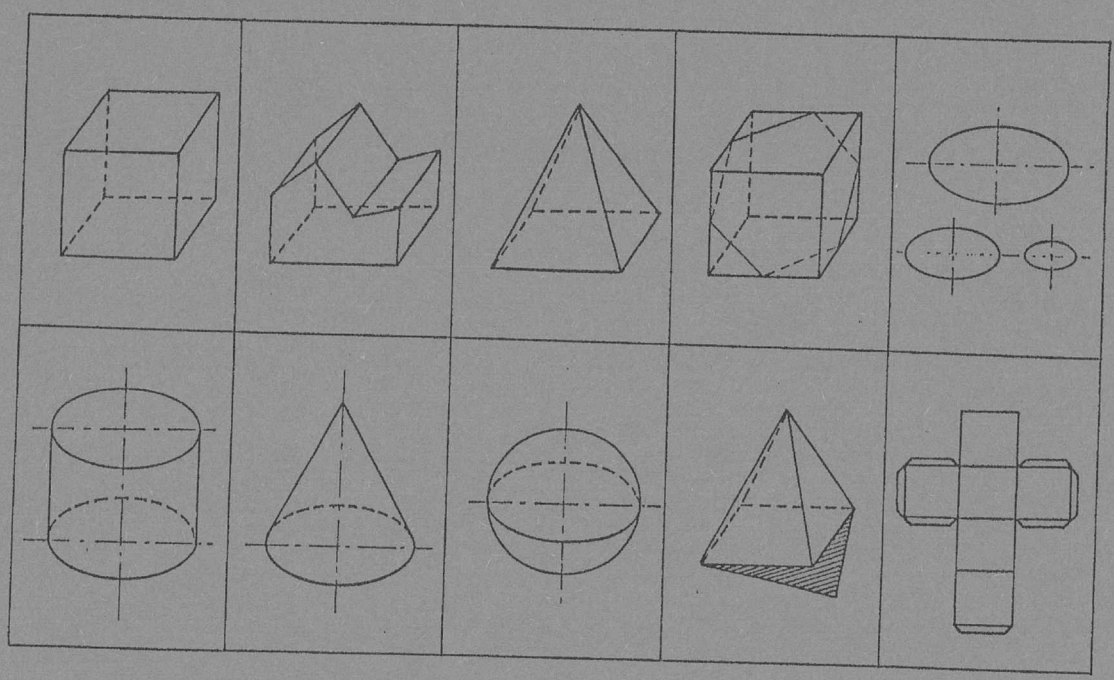
INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Université Montpellier II
Sciences et Techniques du Languedoc
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5
Tél. 67 14 33 83 ou 67 14 33 84
Télécopie 67 14 39 09

ENSEIGNER LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

Activités de la 6ème à la 2nde



- 1992 -

ENSEIGNER LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

Activités de la 6ème à la 2nde

Groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier

SOMMAIRE

Introduction ..... p. 1

Chapitre 1

Le pavé droit ..... p. 3

Chapitre 2

Les prismes ..... p. 17

Chapitre 3

Les pyramides ..... p. 33

Chapitre 4

Sections planes de polyèdres ..... p. 51

Chapitre 5

Dessins d'ellipses ..... p. 83

Chapitre 6

Le cylindre de révolution ..... p. 93

Chapitre 7

Le cône de révolution ..... p. 103

Chapitre 8

La sphère ..... p. 115

Chapitre 9

Problèmes d'ombres ..... p. 125

Chapitre 10

Patrons et gabarits ..... p. 139

Publications du groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier ..... p. 161

INTRODUCTION

Ce document, rédigé par le groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier résulte, pour l'essentiel, des recherches conduites par ce groupe sur la géométrie de l'espace depuis 1981. Il repose sur de nombreuses expérimentations faites avec les élèves sur ce sujet.

L'étude de la géométrie de l'espace se retrouve à tous les niveaux de la scolarité obligatoire dans l'enseignement secondaire. Ce travail est souvent abordé à travers l'étude de solides simples. De ce fait, nous avons privilégié l'entrée dans ce document par les objets plutôt que par les niveaux scolaires, chacun restant libre pour un niveau donné d'utiliser ce qui lui paraît souhaitable à propos de l'objet étudié.

Pour chacun des thèmes abordés, le lecteur trouvera une introduction servant de guide à l'utilisation, justifiant les choix et précisant les difficultés. Il trouvera aussi de nombreux exercices assortis de commentaires sur le matériel nécessaire aux élèves, sur les difficultés non apparentes qu'ils peuvent recéler; ces commentaires débouchant parfois sur des développements plus théoriques à l'usage de l'enseignant. Il trouvera également quelques corrigés d'exercices qui comme les commentaires et les notes à l'usage de l'enseignant, sont présentés dans des cadres.

Un chapitre est consacré à l'ellipse ce qui peut paraître incongru dans un document traitant de l'espace, mais nous pensons que son abord est indispensable conjointement au travail sur les corps ronds.

Le dernier chapitre est constitué d'une collection de patrons d'objets nécessaires pour le traitement de certains exercices. Il contient également quelques gabarits permettant de dessiner des ellipses et autres courbes facilitant les tracés dans la représentation des corps ronds.

Notre objectif sera atteint si grâce à ce fascicule chacun parvient dans son enseignement à donner à la géométrie de l'espace la place qu'elle mérite.

Et pour aller plus loin, le lecteur pourra se référer à la Perspective cavalière, par G. AUDIBERT, publication de l'APMEP N° 75, 1990.

Les auteurs: AMSALEM André, BASCOU Noël, BONAFE Freddy, BRUNET Robert, CALLIET Jean-Jacques, CHEVALIER Arlette, DRAY Liliane, NAUDEILLO Jacques, PAILHAS Nicole, PELOUZET Bernard, ROBERT Jean-Pierre, SAUTER Mireille.

Nous remercions particulièrement Gérard AUDIBERT sans qui ce groupe n'existerait pas, Claude FABRE à qui nous devons d'avoir abordé l'étude de l'espace, Luis Carlos PAIS de l'Université de Mato Grosso do Sol (Brésil) pour sa collaboration ainsi que l'équipe du secrétariat de l'IREM, Catherine GAUTHIER, Sylvie HIGOUNET et André VACHE.

- Chapitre 1 -

LE PAVE DROIT

Afin de centrer le travail de l'élève sur ce qui est ici essentiel, l'apprentissage d'une représentation, la distinction entre un objet et les représentations planes de ce même objet, nous pensons qu'il est préférable de fixer les paramètres de la perspective cavalière (PC) qui seront ici de 30° pour l'angle de fuite et 1/2 pour le rapport de réduction sur les fuyantes.

LES MANIPULATIONS

L'observation et la manipulation de divers polyèdres doivent permettre de définir en le montrant ce que désignent les mots : pavé, pyramide, face, arête, sommet. (L'introduction d'une pyramide offre des exemples d'arêtes ni parallèles ni perpendiculaires à une face donnée). Ces manipulations d'objets sont l'occasion de mettre en place un codage des éléments à l'aide de lettres (Fiche 1).

L'accès à la représentation passe par une analyse des positions relatives des sommets, faces et arêtes. Trois types de situations sont à approcher :

* arête parallèle à une face
* arête perpendiculaire à une face
* arête ni parallèle ni perpendiculaire à une face

Les difficultés sont nombreuses dans ces approches car si la notion de perpendiculaire à un plan est déterminée par une seule direction, celle de parallèle à un plan concerne une infinité de directions et recèle le cas des parallèles contenues dans le plan (Fiche 2).

LES TECHNIQUES DU DESSIN

La représentation en perspective cavalière nécessite un tracé soigné et précis, aux instruments, ainsi que l'utilisation de directions particulières sur la feuille du dessin. Une bonne préparation à ces tracés est souhaitable (Fiche 3).

Il est ensuite nécessaire de mettre en place les droites importantes :

* parallèles au bord inférieur (et supérieur) de la feuille
* parallèles aux bords latéraux de la feuille
* fuyantes (formant avec le bord inférieur de la feuille un angle de 30° mais montant à partir de la gauche vers la droite, ou descendant vers la gauche)
* obliques (toutes les autres droites)

La notion de fuyante présente des difficultés lors de sa mise en place. En effet, il est dans un premier temps nécessaire de donner une orientation à la feuille afin de situer bords inférieurs et latéraux; ensuite, il faut tracer des droites formant un angle de 30° avec le bord inférieur, ce qui peut se faire dans deux directions différentes. On peut alors préciser qu'elles montent vers la droite, mais le mot "droite" peut être ici mal interprété par les élèves (Fiche 3).

DE L'OBJET AU DESSIN

Pour représenter un pavé droit dans une perspective cavalière dont a fixé l'angle 30° et le coefficient $\frac{1}{2}$ il faut :

* Choisir une face du pavé (sur laquelle on peut éventuellement fixer un carton simulant le plan de projection).

* Dessiner en vraie grandeur les arêtes parallèles à la face choisie, les angles que forment entre elles ces arêtes (ainsi toute face parallèle à la face choisie est dessinée en vraie grandeur).

* Dessiner par des fuyantes montant vers la droite à 30° et de longueur moitié les arêtes perpendiculaires à la face choisie.

Le choix initial d'une face arrière (ou avant) correspond en fait au choix d'une direction pour le plan de projection. C'est à partir de là que l'on devra étudier les positions relatives des autres éléments de l'objet.

A ces consignes, s'ajoute celle concernant l'usage des pointillés (Fiche 4). On peut brièvement résumer ces consignes par quelques règles d'actions :

- choisir une face
- la dessiner en vraie grandeur
- les fuyantes de longueur moitié
- terminer le dessin

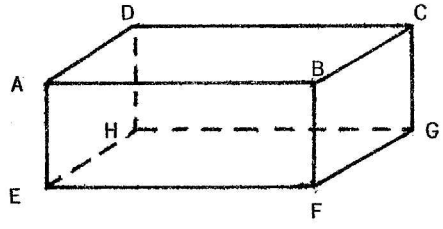
On peut ensuite proposer d'autres activités de dessin afin d'asseoir la technique et même de dépasser ces premières règles d'action qu'il faut modifier en présence de certains objets (Fiche 5).

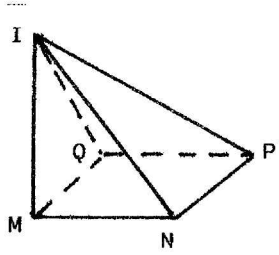
PATRONS-VOLUMES-SURFACES

La réalisation de patrons ou d'objets à partir d'un patron va constituer une première approche du passage du dessin à l'objet. Cet objet peut ensuite être dessiné en perspective cavalière (Fiches 6 et 7), il peut aussi servir de support à des activités de calcul (Fiche 7). Quelques activités de dénombrement peuvent également être abordées (Fiches 6 et 7).

FICHE 1

Manipulation d'objets, codage, vocabulaire.
Les élèves ont à leur disposition un pavé droit et une pyramide tiers de cube dont on trouvera les patrons au chapitre 10. Les sommets ont été repérés comme ci-dessous.





1. Sur le pavé: * mesurer les longueurs des arêtes : AB = ; AE = ; AD =
* mesurer les angles : $\widehat{EAB}$ = ; $\widehat{EAD}$ = ; $\widehat{BAD}$ =
* calculer les aires des faces : ABCD : ; AEFB: ; AEHD :

2.Sur la pyramide: * mesurer les longueurs des arêtes : IM = ; MN = ;
MQ = ; IN = ; IP = ; IQ =
* mesurer les angles : $\widehat{IMQ}$ = ; $\widehat{IMN}$ = ; $\widehat{IPQ}$ =
* calculer les aires des faces : IMQ : ; MNPQ : ; IPQ :

3. Compléter :

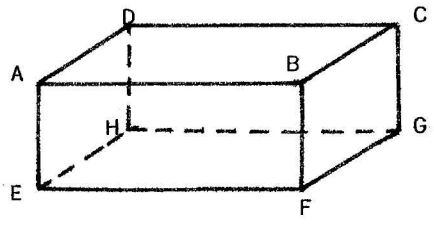
	Pyramide	Pavé
Nombre de faces	.....	....
Nombre d'arêtes	.....	....
Nombre de sommets	.....	....

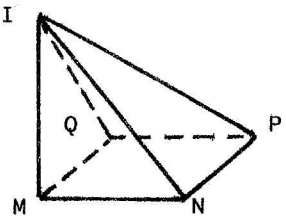
4. Entourer les noms des faces de la pyramide :
IPQ, MNPQ, IMP, IQP, QNI, NPMI

5. Entourer les noms d'arêtes du pavé :
EH, AF, CB, DH, GD, FE

FICHE 2

Etude des positions relatives des arêtes et faces d'un pavé, d'une pyramide.
Les élèves ont à leur disposition un pavé droit et une pyramide tiers de cube dont on trouvera les patrons au chapitre 10. Les sommets ont été repérés comme ci-dessous.





1. Dans le pavé

* Citer 3 arêtes parallèles à AB : ; à AD : ; à AE :
* Citer 4 arêtes perpendiculaires à AB : ; à AE : ; à AD :
* Peut-on citer des arêtes ni parallèles ni perpendiculaires à AB ? ; à AE ? à AD ?

2. Dans la pyramide :

* Citer toutes les arêtes perpendiculaires à MQ: ; à MN : ; à IM :
* Citer toutes les arêtes parallèles à MQ : ; à MN :
* Peut-on citer des arêtes parallèles à IM ? ; à IN? ; à IP? ; à IQ?
* Peut-on citer des arêtes perpendiculaires à IN ? ; à IQ? ; à IP?

3. Compléter les tableaux suivants avec : // pour parallèle; ⊥ pour perpendiculaire; O pour ni parallèle ni perpendiculaire.

Dans le pavé

	ABCD
AE	
BC	
GH	

	ABCD	AEHD	EFGH	DCGH
GH				

Dans la pyramide

	IMQ
MQ	
MN	
PI	

	IPQ	INP	IMQ	IMN
QM				

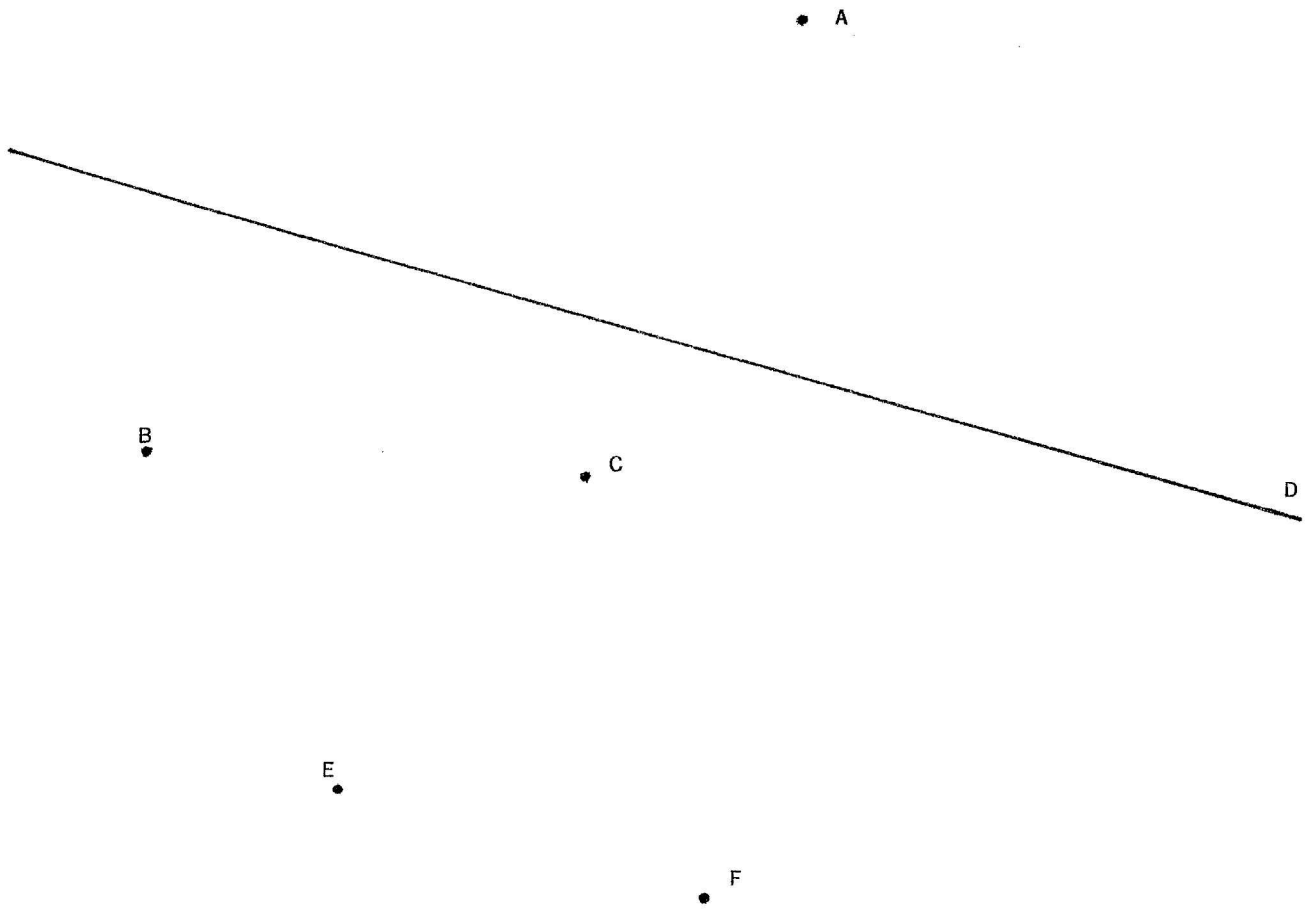
	IPQ	IPN	MNPQ
IP			
PN			

FICHE 3

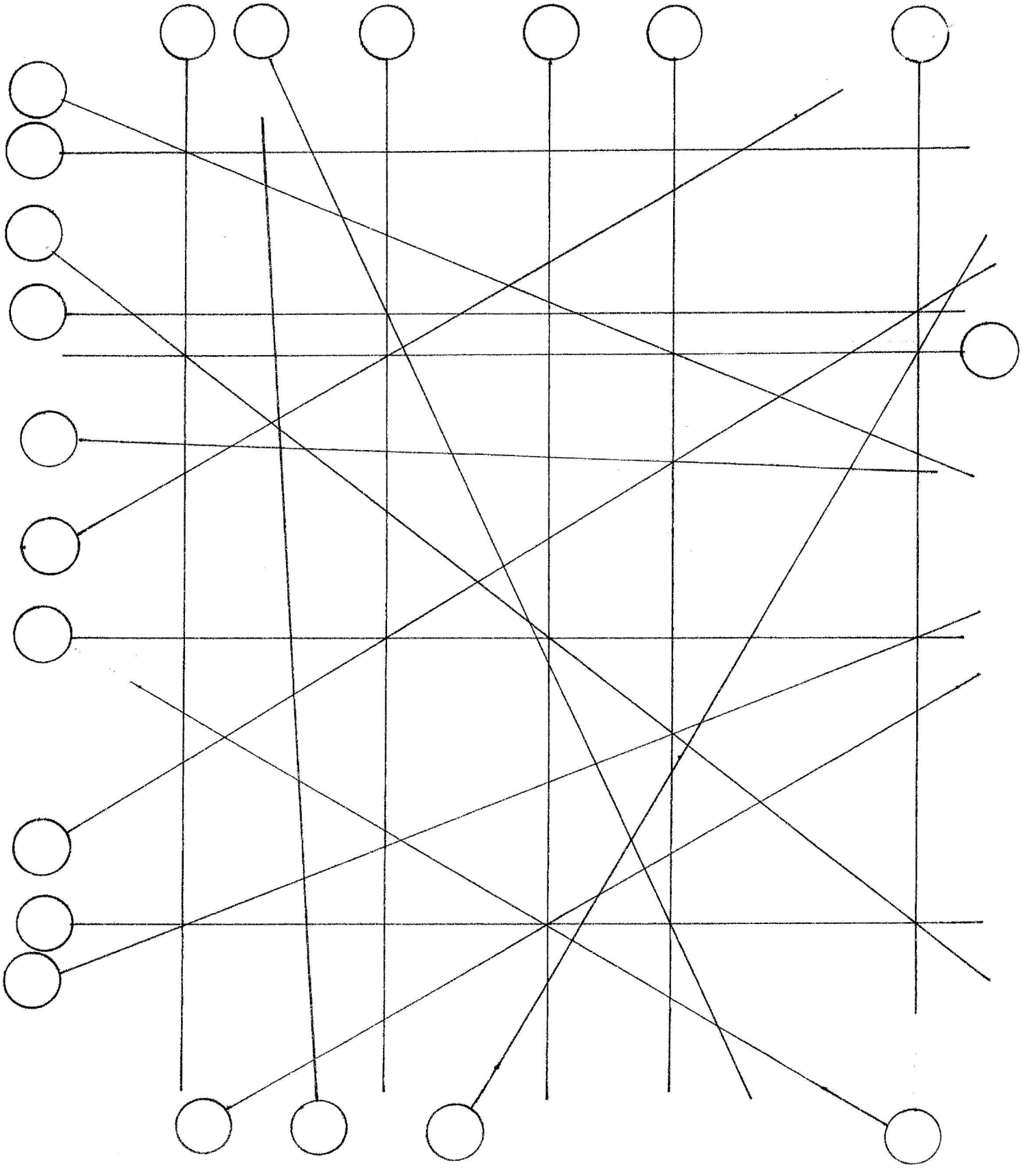
Il s'agit ici de conforter les techniques de tracé et de mettre en place les notions d'oblique et de fuyante.
Les élèves ont à leur disposition : une règle plate à bords parallèles, une équerre à 30° et un rapporteur.

1. Sur la figure ci-dessous, construire :

* Une droite passant par A et parallèle à la droite D.
* Une droite passant par A et perpendiculaire à la droite D.
* Une droite parallèle au bord inférieur de la feuille et passant par B.
* Une droite parallèle aux bords latéraux de la feuille et passant par C.
* Trois droites obliques passant par E.
* Deux droites passant par F et formant un angle de 30° avec le bord inférieur de la feuille.

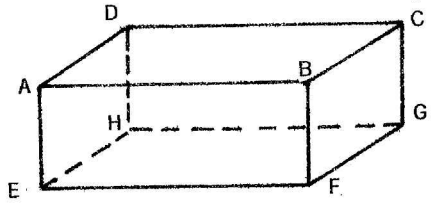


2. Coder chaque droite avec : H si elle est parallèle au bord inférieur de la feuille.
V si elle est parallèle aux bords latéraux de la feuille.
0 si elle est oblique.
F si elle est fuyante.

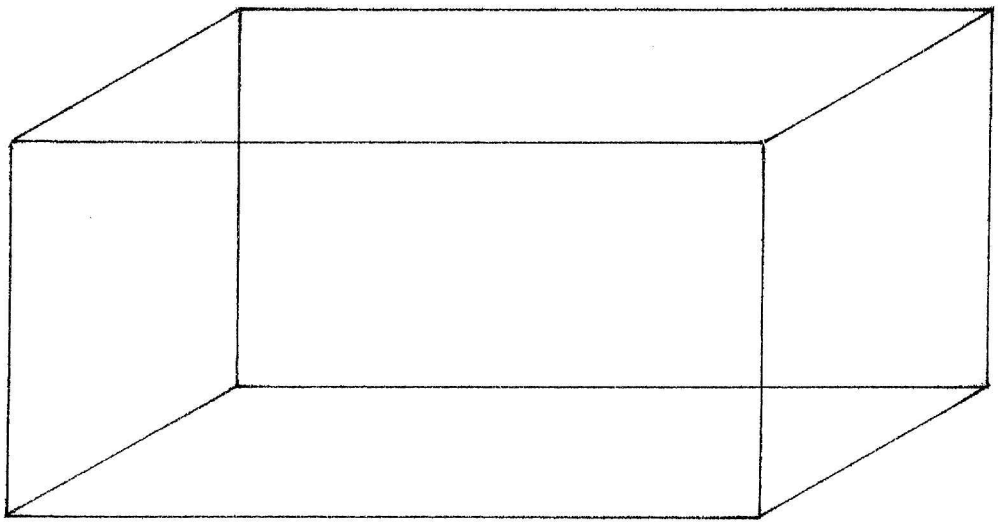


FICHE 4

Les règles de la représentation en perspective cavalière (par exemple 30°, 1/2) ayant été mises en place, cette activité vise à associer l'objet, dans une position stable, à sa représentation.
Les élèves ont à leur disposition le matériel de dessin ainsi qu'un pavé droit dont on trouvera le patron au chapitre 10. Les sommets ont été repérés comme ci-dessous.



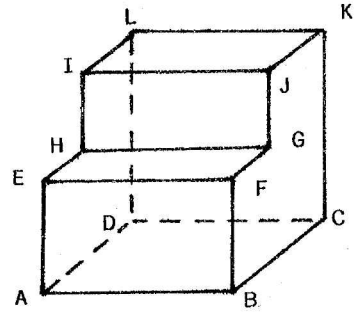
1. Disposer le pavé de sorte que sa face inférieure soit EFGH et la face arrière DCGH. L'objet étant ainsi posé sur le bureau, légèrement sur la gauche, repérer sur le dessin ci-dessous les sommets ABCDEFGH. Repasser en traits forts sur le dessin toutes les arêtes visibles de l'objet. Tracer des pointillés sur les autres arêtes.



2. Disposer le pavé de sorte que sa face arrière soit DCGH et la face inférieure BCGF. Représenter le pavé ainsi disposé en perspective cavalière. Comparer votre dessin et le dessin ci-dessus.

FICHE 5

Mise en défaut des règles d'action de la perspective cavalière par l'introduction d'une face intermédiaire n'étant pas la face avant et parallèle à la face arrière.
Les élèves ont à leur disposition le matériel de dessin ainsi qu'un cube-piano dont on trouvera le patron au chapitre 10. Certaines faces de cet objet sont coloriées :
la face BCKJGF est bleue
la face ABCD est rouge
la face DCKL est verte



1. Représenter en perspective cavalière le cube-piano, la face arrière est coloriée en bleu, la face inférieure est coloriée en vert.

2. Représenter en perspective cavalière le cube-piano, la face arrière est coloriée en rouge, la face inférieure est coloriée en vert.

FICHE 6

Travail sur les patrons du cube - Différence entre objet et dessin.
Les élèves ont à leur disposition le matériel de dessin, ciseaux et ruban adhésif.

1. Dessiner puis découper 6 carrés de 5 cm de côté. Reconstituer ensuite un cube. Repérer sur ce cube les sommets de sorte que ABCD soit une face, A'B'C'D' la face opposée, AA', BB', CC', DD' des arêtes.

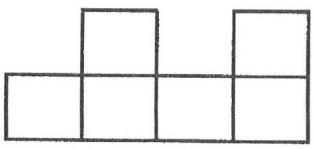
2. Représenter en perspective cavalière le cube réalisé ci-dessus, DCC'D' étant la face arrière et A'B'C'D' la face inférieure.

3. A partir du cube et de sa représentation réalisés ci-dessus. Compléter les phrases suivantes :

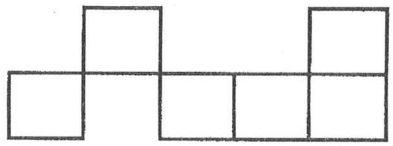
	Sur le cube	*Sur le dessin*
Le quadrilatère ABB'A' est un	.....	.....
Le quadrilatère ABCD est un	.....	.....
Les longueurs AB et AD sont	.....	.....
Les longueurs AB et AA' sont	.....	.....
$\widehat{BAA'}$ est un angle	.....	.....
$\widehat{BAD}$ est un angle	.....	.....

4. En se déplaçant sur ce cube, une fourmi veut aller du milieu de AA' au milieu de DC. Quel est le plus court chemin possible ? Faire un patron du cube et dessiner ce chemin sur le patron, sur le cube, sur la perspective cavalière.

5. On appelle "hexamino" toute figure composée de 6 carrés placés côte à côte.



correct



incorrect

Combien peut-on former d'hexaminos différents ? Quels sont ceux qui sont des patrons du cube ? Réaliser tous les hexaminos différents à l'aide de carrés de 1 cm de côté.

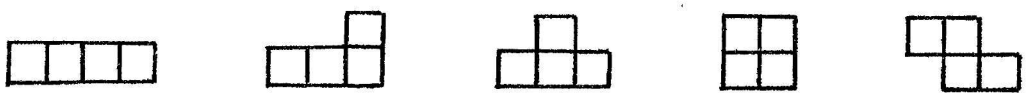
Remarques à propos de l'exercice 5 :

C'est une longue et riche activité dans laquelle on peut entrer à des niveaux divers. Pour parvenir au résultat, on peut passer par une génération de figures convenables, en ajoutant un carré à chaque fois.

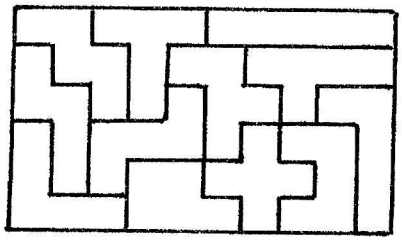
1 à 1 carreau

1 à 2 carreaux

2 à 3 carreaux

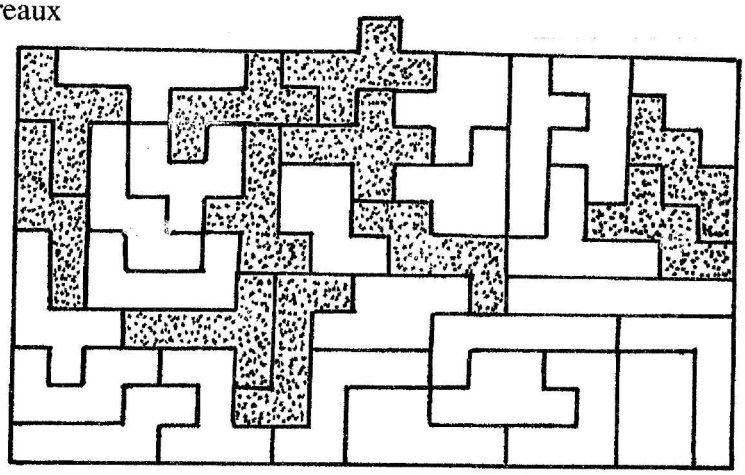
5 à 4 carreaux 

12 à 5 carreaux



On peut les regrouper en un rectangle de 10 x 6 carreaux

35 à 6 carreaux



Les 35 pièces peuvent être regroupées ainsi, en effet
35 x 6 = (11 x 19)+1

Ces diverses constructions mettent en oeuvre symétrie centrale et orthogonale.

S'agissant de reconnaître ceux qui sont des patrons de cubes , on peut s'aider d'un dé à 6 faces numérotées que l'on fait rouler à partir d'une position fixe sans reposer deux fois la même face sur la table et noter ainsi les patrons obtenus. On a grisé sur la figure ci-dessus les 11 hexaminos qui sont effectivement des patrons de cubes.

FICHE 7

Les exercices proposés ici ont pour objectif le calcul, ils nécessitent cependant une bonne maîtrise des représentations en perspective cavalière ainsi que des patrons.
Les élèves disposent du matériel de dessin, ciseaux et ruban adhésif. Pour l'exercice 1, la maquette du pavé (Fiche 1) est nécessaire. Pour l'exercice 2, le cube-piano (Fiche 5) est nécessaire. Pour les exercices 3 et 4, il est souhaitable d'avoir des patrons de cubes de 1 cm de côté.

1. *a)* Construire un patron développé du pavé.

b) Placer sur ce patron, dans chaque coin, le nom du sommet correspondant.

c) Réaliser l'objet, calculer son volume, la surface de papier nécessaire à la réalisation du patron.

d) Quel est le plus court chemin sur le pavé pour aller de A à G ?

2. *a)* Construire un patron développé du cube-piano.

b) Réaliser l'objet, calculer son volume, la surface de papier nécessaire à la réalisation du patron.

3. *a)* Découper suivant les traits forts le développement ci-dessous.

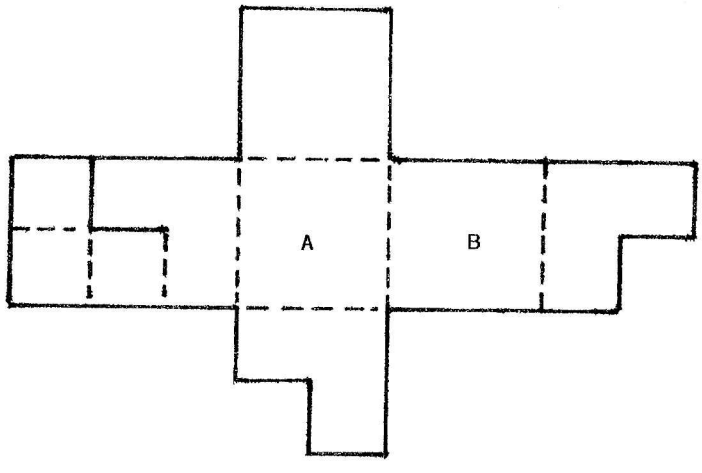
b) Plier suivant les pointillés, puis assembler.

c) Placer l'objet de sorte que la face A soit à l'arrière et la face inférieure soit B. Représenter cet objet en perspective cavalière.

d) Calculer la surface de cet objet. Comparer cette surface à celle du plus petit cube qui le contient.

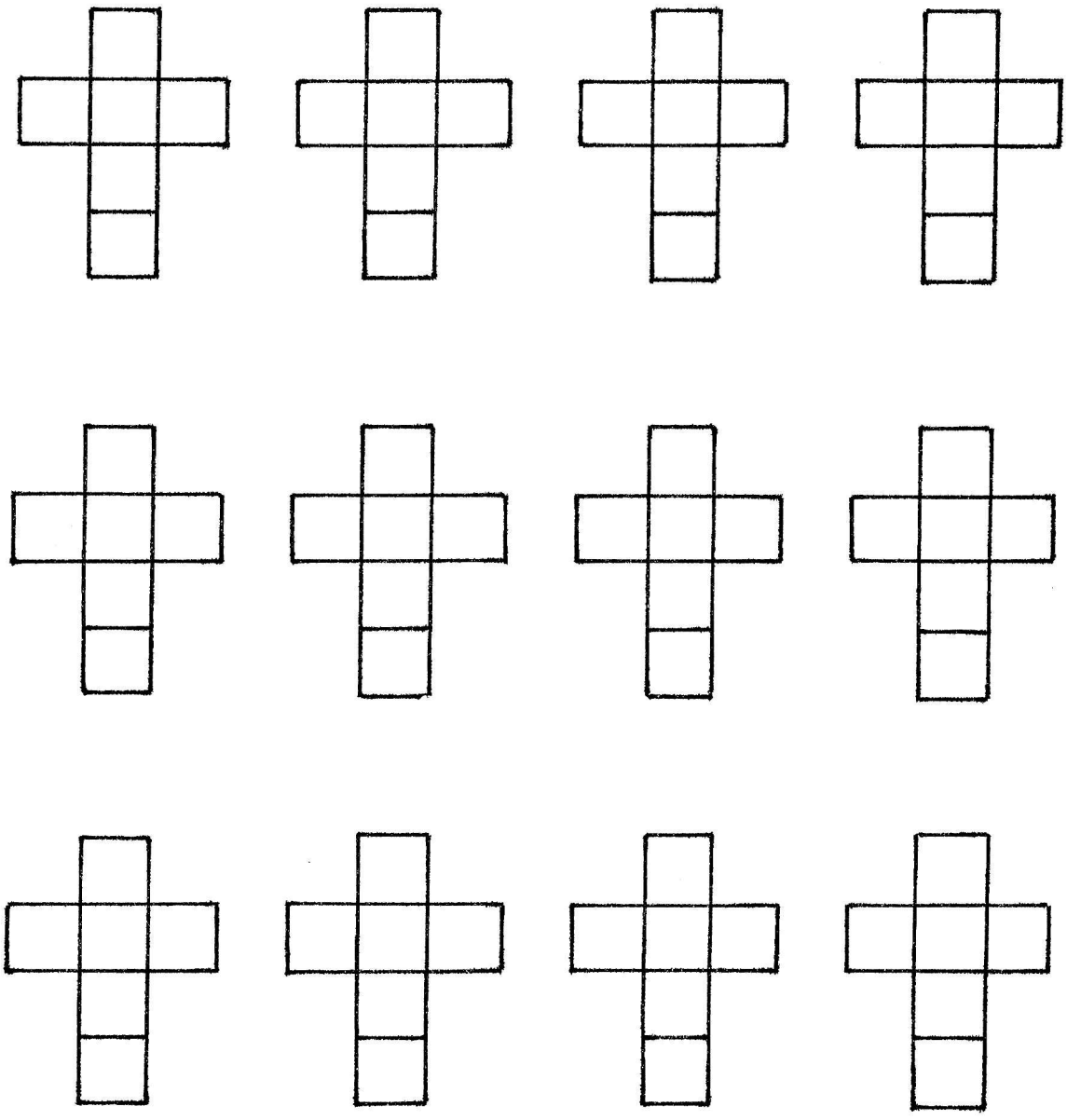
e) Calculer le volume de cet objet. Comparer ce volume à celui du plus petit cube qui le contient.

f) A l'aide de cubes de 1 cm de côté, peut-on reconstituer cet objet ?



4. *a)* On se donne six couleurs : blanc, bleu, jaune, noir, rouge, vert.
Combien peut-on réaliser de cubes différents ayant les six faces coloriées à l'aide des six couleurs ci-dessus.

b) Combien peut-on réaliser de dés à jouer à six faces différents ? (Les faces étant numérotées de 1 à 6). A l'aide des patrons ci-dessous, réaliser tous les dés à jouer présentant le 1 et le 6 sur des faces opposées.



Remarques à propos de l'exercice 4 :

Commençons par examiner la deuxième partie de la question b). Fixons par exemple le chiffre 1 sur la face inférieure du cube et le 6 sur la face supérieure. On peut alors fixer arbitrairement un chiffre sur une des faces restantes, fixons le 2 par exemple. La face opposée peut être 3, 4 ou 5 et dans chaque cas, les autres peuvent s'échanger. On en vient au schéma suivant :

Nous pouvons donc réaliser 6 dés différents. Il s'agit en fait du nombre de façons de placer 3 chiffres dans trois cases.

Ces dés présentant le 1 et le 6 sur des faces opposées, on peut renouveler l'opération lorsque le 1 et le 5 sont sur des faces opposées et on obtiendra 6 autres dés. En procédant de la sorte, on parviendra au total de 30 dés à jouer différents et bien sûr de 30 cubes différents ayant les six faces coloriées à l'aide de 6 couleurs différentes.

Une autre méthode de comptage exploitant les isométries laissant invariant le cube consiste à chercher le nombre de façons de disposer 6 chiffres sur 6 cases soit 6! et de diviser par le nombre de rotations laissant le cube invariant soit 24 d'où $\frac{6!}{24}=30$. (On a trois axes de rotation d'ordre 4 dont les axes joignent les centres des faces opposées, ce qui donne 9 rotations. Ensuite, quatre axes de rotation d'ordre 3 dont les axes sont les diagonales du cube ce qui en fait 8 autres. On a aussi 6 axes de demi-tour qui joignent les milieux d'arêtes opposées et l'identité).

- Chapitre 2 -

LES PRISMES

LES MANIPULATIONS

Elles sont nécessaires et permettent une meilleure analyse de l'objet afin de le représenter en perspective cavalière dans différentes positions.

DE L'OBJET AU DESSIN : les dépassements des règles d'action.

Les règles d'action énoncées au chapitre précédent ont permis la représentation en perspective cavalière d'un pavé droit dont une des faces est parallèle au plan de projection (toutes les arêtes sont soit parallèles, soit perpendiculaires à ce plan).

Avec le prisme droit, nous allons introduire essentiellement deux difficultés qui nécessiteront un dépassement de ces règles :

* Dans le cas où la face avant du prisme est une face parallèle au plan de projection, mais où l'objet présente une ou plusieurs arêtes ni parallèles, ni perpendiculaires à ce plan, il faut introduire des segments auxiliaires.

En effet, la représentation d'une telle arête (par exemple AB ou AC dans la fiche 2) ne peut se faire que si on connait deux points qui sont repérés sur des arêtes déjà existantes ou sur un segment parallèle ou perpendiculaire au plan de projection (hauteur dans les fiches 2 ou 6).

* En cas d'absence de face avant (au sens de face parallèle au plan de projection) (fiche 7), la première règle d'action énoncée au chapitre précédent est mise en défaut. C'est alors l'ensemble des consignes que l'élève doit remettre en question.

L'analyse de l'objet déterminera la première face à dessiner (face de dessous dans l'exemple).

DU DESSIN A L'OBJET

L'objectif est d'entraîner l'élève à la lecture d'un dessin et de l'amener à prendre conscience de la différence entre l'objet et sa représentation plane, grâce à la réalisation de maquettes (fiches 3 et 4).

On a pu observer, au cours de différentes expérimentations, que la confusion objet-dessin était la source des erreurs commises par les élèves dans les activités mettant en jeu la lecture du dessin.

Cette phase d'apprentissage est donc nécessaire pour aborder le passage dessin-dessin.

DU DESSIN AU DESSIN

Cette activité (fiche 6 par exemple) est la plus délicate car l'objet est absent.

Il s'agira pour l'élève de :

* lire correctement le dessin donné
* analyser l'objet pour déterminer la nature de ses faces et de ses arêtes
* les caractériser en fonction de la face avant choisie pour la représentation
* les représenter en utilisant les règles d'action ou leurs dépassements éventuels

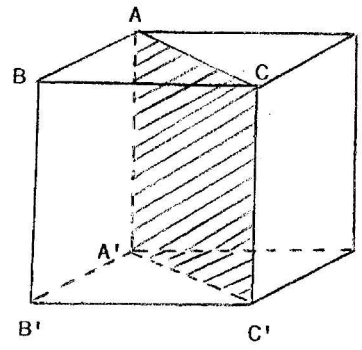
Ce travail met en oeuvre le passage du dessin à l'objet et de l'objet au dessin et prépare les activités concernant les sections planes de polyèdres.

LE CUBE DE REFERENCE

Pour faciliter la représentation de certains prismes (et plus tard d'autres solides), il est utile de les inclure dans un cube ou un pavé de référence ce qui facilite le repérage de certains points. La fiche 8 est l'occasion d'introduire ce procédé.

FICHE 1

Chaque élève dispose d'un prisme moitié de cube dont on trouvera le patron au chapitre 10. Le prisme est étiqueté comme ci-dessous.
L'objectif est de décrire le prisme et de le représenter en PC <u>dans deux cas</u> où il n'y a pas dépassement des règles établies pour le pavé droit.



* Vous disposez d'un prisme droit qui à l'aide de celui de votre voisin, vous permet de reconstituer un cube.

Combien y a-t-il de faces dans votre prisme ?
Quelle est la forme de chacune d'elles ?
Combien y a-t-il d'arêtes ?

Représenter dans une PC (30°, 1/2) le prisme dont vous disposez

<u>1er cas</u>

La face avant est BCC'B'
La face posée sur la table est A'B'C'

<u>2ème cas</u>

La face avant est ABC
La face posée sur la table est BCC'B'

<u>3ème cas</u>

La face avant est ABC
La face posée sur la table est ACC'A'

FICHE 2

L'élève dispose du même prisme que dans la fiche 1.
Il s'agit de faire prendre conscience à l'élève de la difficulté que soulève la représentation d'une arête ni parallèle, ni perpendiculaire à la face avant. L'utilisation de la hauteur du triangle A'B'C' est nécessaire pour repérer le point B'.

* Positionnez le prisme de sorte que A'B'C' soit posée sur la table et que ACC'A' soit la face avant.

L'arête AB est-elle parallèle, perpendiculaire ou quelconque par rapport à la face avant ?

L'arête BC est-elle parallèle, perpendiculaire ou quelconque par rapport à la face avant ?

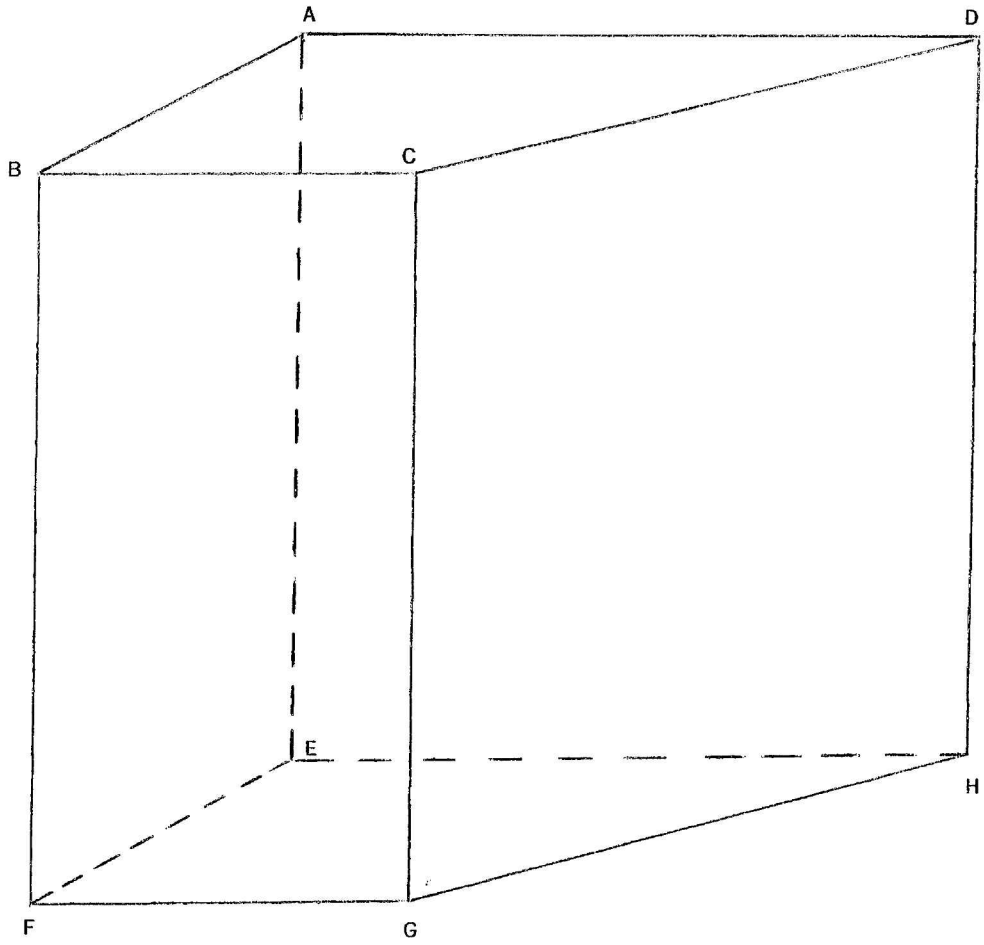
Sur quelle droite perpendiculaire ou parallèle à la face AA'C'C se trouve le point B?

Dessiner la PC (30°, 1/2) du prisme dans cette position.

FICHE 3

Il s'agit de consolider l'apprentissage de la perspective cavalière par des constructions de maquettes à partir d'une représentation de l'objet. Ce travail manuel de fabrication doit être précédé d'une analyse de l'objet à travers sa représentation.

1. Le dessin ci-dessous représente en PC (30°, 1/2) un prisme droit dont la base EFGH est un trapèze rectangle (EF⊥FG et HE⊥EF). BFGC est la face avant de ce prisme. Fabriquer en carton cet objet.



Notes sur le 1°

* Les faces BFGC, BFEA et AEHD ne posent pas de problème. Par contre, la face CGHD dans laquelle CD et GH sont représentées par des obliques ne peut être réalisée qu'après les faces de-dessus (ou de dessous). La construction du trapèze rectangle ABCD est obtenue grâce aux mesures de AB, BC et AD et donne la mesure et la construction de CD.

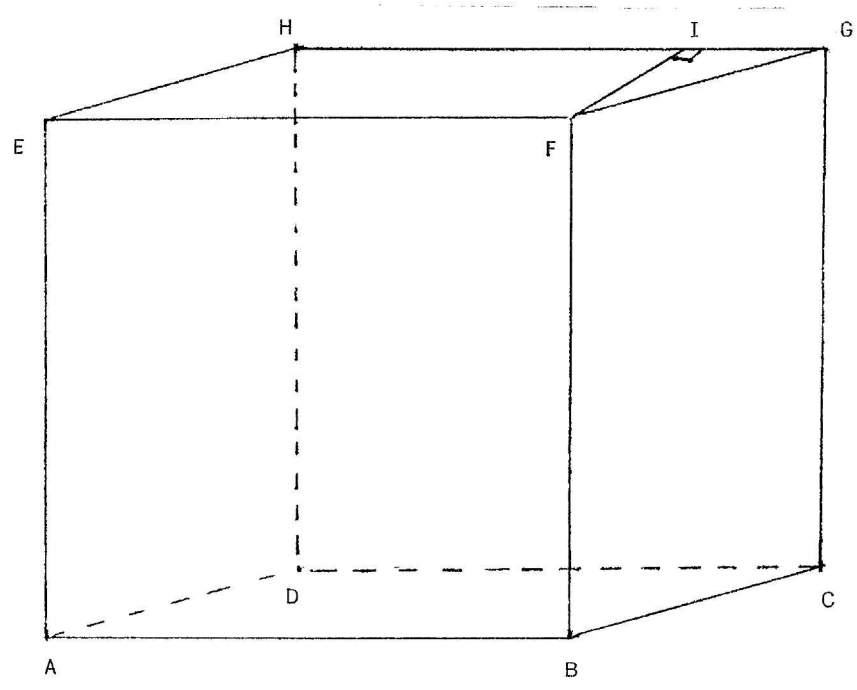
* Il est fréquent de trouver les erreurs suivantes :

. construction de faces ayant la forme de parallélogrammes (identification dessin-objet)

. désir de construire la face CGHD avant de connaître CD d'où des erreurs sur CD

2. Le dessin ci-dessous représente en PC (30°, 1/2) un prisme droit dont la base ABCD est un losange. Le segment FI est une perpendiculaire à HG dessinée sur la face EFGH. ABFE est la face avant.

Fabriquer en carton cet objet.



Notes sur le 2°

* Les faces EADH et FBCG ne peuvent être réalisées qu'après les faces de dessus ou de dessous. La construction du losange EFGH est obtenue grâce à la perpendiculaire commune FI à EF et GH.

corrigé du 2.

On peut conseiller à l'élève la démarche suivante :

* Construction de la face de dessus :
  - construire [HG], placer I (HG = 7 ; HI = 5,2)
  - construire [FI] perpendiculaire à [HG] (FI = 3,4)
  - construire [EF] perpendiculaire à [FI] (EF = 7)
  - compléter le losange

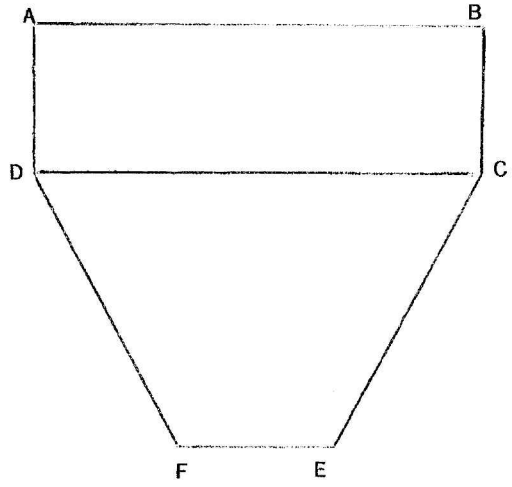
* Construction des faces latérales

FICHE 4

Utiliser les propriétés du prisme droit pour compléter un patron.

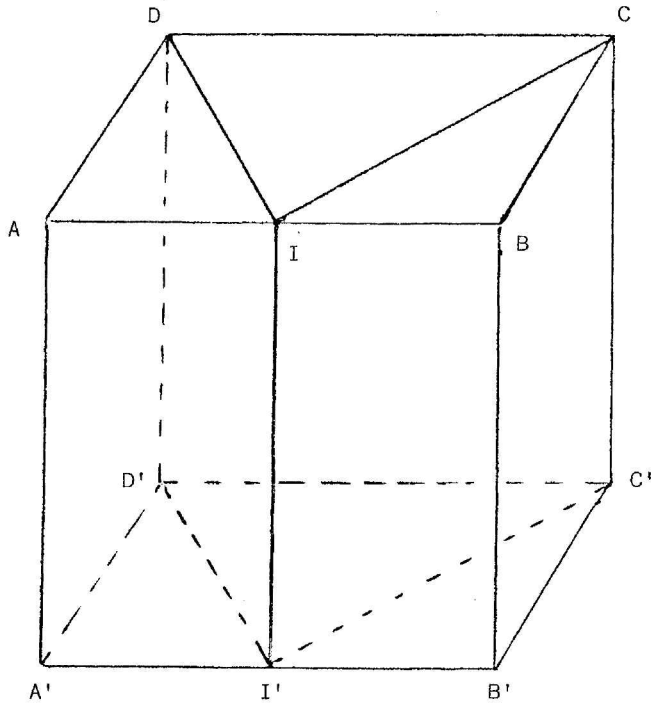
Deux faces du patron d'un prisme sont représentées ci-dessous.

1. Quelle est la base ?
2. Compléter le patron du prisme droit.
3. Colorier d'une même couleur les faces parallèles.
4. Colorier les arêtes perpendiculaires aux bases.



FICHE 5

Comparer l'objet et le dessin. Montrer la différence, consolider les connaissances relatives au prisme droit à base triangulaire. Le représenter.
L'activité est également l'occasion de revoir un grand nombre de propriétés élémentaires de la géométrie plane (longueurs, angles, triangles particuliers, quadrilatères particuliers).
Les élèves ont à leur disposition une maquette de cube d'arête 6 cm et sa représentation en PC (60°, 1/2). C'est, en effet, l'angle de 60° qui donne sa particularité au dessin.



PC (60°, 1/2)

	Dessin	Objet
AI		
AD		
ID		
IB		
BC		
IC		
II'		
$\widehat{DAI}$		
$\widehat{AID}$		
$\widehat{ADI}$		
$\widehat{IBC}$		
$\widehat{BIC}$		
$\widehat{BCI}$		
$\widehat{ICD}$		
$\widehat{CDI}$		
$\widehat{DIC}$		
$\widehat{BAC}$		

Ce dessin est la PC (60°, 1/2) d'un cube avec I milieu de [BC] et I' milieu de [A'B'].

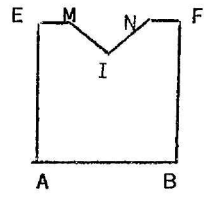
1°) Sur le dessin, étudier les triangles AID, DIC et CIB. (On ne marquera dans le tableau que les mesures nécessaires, longueurs en cm, angles en degrés).

2°) Sur l'objet, étudier les triangles AID, DIC et CIB (même remarque).

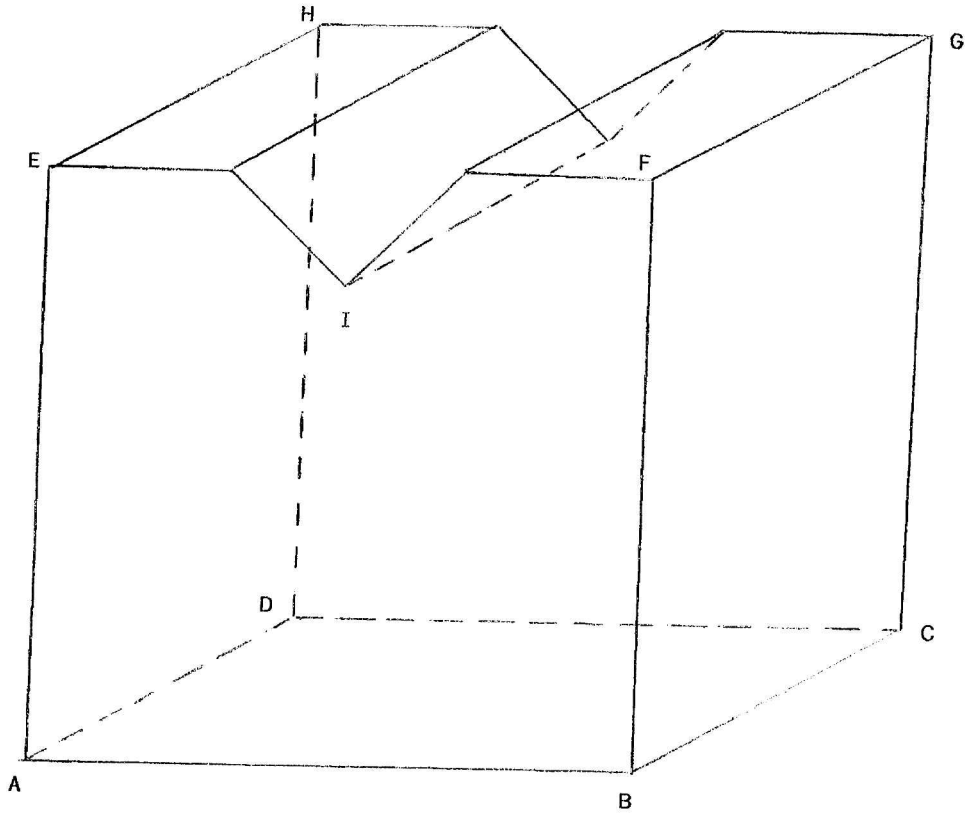
3°) Décrire le solide DICD'I'C'.

