INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Université Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
Tél. 67 14 33 83 ou 67 14 33 84
Télécopie 67 14 39 09

EXERCICES - PROBLEMES - TRAVAUX PRATIQUES EN CLASSE DE SECONDE

J. F. CAILLAUD
J. MIR

- 1992 -

Ce fascicule s'adresse en priorité aux professeurs ayant des classes de Seconde.

Les énoncés ne sont, certes, pas tous originaux, mais il nous a semblé utile de regrouper dans un même fascicule le travail fait avec des élèves de cette classe.

C'est pourquoi nous proposons :

* des exercices,
* des activités de travaux dirigés,
* des devoirs (en classe et à la maison).

Tous ces travaux ont été expérimentés sur six classes de Seconde.

Notons enfin que les regroupements effectués l'ont été simplement pour des questions de mise en page. Cette présentation ne signifiant, en aucun cas, que le programme de Seconde a été traité dans cet ordre.

Les auteurs

J.F. CAILLAUD
J. MIR

ISBN - 2-909916-03-0

Rappels et compléments de 3ème

- Activités numériques
- Géométrie : Thales, Pythagore, espace ...

SOMMAIRE

Exercice à base numérique : n°1, 2, 3, 4

Exercice sur la relation d'ordre : n°5, 6, 7

Exercices à base géométrique : nos 8 à 15

Mises en équation : n^{os} 16 à 22

<u>Devoir en classe</u> n°1 (1 h)

<u>Thèmes</u> :
- révision et complément de calcul algébrique
- résolution d'équation
- Pythagore - Thalès

<u>Devoir en classe</u> n°2 (2 h)

<u>Thèmes</u> :
- Techniques de calcul sur "racine carrée" et "puissances"
- équations
- Thalès - Pythagore
- Orthocentre d'un triangle

<u>Devoirs "maison"</u> :
- Mise en équation
- Thalès, Pythagore
- Proportionnalité

T.P. : Avec une pyramide.

EXERCICES

Exercice 1 :

1°) Mettre sous forme de fraction irréductible le nombre

$$\frac{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+2}$$

2°) Mettre sous forme de fraction irréductible le nombre :

$$b = \frac{8^6 \times 3^{17}}{2^{17} \times 9^9}$$

3°) Développer :

$(2+\sqrt{5})^2$; $(2-\sqrt{5})^2$

Quel est le signe de $2-\sqrt{5}$?

En déduire une écritre plus simple du nombre

$c = \sqrt{9+\sqrt{4}\quad\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\quad\sqrt{5}}$

(Concours d'entrée à l'E.N.)

Exercice 2 :

(II) Calculer : $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

utilise ce résultat pour calculer $A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

Exercice 3 :

x, y et z étant trois réels non nuls, montrer que :

si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ alors $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2$

Exercice 4 :

Factoriser les expressions suivantes :

$A = (4x^2-25)(x-3)-(x^2-9)(2x+5)$

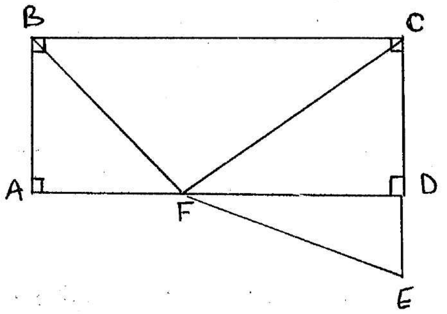
$B = 2x^3 - x^2 - 50x + 25$

$C = (3x-2)(25x^2-70x+49)-27x+18$

Utilisation de la relation d'ordre

Une unité de longueur ayant été choisie, on considère la figure suivante :

Exercice 5 :



où $\begin{cases} AB = AF = 2 \\ CE = 3 \\ FD = x \end{cases}$

On appelle

S_1 l'aire de ABF

S_2 l'aire de BCF

S_3 l'aire de CFE

(1) Calcule S_1

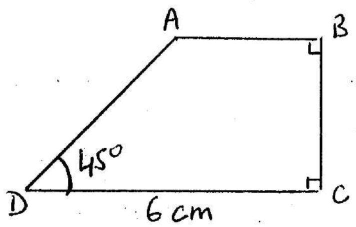
(2) Calcule S_2 et S_3 en fonction de x

(3) Dans un repère orthonormé tracer les droites d'équations $y = 2$ $y = x + 2$ $y = \frac{32}{2}$

classe alors S_1, S_2, S_3 par ordre croissant suivant les valeurs de x

---

Exercice 6 :



ABCD est un trapèze rectangle

On se propose de calculer sa hauteur x de sorte que son aire soit inférieure à 10 cm^2

a) exprimez AB en fonction de x

b) exprimez l'aire du trapèze en fonction de x.

Quelle inéquation doit-on résoudre ?

c) vérifiez que $x^2 - 12x = (x - 6)^2 - 36$

d) résolvez l'inéquation et concluez

Exercice 7 :

Résoudre dans R

a) $x^2 \leq 9x$

b) $3 \leq x^2 \leq 16$

c) développe (x+1) (x-4) puis résoudre $\frac{1}{x} \geq \frac{x}{3x+4}$

Exercice 8 :

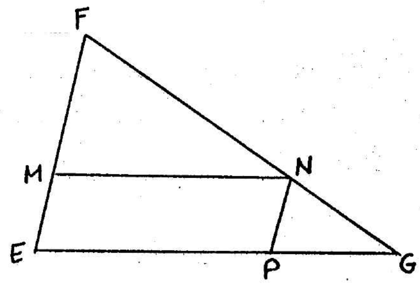
EFG est un triangle

M est un point de [EF], N un point de [GF] tels que :

(MN) (EG) FM = 3 cm EG = 6 cm

(PN) (FE) EF = 4,5 cm

Calculer PG.

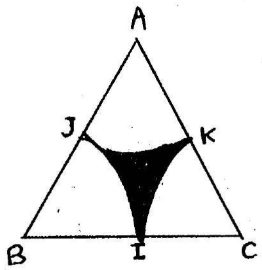


Exercice 9 :

ABC est un triangle isocèle en A. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite (AC) en D. On pose ABD = x.

Déterminer x pour que le triangle DBC soit isocèle en B.

Exercice 10 :



ABC est un triangle équilatéral de côté a.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AB] et [AC]

Calculer, en fonction de a, l'aire de la partie hachurée.

Exercice 11 :

A B C D est un quadrilatère convexe quelconque et I, J, K, L sont respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CD], [DA].

a) Démontrer que I J K L est un parallélogramme

b) Comparer les aires des triangles ABC et IBJ.

c) Montrer que l'aire de I J K L est la moitié de l'aire de A B C D.

Exercice 12 :

Deux points A et B étant donnés, soit (C) le cercle de diamètre [AB], 0 le centre du cercle et (C'), le cercle de centre B et de rayon [AB].

Une droite (Δ) passant par A et distincte de la droite (AB), recoupe le cercle (C) en M et le cercle (C') en M'. Démontrer que les droites (OM) et (BM') sont parallèles.

Exercice 13 :

A B C D est un trapèze de bases [AB] et [DC]. E et F sont les projections orthogonales respectives de A et de B sur (CD). L'unité de longueur choisie est le cm.

(On sait que : AB = 3   DC = 6   DE = 2   FC = 1   BF = 4

1°) Faire la figure

2°) Soit I le point d'intersection des droites (AC) et (BD), K le projeté orthogonal de B sur (AC) et H celui de A sur (BD).

a) Calculer $\frac{ID}{IB}$

b) Soit a_1 l'aire du triangle ADI et a_2 celle de AIB

Calculer $\frac{a_1}{a_2}$

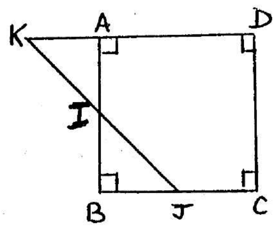
c) Calculer $a_1 + a_2$

En déduire a_1 et a_2

d) Calculer AH et BK

Exercice 14 :

A B C D est un carré. I est le milieu de [AB] et J celui de [BC]

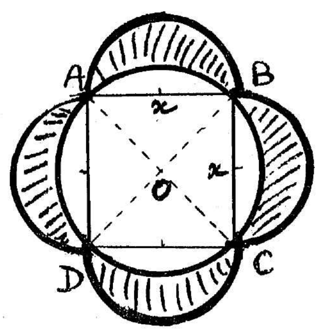


1°) Montrer que (KJ) $\perp$ (BD)

2°) Montrer que (DI) $\perp$ (AJ)

Exercice 15 :

A B C D est un carré de côté x. Calculer, en fonction de x, l'aire hachurée sur la figure :

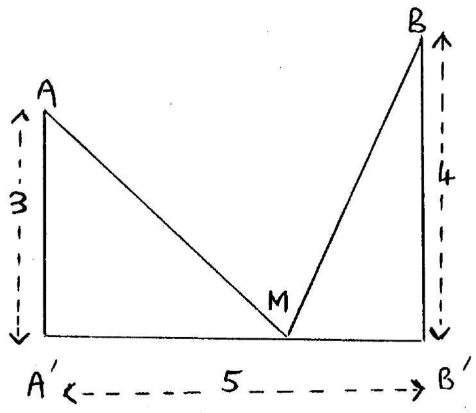


Exercice 16 :

1) Comment choisir le côté d'un carré, si, en augmentant le côté de 5, on obtient un autre carré dont le périmètre vaut quatre fois celui du carré précédent.

2) Soit un carré A B C D de côté x. On augmente le côté [A B] de 8 et le côté [AD] de 5. On obtient ainsi un rectangle dont l'aire surpasse celle du carré initial de 183. Quelle est la mesure du côté du carré initial ?

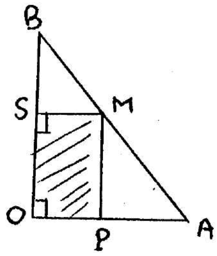
Exercice 17 :



1) Déterminer x = A'M de façon que AM = BM

2) Donner une construction géométrique (sans tenir compte des calculs précédents).

Exercice 18 :



OA = 3 cm OB = 6 cm, le point M est variable sur [AB]

OP = x cm

1°) Exprimer, en fonction de x, l'aire A (x) du quadrilatère = OPMS

2°) Déterminer x pour que $A(x) = \frac{9}{2}$

Exercice 19 :

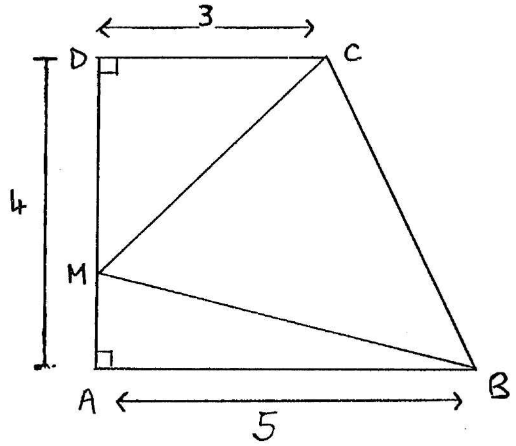
Soit un segment [AB] tel que AB = 10 cm. La perpendiculaire à [AB] menée par un point M de [AB] ($M \neq A$ et $M \neq B$) coupe le demi-cercle de diamètre AB en N. Comment faut-il choisir M pour que MN = 2AM (on pourra poser AM = x).

Exercice 20 :

Soit A B C D un trapèze dont les dimensions sont données sur la figure.

Soit M un point quelconque situé sur le segment [AD]

On pose A M = x



1°) Calculer l'aire du trapèze A B C D. Calculer B C.

2°) Calculer en fonction de x l'aire a du triangle A M B et l'aire b du triangle D M C.

3°) En déduire, en fonction de x, l'aire c du triangle C M B.

4°) Pour quelle valeur de x a-ton : a = b ?

5°) Pour quelle valeur de x a-ton : c = a - b ?

6°) Dans un même repère orthonormé où l'unité est égale à 2 cm, représenter graphiquement les variations en fonction de x des aires a, b et c.

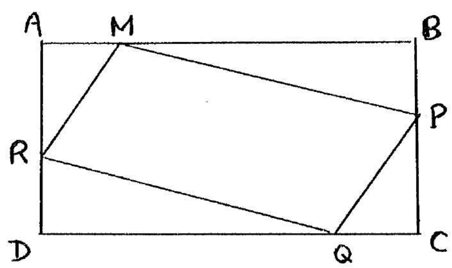
7°) En utilisant les représentations graphiques précédentes peut-on retrouver les résultats des questions 4 et 5 . Si oui dites comment.

(Concours d'entrée à l'E.N.)

Exercice 21 :

Un triangle ABC a des côtés [AB], [BC], [AC] qui ont respectivement pour mesures 12, 14, 18. Par un point D de [BC] on mène les parallèles à (AC) et (AB) qui coupent [AB] et [AC] respectivement en E et F. On pose BD = x. Déterminer x pour que DE = DF.

Exercice 22 :



Une unité de longueur ayant été choisie.

ABCD rectangle AB = 8

BC = 4

AM = BP = QC = DR = x

déterminer x pour que l'aire du parallélogramme MPQR soit égale à 14.

DEVOIRS

Devoir en classe n°1 : **Durée** : **1 h**

I)

1°) Simplifier l'écriture suivante :

$$3\sqrt{20} + 4\sqrt{45} - 2\sqrt{80} - \sqrt{180}$$

2°) Sachant que $k = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Calculer k^2 et $\dfrac{1}{k} - k$

II) Simplifier l'expression A suivante en faisant figurer les calculs sur la copie

$$A = \frac{(0{,}04)^2 \times (500)^3}{0{,}005 \times (0{,}002)^{-3}}$$

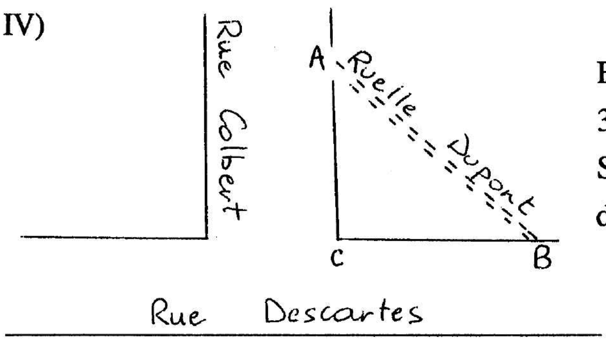
III)

1°) Mettre A et B sous forme de produit de facteurs du premier degré

$A = 5(x-3)^2 - 3x^2 + 9x$

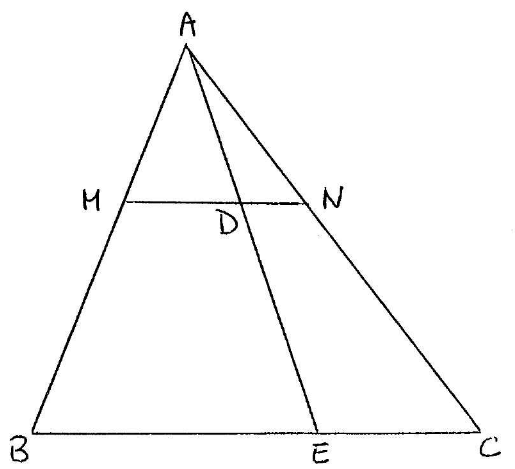
$B = (x-5)(2x-1)^2 + 20 - 4x$

IV)



En allant directement de A à B on gagne 30 m par rapport au chemin pasant par C. Sachant que AC = 80 m, déterminer la distance CB.

V)



Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

On sait que : AM = 3 cm

MB = 4 cm

DN = 8 cm

Déterminez la distance E C en justifiant avec soin votre réponse.

(Figure volontairement fausse)

Devoir en classe n°2 **Durée : 2 h**

I)

a) Simplifier : $3\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + 10\sqrt{72}$

b) Simplifier $A = (2\sqrt{13} - 6)(2\sqrt{13} + 6)$; $B = \dfrac{2\sqrt{2} - 3}{2\sqrt{2} + 3}$

c) Simplifier $\dfrac{(0{,}09)^2 \times (0{,}012)^3}{(0{,}27)^2 \times 40^2 \times 10^{-10}}$ (on fera apparaître les calculs sur la copie).

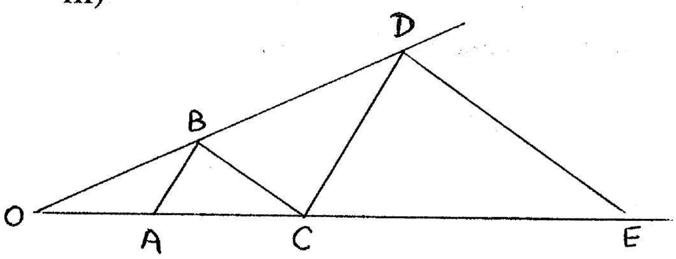
II) Résoudre dans R

a) $(x-2)^2 = (3x+1)^2$

b) $x^2 - 25 = 4(5-x)$

c) $\dfrac{3x+2}{x-2} = x - 1$

III)



Sachant que | OA = 3 et | (AB) // (CD)
| AC = 4 | (BC) // (DE)

calcule : CE

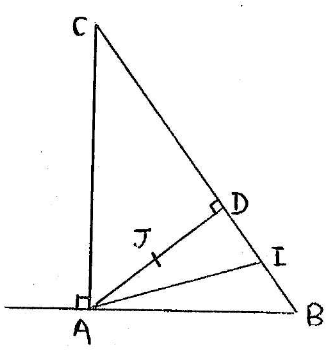
IV) Soit un triangle ABC rectangle en A tel que B mesure 60° et BC = 10. Par un point N de [BC] on trace la parallèle à (AC) qui coupe [AB] en M. On pose BN = 2x (on rappelle que $\cos 60° = \frac{1}{2}$)

1°) Calcule AB et AC

2°) Exprime BM et MN en fonction de x

3°) Montre que $AN^2 = 4x^2 - 10x + 25$; Pour quelles valeurs de x a-t-on AN = 5.

