	2		0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2					
situation 5	S5	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	19	2	15		
variable		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1					
image		0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2																										