FICHE 6

Passage, sans l'aide d'une maquette, d'une représentation en PC d'un objet à une représentation du même objet dans une position différente (voir introduction du DESSIN AU DESSIN).
La difficulté, de même nature que celle de la fiche 2, est accentuée par l'absence de maquette.
La clé de la représentation réside dans le repérage puis la construction du point I. On peut tracer la hauteur IL du triangle IMN. IL est parallèle, dans la première position, perpendiculaire dans la deuxième position, au plan de projection. Elle sera donc représentée par une fuyante.



Le triangle IMN, isocèle dans la première représentation, présente un axe de symétrie ce qui n'est pas le cas dans le dessin demandé. Il sera fréquent de trouver des élèves qui veulent garder "un caractère symétrique" à la deuxième représentation.



Le dessin ci-dessus représente en PC (30°, 1/2) un cube ABCDEFGH entaillé sur sa face de dessus.
La face avant est ABFE.
Représenter ce même objet en PC (30°, 1/2) avec comme face avant la face EFGH.

FICHE 7

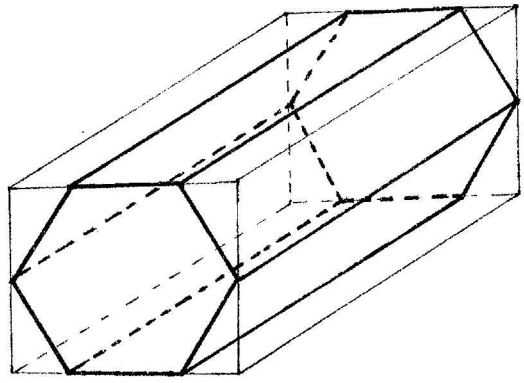
Dans les fiches précédentes, la position du solide était telle qu'il y avait toujours une face parallèle au plan de projection (face avant), ce qui n'est plus le cas dans la position choisie ci-dessous : il y aura donc dépassement des règles (voir introduction : DE L'OBJET AU DESSIN).

Représenter en PC (30°, 1/2) le prisme ABCA'B'C' de la fiche 1 en le posant sur la face ACC'A', ABB'A' étant la face "de devant".

* On dessinera en premier lieu, la face de dessous AA'C'C (rectangle représenté par un parallélogramme).
* Puis les hauteurs issues de B et B' qui sont parallèles au plan de projection (mesures sur l'objet).
* On pourra alors terminer le dessin.

FICHE 8

Les élèves doivent réaliser la maquette d'un prisme à base hexagonale à l'aide du patron que l'on trouvera au chapitre 10.
L'objectif est sa représentation en PC (30°, 1/2).
Pour le deuxième dessin, l'objet présente des arêtes ni parallèles ni perpendiculaires au plan de projection.
On pourra dans ce cas utiliser un pavé de référence introduit après le premier dessin (voir ci-contre).



* A partir du patron, réaliser la maquette d'un prisme droit dont la base est un hexagone régulier. Réaliser la PC (30°, 1/2) de ce prisme, la face avant étant une des bases hexagonales, le prisme étant posé sur une face rectangulaire.

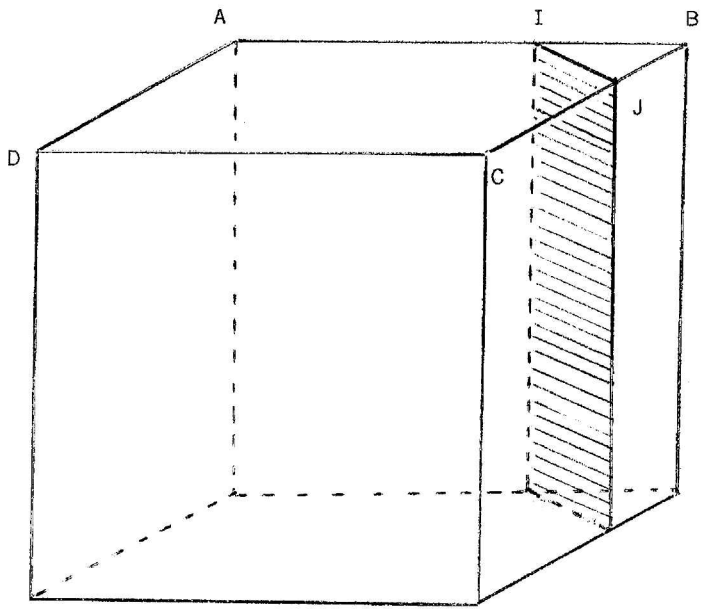
* Réaliser une PC (30°, 1/2) du prisme, une base hexagonale étant posée sur la table, une face rectangulaire étant la face avant.

FICHE 9

L'objectif est de déterminer le volume d'un prisme, à partir de la maquette ou d'une représentation en PC de l'objet

Exercice 1 : Le prisme de la fiche 1 a pour base un triangle rectangle isocèle (les côtés égaux mesurant 6 cm) et pour hauteur 6 cm. Déterminer son volume.

Exercice 2 : Le cube mesure 6 cm d'arête, I et J se trouvent à 2 cm de B.
On enlève le prisme à base triangulaire IJB.
On fait de même à partir de A, D et C.
Quel est le volume du prisme qui reste ?



Exercice 3 : Construire un hexagone régulier de 3 cm de côté et déterminer l'aire de cet hexagone (on pourra considérer les six triangles équilatéraux obtenus à partir du centre O du cercle circonscrit).
Calculer le volume du prisme droit dont la base est l'hexagone précédent, la hauteur mesure 2 cm.

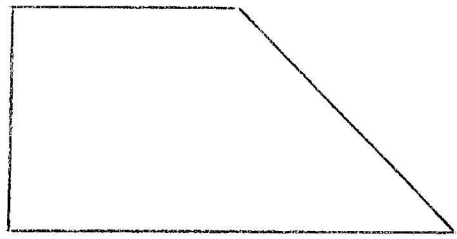
Exercice 4 : Un prisme droit possède trois faces latérales rectangulaires dont les dimensions sont 4 cm et 7 cm.
Quelle est la nature des deux bases ? En représenter une et déterminer son aire. Quel est le volume du prisme ?

FICHE 10

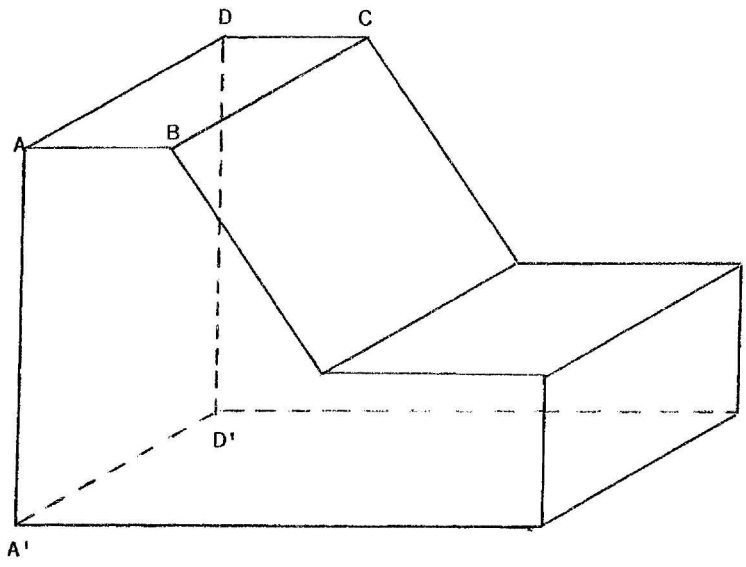
Exercices complémentaires

Exercice 1 : Un prisme a pour base un triangle équilatéral de 3 cm de côté et pour hauteur 6 cm. Représenter ce prisme posé sur une face rectangulaire, la face avant étant un triangle équilatéral, puis dans le cas où la face avant est un des rectangles.

Exercice 2 : Ceci est la base en vraie grandeur d'un prisme droit de hauteur 5 cm.
Fabriquer toutes les faces du prisme. Réaliser sa maquette.
Le représenter en PC (30°, 1/2) dans le cas où la face avant est le plus grand rectangle.
Calculer le volume de ce prisme.



Exercice 3: Représentez dans une PC (30°, 1/2) le prisme droit dont vous avez une représentation ci-dessous dans le cas où il est posé sur la face AA'D'D, la face ABCD étant la face avant.



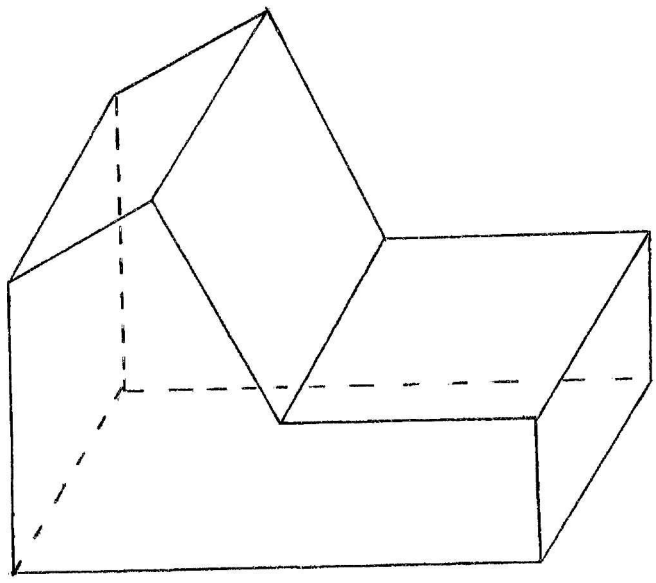
Exercice 4 : On dispose de cinq faces rectangulaires de 6 cm de long sur 2 cm de large. On veut réaliser un prisme droit dont la base est un polygone régulier.

1°) Avec trois faces rectangulaires, combien peut-on réaliser de prismes. Construire en vraie grandeur une des deux bases.

2°) Avec quatre faces rectangulaires, combien peut-on réaliser de prismes ? Construire en vraie grandeur une des deux bases.

3°) Avec cinq faces rectangulaires, combien peut-on réaliser de prismes ? Construire en vraie grandeur une des bases.

Exercice 5 : Voici le dessin en PC (60°, 1/2) d'un fauteuil d'une maison de poupée. Combien faudrait-il de tissu pour le recouvrir entièrement ?



Exercice 6 : Reprendre la fiche 5. Calculer le volume du prisme DICD'I'C'. Le comparer au volume du cube.

- Chapitre 3 -

LES PYRAMIDES

Avec la représentation en perspective cavalière d'une pyramide, il devient nécessaire de soulever de nouvelles difficultés mettant en défaut les consignes d'action pour dessiner un pavé données dans les précédents chapitres, même si un dépassement de ces consignes y a déjà été amorcé: en effet, dans ces nouveaux polyèdres, certaines arêtes ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à la face avant et de plus il peut arriver que le positionnement usuel de l'objet ne mette en évidence ni face avant ni face arrière au sens admis par l'élève, c'est-à-dire pas de face parallèle au plan de projection.

On a déjà rencontré ces difficultés de représentation avec des prismes dont une base est prise comme face de dessous (voir chapitre 2 : *les prismes*).

OBJET ET REPRESENTATION PLANE

Les exercices des fiches 1, 2 et 3 sont encore des manipulations, qu'il s'agisse de dessiner un objet (fourni à l'élève) ou de fabriquer l'objet à partir d'une représentation plane. En favorisant des interactions objet-dessin, ces fiches ont pour objectif de combattre la confusion fréquemment rencontrée entre l'objet et sa représentation plane. D'autre part, avec des polyèdres tels que les pyramides, il devient intéressant de mettre en place une pratique de représentation en vue de dessus clairement définie : cette représentation montre en vraie grandeur la face de dessous alors qu'elle est déformée sur la perspective. On peut alors effectuer des vérifications en mesurant comme sur la maquette des fiches précédentes. La fiche 4 est une application, objet absent, de l'apprentissage des fiches 1, 2 et 3.

DESSIN TECHNIQUE ET SCHEMA

Les exercices de la fiche 5 ne nécessitent pas l'utilisation d'une représentation technique : ce genre d'exercice est souvent proposé sans figure ou accompagné d'un schéma sur lequel l'angle et le rapport de réduction ne sont pas indiqués et les mesures ne sont pas respectées. Pour qui en connaît les limites, ce schéma suffit pour raisonner et obtenir par le calcul les mesures désirées. La pratique de la perspective cavalière est une étape permettant de répondre au besoin d'expérimentation de l'élève avant d'en arriver à cette démarche de type plus déductif.

QUELQUES DIFFICULTES LIEES AUX REPRESENTATIONS PLANES

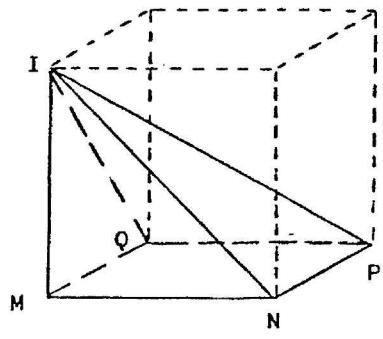
La fiche 6 propose des exercices fondés sur la conservation des rapports de longueurs par projection. Ils ne sont pas indiqués pour des débutants.

Les vues de dessus constituent un bon instrument pour mettre en évidence les rapports de réduction différents sur chaque direction de droite.

FICHE 1

Manipulation et analyse de l'objet du point de vue des positions relatives faces-arêtes.
Représentation en PC de droites ni parallèles ni perpendiculaires à la face avant. L'objet ne présente pas toujours de face avant parallèle au plan de projection mais il présente alors une face arrière.
Représentation en vue de dessus : il s'agit de mettre en défaut, en montrant plusieurs images planes d'un même objet, l'identification que fait l'élève entre l'image et l'objet.

Chaque élève dispose d'une pyramide "tiers de cube" dont les sommets sont étiquetés de la façon indiquée ci-contre :
cf. patron chapitre 10.



1. Positions des arêtes par rapport aux faces

Compléter le tableau par les symboles suivants :

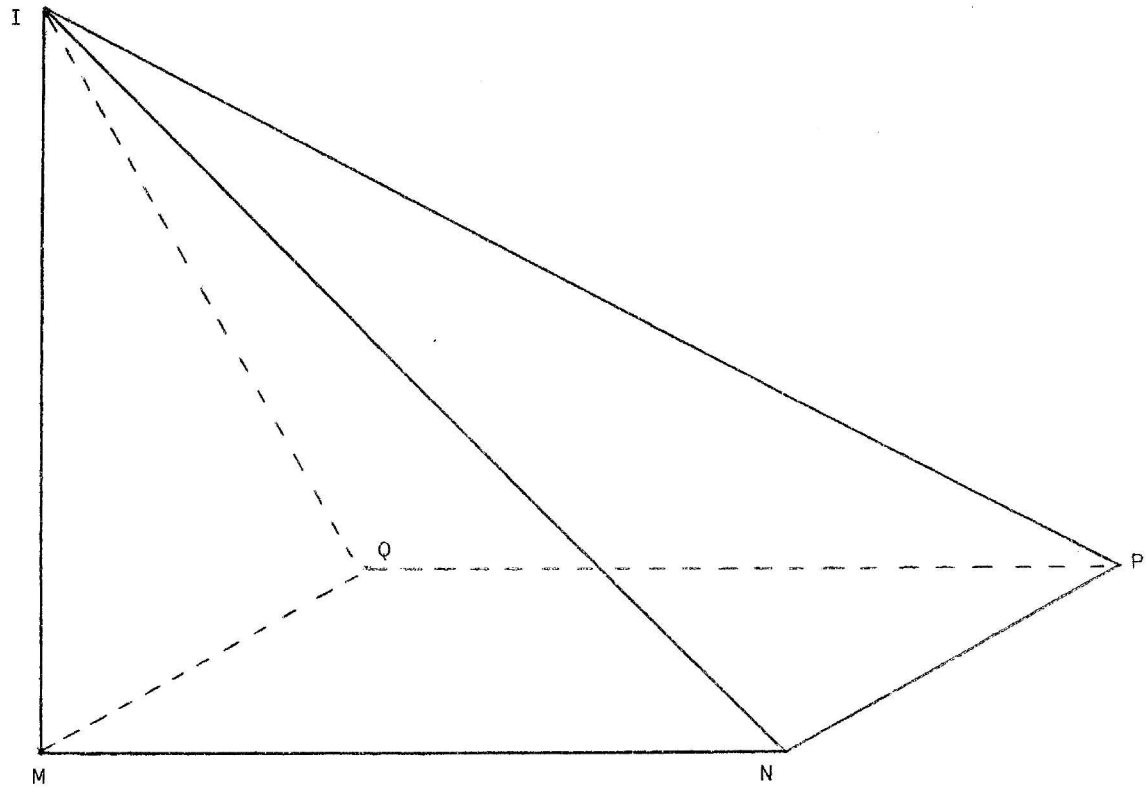
// *signifie "parallèle à ..."*

⊥ *signifie "perpendiculaire à ..."*

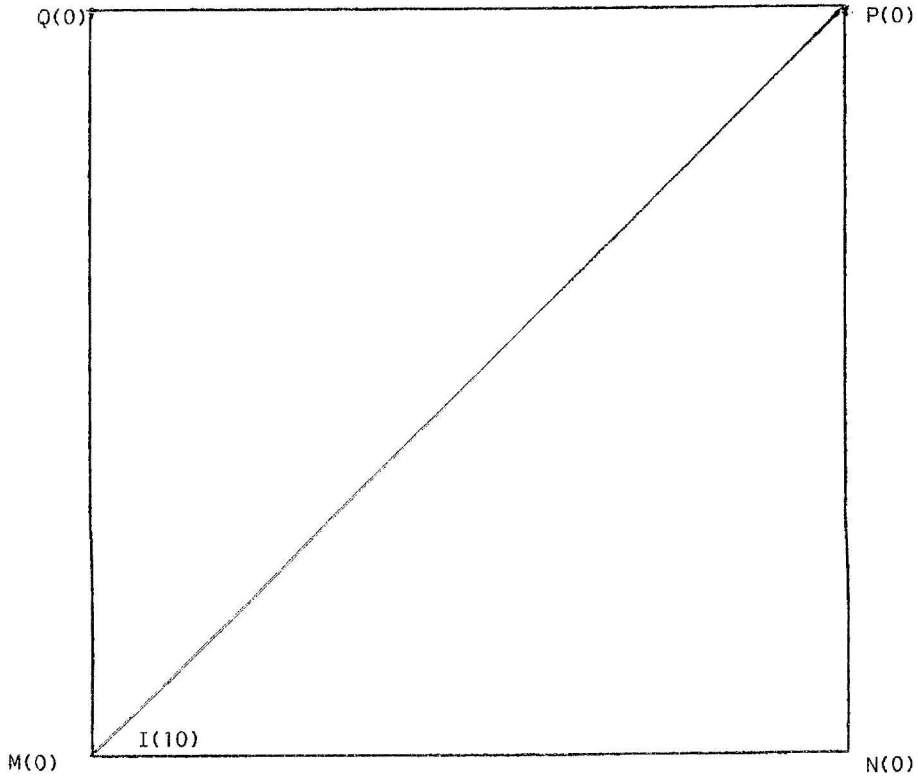
O signifie "ni parallèle ni perpendiculaire à ..."

Arêtes / Faces	IN	IP	IQ	IM	NM	NP	PQ	QM
INM								
NPQM								
IMQ								
INP								
IPQ								

2. Voici la représentation en PC(30°, 1/2) de la pyramide IMNPQ avec la face IMN comme face avant et MNPQ comme face de dessous.



La pyramide étant dans la position indiquée ci-dessus, voici une "vue de dessus cotée" de cette pyramide. Les cotes sont en cm.



Les nombres entre parenthèses, appelés "cotes", sont les distances de chaque point M, N, P, Q, I, au plan de la face de dessous, c'est-à-dire au plan de la feuille de dessin.

Représenter de la même façon en PC(30°, 1/2) puis en vue de dessus cotée la même pyramide IMNPQ dans les positions suivantes :

a) Face arrière IMQ et face de dessous MNPQ.

b) Face avant MNPQ et face de dessous INM.

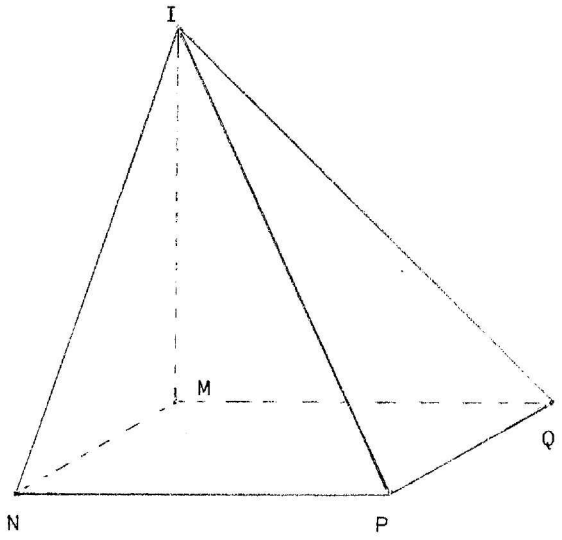
c) Face arrière MNPQ et face de dessous INM.

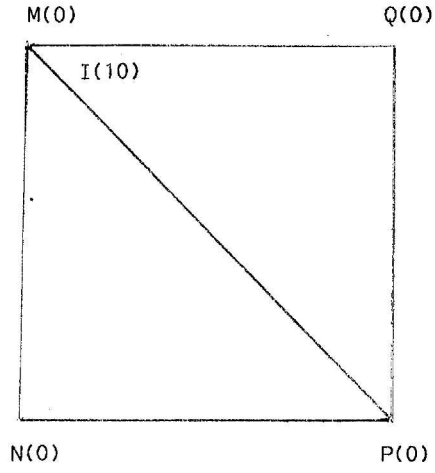
d) (plus difficile) Face arrière IMQ et face de dessous IPQ.

Corrigé de la fiche 1

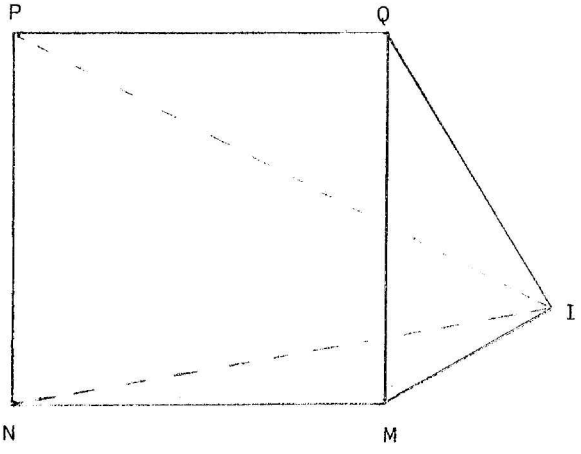
Deuxième exercice (Dessins à l'échelle 1/2)

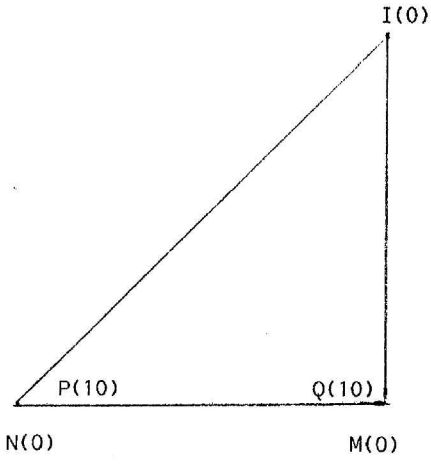
a)



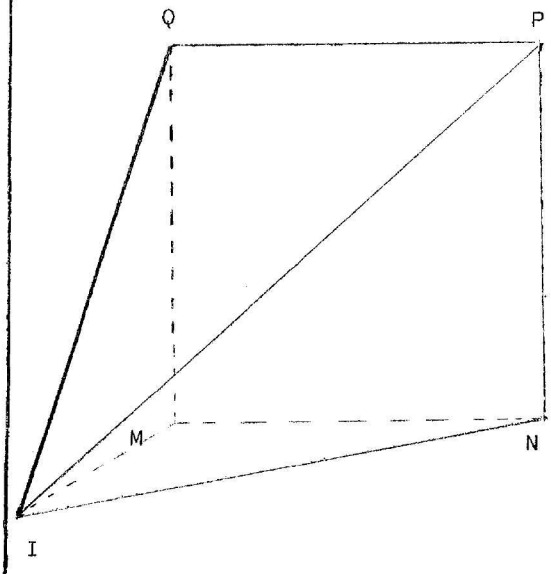


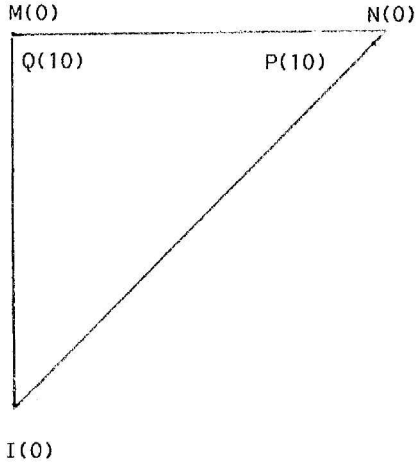
b)





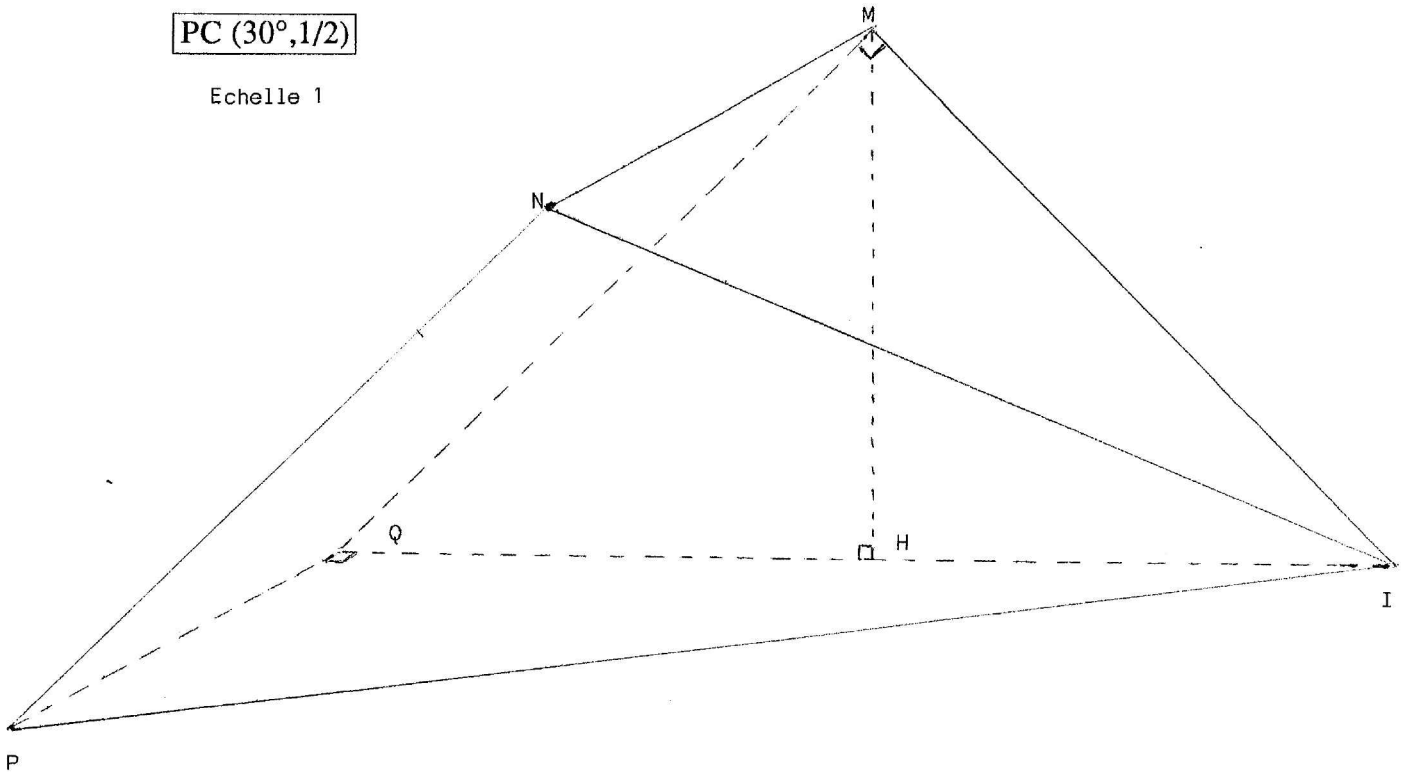
c)





PC (30°,1/2)

Echelle 1



MQI en vraie grandeur

$QI = 10\sqrt{2}$

$QI \cong 14{,}14$

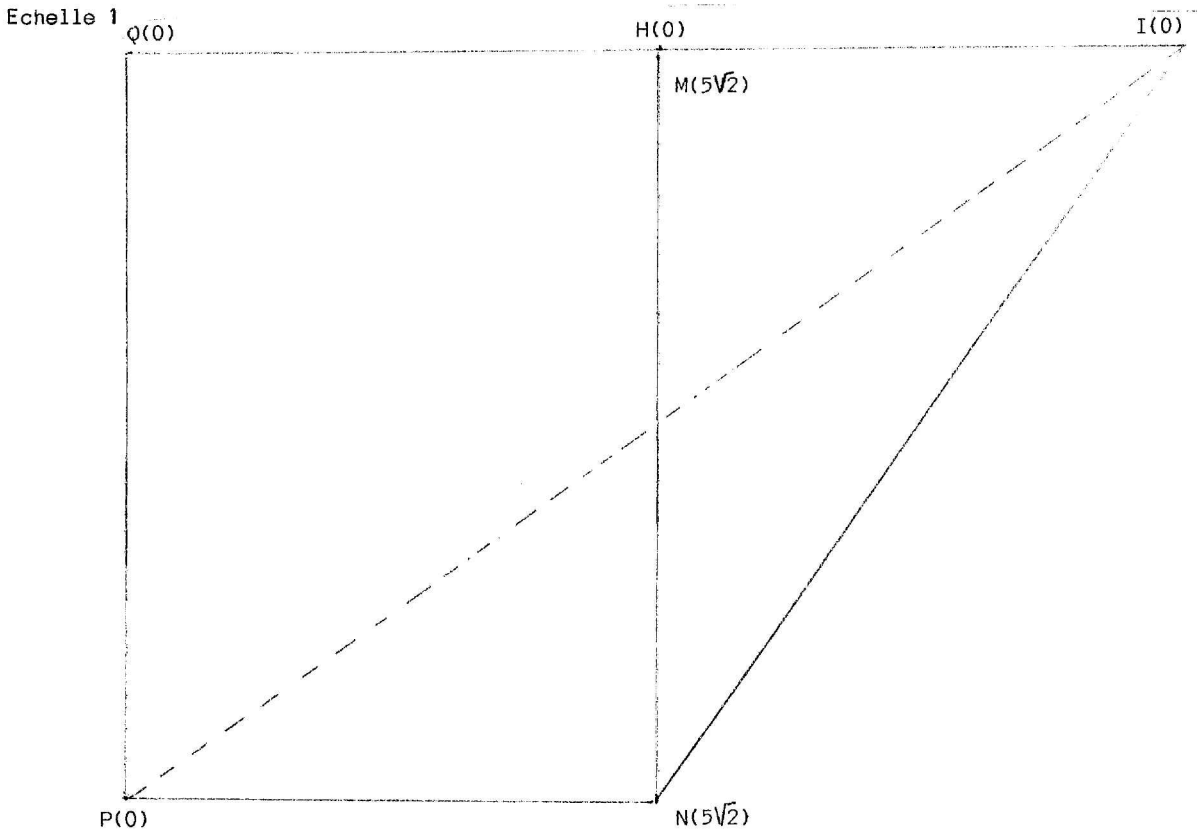
MH hauteur de MQI

$MH = 5\sqrt{2}$

$MH \cong 7{,}07$

Vue de dessus

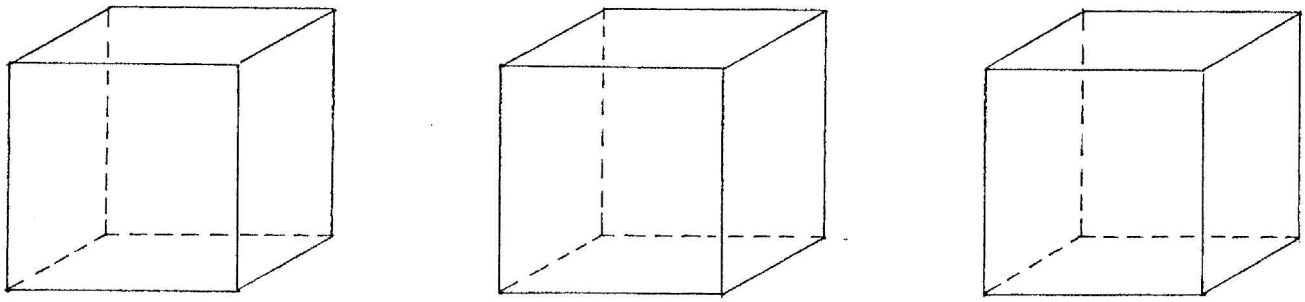
Echelle 1

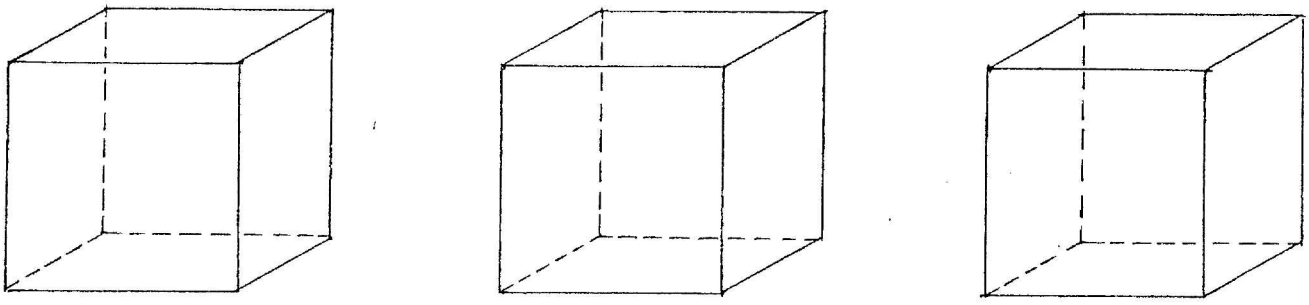


FICHE 2

L'objectif est de favoriser l'organisation de l'espace chez l'élève qui doit situer et dessiner un objet placé dans un cube de référence.
Chaque élève dispose encore de la pyramide IMNPQ utilisée dans la fiche 1 : en se groupant par trois, ils peuvent découvrir qu'il s'agit d'un "tiers de cube" en reconstituant le cube entier.
Plus généralement, un objet qui ne présente ni face avant ni face arrière parallèles au plan de projection peut être placé dans un pavé de référence pour faciliter sa représentation.

1. Sur le dessin d'un cube en PC (30°, 1/2), représenter une pyramide IMNPQ contenue dans le cube, MNPQ étant une face et I un autre sommet de ce cube.
Quel est le volume de cette pyramide ?
Répéter l'exercice en changeant la position de la pyramide dans le cube.





2. a) En utilisant quatre pyramides "tiers de cube", former une pyramide régulière à base carrée.

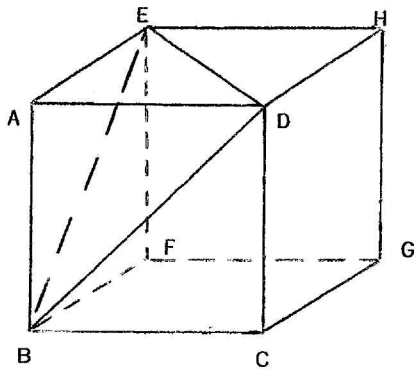
b) Représenter cette pyramide régulière en PC(30°, 1/2) avec la face carrée comme face de dessous et à l'échelle 1/2.

c) Représenter cette pyramide dans la même position que ci-dessus par une vue de dessus.

FICHE 3

Il s'agit ici de consolider l'apprentissage de la perspective cavalière par des constructions de maquettes à partir d'une représentation de l'objet en PC; ce travail manuel de fabrication doit être forcément précédé d'une analyse de l'objet à travers sa représentation.
Les exercices de cette fiche sont repris sous une autre forme et ils sont commentés au chapitre 4 (sections planes de polyèdres).
Les élèves disposent de carton, ciseaux, colle, ruban adhésif.

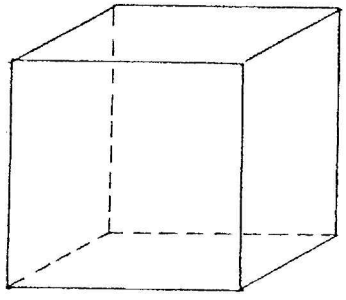
1. Le dessin suivant représente en PC (30°, 1/2) un cube en bois auquel on veut enlever le coin correspondant au sommet A : le coup de scie coupe la face de dessus suivant le segment ED, la face de gauche suivant le segment EB et la face avant suivant le segment DB.

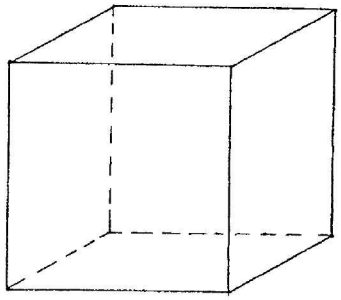


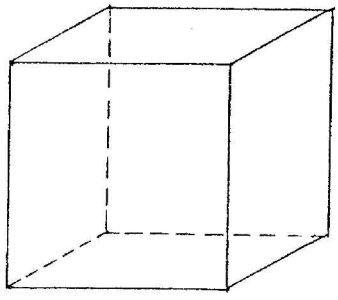
a) Repasser au stylo rouge les segments du dessin qui représente le morceau restant une fois le coin A enlevé. (écornage du coin A).

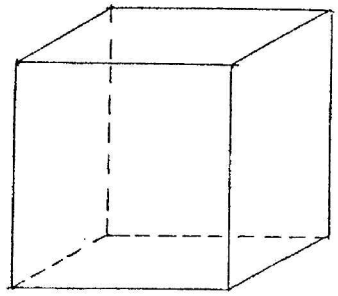
b) Le morceau enlevé est une pyramide régulière :
quelles sont ses arêtes, sa base, ses faces ?
quelle est la mesure de chaque arête ?
Fabriquer une maquette de cette pyramide.

c) Sur une représentation identique de ce cube ABCDEFGH, représenter l'écornage du coin B.
Ensuite, en reprenant à chaque fois le dessin du cube entier, réaliser la même opération avec les coins D, E et G.





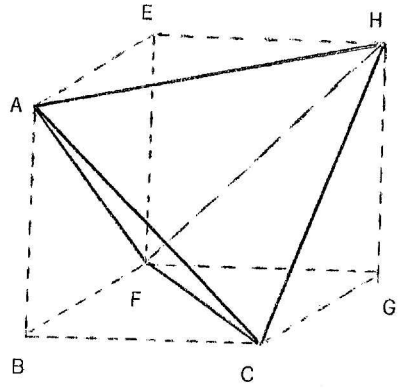




2. Le dessin ci-dessous représente un cube ABCDEFGH d'arête 5 cm privé du coin correspondant au sommet D.

a) Si on enlève à ce même cube les coins correspondants aux sommets B, E et G, comme indiqué sur le dessin, le morceau restant est encore une pyramide : repasser en rouge les segments du dessin qui représente cette pyramide.

b) Quelles sont ses arêtes, ses faces, sa base ?
Quelle est la mesure de chaque arête ?
Construire en carton cette pyramide.



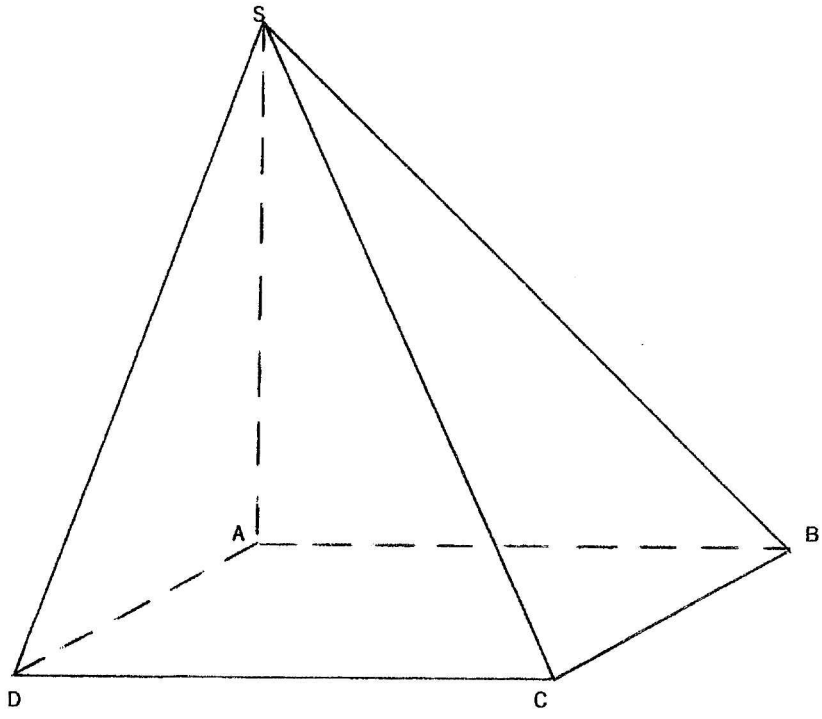
FICHE 4

Passage, sans l'aide de maquette, d'une représentation en PC d'un objet à une autre représentation en PC du même objet mais dans une position différente. Le premier objet est la pyramide "tiers de cube" déjà rencontrée. Ce type d'exercice peut nécessiter des tracés auxiliaires sur les faces.

1. Le dessin suivant représente en PC(30°, 1/2) une pyramide à base carrée ABCD et de sommet S. SAB est la face arrière. SA est la hauteur.

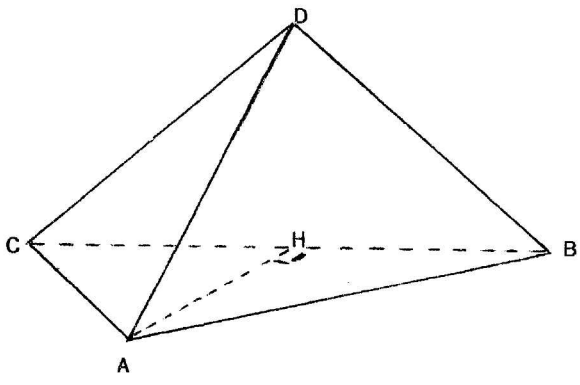
Représenter cette pyramide en PC (30°, 1/2) avec la même face arrière mais en imposant la verticalité des arêtes AB et DC.

Répéter l'exercice avec une autre position de la pyramide, au choix.



2. Le dessin suivant représente en PC (30°, 1/2) une pyramide à base triangulaire ABC et de sommet D; DBC est la face arrière. AH est une hauteur du triangle ABC. Les triangles ABC et DBC sont isocèles de base BC et les faces ABC et DBC sont perpendiculaires.

Représenter cette pyramide en PC (30°, 1/2) avec ABC comme face arrière et BCD comme face de dessous.

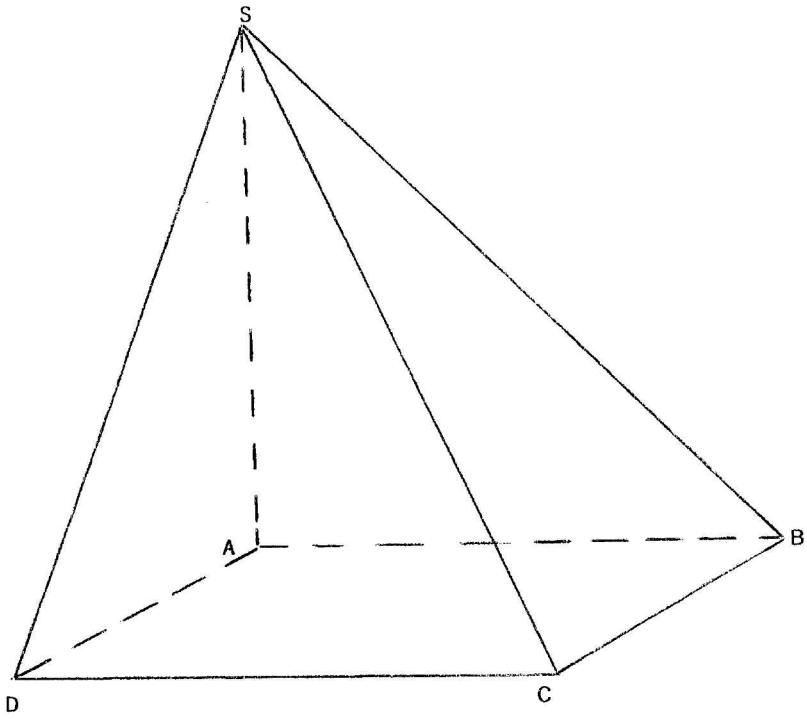


FICHE 5

Les exercices de cette fiche demandent des raisonnements et des calculs à l'aide d'une représentation en PC accompagnée des données nécessaires à l'identification sans ambiguïté de l'objet. On peut donner les textes sans figure laissant ainsi à l'élève le choix entre une représentation en PC ou des schémas moins techniques.

1. On donne une pyramide à base carrée ABCD et de sommet S, de sorte que l'arête AS soit perpendiculaire à la face ABCD. Sachant que le côté du carré de base et la hauteur AS mesurent 7 cm, évaluer les longueurs suivantes en vraie grandeur.

SD = ... cm
SB = ... cm
AC = ... cm
SC = ... cm



Représentation en PC (30°, 1/2)

2. Dans le tableau ci-dessous, chaque colonne correspond à une pyramide régulière de sommet S et de hauteur SG avec SG = 5 cm :

1ère colonne : la pyramide SABC a pour base le triangle équilatéral ABC

2ème colonne : la pyramide SABCD a pour base le carré ABCD

3ème colonne : la pyramide SABCDEF a pour base l'hexagone régulier ABCDEF

Dans les trois cas on a AB = 4 cm et on appelle H le milieu de AB.

Compléter ce tableau.

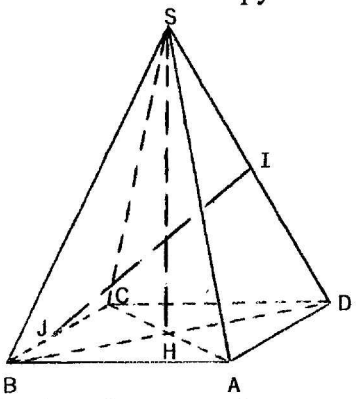
	1 *Pyramide SABC*	2 *Pyramide SABCD*	3 *Pyramide SABCDEF*
GA en cm			
SA en cm			
SH en cm			
Aire latérale en cm^2			
Aire de base en cm^2			
Volume en cm^3			

On donnera les valeurs exactes des résultats ainsi que les valeurs arrondies à 10^{-1} près.

FICHE 6

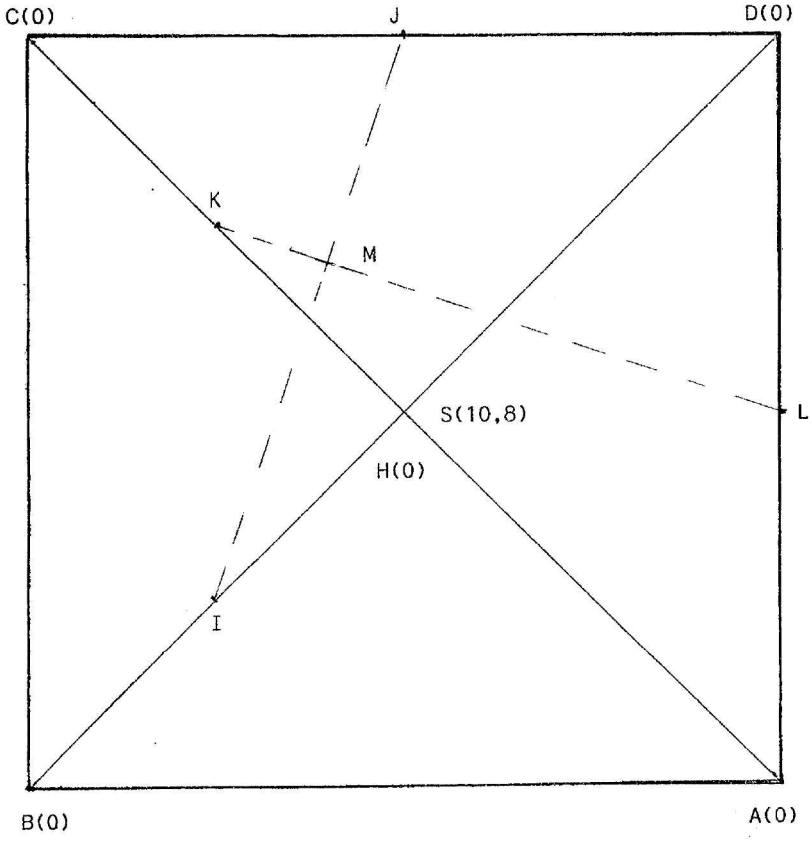
Il s'agit d'un travail plus poussé à propos des droites ni parallèles ni perpendiculaires au plan de projection.
La non bijectivité des représentations est mise en évidence et l'on utilise la conservation des rapports de longueurs.On réutilise ici les notions de vues de dessus cotées abordées dans la fiche 1.

1. Le dessin suivant représente en PC (30°, 1/2) une pyramide régulière à base carrée ABCD et de sommet S.
ABCD est choisie comme face de dessous.
SH est la hauteur de cette pyramide. I est le milieu du segment SD et J le milieu de BC.



Les segments IJ et SH ont-ils réellement un point commun ?
Justifier la réponse par une vue de dessus.

2. Le dessin suivant représente en vue de dessus une pyramide régulière à base carrée ABCD et de sommet S. AB = 10 cm.
ABCD est la face de dessous. SH est la hauteur de cette pyramide. I, J, K et L milieux respectifs de SB, CD, SC et AD. SH = 10,8 cm.



a) Les segments IJ et KL ont-ils réellement un point commun ? Justifier la réponse par une PC (30°, 1/2).
b) Sur la vue de dessus, quelles sont les cotes des points J, L, I et K ?
c) Sur la vue de dessus, les segments KL et IJ se coupent en M. Situer ce point sur la perspective cavalière selon qu'il appartienne à KL ou à IJ. Mesurer sa cote dans chaque cas ?

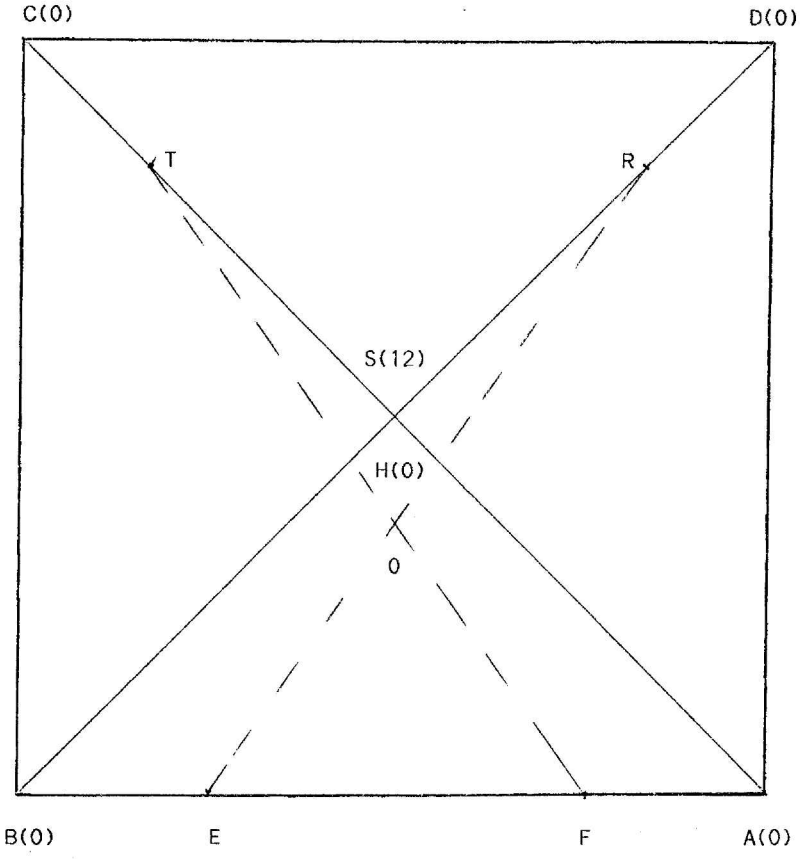
3. Le dessin suivant représente en vue de dessus une pyramide régulière à base carrée ABCD et de sommet S. AB = 10 cm.

ABCD face de dessous, SH hauteur, SH = 12 cm.

R est le point de l'arête SD situé au tiers de la longueur de cette arête à partir de D.

T est le point de l'arête SC situé au tiers de la longueur de cette arête à partir de C.

E et F sont les points de AB situés au quart de sa longueur à partir respectivement de B et de A.



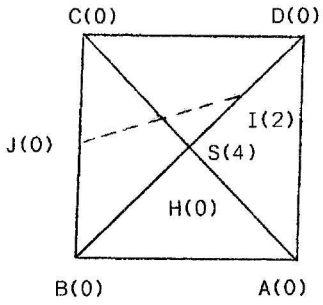
a) Quelles sont les cotes de R, T, E et F ? Justifier la réponse par un calcul et vérifier par des mesures sur une PC (30°, 1/2).

b) Sur la vue de dessus les droites (RE) et (TF) se coupent en 0. Situer ce point 0 sur la PC (30°, 1/2) selon qu'il appartienne à la droite (RE) ou (TF) : peut-on justifier le résultat observé ?

Corrigé de la fiche 6

Sur les vues de dessus comme sur les perspectives cavalières, le milieu est conservé : cela peut être admis ou justifié par le théorème de projection du milieu.

1.



Cette figure est réalisée à partir des mesures relevées sur la figure de l'énoncé AB = BC = CD = DA = 3 cm

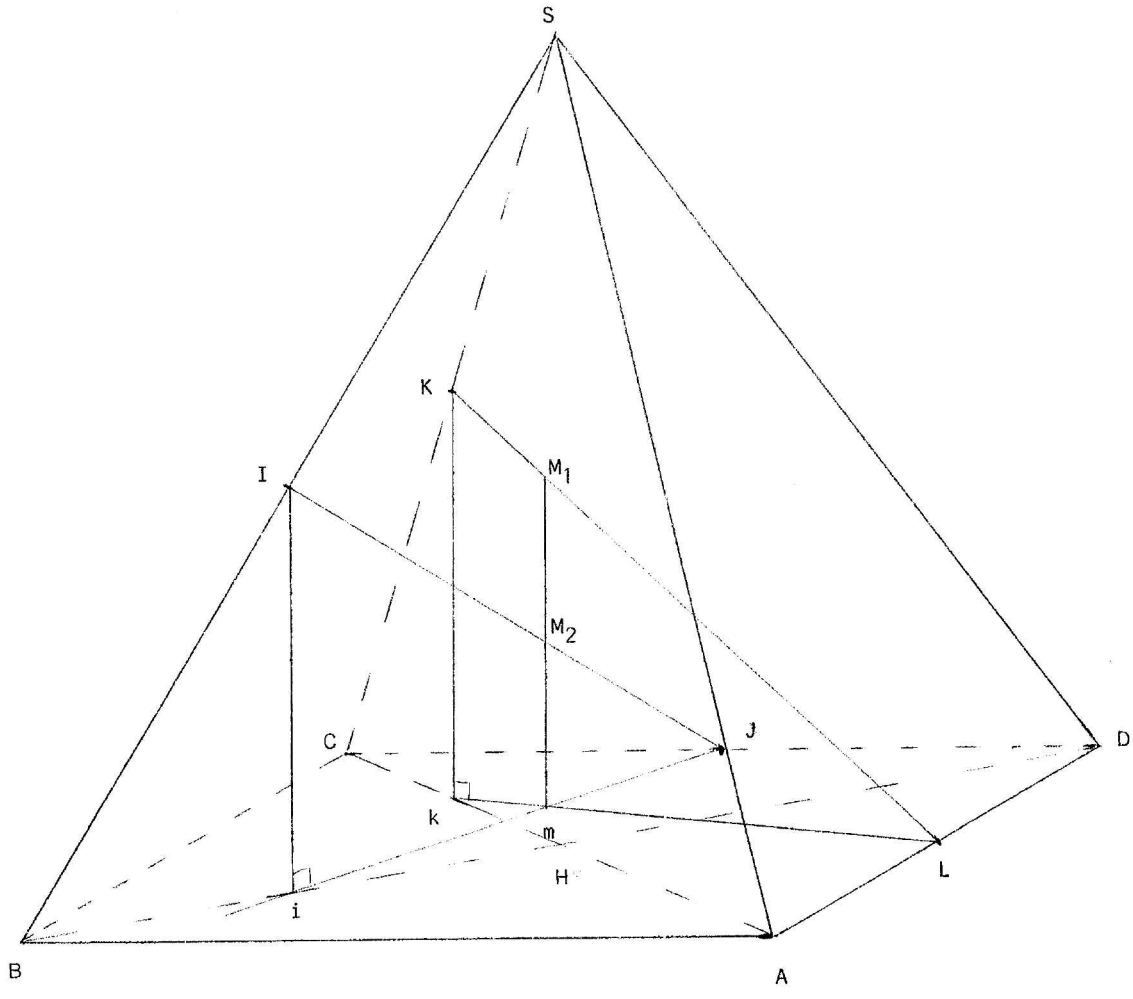
SH = 4 cm

La cote de I peut être calculée avec le théorème de Thalès dans SHD.