V)



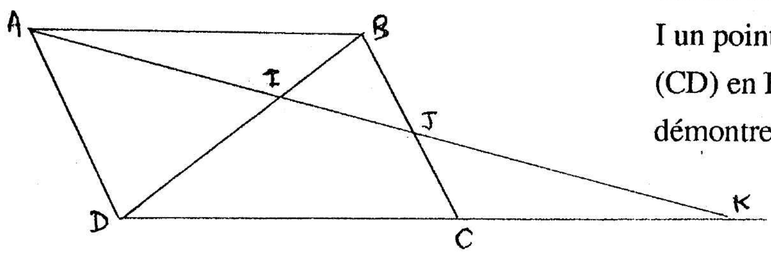
ABC rectangle en A, (AD) hauteur issue de A du triangle ABC

I milieu de [BD]

J milieu de [AD]

Montrer que les droites (AI) et (CJ) sont perpendiculaires.

VI)



Application du théorème de Thalès

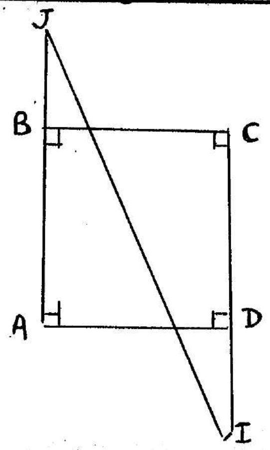
ABCD est un parallélogramme

I un point de [BD]. (AI) coupe (BC) en J et (CD) en K

démontre que $IA^2 = IJ \times IK$

Devoir à rédiger à la maison

I)



On donne CD = 10; BJ = 2; DI = 4

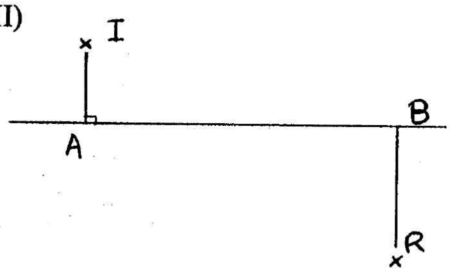
IJ = 18

1°) Calculer AD

2°) Calculer IL, LK et KJ

3°) Calculer BK et LD

II)



Juliette habite en J, Roméo en R
Une clotûre (AB) sépare les deux propriétés
Juliette et Roméo se donnent rendez-vous en un point P situé sur (AB) et à égale distance de J et de R.

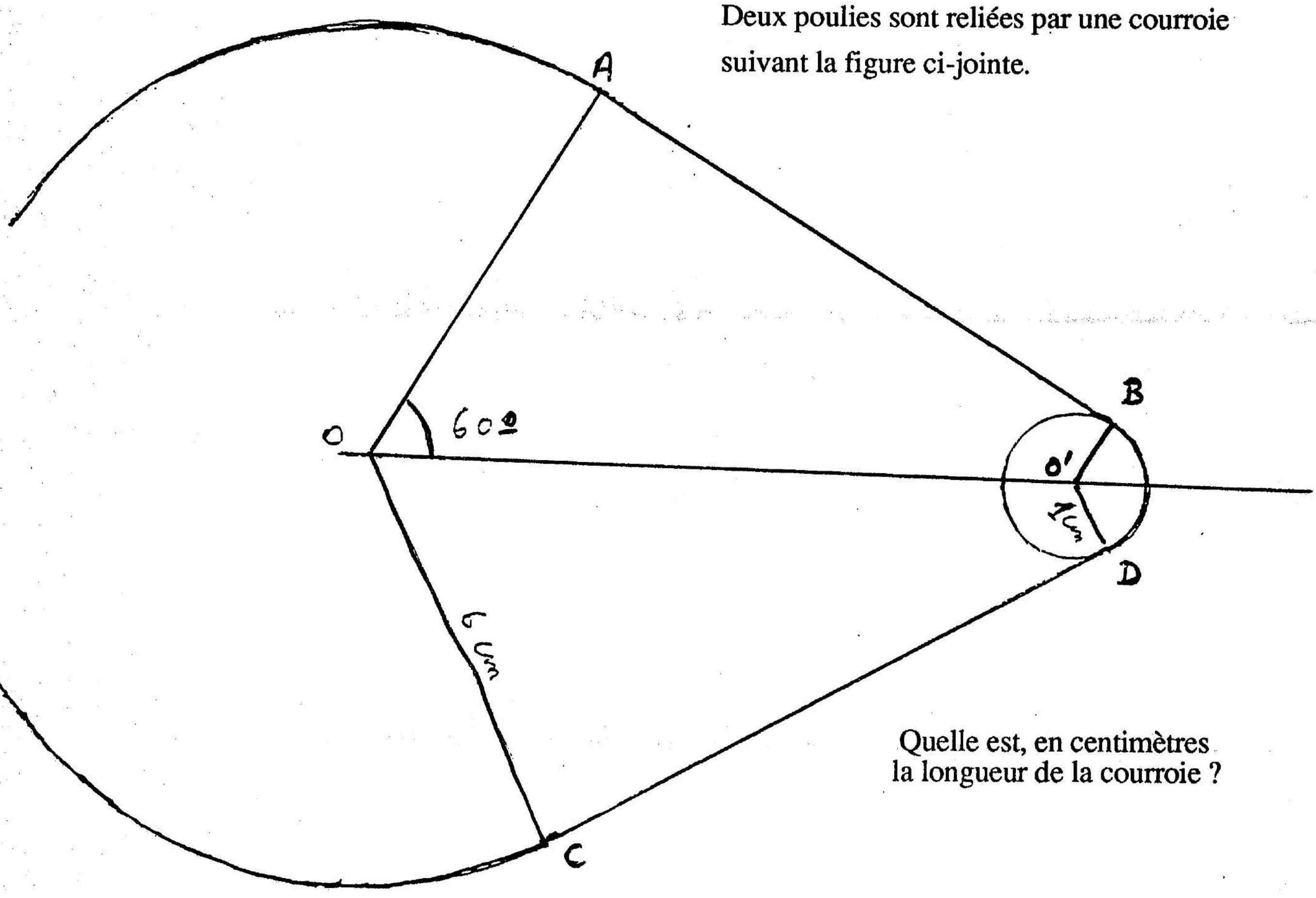
1°) Construire un point P répondant à la question.

2°) Calculer AP, PB, JP sachant que

AB = 119 m; AJ = 16 m ;BR = 33 cm

III)

Deux poulies sont reliées par une courroie suivant la figure ci-jointe.



Quelle est, en centimètres la longueur de la courroie ?

IV)

Une gratification a été répartie entre trois employés de sorte que les parts sont directement proportionnelles aux nombres 4, 7 et 3.

Calculer la part revenant à chacun sachant que les deux premiers ont touché ensemble 1320 F.

V)

ABCD est un carré de côté a. La parallèle menée par A à la diagonale [BD] coupe la droite (CD) en E.

1°) Faire une figure avec a = 5 cm

2°) Quelle est la nature du quadrilatère ABCE ? Calculer, en fonction de a, les mesures de ses côtés, de ses diagonales, de son aire.

3°) Soit I le point d'intersection des droites (BE) et (AC).

Calculer $\frac{IA}{IC}$ et le rapport des aires des triangles IAB et ICE.

4°) Calculer, en fonction de a, les longueurs de segments [IA], [IC], [IB] et [IE].

5°) Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur la droite (BE). Montrer que les 4 points E, A, H et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6°) Calculer BH et IH.

TRAVAUX PRATIQUES

T.P. : Avec une pyramide

Activité I :

On construit une pyramide régulière à base carrée telle que toutes les arêtes aient la même mesure a. Soit SH = h la hauteur de cette pyramide

1°) Faire une figure

2°) Exprimer h en fonction de a

3°) Déterminer la nature du triangle BSD

4°) Calculer, en fonction de a, le volume de cette pyramide

5°) Calculer, en fonction de a, l'aire latérale de cette pyramide.

Activité II :

Par un point de l'arête [SA] tel que SM = x on mène le plan parallèle au plan de la base de la pyramide de l'activité I. Il coupe les arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD] en M, N, P et Q respectivement.

1°) Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

2°) Soit M' l'intersection de (SH) et du plan MNPQ.

On pose $k = \frac{x}{a}$. Exprimer en fonction de k les quotients $\frac{SH'}{SH}$ $\frac{\text{Aire(MNPQ)}}{\text{Aire(ABCD)}}$ et $\frac{\text{Volume(SMNPQ)}}{\text{Volume(SABCD)}}$

Activité III

On prend maintenant a = 5 cm

On appelle V' le volume de la pyramide SMNPQ et V celui de la pyramide SABCD.

Déterminer x pour que :

1°) $V' = \frac{1}{2} V$

2°) $V' = \frac{1}{3} V$

Activité IV

Le but de cette activité est de calculer le volume du tronc de pyramide représenté sur la figure 1.

1°) Exprimer, en fonction de h_1 et a, le volume de la "grande pyramide" et, en fonction de h_2 et b, le volume de la "petite pyramide".

En déduire, en fonction de h_1, h_2 a et b le volume du tronc de la pyramide.

2°) En utilisant l'énoncé de Thalès dans les triangles SHA et SH'M démontrer que $\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b}$

En déduire alors l'expression de h_1 et h_2 en fonction de h, a et b.

3°) Calculer $(x-y)(x^2 + xy + y^2)$, en déduire alors une factorisation de $x^3 - y^3$.

En utilisant cette factorisation donne l'expression du volume du tronc de pyramide en fonction de sa hauteur h et de côtés a et b de ses bases carrées.

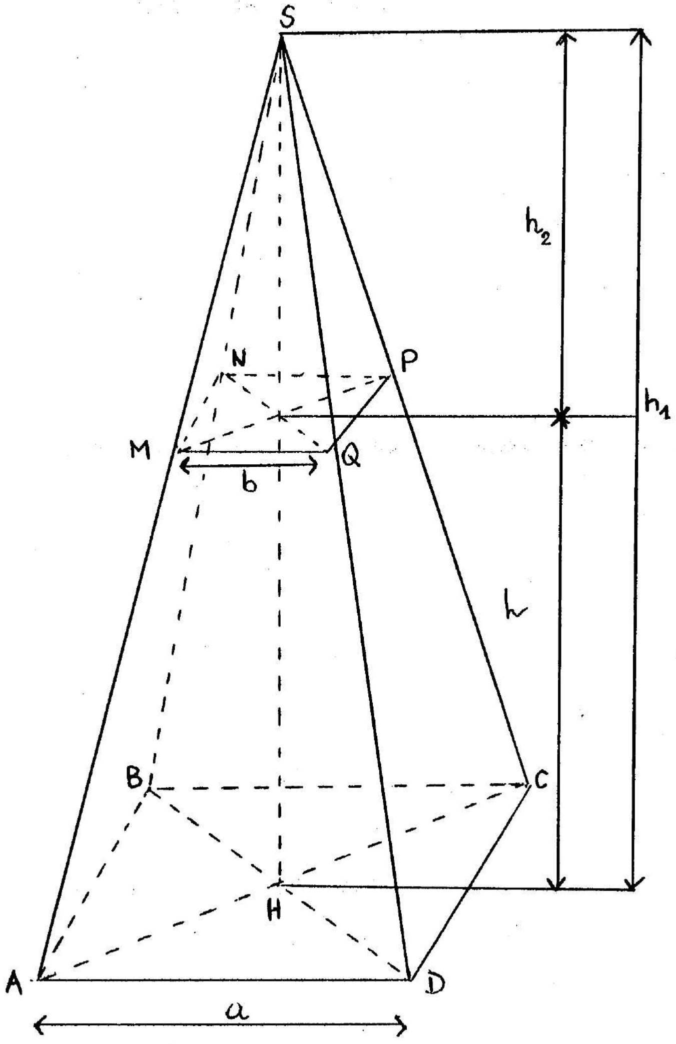


Figure 1

TRANSFORMATIONS

SOMMAIRE

Des transformations pour démontrer
Exercices n^{os} 1, 2, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19;

Des transformations pour constuire
Exercices n^{os} 3, 4, 5, 11, 20, 22, 23

Des transformations pour étudier des lieux géométriques
Exercices nos 9, 10, 21

Devoir en classe (1 heure)

Thèmes :
- homothéties
- constructions
- une rotation pour démontrer

Devoir en classe (2 h)

Thèmes :
- homothéties
- des transformations pour démontrer
- position relative d'une hyperbole et d'une droite

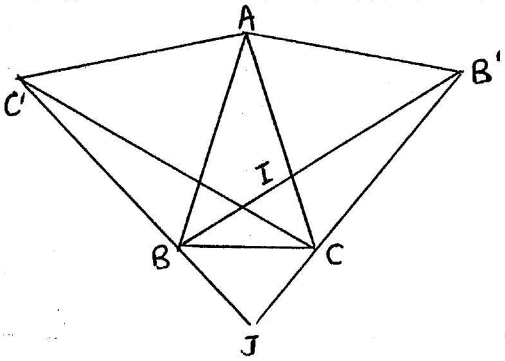
T.P.

a) TP 1 : introduction à l'homothétie
b) TP2 : résoudre un problème par plusieurs méthodes
c) TP 3 : idem

EXERCICES

SYMETRIES

(1)

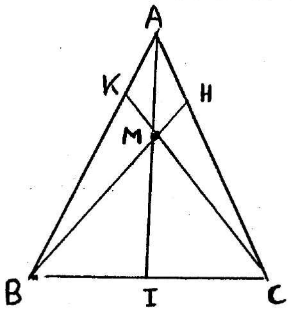


ABC isocèle en A

ABC' et ACB' équilatéraux

Démontrer que A, I, J alignés (on pourra utiliser une symétrie orthogonale).

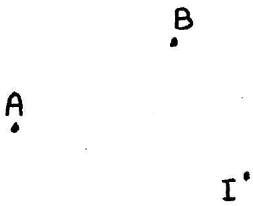
(2)



ABC isocèle (AB = AC), I milieu de [AI]

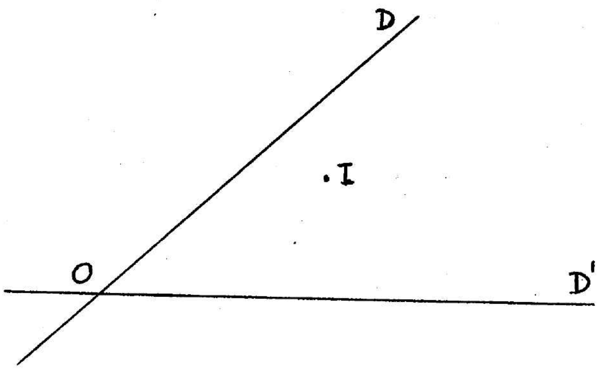
Démontrer que CK = BH

(3)



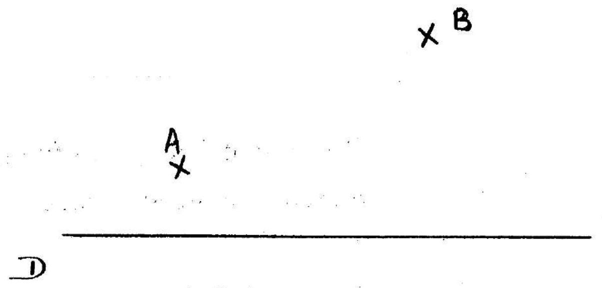
Construire 2 droites symétriques par rapport à I
l'une passant par A l'autre par B

(4)



Construire un point A de D et un point B de D'
tel que I soit le milieu de [AB]

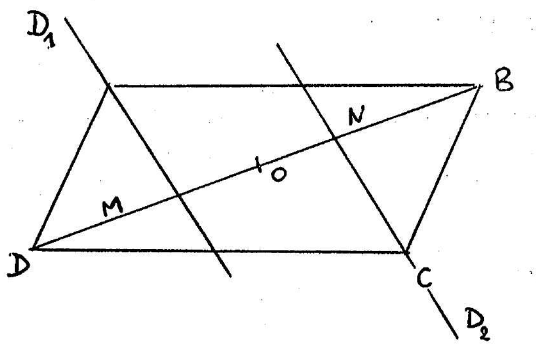
5)



A et B sont deux points fixes. D est une droite fixe.

Où placer le point M sur la droite D pour que AM + MB soit la plus courte possible.

6)

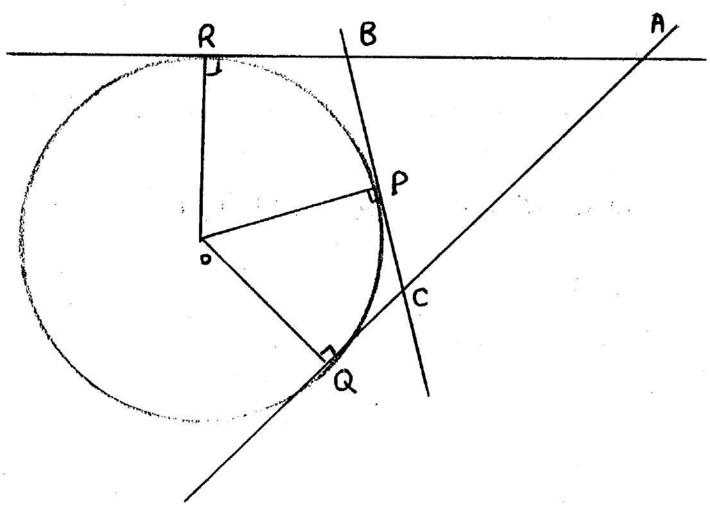


ABCD est un parallélogramme de centre O.

Les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

Quelle est la nature de AMCN ?

7)



La droite (AB) est tangente au cercle en R.

La droite (BC) est tangente au cercle en P.

La droite (AC) est tangente au cercle en Q.

Déterminer le périmètre du triangle ABC.

8)

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. A l'extérieur de ce triangle on construit les carrés ABDE et ACFG la droite (AH) coupe la droite (EG) en M.

1) Montrer que les points D, A, F sont alignés.

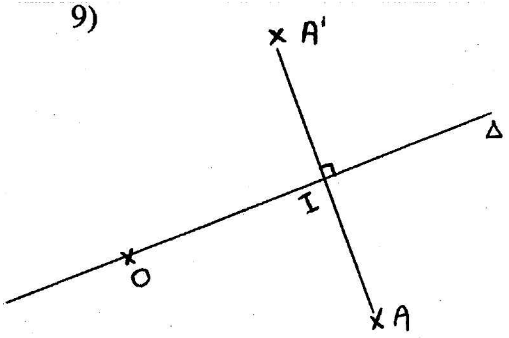
2) Quelle est l'image du triangle ABC par la réflexion d'axe (DF), en déduire que $\widehat{AEG} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{EGA} = \widehat{ACB}$ en justifiant les réponses.

