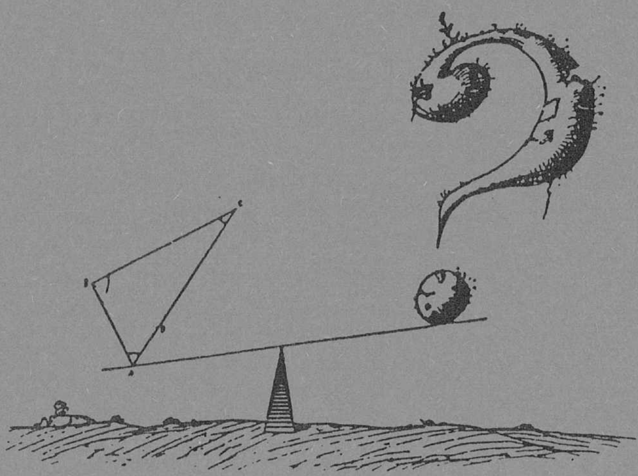
Université des Sciences et Techniques du Languedoc

DIPLÔME D'ETUDES APPROFONDIES
(Didactique des Disciplines Scientifiques)

Soutenu par Luc TROUCHE

Les calculatrices graphiques en lycée:

Statut pour l'élève, statut pour le maître.



Septembre 1992

Université des Sciences et Techniques du Languedoc

DIPLÔME D'ETUDES APPROFONDIES
(Didactique des Disciplines Scientifiques)

Soutenu par Luc TROUCHE

Les calculatrices graphiques en lycée:

Statut pour l'élève, statut pour le maître.

Septembre 1992

Préface

Mes remerciements

- à Sylvette Maury, professeur à l'Université de Montpellier II, qui a guidé ma recherche,

- à Maryse Nogues, Hélène Olivé et Pierre Pomarède, qui ont bien voulu interroger pour moi leurs élèves de classe de première,

- ainsi qu'à Yvon Nouazé et au groupe "Analyse" de l'IREM de Montpellier qui ont accompagné mon travail.

Luc TROUCHE

Préface

à l'édition de 1994

Ce mémoire a maintenant deux ans.

On ne peut pas dire que la situation ait beaucoup évolué depuis : les calculatrices graphiques sont de plus en plus répandues dans les classes de lycées. Et toujours aussi peu exploitées dans les cours.

On peut même hasarder l'hypothèse que la nouvelle génération de calculatrice (faisant du "calcul formel") arrivera dans les classes avant que la génération précédente ne soit intégrée dans le cours de mathématiques...

Ce mémoire reste donc actuel. De nombreux travaux ont été publiés depuis, en particulier par l'équipe "Analyse" de l'IREM de Montpellier. Le lecteur intéressé pourra s'y reporter [1] !

Le 1° Juillet 1994

Luc TROUCHE

---

1 C. FAURE, M. NOGUÈS, Y.NOUAZÉ, L. TROUCHE, 1993, *Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée*, IREM de Montpellier

L. TROUCHE, 1994, *Calculatrices graphiques, le grande illusion*, Repères, Revue des IREM, n°14, Pages 39-55

R.BERNARD, C. FAURE, M. NOGUÈS, Y.NOUAZÉ, L. TROUCHE, Juin 1994, Activités mathématiques en 1° et TS, IREM de Montpellier.

L. TROUCHE, 1994, *Anatomie d'une déréglementation*, Dossiers de l'ingénierie éducative (à paraître) , CNDP.

Sommaire

Les calculatrices graphiques existent, les élèves les ont rencontrées.

Introduction

Ce mémoire se propose d'étudier les rapports que professeurs et élèves entretiennent avec les calculatrices graphiques.

Pratiquement inconnues des programmes et manuels officiels, négligées dans l'enseignement par les pratiques professionnelles des professeurs, elles sont cependant de plus en plus répandues dans les classes de second cycle, et de plus en plus utilisées par les élèves (cf graphique 2 page 4).

Cette étude, pour cerner au mieux son objet, se situera au niveau des classes de 1° Scientifique des lycées, et à partir d'un thème précis: l'utilisation des calculatrices graphiques pour l'étude des fonctions.

Dans un premier temps, on étudiera le statut de ces objets, à partir des résultats de questionnaires diffusés l'un auprès des professeurs, l'autre auprès des élèves de 1°S de lycées de la région de Montpellier,, puis à partir des programmes et de leur évolution. On tentera de valider l'hypothèse suivante: les calculatrices graphiques ne sont pas des objets d'étude, ni des outils, pour les professeurs. Par contre, pour les élèves, ce sont des outils de travail au même titre que le livre de math ou le cahier de cours.

Dans un deuxième temps, à partir de travaux réalisés par une même classe[1] pendant 3 séquences d'une heure, on montrera que les domaines "utilisation de la machine" et "utilisation du cours" sont relativement étanches pour les élèves.

Enfin on concluera cette étude sur quelques pistes: on insistera en particulier sur l'importance des travaux dont la réalisation nécessite l'articulation de l'étude théorique et de l'observation graphique.