La droite (SH) n'a pas de point commun avec (IJ).

2.

Pour plus de clarté, on a intérêt à ne pas tracer (SH) sur la PC (30°, 1/2) suivante :



a) On voit que les segment IJ et LK n'ont pas de point commun.

b) J et L dans le plan (ABCD) ont pour cote 0.

Les cotes de I et K peuvent être obtenues par mesure de iI et kK sur la perspective ou bien par le théorème de Thalès dans les triangles SHB et SHC. On trouve $\frac{SH}{2} = 5,4$ cm.

c) Le point M peut représenter M_1 sur (KL) ou bien M_2 sur (IJ). Les cotes de ces points sont obtenues par mesures de mM_1 et mM_2. Un calcul rigoureux passerait pas la localisation de M sur la vue de dessus.

$mM \cong 4,32$ cm $\qquad$ $mM \cong =2,16$ cm

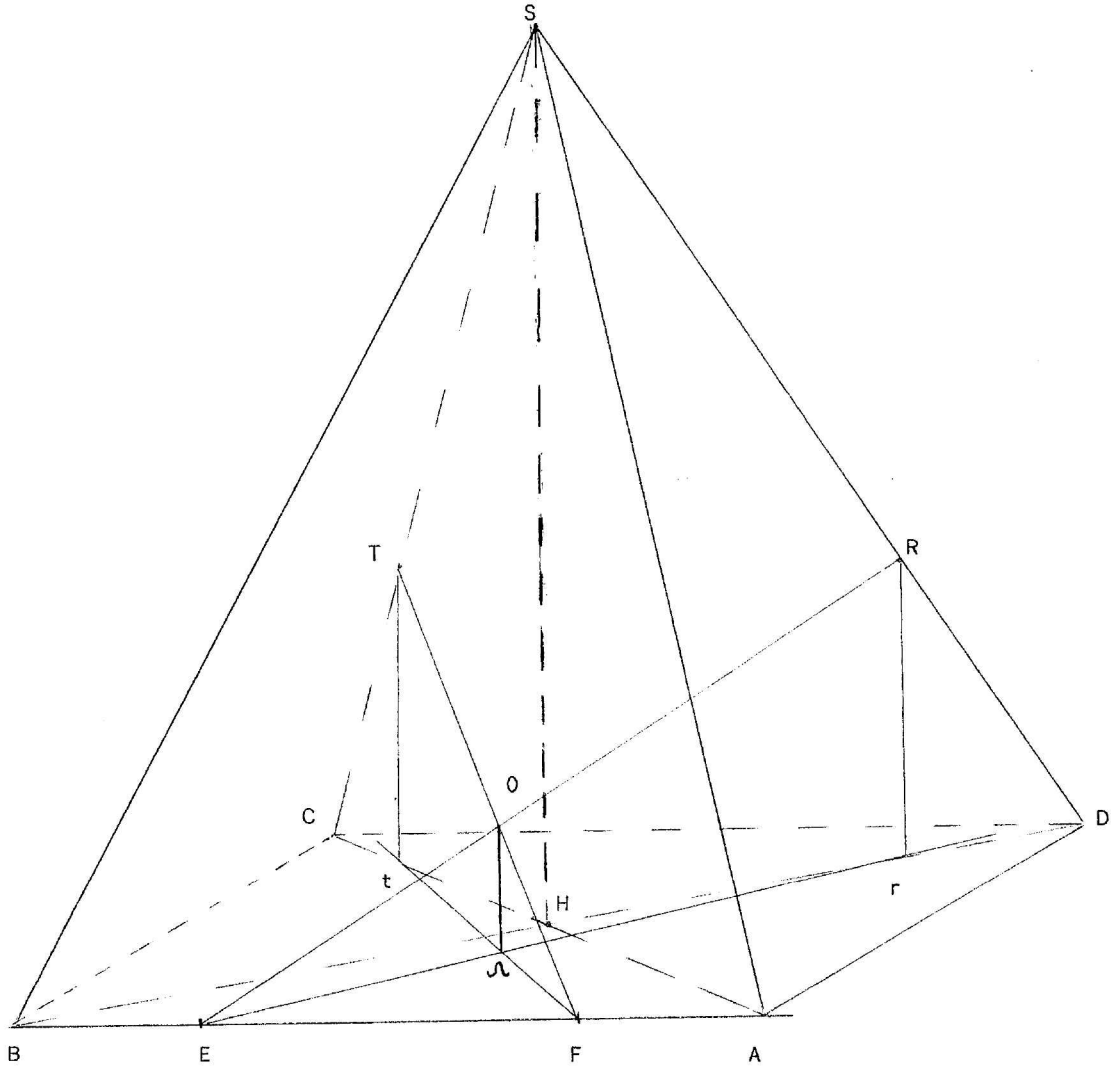
On peut aussi observer sur la vue de dessus que M est situé plus près de K(5,4) que de L(0) sur le segment KL : sa cote est donc supérieure à celle du milieu de ce segment qui est $\frac{5,4}{2}$.

De même, ce point M est plus près de J(0) que de I(5,4) sur le segment IJ : sa cote est donc inférieure à celle du milieu de ce segment qui est encore $\frac{5,4}{2}$.

Ainsi, M n'a pas la même cote selon qu'il appartienne à l'un ou l'autre de ces segments.

3°)

Le dessin en PC(30°;1/2) ci-dessous n'est pas nécessaire pour répondre aux questions de cet exercice mais l'objectif est de favoriser l'apprentissage de la vision de l'espace par comparaison de deux représentations différentes du même objet.



a) E et F dans le plan ABCD ont pour cote 0.

Par le théorème de Thalès dans SHC et SHD, on obtient la cote 4 cm pour les points T et R ($\frac{1}{3}$ SH).

tT = rR = 4 cm

b) On observe que les droites (TF) et (ER) se coupent réellement en 0 : si Ω est l'intersection des projetées orthogonales (tF) et (rE) des droites (TF) et (RE), (Ω0) est bien une projetante.

On peut observer en outre que (TR) est parallèle à (CD) d'après la réciproque de Thalès dans le triangle SCD, donc (TR) est parallèle à (EF). Les droites (TR) et (EF) déterminent donc un plan et ce plan contient (TF) et (RE) qui sont bien des droites sécantes.

- Chapitre 4 -

SECTIONS PLANES DE POLYEDRES

L'étude des sections planes des polyèdres rencontrés en géométrie de l'espace a une grande importance à plusieurs titres.

Tout d'abord, les sections précisent la forme d'un polyèdre donné, donc aident à structurer (ou restructurer) l'image que l'on a de celui-ci..

D'autre part, les sections planes font apparaitre de nouveaux polyèdres, facilitent leur représentation et mettent en évidence des propriétés déduites de celles des polyèdres initiaux. C'est le cas, dans le cadre de cette étude, du tétraèdre régulier construit à partir du cube.

Enfin, les sections planes interviennent fréquemment dans la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace, soit pour préciser la position relative de certains éléments, droites ou points, soit pour se ramener à un problème de géométrie plane.

Nous proposons dans ce chapitre des idées pour étudier des sections planes du cube et du tétraèdre, et pour résoudre quelques problèmes liés à ces sections.

Il va de soi que chaque enseignant, suivant le niveau où il introduira des activités sur les sections, aura à effectuer un travail d'adaptation des énoncés destinés aux élèves.

PLAN DU CHAPITRE

Première partie : sections du cube

I. *Approche générale*
Nomenclature de toutes les sections planes d'un cube pour fixer le cadre théorique du problème.

II. III. IV. *Présentation des constructions géométriques de sections du cube.*
Pour prendre conscience de l'espace à partir du dessin.

V. *Etude des triangles ayant pour sommets trois sommets du cube.*
Activité pouvant faire intervenir des problèmes de dessin, des problèmes d'incidence et des problèmes de dénombrement.

VI. *Deux écornages du cube*
Activités sur les dessins et des maquettes.

Deuxième partie : étude de l'ensemble cube - tétraèdre régulier inscrit

Situation spatiale très riche qui fait l'objet de nombreux exercices, mettant en jeu le dessin, les propriétés d'incidence, des calculs numériques et des transformations.

Le chapitre se termine par une série d'exercices variés sur le sujet et par quelques remarques importantes sur les problèmes de représentation du cube en perspective cavalière.

Remarque :

Lorsque l'angle et le coefficient de la perspective cavalière utilisée ne seront pas précisés sous le dessin, il s'agira de perspectives cavalières (30°, 1/2).

SECTIONS DU CUBE

I. APPROCHE GENERALE

Quels sont les polygones que l'on peut obtenir en coupant un cube par un plan ?

Remarquons tout d'abord qu'on ne peut pas obtenir un polygone de plus de six côtés, le cube ayant six faces. D'autre part, on ne peut obtenir :

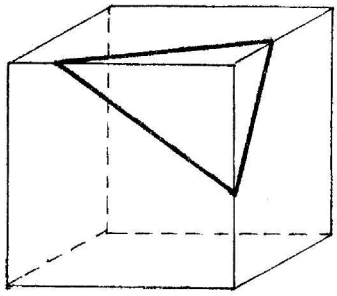
* ni un quadrilatère quelconque, ni un pentagone régulier, car deux côtés, au moins de la section, sont parallèles,
* ni un triangle rectangle. Si la section d'un cube a un angle droit, un au moins des côtés de la section est parallèle à une arête du cube. Les deux côtés de la section adjacents à ce côté sont situés dans des faces parallèles du cube et sont, de ce fait, parallèles. La section ne peut donc pas être un triangle.
* ni un trapèze rectangle. En poursuivant le raisonnement précédent, on montre que si une section du cube a un angle droit, elle a quatre angles droits, c'est donc un rectangle ou un carré.

En résumé, une section plane d'un cube peut être :

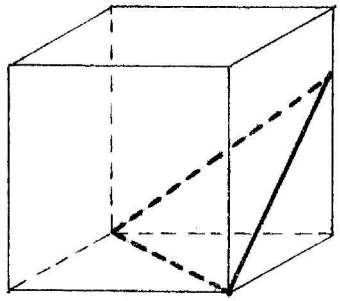
* un triangle quelconque, isocèle ou équilatéral,
* un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, un trapèze quelconque ou isocèle,
* un pentagone dont quatre côtés sont deux à deux parallèles,
* un hexagone régulier ou non dont les six côtés sont deux à deux parallèles.

La page suivante donne une représentation de ces différentes sections possibles.

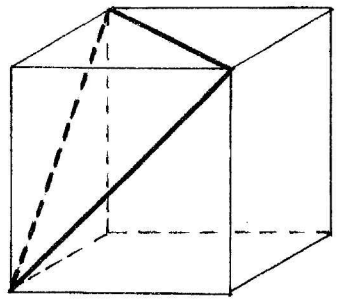
TRIANGLES



Quelconque

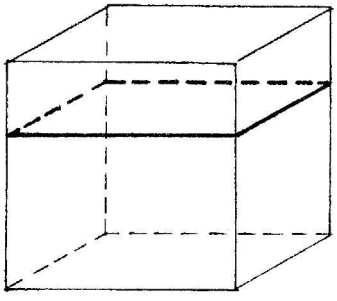


Isocèle

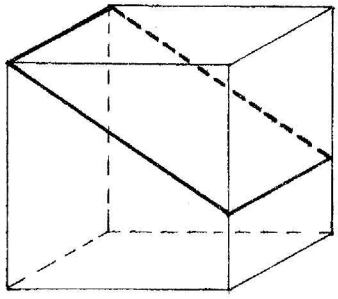


Equilatéral

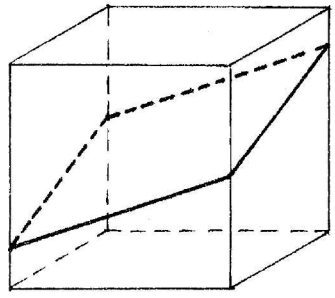
QUADRILATERES



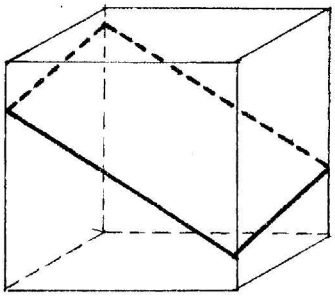
Carré



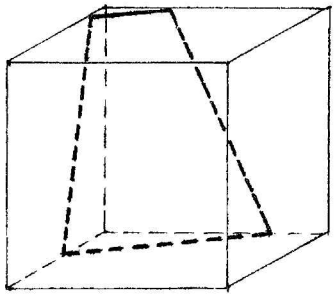
Rectangle



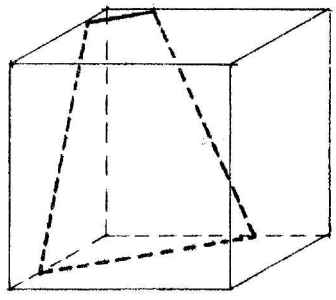
Losange



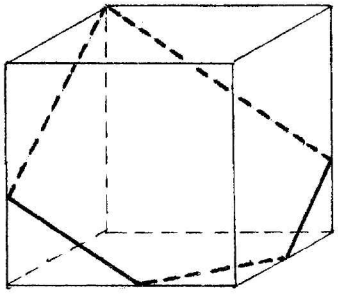
Parallélogramme



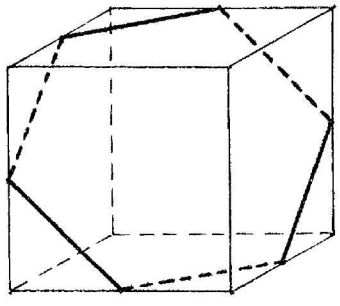
Trapèze quelconque



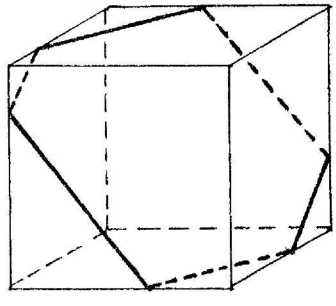
Trapèze isocèle



Pentagone



Hexagone régulier



Hexagone non régulier

II. CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DE LA SECTION D'UN CUBE PAR UN PLAN DEFINI PAR TROIS POINTS SITUES SUR DES ARETES

Ces constructions sont à réaliser avec une règle non graduée et une équerre pour tracer des parallèles.

Elles sont effectuées sur des représentations d'un cube de 8 cm d'arête, dans une perspective cavalière d'angle 30° et de coefficient 1/2.

On peut, dans la pratique, soit demander à l'élève de dessiner la représentation du cube, soit la lui fournir. On peut aussi demander une justification des constructions et la nature des polygones obtenus. Les exercices de construction sont importants dans l'apprentissage car ils partent d'une phase expérimentale qui nécessite certaines justifications et peuvent déboucher sur des démonstrations.

Ces constructions sont justifiées par deux propriétés :

1/ Deux côtés de la section sont parallèles s'ils sont :

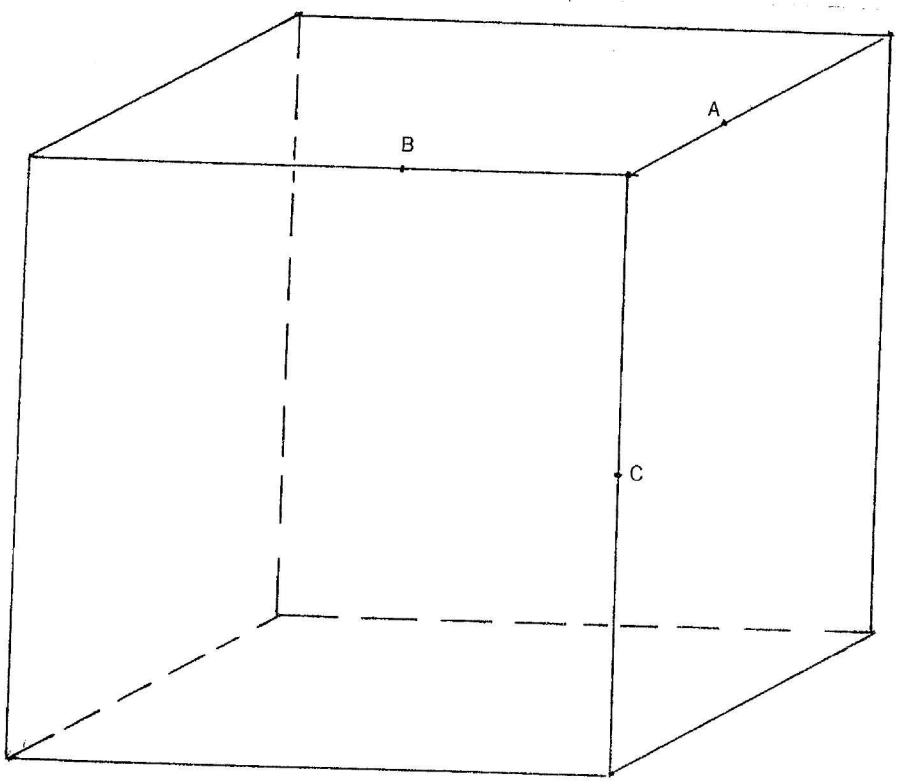
* soit situés dans des faces parallèles du cube
* soit parallèles à une arête du cube

2/ Les supports de deux côtés non parallèles de la section se coupent sur le support d'une arête du cube.

"Dessiner la section du cube par le plan passant par les points A, B et C situés sur trois arêtes du cube".

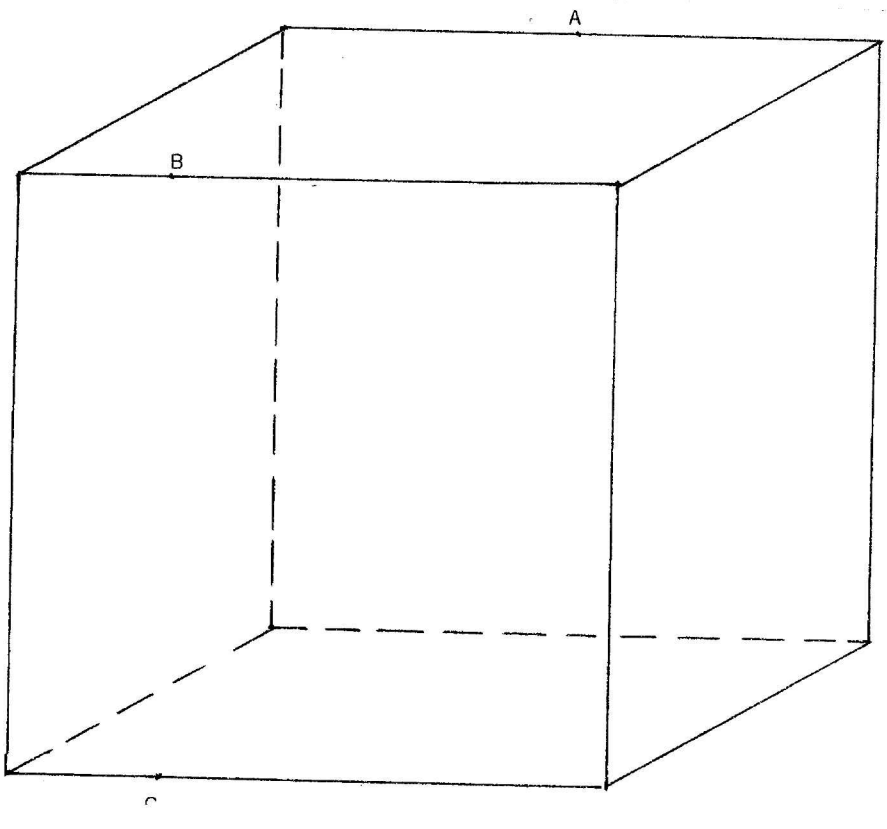
Exercice 1 :

A est à 3 cm du coin le plus proche, B est à 3 cm du même coin, C est à 4 cm du même coin.



Exercice 2 :

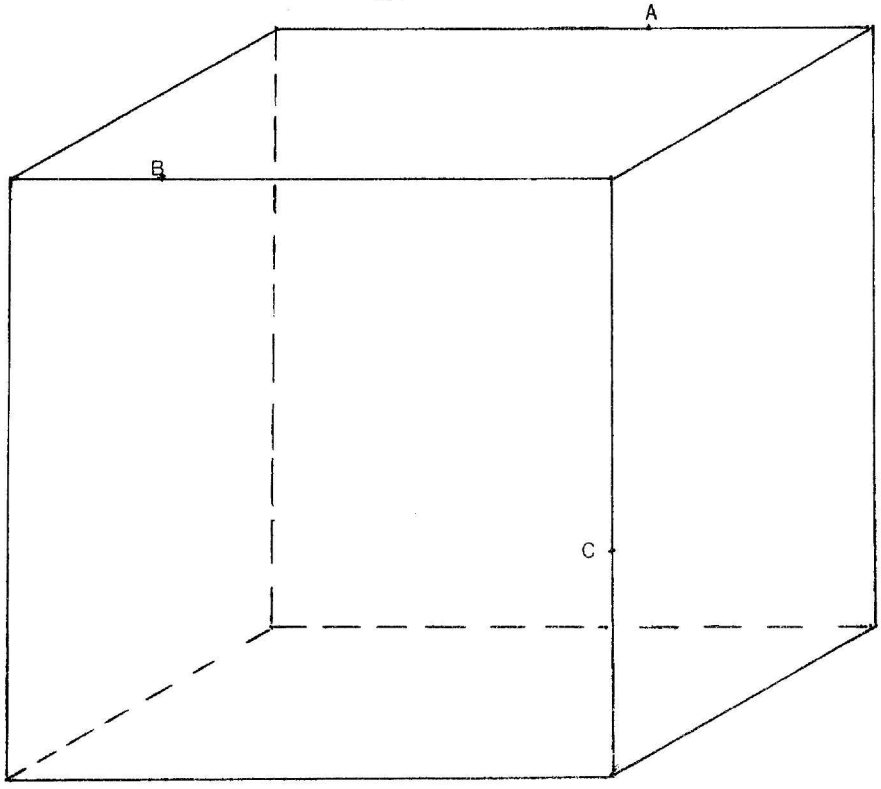
A est à 4 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 2 cm du coin le plus proche.



"Dessiner la section du cube par le plan passant par les points A, B et C situés sur trois arêtes du cube".

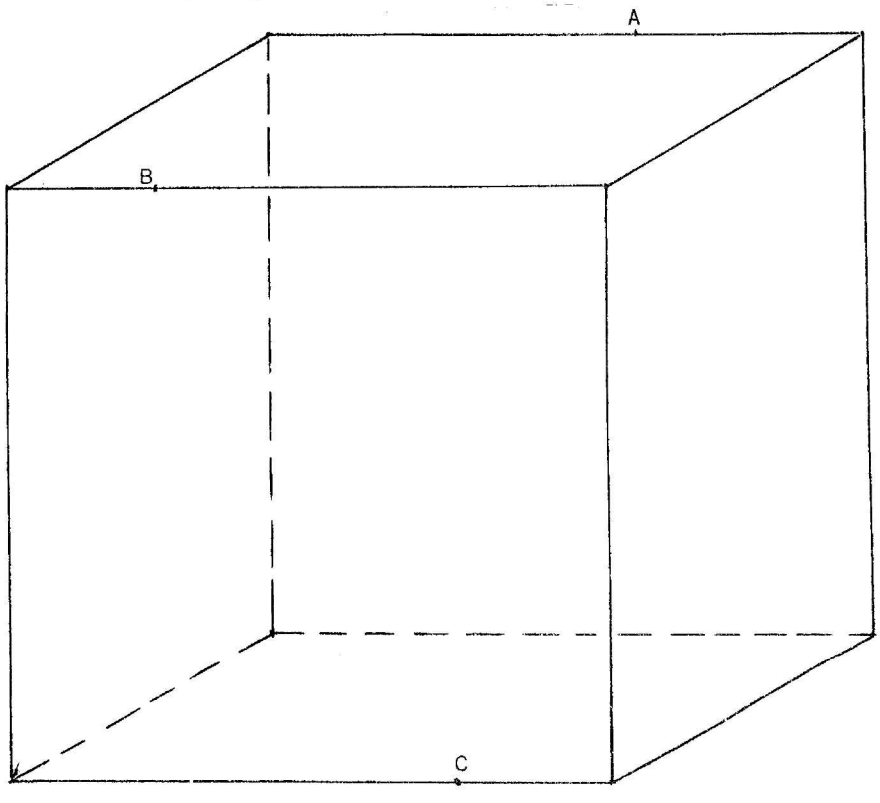
Exercice 3 :

A est à 3 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 3 cm du coin le plus proche.



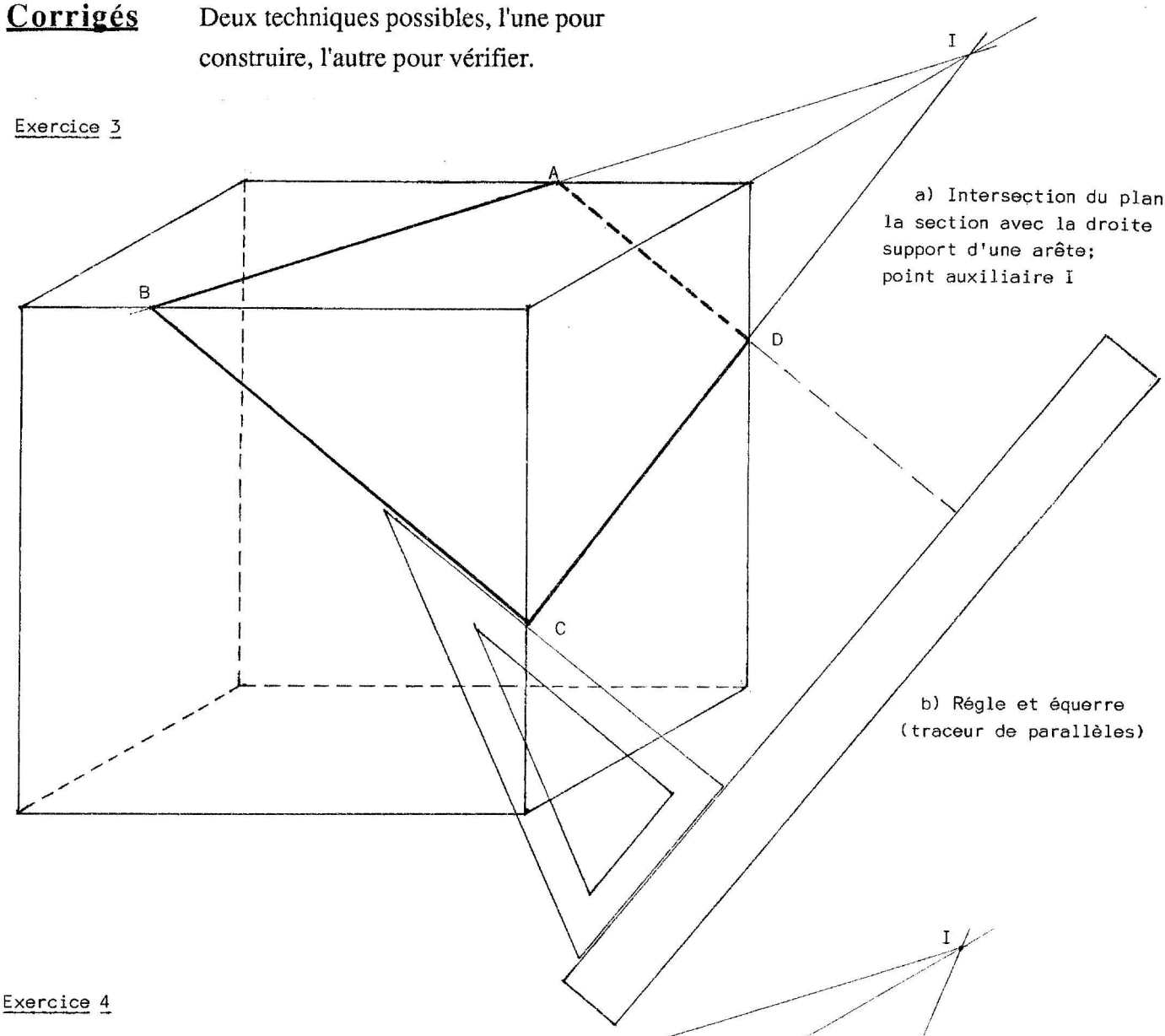
Exercice 4 :

A est à 3 cm du coin le plus proche, B est à 2 cm du coin le plus proche, C est à 2 cm du coin le plus proche.



Corrigés Deux techniques possibles, l'une pour construire, l'autre pour vérifier.

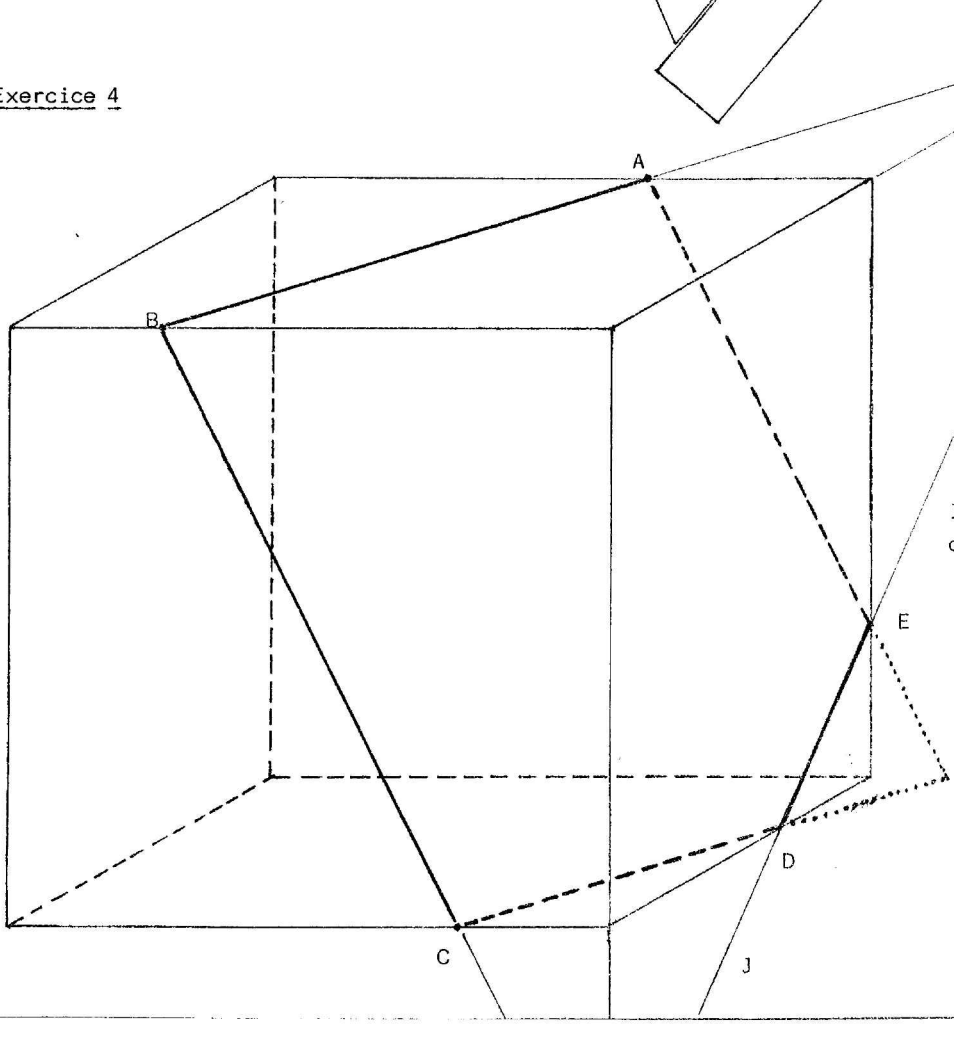
Exercice 3



a) Intersection du plan de la section avec la droite support d'une arête; point auxiliaire I

b) Régle et équerre (traceur de parallèles)

Exercice 4



a) Deux points auxiliaires I et J à l'intersection du plan de la section et de supports d'arêtes du cube.

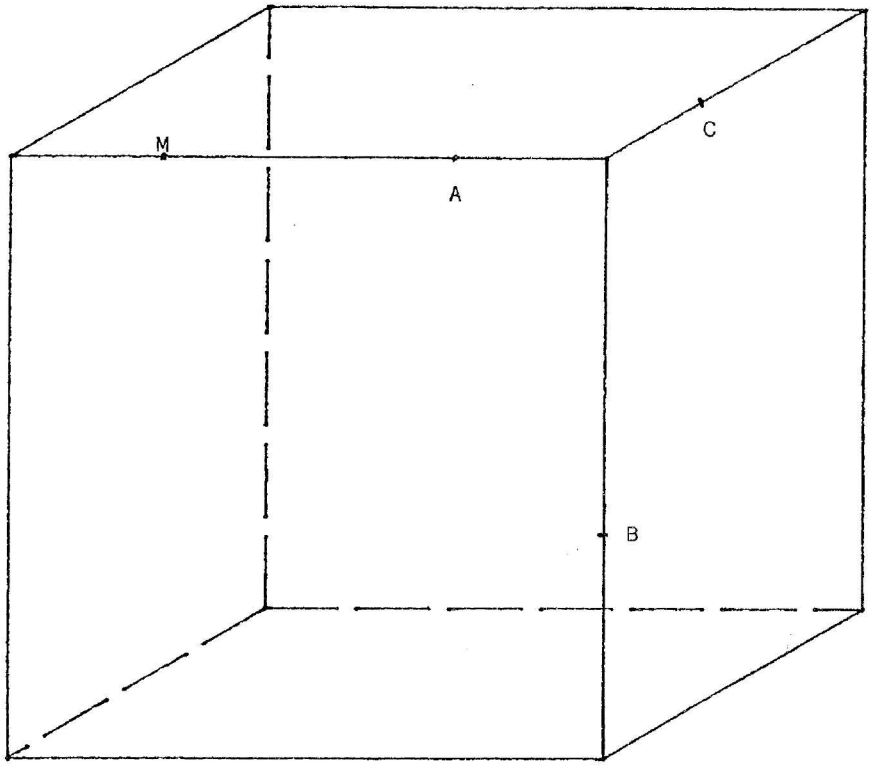
b) Avec la règle et l'équerre, le pentagone n'est qu'un "morceau" de parallélogramme.

III. CONSTRUCTION DE LA SECTION D'UN CUBE PAR UN PLAN PASSANT PAR UN POINT DONNE SUR UNE ARETE ET PARALLELE A UNE SECTION DONNEE

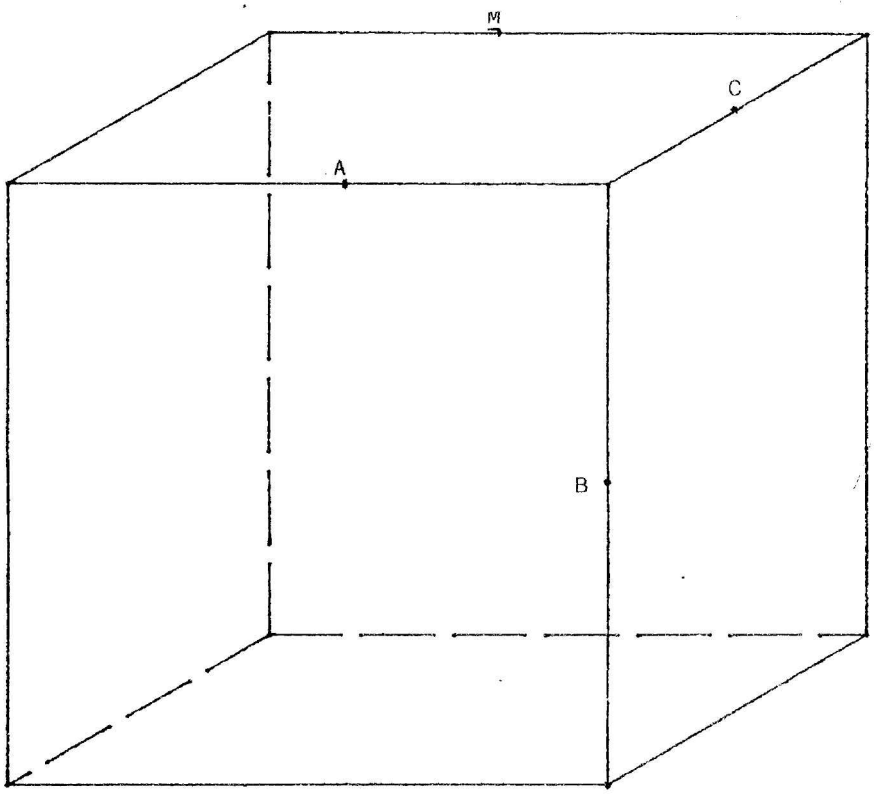
Ces exercices, tout en étant du même type que les précédents, sont différents car ils ne nécessitent que des tracés de droites parallèles validés par le fait que deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan suivant deux droites parallèles.

***Consigne** : construire la section du cube par un plan passant par le point M et parallèle au plan du triangle ABC.*

Exercice 1 :



Exercice 2 :



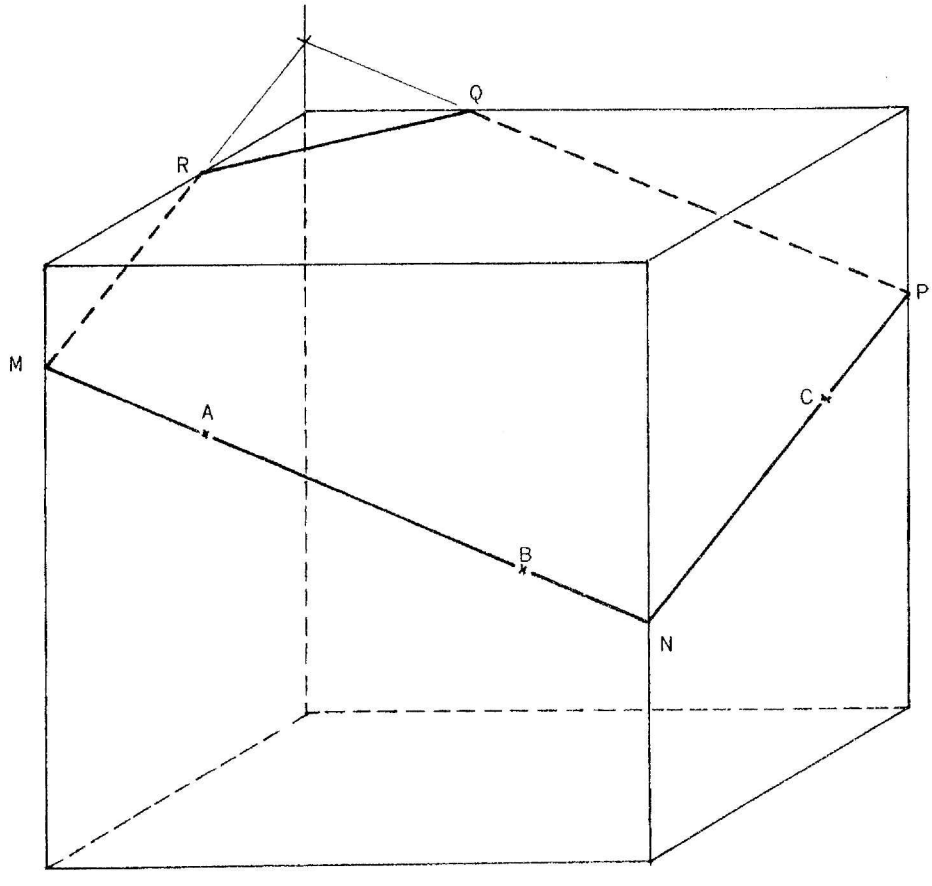
IV. CONSTRUCTION DE LA SECTION D'UN CUBE PAR UN PLAN DEFINI PAR TROIS POINTS SITUES DANS DES FACES DU CUBE.

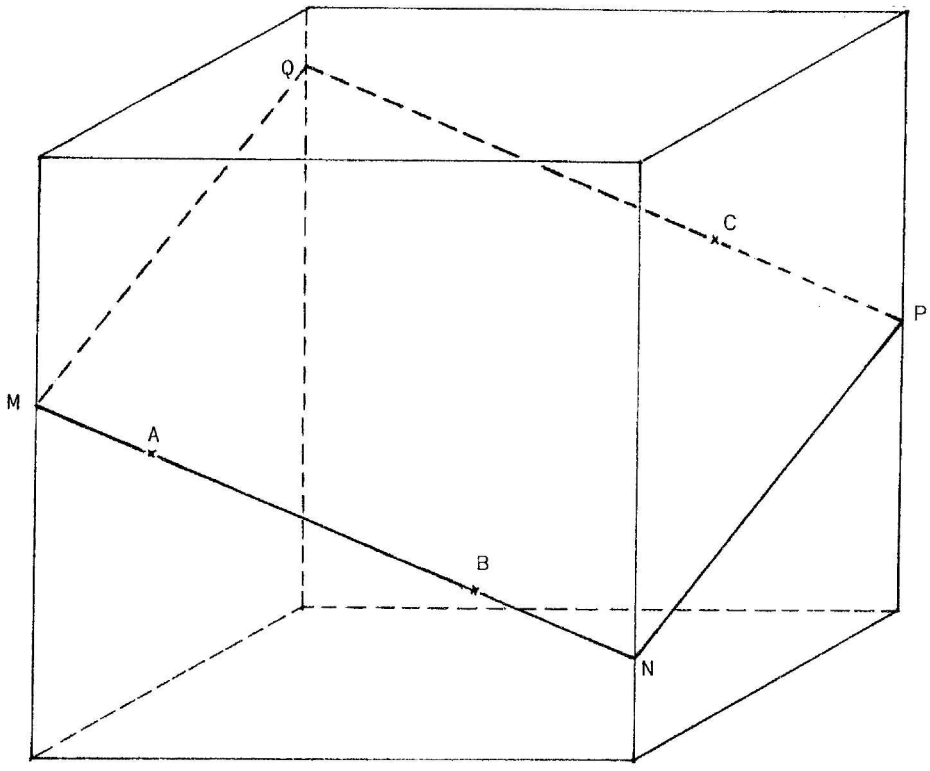
Cette construction est nettement plus difficile que la précédente car, en plus des techniques déjà mises en oeuvre, elle nécessite l'utilisation d'un ou plusieurs plans auxiliaires, définis par deux des points donnés et un point de l'arête du cube commune aux faces contenant ces deux points. La construction de l'intersection du plan auxiliaire avec le plan d'une face du cube permet de déterminer l'intersection de la droite qui passe par les deux points donnés avec le plan de la face du cube. On doit réaliser cette construction une seule fois si les trois points sont dans trois faces non parallèles, deux fois si deux des points sont dans des faces parallèles.

Premier cas : Deux des trois points sont dans une même face du cube.

La portion de la droite définie par ces deux points, contenue dans la face du cube, est un des côtés de la section , et on est ramené au cas où la section est définie par des points sur les arêtes du cube.

Dessin N°1 :
A et B sont dans la face avant,
C dans la face latérale visible.





Dessin N°2 :
A et B sont dans la face avant,
C dans la face arrière.

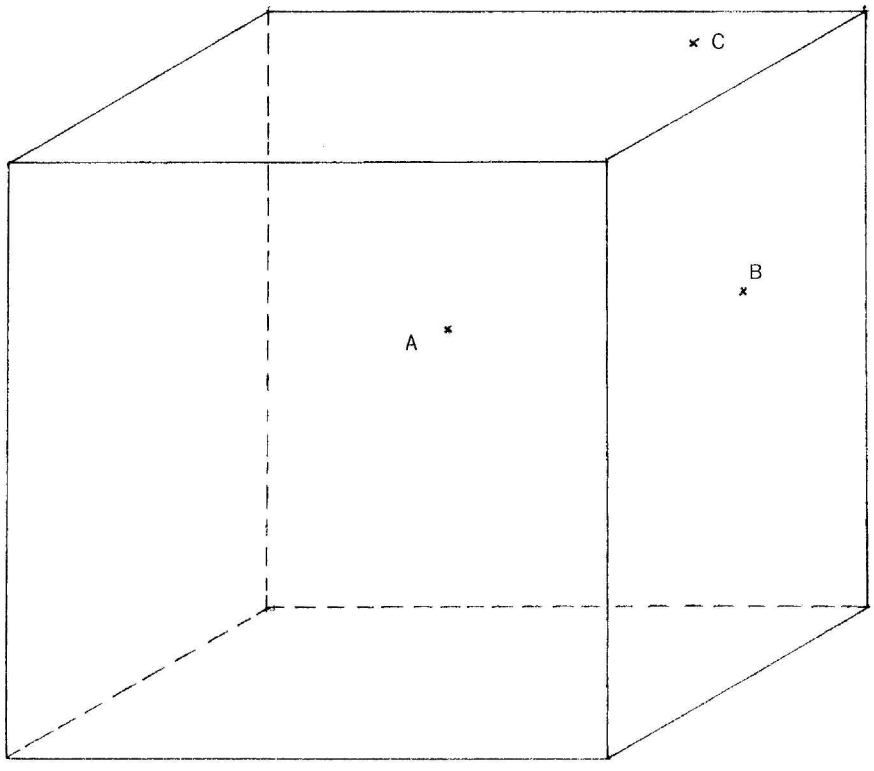
Deuxième cas : Les trois points sont dans trois faces différentes.

Il est alors nécessaire de construire l'intersection de la droite définie par deux des points, avec le plan de la face qui contient le troisième.

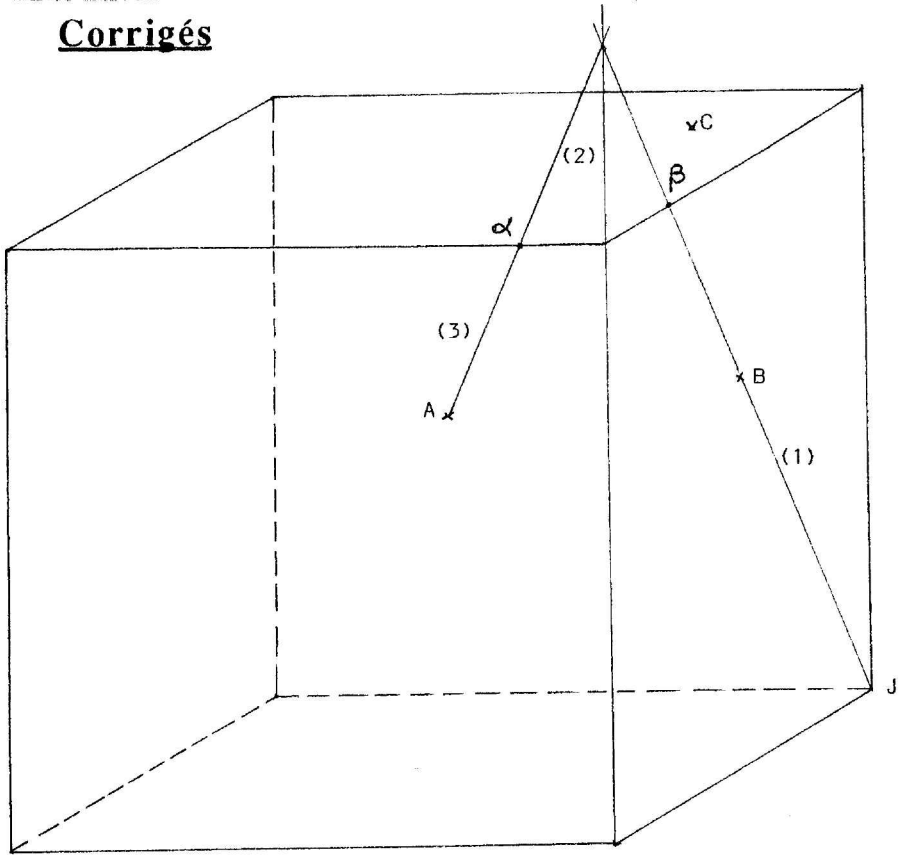
Pour résoudre ce problème d'intersection d'une droite définie par deux points et d'un plan (P), on construit l'intersection de ce plan (P) avec un plan auxiliaire défini par les deux points de la droite et un point du plan (P).

Ce problème résolu, on est ramené au cas précédent, car le plan de la section est défini par quatre points dont deux sont dans le plan d'une des faces du cube.

Exercice : Dessiner la section du cube par le plan passant par les points A, B et C sachant que A est dans la face avant, B dans la face latérale "visible" et C dans la face arrière.

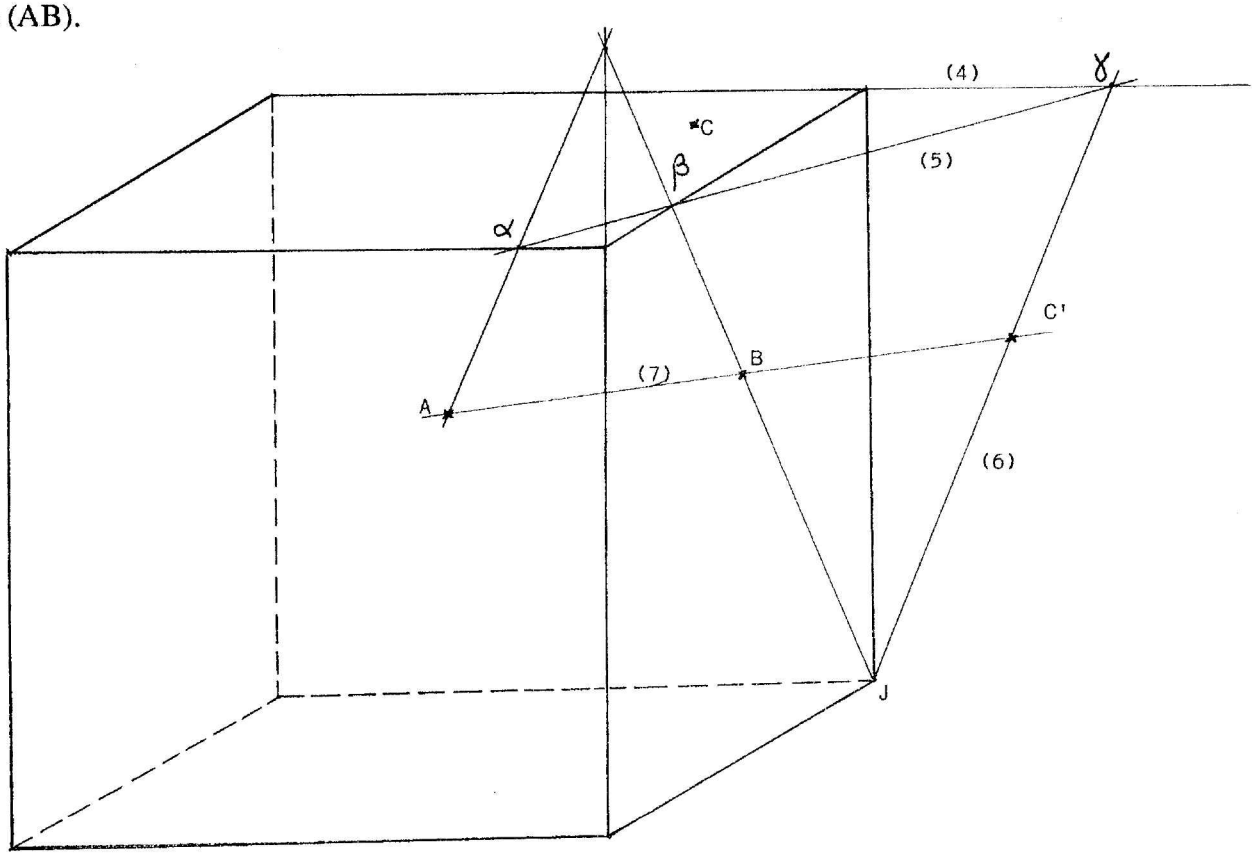


Corrigés



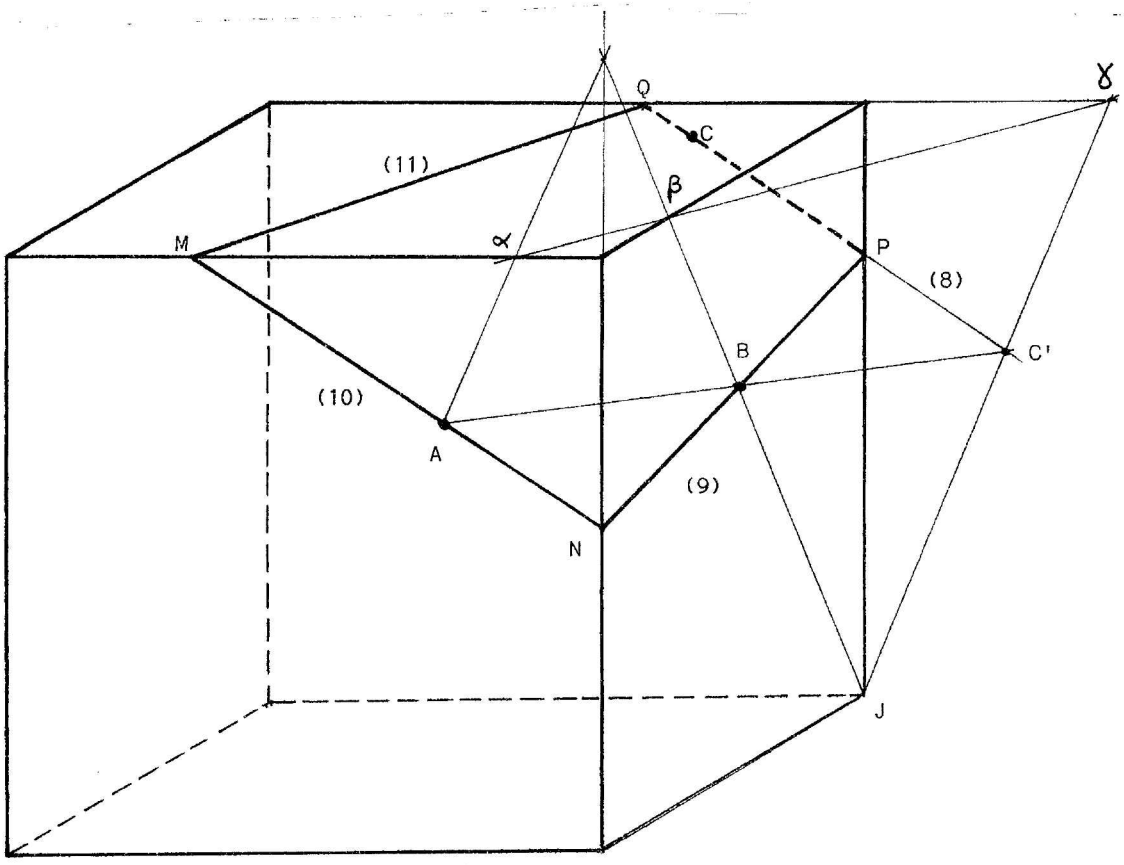
On construit l'intersection de la droite (AB) avec le plan de la face arrière contenant le point C. On considère le plan auxiliaire défini par les points A et B et le point J sommet du cube situé dans la face qui contient le point C. L'intersection de ce plan avec la face de dessus est la droite ($\alpha\ \beta$).

La droite ($\alpha\beta$) coupe le plan de la face contenant C en γ. En joignant à J on obtient la droite (γJ) intersection du plan auxiliaire avec le plan contenant C et par suite l'intersection C' de ce plan avec la droite (AB).



On construit enfin l'intersection du cube avec le plan défini par les quatre points A, B, C et C'.

La section obtenue est le trapèze MNPQ.