3) Démontrer que $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$. En déduire que le triangle AME est isocèle.

Démonter de même que GAM est isocèle.

Que peut-on dire du point M ?

9)



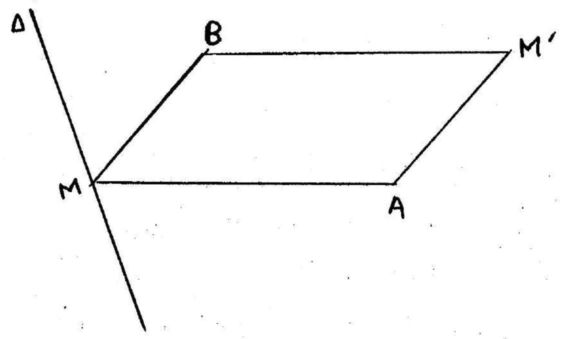
O et A sont deux points fixes.
Δ est une droite tournant autour de O.
A' est le symétrique orthogonal de A par rapport à Δ.

Quel est l'ensemble décrit par I quand Δ tourne autour de O ?
Et celui décrit par A' ?

---

10)

A,B,D donnés

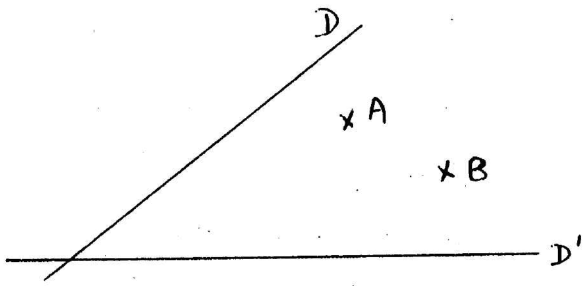


A tout point M de Δ on associe M' tel que AM BM' soit un parallélogramme.
Que décrit M' lorsque M décrit Δ ?

TRANSLATIONS

11)

A et B sont deux points donnés.
D et D' sont deux droites sécantes données.



Construire M sur D et M' sur D' pour que
ABM'M soit un parallélogramme.

---

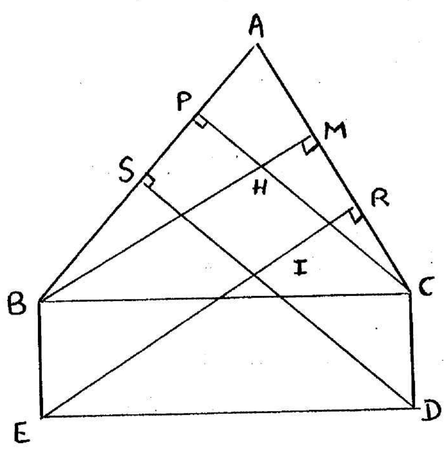
12)

On considère un segment [BC] et son milieu A. C et C' deux cercles de diamètres respectifs [MB] et [AC], de centres respectifs O et O'. A tout point M de C distinct de A et B on associe le point N de C' situé du même côté que M par rapport à [BC] et tel que $\widehat{MAN} = 90°$.

Montrer que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$

---

13)

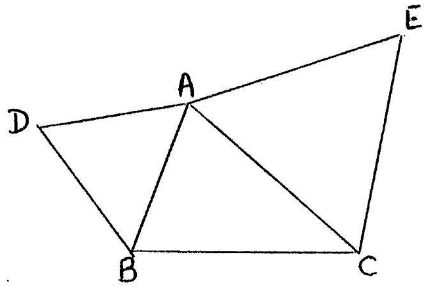


H orthocentre du triangle ABC
BCDE rectangle
(DS) $\perp$(AB)
(ER) $\perp$ (AC)

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$
Montrer que I est l'image de
H par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$
En déduire que A, H, I sont
alignés.

ROTATIONS

14)



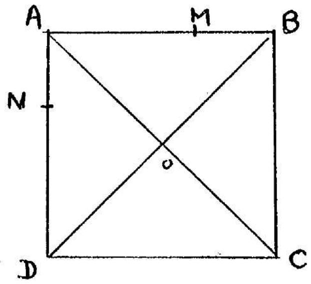
ABC quelconque

ABD et ACE triangles équilatéraux

Comparer DC et BE

---

15)



ABCD carré de centre O

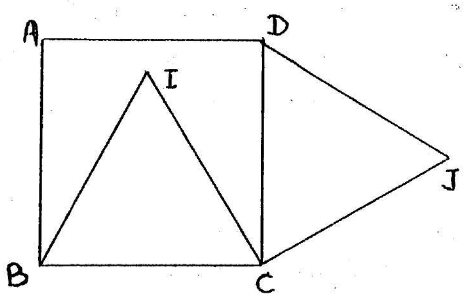
M∈ [AB] ; N ∈ [AD] avec

BM = AN

Montrer que (OM) ⊥ (ON)

---

16)



ABCD carré. BIC et DJC équilatéraux

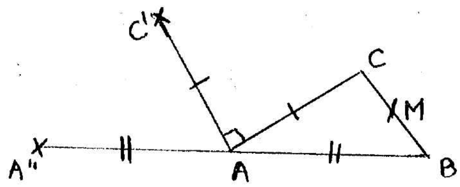
Soit K tel que AKC soit équilatéral (K et D de part et d'autre de (AC)

(1) Que peut-on dire des points K,B,D

(2) Montre à l'aide d'une rotation de centre C que A, I, J sont alignés.

---

17)



ABC quelconque M milieu de [BC]

CAC' rectangle isocèle

A milieu de [A'B]

(1) Construire l'image B' de A' dans la rotation de centre A qui transforme C en C'

(2)Montrer que B'C' = 2 AM et que (B'C') ⊥ (AM)

(N.B. <u>On rappelle que dans un quart de tour une droite et son image sont perpendiculaires).</u>

18)

ABCD est un carré. I est un point du segment [AB] et
I un point de [BC] tels que AI = BJ
Soit K l'intersection des droites (CI) et (AJ)
Qu'est K pour le triangle DIJ ?

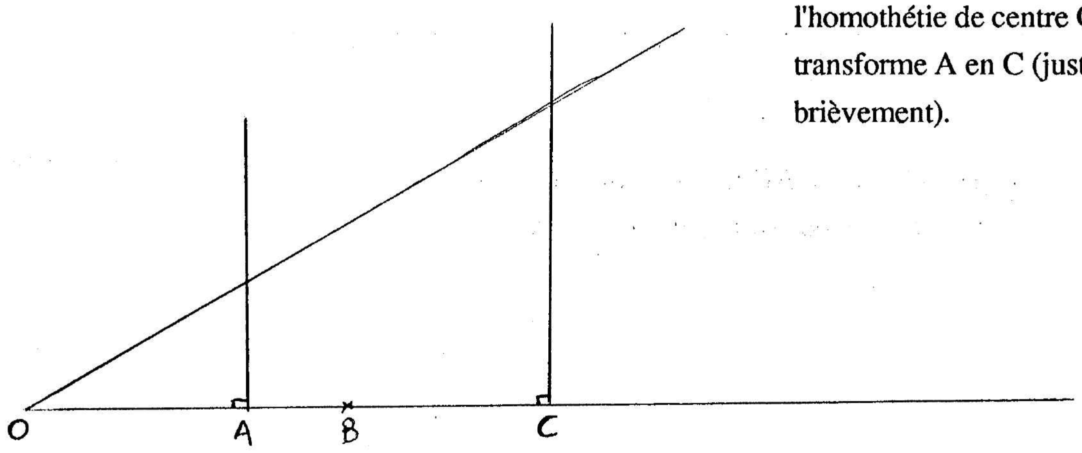
---

19)

ABC est un triangle rectangle en B tel que $\widehat{ACB}$. I est le milieu de [AC].
Quelle est l'image de C dans la rotation de cercle I et d'angle 100° ?

HOMOTHETIES

20)



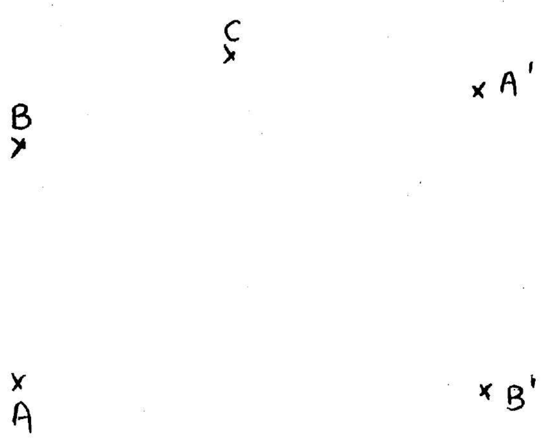
Construire l'image de B dans l'homothétie de centre O qui transforme A en C (justifier brièvement).

---

21)
Soit C un cercle de centre O, de diamètre [AB]. Soit M un point de C (M ≠ A et M ≠ B, soit M' le symétrique de A par rapport à M. Les droites (BM) et (OM') se coupent en P. Quel ensemble décrit P lorsque M décrit C; le construire.

---

22)



h est une homothétie telle que : h $\left| \begin{array}{l} A \to A' \\ B \to B' \end{array} \right.$

Construire l'image de C par h.

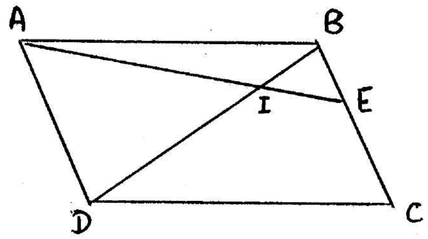
DEVOIRS

DEVOIR EN CLASSE **1 heure**

I)

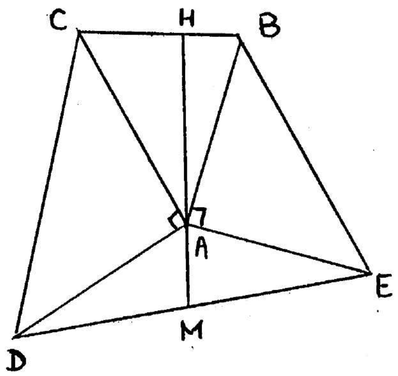
Déterminer le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme B en A.
Déterminer et construire le centre O de l'homothétie de rapport ($-\frac{5}{2}$) qui transforme A en C.

II)



ABCD est un parallélogramme
I ∈] BD[
H : homothétie de centre I qui transforme B en D.
(1) Construire en justifiant votre réponse les images des points E et A par H
(2) Construire l'image de (DC) par H

III)



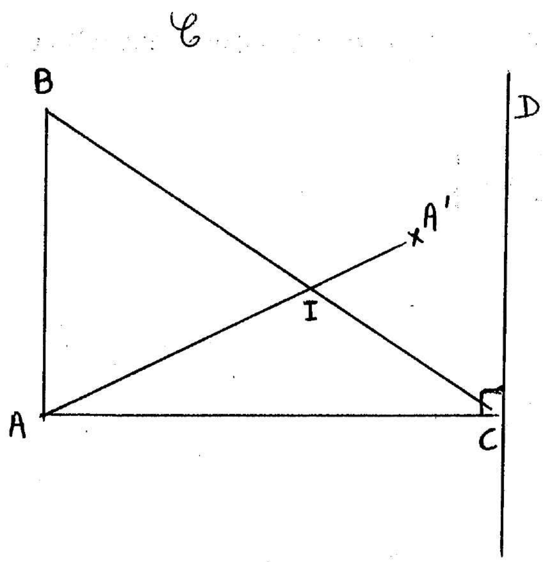
Soit ADC et ABE deux triangles rectangles en A et isocèles.
Soit M milieu de [DE], H le point d'intersection de (AM) et (BC)
1) Soit r la rotation de centre A qui transforme C en D. Construire le point F image de D par r puis le point M' image de M. Montrer que A est le milieu de [CF]
2) Démontrer que la droite (AM') est parallèle à (BC)
En déduire que (AH) est une hauteur du triangle ABC.

DEVOIR EN CLASSE **Durée : 2 h**

I)

a) Déterminer et construire le centre O de l'homothétie de rapport $k = -\frac{1}{4}$ qui transforme B en A. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre B qui transforme A en C;

b)

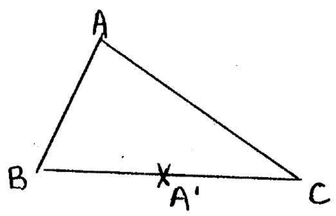


H : homothétie de centre I telle que
A → A'
Construire l'image de D et de C par H

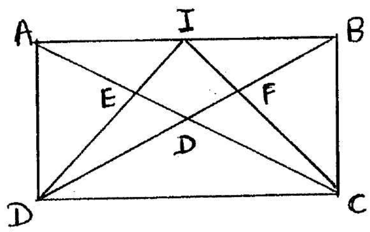
c) Dans le plan (P) muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j}$ déterminer l'équation de la droite D' image de D d'équation : x = 3y = 5 = 0 par l'homothétie de centre A (1;2) et de rapport 3.

II)

a)



ABC triangle quelconque. Soit A' le milieu de [BC].
Soit C_1 image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$
Soit C_2 image de C_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$
Faire la construction et montrer que $\overrightarrow{AC_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



b)

ABCD rectangle; I milieu de [AD]
Montrer que (EF) // (AB)

III)

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = \frac{-2}{x}$

a) Construire la représentation graphique (C) de f dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ et expliquer pourquoi O est centre de symétrie pour (C).

b) Tracer la droite D d'équation $y = 2x - 4$ et vérifier <u>par le calcul</u> que (C) et (D) n'ont qu'un seul point commun.

c) <u>Résoudre graphiquement</u> : $-\frac{2}{x} \leq -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

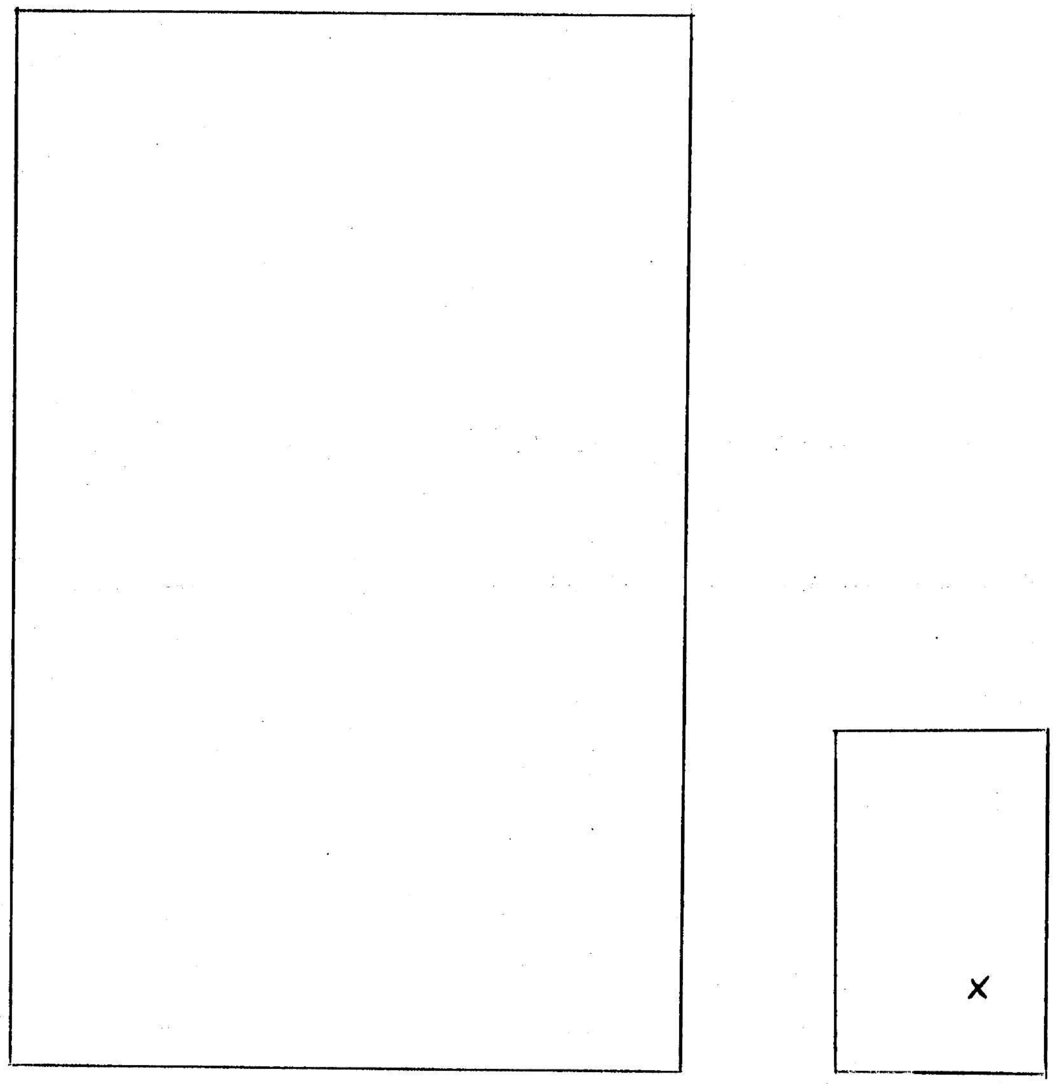
TRAVAUX PRATIQUES

T.P. 1 : Introduction à l'homothétie

En agrandissant le petit rectangle, j'ai obtenu le grand rectangle.
J'ai oublié de placer le point dans l'agrandissement.

Faites-le en utilisant : - règle non graduée
- compas
- équerre.

Expliquez la méthode utilisée.

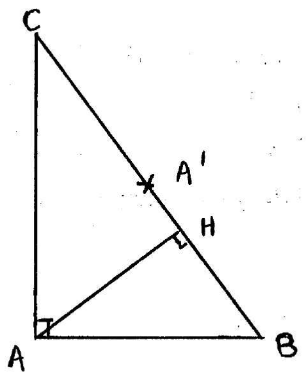


(Bulletin inter-IREM : Premier cycle - Niveaux d'approfondissement)

T.P.2 : Résoudre un problème par plusieurs méthodes

Le problème : ABC est un triangle rectangle en A. AB = a et AC = b (a et b étant deux nombres positifs donnés). A' est le milieu du segment [BC]. H est le pied de la hauteur issue de A. H se projette orthogonalement en H sur (AB) et en N sur (AC).

Démontrer que les droites (AA') et (MN) sont perpendiculaires.