---

[1] L'enquête élèves a été réalisée auprés des 62 élèves de trois 1°S possédant une calculatrice graphique, l'enquête professeurs a été réalisée auprès de 32 professeurs de 1°S de lycées de la région de Montpellier, les travaux élèves ont été observés dans la classe de l'auteur.

1

Enquêtes et filatures...

1A / Enquête auprès des professeurs de mathématiques en 1°S

Quelles sont les conceptions[1] des professeurs de 1°S relatives aux calculatrices graphiques? Pour disposer de réponses fiables à cette question, il était important de réaliser deux conditions:

- Interroger tous les professeurs de 1°S d'un certain nombre de lycées, pour éviter de ne recueillir que les réponses des enseignants particulièrement motivés. Pour ce faire, 8 lycées ont été choisis, dans lesquels des professeurs ont accepté de diffuser les questionnaires, et de les récolter...

- Proposer un questionnaire portant sur un thème plus large que sur les seules calculatrices graphiques, pour limiter l'effet inducteur de questions trop précisément ciblées. Le thème de "l'enseignement de l'analyse en 1°S" a été choisi.

TABLEAU I
Nombre de réponses de professeurs par lycées.

Lycée	Nb de profs concernés	Nb de réponses	%
Joffre	11	8	73%
Jean Monnet	6	3	50%
Clémenceau	7	7	100%
La Merci	4	3	75%
Louis Feuillade	6	6	100%
Loubatière	2	2	100%
Chaptal	4	3	75%
TOTAL	40	32	80%

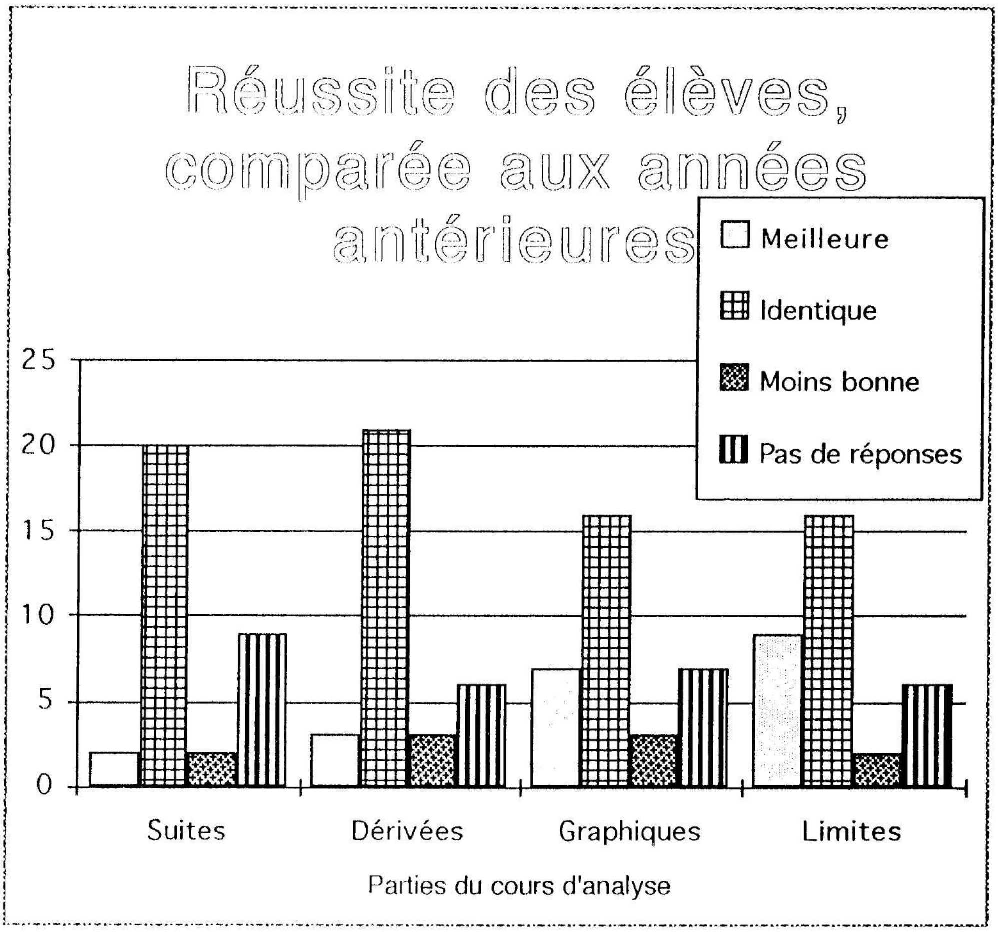
On peut ainsi considérer que le nombre de réponses par établissement est significatif.

[1] On utilise ici ce mot dans son sens "courant"

Précisons que les 8 refus de réponse s'expliquent pour moitié par l'inexpérience de collègues (CPR, ou nouvellement nommés en lycée), et pour moitié par "principe" (surcroit de travail, refus de livrer ses conceptions pédagogiques, etc...)