EXERCICE d'étude d'une section du cube :

Cet exercice fait appel aux techniques de représentation d'un cube en perspective cavalière, aux techniques de calcul de longueurs (théorème de Pythagore) et précise la distinction entre objet et dessin.

Enoncé :

Sur un cube d'arête 10 cm, on considère trois points P, Q et R situés sur trois arêtes. P est à 3 cm du sommet le plus proche, Q et R sont respectivement à 3 cm et 4 cm du même sommet.

1°/ Représenter dans une perspective cavalière d'angle 30° et de coefficient 1/2 le cube et sa section par le plan PQR.

2°/ Montrer que le triangle PQR est isocèle.

3°/ Dessiner ce triangle en vraie grandeur.

V. ETUDE DES TRIANGLES AYANT POUR SOMMETS TROIS SOMMETS DU CUBE

Cette étude présente plusieurs aspects. On peut aborder :

* des questions de représentation puisque sur un même dessin des triangles isométriques ont des représentations différentes.
* des questions sur la nature des triangles où interviennent des problèmes de longueur et d'orthogonalité.
* un problème de dénombrement qui peut être résolu soit globalement, soit par catégories.

Pour prendre tout son sens au niveau des élèves, l'activité doit être précédée d'une analyse détaillée des segments ayant pour extrémités deux sommets du cube : arêtes du cube, diagonales des faces, diagonales du cube. On peut calculer les longueurs et étudier les positions relatives de ces segments.

On distingue trois types de triangles :

a/ Les triangles situés dans une face du cube. Ils sont rectangles et isocèles. Il y en a quatre sur chaque face, donc 24 au total.

b/ Les triangles situés dans un plan de symétrie diagonal du cube. Ils sont rectangles non isocèles. Il y en a quatre par plan diagonal soit 24 en tout.

c/ Les triangles ayant pour côtés trois diagonales de trois faces du cube qui ont un sommet commun. Ils sont équilatéraux et il y en a un par sommet donc 8 pour le cube.

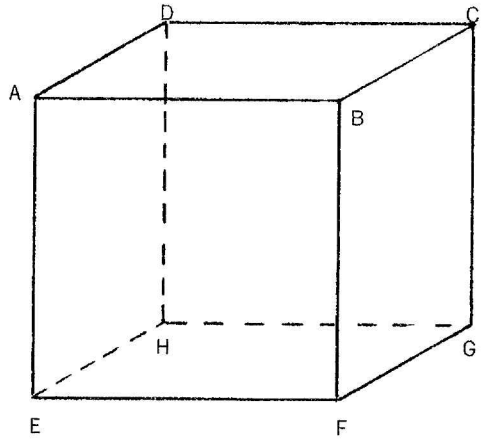
On a ainsi 56 triangles (24 + 24 + 8).

On peut obtenir ce nombre par un calcul direct car pour définir un tel triangle, il suffit de choisir trois points parmi huit. Le nombre de choix possibles est $C_8^3 = 56$.

La page suivante donne un exemple d'activité issue de cette étude et pouvant être proposée à des élèves.

On peut remarquer que ces triangles ne sont pas tous des sections du cube car certains sont situés dans des faces du cube et d'autres sont des parties d'une section. Seuls huit de ces triangles sont des sections, mais nous verrons par la suite qu'ils ont une importance particulière dans l'étude du cube.

Exercice:



Ceci est le dessin d'un cube dont les sommets sont les points A, B, C, D, E, F, G, H.

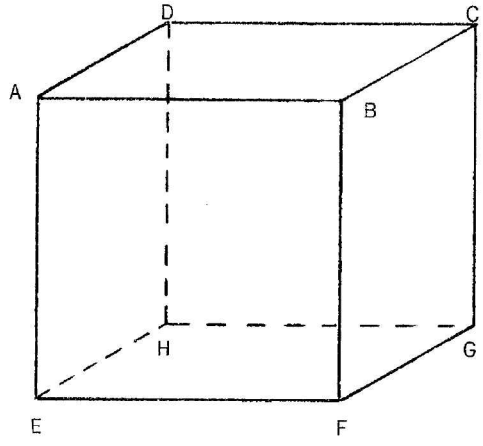
1/ Complète le tableau ci-dessous en répondant par "oui", "non", "je ne sais pas" dans chaque ligne. Si tu as des observations à formuler, écris-les dans la colonne de droite.

	Sur le cube, est-ce un triangle ?				
	Rectangle ?	Isocèle ?	Equilatéral ?	Autre ?	
ABE					
CBF					
DGE					
DHF					
CDH					
AGH					
CHE					
AFH					
CEG					
CHA					

2/ Invente d'autres lignes comme celles du tableau mais qui n'ont pas été écrites dans ce tableau.

3/ Si tu as des remarques à faire, écris-les au dos de la feuille.

Réponses



Ceci est le dessin d'un cube dont les sommets sont les points A, B, C, D, E, F, G, H.

1/ Complète le tableau ci-dessous en répondant par "oui, "non", "je ne sais pas" dans chaque ligne. Si tu as des observations à formuler écris-les dans la colonne de droite.

	Sur le cube, est-ce un triangle ?				
	Rectangle ?	Isocèle ?	Equilatéral ?	Autre ?	
ABE	*oui*	*oui*	*non*		
CBF	*oui*	*oui*	*non*		
DGE	*non*	*oui*	*oui*		
DHF	*oui*	*non*	*non*		
CDH	*oui*	*oui*	*non*		
AGH	*oui*	*non*	*non*		
CHE	*oui*	*non*	*non*		
AFH	*non*	*oui*	*oui*		
CEG	*oui*	*non*	*non*		
CHA	*non*	*oui*	*oui*		

2/ Invente d'autres lignes comme celles du tableau mais qui n'ont pas été décrites dans ce tableau

3/ Si tu as des remarques à faire, écris-les au dos de la feuille.

VI. ECORNAGE DU CUBE

Premier écornage

Cette activité est l'étude du solide obtenu en enlevant au cube un tétraèdre trirectangle défini par un sommet du cube et les trois arêtes dont ce sommet est une extrémité. On réalise ainsi une troncature du cube, le sommet étant remplacé par une face, le solide obtenu a sept faces : trois carrés, trois triangles rectangles et isocèles et un triangle équilatéral.

On peut faire construire facilement un patron et une maquette de ce solide, mais l'activité la plus riche est la réalisation de huit dessins qui peuvent être considérés de deux façons :

* soit comme les représentations de huit solides différents obtenus en enlevant à chaque fois au cube un coin différent,
* soit comme huit dessins d'un même solide placé dans des positions qui se déduisent les unes des autres par des rotations ayant pour axes les perpendiculaires aux centres des faces du cube et qui le laissent invariant.

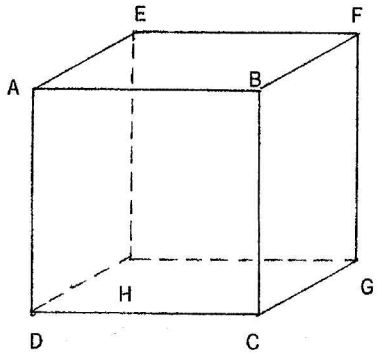
On obtient ainsi les huit dessins du corrigé suivant qui sont un bon exemple de l'utilisation des pointillés dans la représentation en perspective cavalière et, en liaison avec la maquette, un bon entraînement à la lecture d'un dessin.

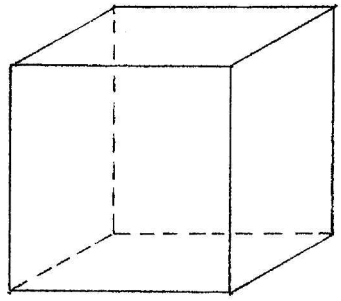
Cette activité peut constituer un premier contact avec des arêtes dont la technique de dessin n'est pas donnée par les règles de la perspective cavalière. Ce premier contact se fait par l'intermédiaire du cube et de sa représentation au travers d'une dialectique objet-dessin, que l'on a intérêt à utiliser tout au long de l'enseignement.

Exercice :

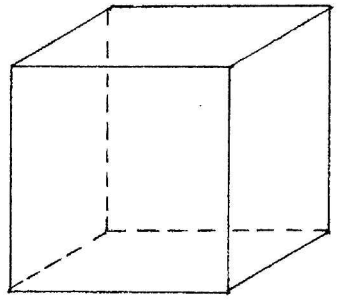
Dessine au feutre noir avec des traits pleins pour les arêtes vues et des pointillés pour les arêtes cachées :

. un cube dont on a enlevé le coin A (dessin A)
. un cube dont on a enlevé le coin B (dessin B)
. un cube, ...

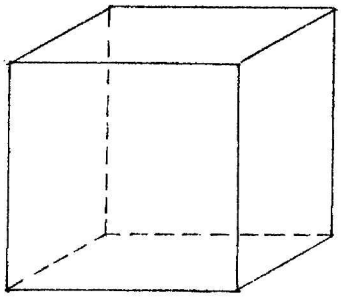




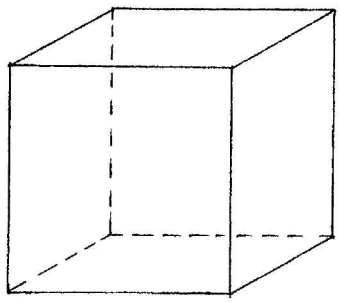
(A)



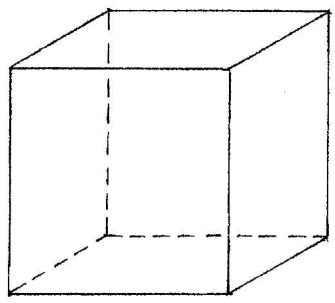
(B)



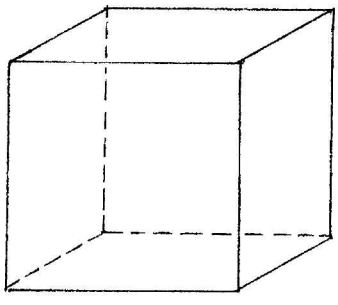
(C)



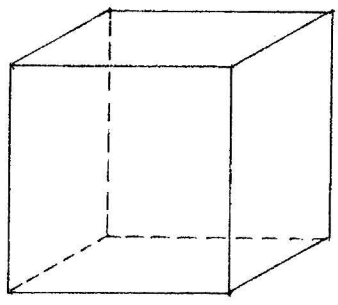
(D)



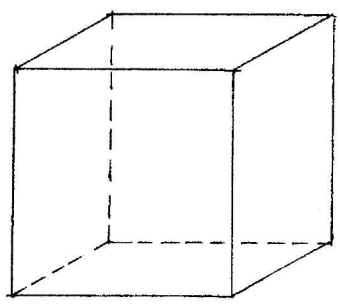
(E)



(F)

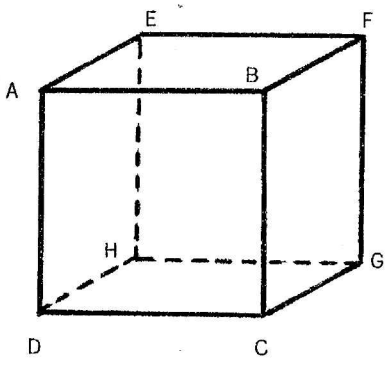


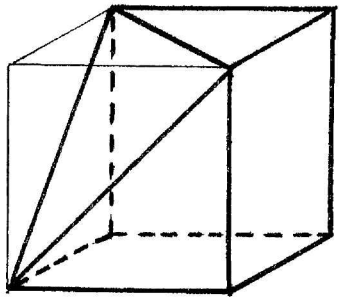
(G)



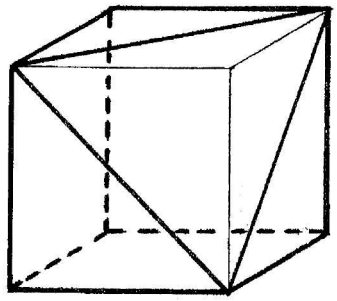
(H)

Corrigé :

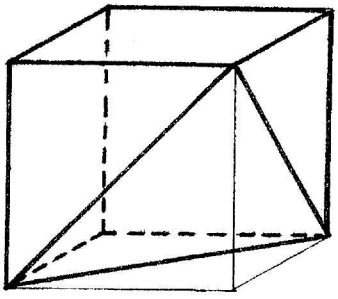




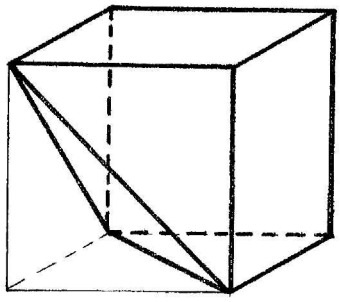
(A)



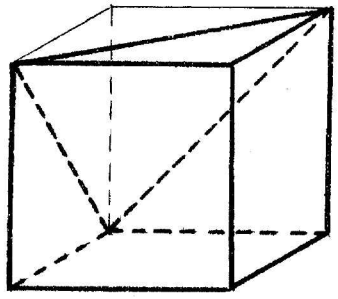
(B)



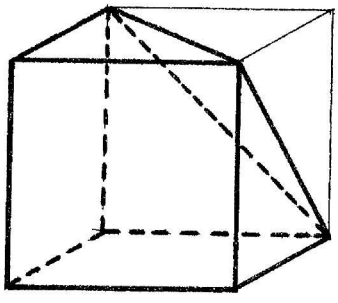
(C)



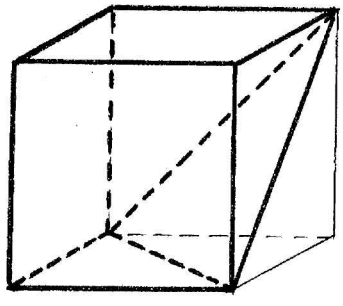
(D)



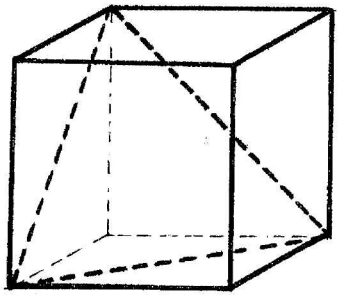
(E)



(F)



(G)



(H)

Deuxième écornage

Il s'agit des écornages successifs du cube amenant au tétraèdre régulier.

On trace dans deux faces parallèles du cube deux diagonales non parallèles. On joint les extrémités de ces diagonales par quatre diagonales des quatre autres faces du cube. On enlève les quatre coins du cube dont les sommets n'ont pas été utilisés. On obtient ainsi un tétraèdre régulier.

Le premier écornage a été réalisé dans l'activité précédente dans une liaison étroite dessin-maquette. On coupe sur la maquette, on trace sur le dessin. On met en évidence le triangle équilatéral qui bouche le trou sur la maquette.

Les écornages successifs sont difficiles à réaliser matériellement. On peut montrer sur la maquette la partie à enlever et la dessiner sur les représentation. On étudie chaque fois la section obtenue.

Quand on a dessiné les quatre écornages, on peut réaliser la maquette du tétraèdre avec quatre triangles équilatéraux isométriques ou en réalisant un patron.

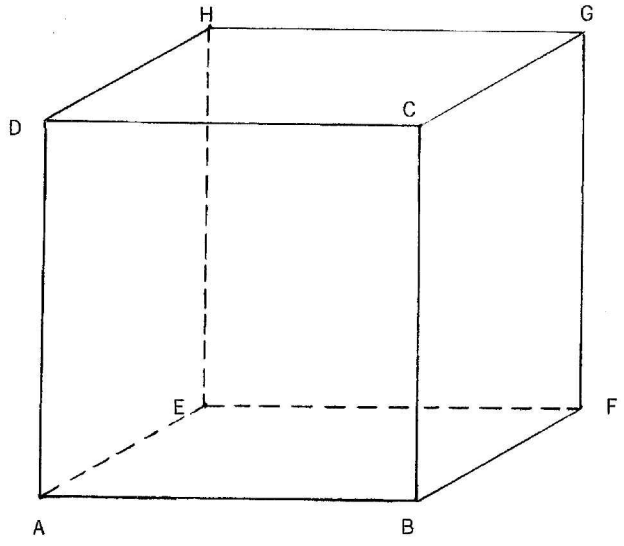
L'intérêt de cette activité est double :

* Les élèves dessinent puis réalisent un solide entièrement différent du cube initial et dont ils ne soupçonnaient pas l'existence dans le cube,

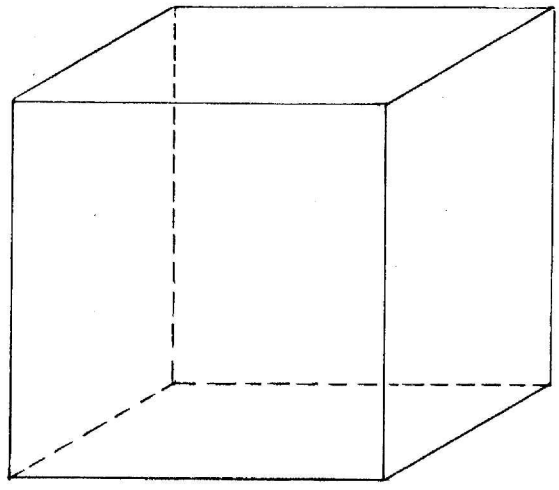
* D'autre part, cette activité contribue à l'apprentissage de la lecture d'un dessin par des liaisons maquette - dessin du cube - dessin du tétraèdre.

Enfin, l'étude du tétraèdre dans le cube est à la base de nombreux exercices dont nous donnerons un aperçu dans les pages suivantes.

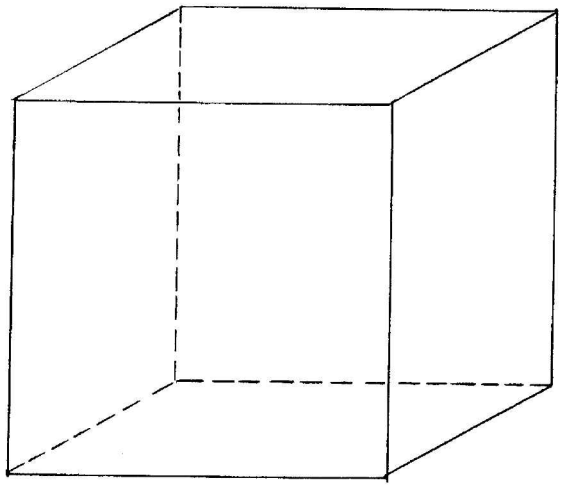
Exercice : Ecornages successifs des coins D, G, E, B.



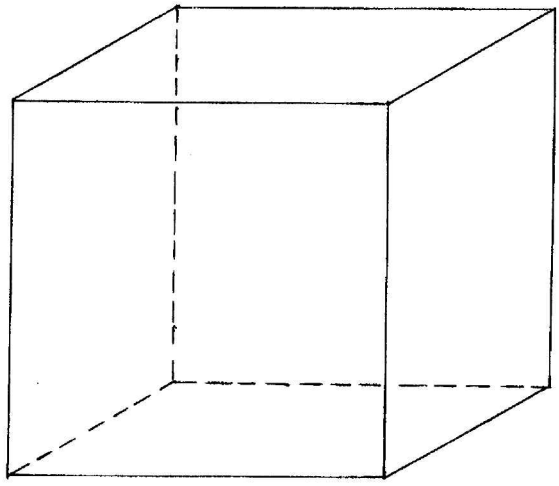
1



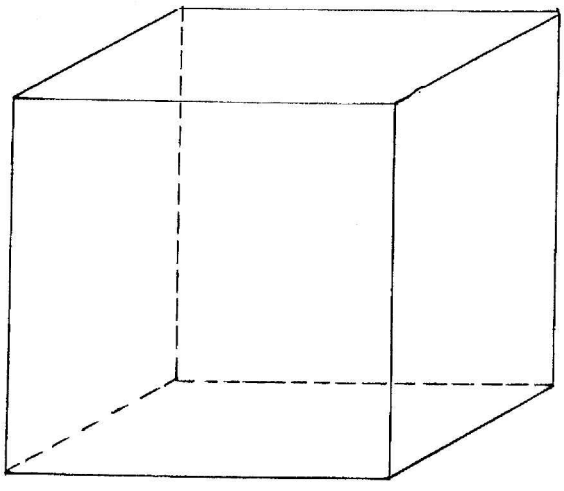
2



3



4



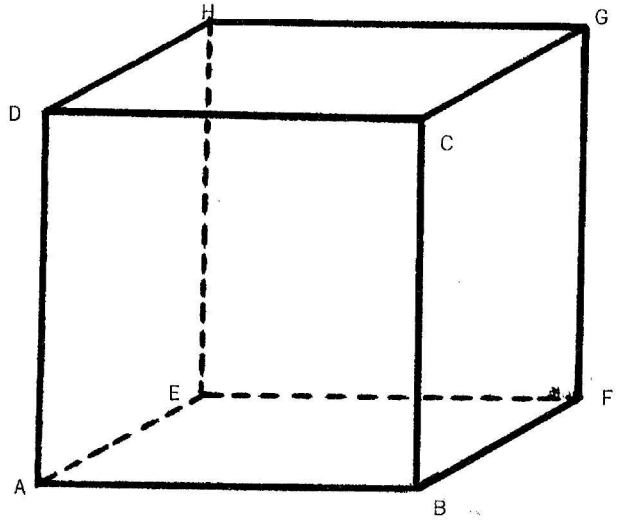
5

	S	F	A	S+F-A
1				
2				
3				
4				
5				

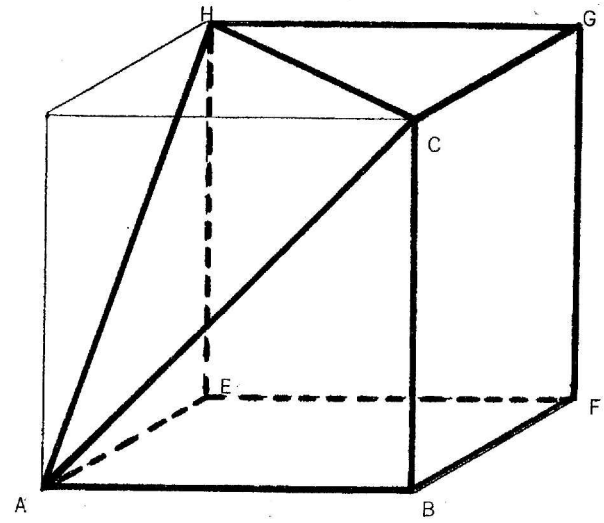
Formule reliant le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes:

Corrigé :

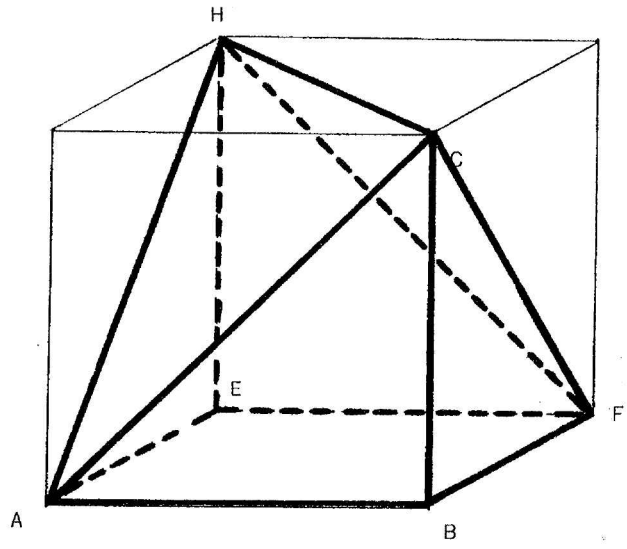
On a enlevé successivement les "coins" D en (2) puis G en (3), E en (4) et B en (5) pour obtenir le tétraèdre régulier AFCH.



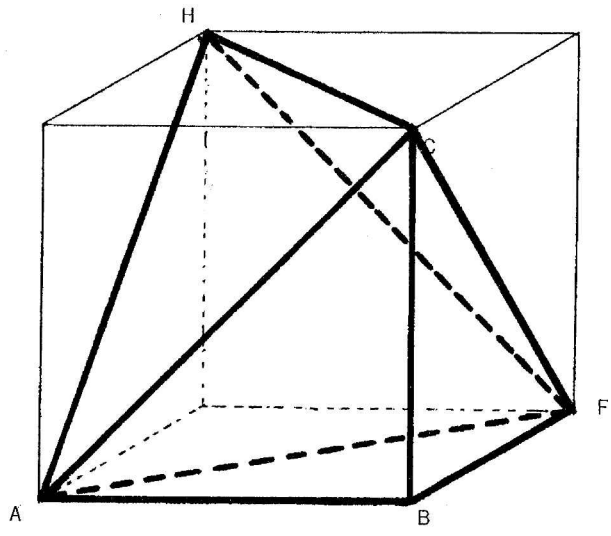
(1) Nature des faces : 6 carrés



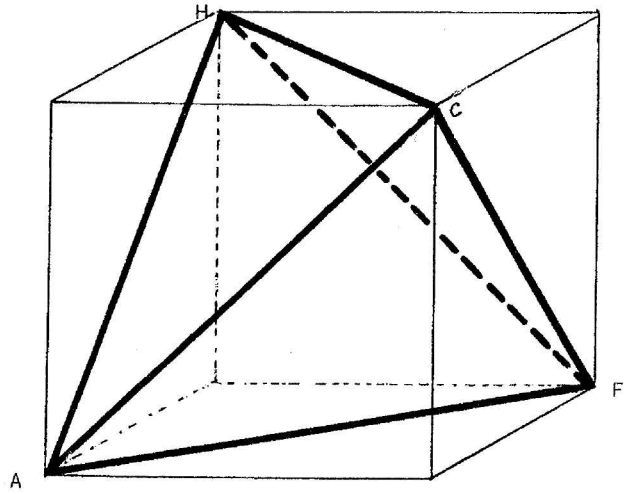
(2) 3 carrés, 3 triangles rectangles isocèles, 1 triangle équilatéral



(3) 1 carré, 4 triangles rectangles isocèles, 2 triangles équilatéraux



(4) 3 triangles rectangles isocèles, 3 triangles équilatéraux



(5) 4 triangles équilatéraux

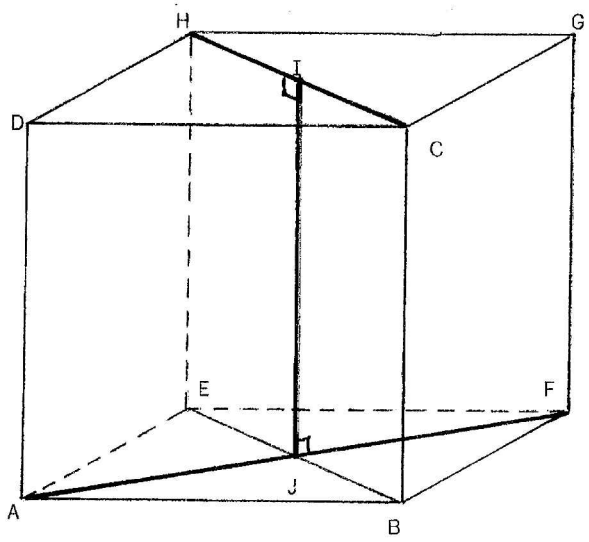
	S	F	A	S+F-A
1	8	6	12	2
7	7	7	12	2
3	6	7	11	2
4	5	6	9	2
5	4	4	6	2

Formule reliant le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes :
$S + F = A + 2$
Formule d'Euler

ETUDE DE L'ENSEMBLE CUBE-TETRAEDRE

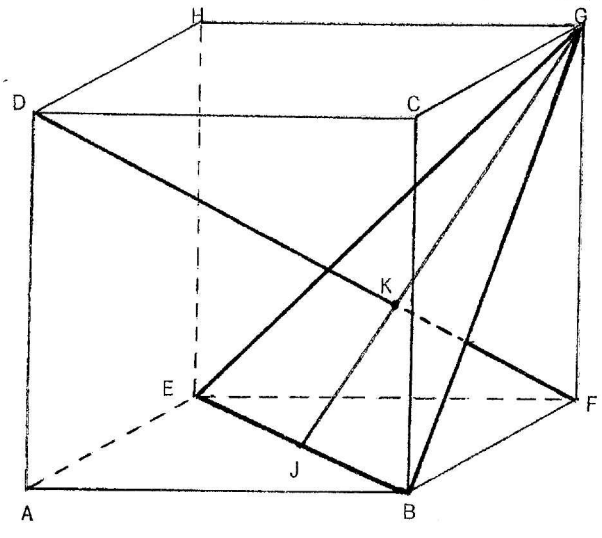
L'écornage du cube a mis en évidence un tétraèdre régulier qui a pour sommets quatre sommets du cube et pour arêtes des diagonales des faces du cube. L'étude de l'ensemble cube-tétraèdre peut être utilisée pour mettre en évidence des propriétés du tétraèdre ainsi qu'une structure du cube qui n'est pas évidente a priori si on considère les deux solides séparément.

I. UNE PROPRIETE DES ARETES DU TETRAEDRE



Si on considère deux arêtes opposées du tétraèdre [HC] et [AF] par exemple, elles sont des diagonales de deux faces parallèles du cube. On peut montrer que ces deux arêtes sont orthogonales, en utilisant la seconde diagonale [EB] de la face ABFE. [HC] et [EB] sont parallèles comme côtés opposés d'un rectangle, [EB] et [AF] sont perpendiculaires car ce sont les diagonales d'un carré. [HC] et [AF] sont donc orthogonales. D'autre part, les milieux I et J des deux arêtes du tétraèdre sont les centres de deux faces du cube et [IJ] est la perpendiculaire commune aux deux arêtes.

II. HAUTEUR DU TETRAEDRE ET DIAGONALE DU CUBE



Les diagonales du cube sont les supports des hauteurs du tétraèdre.

* Dans un premier temps, on montre que la diagonale [DF] du cube passe par le centre de gravité du triangle équilatéral BEG qui est une face du tétraèdre.

Le plan ADGF coupe le plan EBG suivant la droite (GJ), J étant le milieu de [EB] car [AF] et [EB] sont les diagonales d'un carré; soit K le point d'intersection de la diagonale [DF] avec la médiane [GJ] du triangle équilatéral BEG.

Dans le plan BDHF, [DF] coupe la médiane du triangle BEG issue de B; le point K est donc le centre de gravité du triangle BEG.

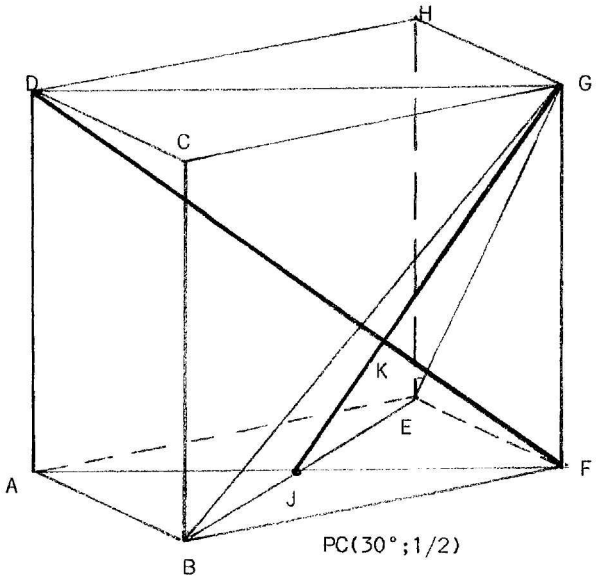
* Dans un deuxième temps, on démontre que la diagonale du cube est perpendiculaire au plan de la face EBG du tétraèdre. On peut envisager plusieurs démonstrations de niveaux différents.

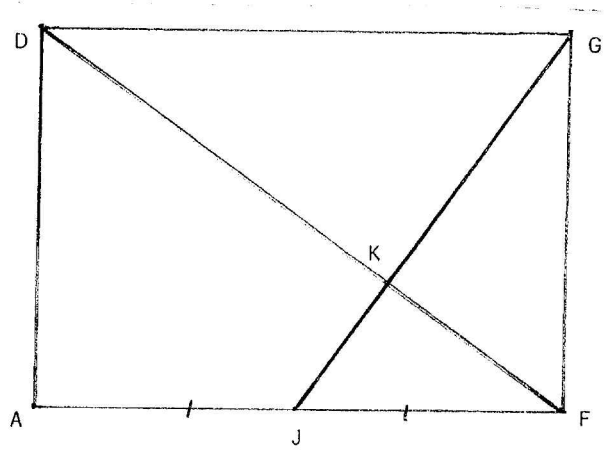
Démonstration 1 : [EB] est perpendiculaire à [AF] et [EB] est orthogonal à [FG]. [EB] est donc perpendiculaire au plan AFGD, donc orthogonal à [DF]. On montrerait de même que [DF] est orthogonal à [EG] et [BG]. La diagonale [DF] du cube est donc perpendiculaire au plan de BEG face du tétraèdre.
[DK] est alors une hauteur du tétraèdre DEBG, avec K centre de gravité du triangle BEG.

Démonstration 2 : FE = FB = FG, les points B, E et G sont donc sur la sphère de centre F et de rayon l'arête a du cube. De même, on a DE = DB = DG donc les points B, E et G sont sur la sphère de centre D et de rayon $a\sqrt{2}$. Le triangle BEG est alors inscrit dans le cercle intersection des deux sphères. La ligne des centres de ces deux sphères c'est-à-dire la diagonale [DF] est perpendiculaire au plan du cercle intersection, donc à la face EBG du tétraèdre.

Dans ces deux démonstrations, on travaille dans l'espace, en utilisant pour la première les propriétés d'incidence et d'orthogonalité de droites et de plans, et pour la seconde les propriétés élémentaires des sphères.

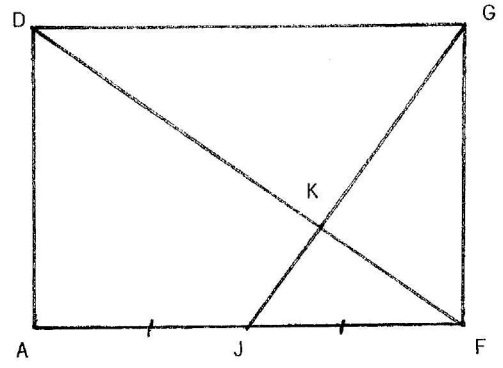
On peut démontrer autrement l'orthogonalité de la diagonale du cube avec le plan de la face du tétraèdre en se plaçant dans le plan diagonal ADGF du cube.





La section du cube par ce plan est un rectangle de côtés a et $a\sqrt{2}$, la diagonale [DF] du cube est une diagonale du rectangle, la trace du plan BEG dans le plan ADGF est le segment qui joint un des sommets du rectangle au milieu d'un des côtés de longueur $a\sqrt{2}$; il s'agit de démontrer que [DF] et [GJ] sont perpendiculaires. La même démonstration appliquée à une autre médiane assurera le résultat.

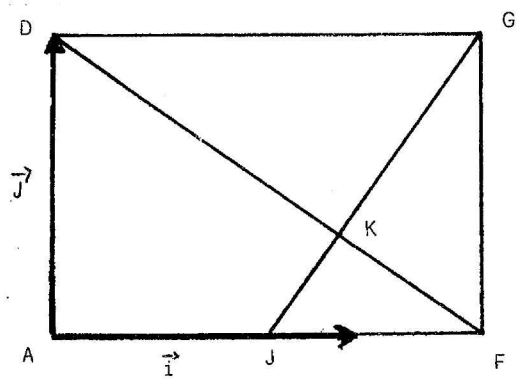
Démonstration 3 : Trigonométrie



$\tan \widehat{GDF} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\tan \widehat{FGJ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors

$\widehat{GDF} = \widehat{FGJ}$; comme $\widehat{FGJ}$ et $\widehat{DGK}$ sont complémentaires, $\widehat{DGF}$ et $\widehat{DGK}$ le sont aussi et dans le triangle DGK, le troisième angle $\widehat{DKG}$ est droit.

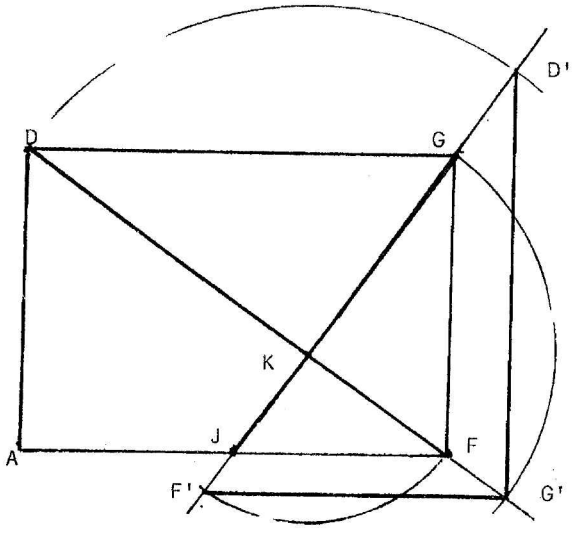
Démonstration 4 : Analytique



Dans un repère orthonormal $(a, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = a$, on a D(0;1) J($\frac{\sqrt{2}}{2}$;0) F($\sqrt{2}$;0) et G($\sqrt{2}$;1) alors $\overrightarrow{JG} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 1\vec{j}$ et

$\overrightarrow{DF} = \sqrt{2}\vec{i} - 1\vec{j}$ ces deux vecteurs sont orthogonaux car $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + 1 \times (-1) = 0$ et (DF) et (JG) sont perpendiculaires au point K.

Démonstration 5 : Similitude



Dans le triangle DGF rectangle en G on a DG = $a\sqrt{2}$ et GF = a.

Dans le triangle GFJ rectangle en F on a GF = a et FJ = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

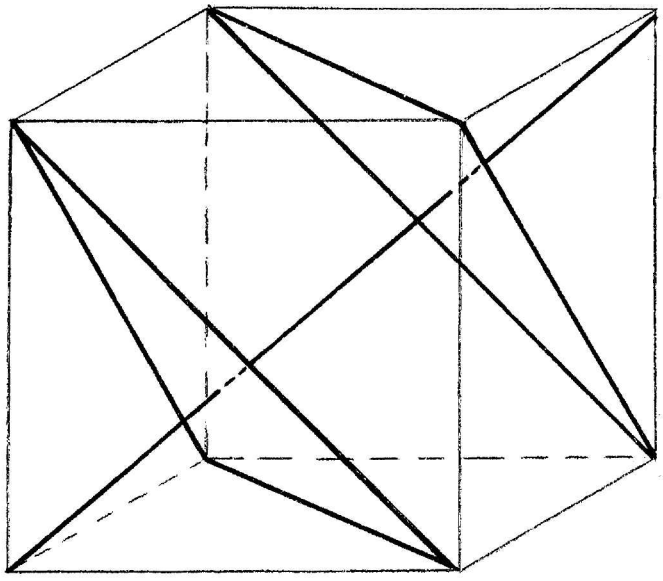
Les triangles GFJ et DGF se correspondent dans une similitude de centre K, d'angle $\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Les droites (DF) et (GJ) sont donc perpendiculaires.

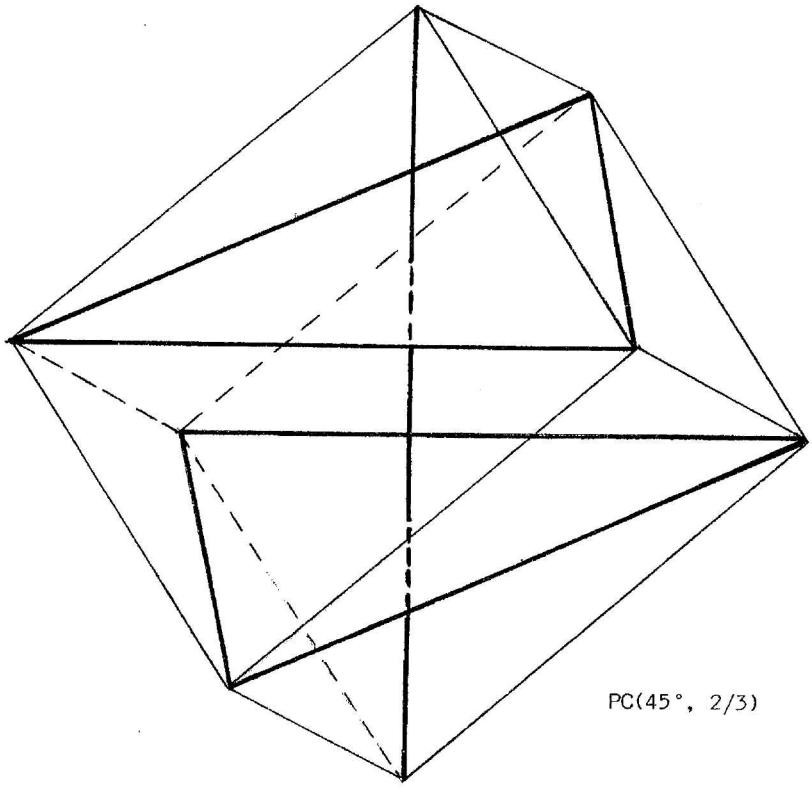
Ces trois dernières démonstrations montrent un procédé courant de résolution des problèmes de l'espace, à savoir se ramener à un problème de géométrie plane. Elles font appel à trois domaines différents de la géométrie : la première utilise des notions élémentaires de trigonométrie, la seconde utilise la géométrie analytique élémentaire avec la condition d'orthogonalité de deux droites, enfin la troisième est basée sur les propriétés de la similitude.

Ces démonstrations montrent la diversité des approches possibles dans la résolution de problèmes et laissent prévoir la variété des exercices et des activités que l'on peut proposer sur une telle configuration.

III. AUTRE PROPRIETE



On considère une face du tétraèdre régulier, donc un triangle équilatéral ayant pour sommets trois sommets du cube. Il existe un second triangle équilatéral, symétrique du précédent par rapport au centre du cube. Ces deux triangles équilatéraux sont dans des plans perpendiculaires à une diagonale du cube qu'ils partagent en trois segments de même longueur. La diagonale passe par les centres de gravité des deux triangles.



PC(45°, 2/3)

La donnée de ces deux triangles équilatéraux et de la diagonale fournit une nouvelle structure non évidente du cube. En effet, les six sommets des deux triangles et les extrémités de la diagonale sont les huit sommets du cube.

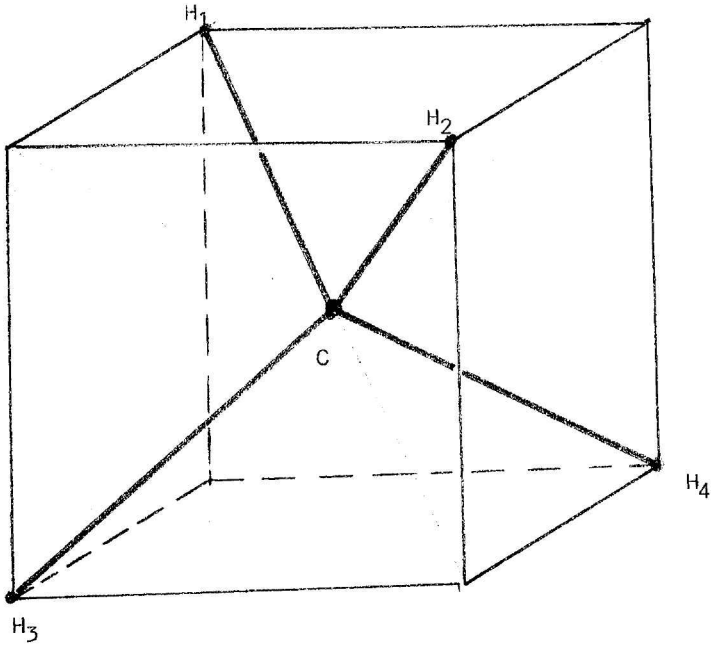
On peut construire dans un cube deux tétraèdres réguliers du type précédent, ce qui permet de montrer que le cube reste invariant dans une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ayant pour axe une de ses diagonales.

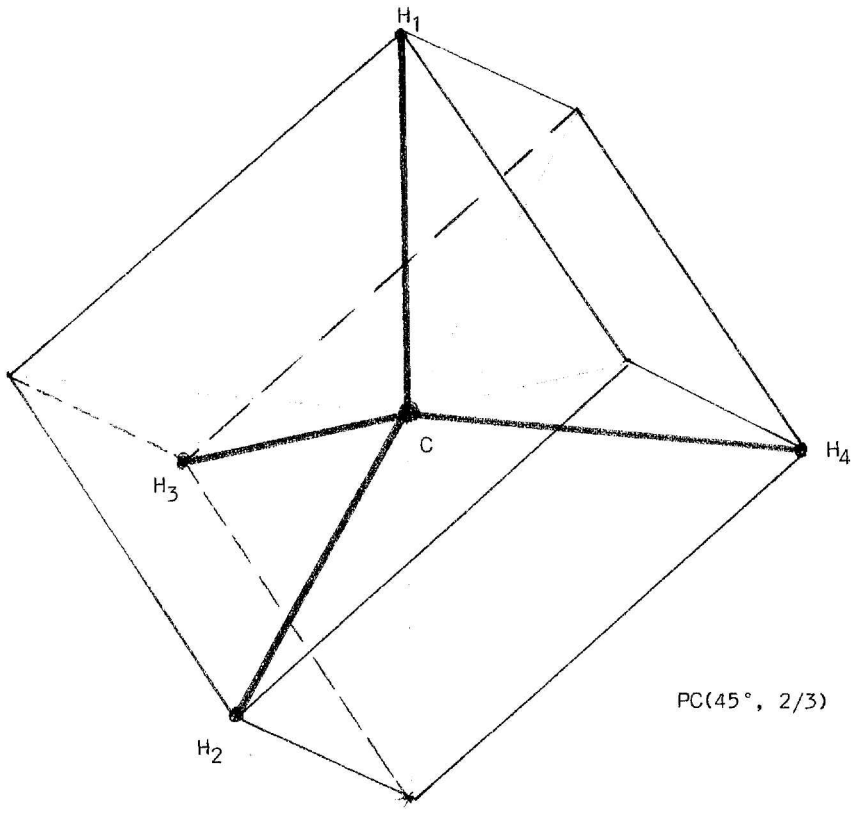
Toute étude du cube fait appel à ces deux façons de le concevoir :

* soit la structure de parallélisme et d'orthogonalité, basée sur les axes de rotation de $\frac{2\pi}{4}$,

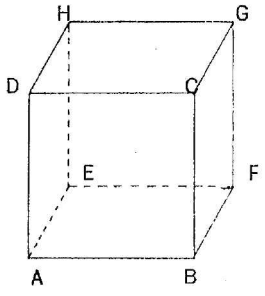
* soit la structure de trièdre trirectangle et de triangles équilatéraux, basée sur les axes de rotation de rotation de $\frac{2\pi}{3}$.

Un exemple important de cette deuxième "vision" est la structure de la molécule de méthane ou carbone tétraédrique qui peut donner matière à exercices sur les angles et les longueurs.





IV. EXEMPLES D'EXERCICES



PC(60°, 1/2)

Le dessin ci-contre est une représentation d'un cube de côté a.

1°) Calculer les longueurs des segments [DE] et [DF].
Calculer les mesures des angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{CFA}$.

2°) Construire le projeté orthogonal K de C sur [DF].

3°) Calculer les longueurs DK et KF.

4°) Soit L le projeté orthogonal de E sur [DF].
Montrer que K et L partagent [DF] en trois segments de même longueur.

Exercice 2 :

Soit (O, i, j, k) un repère orthonormal. Montrer que les points A(0,0,1), B(0,1,0), C(1,0,0) et D(1,1,1) sont les sommets d'un tétraèdre régulier.

Exercice 3 :

a) Montrer que les milieux de deux couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un carré.

b) Montrer que les trois carrés obtenus ainsi sont situés dans trois plans perpendiculaires.

Exercice 4 :

Etude des sections du cube et des sections du tétraèdre associés par des plans perpendiculaires à une diagonale du cube, hauteur du tétraèdre :

a) Représenter dans une perspective cavalière (60°, 1/2) un cube ABCDEFGH de 8 cm d'arête et le tétraèdre associé BEGD.

b) Soit M le point de l'arête DH à 4 cm de D. Construire les sections du cube et du tétraèdre par le plan parallèle à BEG et passant par M.

c) Même question pour un plan passant par le point N situé sur l'arête HE à 2 cm de H.

d) Même question pour le plan passant par le point P milieu de l'arête HE.

e) Même question pour le plan passant par le milieu Q de l'arête EF.

Pour chaque question, on fera un dessin en vraie grandeur des sections.

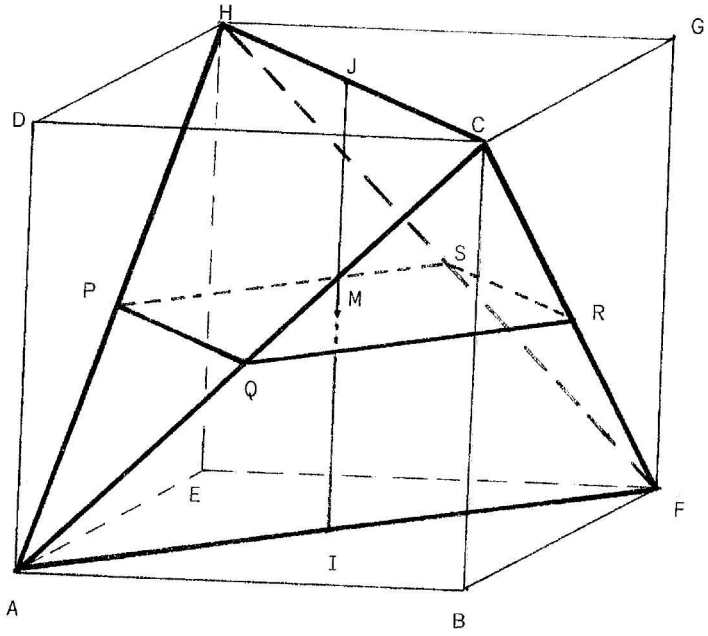
Exercice 5 :

Représenter en perspective cavalière (30°, 1/2) un tétraèdre régulier SABC d'arête 16 cm, posé sur la face ABC, avec l'arête AC parallèle au plan de projection. On notera B' le milieu de AC et G le centre de gravité du triangle ABC et on donnera les longueurs BB' et GS pour l'objet et pour le dessin.

Exercice 6 :

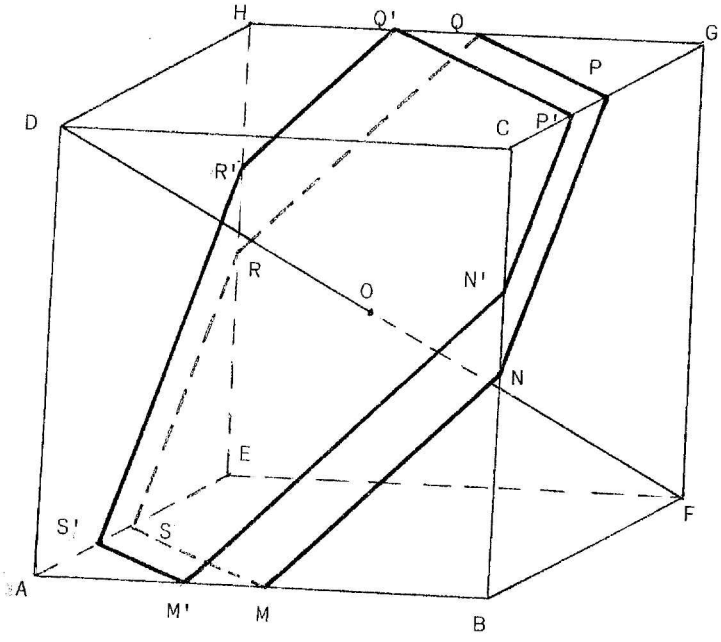
a) Prouver que les sections rectangulaires (figure ci-dessous) parallèles à deux arêtes opposées du tétraèdre régulier ont un périmètre constant, égal au double de l'arête du tétraèdre.

b) Exprimer l'aire du rectangle section en fonction de la position de la section. Etudier la fonction obtenue (on prendra comme variable x = IM).

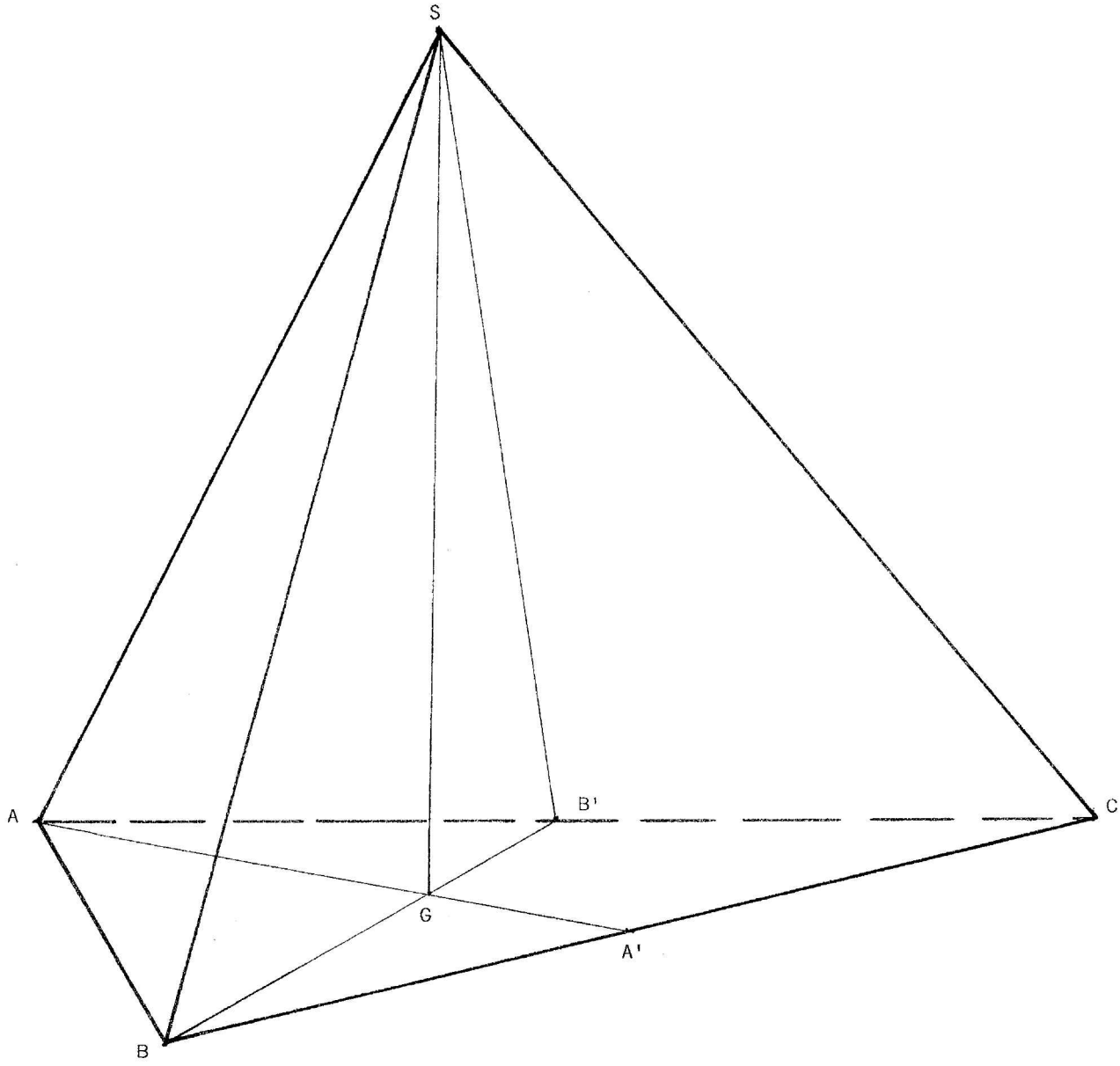


Exercice 7

Prouver que le périmètre des sections hexagonales parallèles à l'hexagone régulier est constant et égal au périmètre du triangle équilatéral ACH, c'est-à-dire à trois fois la diagonale d'une face du cube (figure ci-dessous)..



Solution de l'exercice 5



Quelques valeurs utilisées pour les tracés et calculées à l'aide essentiellement du théorème de Pythagore.

$BB' = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ valeur approchée 13,9 cm par excès.

Le segment [BB'] est représenté par une fuyante de 6,9 cm (valeur approchée par défaut).

G est au tiers de [BB'] en partant de B' ou à l'intersection des médianes [BB'] et [AA'].

$SG = \frac{16\sqrt{6}}{3}$ valeur approchée 13,1 cm.

Remarque : les calculs de BB' et SG sont aussi utiles pour calculer le volume du tétraèdre.

$V = \frac{1}{3} \times SG \times \text{aire (ABC)} = \frac{1}{3} \times \frac{16\sqrt{6}}{3} \times 64\sqrt{3} = \frac{1024\sqrt{2}}{3}$

valeur approchée par excès : 483 cm^3

REMARQUES SUR LES DESSINS

On a pu constater que dans l'étude précédente, nous avons utilisé des représentations du cube dans des perspectives différentes.