(A) Utilisation d'un repère orthonormal

(I) on prend a = 4 cm et b = 6 cm. Faire la figure

On choisit le repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{6}\vec{AC}$

1°) Déterminer les coordonnées de B, C et A'.

2°) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AH)

c) En déduire les coordonnées de H.

3°) Déterminer les coordonnées de M et de N

4°) Démontrer que les droites (MN) et (AA') sont perpendiculaires.

(II) Reprendre le même problème avec AB = a et AC = b

(B) Utilisation des angles

On appelle O le centre du rectangle ANHM et K le point d'intersection des droites (AA') et (MN).

1°) Comparer les angles $\widehat{MAK}$ et $\widehat{ABH}$

2°) Comparer les angles $\widehat{AMK}$ et $\widehat{BAH}$

3°) Montrer que les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$ sont complémentaires

4°) En déduire que $\widehat{AKM} = 90°$. Conclure.

(C) Utilisation de la symétrie orthogonale

On considère la symétrie orthogonale d'axe (AB). Soit C' l'image de C et H' l'image de H par cette symétrie.

1°) Qu'est le point M pour le segment [HH']. Qu'en déduit-on pour les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{HM}$?

2°) Montrer que les droites (NM) et (AM') sont parallèles.

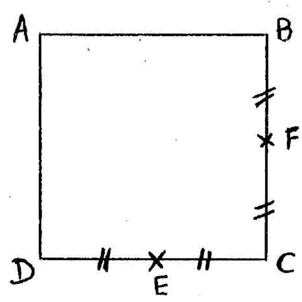
3°) Que peut-on dire des droites (AA') et (C'B) ?

Que peut-on dire des droites (AH') et (C'B) ?

4°) En déduire que les droites (AA') et (NM') sont perpendiculaires.

TP 3 :

Le problème : ABCD est un carré de côté a. E est le milieu de [CD] et F celui de [BC].
Démontrer que les droites (AE) et (DF) sont perpendiculaires.



A) Utilisation d'un repère orthonormal

(I) On prend a = 5 cm. Faire la figure

On choisit le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$

1°) Déterminer les coordonnées de D, C, A, B E et F dans ce repère.

2°) Démontrer que les droites (AE) et (DF) sont perpendiculaires.

(II) Reprendre le même problème avec un carré de côté a.

B) Utilisation des angles

1°) Comparer les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{FDC}$

2°) Calculer $\widehat{FDE}$ et $\widehat{AED}$

3°) G étant le point d'intersection des droites (AE) et (DF), montrer que $\widehat{DGE} = 90°$. 4°) Conclure.

C) Et avec une rotation :

O étant le centre du carré ABCD, on considère la rotation de centre O qui transforme A en D.

Quelle est l'image de E dans cette rotation ?

Conclure.

ENCADREMENTS
VALEUR ABSOLUE
FONCTIONS

SOMMAIRE

Valeur absolue, encadrements ex n^{os} 1 à 10.

"En fonction de ..." ex. n° 11, 12, 13, 14, 15

Devoir en classe n°1 (2 h)

Thèmes : - tracés graphiques
- résolution graphique d'équations et d'inéquations
- Recherche d'une aire maximum

Devoir en classe n°2 (2 h)

Thèmes : - résolution d'inéquations
- encadrement, inéquations
- tracés graphiques
- étude d'une fonction - lecture graphique

Devoir maison n° 1

-Tracé de fonctions comportant des valeurs absolues
- Utilisation dans un problème de géométrie

Devoir maison n°2 : Recherche d'un minimum et d'un maximum à l'aide de fonctions

---

TP1 - Une première situation d'introduction

TP2 : - Le problème de la cuve

TP3 : - Etude d'une fonction

EXERCICES

VALEUR ABSOLUE - ENCADREMENT

(1) Placer, sur une droite graduée, les points d'abcisse x vérifiant :

1°) $|x| = 10$

2°) $|x-2| = 5$

3°) $|x+3| = 2$

4°) $|x-1| = |x+2|$

(2°) Compléter le tableau suivant :

En terme de valeur absolue	En terme de distance	En terme d'intervalle	En terme d'encadrement	En terme de graphique
$|(x+2)| \leq 3$				
	$d(x;4) \leq 8$			
		x [-1;5]		
			$-3 \leq x \leq 4$	
				-2 6
				0 4
			$-5 < x \leq 8$	
		x] - 5; O [		
	$d(x;-3) \leq 4$			
$|x-9| \leq 6$				

3- Résoudre, dans R :

1°) $|3 - 2x| = 5$

2°) $|3 - 2x| \geq 5$

3°) $2|x-1| + |x+3| = 6$

---

4)

1) Sachant que $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$ et $|y - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{6}$ encadrer x, y, $\frac{x}{y}$ puis déterminer 2 réels a et b tels que $\left|\frac{x}{y} - a\right| \leq b$

2) On donne $-5 \leq x \leq -4$

$2 \leq y \leq 3$ encadrer x-y, xy, $\frac{-2x}{x+7}$

---

5)

1) Soit $A = -2x^2 + 10x$ Montrer que pour tout réel x $A \leq \frac{25}{2}$ (justifier)

2) Soit $o \leq x \leq 1$ comparer $\sqrt{x}$ et x (justifier clairement).

---

6) Sachant que $2 \leq x \leq 3$ encadre $2x + 5$, $-\frac{1}{2}x = 3$, $(5 - x)^2$

Sachant que $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ encadre $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{-3}{2x+3}$,

Sachant que $1 \leq x \leq 2$ encadre $\frac{3x+1}{x+5}$, $\frac{-3x+1}{x+3}$

---

7) Soient $a > o$ $b > o$ compare $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

Soient $x > o$ compare $A = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et $b = x + \frac{1}{2}$

---

8)

Soit $A = \frac{x}{4x^2 + 9}$ Montrer que pour tout réel $x > o$ $A < \frac{1}{4x}$

Soit $B = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$ Montrer que pour tout réel x $B \leq 3$

Soit $C = \frac{2x^2 + 5x + 3}{2x+1}$ Montrer que pour tout réel $x \geq 1$ $C \leq 5x$

---

9) Soit $x > 3$ Montrer que $\frac{2x-3}{1-x} \in]-2, \frac{-3}{2}[$

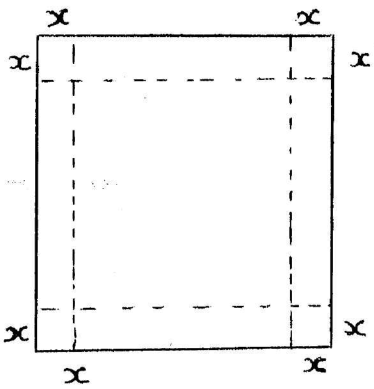
---

10) Sachant que $|a-1| \leq \frac{1}{2}$ et $|b-\frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$

encadrer a ; b ; a-b; $\frac{a}{b}$

FONCTIONS

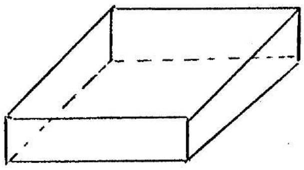
11)



On dispose d'une plaque carrée de 6 dm de côté.

A chaque coin on découpe un carré de x dm de côté.

On obtient alors le patron d'une boîte ouverte.

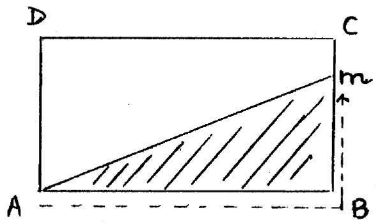


1) Calcule le volume V(x) de cette boîte en fonction de x
Pour quelles valeurs de x est-il défini ?

1) Représenter graphiquement la variation de V en fonction de x dans un repère orthogonal ($\vec{o}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unités : 4 cm sur $(O,\vec{i})$ 1 cm sur $(O,\vec{j})$)
Pour quelle valeur de x obtient-on un volume maximum ? Existe-t-il des boîtes ayant pour volume 8 dm3 (donne les valeurs de x correspondantes).

---

12)



ABCD rectangle. AB = 4 BC = 2 Un point m décrit le parcours ABCDA.
On désigne par x la longueur du trajet d'origine A, d'extrémité m et par f(x), l'aire du domaine hachuré.

a) Donner une expression de f(x), suivant les valeurs de x. Représenter graphiquement la variation de f en fonction de x.
b) A l'aide de ce graphique répondre aux questions suivantes : Existe-t-il une position de m telle que l'aire du domaine soit égale à 3 ? à 6 ?

---

13)

Place dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) les points A(1;6) B(3;-8) P(1;0) Q(3;0)

1) Soit M un point de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisse x

   1) Exprimer la somme f(x) des aires de triangle AMP et BMQ en fonction de x
   2) Exprimer f(x), suivant que $x \leq 1$, $1 \leq x \leq 3$, $x \leq 3$
   3) Représenter graphiquement cette fonction.

---

14)

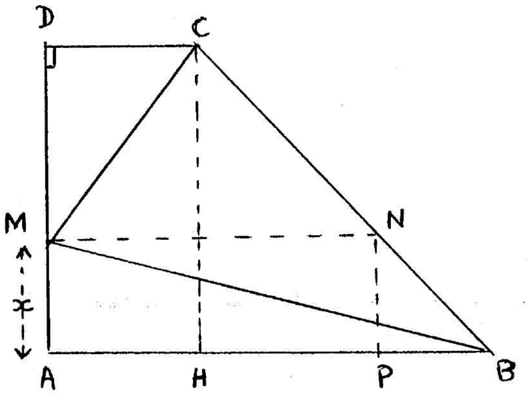
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $1 - x^2 \leq 0$

2) Soit la fonction f définie sur [-1,+1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et (C), sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o,i,j).

- Place quelques points de (C)
- Que remarquez-vous ? Démontrez-le.

---

15)



ABCD trapèze rectangle AB = 6

AD = 4 CD = 2

M ∈ [AD] on pose AM = x

1) Montrer que PB = x

2) Exprimer en fonction de x l'aire f(x) du rectangle AMNP

3) Soit g(x), l'aire du triangle CMB : montrer que g(x) = 12 - 2x

4) Représente les fonction f et g dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unités : 2 cm sur $(\overrightarrow{O,i})$ 1 cm sur $(0, \vec{j}$,] et en déduire la valeur de x pour laquelle ces 2 aires sont égales.

DEVOIRS

Devoir en classe n°1 **Durée : 2 h**

I) Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x - 5 + 2\,|x-3|$

1) Calculer $f(1 + \sqrt{2}$

2) Simplifier f(x) suivant les valeurs de x puis construire la courbe représentative (C), de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unités : 1 cm sur chaque axe]

3) Résoudre graphiquement $f(x) = 4$ $f(x) \geq 4$ (justifier)

4) Soit A (4;0) B (a;0) (a > 4) C et D les points de (C) d'abscisses respectives 4 et a. Calculer en fonction de a l'aire du trapèze ABCD.

II) Figure 1 (C) est la courbe représentative de la fonction f définie sur I = [-10,6[par

$$f(x) = \frac{16x-24}{x^2+4}$$

1) Vérifier <u>par le calcul</u> que pour tout réel x : $f(x) \leq 2$

2) Résoudre <u>graphiquement</u> dans I $f(x)) \leq 1$

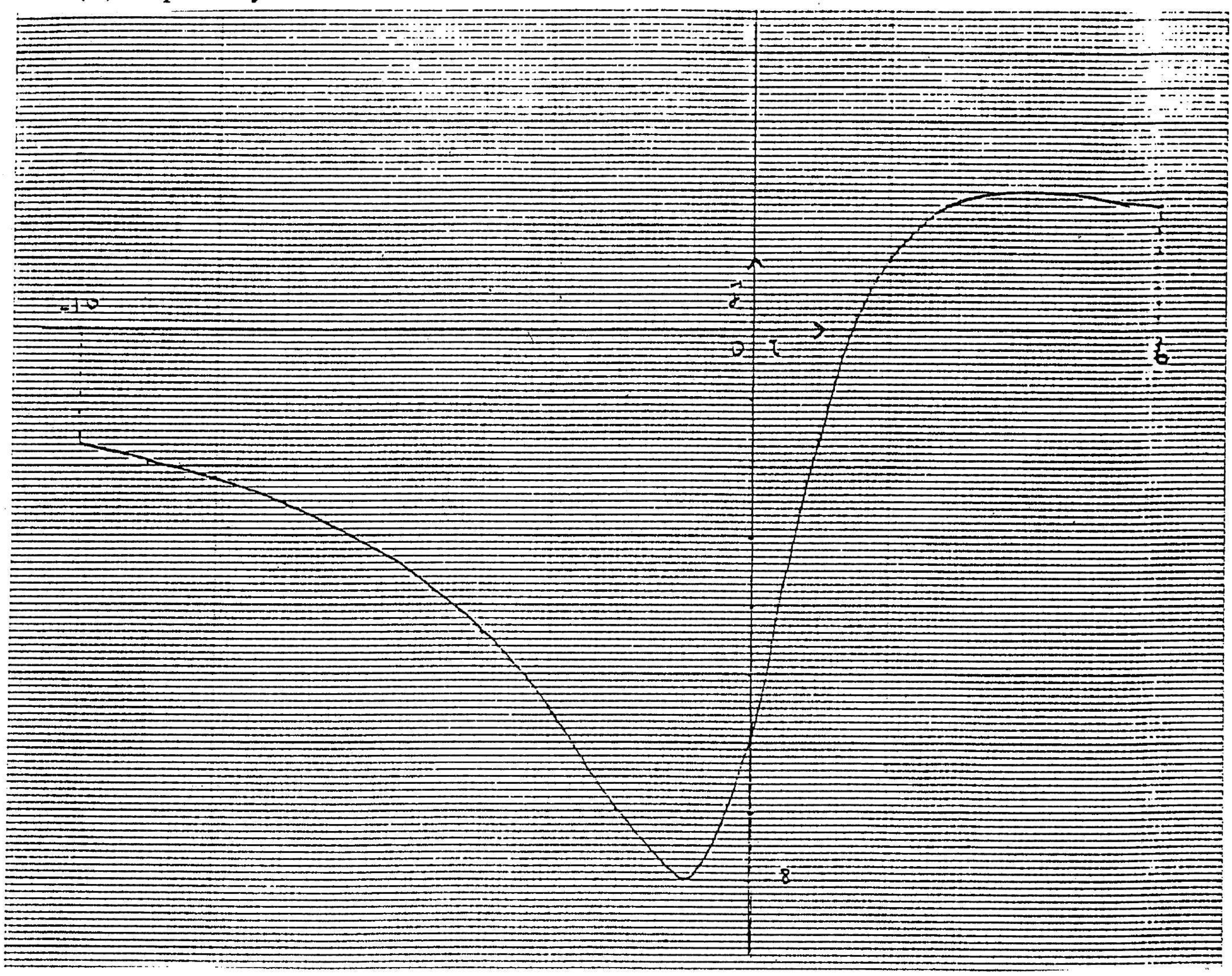
3) <u>A l'aide du graphique</u> compléter : $-6 \leq x \leq 6$ $\quad \leq f(x) \leq$

4) A,B,D sont 3 points de (C), d'abcisses respectives $-6, \frac{3}{2}, 6$

Donner leurs ordonnées. Montrer que ces 3 points sont alignés

- donner une équation de la droite (AB)
- résoudre <u>graphiquement</u> dans I : $f(x) \geq \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$ (justifier)

5) Déterminer par <u>le calcul</u> les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite (D) d'équation y = - 6.



Devoir en classe n°2 **Durée : 2 heures**

I)

1°) Résoudre dans R :

a) $\dfrac{x2 - 3x - 2}{x-1} \leq 2$

b- $|x-3| \geq 8$

2°) Sachant que $-3 \leq x \leq -2$ encadrer $\dfrac{-2x}{x+7}$

II) Soit f R $\rightarrow$ R

$x \rightarrow f(x) = 2\,|x-1| - x$

1°) Calculer $f(2-\sqrt{3})$

2°) Simplifier f(x) suivant les valeurs de x puis construire la suite représentative de f dans un repère (o,i,j)

3°) Résoudre graphiquement : f(x) = 5

III)

1°) Soit f : [0,8] $\rightarrow$ R

$x \rightarrow f(x) = -x^2 + 8x$

a) Etudier le sens de variation de f sur les intervalles I = [0,4] et J = [4,8]. En déduire le tableau de variations de f.

b) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

2°) Application : Un rectangle a un périmètre fixe de 16 cm.
déterminez ses dimensions pour que son aire soit maximum et donner cette aire.