Ces différences viennent, soit de la perspective elle-même, c'est-à-dire de l'angle des fuyantes et du rapport de réduction qui la définissent, soit de la position de l'objet représenté, les deux types n'étant pas indépendants.

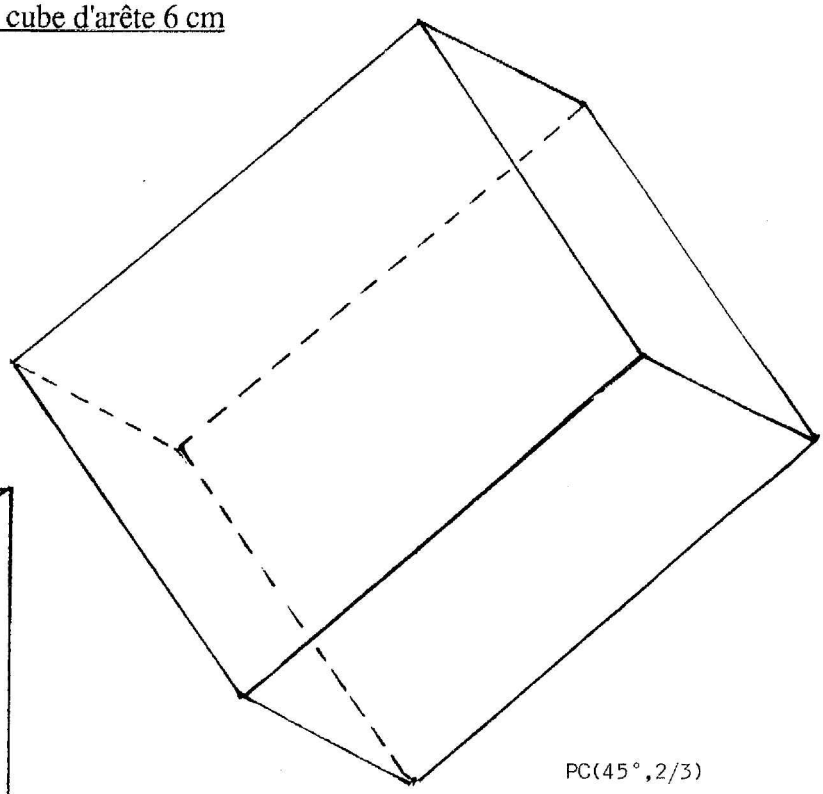
Pour le cube, on a quatre positions particulières :

* La position "classique" : une face du cube est parallèle au plan de projection dans une perspective (30°,1/2) ou (60°,1/2).
* Une diagonale du cube est parallèle au plan de projection dans une perspective (45°,2/3).
* Une diagonale du cube est perpendiculaire au plan de projection dans une perspective (50°,1/2).
* Une diagonale d'une face est parallèle au plan de projection dans une perspective (60°,1/2) ou (30°,1/2)

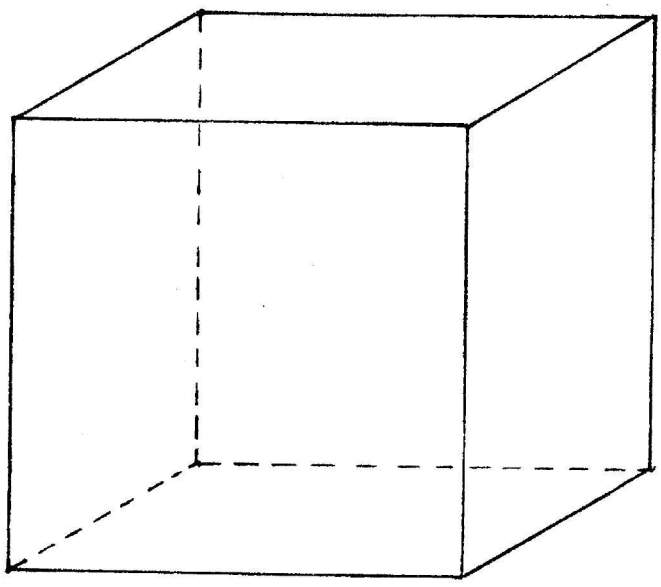
Dans les pages précédentes, nous donnons parfois deux représentations, celle considérée comme la plus classique parce que la plus fréquemment utilisée et reconnue et celle qui est la plus pertinente pour l'étude de l'objet et la mise en évidence de certaines propriétés c'est-à-dire celle dans laquelle on voit le mieux les éléments du solide concernés.

Il est à noter que si l'on dispose d'un ordinateur et d'une table traçante, on peut obtenir les quatre représentations de la page suivante avec une bonne précision ce qui permet de travailler les exercices autrement que sur des dessins à main levée ou sur des schémas ne donnant aucun moyen technique de vérification.

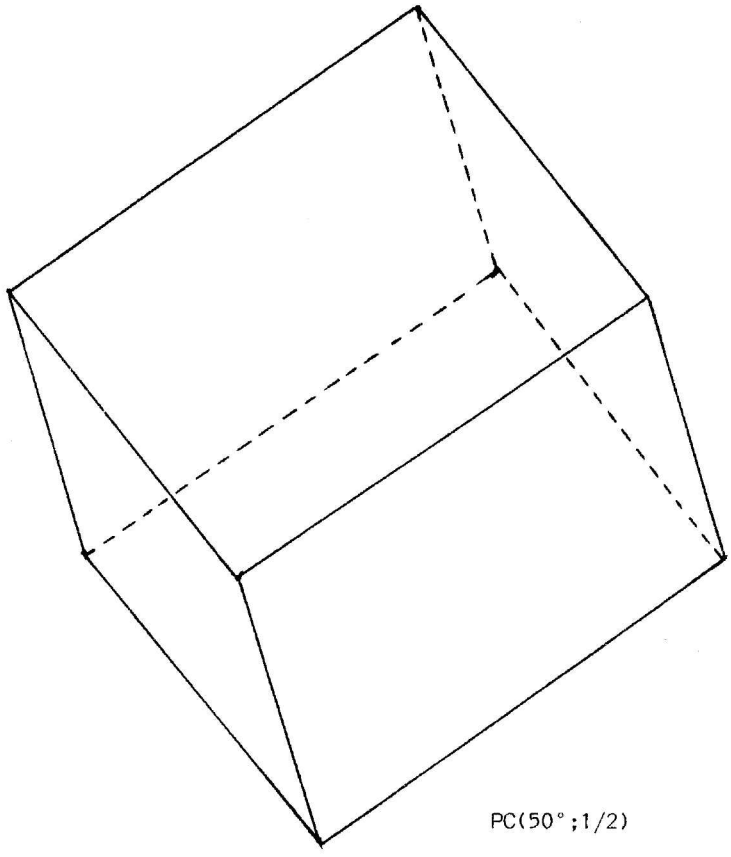
Représentations en perspective cavalière d'un cube d'arête 6 cm



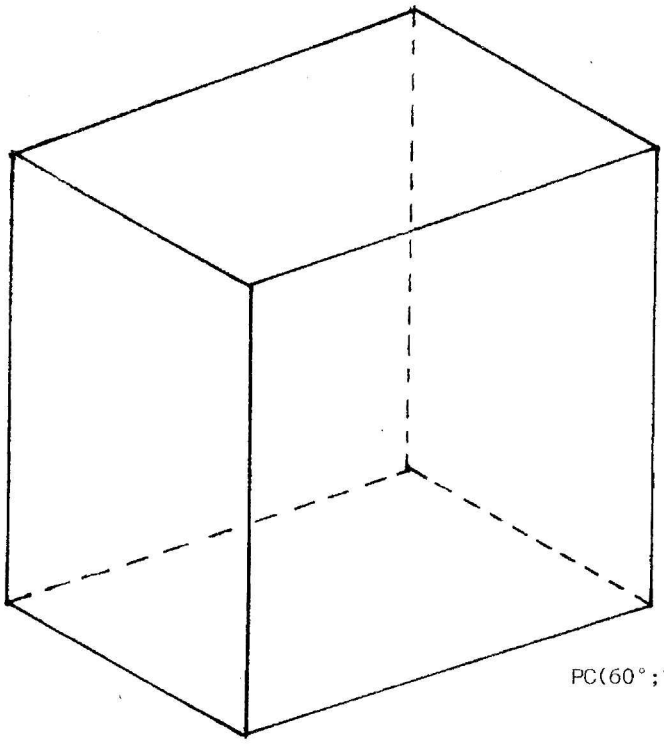
PC(45°,2/3)



PC(30°;1/2)



PC(50°;1/2)



PC(60°;1/2)

- Chapitre 5 -

DESSINS D'ELLIPSES

LES MANIPULATIONS

Les activités développées dans ce chapitre ne sont pas explicitement mentionnées dans les programmes des Lycées et Collèges. Cependant, il est souhaitable de les mettre en oeuvre en classe; en effet, on peut faire deux observations essentielles :

1/ Quand les élèves s'exercent à la représentation plane de corps ronds de l'espace, à main levée, ils ébauchent habituellement un tracé d'ellipses.

2/ Quand ces mêmes élèves veulent parfaire leur dessin par un travail soigné, ils ont recours aux instruments usuels, règle, compas, pour aboutir à un tracé propre certes, mais faux et éloigné de l'ébauche à main levée.

Il convient donc d'initier les élèves à des tracés pratiques d'ellipses, qu'ils pourront mettre en oeuvre dans les représentations planes d'objets de l'espace, qu'il s'agisse :

* d'une perspective cavalière : cercle inscrit dans une face du cube, cylindre de révolution, cône de révolution,
* d'une représentation "conventionnelle" (appelée aussi "usuelle" ou "traditionnelle") : la sphère, son équateur, un parallèle, un méridien.

MATERIEL NECESSAIRE SPECIFIQUE

* papier non quadrillé, format A4 (21x29,7),
* équerre 30°, 60°, 90° (éventuellement graduée),
* compas avec une pointe sèche et une pointe crayon,
* un pistolet à dessin
* un pochoir trace-ellipses

} voir les patrons au chapitre 10

LES TECHNIQUES DU DESSIN

* Il ne s'agit pas de faire un bilan exhaustif de tous les procédés possibles de génération de l'ellipse, d'autant que ces procédés, en apparence anodins, sont en général peu pratiques à mettre en oeuvre.

* Le commerce met à notre disposition un ellipsographe conçu à partir du procédé de tracé dit "de la bande de papier". Le coût relativement élevé de cet instrument ne permet pas d'envisager sa diffusion à l'ensemble des élèves.

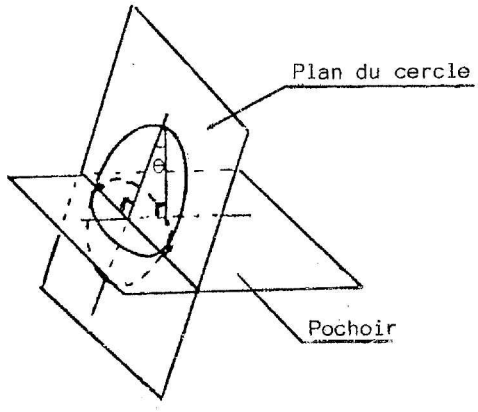
* *La fiche 1* utilise un repérage de points par quadrillages suivi d'un tracé à l'aide du pistolet à dessin.

L'élève obtient ainsi un tracé d'ellipse à axes parallèles aux bords de la feuille et un tracé d'ellipse à axes obliques par rapport aux bords de la feuille.

Cette fiche est particulièrement adaptée aux débutants, mais elle n'est pas à mettre en parallèle avec la projection cylindrique d'un cercle de l'espace.

* *La fiche 2* constitue un simple entraînement à l'utilisation du pochoir trace-ellipses et sensibilise les élèves à l'agrément d'un dessin précis, propre, de réalisation facile et rapide ... La mesure de l'angle figurant sur le pochoir est celle de l'angle de la perpendiculaire au pochoir avec le plan du cercle dont l'ellipse apparaît comme la projection orthogonale (voir la figure ci-dessous). Activité à adapter en fonction du modèle de pochoir disponible.

θ est l'angle figurant sur le pochoir



* *La fiche 3* demande un certain soin; le tracé d'ellipse se fait à partir des diamètres principaux de l'ellipse, autrement dit à partir de la connaissance des quatre sommets de l'ellipse. Il s'agit d'un tracé approché, mais la précision est telle qu'il est impossible de le différencier du tracé exact de l'ellipsographe, compte-tenu des épaisseurs de trait. Cette affirmation résulte des multiples constatations répétées par plusieurs opérateurs différents notamment au cours de stages de géométrie organisés par l'IREM de Montpellier.

La méthode consiste à remplacer au voisinage de chaque sommet de l'ellipse, l'arc d'ellipse par un arc de cercle dont la courbure est exactement celle de l'ellipse en ce sommet. Le centre d'un tel cercle est facile à construire (voir l'exercice). L'ellipse est achevée dans un second temps à l'aide du pistolet à dessin. Il est hors de propos d'aborder une justification théorique de la construction dans l'enseignement secondaire. Les arcs de cercles construits ont un contact "d'ordre 4" avec l'ellipse; ils sont appelés "arcs surosculateurs".

Cette activité est plutôt adaptée aux classes de 4ème et 3ème, elle devra être proposée avec prudence dans les classes antérieures.

* *La fiche 4* utilise les propriétés de l'affinité orthogonale pour repérer au total 12 points de l'ellipse; le tracé s'achève par interpolation à l'aide du pistolet à dessin.

Cette technique peut être présentée avec prudence au collège. Elle est mieux adaptée aux classes des lycées.

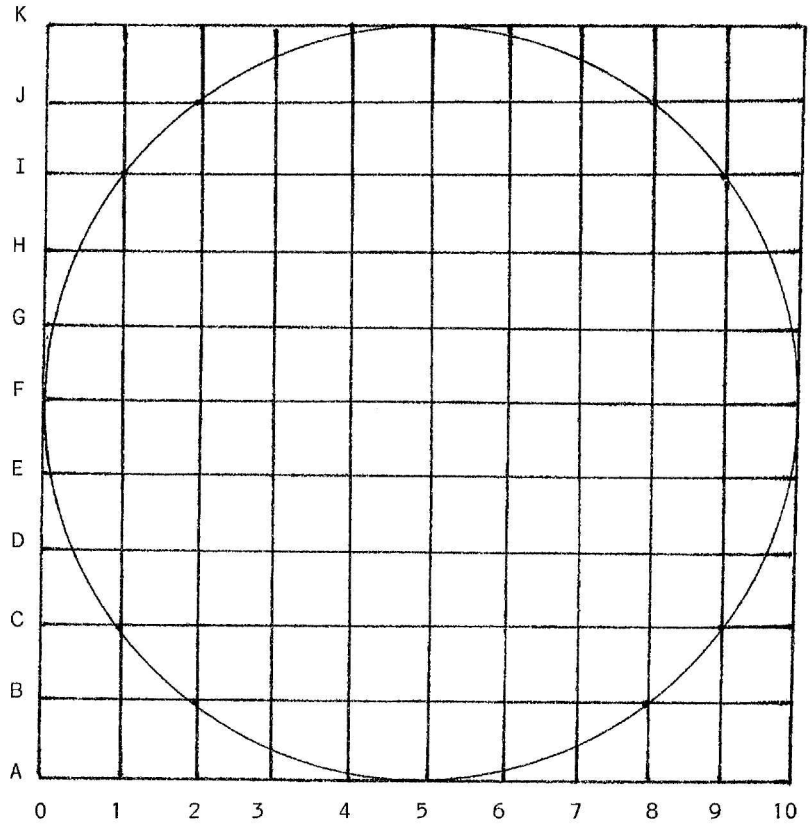
* *La fiche 5* amène une confrontation cercle, ellipse, espace et perspective cavalière. Plusieurs techniques seront prises en compte.

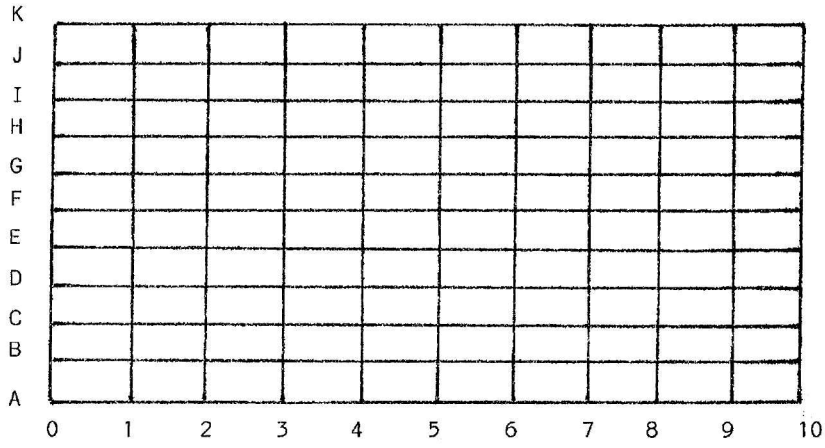
Complément

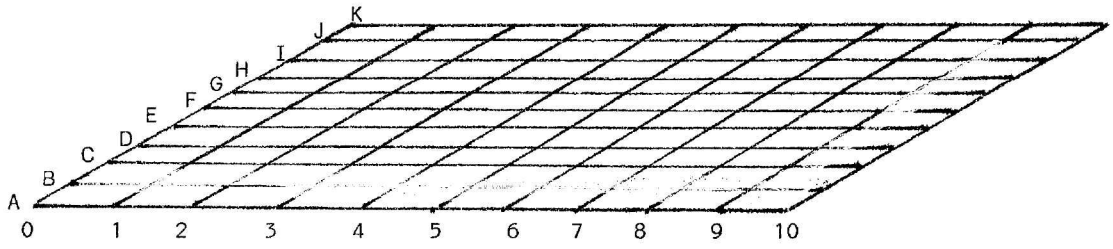
* Il est exclusivement réservé à l'enseignant soucieux d'une maîtrise théorique plus approfondie, en relation avec la fiche 5 et la projection cylindrique d'un cercle de l'espace sur un plan; on rappelle que cette projection est soit un cercle, soit une ellipse vraie, soit un segment.

FICHE 1

* Repère quelques points du cercle, en particulier ceux situés sur les noeuds du quadrillage.
* Reporte ces points sur chacun des deux autres quadrillages.
* En joignant les points reportés sur chacun des deux autres quadrillages, on peut obtenir deux courbes appelées ELLIPSES.





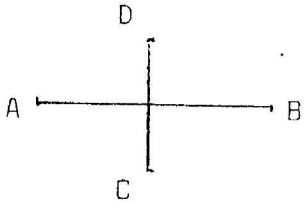


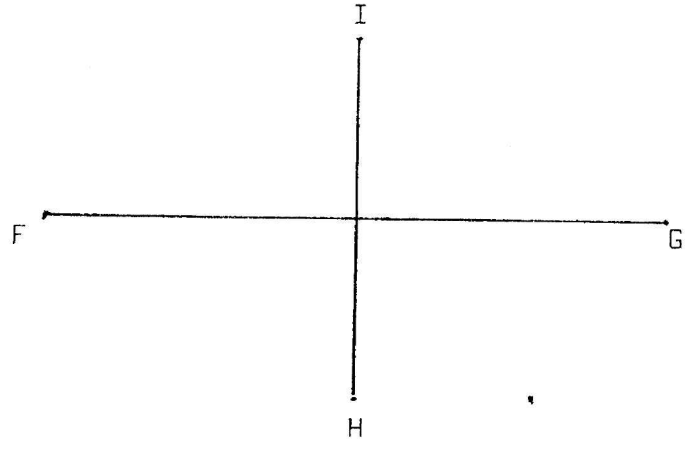
FICHE 2

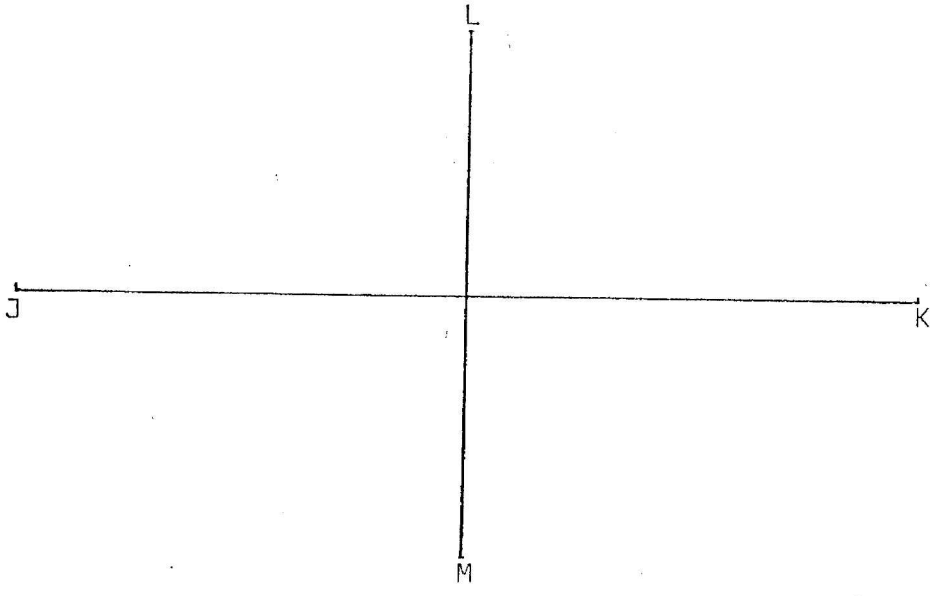
* Utilise ton pochoir trace-ellipses, et, éventuellement ton pistolet à dessin pour tracer le plus proprement possible ;

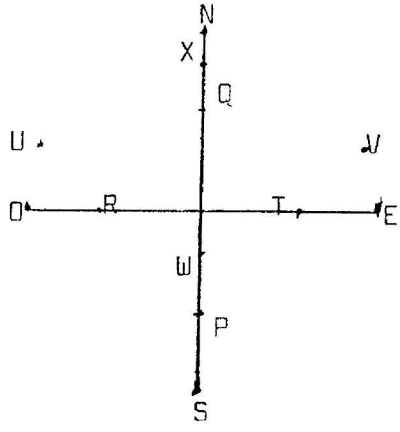
- une ellipse de sommets ABCD,
- une ellipse de sommets FGHI,
- une ellipse de sommets JKLM,
- une ellipse de sommets OEPQ, une ellipse de sommets RTSN, une ellipse de sommets UVWX.

* Complète le dernier dessin avec le cercle circonscrit au quadrilatère OSEN. Quelle représentation te suggère cette figure ?









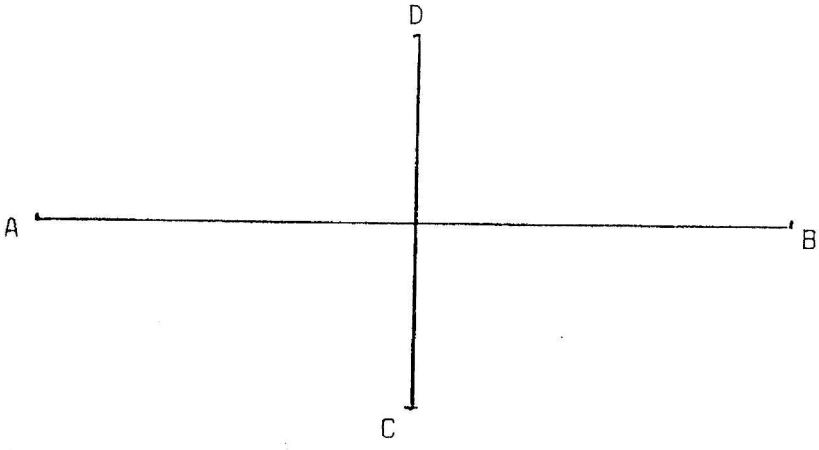
FICHE 3

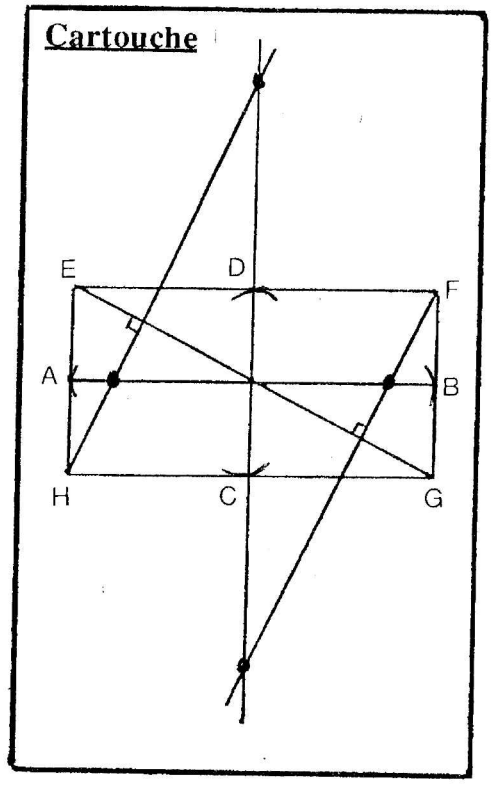
Pour visualiser l'ellipse de sommets ABCD, je te propose de remplacer, au voisinage de ces sommets, les arcs d'ellipse, par des arcs de cercles, les centres de ces arcs de cercles étant obtenus comme suit :

- construis le rectangle EFGH admettant AB et CD comme axes de symétrie,
- choisis deux sommets opposés de ce rectangle, et, par chacun de ces sommets, trace la perpendiculaire à la diagonale du rectangle qui ne contient pas ces sommets,
- les deux droites ainsi obtenues coupent les axes de l'ellipse AB et CD en quatre points qui sont les centres des arcs de cercles,
- dessine convenablement une ébauche de chacun de ces quatre arcs de cercles, et termine le tracé à l'aide de ton pistolet à dessin.

La figure ainsi obtenue est une excellente approximation du tracé rigoureusement exact. Tu peux comparer avec un dessin des tracés obtenus dans la fiche 1.

Nota : tu peux t'aider du cartouche pour exécuter tes constructions.





FICHE 4

Tracé d'une ellipse par la méthode "des 12 points".

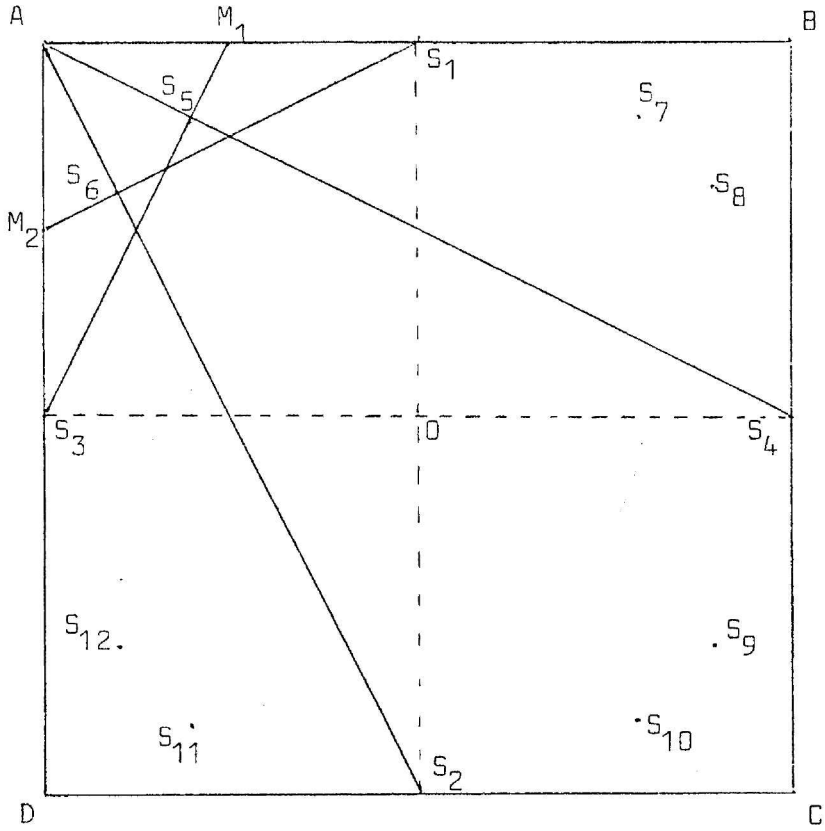
* Soit le carré ABCD de côté 10 cm.

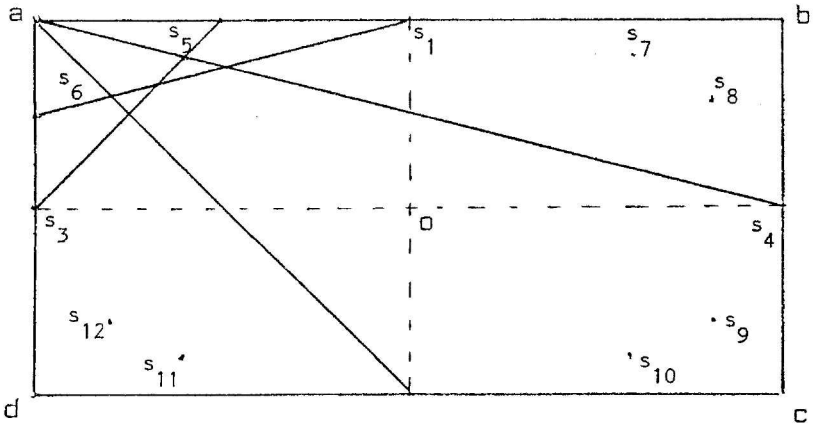
(S_1S_2) et (S_3S_4) sont des axes de symétrie du carré.

M_1 est le milieu de $[AS_1]$; les segments $[AS_4]$ et $[M_1S_3]$ se coupent en S_5. Par une construction analogue, à partir de M_2 on obtient S_6. En opérant de même ou en utilisant les symétries, construis les points S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}.

* Vérifie que les douze points S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12} appartiennent au cercle de centre 0 et tangent aux quatre côtés du carré.

* En opérant, sur le rectangle abcd, des constructions analogues à celles faites précédemment, construis douze points s_1, s_2, ..., s_{12}. A l'aide de ton pistolet à dessin, relie ces douze points qui déterminent une courbe appelée ellipse.





FICHE 5

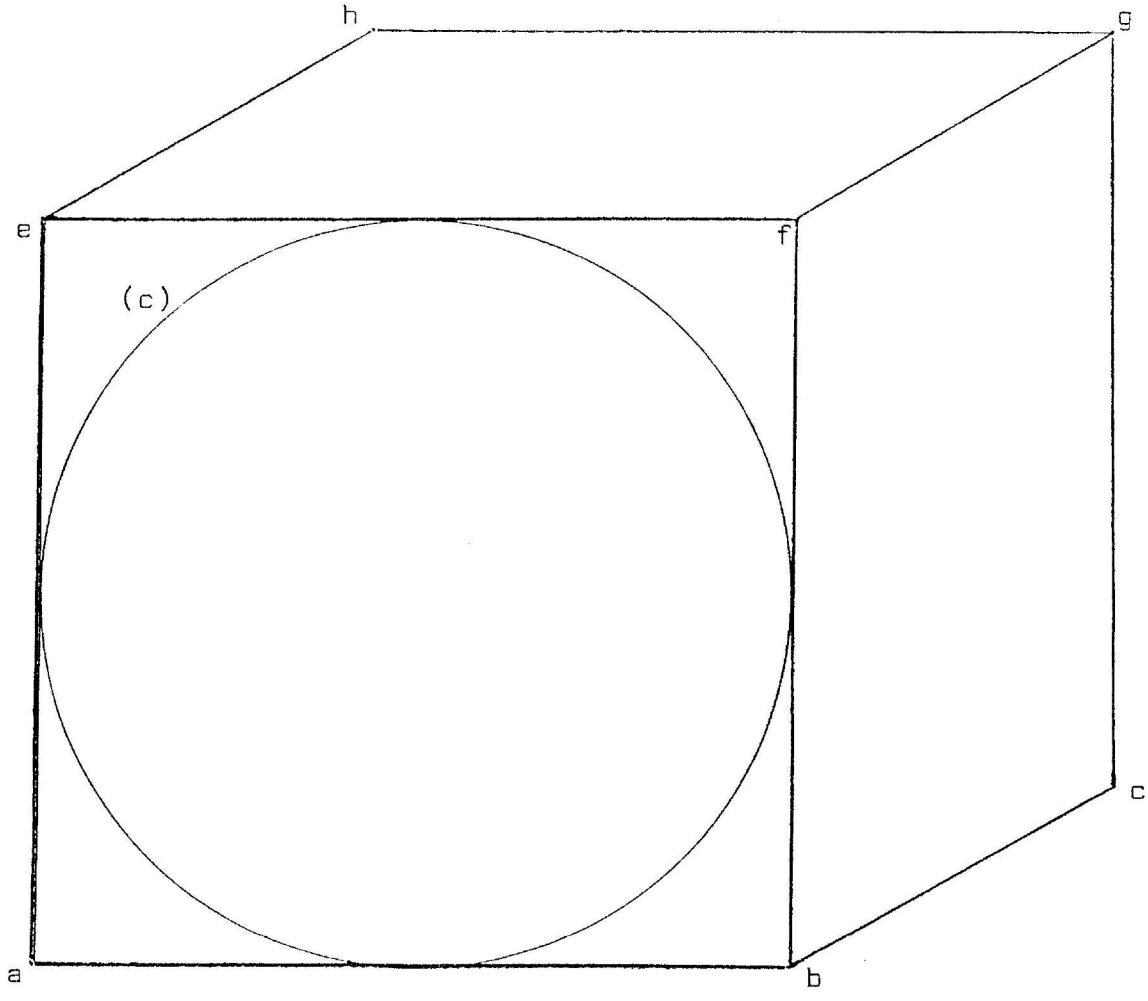
Dans cette fiche, les lettres majuscules désignent des éléments de l'espace, les lettres minuscules désignent leur représentation sur le dessin. L'enseignant choisira d'aider les élèves ou de les laisser libres de leurs initiatives.

Le dessin ci-dessous est la perspective cavalière (30°, 1/2) d'un cube ABCDEFGH de 10 cm d'arête. abfe représente la face avant et la droite (bc) est une fuyante.

Le cercle (c) représente le cercle (C) inscrit dans le carré ABFE.

* Précise, sur le dessin, la représentation du cercle (C') inscrit dans le carré EFGH de l'espace. [Il s'agit d'une ellipse (c')].

* Opère une construction analogue avec une perspective cavalière (90°, 1/2) de ce même cube.



Complément réservé à l'enseignant

Dans cette fiche, les lettres majuscules désignent des éléments de l'espace, les lettres minuscules désignent leur représentation sur le dessin;

La projection cylindrique conserve les propriétés de parallélisme et de milieu (sauf dégénérescence).

Dans la situation de la fiche 5, les segments [ij] et [kl] (voir la figure ci-contre) sont la représentation de deux diamètres [IJ] et [KL] perpendiculaires du cercle (C'). Ces diamètres de (C') sont conjugués, c'est-à-dire que chacun d'eux est l'ensemble des milieux des cordes parallèles à l'autre. Par conséquent, [ij] et [kl] sont des diamètres conjugués (non perpendiculaires) de l'ellipse (c').

Pour tracer (c'), par exemple à partir de la méthode développée dans la fiche 3, il convient de déterminer les diamètres conjugués perpendiculaires de (c'), c'est-à-dire les axes de symétrie orthogonale de (c').

A cet effet, considérons la rotation d'axe EF amenant la face ABFE sur la face HGFE. Soit 0 le centre de (C) et 0' son image par la rotation. 0' est le centre de (C').

0 est représenté par o centre du carré abfe.

0' est représenté par o' centre du parallélogramme hgfe.

Soit U et V les points d'intersection des droites portant deux diamètres conjugués de (C) avec l'axe de rotation EF.

OU et OV sont perpendiculaires ainsi que leurs représentants ou et ov.

U et V étant invariants par la rotation, o'u et o'v sont les supports de deux diamètres conjugués de (c').

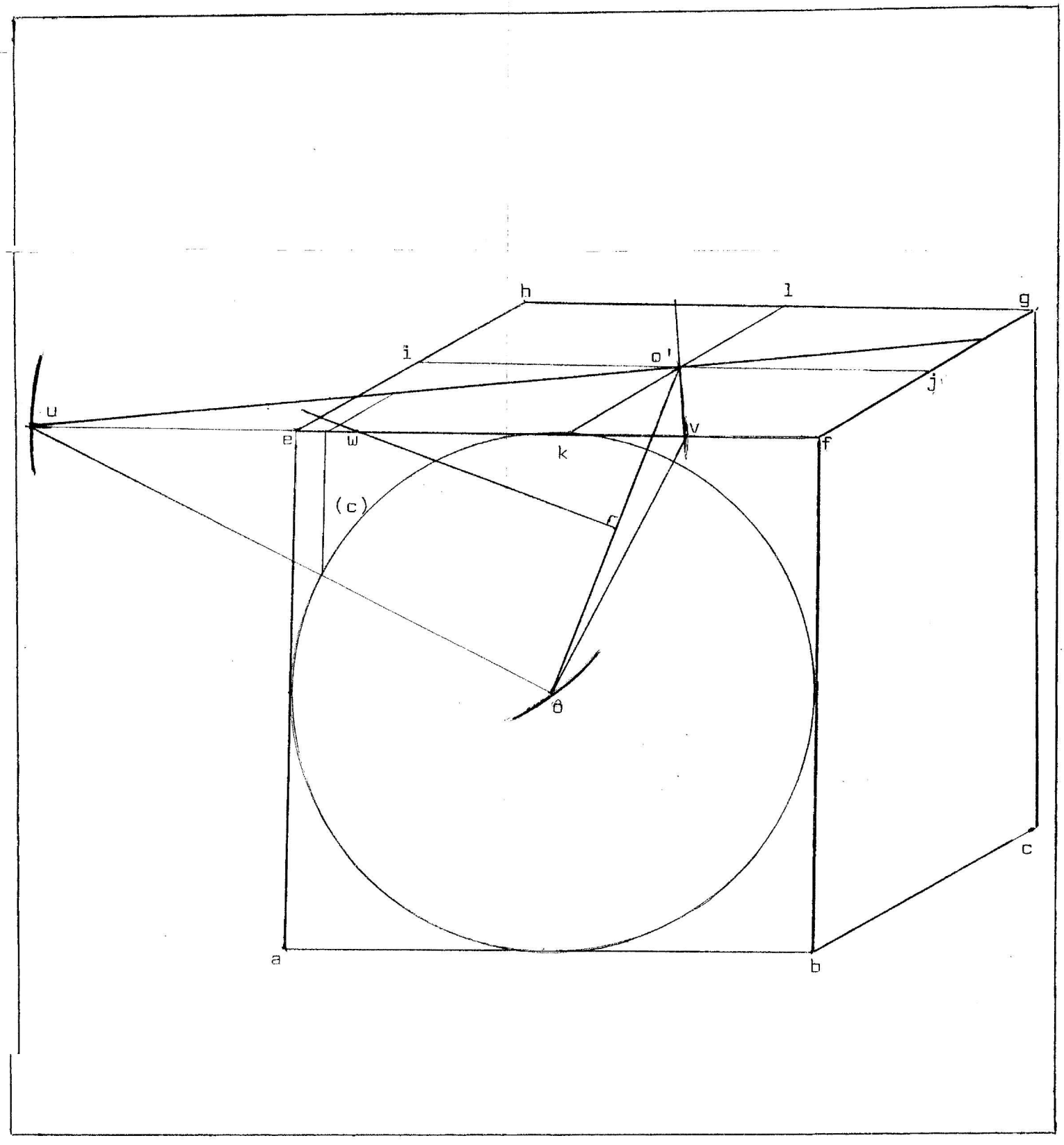
o'u et o'v sont perpendiculaires si et seulement si le quadrilatère ouo'v est inscriptible dans un cercle de diamètre [uv]; le centre w de ce cercle est l'intersection de ef avec la médiatrice de [oo']; il en résulte deux points u et v (wo = wo' = wu = wv) tels que o'u et o'v sont les axes de symétrie orthogonale de (c'). La détermination des sommets de (c') en résulte sans difficulté.

Remarque : cette méthode est utilisable pour déterminer les axes de symétrie orthogonale d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués [ij] et [kl].

On construit successivement le parallélogramme efgh, puis le carré abfe, puis le parallélogramme bfgc. Le tracé obtenu peut être considéré comme la projection cylindrique d'un cube dont la face ABFE est parallèle au plan de projection.

La droite fg est la trace du plan orthogonal au plan de projection, contenant la droite FG et parallèle à la direction de projection. Enfin, le rapport $\frac{fg}{ef} = \frac{fg}{FG}$ est la cotangente de l'angle de la direction de projection avec le plan de projection.

La procédure décrite ci-dessus aboutit ensuite au résultat.


h
l
g
i
o'
j
u
e
w
k
v
f
(c)
r
θ
c
a
b

- Chapitre 6 -

LE CYLINDRE DE REVOLUTION

LES MANIPULATIONS

Dans l'enseignement des corps ronds, comme dans toute la géométrie de l'espace, il faut utiliser des objets aussi souvent que possible.

En ce qui concerne le cylindre de révolution (dans ce chapitre nous dirons plus brièvement cylindre), les activités d'observation et de manipulation, d'objets cylindriques et de maquettes, ont pour objectif d'introduire le vocabulaire (fiche 1).

La manipulation d'une surface rectangulaire en rotation autour d'un axe permet de donner un sens aux expressions comme "révolution, génératrice, ..." (fiche 2).

La détermination de formes et dimensions de sections du cylindre selon des plans perpendiculaires aux plans de base, passant ou non par les centres des disques de base, est facilitée par la donnée d'un dessin du cylindre accompagnant l'activité (fiche 3).

La réalisation de patrons permet de mieux matéraliser la surface latérale et les disques de base du cylindre et conduit à résoudre des problèmes de calcul du périmètre de base ou du rayon d'un disque de base (fiche 4).

LES REPRESENTATIONS

Les travaux de représentation du cylindre apparaissent dans l'apprentissage après de nombreuses activités de manipulations d'objets et de fabrication de patrons.

L'accès à la représentation passe par une analyse de l'objet. Dans ce but, manipulation de maquette et réalisation de dessin doivent être associées.

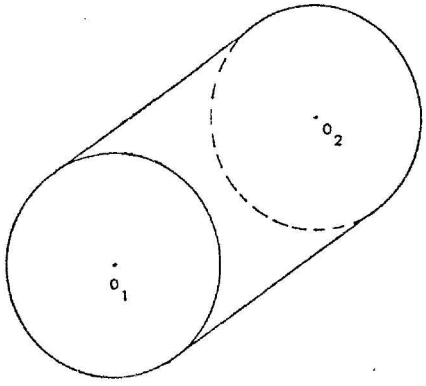
Dans ce passage de l'objet au dessin, l'élève doit percevoir que les mesures sur l'objet ne sont pas toujours identiques à celles sur le dessin (fiche 3).

Des activités de lecture de dessin et de réalisation de dessin sont à proposer aux élèves pour l'apprentissage de la représentation traditionnelle du cylindre en perspective cavalière (fiche 5).

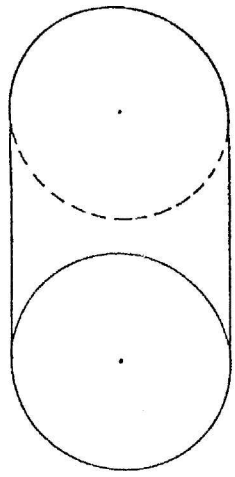
On peut remarquer que dans l'étude des prismes droits, on utilise essentiellement des perspectives à 30°, 45°, 60°, ... mais rarement à 90° alors que pour le cylindre, la perspective cavalière à 90° fonctionne mieux qu'une perspective cavalière dont l'angle de fuite a une mesure quelconque. Pour s'en convaincre, observons les représentations suivantes :

1. Le plan de projection est parallèle à une des bases du cylindre

* Les disques de base apparaissent en vraie grandeur
* Les génératrices sont réduites



PC (30°, 1/2)

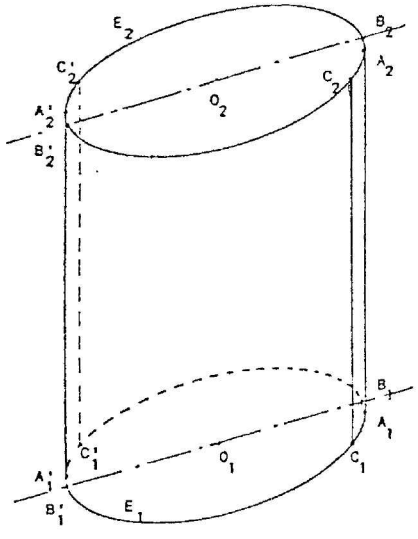


PC (90°, 1/2)

Ces représentations sont peu utilisées avec les élèves.

2. Le plan de projection est parallèle à l'axe du cylindre

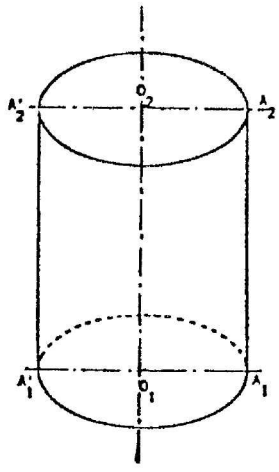
* Les génératrices sont en vraie grandeur
* Les cercles de base sont représentés par des ellipses



PC (50°, 1/2)

Les génératrices A_1A_2 et $A'_1A'_2$, les arcs d'ellipses $A_1A'_1$ et A'_2A_2 constituent le contour apparent de l'ellipse.

Les extrémités des génératrices A_1A_2 et $A'_1A'_2$ étant décalées par rapport aux extrémités des grands axes $B_1B'_1$ et $B_2B'_2$, les ellipses sont plus difficiles à tracer et de ce fait cette perspective cavalière à angle de fuite différent de 90° est rarement utilisée.



PC(90°, 1/2)

Au niveau du dessin, le grand axe de l'ellipse étant parallèle aux génératrices, la PC à 90° est la représentation qui présente le moins de difficulté pour les élèves, à condition d'utiliser un pochoir trace-ellipse.

Cette représentation traditionnelle du cylindre est la plus utilisée avec les élèves car elle est suffisante pour raisonner, effectuer des calculs, résoudre des problèmes.

LES CALCULS

Les exercices de calcul de longueur, aire, volume, ne comportent pas de difficultés spécifiques au cylindre. Ils amènent les élèves à utiliser les propriétés caractéristiques du solide ou des propriétés géométriques plus générales ainsi qu'à maîtriser l'emploi de formules (fiche 7). Certaines activités permettent, par ailleurs, de reconnaître, s'il y a lieu, des situations de proportionnalité (fiche 6).

FICHE 1

Construction de l'objet et mise en place du vocabulaire relatif au cylindre
Les élèves construisent un cylindre. Une partie de cette activité peut éventuellement être réalisée à la maison. Un patron de cylindre (chapitre 10) est distribué à chaque élève.

1. Construire un cylindre en utilisant le patron fourni et en appliquant les consignes suivantes :

a) Reproduis sur une feuille de papier cartonné les trois dessins du modèle.

b) Trace, à l'aide de plusieurs couleurs, sur la surface rectangulaire, deux segments parallèles au petit côté du rectangle et deux autres segments de direction quelconque.

c) Découpe le contour des trois dessins et plie les différentes languettes.

d) Colle la languette permettant de fermer la *surface latérale du cylindre.*

e) Colle les disques de base sur les languettes pour compléter le cylindre.

2. Observer les différents segments dessinés sur la surface latérale du cylindre ainsi construit :

- Pose le cylindre sur une de ses bases et vois dans quel cas, il est possible d'appliquer une règle sur un segment tout entier.

FICHE 2

Manipulation d'objets et découverte des caractéristiques du cylindre
Les élèves observent le professeur qui manipule avec un élève.

1. Faisons tourner une fiche rectangulaire ABCD en papier bristol autour d'un axe contenant le côté [AB] du rectangle.

a) Lorsque la fiche effectue un tour complet autour de (AB), quelle ligne décrit le point D ? Le point C ?

b) De même, quelle surface décrit alors le segment [AD] ?, le segment [BC] ?, le segment [CD] ?

c) Au cours de cette rotation, quel solide décrit le rectangle ABCD ?

2. Même activité avec une fiche rectangulaire de mêmes dimensions tournant cette fois autour d'un axe contenant le côté [AD] du rectangle.

a) Quelle est la hauteur du cylindre ainsi déterminé ?

b) Quel est le rayon d'un disque de base de ce cylindre ?

3. Autre activité de rotation d'une fiche rectangulaire de mêmes dimensions, autour de l'un des axes de symétrie du rectangle.

a) Axe parallèle à (AB)
- hauteur du cylindre ?
- rayon d'un disque de base ?

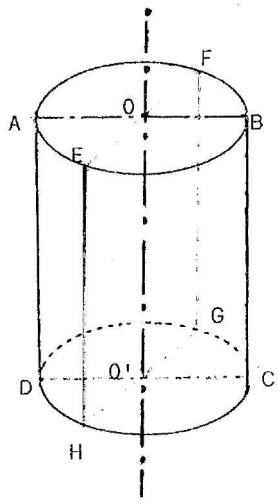
b) Axe parallèle à (AD)
- hauteur du cylindre ?
- rayon d'un disque de base ?

FICHE 3

Lecture d'un dessin, étude de positions relatives d'éléments du cylindre, différence entre objet et dessin.
Chaque élève a à sa disposition le cylindre qu'il a construit précédemment (fiche 1) et une photocopie de la figure ci-dessous.

- Ce dessin représente un cylindre de hauteur 10 cm et de diamètre 6 cm. Les quadrilatères ABCD et EFGH représentent des sections verticales de ce cylindre passant par les centres 0 et 0' des disques de base.

Regarde attentivement la figure et réponds aux questions suivantes :



a) Quelles sont les longueurs réelles des segments [AB], [AD], ..., [EG] ?

AB = ..	AD = ..	FE = ..	FG = ..
OO' = ..	AC = ..	FO' = ..	EG = ..

b) Quelle est la mesure réelle des angles ?

$\widehat{ABC}$ = .. $\widehat{BCD}$ = .. GHE = .. $\widehat{HEF}$ = .. $\widehat{OO'C}$ = .. $\widehat{OO'G}$ = ..

c) Quelle est la nature des sections ABCD et EFGH ?

d) Quelle est l'intersection des sections ABCD et EFGH ?

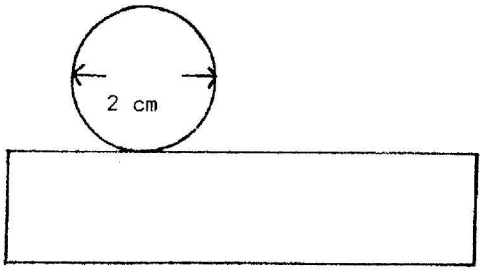
e) Quelle est la position des génératrices [AD], [EH], [BC], [FG] par rapport aux plans des disques de base ?

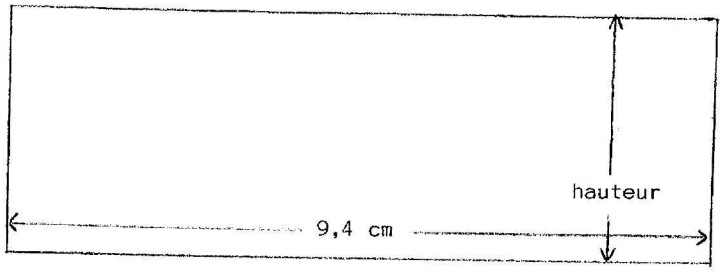
f) Quelle est la position de l'axe (OO') par rapport aux plans des disques de base ?

FICHE 4

Fabrication de patrons
Les élèves utilisent les caractéristiques du cylindre pour déterminer des données manquantes.

1. Complète les figures suivantes de façon à obtenir des patrons de cylindre.

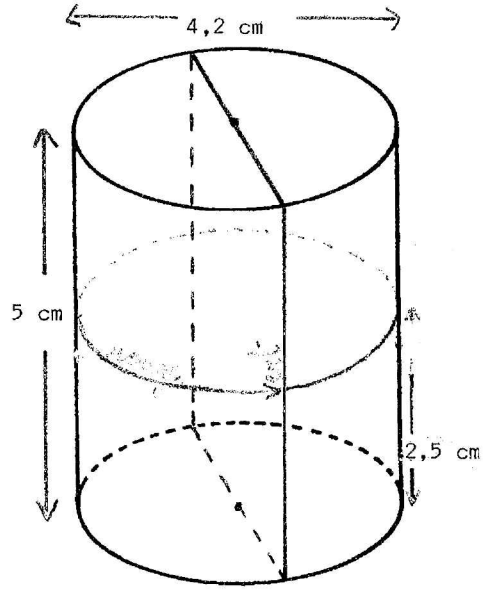




2. Réalise un patron du cylindre dont la hauteur est égale à 8 cm et le diamètre d'un disque de base égal à 5,5 cm.

3. Réalise un patron du cylindre dont voici une représentation

(Trace sur le patron les différents traits verts et rouges).

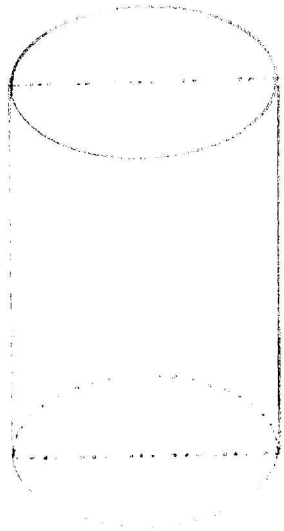


FICHE 5

Représentation du cylindre, passage de l'objet au dessin
Le but est d'enseigner la représentation traditionnelle du cylindre dont nous avons parlé dans l'introduction.
Les élèves disposent de la maquette d'un cylindre ainsi que de gabarits (chapitre 10) ou d'un pochoir trace-ellipse correspondant.

1. <u>On donne un dessin :</u>

Ceci est le dessin traditionnel d'un cylindre de hauteur égale à 5 cm et de diamètre de base égal à 4 cm.



Indique sur ce dessin les
éléments remarquables du cylindre
(hauteur et diamètre de base)

2. <u>On demande un dessin :</u>

En t'inspirant de ce dessin, représente sur ta feuille de dessin un cylindre de hauteur égale à 8 cm et de diamètre de base égal à 4,5 cm.

3. Réalise une nouvelle représentation (PC (30°, 1/2))de ce même cylindre (hauteur égale à 8 cm et diamètre de base égal à 4,5 cm), mais cette fois, de telle manière que les disques de base apparaissent en vraie grandeur.

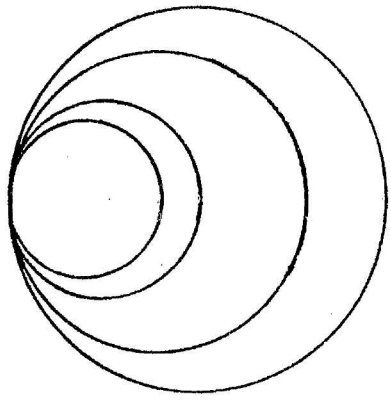
FICHE 6

- Organisation et gestion de données numériques à base géométrique - Intérêt des différentes représentations du cylindre

- Sur le modèle des exercices 1 et 2 de cette fiche, on peut étudier la variation de l'aire latérale d'un cylindre en fonction du périmètre de la base quand la hauteur est fixée ou inversement, étudier la variation de l'aire latérale d'un cylindre en fonction de la hauteur quand le périmètre de base est fixé.

1. Variation du volume d'un cylindre en fonction de l'aire de la base quand la hauteur est fixée.

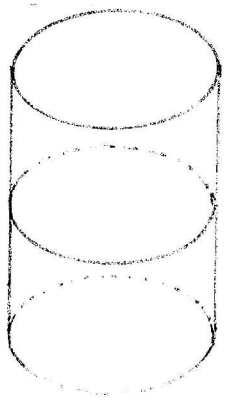
. Voici des représentations de cylindres vus de dessus. Ils ont tous 10 cm de hauteur.
. Calculer leurs volumes connaissant le diamètre d de leurs bases et l'inscrire dans le tableau.
. A-t-on un tableau de proportionnalité ?



d en cm	2	2,5	4	5
Volume en cm^3				

2. Variation du volume d'un cylindre en fonction de la hauteur quand l'aire de la base est fixée

. Voici des représentations de cylindres , ils ont tous une base de rayon 5 cm.
. Calculer leurs volumes connaissant leur hauteur h et l'inscrire dans le tableau .
. A-t-on un tableau de proportionnalité ?



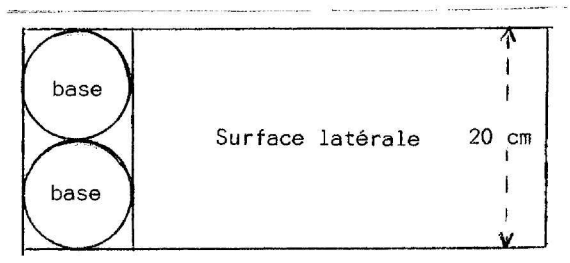
h en cm	3	4	5	7
Volume en cm^3				

FICHE 7

Calculs de longueur - d'aire - de volume
Réalisation de dessins dans la résolution de problèmes faisant intervenir les concepts de cylindre et de section vecticale.

1. Le format A4 désigne les feuilles de papier de 21 x 29,7 (cm). On peut rouler cette feuille de deux façons différentes formant ainsi deux cylindres (l'un de hauteur 21 cm, l'autre de hauteur 29,7 cm).
Lequel a le plus grand volume ? La plus grande aire latérale ?

2. Sur une feuille rectangulaire de 20 cm de large et dont on ne connait pas la longueur, on a découpé les deux bases et la surface latérale d'un cylindre.
- Calcule les dimensions de cette feuille.
- Calcule l'aire totale du cylindre.
- Calcule le volume de ce cylindre.



3. Une fourme de Lozère, cylindrique a un diamètre de 10 cm et une hauteur de 8 cm. On peut repérer le centre de la face supérieure par le point C. On partage cette fourme en deux par un coup de couteau vertical.
- Dessine la section obtenue si le coup de couteau passe par le point C.
- A quelle distance du point C faut-il couper pour que la section soit de forme carrée ?

- Chapitre 7 -

LE CONE DE REVOLUTION

LES MANIPULATIONS

La manipulation d'objets coniques ou tronconiques, de maquettes ... permet de repérer ce que désignent les mots et expressions : base, surface latérale, hauteur (Fiche 1).

Les mots cône de révolution et génératrice prennent leur sens au cours de manipulations permettant de visualiser la rotation du triangle rectangle qui engendre le cône (il existe des cônes creux, transparents, contenant un triangle rectangle, coloré, mobile autour d'un axe mais on peut imaginer d'autres manipulations sans matériel très spécialisé).

D'autres manipulations enfin, comportant des sections, permettent de donner du sens à l'expression "tronc de cône" et de déterminer la forme de sections selon des plans parallèles ou perpendiculaires à la base (Fiche 3).

La fabrication de patrons permet de visualiser le secteur circulaire qui constitue la surface latérale et motive des calculs concernant particulièrement le périmètre de la base, la détermination de l'angle du secteur, l'aire latérale (Fiche 4).

LES TECHNIQUES DU DESSIN

La représentation d'un cône de révolution en perspective cavalière présente plusieurs types de difficultés : il suffit d'observer les représentations en perspectives cavalières ci-après pour s'en convaincre.

Certaines de ces difficultés sont, comme pour le cylindre, liées au tracé de l'ellipse qui représente le cercle de base (à ce propos on peut se reporter au chapitre consacré à l'étude du cylindre).

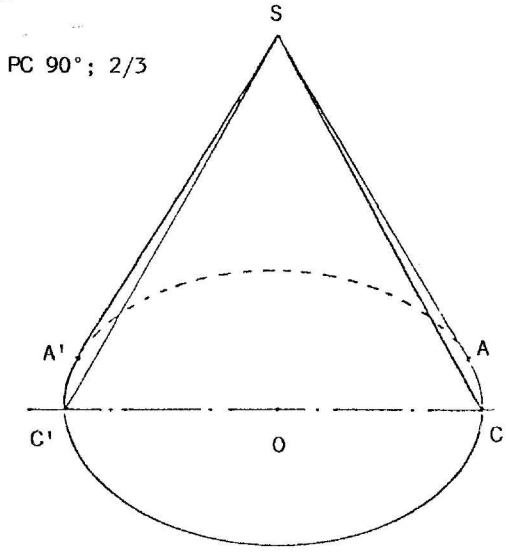


Figure 1

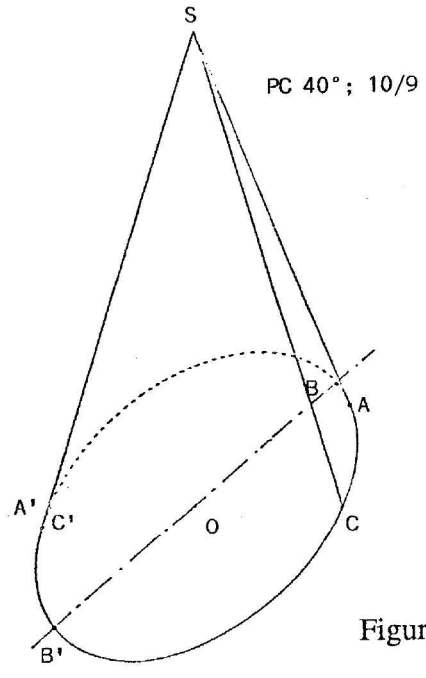


Figure 2

D'autres difficultés sont spécifiques au cône de révolution : en effet, alors que dans la représentation traditionnelle du cylindre le contour du dessin fait apparaître deux génératrices en vraie grandeur, dans le dessin traditionnel du cône il n'en est pas de même.

Observons la figure 1. Deux types de génératrices apparaissent :

* Les génératrices du contour apparent [SA] et [SA'] ne sont pas en vraie grandeur.

* Les génératrices [SC] et [SC'], joignant le sommet à deux points diamétralement opposés, n'appartiennent pas au contour apparent et, dans la représentation traditionnel du cône, elles ne sont pas tracées.

On peut remarquer que, plus le sommet est haut et l'ellipse aplatie, moins le problème est gênant, car les deux types de génératrices sont pratiquement confondus. On a donc intérêt à proposer aux élèves des dessins traditionnels correspondant à cette situation.

Toutefois, certains élèves risquent de soulever le problème posé par le tracé du contour apparent quand ils seront amenés à réaliser eux-mêmes des dessins du cône : on pourra alors préciser qu'on trace depuis le sommet des tangentes à l'ellipse et qu'effectivement elles ne représentent pas rigoureusement des génératrices en vraie grandeur (Fiche 2). (On évitera de prolonger au-delà l'examen de cette difficulté). Il sera très généralement suffisant de se contenter de la représentation traditionnelle ci-contre (figure 3) en utilisant pour le tracé de l'ellipse un des procédés mentionnés au chapitre précédent sur l'ellipse (calque, cercles surosculateurs, trace-ellipse, ...).

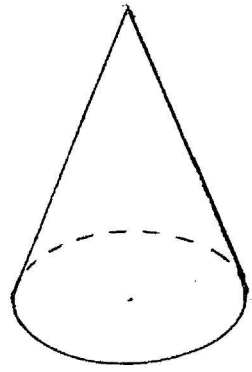


Figure 3

Le dessin technique précis interviendra seulement pour le tracé des patrons et des sections par des plans parallèles ou perpendiculaires à la base.

PATRONS - VOLUMES - SURFACES

Les exercices concernant volume, aire latérale, agrandissement et réduction ne comportent pas de difficultés spécifiques au cône; ils permettent d'utiliser les propriétés de géométrie plane : Pythagore, Thalès, ... La difficulté réside uniquement dans le choix du plan dans lequel il faut travailler et les élèves ont besoin d'être familiarisés avec ce choix qui n'est pas évident pour beaucoup d'entre eux (Fiche 4).

LES SECTIONS PLANES DU CONE DE REVOLUTION

Avec les élèves débutants, on abordera seulement les sections par des plans parallèles à la base, par des plans perpendiculaires à la base et passant par le sommet. Mais il paraît intéressant de rappeler , rapidement ici, quelles sont les différentes sections du cône de révolution.

CONIQUES

L'ellipse, l'hyperbole, la parabole sont appelées coniques car on peut les obtenir en coupant un cône circulaire (et aussi un cône non circulaire) par un plan P ne passant pas par le sommet du cône.

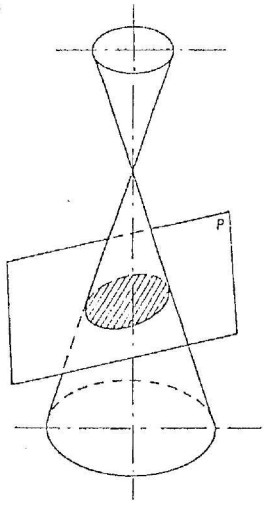


Figure 4

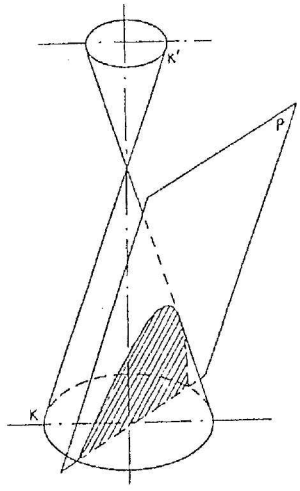


Figure 5

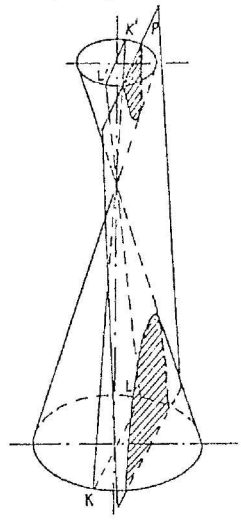


Figure 6

* Si P n'est parallèle à aucune des génératrices du cône : la conique est une ellipse (figure 4) (en particulier, l'ellipse peut être un cercle si le plan de section est parallèle à la base dans un cône de révolution).
* Si le plan P est parallèle à une seule des génératrices du cône (KK') la conique est une parabole (fig. 5).
* Si le plan P est parallèle à deux génératrices du cône (KK' et LL') la conique est une hyperbole (figure 6).

Remarque :

*Si le plan P passe par le sommet du cône, au lieu de l'ellipse on obtient un point (figure 7)
* au lieu de l'hyperbole on obtient deux droites sécantes (figure 8)
* et au lieu de la parabole on obtient la droite de tangence du plan P et du cône (figure 9).

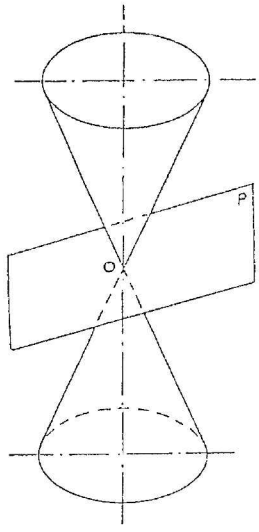


Figure 7

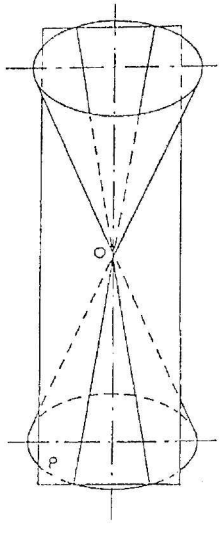


Figure 8

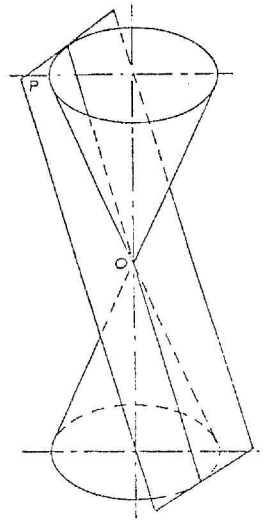


Figure 9

FICHE 1

Manipulation d'objets - Vocabulaire
Les élèves ont à leur disposition le patron d'un cône de révolution qu'on trouvera dans le chapitre 10, une règle graduée, ciseaux et ruban adhésif. Ils devront construire la maquette

1/ Découper le patron. Nommer sur le cercle le centre O et tracer un diamètre [AB].
Tracer sur le secteur circulaire trois ou quatre rayons quelconques [SC], [SD], [SE], ...
Assembler le patron.
Nommer le solide obtenu : c'est un .....de sommet S.

2/ Mesurer [AB] : .....
On dira que ce cône a un diamètre de base de ..... cm.
Mesurer [SC], [SD], [SE], ...
SC = SD = SE =
On dira que ce cône a une génératrice de ..... cm.
Mesurer la hauteur [SO].
SO =
* Remarque : cette dernière mesure n'est pas facile à effectuer.
Ne peut-on la trouver à l'aide d'un calcul utilisant les deux premières mesures ?

FICHE 2

Passage de l'objet au dessin

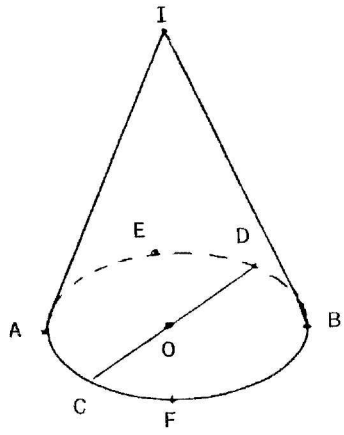
Le but de cette fiche est d'enseigner la représentation traditionnelle du cône de révolution dont nous avons parlé dans l'introduction.

Dans l'exercice 1, on donne un dessin, dans l'exercice 2 on demande un dessin.

Les élèves ont à leur disposition : le cône de la fiche 1, un pochoir trace-ellipse dont un modèle est présenté au chapitre 10. Pour le tracé par les élèves de l'ellipse de base, se reporter au chapitre"ellipse".

1/ Le dessin ci-contre représente un cône de révolution de diamètre de base 4 cm et de hauteur 6 cm. Les lettres sur le dessin représentent des points de ce cône. Le centre de la base est repéré par le point O.

Quelles sont les longueurs réelles des segments [CD], [IO], [OB], [IA], [IB], [IE], [IF] ?



CD = IO = OB =

IA = IB = IE =

2/ Faire un dessin représentant un cône de révolution de diamètre de base 6 cm et de génératrice 8 cm (analogue à celui de la Fiche 1).

FICHE 3

Sections du cône de révolution

** L'objectif de cette fiche est de faire prendre conscience aux élèves de la forme des sections du cône par des plans parallèles à la base ou perpendiculaires à la base et passant par le sommet (les autres sections ne sont pas à envisager).*

** Dans ce but, ils seront amenés à réaliser des dessins de ces sections et à effectuer des calculs leur permettant de réinvestir, entre autres, les propriétés de Thalès et de Pythagore.*

** On pourra attirer l'attention des élèves sur le rôle primordial joué par la section du cône par un plan perpendiculaire à la base et passant par le sommet chaque fois qu'il y aura des calculs à effectuer.*

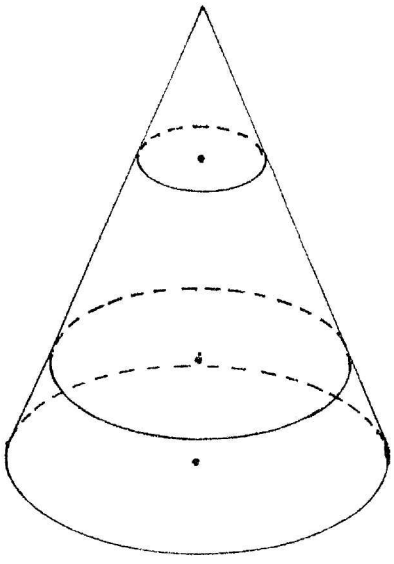
1/ Un gâteau a la forme d'un cône de révolution dont le diamètre de base mesure 6 cm et la hauteur 4 cm. Il repose sur sa base et on le partage en deux morceaux égaux par un coup de couteau suivant un plan de section verticale.

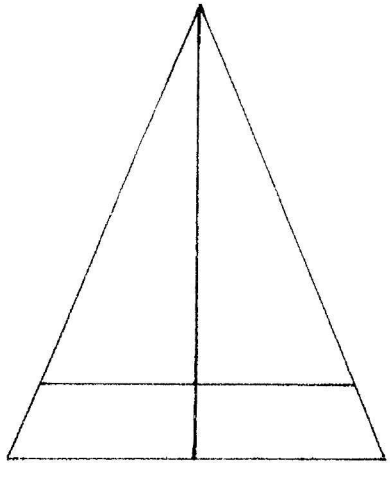
* Quelle est la forme de la section obtenue ?
* La dessiner en vraie grandeur.
* Peut-on, sur ce dessin, mesurer la génératrice du cône ?
* Peut-on la calculer ?

2/ Si on coupait un gâteau identique au précédent par un plan parallèle à la base, quelle serait la forme de la section obtenue ?

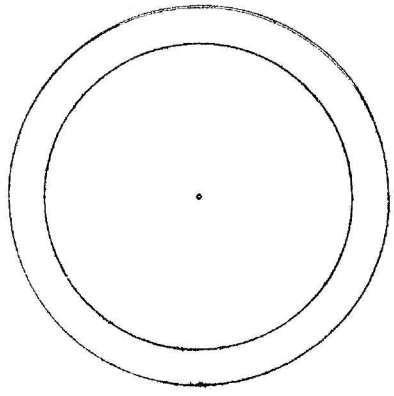
3/ Un cône a 6 cm de hauteur et une base de 5 cm de diamètre. On le coupe par deux plans parallèles à la base (voir schéma) à 1 cm et à 4 cm de cette base.

* Placer sur les deux vues ci-dessous la section manquante.





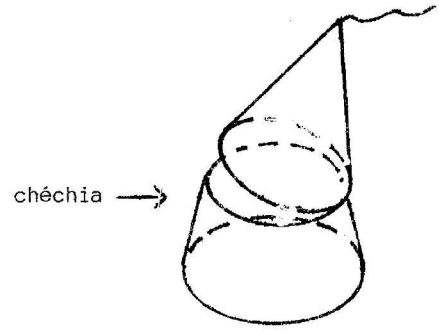
Vue de face



Vue de dessus

4/ Un cornet en bois a la forme d'un cône de 6 cm de diamètre de base. On le coupe d'un coup de scie parallèle à la base; la section obtenue est un cercle de 4 cm de diamètre, elle a été pratiquée à 8 cm de la base.
Quelle était la hauteur de ce cône ?

5/ X a coupé son chapeau conique de circonférence de base 62,8 cm, pour en faire une chéchia. L'aire du-dessus de la chéchia est 113,04cm^2 (prendre pour π la valeur 3,14).
A quelle fraction de la hauteur à partir du sommet a-t-il coupé son chapeau ?



6/ Imaginons un verre parfaitement conique de 9 cm de hauteur. Le bord du verre est un cercle de 9 cm de diamètre. Il est rempli d'un liquide jusqu'au tiers de sa hauteur.
Quelle est l'aire de la surface supérieure de ce liquide ?

FICHE 4

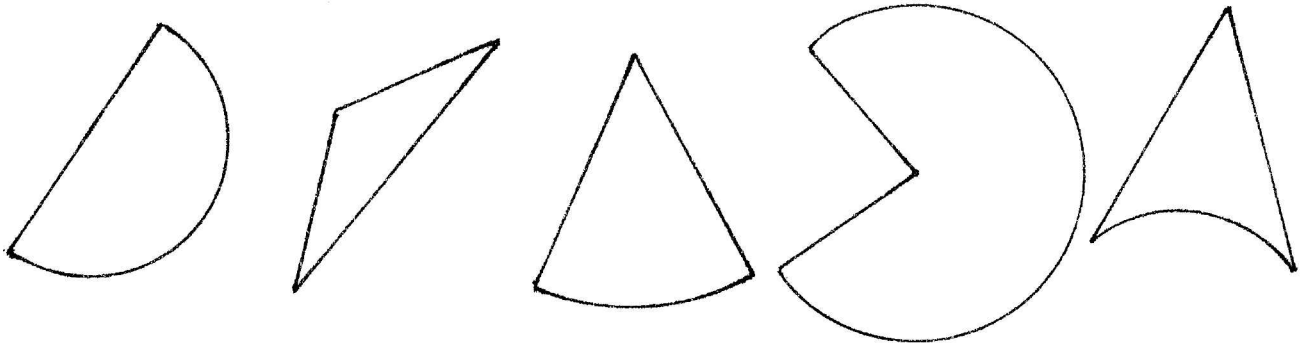
Patrons de cône de révolution et calculs associés

** Ces exercices donneront aux élèves l'occasion d'utiliser la proportionnalité entre angle au centre et longueur de l'arc associé.*

** Matériel de dessin, ciseaux, adhésif, patrons à découper du chapitre 10 pour l'exercice 1.*

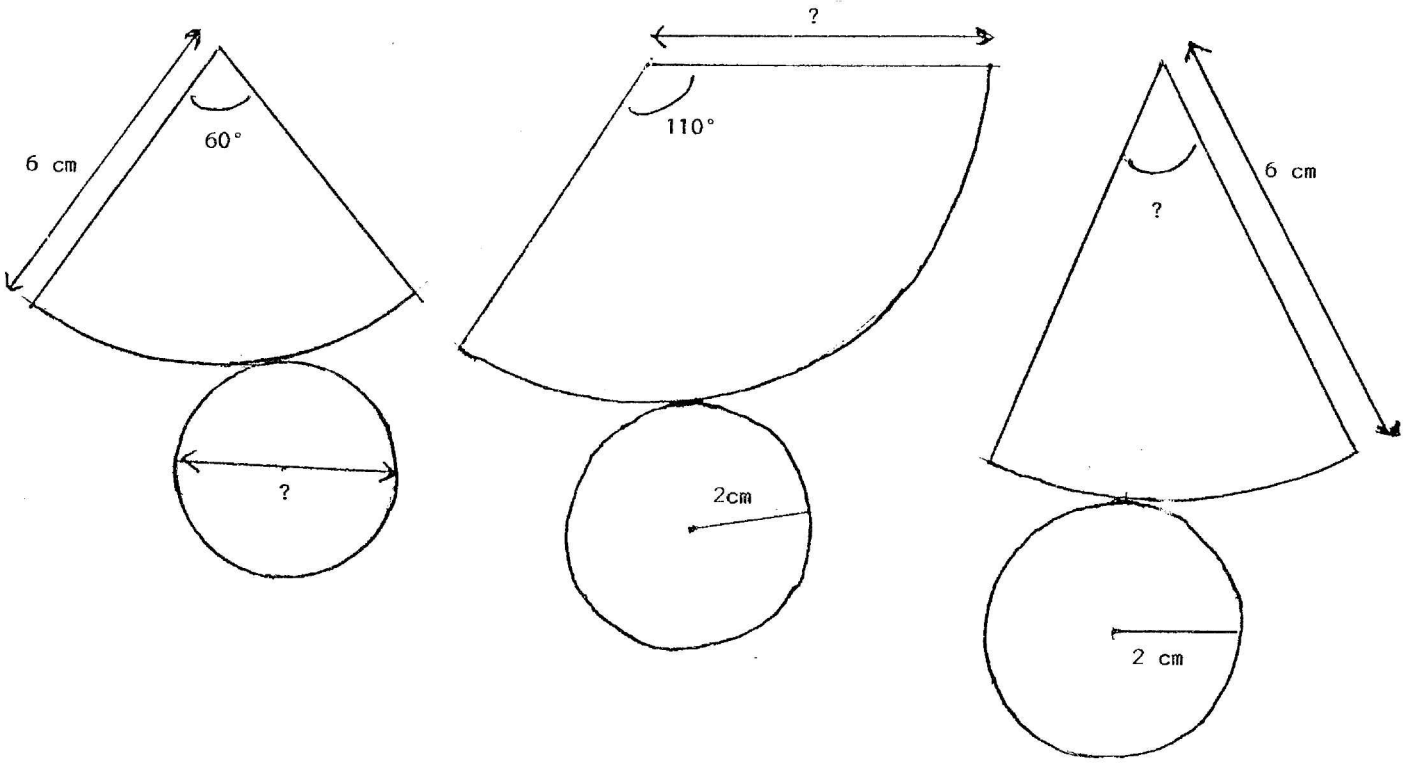
1/ Parmi les dessins ci-dessous, quels sont ceux qui représentent la surface latérale d'un cône de révolution?

Encadre la réponse que tu crois exacte puis vérifie en découpant ces figures sur la feuille Annexe.

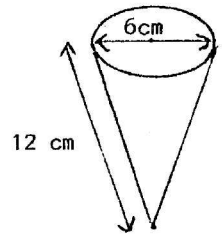


oui	oui	oui	oui	oui
non	non	non	non	non

2/ Voici des patrons de cône de révolution dessinés à main levée. Les dessiner exactement après avoir calculé le nombre qui manque.



3/ Dessiner le patron d'un cornet de glace en forme de cône de révolution de génératrice 12 cm et diamètre 6 cm.

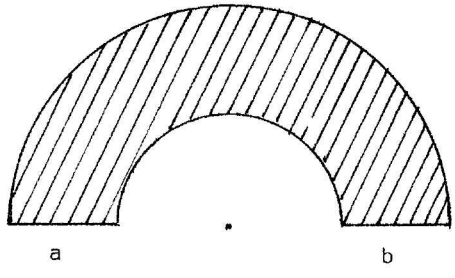


4/ Un chapeau de clown en forme de cône de révolution a une base circulaire de 6 cm de rayon. En découpant ce chapeau selon une génératrice, on obtient exactement un demi-disque.
Quel est le rayon de ce demi-disque ?

5/ On fabrique un chapeau de clown (de forme conique), à partir d'un demi-disque de 10 cm de rayon.
Quels seront le rayon de base et la hauteur de ce chapeau ?

6/ Un chapeau de clown de forme conique a 12 cm de hauteur et une base circulaire de 9 cm de rayon. En découpant ce chapeau selon une génératrice, on obtient un secteur circulaire.
Quel est le rayon de ce secteur et sa mesure en degrés ?

7/ Tracer deux demi-cercles concentriques de rayons 2 cm et 4 cm et, après découpe de la partie hachurée, coller les parties rectilignes a et b.
Quelle est la nature du solide obtenu ?



FICHE 5

Le cône de révolution - Volume - Aire latérale

1/ En développant la surface latérale d'un cône de révolution, on obtient un secteur circulaire de 35 cm de rayon et dont l'angle au centre est de 80°.

Quel est le volume de ce cône ?

Quelle est son aire latérale ?

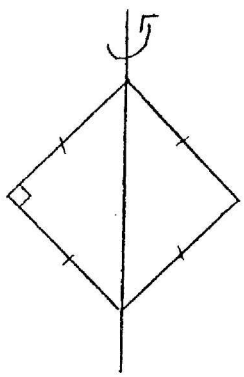
2/ Dans un grenier, on fait un tas de blé en forme de cône. La circonférence de base a 9,25 m de longueur et la hauteur du tas est de 1,05 m.

Combien ce tas de blé contient-il de mètres cubes ?

3/ Un verre conique contient un quart de litre.

Quelle est sa profondeur sachant qu'il a un diamètre de 7 cm ?

4/ Quel est le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un carré de 5 cm d'arête, tournant autour d'une de ses diagonales ?



5/ Un moulin à vent est formé par un cylindre de révolution surmonté d'un cône de révolution. Le cylindre a 12 m de hauteur et le diamètre du cercle de base est de 11 m (pour le cylindre et pour le cône). La hauteur totale du moulin est de 20 m.

Quel est le volume de ce moulin à vent ?

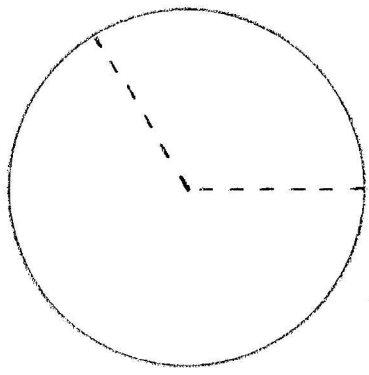
Quelle est l'aire totale des murs et du toit ?

FICHE 6

Le cône de révolution : Pour aller plus loin.

1/ Un disque de carton de 15 cm de rayon est découpé en deux morceaux à peu près comme le montre le dessin ci-contre.
On fabrique deux chapeaux de clown, de forme conique, à partir des deux morceaux du disque. Un des chapeaux a une hauteur de 12 cm.

Quelle est la hauteur de l'autre chapeau ?



2/ Dans un verre en forme de cône de révolution, à base horizontale et axe vertical, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger en formant trois couches d'égale épaisseur.

1. Le verre contient-il alors un volume plus important d'eau, d'huile ou de mercure ?
2. Le verre contient-il alors une masse plus importante d'eau, d'huile ou de mercure ?

3/ Un abat-jour de forme tronconique a pour diamètres de bases 17 cm et 14 cm et une génératrice de 13 cm.

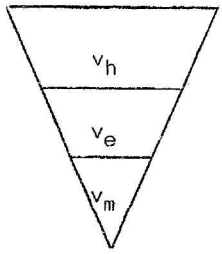
Dessiner son patron à l'échelle $\frac{1}{5}$.

4/ Un verre opaque a la forme d'un tronc de cône. La base inférieure est un cercle de 5 cm de diamètre et la base supérieure un cercle de 15 cm de diamètre. La hauteur est de 14 cm. Un prisme droit dont la hauteur est de 7 cm a pour base un triangle équilatéral de 8,7 cm de côté.

Peut-on cacher complètement le prisme posé verticalement sur la table en retournant le verre sur le prisme ?

Remarques sur la fiche 6

Exercice 2



1) Soient v_m, v_e, v_h les volumes respectifs de mercure d'eau et d'huile. Le cône formé par les volumes de mercure et d'eau est un agrandissement de coefficient 2 du cône d'eau. Le cône formé par les trois liquides en est un agrandissement de coefficient 3 d'où :

$v_m + v_e = 8v_m$ et

$v_m + v_e + v_h = 27\ v_m$

On en tire : $v_h = 19\ v_m$ et $v_e = 7\ v_m$

$v_h > v_e > v_m$

2) En désignant par m, e et h les masses respectives de mercure, d'eau et d'huile exprimées en kg on a :

$m = 13.59\ v_m$

$e = v_e = 7\ v_m$ (les volumes sont en dm^3)

$h = 0.915\ v_h = 0.915.19\ v_m = 17{,}385\ v_m$

$h > m > e$

Exercice 4

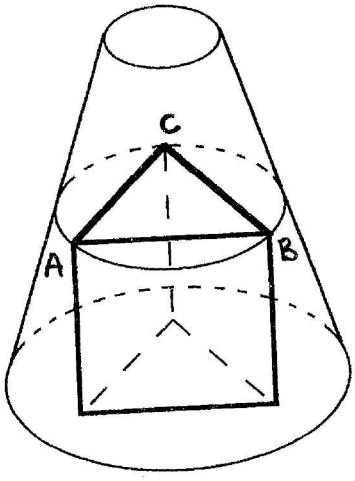


FIGURE 1

Le problème consiste à déterminer la distance h qui sépare la face supérieure du prisme de la base du tronc de cône. Il faudra alors comparer cette distance à la hauteur du prisme.

Le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC (figure 1) a un rayon égal à $\frac{8{,}7\sqrt{3}}{3}$, soit $2{,}9\sqrt{3}$.

Dans la figure 2 qui est une vue de profil, il faut donc trouver h. Le calcul, par Thalès, donne $h = 21 - 8{,}12\sqrt{3} \cong 6{,}93$.

<u>Le prisme n'est donc pas coiffé par le tronc de cône.</u>

La difficulté de cet exercice réside dans le fait qu'il n'existe pas de section qui contienne à la fois l'axe du tronc de cône et une face du prisme.

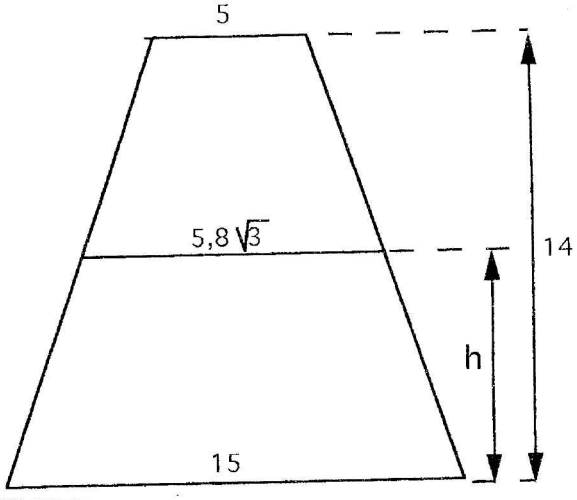


FIGURE 2

- Chapitre 8 -

LA SPHERE

Toute étude de la sphère doit partir de la manipulation d'objets sphériques (balle de tennis par exemple) de la fabrication d'une maquette et de l'observation d'un globe terrestre. Il est souhaitable que les élèves aient toujours à leur disposition de tels objets, les différents types d'exercices présentés par la suite (section, repérage) commençant toujours par une observation ou une manipulation.

MANIPULATION

L'objectif des exercices de manipulation est de mettre en évidence les éléments associés à une sphère :

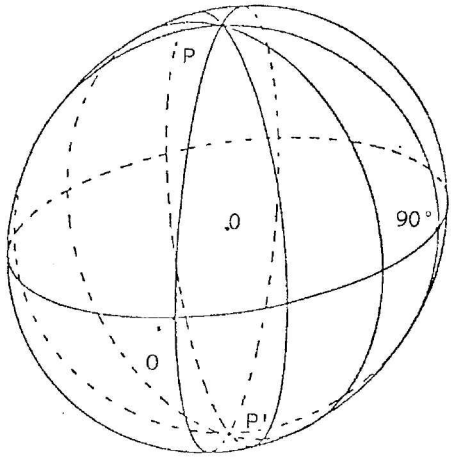
* diamètre, rayon
* section, grand cercle

La maquette de la sphère (voir fiche 2) permet de matérialiser les sections de la sphère par des plans, elle est aussi intéressante pour le repérage géographique car elle concrétise les plans méridiens, équateur et parallèles. On peut mentionner l'impossibilité de réaliser le patron d'une sphère et montrer différentes solutions adoptées par les géographes.

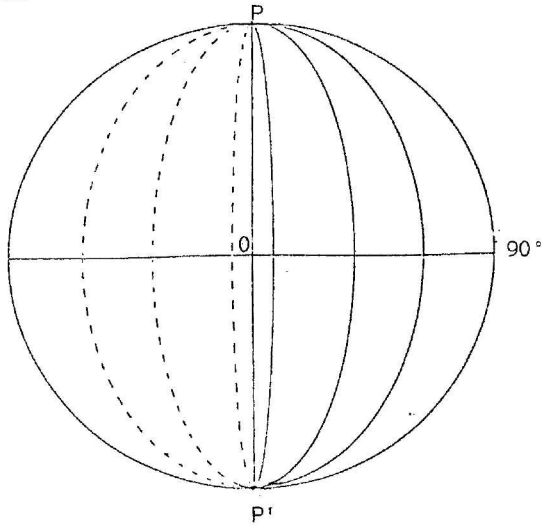
REPRESENTATION

L'utilisation avec les élèves de la représentation en perspective cavalière d'une sphère n'est pas envisageable car elle donne des dessins où le contour apparent est une ellipse et les pôles à l'intérieur de ce contour apparent ce qui est contraire à la vision comme le montre le dessin ci-dessous. Outre les difficultés de dessin qu'elles présentent, la connaissance de telles représentations par les élèves n'est pas opérationnelle.

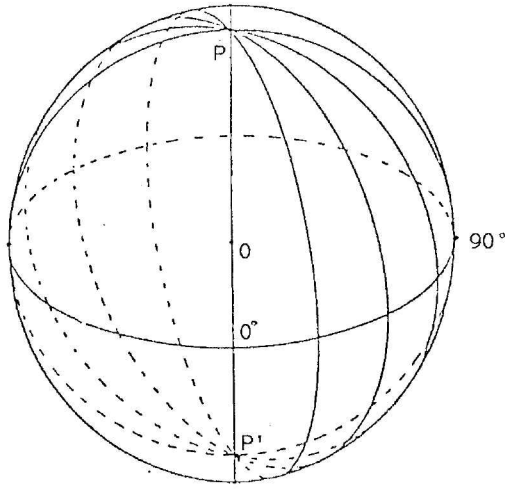
PC (60°,1/2)



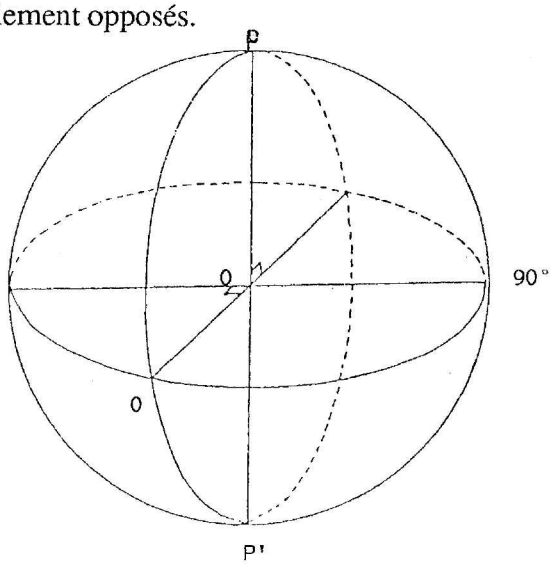
Pour avoir un contour apparent circulaire et des pôles diamétralement opposés, il est nécessaire de réaliser une projection orthogonale, mais l'équateur est alors représenté par un segment, comme on peut le voir ci-dessous.

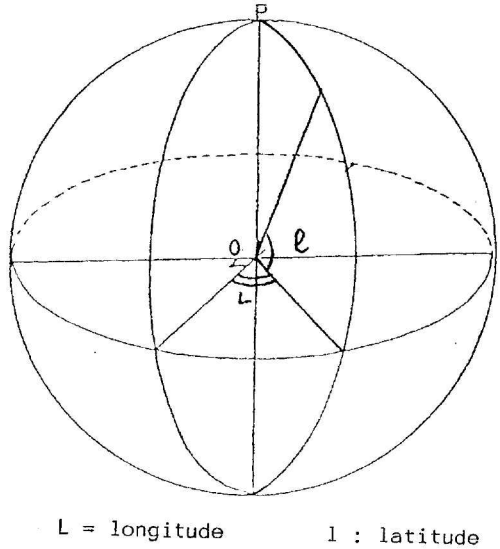


Pour avoir un équateur représenté par une ellipse dont un axe est horizontal et l'autre vertical, on doit utiliser une perspective cavalière à 90°, mais les pôles se trouvent alors à l'intérieur du contour apparent comme ci-dessous.



Ces difficultés de représentations ne sont pas à montrer aux élèves et on peut se contenter d'utiliser les représentations traditionnelles suivantes qui sont incohérentes au niveau de la perspective mais qui réunissent les propriétés de l'équateur elliptique, du contour apparent circulaire et des pôles diamétralement opposés.

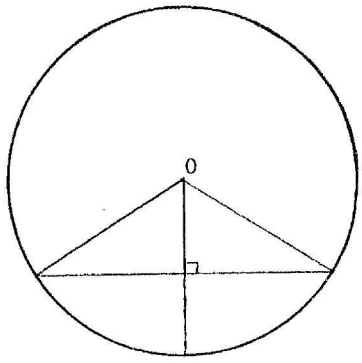




L = longitude l : latitude

SECTION

Les problèmes de section (fiche 4) posent beaucoup de difficultés aux élèves lorsque un schéma ou un dessin de la situation ne leur est pas donné. La section, qui est un cercle, doit être représentée par un segment, pour que le dessin soit opérationnel. Les problèmes de section reposent donc tous sur la configuration suivante dans laquelle on a une représentation exacte de la sphère en projection orthogonale.



Il faut donc habituer progressivement les élèves à passer d'une situation de section c'est-à-dire une situation de l'espace à une situation plane et réciproquement en choisissant correctement le plan de projection.

FICHE 1

Découverte des invariants d'une sphère, vocabulaire, définition.
Les élèves, par groupe de deux, ont à leur disposition une balle, du papier, des ciseaux, une ficelle, du carton.
Dans l'exercice 1, la sphère est vue comme une surface de révolution.
Dans l'exercice 2, les élèves doivent faire preuve d'imagination pour mesurer le diamètre de la balle (fabrication d'une sorte de pied à coulisse, mesure du "tour" de la balle mais souvent le passage au diamètre n'est pas du tout immédiat).
L'exercice 3 permet d'effectuer la distinction entre boule et sphère.

1/ Découper dans du carton un disque, coller un fil assez solide suivant un des diamètres en laissant dépasser un morceau aux deux extrémités. Faire tourner le disque autour du fil.

Quelle forme peut-on reconnaître ?

2/ Vous voulez ranger votre balle dans une boîte, la plus petite possible de la forme d'un pavé droit. Quelles doivent être les dimensions de cette boîte ? Faire un patron en vraie grandeur puis reconstituer la boite pour vérifier si elle contient bien la balle.

Quel est le plus long clou qui peut être enfoncé dans cette balle sans que la pointe dépasse ? Comment le placer ?

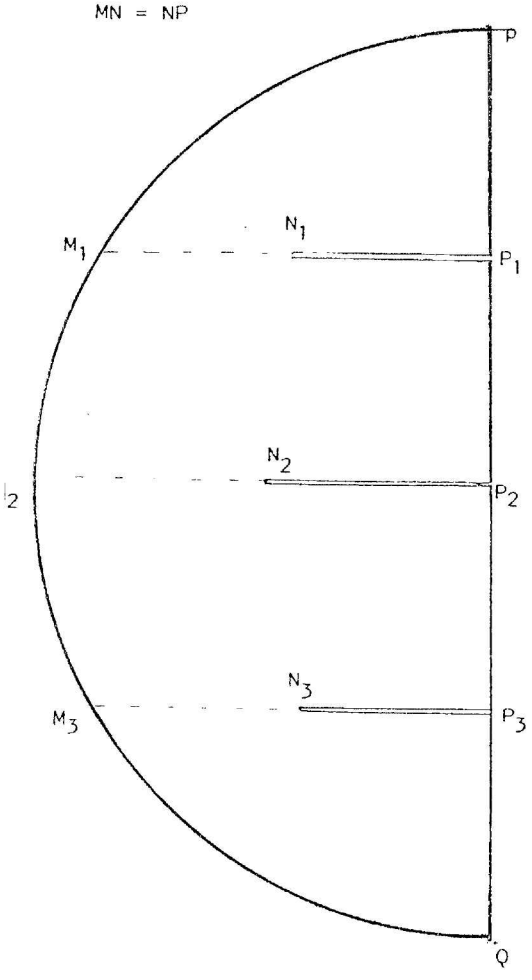
3/ Un oiseau est perché au sommet d'un mât de 5 m. Supposons qu'il vole à la vitesse de 3 m par seconde. Où se trouveront les moustiques qu'il peut atteindre en 1 s.

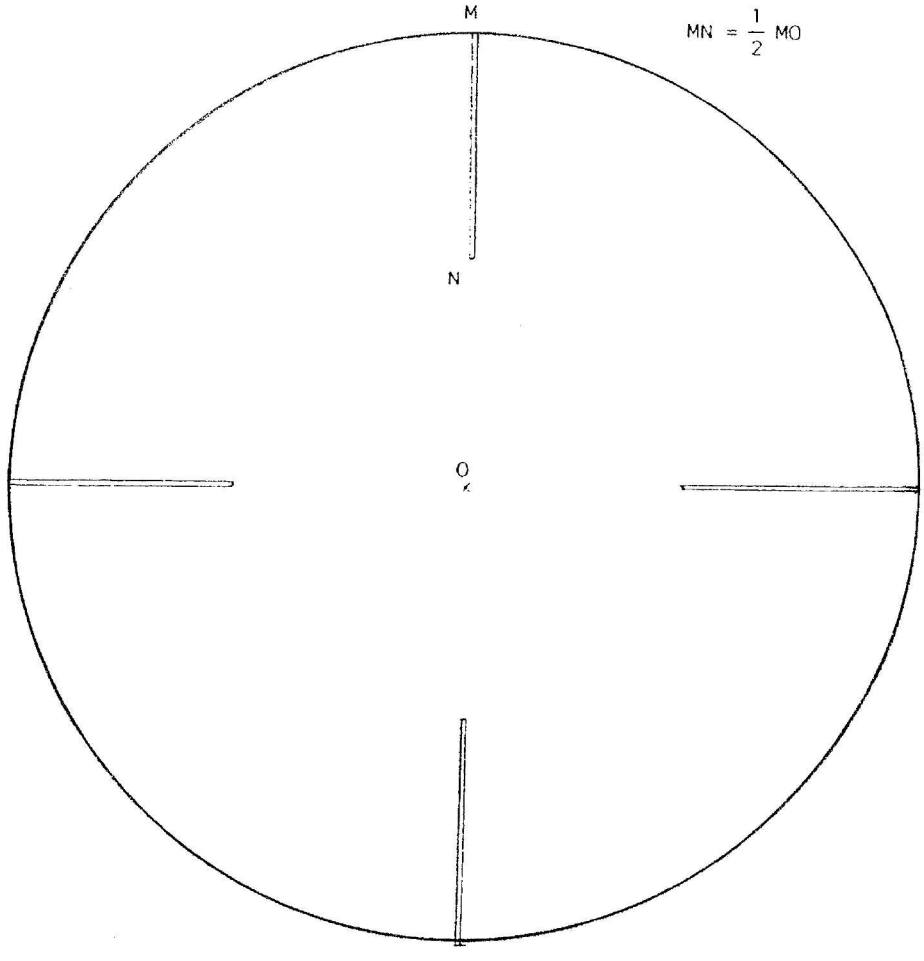
FICHE 2

Maquette de la sphère

Découper dans du carton fort quatre demi-cercles identiques de 6 cm de rayon munis de trois fentes selon le modèle ci-dessous. La largeur des fentes est à prévoir selon l'épaisseur du carton.

Découper un disque de 6 cm de rayon et deux disques de 5,2 cm de rayon. Faire sur ces disques quatre fentes selon le modèle ci-dessous (la longueur des fentes est la moitié du rayon).





Remarque : La construction de cette maquette peut être précédée d'un travail sur le théorème de Pythagore pour calculer les longueurs NP sachant que P_1, P_2 et P_3 divisent PQ en quatre segments égaux.

FICHE 3

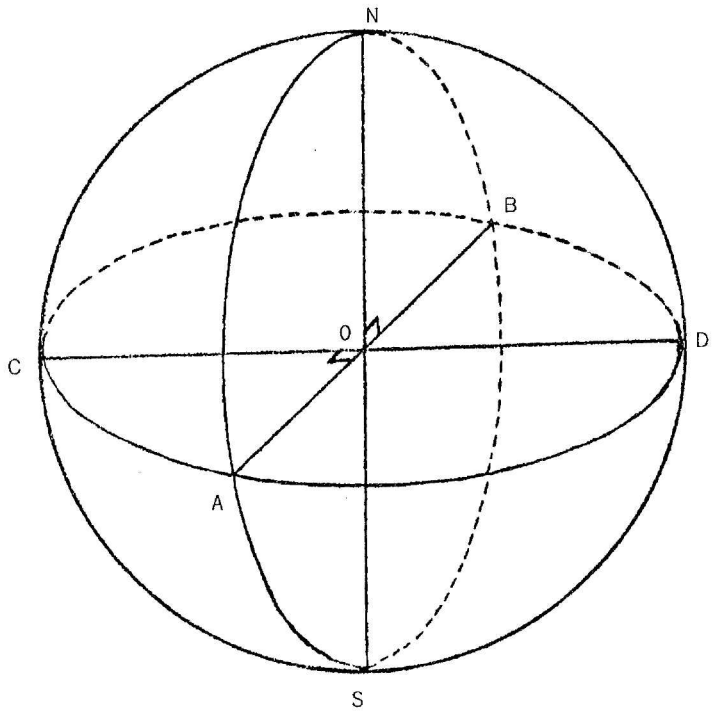
Lecture de dessin.
La représentation d'une sphère en perspective cavalière ne doit pas faire l'objet d'un apprentissage chez les débutants, mais un élève doit savoir lire un dessin de sphère et l'interpréter.
Cette lecture de dessin est indispensable avant d'aborder les exercices de section.
Chaque élève dispose de la maquette et peut s'aider en replaçant les points du dessin sur sa maquette.

Ce dessin représente une sphère de 10 cm de diamètre, de centre O

* Quelle est la longueur réelle du segment [AB] ?

* Représenter en vraie grandeur et donner la nature des triangles SOB, ANB, CBD et COA.

On place un point M au milieu du petit arc de cercle CN. Dessiner en vraie grandeur le triangle COM, le triangle AOM.

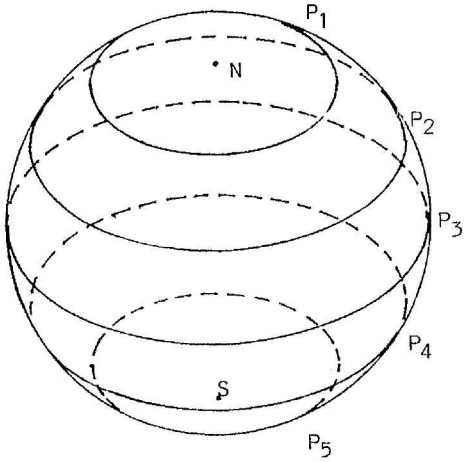


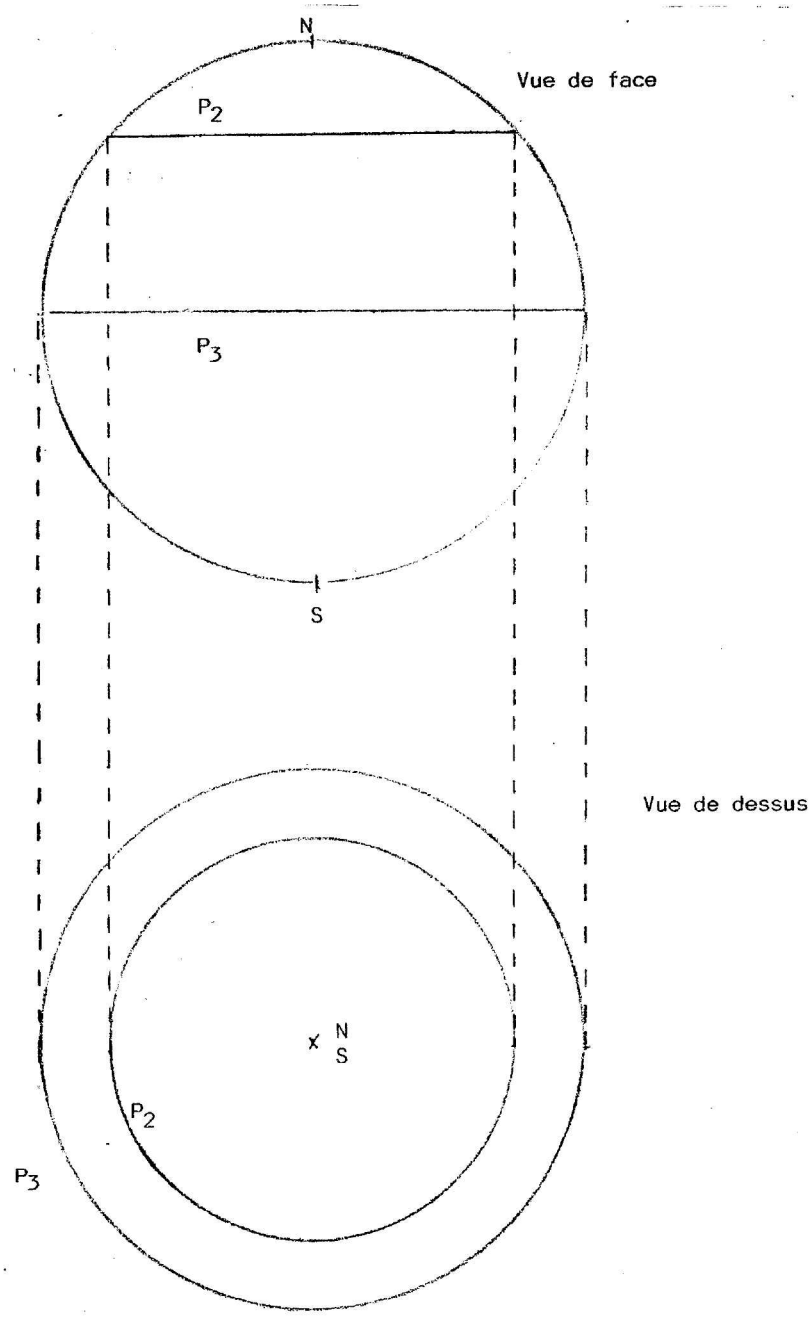
FICHE 4

Section de la sphère.
Les élèves doivent progressivement découvrir la forme d'une section par un plan, en faire plusieurs représentations pour arriver à un dessin opérationnel dans des problèmes concrets. L'application du théorème de Pythagore ne pose plus alors de difficultés.
Les élèves disposent d'une balle et de la maquette qui est indispensable pour matérialiser les sections et les faire observer sous différents points de vue.

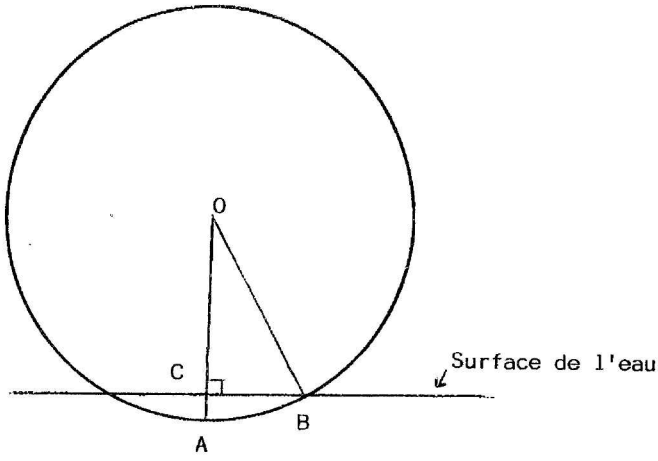
1/ Si on coupe cette balle par un plan vertical, quelle est la forme de la section ? Et si le plan est horizontal ? Oblique ? Comment placer ce plan pour obtenir la plus grande section ?

2/ On découpe une sphère posée sur une table suivant cinq plans parallèles P_1, P_2, ..., P_5, équidistants et parallèles à la table. Compléter les vues de face et de dessus.





3/ Une balle de 20 cm de diamètre flotte sur l'eau. Elle s'enfonce de 2 cm. Sur le schéma ci-contre que représentent [OA], [OB], [AC] ? Quelle est la longueur réelle de ces segments ? Que représente [CB], calculer sa longueur. Dessiner en vraie grandeur le cercle délimité à la surface de l'eau par la balle.



4/ Une boule de glace sphérique a 2 cm de rayon. On partage cette boule en deux par un seul coup de couteau passant à 1 cm du centre.

Dessiner la section en vraie grandeur.

5/ Un avion volant à une altitude de 3000 m au-dessus du sol plan franchit le mur du son. Le "bang" sonore qui se produit se propage dans toutes les directions à la vitesse de 340 m/s.

a. Pendant combien de temps le bruit restera-t-il inaudible au sol ?

b. Dans les 10 secondes qui ont suivi l'émission du "bang", le bruit a été perçu sur une certaine partie du sol. Préciser la forme géométrique de cette partie et calculer son aire.

6/ Une orange bien sphérique a un diamètre de 6 cm. On partage cette orange en deux par un seul coup de couteau, la section obtenue est un disque de 1,5 cm de rayon.

A quelle distance du centre l'orange a-t-elle été coupée ?

FICHE 5

Périmètre, aire, volume.
Ces exercices ne présentent aucune difficulté géométrique mais permettent un travail algébrique sur des formules.

1/ Une sphère est rangée dans un cube dont elle touche les faces.

a. Calculer les aires et volumes du cube et de la sphère lorsque la sphère a un rayon de 5 cm.

b. Quel est le rapport entre l'aire de la sphère et l'aire du cube ?
Quel est le rapport entre le volume de la sphère et le volume du cube ?

2. Introduction historique : en l'An 212 avant J.C., un légionnaire romain tue un citoyen de Syracuse, âgé de 75 ans. Ce citoyen est Archimède.
Sur la tombe d'Archimède, quelques amis représenteront une sphère placée à l'intérieur d'un cylindre, la hauteur et le diamètre du cylindre ayant la même mesure que le diamètre de la sphère.
Ce dessin évoque une expérience simple donnant un résultat remarquable. Si le cylindre est rempli d'eau, le volume de liquide déplacé par la sphère est exactement le double du volume de l'eau qui reste. Les résultats de cette expérience, Archimède les a justifiés par le calcul.
Nous vous proposons, dans le problème suivant, de retrouver, notamment, ces résultats .
Une sphère loge exactement dans un cyclindre.

a. Montrer que l'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre.

b. Montrer que le volume de la sphère est les 2/3 du volume du cylindre (on retrouve les résultats de l'expérience précédente).

c. Montrer que l'eau qui reste entre le cylindre et la sphère remplirait exactement un cône de même rayon R que la sphère et de hauteur 2R.

d. Montrer que l'aire d'une sphère est égale à l'aire d'un disque de rayon double.

3/ On entoure d'une ficelle la terre et une balle de ping-pong. On veut surélever chaque ficelle de 50 cm tout autour de la terre et de la balle de ping-pong (c'est-à-dire, la ficelle sera à 50 cm d'altitude et éloignée de 50 cm autour de la balle).

Quelle est la sphère (terre ou balle) pour laquelle il faudra le plus de ficelle supplémentaire ?