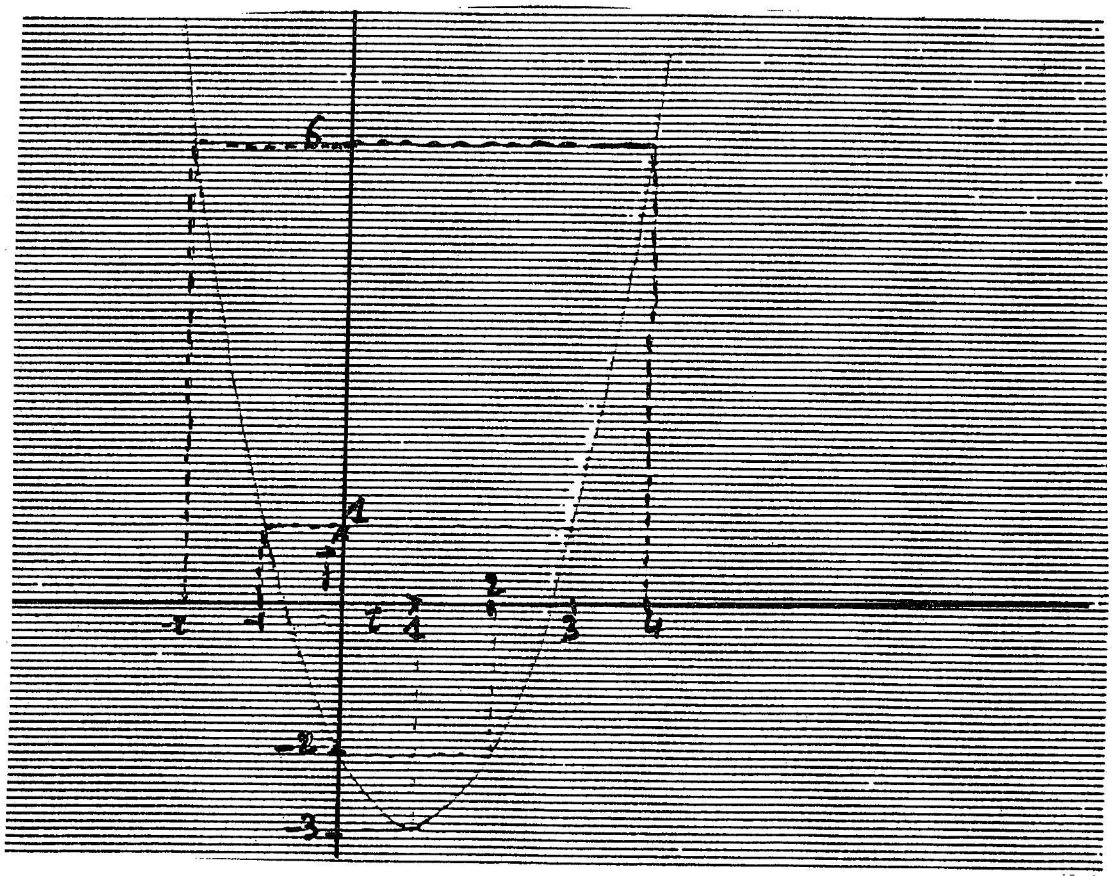
IV) On donne le tableau de variation d'une fonction définie sur l'intervalle [-5;5]

x	-5		-2		2		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Répondre alors par : vrai (v), faux (F), le tableau de variation ne permet pas de répondre (?)
aux affirmations suivantes :

$f(4) = -2$	$f(-3) < 4$	$-1 < f(1) < 4$
$f(O) = -3$	$f(-4) = 2$	$-1 < f(4{,}75) < 0$

V)



(C) est la courbe représentative de f $\left| \begin{array}{l} R \to R \\ x \to f(x) = x^2 - 2x - 2 \end{array} \right.$

Répondre <u>sans calculs</u>, en utilisant uniquement la courbe (C), aux questions suivantes :

a) Résoudre graphiquement : $f(x) = 1$

b) Résoudre graphiquement : $-2 \leq f(x) \leq 6$

c) Soit $x \in [0;3]$, donner un encadrement de $f(x)$

d) Résoudre graphiquement : $f(x) \geq x - 2$

Devoir à la maison n°1

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 0,5 cm comme unité)

1) Soit f la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + |x-4|$$

Simplifier f(x) en distinguant les cas nécessaires puis construire la représentation graphique de f.
Construire sur le même graphique l'ensemble des points M(x,y) tels que $y = \frac{9}{4}x$

2) Résoudre par le calcul l'équation $\frac{2}{3}x + |x-4| = \frac{9}{4}x$
puis résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{3}{2}x + |x-4| \leq \frac{9}{4}x$

3) On donne un triangle ABC tel que AB = 2, BC = 4, AC = 3
Un point M décrit la demi-droite d'origine B contenant le point C. On trace par M les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent (AC) en E et (AB) en D.

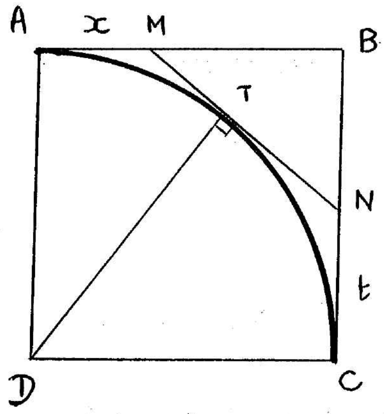
a) On pose BM = x. Construire 2 figures : 1ère figure $o < x < 4$
2ème figure $x \geq 4$

b) Pour chacune de ces figures calculer en fonction de x les longueurs MD et ME

c) Utiliser les résultats des questions précédentes pour déterminer les positions de M pour lesquelles le périmètre du parallélogramme MDAE est inférieur à celui du triangle BMD.

Devoir à la maison n°2

I)



Soit ABCD un carré de côté 1 et le cercle (C) de centre D et de rayon 1. A tout point M du segment [AB] distinct de B on associe le point N du segment [BC] tel que (MN) soit tangente à (C) en T. Lorsque M est en B on convient que le point N est en C.

Le but de ce problème est de préciser la position de M pour que la distance MN soit minimale. On pose AM = x CN = t

1) Montrer que $MN^2 = x^2 + t^2 - 2x - 2t + 2$

2) a)Montrer que MN = x+t; en déduire une autre expression de MN^2 en fonction de x et t

b) Montrer que x+t = 1 - xt ; en déduire t en fonction de x puis établir que $MN = \frac{x^2+1}{x+1}$, on pose f(x) = MN

3) Calculer les valeurs de f(x) pour x variant de 0 à 1 avec un pas de 0,1

- tracer la courbe de f dans un repère orthonormal (unités 10 cm)
- déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de la valeur x_o pour laquelle MN est minimale.

Le but de cette question est de vérifier que $x_o = \sqrt{2} - 1$

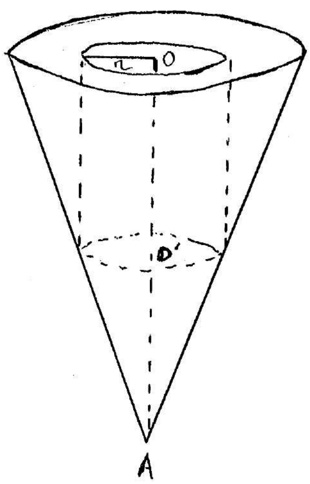
a) Calculer $f(x_o)$

b) Montrer que $f(x) - f(x_o) = \frac{[x + (1-\sqrt{2})]^2}{1+x}$ Etudier son signe pour $o \leq x \leq 1$

Interpréter ce résultat.

(D'après A.P.M.E.P. : un outil pour des changements)

II)



Cône : h = 15 cm R = 8 cm

Cylindre : rayon r Volume V

1) Dessiner une coupe de ce solide par un plan contenant l'axe (00')

2) Exprimer AO' puis OO' en fonction de r

3) Exprimer V en fonction de r

4) Construire la courbe représentative de V en fonction de r

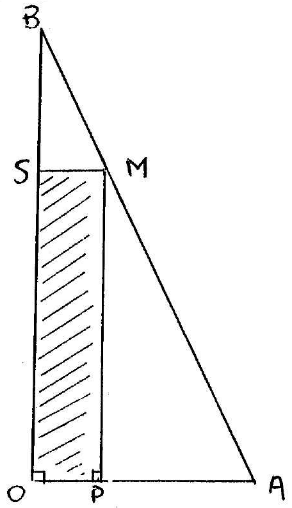
5) Déterminer r à 1 mm près pour avoir V maximum

TRAVAUX PRATIQUES

T.P.1 - FONCTIONS

Une première situation d'introduction

On donne



OA = 3

OB = 6

P variable sur [OA] (l'unité étant le centimètre).On pose OP = x et l'on désigne par A(x) l'aire du rectangle OPMS

1) Quelles sont les valeurs de x acceptables ?

2) Montrer que $A(x) = -2x^2 + 6x$

3) Représenter graphiquement la variation de A(x) en fonction de x dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on prendra $\| x \| = 3$ et $\| j \| = 2$

l'unité étant le cm

Quelles observations le graphique permet-il de faire sur la façon dont cette aire varie ?

4) a) Déduire en particulier de l'observation précédente la position du point P pour laquelle cette aire est maximum.

b) Vérifier par le calcul que l'on a $A(x) \leq \frac{9}{2}$ quelle que soit la posiiton du point P.

5) a) Soit I le milieu de [OA]

Vérifier que $A(x) = \frac{9}{2} - 2\ IP^2$ Retrouver alors les résultats précédents

b) Montrer que cette égalité permet de justifier une propriété du graphique que vous avez dû observer lors de votre première analyse.

6) Utiliser le graphique pour déterminer les positions du point P pour laquelle on a :

a) A(x) = 4 ?

b) A(x) = 2 ?

Dans ce second cas on utilisera une calculatrice programmable pour donner la position de P à 0,01 cm près par défaut.

7) On se propose de retrouver géométriquement la position de P pour laquelle A(x) est maximale et l'on trace pour cela la médiane (0 Ω du triangle OAB. Elle coupe dans le cas de figure ci-dessus [MP] en P'.

Montrer que A(x) est aussi d'aire de OP'MB et conclure.

Etudier de même le cas où (O Ω) coupe [MS].

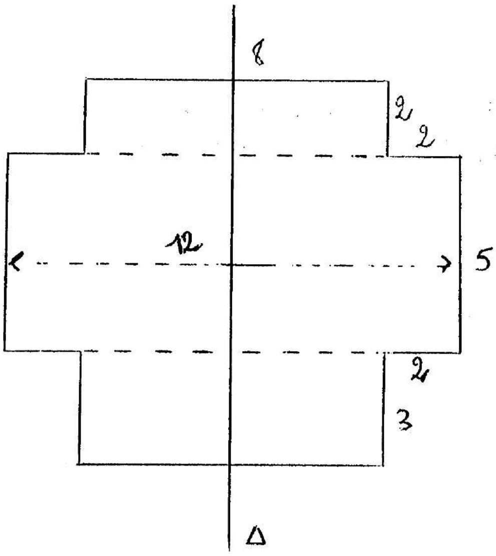


figure 1

Une cuve est composée de 3 parallélépipèdes rectangles à base carrée, de même axe, superposés. La figure 1 qui est une vue en coupe par un plan frontal contenant l'axe de ce solide donne les dimensions (en m).

1) <u>Donner une représentation en perspective cavalière</u> de ce solide en respectant le début de la figure 2 que l'on commencera par reproduire.

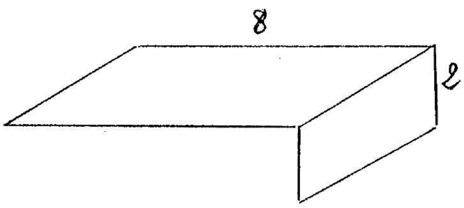


figure 2

2) a) <u>Calculer le volume d'eau</u> contenu dans la cuve lorsque la hauteur d'eau est : 1 m, 3 m, 6 m, 8 m, 9m.

b) <u>Calculer la hauteur d'eau</u> lorsque la cuve contient 600 m^3, 800m^3, 1000 m^3.

3) <u>Calculer le volume d'eau V</u> contenu dans la cuve en fonction de la hauteur h et vérifie les résultats précédents.

4) <u>Représenter graphiquement V en fonction de h</u>

On prendra : pour h : 1 cm correspond à 1 m
pour V : 1 cm correspond à 50 m^3

5) <u>On veut construire une jauge</u> pour cette cuve

Construire cette jauge à l'aide du graphique précédent. Pour cela on représentera la jauge verticale par un segment de 10 cm et l'on graduera tous les 100 m^3.

<u>FONCTIONS</u> : T.P.3

Soit la fonction f définie par $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x}$ pour $x \in \,]0, +\infty[$ et (C) sa représentation graphique ci-jointe. (figure 1).

1°) a) Etant donné deux réels a et b strictement positifs, $a < b$, montrer que $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot \frac{ab-4}{ab}$

b) Déduire de l'égalité précédente le sens de variation de f sur $I =]0,2]$ et sur $J =]2, +\infty[$

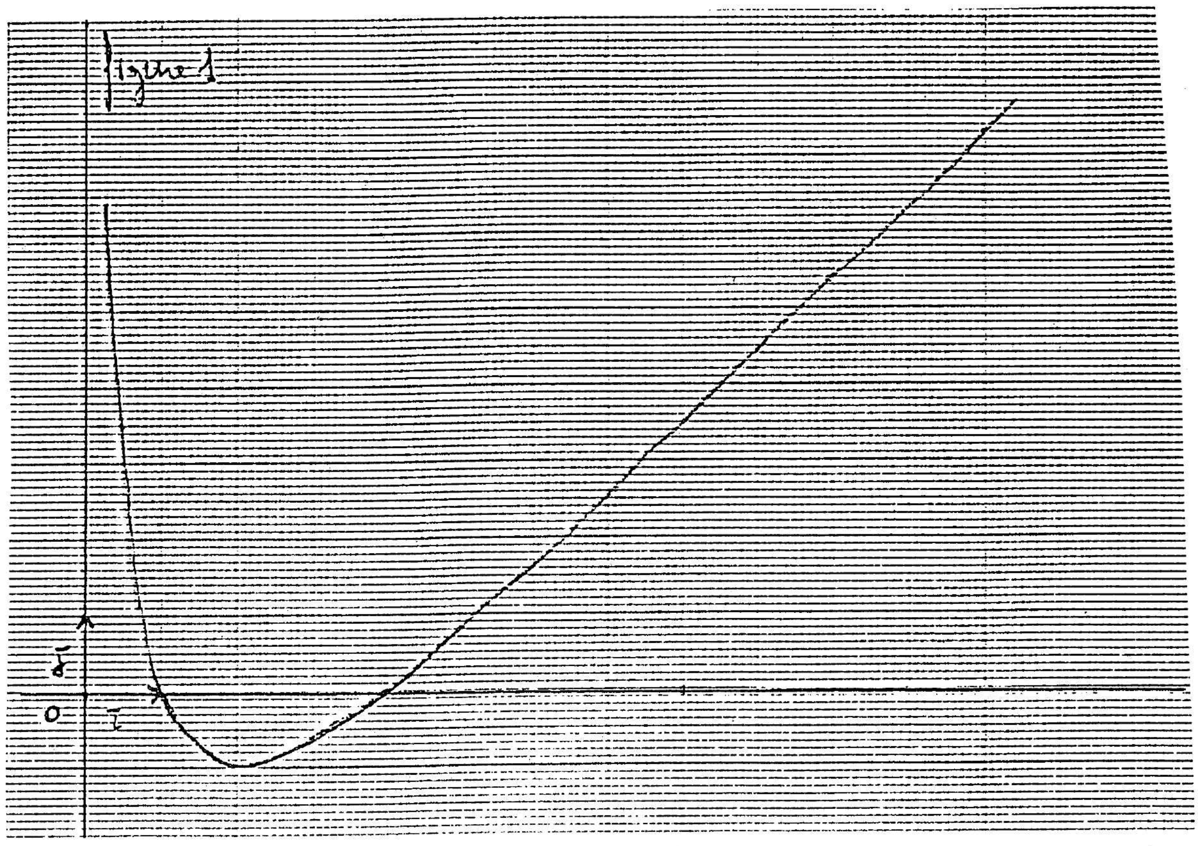
2°) a) Tracer dans le repère ci-joint la droite (D) d'équation $y = x - 5$

b) Etant donné un point M d'abcisse x ($x \leq 5$) sur la courbe (C) et P le point de même abcisse x sur (D) calculer la longueur PM en fonction de x.

A partir de quelle valeur de x a-t-on $PM \leq 0,2$?

3°) a) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 0$

b) Tracer toujours dans le repère ci-joint la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}(x-1)$ puis résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < \frac{1}{2}(x-1)$



GEOMETRIE DANS L'ESPACE

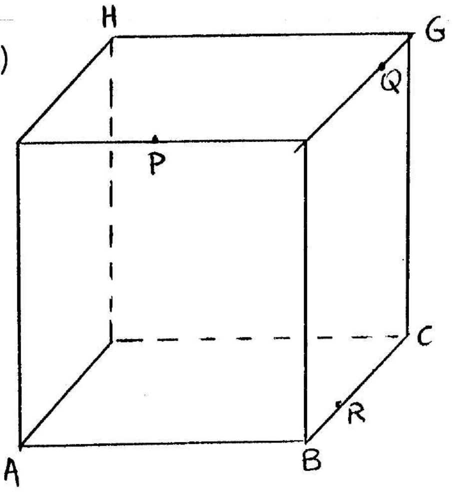
SOMMAIRE

Construction de sections	ex n°1 à 7
Des démonstrations dans l'espace	ex nos 8 à 11
Des calculs dans l'espace	ex nos 12 à 16

TP 1	Géométrie dans l'espace et fonctions
TP 2	Des calculs dans l'espace
TP 3	Etude de pyramides
TP 4	

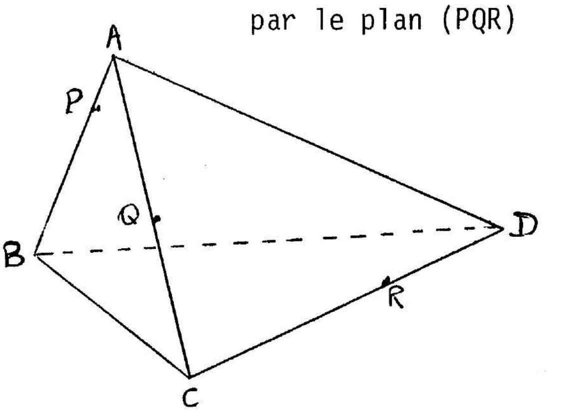
EXERCICES

1)

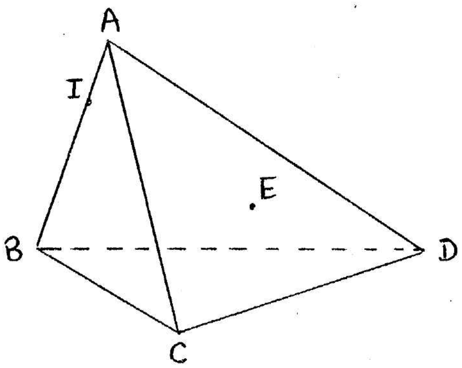


Dessiner la section du cube par le plan (PQR)

2) Construire la section du tétraèdre par le plan (PQR)

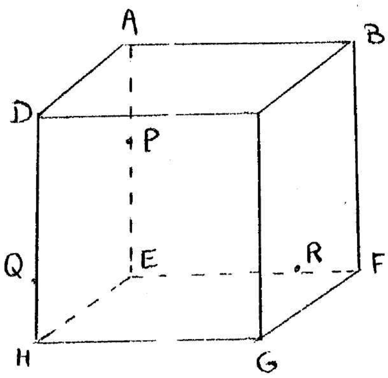


3)