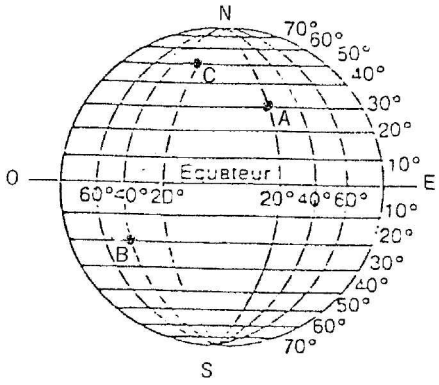
4/ La chair de la cerise entoure le noyau d'une couche ayant la même épaisseur que le diamètre du noyau. On considère que la cerise et le noyau sont des sphères.

Calculer le rapport entre le volume de la partie charnue de la cerise et le volume du noyau.

FICHE 6

Repérage, distance, sphère terrestre.
Les élèves ont toujours à leur disposition une balle, une maquette de sphère et un globe terrestre.
L'exercice 1 aborde la notion de plus courte distance sur une sphère, introduit le plus grand cercle et l'angle au centre (l'angle au centre peut être mis en évidence sur la maquette).
Les exercices 2, 3 et 4 utilisent un repérage sur la sphère terrestre, le globe terrestre est indispensable.
Dans l'exercice 5, curieuse géométrie sur une sphère ! (le pingouin se trouve à 10 km au sud du parallèle de longueur 10 km).

1/ Placer deux points A et B sur votre balle, assez éloignés l'un de l'autre. Une foumi se déplace de A vers B. Indiquer plusieurs chemins possibles. Y a-t-il un chemin plus court que les autres ? Lequel? De quelles informations sur la balle, sur la position des points A et B avez-vous besoin pour calculer ce plus court chemin ?



2/ Sur la représentation de la terre ci-contre
a. Colorier le méridien de Greenwich.
b. Quelles sont les coordonnées géographiques des points A, B et C ?
c. Placer les points D (40°S, 40°E), E (40°N, 40°O).

3/ Paul va de Gjansk (55°N, 18°E) au Cap (35°S, 18°E) en suivant le méridien.
Caroline va d'Enchorage (60°N, 150°O) au Caire (30°N, 30°E) en passant par le pole Nord.
Florence va de Belem (0°, 50°O) à Nairobi (0°, 40°E) en suivant l'équateur.
Qui parcourt le plus de kilomètres ?

4/ Quelles sont les coordonnées géographiques de la ville située aux antipodes de Paris (Paris 49°N, 2°E).

5/ Que signifient les expressions "aller vers le Nord", "aller vers l'Est" ?
Un avion parcourt 500 km vers le Nord puis 500 km vers l'Ouest, 500 km vers le Sud et enfin 500 km vers l'Est. Est-il revenu à son point de départ ?
Un pingouin part de son domicile. Il parcourt 10 km vers le Nord, 10 km vers l'Est puis 10 km vers le Sud et oh surprise ! il se retrouve chez lui. Où habite-t-il donc ? (N'oubliez pas qu'il n'y a pas de pingouin au pole Sud seulement des manchots).

- Chapitre 9 -

PROBLEMES D'OMBRES

Les problèmes d'ombre peuvent fournir à divers niveaux (mais peut-être pas chez les débutants?) un terrain d'exercice intéressant pour la mise en oeuvre des diverses connaissances acquises en géométrie de l'espace.

Ces problèmes font intervenir deux types de situations déterminées par la nature de la source lumineuse :

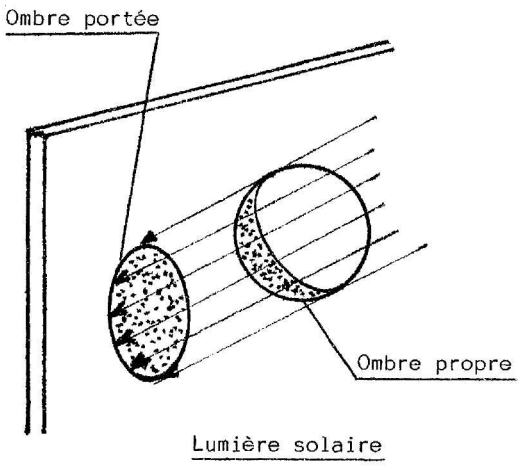
* la lumière solaire
* la lumière artificielle ("au flambeau")

Dans le premier cas, la source lumineuse est tellement éloignée que par rapport à la taille des objets terrestres on peut la considérer à l'infini et, de ce fait, les rayons lumineux sont parallèles. Le modèle mathématique correspondant est la projection cylindrique sur un plan suivant une direction donnée. Cette projection donne naissance à la perspective cavalière.

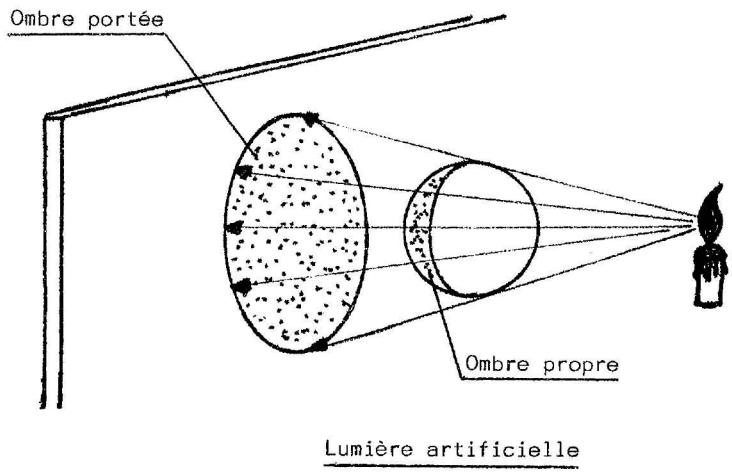
Dans le deuxième cas, les rayons lumineux émanant d'une source rapprochée, leurs supports concourent en un point (la source). Le modèle mathématique correspondant est la projection conique sur un plan à partir d'un point extérieur à ce plan. Cette projection donne naissance à la perspective centrale.

Pour être complet, il faut ajouter que dans tous les cas on distingue deux sortes d'ombres :

* l'ombre propre de l'objet, située sur l'objet est la partie non éclairée de celui-ci
* l'ombre portée par un objet sur une surface quelconque



Lumière solaire



Lumière artificielle

LA NATURE DES PROBLEMES

De ce qui précède, on peut distinguer plusieurs types de problèmes selon que la lumière sera solaire ou artificielle, que l'on cherchera l'ombre propre ou portée. Toutefois, si l'on suppose connue

la position de la source lumineuse, sa nature, et si l'on veut bien s'en tenir à la recherche de l'ombre portée sur des plans particuliers, le modèle de traitement est fourni, pour l'ombre d'un point donné, par la recherche de l'intersection d'une droite et d'un plan. Cette droite pouvant être définie par deux points ou par un point et sa direction. La méthode consiste à choisir un plan auxiliaire convenable contenant cette droite et à chercher son intersection avec un plan donné.

Les fiches qui suivent constituent une approche de ce que peut être un tel travail. On a volontairement traité des deux aspects qui interviennent : la mise en évidence des parties ombrées ou celle des parties éclairées.

La fiche 1 est une approche méthodologique du traitement des ombres solaires, la fiche 2 sur le même thème propose la recherche des parties éclairées.

Les fiches 3 et 4 reprennent le même travail lorsque la lumière est artificielle.

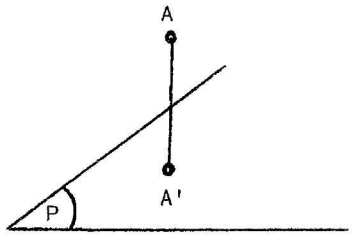
LES DIFFICULTES

Une des premières difficultés auxquelles on peut se heurter réside dans la nature rectiligne des rayons lumineux qui n'est pas une évidence pour tous les élèves. Une autre réside dans la nature du dessin. En effet, il faut faire cohabiter sur un même dessin plan, des représentations planes d'objets de l'espace (une boule, un tableau) ainsi que des représentations de ces objets sur d'autres objets (l'ombre de la boule est une représentation de la boule sur le tableau). Il y a donc deux niveaux de lecture au sein d'un même dessin : le niveau des objets, le niveau des ombres.

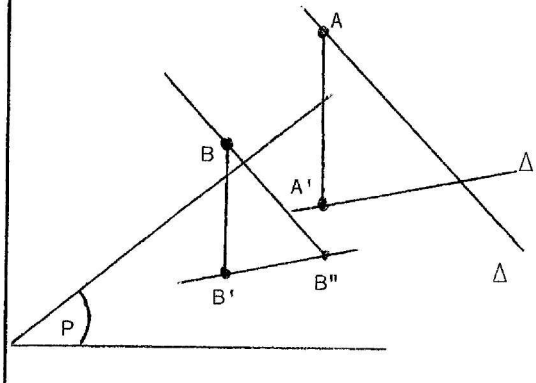
Il est donc souhaitable, dans tous les cas, d'accompagner tout travail de ce type, d'expériences réelles facilement réalisables : une lampe, le soleil, un objet, permettent de visualiser les situations.

FICHE 1

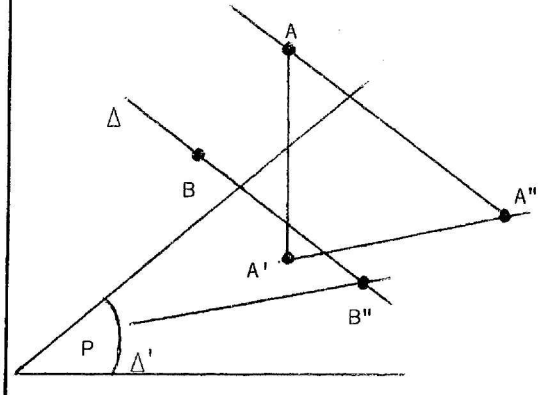
Dans cette fiche, la lumière est solaire, les rayons lumineux sont parallèles. Les objets sont représentés en perspective cavalière.



L'exercice 1 est une approche de la méthode générale de traitement. L'ombre du bâton AA' vertical et reposant sur le plan P, est connue dès que l'on connaît l'ombre de A. Il faut donc se donner la direction d'un rayon lumineux. Cela ne peut se faire que de deux façons : soit en donnant un rayon passant par deux points fixes (un sur un bâton vertical, un sur le plan P), soit en donnant un rayon et sa projection orthogonale sur le plan P.



<u>1er cas</u> : On connait un bâton vertical BB' et B" ombre de B, B' est dans le plan P.
Tout rayon aura comme direction (BB").
Le bâton AA' étant vertical et A' étant dans P, l'ombre de A est donc sur la parallèle Δ à (BB") passant par A ainsi que dans le plan Q défini par (AA') et la droite Δ. Le plan Q contenant (AA') parallèle à (BB') et Δ parallèle à (BB"), il est donc parallèle au plan Q' qui contient B, B' et B". Les plans Q et Q' coupent P suivant deux droites parallèles. Une est (B' B"), l'autre Δ' passe par A'. L'intersection de Δ et Δ' est l'ombre A" de A.

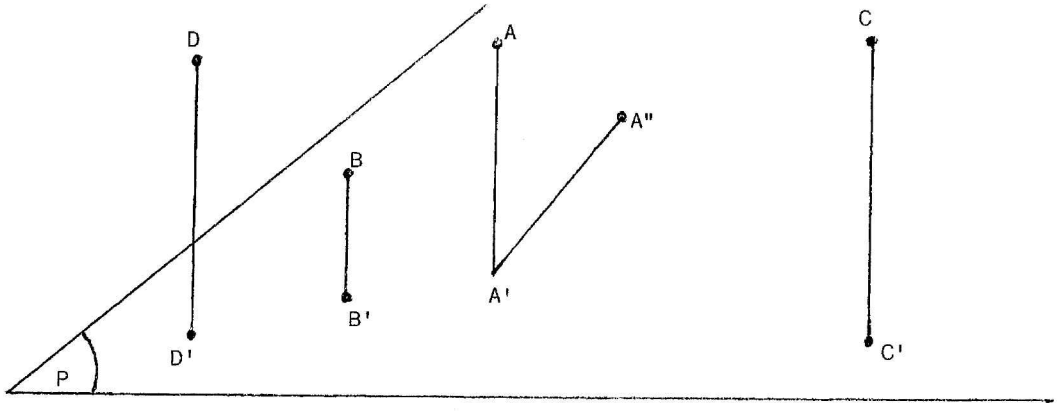


<u>2ème cas</u> : on connait un rayon Δ ainsi que sa projection orthogonale Δ' sur P. Tout rayon aura la direction de Δ. Si B est un point de Δ, on connait l'autre B" de B qui est l'intersecton de Δ et Δ'. En se ramenant au cas précédent on déterminera A".

Plus généralement, l'ombre A" d'un point A étant donnée, la projection orthogonale A' sur le plan d'ombre P de ce point A va nous donner la direction de l'ombre (A'A") du bâton AA'. Sachant que des plans parallèles coupent un même plan suivant des droites parallèles, nous connaîtrons alors la direction des ombres de tous les bâtons. Les exercices 1, 2, 3, 4 et 5 suivants sont des applications directes de ce résultat.

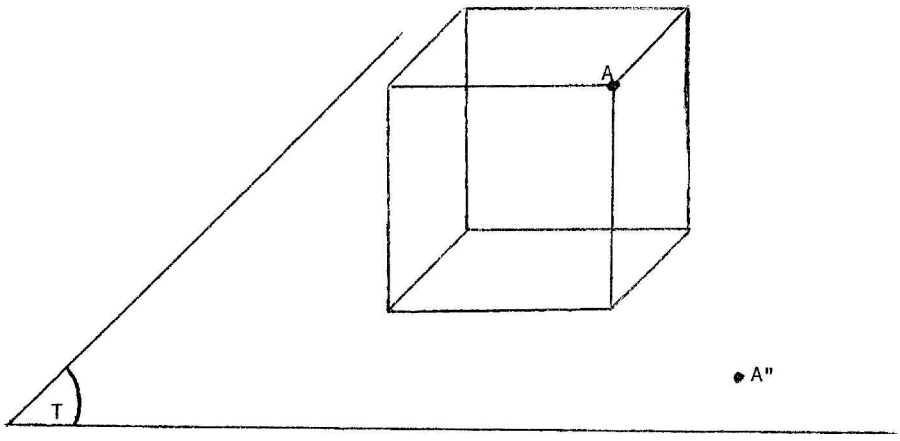
Exercice 1 :

On connait l'ombre A'A" dans le plan P du bâton AA'. Dessiner les ombres des autres bâtons sachant que la lumière est solaire, que AA', BB', CC', DD' sont verticaux et que A', B', C', D' sont dans P.



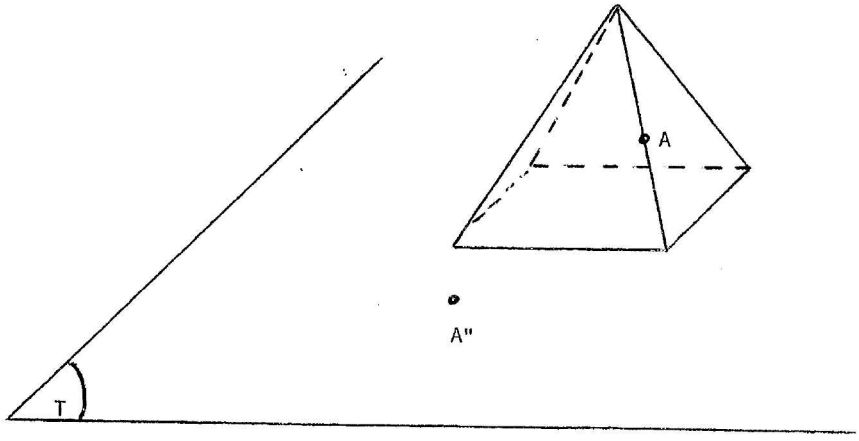
Exercice 2 :

Un cube en fil de fer est posé sur une table T. On connait l'ombre solaire A" d'un coin A de cube. Compléter l'ombre du cube.



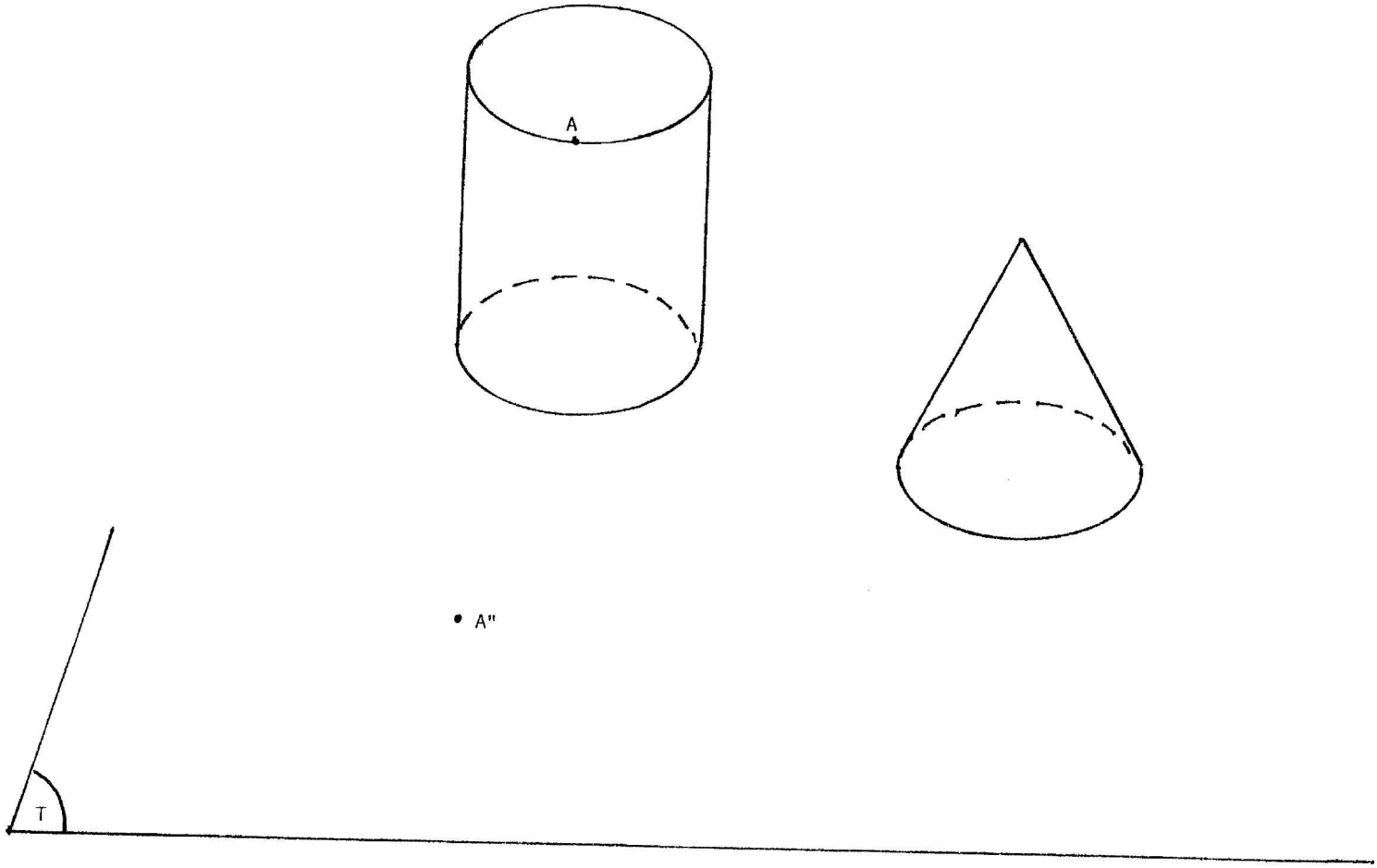
Exercice 3 :

Une pyramide régulière en bois à base carrée est posée sur une table T. On connait l'ombre solaire A" d'un point A d'une arête. Tracer l'ombre du sommet, compléter l'ombre de la pyramide.



Exercice 4 :

Un cylindre et un cône en bois sont posés sur une table T. On connait l'ombre solaire A" d'un point A du cylindre. Tracer l'ombre du sommet du cône, du disque supérieur du cylindre. Compléter les ombres.

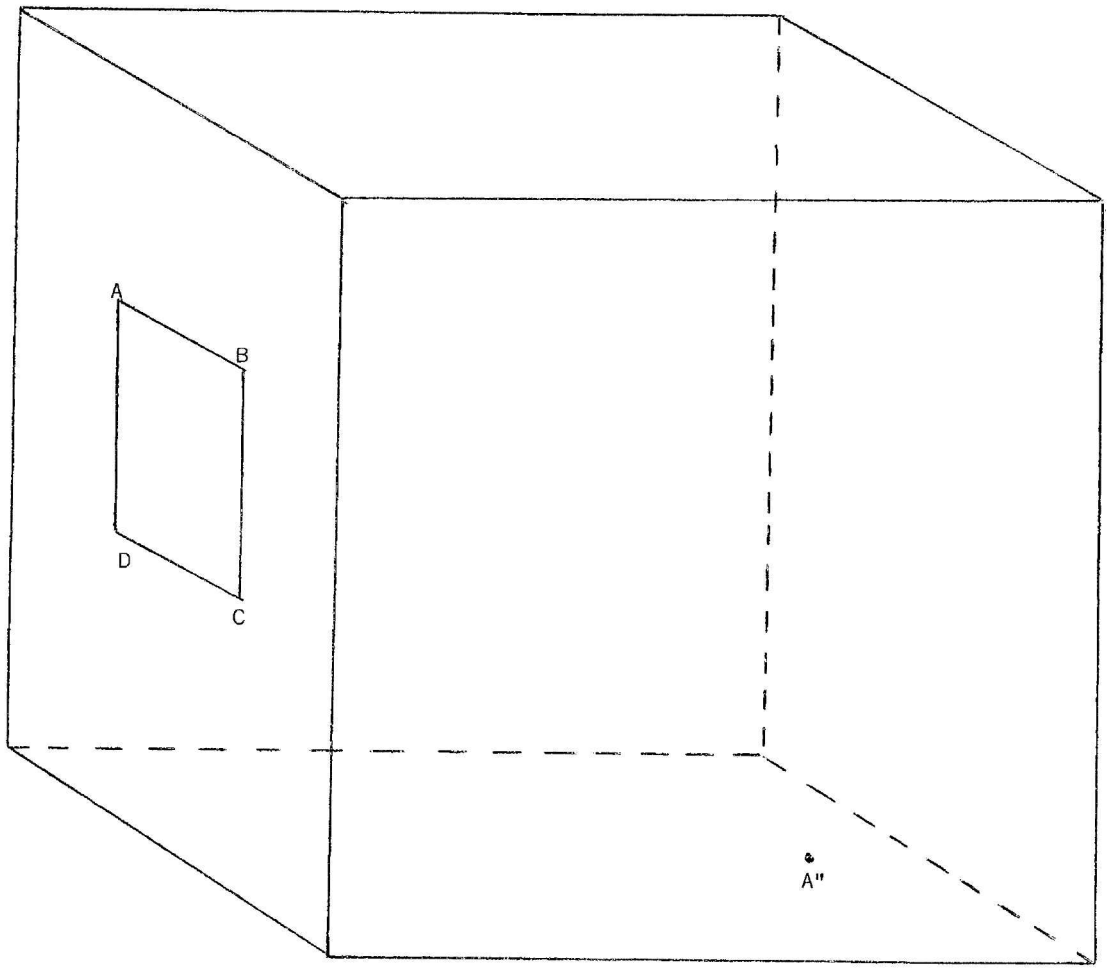


FICHE 2

Dans cette fiche, les dessins sont en perspective cavalière, la lumière est solaire, elle pénètre à l'intérieur d'une maison par une fenêtre, on cherche la partie éclairée. Le problème paraît inversé par rapport aux précédents mais en fait, il suffit de connaître les ombres portées des "bâtons" servant de contour à la fenêtre. L'exercice 2, plus délicat, peut être abordé comme la recherche de l'ombre sur deux plans différents : ombre complète sur le plan du sol, ombre complète sur le plan contenant le mur arrière. Il suffira ensuite de retenir ce qui est effectivement dans ces murs.

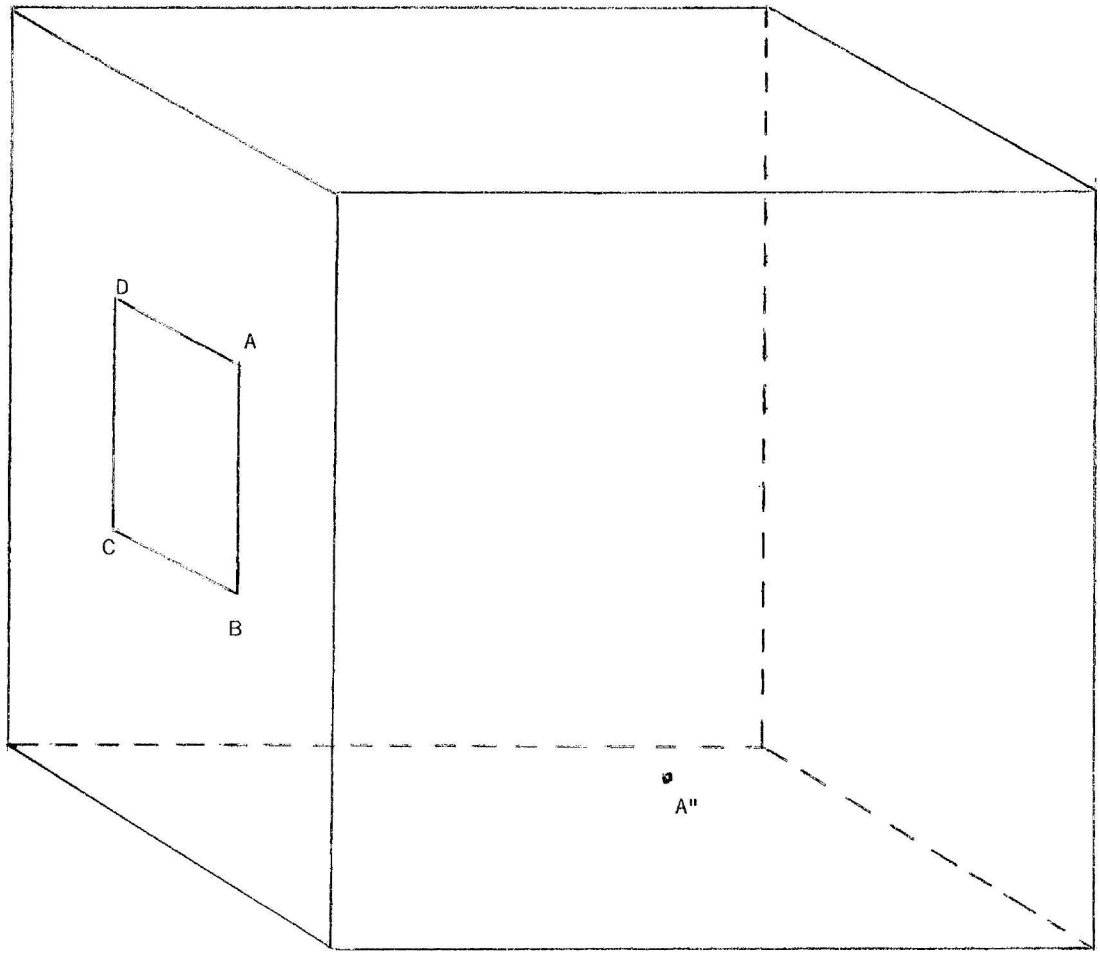
Exercice 1 :

Un rayon de lumière solaire pénètre par le coin A de la fenêtre et laisse en A" une trace sur le sol. Dessiner l'image éclairée de la fenêtre à l'intérieur.



Exercice 2 :

Même question que l'exercice 1.

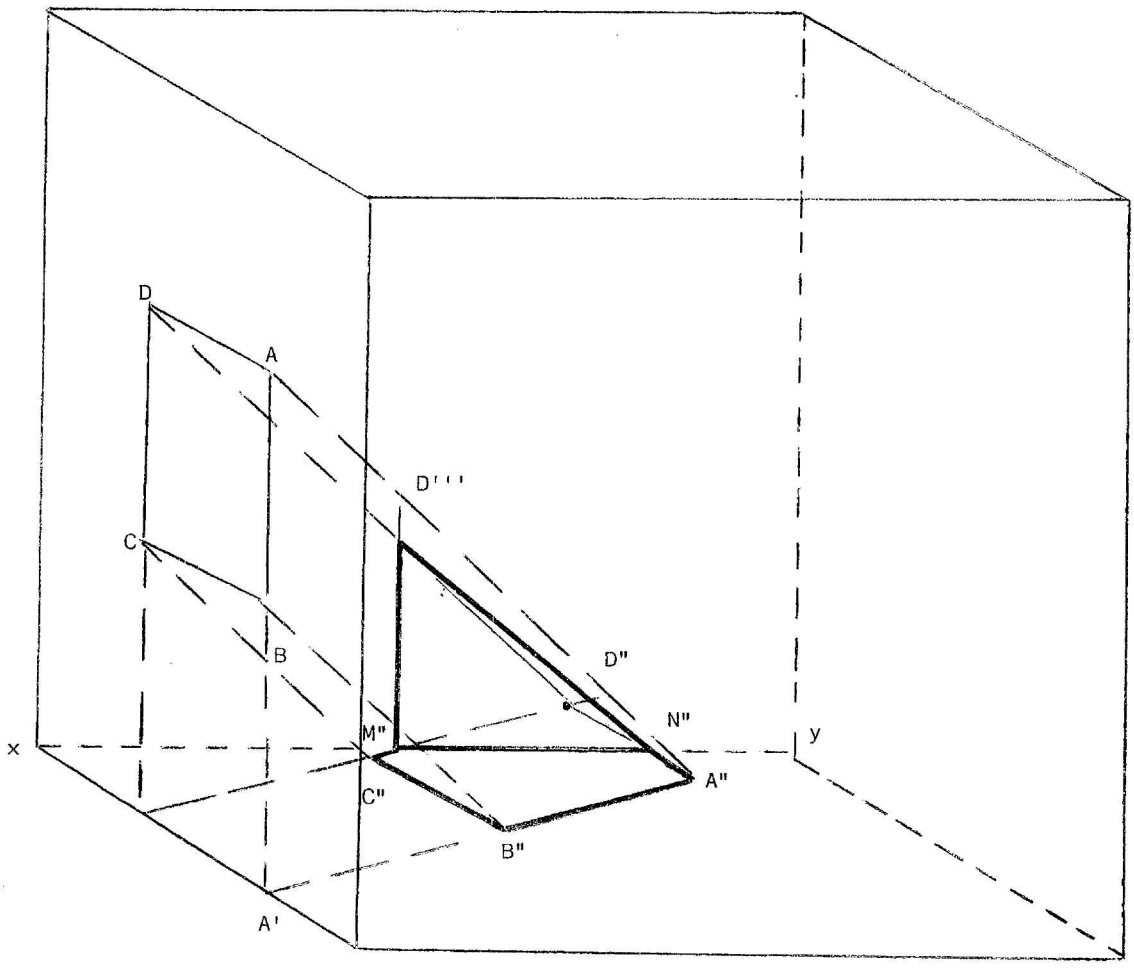


Remarque : La difficulté ici est que l'on ne connait pas sur le mur arrière (ou plutôt sur le plan qui le contient) l'ombre du point A. On peut se référer au théorème "du toit" qui dit "Si deux plans P et P' sécants suivant une droite Δ sont coupés par un troisième plan Q parallèle à Δ, les intersections de Q et P ainsi que de Q et P' sont parallèles à Δ".
De ce théorème, on peut déduire que (DA) ainsi que (CB) sont parallèles à leurs "ombres" sur le sol et qu'il en est de même pour (DC), (AB) et leurs ombres sur le mur arrière. Ce résultat peut être mis en oeuvre dans l'exercice 1 également.

Corrigé de l'exercice 2, Fiche 2

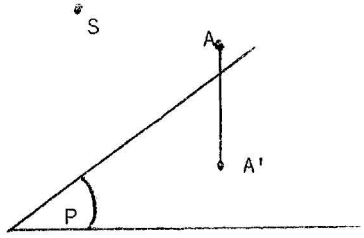
A' étant la projection orthogonale de A sur le sol, l'ombre de AA' est A'A". Comme B est sur AA', l'ombre B" de B est l'intersection de (A'A") avec la parallèle à (AA") passant par B. En supposant que le mur arrière n'existe pas, on obtiendrait de la même façon les points C" et D" ombres de C et D sur le sol (cf. exercice 1, fiche 1). Si (xy) est l'intersection du sol et du mur arrière, en désignant par M" et N" les intersections de (xy) avec respectivement (C"D") et (D"A"), le polygone A"B"C"M"N" est l'ombre au sol à l'intérieur de la maison.

Pour déterminer l'ombre sur le mur arrière, considérons "le toit" constitué par le mur de gauche et le mur arrière. Le plan CDC"D" est parallèle au faite de ce toit, il coupe donc les deux murs gauche et arrière suivant deux parallèles. Une de ces parallèles est (CD), l'autre passe par M" qui est à la fois dans le mur arrière et dans le plan CDC"D". L'intersection de cette deuxième parallèle avec (DD") donne le point D"' et l'ombre sur le mur arrière est le polygone M"D"N".

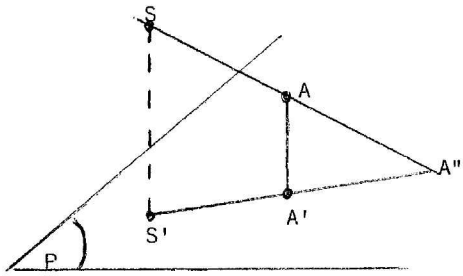


FICHE 3

Dans cette fiche, la lumière est artificielle, les supports des rayons lumineux convergent vers une source S. Les dessins sont en perspective cavalière.

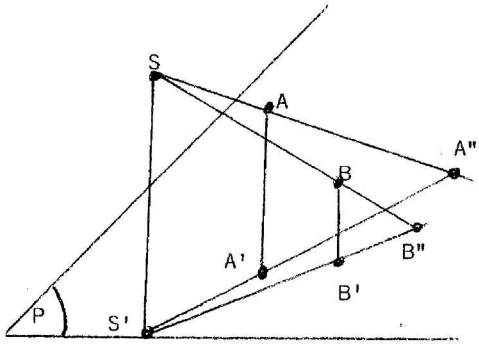


L'exercice 1 est une approche générale de la méthode de traitement. L'ombre du bâton AA' vertical et reposant sur le plan P est connue dès que l'on connait l'ombre de A. Il faut donc connaître la direction du rayon (SA). Cela ne peut se faire que si l'on connait l'exacte position de la source S, pour cela deux alternatives : ou bien on connait S et sa projection orthogonale S' sur P, ou bien on connait déjà S, un point et son ombre.



<u>1er cas</u> : S est précisée par sa projection orthogonale S' sur P.

Les quatre points SS'AA' sont coplanaires. Si Q est le plan qui les contient, (S'A') est l'intersection de P et Q et l'ombre A" de A sera l'intersection de (S'A') avec (SA).



<u>2ème cas</u> : On connait S et B" qui est l'ombre de B. Le point B est situé grâce à sa projection orthogonale B' sur P.

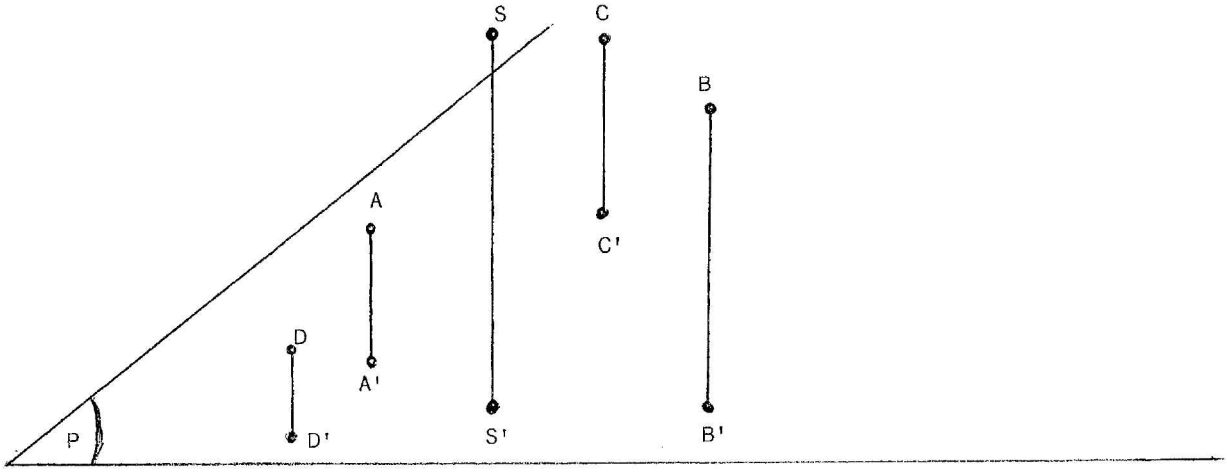
Le plan Q contenant SBB'B" est un plan vertical, son intersection avec P contient donc la projection orthogonale S' de S sur P. Comme l'intersection de P et Q est la droite (B'B"), la projection orthogonale S' de S sur P sera l'intersection de (B'B") et de la parallèle à (BB') passant par S. Une fois connue S', le problème se ramène pour A au cas précédent.

Plus généralement, S étant donné, l'ombre A" d'un point A sera connue lorsque sera connu le plan Q qui contient S, A, les projections orthogonales sur le plan d'ombre de S et de A.

Les exercices 1, 2, 3, 4, 5 suivants sont des applications directes de ce résultat.

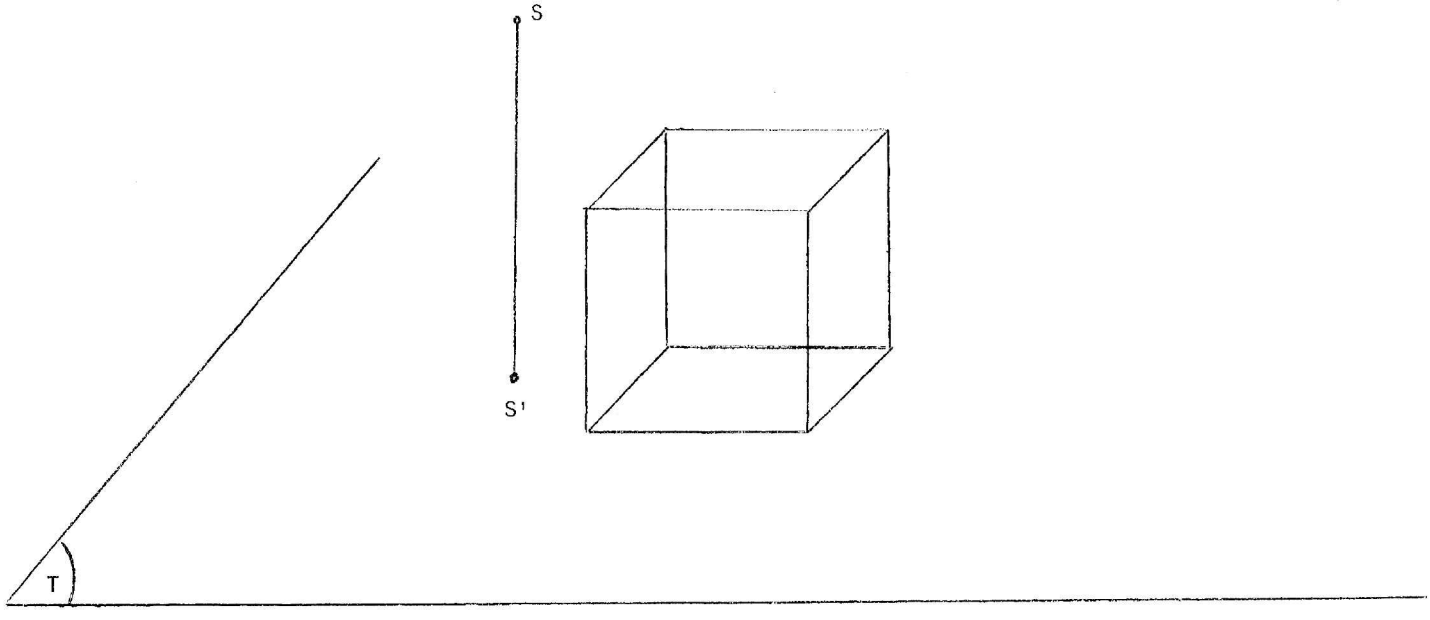
Exercice 1 :

SS' est un lampadaire vertical. Dessiner les ombres des bâtons verticaux AA', BB', CC', DD' sur le plan P sachant que A', B', C', D', S' sont dans le plan P.



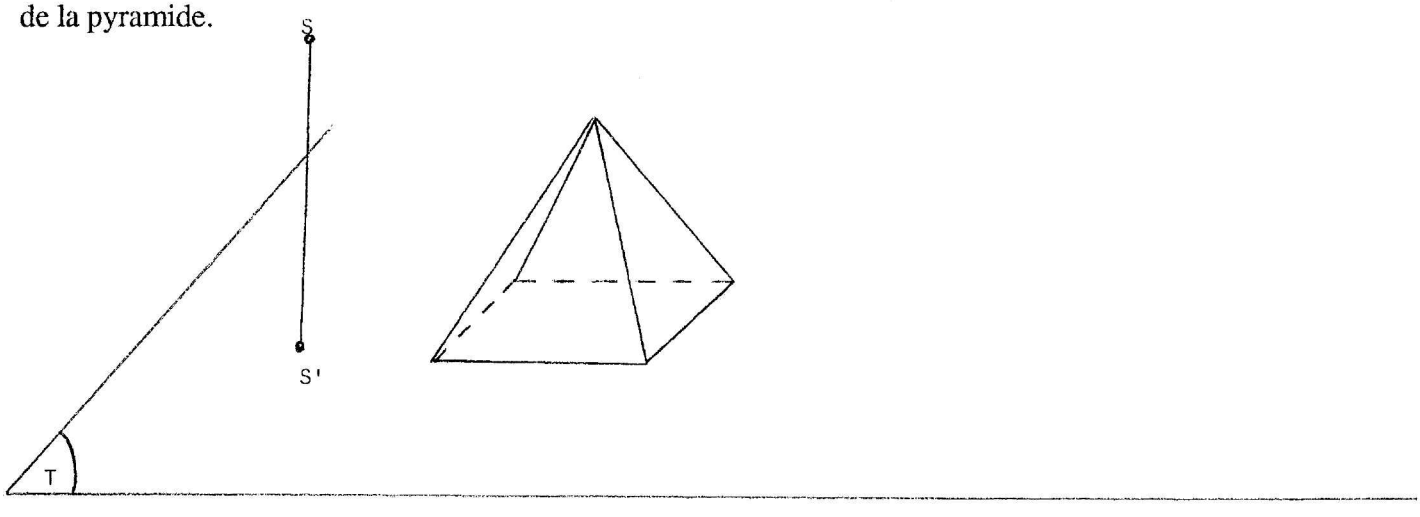
Exercice 2 :

Un cube en fil de fer est posé sur une table T. La lumière émane d'une source S dont on connait la projection orthogonale S' sur T. Complèter l'ombre du cube.



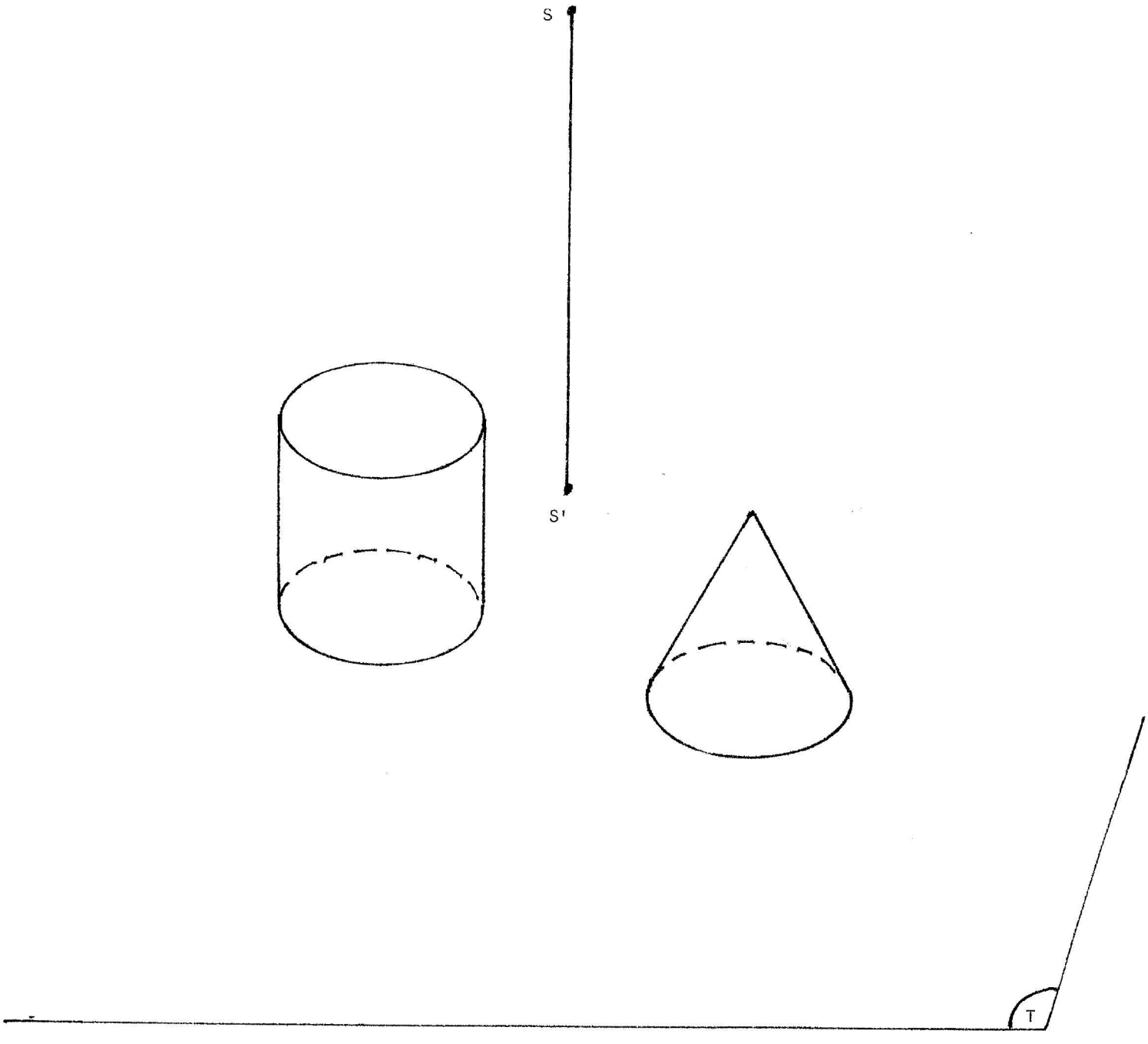
Exercice 3 :

Une pyramide en bois à base carrée est posée sur une table T. La lumière émane d'une source S dont on connait la projection orthogonale S' sur T. Tracer l'ombre du sommet, compléter l'ombre de la pyramide.



Exercice 4 :

Un cylindre et un cône en bois sont posés sur une table T. La lumière émane d'une source S dont on connait la projection orthogonale S' sur T. Tracer l'ombre du sommet du cône, du disque supérieur du cylindre. Compléter les ombres.

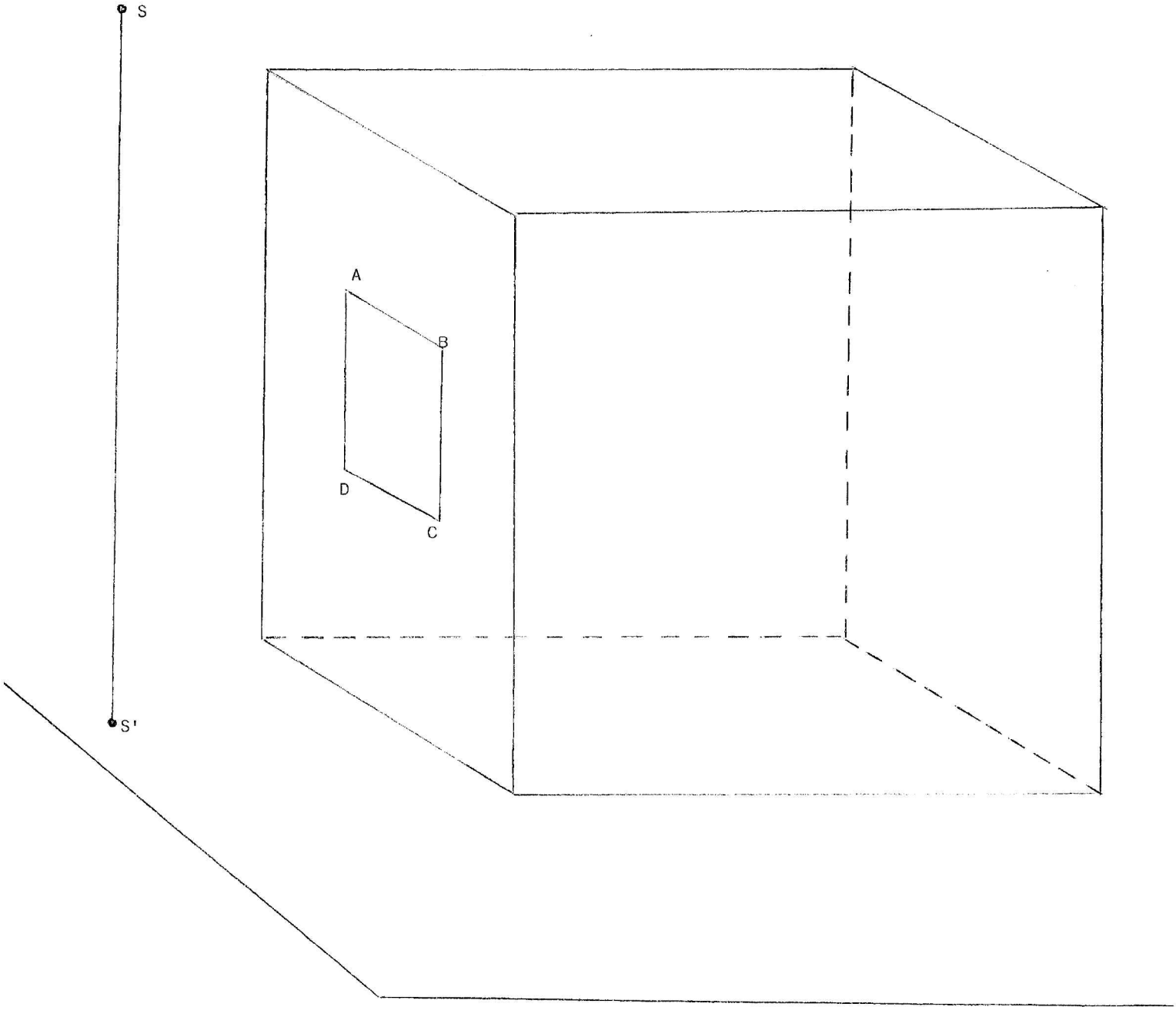


FICHE 4

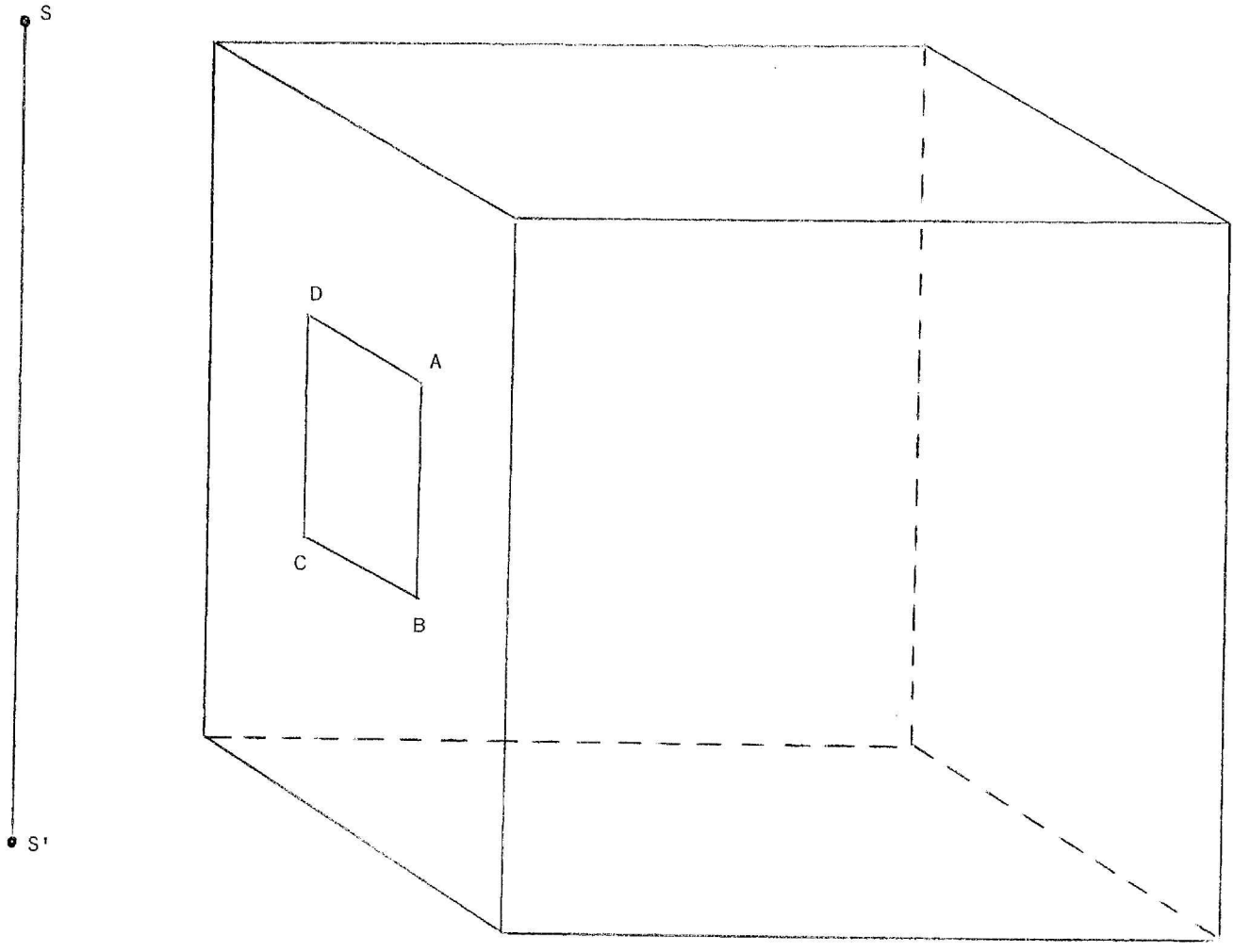
Dans cette fiche, les dessins sont en perspective cavalière, la lumière est artificielle, elle pénètre à l'intérieur d'une maison par une fenêtre, on cherche la partie éclairée. On connait la source S et sa projection orthogonale S' sur le plan du sol de la maison. La méthode reste la même, il suffit de connaître les ombres portées des "bâtons" servant de contour à la fenêtre.

Exercice 1 :

Un lampadaire SS' éclaire l'intérieur de la maison. Dessiner l'image éclairée de la fenêtre à l'intérieur.



Exercice 2 : Même question que l'exercice 1.



Remarque : On peut, dans un premier temps, rechercher l'ombre au sol en faisant abstraction du mur arrière. On se reportera ensuite au corrigé de l'exercice 2, fiche 2 pour avoir l'ombre sur le mur arrière.