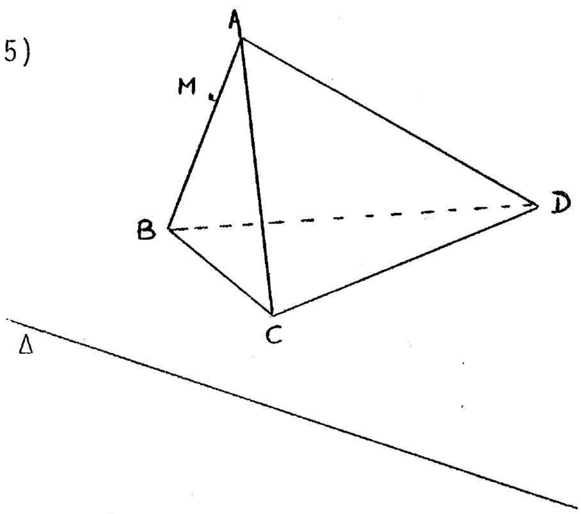
I (AB) E sur la face ACD
Construire l'intersection de lavdroite (IE) avec le plan (BCD)

4)



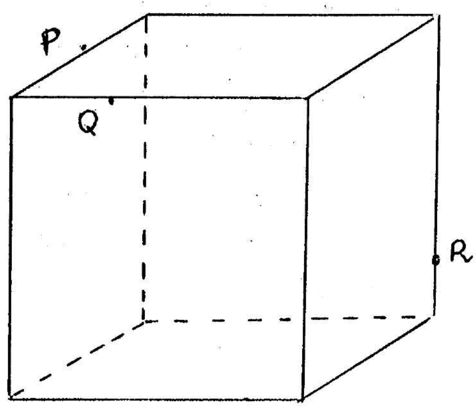
Construire la section du cube par le plan P(R

5)



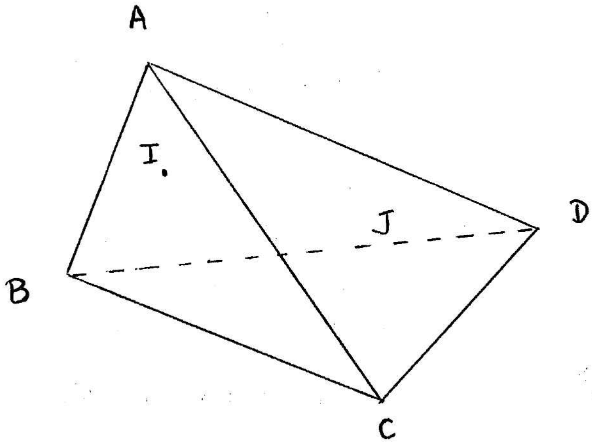
Construire la section du tétraèdre par le plan P(M,δ)
(Δ ⊂ (BCD)

6)



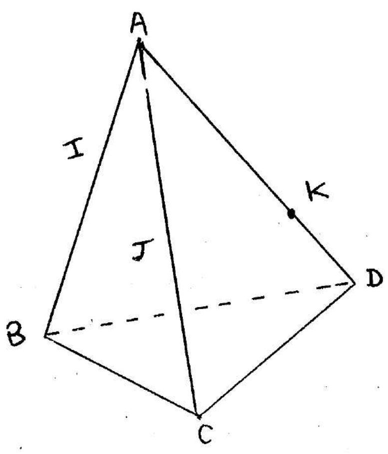
Tracer la section du cube par le plan PQR

7)



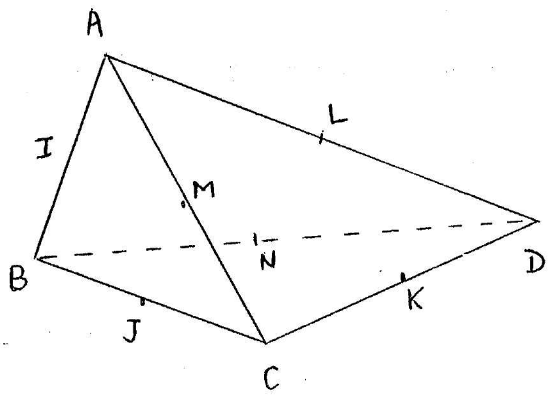
I ∈ ABC
J ∈ ACD
Construire l'intersection de (IJ, avec le plan BCD)

8)



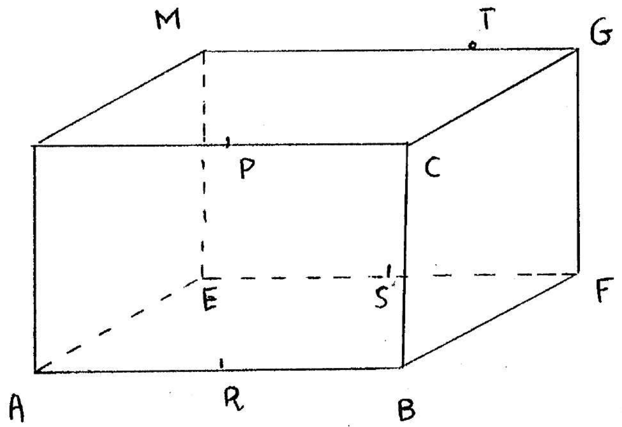
Soit P = (BCD)
(IJ) coupe P en M
(IK) coupe P en L
(JK) coupe P en N
Expliquer pourquoi M,L,N sont alignés

9)



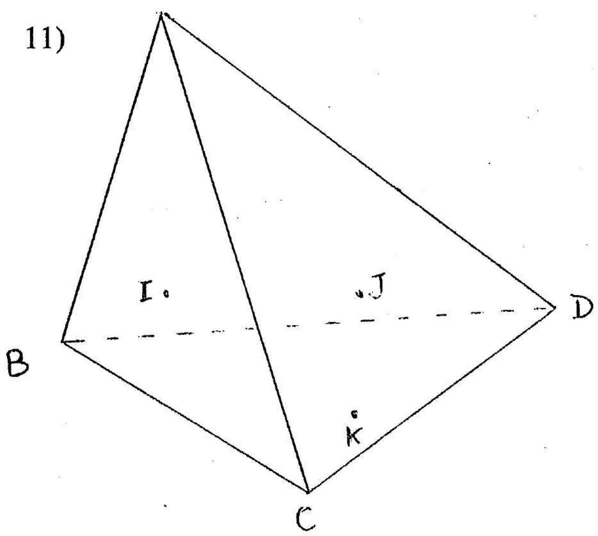
Soit ABCD un tétraèdre
I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [AD] [AC], [BD]
Montrer que les 3 droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en un point 0.

10)



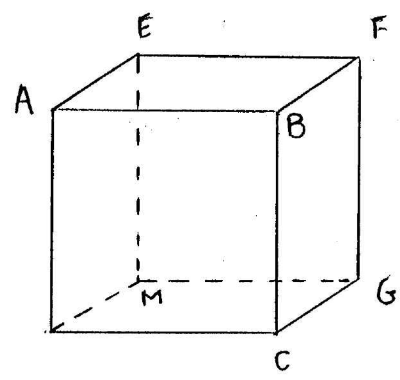
(ABCDEFGH) parallélépipède rectangle
P milieu de [DC]
R milieu de [AB]
S milieu de [EF]
T tel que HT $= \frac{3}{4}$ HG
les droites (PS, et (RT, sont elles coucourantes ?

11)



Les points I et J sont les centres de gravité des faces ABC et ACD.
Le point K est élément de la face BCD
1) Montrer que la droite (I,J) est parallèle au plan (BCD)
2) Tracer la section du tétraèdre par le plan (IJK)

12)

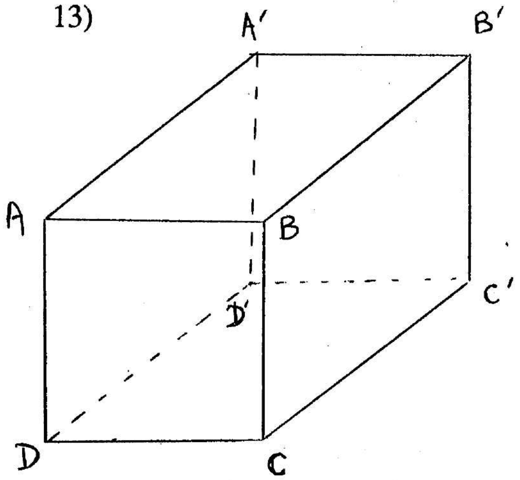


ABCDE : cube de côté a

1) Calculer en fonction de a la longueur de la diagonale [AG]

2) Donner une valeur approchée en degrés de $\widehat{CAG}$, $\widehat{BAG}$

13)

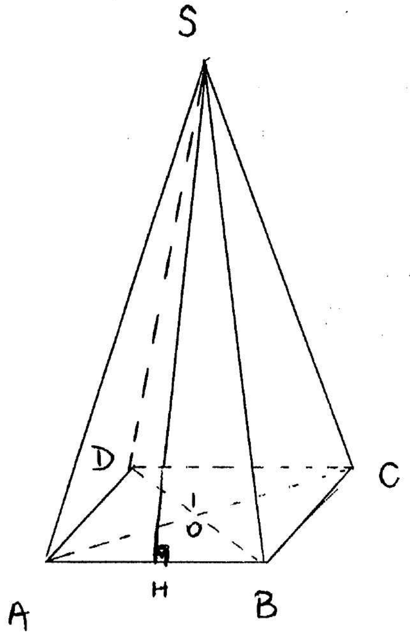


AB = AD = a

$\widehat{CAC} = 45°$

Calculer CC', AC', $\widehat{C'AB}$, $\widehat{C'AD}$, $\widehat{C'AA'}$

14)



Une pyramide régulière SABCD a pour base un carré ABCD de côté <u>a</u>. Soit O le centre du carré. On suppose que SO = 2a

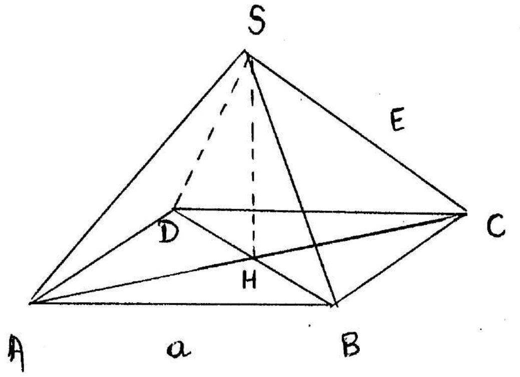
1) Calculer SA et SH

2) Calculer l'aire de cette pyramide

3) Soit I le milieu de [SA] dessine la section de la pyramide par le plan (BIC)

4) Calculer les longueurs des côtés de cette section puis l'aire de cette section.

15)

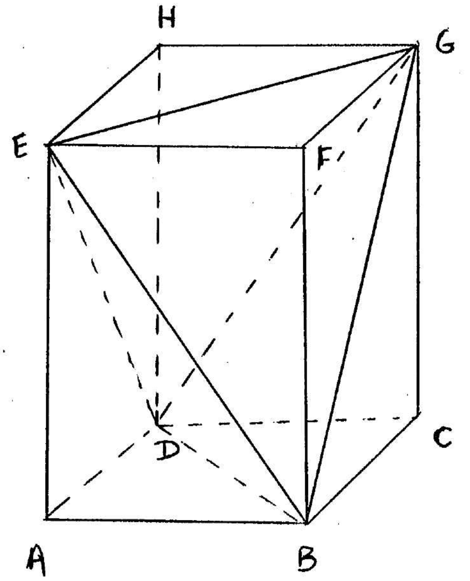


SABCD pyramide régulière,
ABCD carré de côté a
SAB, SBC, SDC, SAD triangles équilatéraux

1) Calculer l'aire de cette pyramide

2) Soit E milieu de [SC]
Calculer en degrés $\widehat{DEB}$

16)



ABCDEFGH est un prisme droit tel que
AB = AD = 6 AE = 8
Soit T le tétraèdre EDBG

1) Calculer la longueur de chacune des arêtes de ce tétraèdre.
Quelle particularité présente chaque face ?

2) Calculer le volume du prisme droit et des tétraèdres EABD, BE FG, GDCB, DEGH.

3) En déduire le volume du tétraèdre T et vérifier que ce volume est le tiers de celui du prisme droit.

4) Démontrer que la distance du sommet E à la face DBG est égale à $\frac{48\sqrt{41}}{41}$

TRAVAUX PRATIQUES

TP 1 - Géométrie dans l'espace et fonctions

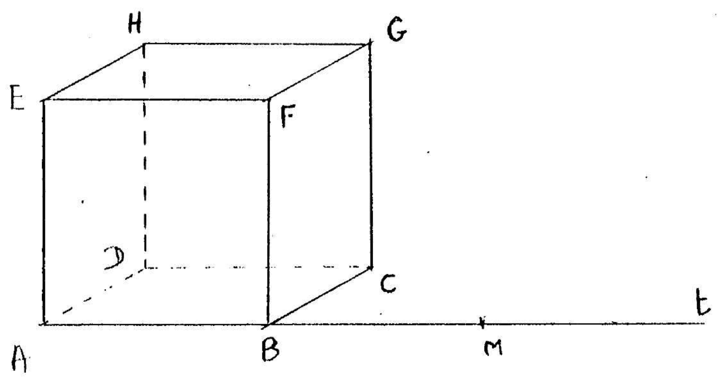
I) Dans un plan P on donne un triangle rectangle isocèle AOB avec OA = OB = 4.

Un point M variable du segment [AB] se projette orthogonalement en H sur [OA] et en K sur [OB]. On pose OH = x.

Sur la perpendiculaire en O au plan du triangle on prend un point S tel que OS = 3 et on considère la pyramide SOHMK.

1) Montrer que les faces latérales de cette pyramide sont des triangles rectangles
2) Calculer en fonction de x le volume de la pyramide
3) Représenter graphiquement les variations de ce volume pour $x \in [0,4]$
4) Comment choisir M sur le segment [AB] pour que le volume soit égal à 3.

II)



ABCDEFGH : cube droit. L'arête mesure 5 cm

$M \in [Bt)$

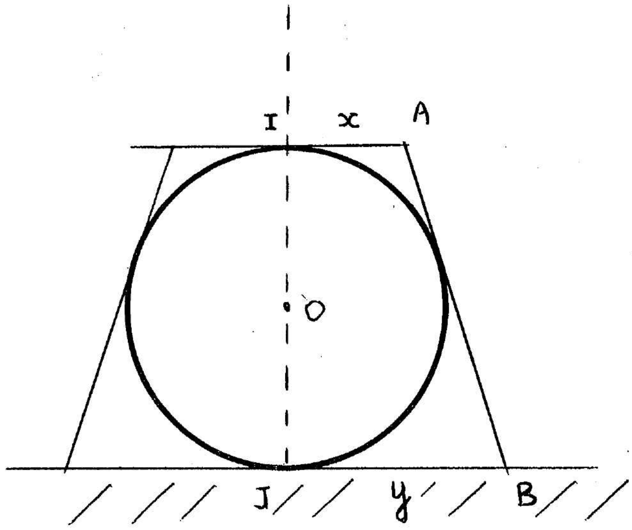
1) Construire le point d'intersection N de (MH) avec le plan (BCG)

2) On pose BM = x ($x \geq 0$) et BN = f(x). Montrer que $f(x) = \dfrac{5x\sqrt{2}}{x+5}$

3) Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$ $\quad f(x) < 5\sqrt{2}$

4) Représenter la fonction f sur $[0,+\infty[$

T.P. 2



Un verre, assimilé à un tronc de cône est retourné sur une balle posée sur une table. La balle est tangente au fond du verre et à la surface latérale.

(Voir coupe par un plan contenant l'axe (IJ)

x et y sont les rayons de chacune des bases

O centre de la balle

1) Calculer la longueur de la génératrice AB en fonction de x et y

2) Expliquer pourquoi (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

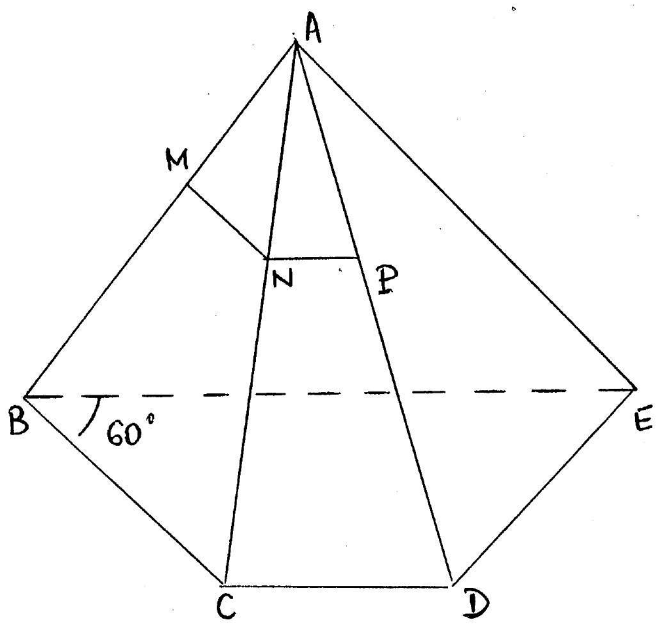
Montrer que le rayon de la sphère est égal à $\sqrt{xy}$

3) Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (IJ).

Calculer EA et EB en fonction de x et de y.

4) Evaluer l'aire latérale de ce tronc de cône en fonction de x et de y.

T.P. 3



Soit la pyramide de ABCDE

BC = ED = 4, BE // CD, BE = 9

EBC = 60°, AM = x , AB = 10

MN // BC et NP // CD

1°) a) Déterminer l'intersection Δ des plans ABC et ADE

b) Déterminer l'intersection Δ' des plans ABE et ACD

2°) Soit P le plan passant par M,N,P. Il coupe AE en Q

a) Montrer que PQ est parallèle à DE.

b) Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ ?

3°) Montrer que MN et PQ se coupent sur Δ.

4°) Quelle transformation permet d'associer (B,C,D,E) et (M,N,P,Q)

- Calculer A l'aire de BCDE (on calculera CD)
- Si A' est l'aire de MNPQ exprimer $\frac{A'}{A}$ en fonction de x
- Exprimer A' en fonction de x

5°) Calculer x pour que $A' = \frac{1}{2} A$

TP 4

L'unité de longueur choisie est le centimètre.
Dans un plan (P) on considère un carré dont le côté mesure 4.
Sur la perpendiculaire en A au plan (P) on prend le point S tel que AS = $4\sqrt{2}$
Soit M un point quelconque du segment [SC], il se projetteen N sur le plan (P).
On appelle R la projection orthogonale du point N sur la droite (AD).