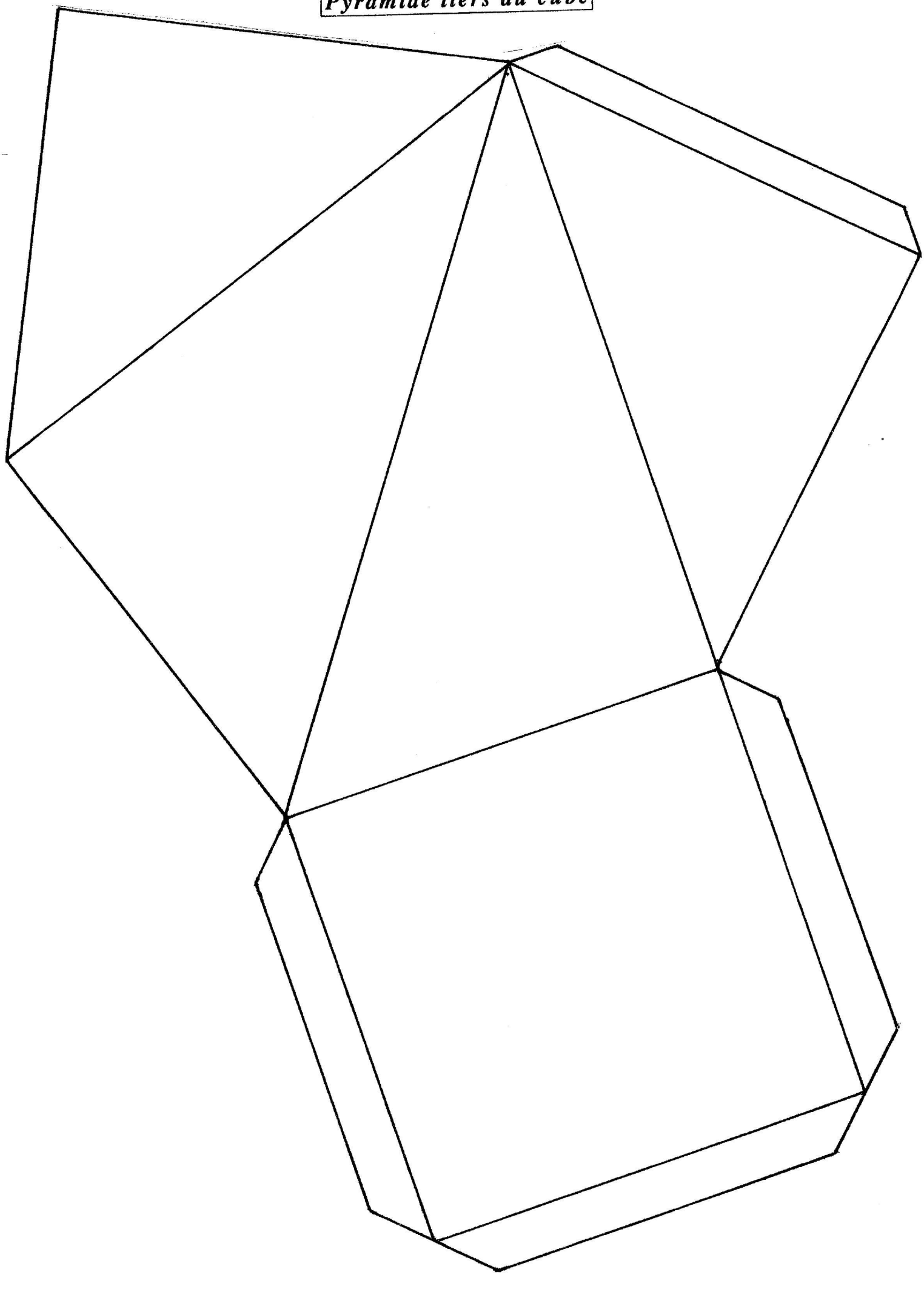
- Chapitre 10 -

PATRONS ET GABARITS

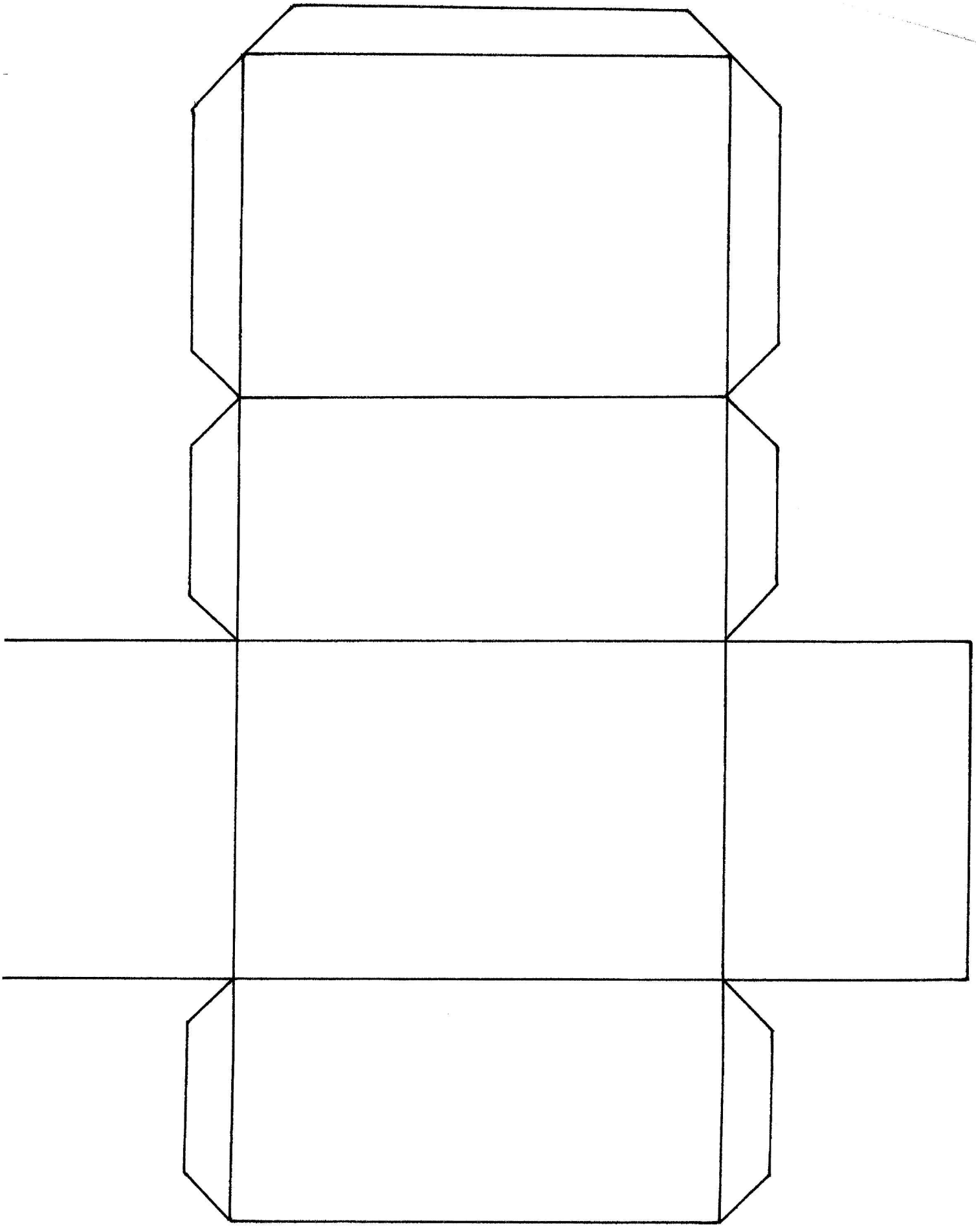
On trouvera dans ce chapitre des modèles de patrons à découper. Les objets qu'ils permettent de construire sont indispensables lors de certaines des activités proposées.

On a également reproduit un modèle de trace-ellipses et de pistolet à dessin qui permettront après découpage de réaliser correctement certaines ellipses.

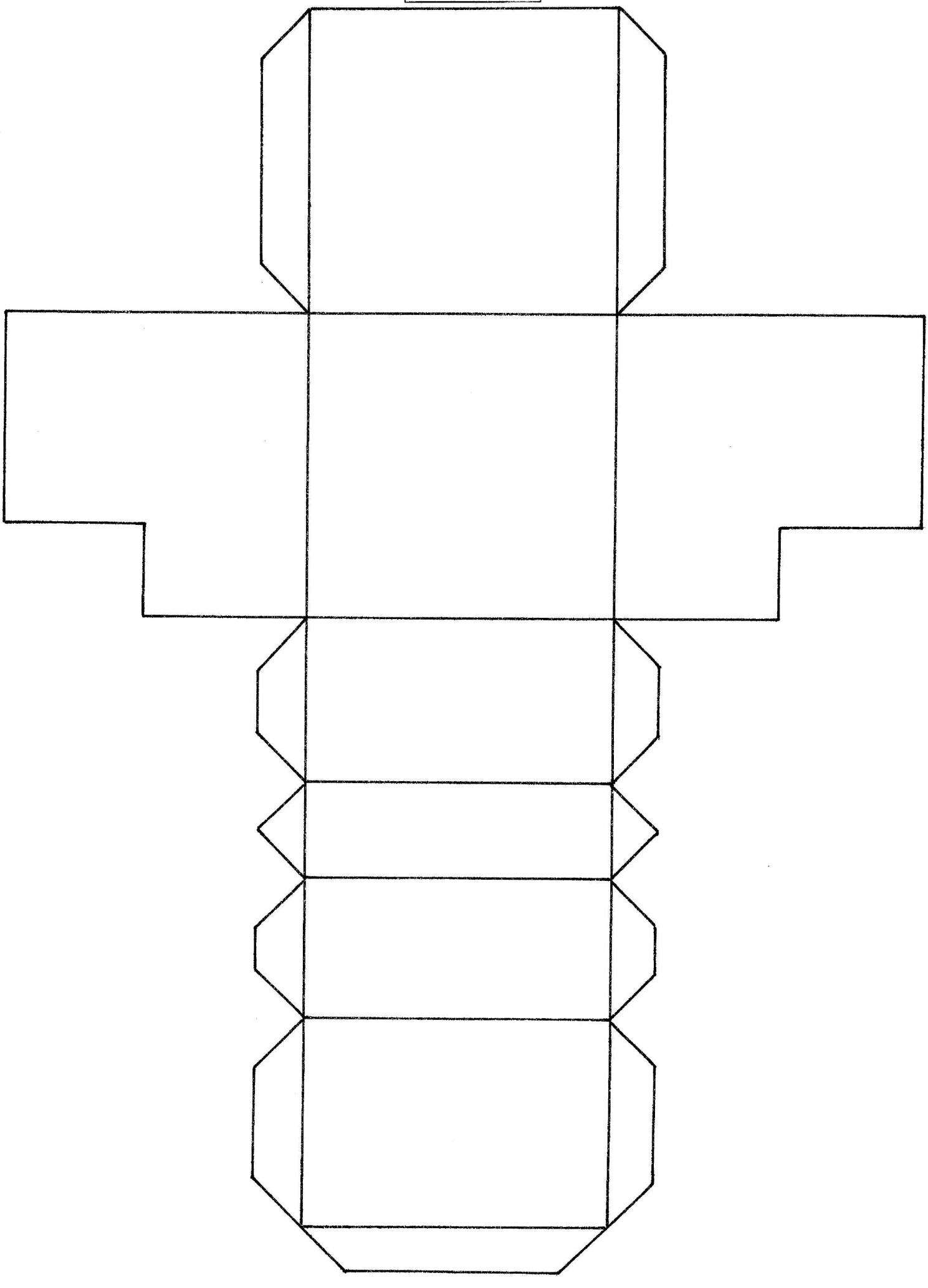
Pyramide tiers du cube



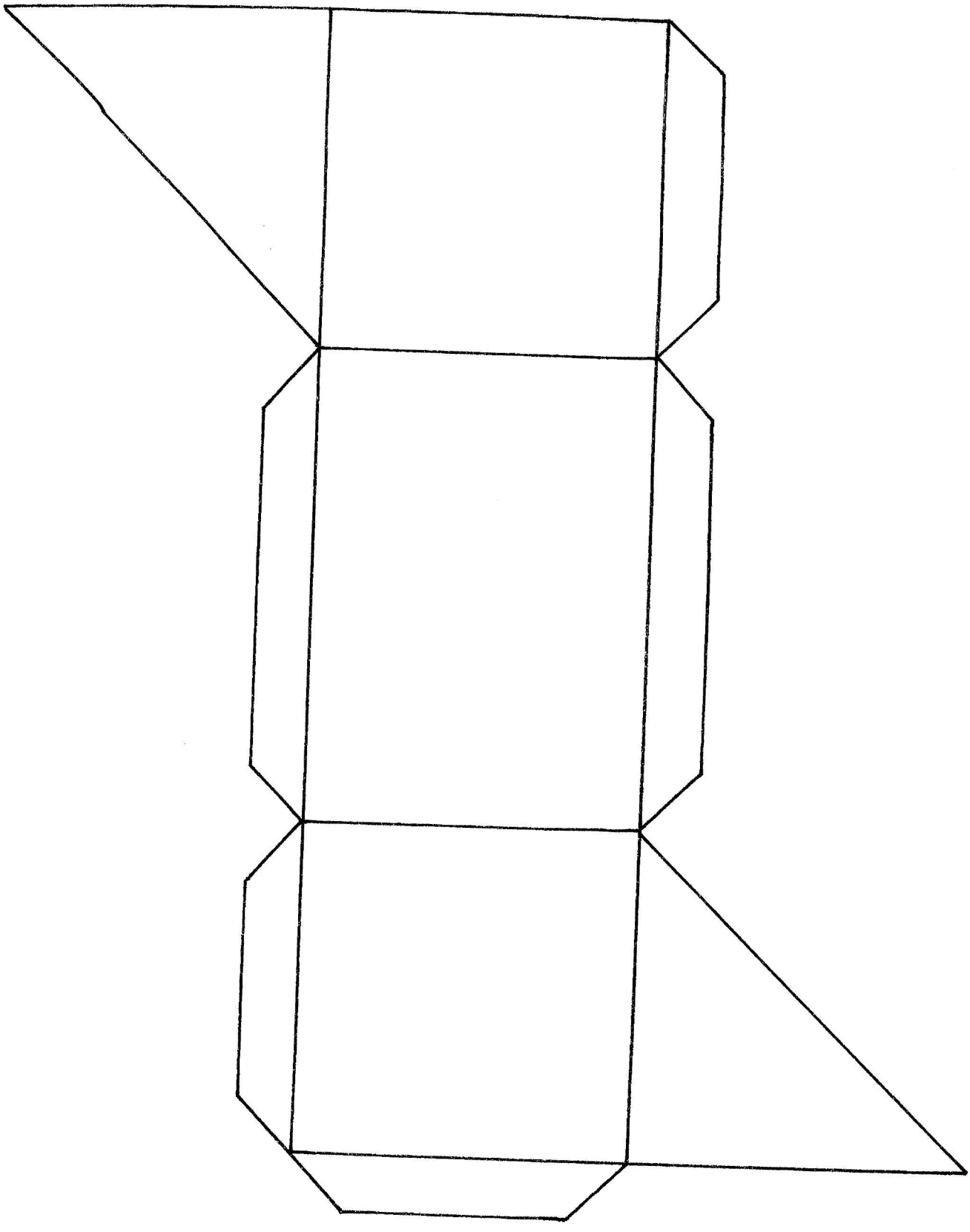
Pavé



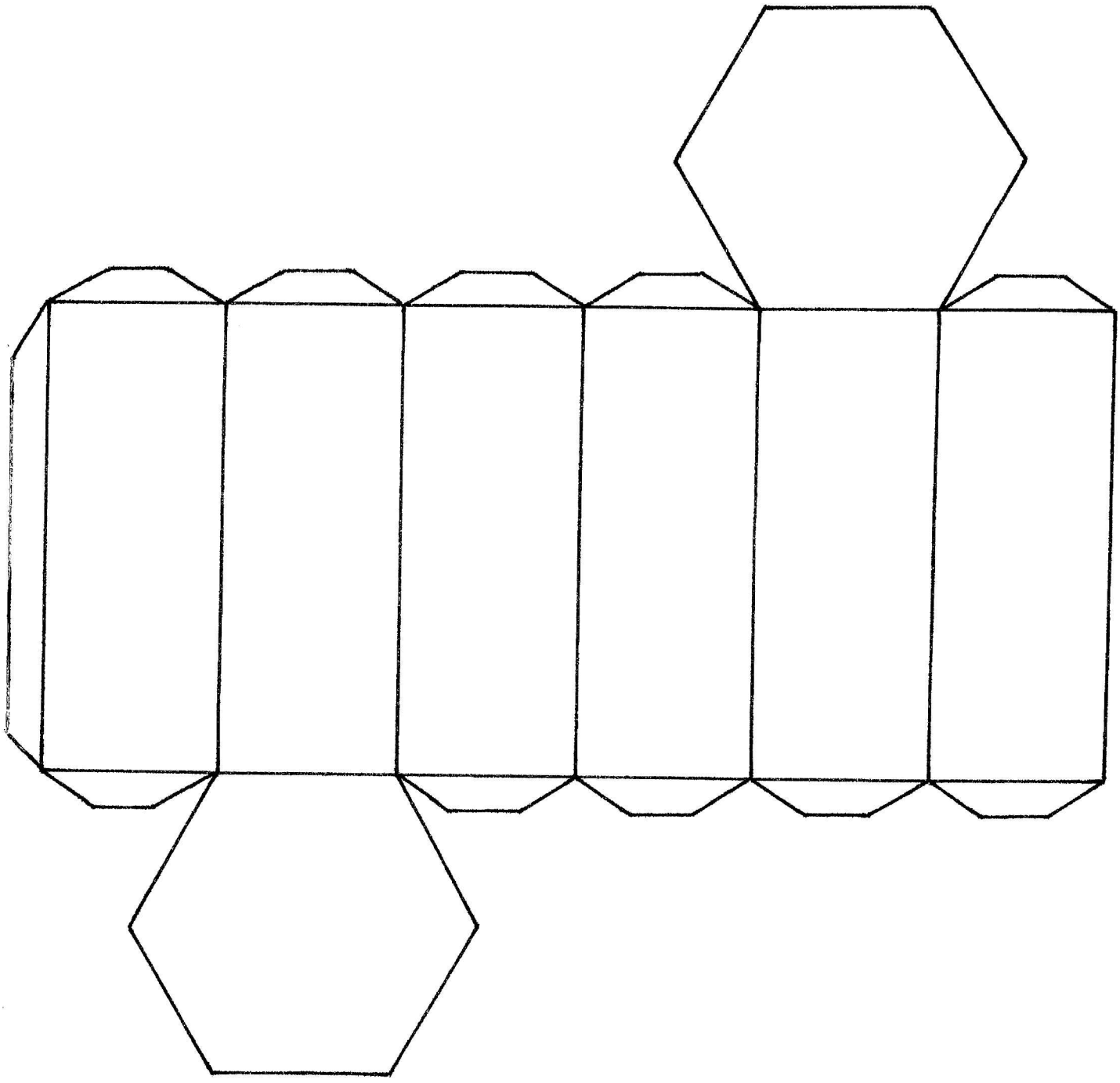
Cube piano



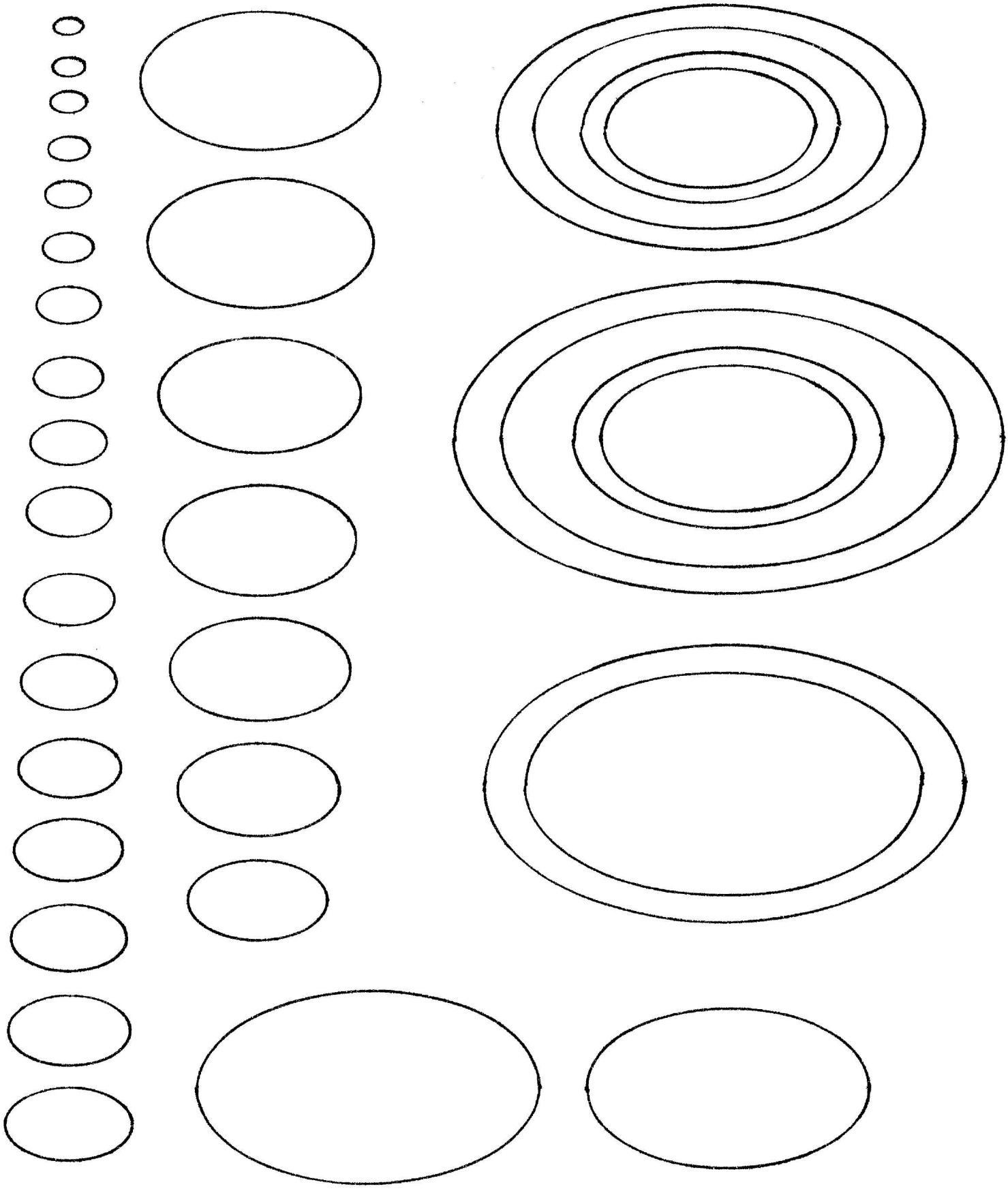
Prisme droit à base triangulaire



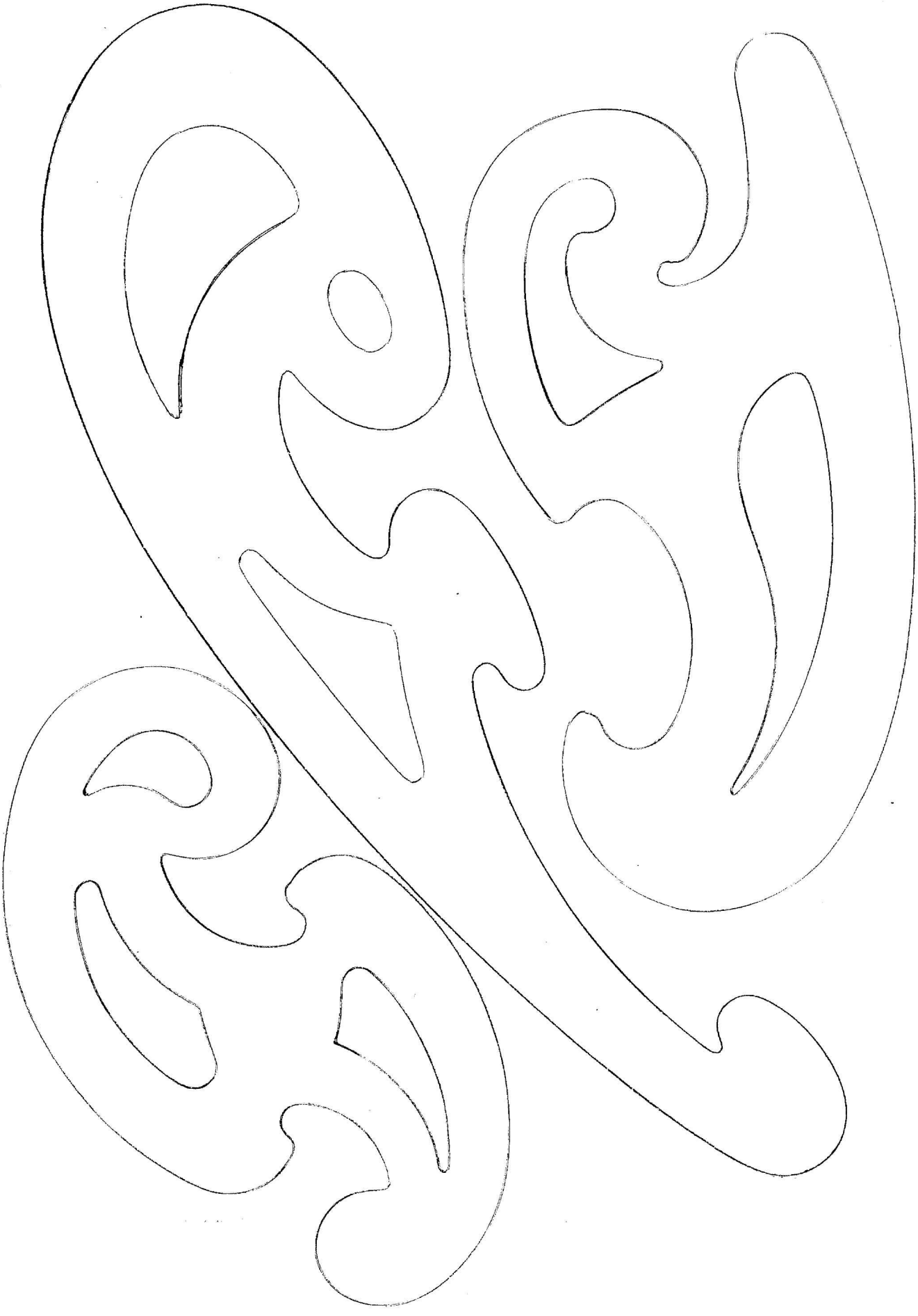
Prisme à base hexagonale



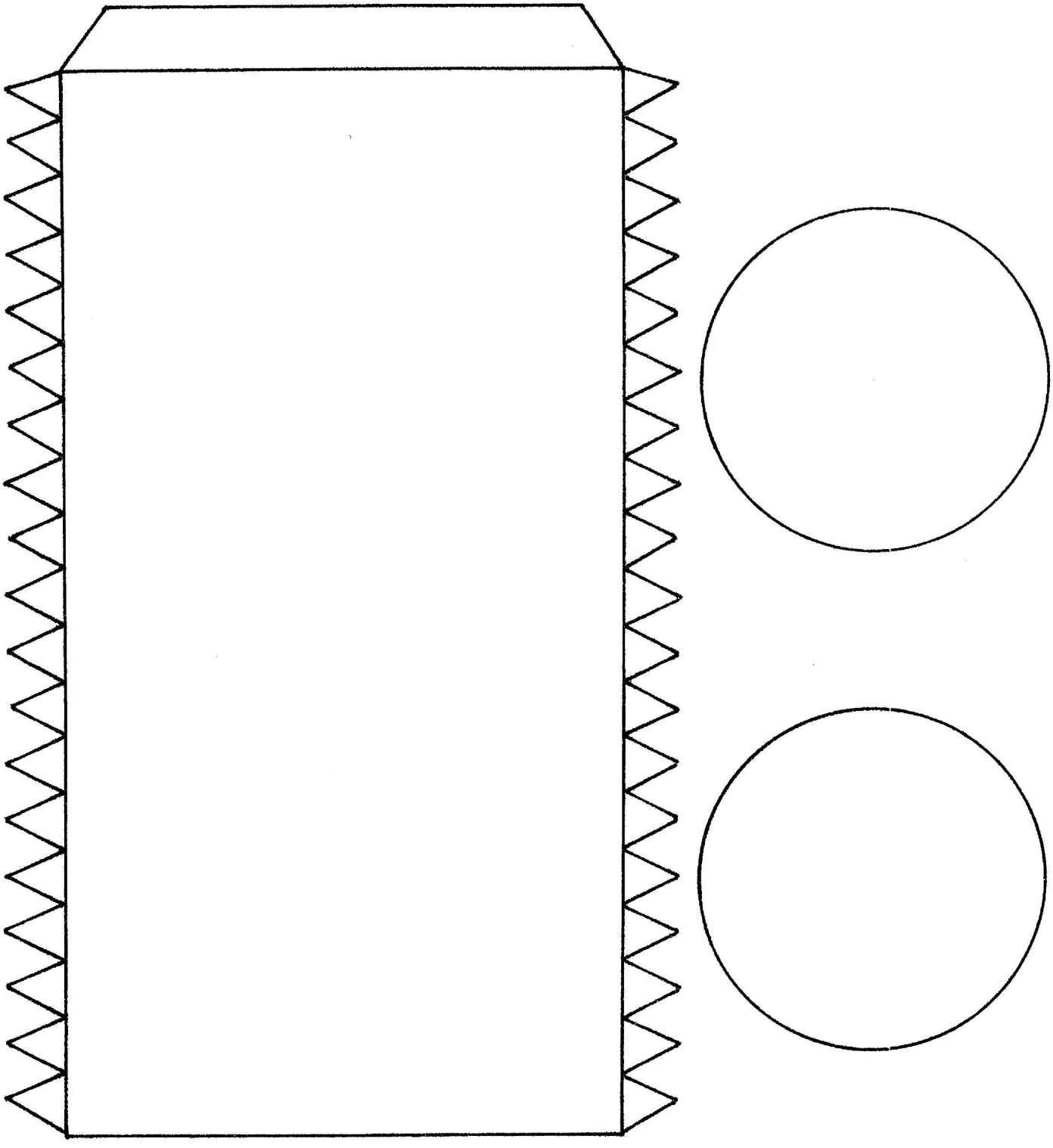
Trace-ellipses



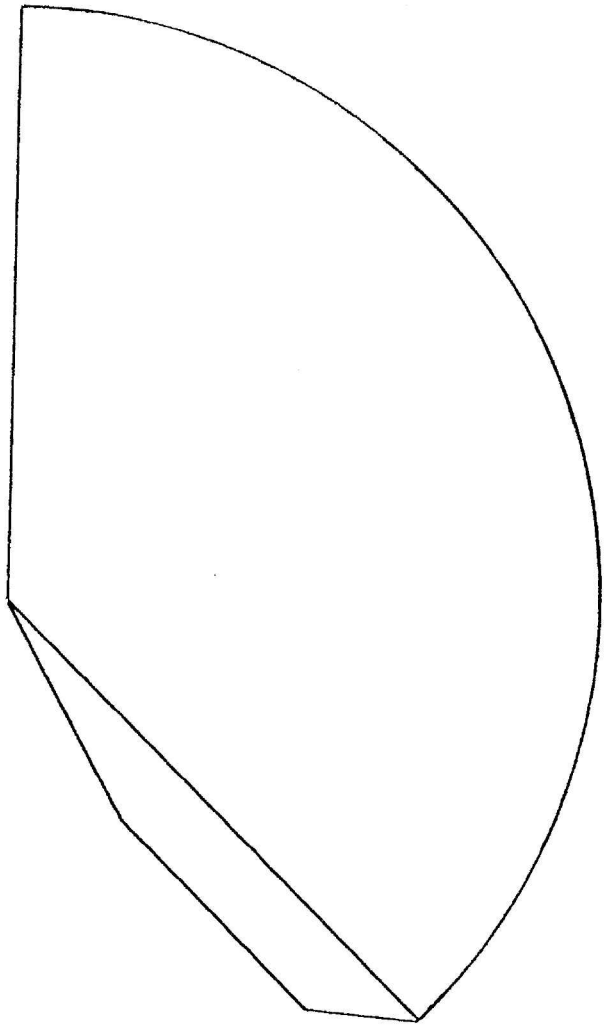
Pistolets à dessin

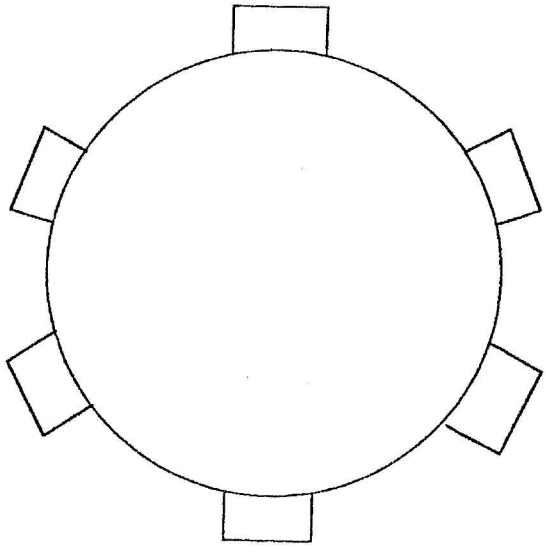


Cylindre de révolution

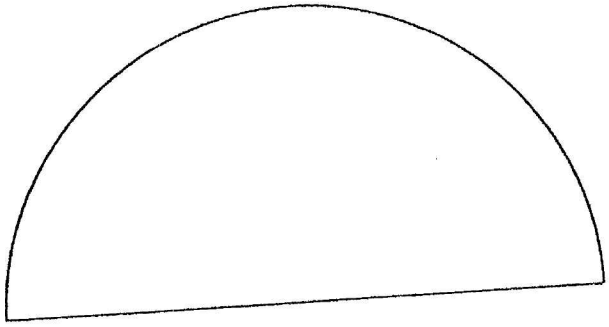


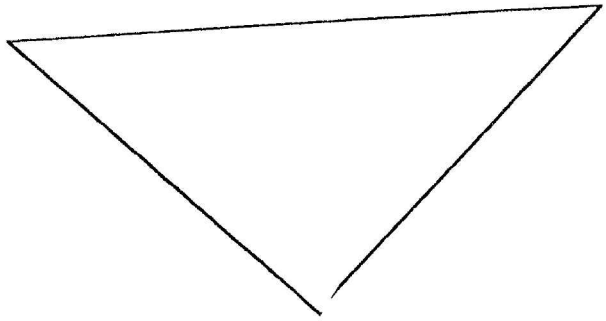
Cône

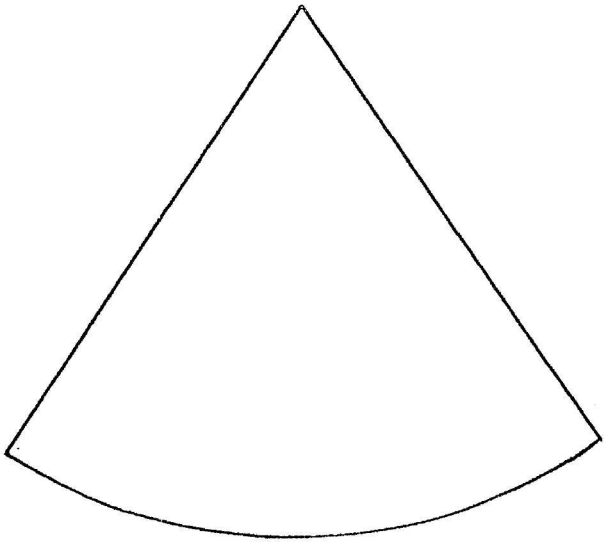


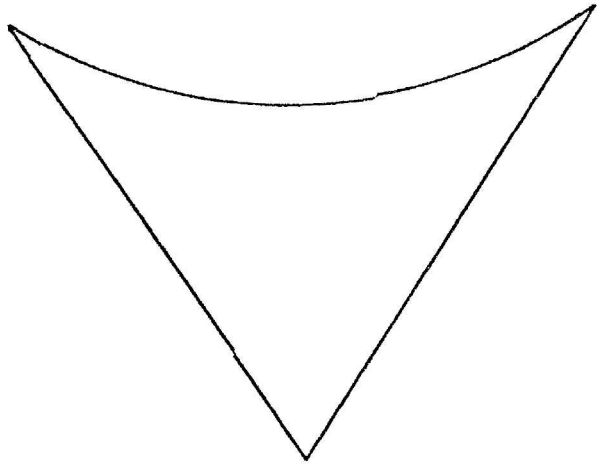


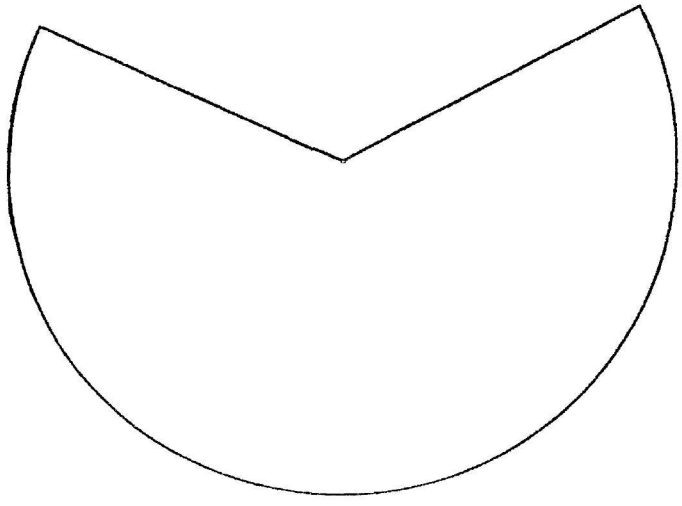
Patrons à découper











BIBLIOGRAPHIE

TRAVAUX ET PUBLICATIONS
à rattacher au Groupe de
Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie
de l'I.R.E.M. de Montpellier

[1] **ROUMIEU Ch.**, 1978 - *Quelques observations d'élèves à propos du développement du cube*, publication IREM-USTL, place E. Bataillon 34095 Montpellier (7 pages).

[2] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1979 - *Intégrale des protocoles du problème CRI* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 246 pages.

[3] **AUDIBERT G.**, 1980a - *Processus de recherche de problèmes de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire* - Publication IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier (92 pages).

[4] **AUDIBERT G.**, 1980b - *Processus de recherche de problèmes de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire* - Résumé des communications brèves du 4ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques. National Academy of Sciences - USA and University of California Berkeley (1 page).

[5] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1980a - *Intégrale des protocoles du problème SIM* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 448 pages.

[6] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1980b - *Similitude, fascicule de protocoles*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon (56 pages).

[7] **AUDIBERT G.**, 1981a - Processus de recherche d'un problème sur la similitude chez l'élève de l'enseignement secondaire (analyse de deux protocoles). *Séminaire de recherche pédagogique en mathématiques N°7, Laboratoire IMAG, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex* (pages 1 à 24).

[8] **AUDIBERT G.**, 1981b - Les contradictions dans la recherche d'un problème de géométrie. *Actes de la XXXIIIème Rencontre Internationale de la CIEAEM*, édités par Michèle Pellerey, Palanza 2/9 Août 1981 (pages 27 à 35).

[9] **BRUNET R., CHEVALIER A.**, 1981 - Rôle du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie. *Compte-rendu du colloque GEDEOP - 10/21 Novembre 1981*, IREM-Université, 40, avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex (pages 37 à 48).

[10] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1981a - *Intégrale des protocoles du problème PEN* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 558 pages.

[11] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1981b - *Isométries-Pentagone, fascicule de protocoles*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier (106 pages).

[12] **AUDIBERT G.**, 1982a - *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, volumes 1 et 2*, nouvelle édition, publication de l'APMEP, 1984, N°56, 831 pages).

[13] **AUDIBERT G.**, 1982b - Géométrie euclidienne plane dans l'enseignement secondaire français. *Actes du colloque international sur l'enseignement de la géométrie*. Sous-commission belge de la CIEM, Mons, 31 Août/2 Septembre 1982, édité par G. Noël, Université d'Etat de Mons (Belgique), pages 225 à 239. Nouvelle publication dans le Bulletin de l'APMEP 1985, N°349, pages 349 à 363.

[14] **FABRE C.**, 1982 - Perspective cavalière - *Bulletin de la Régionale de l'APMEP de Montpellier N°1, Juin 1982*, pages 19 à 33, nouvelle publication, *Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, journées SMF*, Marseille 1/2 Juin 1984, publication de l'IREM de Marseille, pages VI.1 à VI.15.

[15] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1982 - *Intégrale des protocoles du problème QAT* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 508 pages.

[16] **AUDIBERT G.**, 1983a - Processus de recherche d'un problème de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1983, pages 155 à 181.

[17] **AUDIBERT G.**, 1983b - Pseudo-proportions, *Bulletin APMEP* N°339, pages 321 à 328.

[18] **AUDIBERT G.**, 1983c - *Affinités*, éditions IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 17 pages.

[19] **AUDIBERT G.**, 1983d - *Théorème fondamental de la géométrie affine réelle plane*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 6 pages.

[20] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1983a - Un rapporteur, *Bulletin de l'APMEP N°341*, page 559.

[21] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1983b - *Intégrale des protocoles du problème FIL* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 822 pages.

[22] **AUDIBERT G.**, 1984 - Construction d'un triangle connaissant les mesures de ses trois côtés, usage des instruments de dessin; double-décimètre, compas. *Actes de la XXXIVème Rencontre de la CIEAEM Moyens et médias sur l'enseignement des mathématiques, 31 Juillet/6Août 1982*, imprimés par UER Sciences, Université d'Orléans, 1er trimestre 1984, pages 127 à 133.

[23] **BRUNET R.**, 1984 - La symétrie orthogonale dans les problèmes PEN et QAT. Dans Chevalier A. *Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction. La pratique de l'élève*. Edition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, pages 288 à 290.

[24] **CHEVALIER A.**, 1984 - *Le problème QAT : symétrie, vérification, algorithme de construction, la pratique de l'élève*. Edition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 442 pages.

[25] **Collectif Andorre/Bourg Madame**, 1984 - *Quelques activités géométriques dans le premier cycle*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 71 pages.

[26] **CONEJERO M.T., GABRIEL P., GROS R., VACHE Y.**, 1984 - *Six thèmes de géométrie pour les classes de 4ème et 3ème*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 106 pages.

[27] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie,** 1984a - Document préparatoire à la séance de travail de la COPREM du 2 Mars 1984 consacrée à l'enseignement de la géométrie, 13 pages.

[28] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1984b, *Intégrale des protocoles du problème SEC* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 963 pages.

[29] **PELOUZET B.**, 1984a - Phases pré-expérimentales d'une recherche sur la géométrie de l'espace. *Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, journées SMF*, Marseille 1/2 Juin 1984, publication de l'IREM de Marseille, pages V.1 à V.18.

[30] **PELOUZET B.**, 1984b - *Utilisons nos rapporteurs*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 19 pages.

[31] **CHEVALIER A.**, 1985 - *A propos de conceptions d'élèves liées aux notions de vérification et de contre exemple : rôle des contradictions*. Exposé au Séminaire de Didactique du 12 Octobre 1985, édité par l'IREM de Montpellier, place E. Bataillon, 47 pages.

[32] **AMSALEM A., BONAFE F.**, 1985 - *Géométrie dans l'espace et angles en classe de Seconde*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 36 pages.

[33] **AUDIBERT G.**, 1985a - *Une problématique en géométrie de l'espace*, publication IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 63 pages.

[34] **AUDIBERT G.**, 1985b - *Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL*, publication IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 79 pages.

[35] **AUDIBERT G.**, 1985c - Au sujet de la représentation de l'espace chez nos élèves de l'enseignement secondaire : problématique-méthode, *Nieuwe Wiskrant 5e Jaargang Nummer 1*, Septembre 1985, Utrecht, pages 41 à 44. Nouvelle publication : Zentralblatt für Didactick der Mathematik 85/6, pages 190 à 193.

[36] **AUDIBERT G., BONAFE F.**, 1985 - *Projection cylindrique d'un coin de cube*, IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 39 pages.

[37] **BONAFE F.**, 1985 - *La genèse du problème SEC*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 39 pages.

[38] **BRUNET R.**, 1985 - *De la démonstration en mathématiques*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier

[39] **CHEVALIER A.**, 1985 - Etudes de résolution de problème par les élèves. *Bulletin de liaison de l'IREM de Clermont-Ferrand*, N°25, Université Clermont-Ferrand II, IREM, complexe scientifique des Cézeaux, 63170 Aubière, pages 21 à 47.

[40] **FABRE C.**, 1985 - *Mettons les pieds dans ... l'espace*, éditions IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 8 pages.

[41] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1985 - *Atelier Géométrie de l'espace*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 16 pages.

[42] **CHEVALIER A.**, 1985 - La résolution d'un problème non routinier en géométrie. *Petit x N°9*, journal pour les enseignants de mathématiques et des sciences physiques du premier cycle de l'enseignement secondaire, édité par l'IREM de Grenoble, pages 41 à 62.

[43] **AUDIBERT G.**, 1985d - *Comment l'élève représente-t-il l'espace ?* Conférence faite à la 37ème Rencontre de la CIEAEM de Leiden, publié dans les Actes de la 39ème Rencontre de la CIEAEM , édition de Sherbrooke, 1988, pages 444 à 449.

[44] **FABRE C.**, 1986 - *Déroulement d'une expérimentation portant sur l'enseignement de la perspective cavalière en classe de 5ème*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 48 pages, 2ème édition IREM de Lille, Colloque Inter-IREM Géométrie des 23, 24 et 25 Mai 1986 à St-Amand-les-Eaux, pages 100 à 143.

[45] **PELOUZET B.**, 1986 - *La proposition de Thalès dans le problème FIL*, IREM-USTL, place E. Bataillon, Montpellier, 53 pages.

[46] **AUDIBERT G.**, 1986a - *Une description des 14 groupes finis d'isométries*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 32 pages, 2ème édition IREM de Lille, colloque Inter-IREM Géométrie des 23, 24 et 25 Mai 1986 à St-Amand-les-Eaux, pages 144 à 175.

[47] **Groupe Géométrie de Béziers**, 1986 - *Stage géométrie au collège, compte-rendu d'activité*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 22 pages.

[48] **AUDIBERT G.**, 1986b - L'enseignement de la géométrie de l'espace, *Bulletin de l'APMEP*, N°355, pages 501 à 526.

[49] **AUDIBERT G.**, 1986c - *Equilibre ou obstacle* ? Edition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 25 pages.

[50] **BONAFE F.**, 1986 - Représentation d'un objet de l'espace : la construction d'un problème. *Petit x N°11*. Journal pour les enseignants de mathématiques et des sciences physiques du premier cycle de l'enseignement secondaire, édité par l'IREM de Grenoble, pages 37 à 64.

[51] **AUDIBERT G.**, 1987 - *Description des 32 classes de symétrie*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 37 pages.

[52] **AUDIBERT G., BONAFE F.**, 1987 - Apprentissage de la perspective cavalière dans *Rabardel P., Weill-Fassina A. Le dessin technique. Apprentissage, utilisation, évolution.* Paris-Londres-Lausanne, Hermès, pages 139 à 147.

[53] **BONAFE F.**, 1987 - *Quelques hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace à partir de la représentation en perspective cavalière*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 15 pages. Nouvelle publication : Bulletin de l'APMEP, N°363, pages 151 à 164.

[54] **LEROUGE A.**, 1987a - *Conception et pré-expérimentation d'une séquence didactique sur la perspective cavalière en classe de 5ème*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier (document de travail à diffusion restreinte), 42 pages.

[55] **LEROUGE A.**, 1987b - *Rêve et réalité à propos de l'enseignement de la géométrie dans l'espace au collège*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 8 pages. Nouvelle publication : Bulletin de l'APMEP N°363, pages 155 à 170.

[56] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie,** 1987 - *Intégrale des protocoles de la séquence PC* (à consulter sur place à l'IREM de Montpellier), 1592 pages.

[57] **AUDIBERT G.**, 1987b - *Représentation de l'espace dans l'enseignement secondaire et technique*, Conférence faite à l'Université de Genève, publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 18 pages.

[58] **AUDIBERT G., KEITA B.**, 1987 - La perspective cavalière et la représentation de l'espace. *Actes du colloque de Sèvres*, Mai 1987, Edition La Pensée Sauvage, 1988, pages 109 à 125.

[59] **AUDIBERT G.**, 1987c - Erreurs en géométrie de l'espace liées au codage du dessin; rapport entre l'objet et le dessin. *Actes de la XXXIXème Rencontre de la CIEAEM*, éditions de l'Université de Sherbrooke, 1988, pages 316 à 322.

[60] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie et G. AUDIBERT**, 1987 - *Géométrie dans l'enseignement secondaire et technique*, dans Commission Inter-IREM Géométrie, 1988, enseigner la géométrie, brochure ICME 6, Budapest, 1988.

[61] **BASCOU N., MURGIER T., NAUDEILLO J.**, 1988 - *Réflexions sur l'enseignement de la perspective cavalière dans les collèges*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 14 pages.

[62] **AUDIBERT G.**, 1988a - La perspective cavalière, *publication APMEP* N°75.

[63] **AUDIBERT G.**, 1988b - Oblical cylindric projection to teach space geometry for 11-18 years old. *Abstract of short communication 1 oral presentation, sixth international congress of mathematical education*, Budapest, ICMI, page 17.

[64] **CHEVALIER A.**, 1988 - *Procédures de constructions de triangles*, publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 42 pages.

[65] **AUDIBERT G.**, 1989a - Empirisme et géométrie de l'espace chez les élèves ayant entre 11 et 18 ans. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1989, IREM de Strasbourg, pages 65 à 86.

[66] **CHEVALIER A., PELOUZET B.**, 1989 - Procédures-élèves en géométrie de l'espace. Dans commission Inter-IREM Géométrie 1989. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze*, édité par l'IREM de Montpellier, pages 44 à 46.

[67] **AUDIBERT G., NAUDEILLO J.**, 1989 - Les définitions de la perspective cavalière dans les livres de 6ème et 5ème. Que proposer aux élèves ? Dans Commission Inter-IREM Géométrie, 1989, *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze*, édité par l'IREM de Montpellier, pages 84 à 90.

[68] **BONAFE F., BRUNET R., JANVIER M.**, 1989 - Les transformations : peut-on aller au-delà de l'expression d'opinion ? Dans Commission Inter-IREM Géométrie 1989. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze*, édités par l'IREM de Montpellier, pages 127 à 131.

[69] **AUDIBERT G.**, 1989b - il disegno del poliedri. *L'educatione mathematica* anno X, serie II, vol.4, Aprile 1989, pages 1 à 28 (traduzione di L. Grugnetti).

[70] **CHEVALIER A.**, 1989a - *Anayse du problème SEC.* Edition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 59 pages.

[71] **AUDIBERT G.**, 1989c - Les configurations en géométrie. Dans les *Actes du colloque Inter-IREM "du collège au lycée pour mieux réussir"*, des 25, 26 et 27 Mai 1989 à Troyes (sous presse), édité par l'IREM de Toulouse.

[72] **AUDIBERT G., BRUNET R., GUIBERT J.**, 1989 - Compte-rendu de l'atelier de géométrie dans l'espace. Dans les *Actes du colloque Inter-IREM "du collège au lycée pour mieux réussir"* des 25, 26 et 27 Mai 1989 à Troyes.

[73] **CHEVALIER A.**, 1989b - Narration de recherche en classe de 4ème : influence sur les stratégies et la motivation des élèves, dans les *Actes de la 41ème Rencontre de la CIEAEM.*

[74] **AUDIBERT G.**, 1989d - Introduction, dans commission Inter-IREM Géométrie, 1989, *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Mèze*, édité par l'IREM de Montpellier, pages 1, 2 et 3.

[75] **PAIS L.C.**, - 1990a - *La représentation du cylindre dans les manuels scolaires et chez les élèves*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 13 pages.

[76] **BONAFE F., CHEVALIER A.**, 1990 - Narrations de recherche : historique, objectifs, méthodes, aspect didactique. Dans *Compte-rendu de la journée GACEM 1 et 2 du 16 Mai 1990.* Publication IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 14 pages.

[77] **AMSALEM A., BASCOU N.**, 1990 - Formation continue sur les transformations. Dans commission Inter-IREM Géométrie 1990. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Port d'Albret des 7, 8 et 9 Juin 1990.*

[78] **BONAFE F., BRUNET R.**, 1990 - Formation continue surles transformations. Dans commission Inter-IREM Géométrie 1990. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Port d'Albret* des 7, 8 et 9 Juin 1990.

[79] **CHEVALIER A., RIOS G., SAUTER M.**, 1990 - Narrations de recherche. Dans commission Inter-IREM Géométrie 1990. *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie de Port d'Albret* des 7, 8 et 9 Juin 1990.

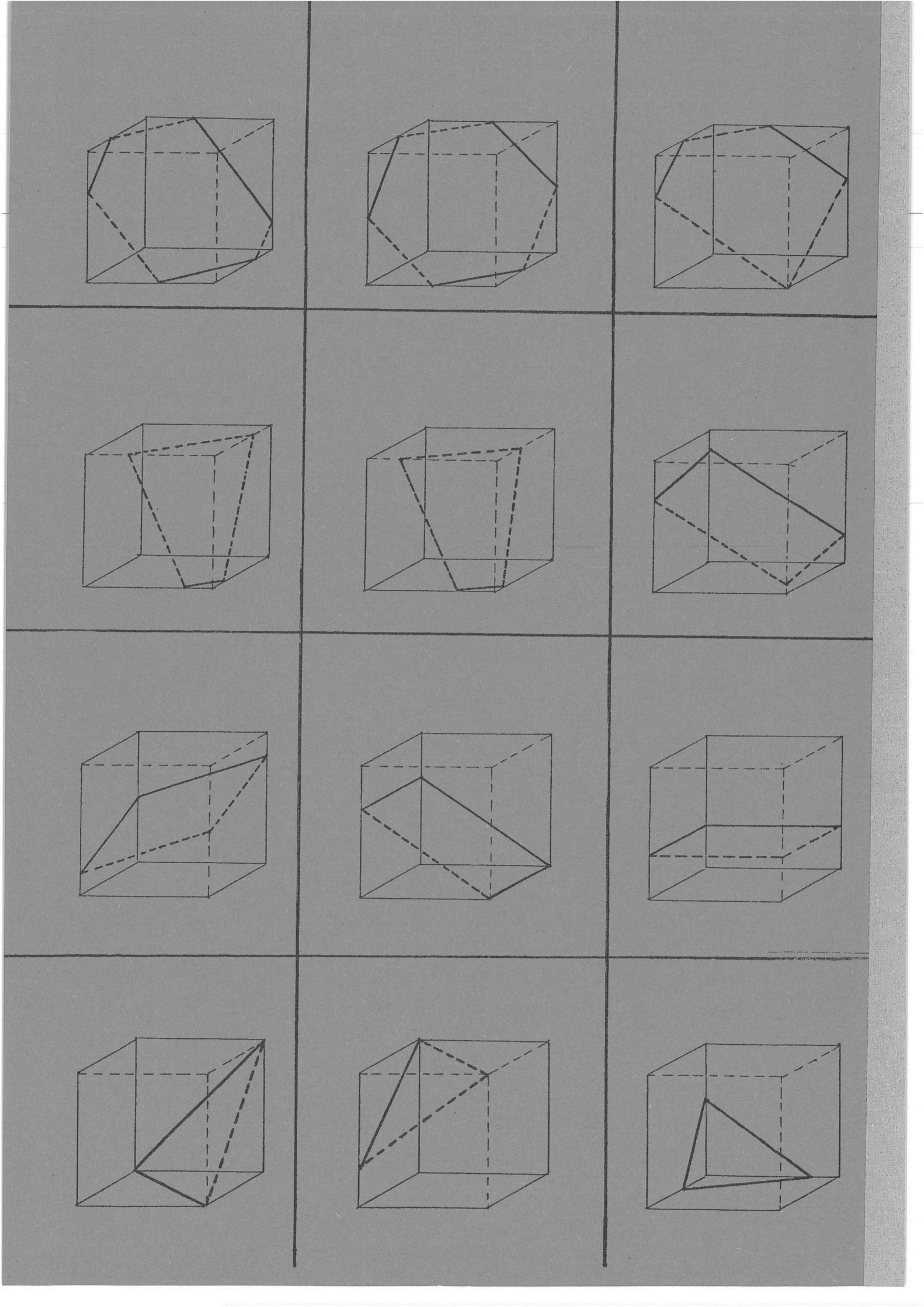
[80] **PAIS L.C., NAUDEILLO J., PELOUZET B.**, 1990 - Les corps ronds. Dans commission Inter-IREM Géométrie, 1990. *Actes du Colloque de Port d'Albret* des 7, 8 et 9 Juin 1990.

[81] **AUDIBERT G.**, 1990a - La géométrie dans l'enseignement obligatoire. Dans commission Inter-IREM Géométrie 1990. *Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie de Port d'Albret* des 7, 8 et 9 Juin 1990.

[82] **PAIS L.C.**, 1990b - Une équipe d'enseignants en situation de recherche. *Actes de la 42ème Rencontre de la CIEAEM* (à paraître).

[83] **BONAFE F.**, 1991 - *La séquence PC : suite pas à pas des travaux des élèves*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 61 pages.

[84] **PAIS L.C.**, 1991 - *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège : pratiques d'élèves, analyse de livres*. Thèse de Doctorat, édition IREM-USTL, 352 pages.

[85] **Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie**, 1991 - *Transformations, compte-rendu d'activités*, édition IREM-USTL, place E. Bataillon Montpellier, 23 pages.

[86] **BASCOU N., BONAFE F., BRUNET R.**, 1992 - *Enseignement modulaire, fascicule 1, classe de Seconde*, édition IREM-USTL, 46 pages.