1°) Faire une figure

2°) Démontrer que le point N est sur le segment [AC]

3°) Démontrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (MNR). En déduire la position relative des droites (AD) et (RM).

4°) On pose CM = x

a) Compléter .... $\leq x \leq$ ....

b) Calculer MN et NR en fonction de x

c) En déduire MR en fonction de x

5°) Représenter graphiquement MR en fonction de x

a) En utilisant cette représentation graphique, trouver un encadrement le plus précis possible de la valeur de x qui rend MR minimale.

6°)

a) Montrer que MR $= \frac{3}{4}\ (x - \frac{8}{3})^2 + \frac{32}{3}$

b) Retrouver ainsi la valeur de x qui rend MR minimale.

c) Démontrer que, par cette valeurde r, les droites (MR) et (SC) sont perpendiculaires.

SYSTEMES D'EQUATIONS
SYSTEMES D'INEQUATIONS
GEOMETRIE ANALYTIQUE

SOMMAIRE

Pour démontrer avec un repère	ex n^{os} 3, 6
Equations de droites	ex n^{os} 1, 2, 4, 7
systèmes d'inéquations à 2 inconnues	ex. n°5
Systèmes d'équations	n^{os} 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

Dessin en classe (2 h)

Thèmes :
- géométrie analytique
- équations de droites
- utilisation d'un repère pour démontrer

Devoir maison

Thèmes :

1 symétrie orthogonale en analytique

1 graphique pour étudier une situation concrète

1 repère pour démontrer.

TP 1 : Retrouver un repère

TP 2 : Programmation linéaire.

EXERCICES

I) Construire dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ les droites D d'équation $y = 3x + 2$ et Δ d'équation
$x + 2y - 1 = 0$.

Déterminer l'équation de la droite Δ' passant, par A(-1,4) et parallèle à Δ. En déduire les coordonnées de $\{H\} = D \cap \Delta'$ puis celles de A' symétrique de A par rapport à H.

II) Dans le plan (P) muni d'un repère (o, i, j) on donne :

A(2,0), B(0,2) , I(1,0), J(0,1), M tel que $3\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Construire M, déterminer ses coordonnées.

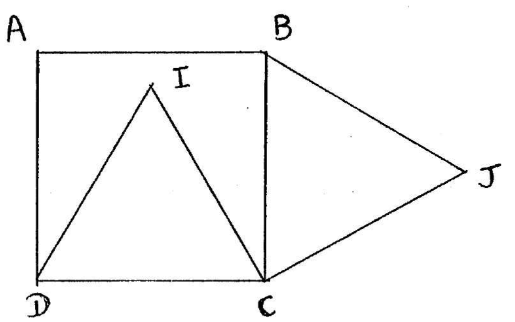
Soit A' le symétrique de M par rapport à J, B' le symétrique de M par rapport à I et M' le symétrique de M par rapport à K milieude [AB].

1) Donner une équation cartésienne des droites (OM'), (AA'), (BB').

2) montrer que ces trois droites sont concourantes.

"Un classique"

III)



ABCD est un carré

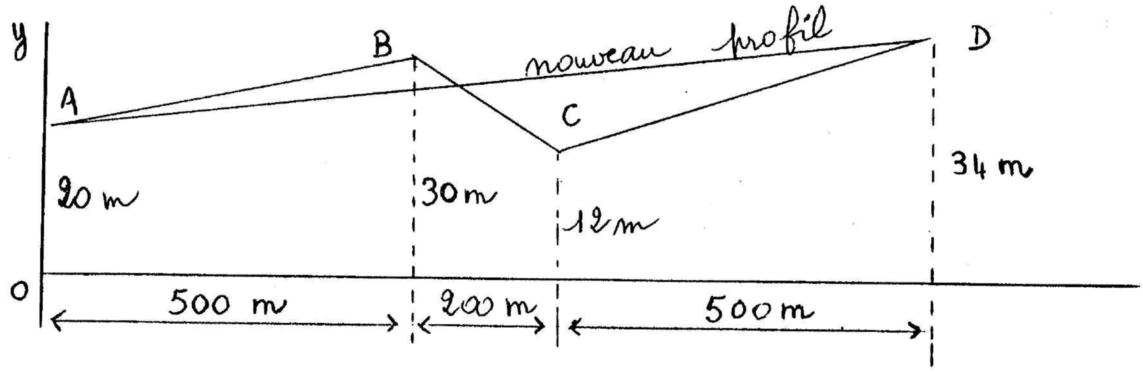
DIC et CJB sont des triangles équilatéraux

1) Montrer que A, I,J sont alignés

<u>1ère méthode</u> : Dans le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ donner les coordonnées de A, I, J. Montrer que A,I,J sont alignés.

<u>2ème méthode</u> : calculer la mesure de $\widehat{AIJ}$. Conclusion.

IV) La figure ci-dessous représente en coupe un tronçon de route ABCD. On a redressé ce tronçon suivant le nouveau profil en pente régulière de A à D. Dans un repère orthogonal (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'axes ox et oy on a porté en abscisses les distances et les ordonnées des altitudes.



1°) Donner sous forme de "pourcentage" les pentes des tronçons AB, BC, CD. C'est à dire les coefficients directeurs des droites (AB) (BC) et (CD).

2°) Trouvez : a) le point du nouveau profil qui n'a pas changé d'altitude en précisant son abcisse.

b) La perte d'altitude en B et le gain d'altitude en C.

V) Un wagon de marchandises peut transporter au maximum 30 containers. La charge maximum de ce wagon est de 42 tonnes. Les containers d'un objet A pèsent chacun 0,6 tonne; ceux d'un objet B 3 tonnes.

On souhaite expédier au moins 15 containers de l'objet A et 8 de l'objet B.

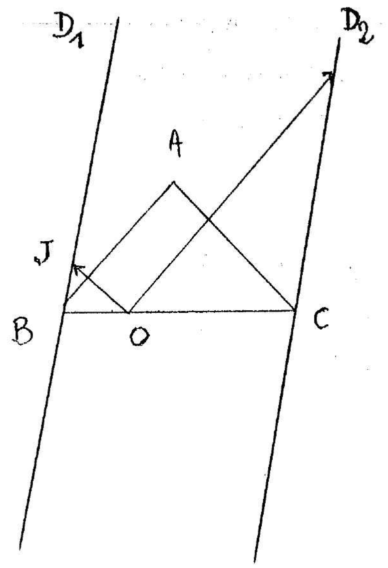
On désigne par x le nombre de containers de l'objet A et par y le nombre de containers de l'objet B qu'il est possible d'expédier.

Traduire par des inégalités faisant intervenir x et y les "contraintes" de l'expédition.

Représenter dans un repère orthonormal (o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) ces inégalités (on prendra 1 cm pour 2 unités sur chaque axe).

A l'aide du graphique déduire pour x = 20 les valeurs possibles de y.

VI)



ABC triangle quelconque

$\Delta 1 \,//\, \Delta 2$ $O \in [BC]$

$(OI) \,//\, (AB)$ $(OJ) \,//\, (AC)$

(On choisit le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

où

$\vec{i} = \vec{OI}$

$\vec{j} = \vec{OJ}$

1°) On désigne par m le coefficient directeur des droites $\Delta 1$ et $\Delta 2$ et par n le coefficient directeur de (BC)

Déterminer les équations réduites de : (BJ), (BC) et (CI),

2°) Déterminer les coordonnées de B et C. En déduire celles de A.

Montrer que A, I,J sont alignés.

VII) Dans le plan P, muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A\binom{1}{2}$ $B\binom{3}{3}$ $C\binom{-2}{0}$ $D\binom{0}{2}$

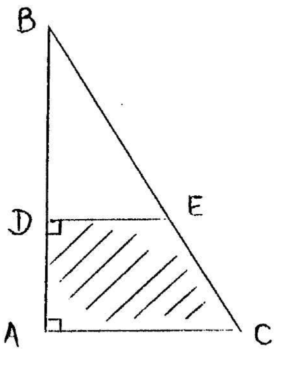
1) Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont non colinéaires

2) Soit M le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Trouver par le calcul des coordonnées x et y du point M (traduire la colinéarité des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ d'une part, $\vec{CM}$ et $\vec{CD}$ d'autre part).

VIII) Deux nombres entiers ont pour différence 15. Si on ajoute 4 à chacun d'eux leur produit augmente de 156. Trouvez ces 2 nombres.

Un capital de 10 000 F est partagé en 2 parties. La première partie est placée à 10%, la seconde à 12%. L'intérêt total annuel est le même que si tout le capital avait été placé à 10,4%. Calculer la valeur de chaque partie du capital.

9)



$AB = 50$ $AD = 20$

Aire du trapère ADEC = 320

Calculer les longueurs des bases du trapèze

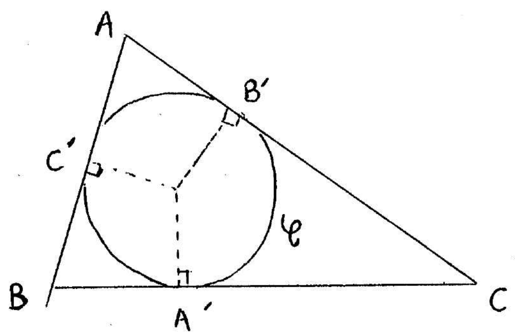
10) Si on augmente la longueur d'un rectangle de 7m et si on diminue la largeur de 5m, l'aire est inchangée. Si on augmente la longueur de 20m et si on diminue la largeur de 13m l'aire augmente de $20m^2$. Déterminez les dimensions du rectangle.

Résoudre les systèmes suivants :

11) $\begin{cases} \dfrac{a+2}{1+b} = -1 \\ \dfrac{4a+2}{b+4} = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -3x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{9}{2} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x - 4z = -10 \\ 4y + 5z = 8 \end{cases}$

12) Déterminer 3 nombres x,y,z proportionnels à 3,4,5 tels que $3x + 2y = 34$

13)



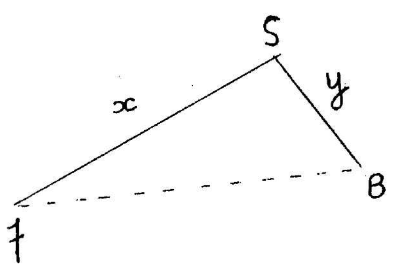
(C) : cercle inscrit dans le triangle ABC

BC = 5,5 cm

AC = 5 cm Calculer AB', BC',CA'

Ab = 3,3 cm

14)



Pour aller de A à B il faut passer par le col S Une voiture met 16 mn pour se rendre de A à B et 14 mn pour revenir de B en A. Sachant que la vitesse moyenne est en montée de 50 km/h et en descente de 75 km/h déterminer les distances des villes A et B du sommet du col.

DEVOIRS

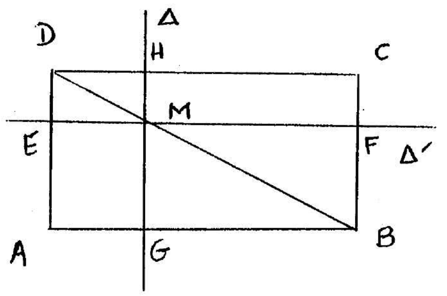
Devoir en classe **Durée : 2 h**

I)

Dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

1) Donner une équation de la droite (BC)
2) Donner une équation de la hauteur Δ issue du point A dans le triangle ABC
3) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (Δ) et (BC)
4) Calculer la distance AH
5) Donner une équation de la médiatrice de [BC]

II)



ABCD rectangle M ∈ [BD]

Δ // (AD) Δ' // (AB) Δ et Δ' passant par M

1) Démontrer géométriquement (c'est à dire sans utiliser de repère) que (EH) // (AC) // (GF)

2) On choisit le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$

- donne une équation de la droite (BD)
- On suppose que M a pour abcisse a; donner son ordonnée en fonction de a
- Donner les coordonnées des points E, F, G, H puis en déduire le parallélisme des droites (EH), (AC), (GF)

III) Soit un carré ABCD de centre O. Soit E le symétrique de O par rapport à D, K le symétrique de C par rapport à B, I le centre de gravité du triangle ABD.

1) Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ déterminer les coordonnées des points E,K,I;
2) La droite (EI) coupe (AB) en Q; la droite (EC) coupe (AD) en P.

Démontrer que les points K,P,Q sont alignés.

IV) Dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on donne un cercle (C) passant par $A\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et tangent en $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ à la droite D d'équation $2x + y - 3 = 0$.

1) Faire la figure en indiquant la construction du centre Ω du cercle
2) Déterminer par le calcul les coordonnées du centre Ω de ce cercle.

Devoir à la maison

I) Dans un repère orthonormal (o,i,j), on donne la droite (D, d'équation $x - 2y + 3 = 0$;
Soit M $\binom{a}{b}$ un point quelconque du plan. Déterminer en fonction de a et b les coordonnées a' et b' du point M' transformé de M dans la symétrie orthogonale d'axe D.

II) Trois hôteliers se font concurrence. Voici leurs tarifs par personne :

* l'hôtelier H_1 demande 300 F par jour tout compris.
* l'hôtelier H_2 demande 150 F par jour plus un supplément fixe de 450 F.
* l'hôtelier H_3 demande 75 F par jour plus un supplément fixe de 1050 F.

1°) Pour une location de x jours on doit payer y_1 francs chez H_1, y_2 francs chez H_2 et y_3 francs chez H_3. Calculer y_1, y_2, y_3 en fonction de x.

2°) Tracer dans un même repère orthogonal les droites D_1, D_2, D_3 d'équations respectives $y = y_1$; $y = y_2$; $y = y_3$ (On prendra 1 cm pour 1 jour et 1 cm pour 300 F).

3°) En utilisant le graphique déterminez selon la valeur de x quel est l'hôtelier présentant les conditions les plus avantageuses.

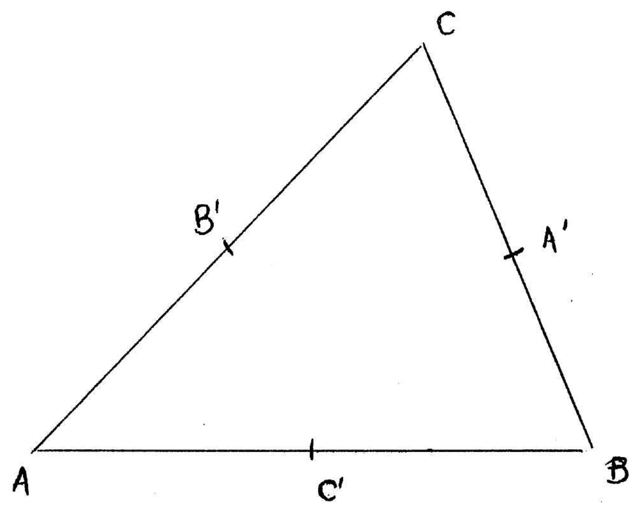
III)

OABC est un carré
ODEF est un rectangle
OD = OA   OF = 2 0A

En utilisant le repère $(O, \vec{OI}, \vec{OD})$
Montrer que les droites (AD) (BE) et (CF) sont coucourantes.

TRAVAUX PRATIQUES

T.P. 1



Le triangle ABC ci-dessus est dessiné dans un repère (O, $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$) qu'il s'agit de construire.

Sont donnés A $\binom{2}{3}$, B $\binom{-2}{-1}$ C $\binom{6}{-5}$ et les milieux A', B', C' respectivement des côtés [BC], [AC], et [AB];

1°) Déterminer les coordonnées des points A', B' et C'.

2°) Ecrire une équation cartésienne de la droite (AA')

3°) Ecrire une équation cartésienne de la droite (BB')

4°) Construire sur la figure le repère (O, $\vec{OI}$, $\vec{OJ}$), c'est à dire les points O, I et J.

(d'après IREM de DIJON)

T.P. 2

On veut organiser un pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types : 12 du type A et 9 du type B.
Un avion "A" peut transporter au maximum 200 personnes et 6 tonnes de bagages
Un avion "B" peut transporter au maximum 100 personnes et 15 tonnes de bagages.
Soit x le nombre d'avions A et y le nombre d'avions B utilisés.

1) Exprimer à l'aide d'inégalités faisant intervenir x et y toutes les conditions pour que ce transport soit réalisable.

2) Représenter dans un plan P muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ le système d'inégalité obtenu. [unités : [1 cm sur chaque axe]
Faire apparaître les différentes possibilités (couples d'entiers solution du système).
Le transport est-il réalisable avec 9 avions A et 6 avions B ? 7 avions A et 3 avions B ?

3) La location d'un avion A coute 4 millions de F, celle d'un avion B 1 million de F.

a) - Exprimer en fonction de x et y la dépense k occasionnée

b) - Déterminer graphiquement les couples (x,y) qui correspondent à une dizaine de

(1) 44 millions (2) 32 millions (3) 16 millions (4) 8 millions

4) Plus généralement à chaque valeur de k correspond une droite

- que constatez-vous (pourquoi ?)

- Où lisez-vous sur le graphique la dépense k occasionnée par la location de x avion A et y avion B ?

- Utilisez ce qui précède pour trouver graphiquement le nombre d'avions de chaque type pour que la dépense soit minimale. Quel est alors le coût d'une telle opération ?

VECTEURS

SOMMAIRE

Thème : Utilisation du calcul vectoriel pour la colinéarité et l'alignement des points.
Ex : n^{os} 1 à 17

Devoir en classe (2 h)

Thèmes :
- résolution d'inéquations
- géométrie et inéquations
- constructions et calcul vectoriel

Devoir maison :
- calcul vectoriel
- points alignés

TP 1
TP 2
3 outils pour résoudre le même problème.

EXERCICES

Exercice 1 : Soit un triangle ABC. I le milieu de [AC]. Construire les points D et F tels que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$

Démontrer que $\overrightarrow{DF} = 4\overrightarrow{BI}$

Exercice 2 :

ABCD est un parallélogramme.

M et N sont les points définis par $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MD} = 0$ et $8\,\overrightarrow{NB} - 5\,\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$

1°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$, puis, $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. En déduire la construction des points M et N.

2°) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3°) Soit I le milieu du segment [MN]. En utilisant les résultats précédents exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4°) Soit E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AI}$

Comparer $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 :

ABCD est un rectangle.

Construire les points E, F et G définis par :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} - 2\,\overrightarrow{CB}$

Exercice 4 :

ABCD est un parallélogramme

1°) Construire les points E et F définis par : $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overline{EF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}$

2°) Démontrer que les points A, C et F sont alignés.

Exercice 5 :

ABCD est un quadrilatère. E et F sont définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$

1°) Montrer que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$

2°) En déduire que si ABCD est un parallélogramme, les points C, E et F sont alignés.

Exercice 6 :

ABCD est un triangle. E et F sont définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

Exercice 7 :

ABCD est un carré.

E, F et G sont les points tels que : $\overrightarrow{ED} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DF} = 3\,\overrightarrow{FA}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BA}$

Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Exercice 8 :

ABCD est un parallélogramme. E est le milieu de [AB] et F le point de [ED] tel que $EF = \frac{1}{3}\,ED$

Montrer que les points A, F et C sont alignés.

Exercice 9 :

A, B et C sont trois points non alignés

M, N et P sont tels que que $\overrightarrow{CM} = -\,\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BP} = -\,2\,\overrightarrow{BA}$

Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 10 :

ABC est un triangle. A chaque réel k on associe les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1-k)\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$

1) Placer les points correspondants à k = 2
2) Montrer que pour <u>tout réel</u> k les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
3) Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles
   a) M = N
   b) BCMN est un parallélogramme.

Exercice 11 :

ABC est un triangle. I, J et K sont trois points tels que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

1°) Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) se coupent en un point G. Qu'est G pour le triangle ABC ?

2°) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle A' B' C' où A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB].

Exercice 12 :

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AD]

J le symétrique de I par rapport à A

Soit H le point tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Montrer que les points C, H et J sont alignés.

Exercice 13 :

Soit un triangle ABC

Construire les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$

Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

Exercice 14 :

ABCD est un parallélogramme de centre 0. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1°) Montrer que 0 est le milieu de [IJ]

2°) E est l'image de 0 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$. Montrer que les points O, I, J et E sont alignés.

3°) F est l'image de E dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Montrer que les points A, E et F sont alignés.

4°) G est le symétrique de E par rapport à B. Montrer que :

$\overrightarrow{FO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$

Exercice 15 :

Soit un triangle ABC. D le symétrique de B par rapport à A

E le symétrique de B par rapport à C; F le milieu de [DC] G le milieu de [AE];

(BF) et (AC) se coupent en M

(BG) et (AC) se coupent en N

1°) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC}$

2°) Soit I le milieu de [AD] J le milieu de [CE]

Montrer que I, F, G, J sont alignés.

Exercice 16 :

ABCD est un quadrilatère quelconque. I est le milieu de [AB], J celui de [CD] et N celui de [IJ].

1°) Montrer que : $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 0$

2°) Soit G le centre de gravité du triangle ACD.

Montrer que B, G et N sont alignés.

Exercice 17 :

Soit un triangle ABC et les points I, J, K définis par

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

1°) Les placer

2°) Exprimer $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

en déduire que les points K, I, J sont alignés.

DEVOIRS

Devoir en classe

I) Résoudre dans R

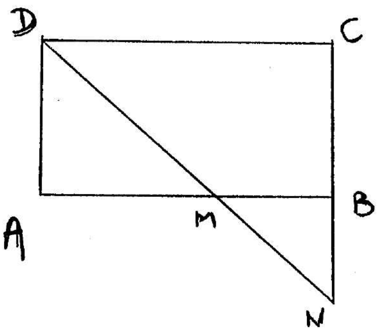
(1) $\dfrac{5x + 1}{3x - 4} \leq 0$

(2) $(x+1).(2x - 3) - 4x^2 + 6x \leq 0$

(3) $x^2 \geq 9$

$\dfrac{4}{x} \geq 1$

II)



ABCD rectangle AB = 6 AD = 4

Soit M un point du segment [AB] distinct de A

(DM) coupe (BC) en N.

On pose AM = x ∈]0, 6]

a) Montrer que $BN = \dfrac{24 - 4x}{x}$

b) Déterminer x pour que $BN \leq 1$

III)

(1) Soit ABCD un parallélogramme. Soit I le milieu de [AB] et E tel que $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$.

Démontrer que A, E, C sont alignés.

(2) Soit un triangle ABC et les points I, J, K définis par :

$\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ $\vec{BJ} = -\frac{1}{3}\vec{BC}$ $CK = \frac{2}{3}CA$

faire une figure. Exprimer $\vec{IK}$ et $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Montrer que les points I, K, J sont alignés.

(3) Soit un triangle ABC

a) Construire le point M tel que $3\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = 0$

b) Soit K tel que $3\vec{KA} - \vec{KB} = \vec{0}$ le construire

c) Démontrer que K, M, C sont alignés.

Devoir à la maison

I) a) Soit un triangle ABC. Construire les points M et P tels que

$3\,\overrightarrow{MA} - 4\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$ $\qquad 2\,\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB}$

b) Soit un parallélogramme ABCD et les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AN} = 4\,\overrightarrow{AD}$

Montrer que M, C, N sont alignés.

II)

Soit OAB un triangle. Construire le point M tel que $2\,\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{O}$

Soit P le milieu de [OB]. N le symétrique de A par rapport à B

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$

b) Exprimer $\overrightarrow{PM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$

c) Exprimer $\overrightarrow{PN}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. En déduire que les points M,P,N sont alignés.

III) Soit A, B, C, D 4 points quelconques du plan. I milieu de [AB], I milieu de [CD], O milieu de [IJ]

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{AO}$

2) Soit G le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que les points A, G, O sont alignés.

3) Soit E le milieu de [AC] et F le milieu de [BD]

Montrer que O est le milieu de [EF]

IV) a) Soit un triangle ABC. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$

la droite passant par E et parallèle à (AC) coupe (BC) en K

Déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{BK} = x\overrightarrow{BC}$

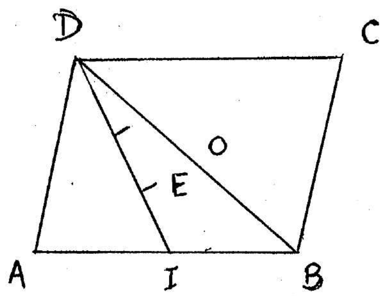
Soit I le milieu de [AB] et L tel que $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

En déduire que les points I, K, L sont alignés.

TRAVAUX PRATIQUES

T.P. 1

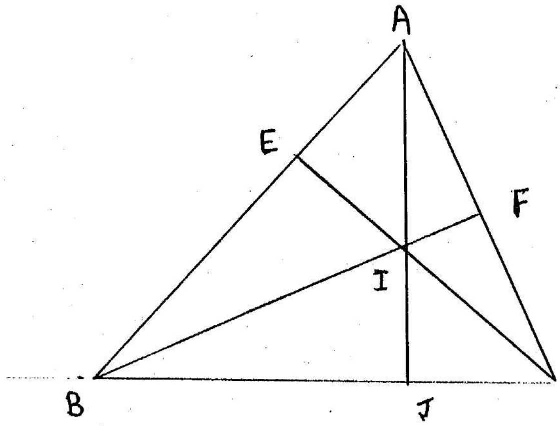
I)



Soit ABCD un parallélogramme
I le milieu de [AB]
E le point tel que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$
Démontrer que les points A, E et C sont alignés.

Première solution : utiliser le calcul vectoriel.
Seconde solution : solution géométrique (centre de gravité d'un triangle)
Troisième solution : utiliser le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$

II) Dans un plan P on donne un triangle ABC



On pose $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$(BF) \cap (CE) = \{I\}$
$(AI) \cap (BC) = \{J\}$

$\vec{i} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{j} = \overrightarrow{AC}$

(on prend $(A, \vec{i}, \vec{j})$ comme repère du plan.

1°) Soit K le réel tel que $\overrightarrow{BI} = k\,\overrightarrow{BF}$

a) Calculer les coordonnées de I en fonction de k

b) En utilisant l'alignement des points C,I,E déterminez k;
En déduire les coordonnées de I

2°) En vous inspirant de la démarche précédente calculer le réel α tel que $\overrightarrow{BJ} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$

T.P. 2 Trois outils pour résoudre le même problème

Enoncé : ABC est un triangle. P, Q et R sont trois points définis de la manière suivante :

. $\overrightarrow{PB} + 2\,\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}$

. Q est le milieu du segment [AC]

. R est le symétrique de B par rapport à C.

1°) Construire ces trois points

Que semblent-ils être ?

2°) Démontrer la propriété conjecturée en 1.

Première méthode : solution géométrique

1°) Démontrer que la parallèle à (PQ) passant par C coupe [PB] en son milieu I.

2°) En déduire que les droites (CI) et (PR) sont parallèles et que les points P,Q et R sont alignés.

Seconde méthode : solution vectorielle

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

2°) En déduire que P, Q et R sont alignés.

Troisième méthode : solution analytique

On rapporte le plan au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1°) Calculer les coordonnées de P, Q et R dans ce repère

2°) En déduire que P, Q et R sont alignés.

TRIGONOMETRIE

SOMMAIRE

Exercices utilisant les notions de 3ème

n^{os} 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 9

Exercices complémentaires

n^{os} 6 , 7 , 8

Contrôles	1 H	- Utilisation du cercle trigonométrique - mesure principale - angles associés

---

Devoir maison

- de la trigo pour des fonctions - Construction de courbe -
- recherche de la valeur approchée d'un angle

- utilisation de l'homothétie pour un ensemble de points

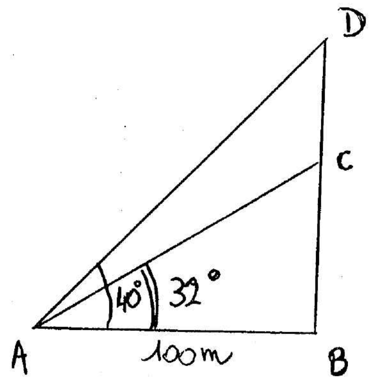
EXERCICES

I) Soit ABCD un parallélogramme tel que AD = 3 cm AB = 6 cm et $\widehat{BAD} = 48°$

1) Calculer le périmètre de ABCD

2) Calculer l'aire de ABCD

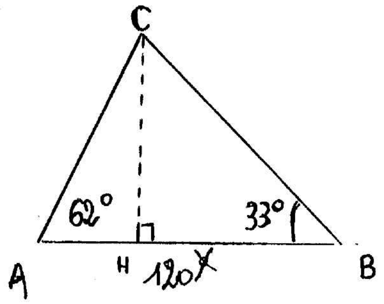
II)



$\widehat{BAC} = 32°$ $\widehat{BAD} = 40°$ calculer CD

AB = 100 m

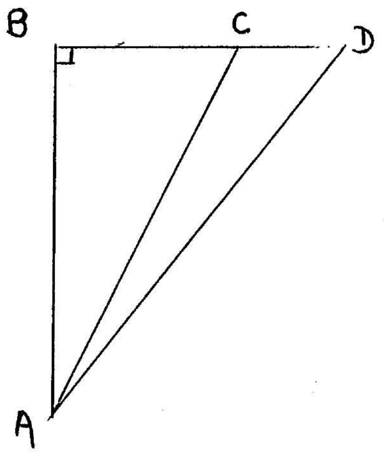
III)



AB = 120

$\widehat{CAB} = 62°$ $\widehat{CBA} = 39°$ Calculer CH

IV)



CD = 10

$\widehat{BAC} = 25°$ Calculer BC

$\widehat{BAD} = 35°$

V)

AB = 5

AC = 45

CE = 50

ED = 1,5

Calcule $\widehat{ADB}$

à 1 degré près

VI)

AEDC carré

ABC triangle équilatéral

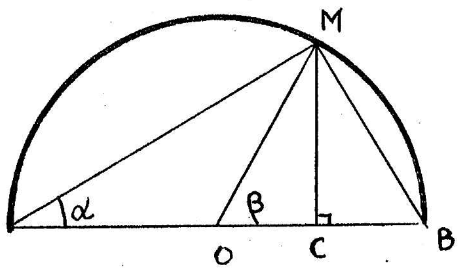
(1) Calculer $\widehat{BEH}$

(2) On suppose AE = 1

montrer que $BH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

en déduire que $\tan \frac{\Pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

VII)



On suppose un $\frac{1}{2}$ cercle de centre O et de rayon 1 $MC \perp (AB)$

$O < \beta < 90°$

1) Montrer que $\beta = 2\,\alpha$

2) Exprimer $\cos \alpha$ de deux manières différentes à l'aide de AB, AC, AM.

Montrer que $AC = 1 + \cos 2\,\alpha$

3) En déduire que $(\cos \alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\,\alpha}{2}$

4) Application : Montrer que $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$ et $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$

VIII)

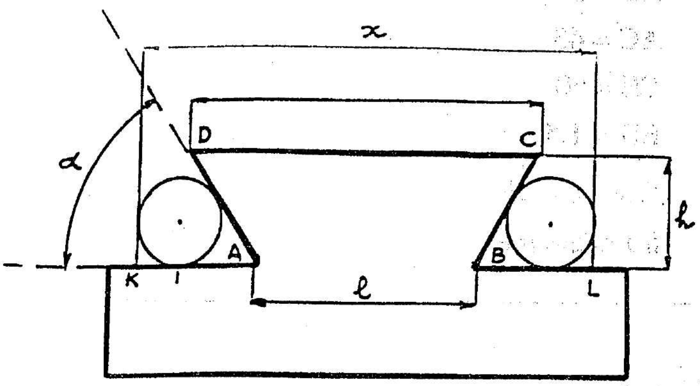
a) <u>Démontrer que</u> $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ <u>application</u> : on donne $\tan x = -\frac{1}{3}$ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

déterminer cos x

1) On donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ en déduire la valeur de $\cos \left(11 \frac{\pi}{12}\right)$

rappeler $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ en déduire $\sin \frac{7\pi}{12}$

IX)



La figure ci-contre représente une glissière mâle symétrique L'angle d'entaille $\widehat{IAD}$ a pour mesure 60°. On introduit une pige de diamètre 20 mm.

On donne x = KL = 130 mm
Calcule AB = ℓ à 0,1 mm près.

DEVOIRS

Contrôle n°1 **Devoir en classe**

I) Donner la mesure principale des arcs dont une mesure est :

a) $x = \frac{-32\pi}{3}$ b) $x = \frac{17\pi}{6}$

II) Donner les valeurs de : $\cos(\frac{13\pi}{4})$; $\sin(\frac{11\pi}{6})$; $\cos(3\pi)$; $\sin(\frac{-4\pi}{3})$; $\cos(\frac{5\pi}{3})$

III) Exprimer en fonction de cos x, sin x ou tan x en utilisant le cercle trigonométrique.

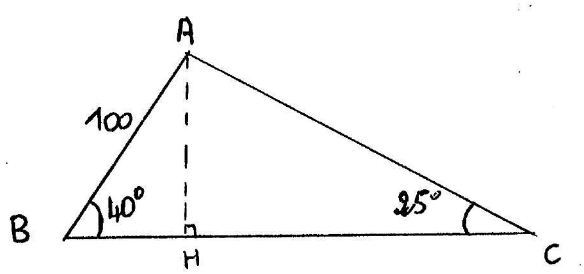
$\cos(x-5\pi)$ $\sin(x-\frac{9\pi}{2})$ $\cos(x+\frac{5\pi}{2})$ $\tan(\pi+x)$

IV) On donne $\tan x = -\sqrt{5}$ avec $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ Calculer cos x

---

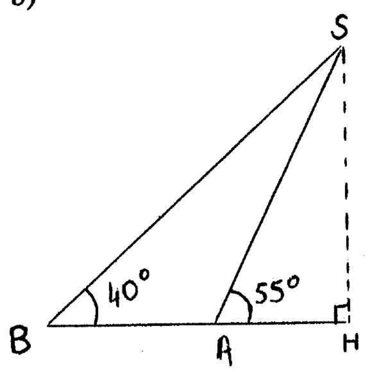
V)

a)



AB = 100 Calculer BC

b)



Sachant que AB = 45m Calculer SH

VI) On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{7\pi}{10}$

I) Devoir maison

AD = 1 AB = 2 ED = EF

1) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du polygone ABCDEF en fonction de cos α

2) On pose cos $\alpha = x$. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de x

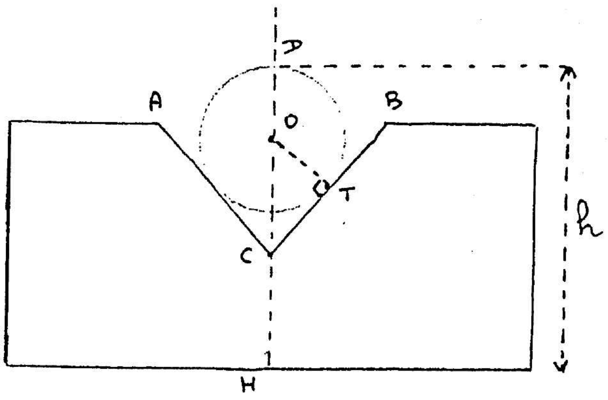
Soit la fonction qui à tout réel x de [0,1] associe l'aire $\mathcal{A}$ (x) de ABCDEF. Représentez graphiquement sur une feuille de papier millimétré cette fonction [unité : 10 cm sur chaque axe]

3) En utilisant le graphique et la machine à calculer déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} du réel $x \in [0,1]$ tel que $\mathcal{A}(x) = \frac{5}{4}$

Trouver la valeur exacte par le calcul (on remarquera que $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

En déduire alors une valeur approchée de l'angle α correspondant.

III)



$\widehat{ACB} = 60°$

On introduit une pige de diamètre 20 mm et on mesure au pied à coulisse DH = h = 65 mm

Calcule CH

III) Soit C, un cercle de diamètre [AB] de centre 0 et de rayon 3. Soit I le point tel que $\vec{AI} = 3\vec{AB}$. Soit M un point quelconque du cercle, distinct de A et B.

Soit m le symétrique de M par rapport à O et M' le point d'intersection de (IM) et (mB).

1) Déterminer le réel k tel que $\vec{IM'} = k\,\vec{IM}$

2) Sur quel ensemble se déplace le point M' lorsque M décrit (C)

Construire cet ensemble.

BIBLIOGRAPHIE

. Bulletin inter-IREM : liaison Collège-Seconde

. Bulletin inter-IREM : suivi scientifique en 3ème

. Cinq problèmes de géométrie plane : IREM de Bordeaux

. Classe de 2nde un outil pour des changements : APMEP

. Faire des maths en seconde : CRDP de Poitiers.