On lira en annexe 1 page 44 l'intégralité du questionnaire, et en annexe 2 page 46 un tableau récapitulatif des principaux résultats.

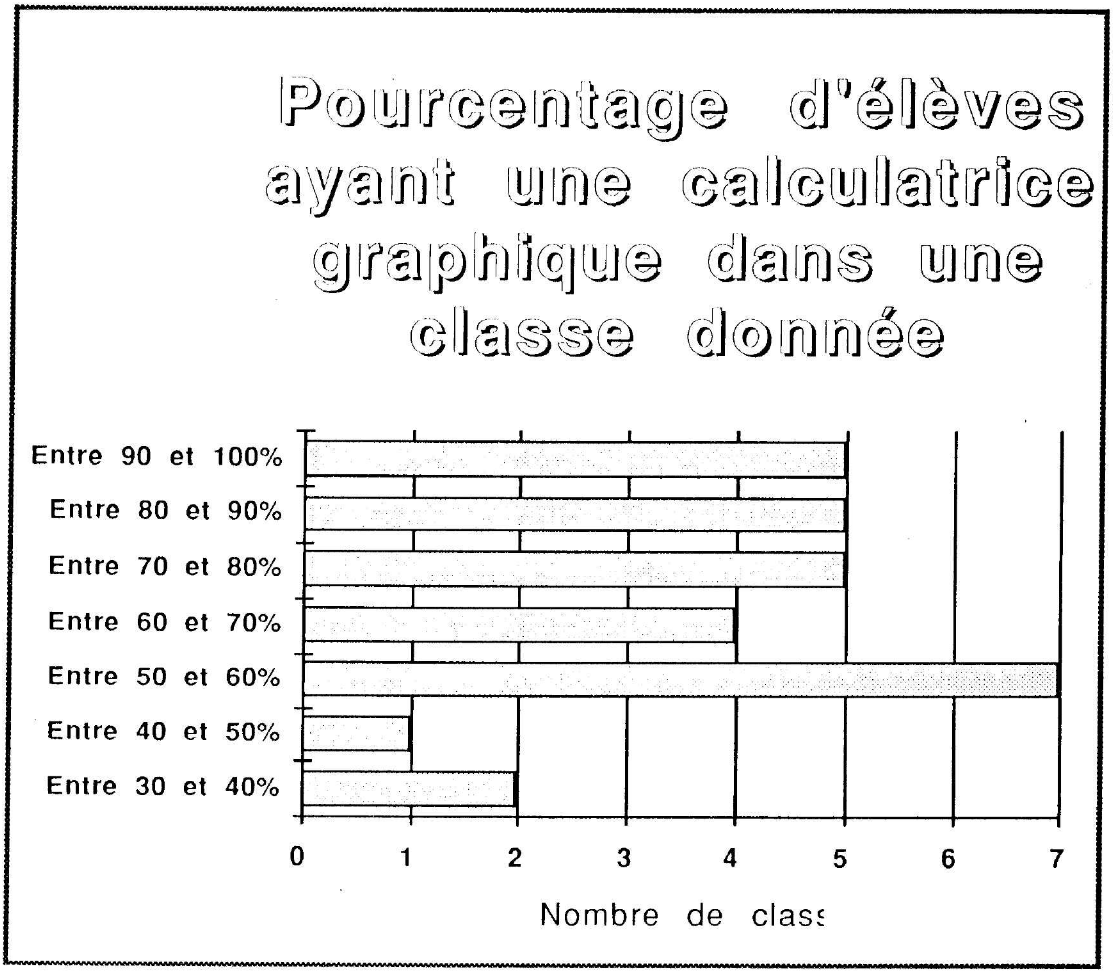
Première observation: les professeurs jugent dans leur majorité la réussite de leurs élèves en analyse identique aux années précédentes. A la question Q10: "*Les élèves de 1°S jugent depuis la 6° un nouveau programme en mathématiques. Comment jugez-vous leur réussite en analyse, comparée aux années antérieures?*", les réponses se répartissent comme suit:



Graphique 1 (32 réponses)
Réponses à la question Q10

Les réponses sont sensiblement les mêmes sur les différents chapitres du cours d'analyse. Cela va à l'encontre de certains préjugés ("le niveau baisse...") et traduit peut-être aussi un certain accord des professeurs avec le programme d'analyse: 25 professeurs (contre 6) trouvent ce programme équilibré, 28 professeurs (contre 4) pensent achever ce programme à la fin de l'année (Questions Q30 et Q50).

<u>Deuxième observation:</u> les calculatrices graphiques sont très répandues maintenant. 29 professeurs ont répondu à la question Q60: "*Quel pourcentage d'élèves de votre classe possède-t-il une calculatrice graphique?*". Le pourcentage moyen est de 69%. Précisons tout de même que le questionnaire a été rempli au mois de Mai. Il semble en effet que la plus grande partie des élèves acquiert une calculatrice graphique dans le courant de l'année de 1°S.Plus précisément, les réponses se répartissent comme suit:



<u>Graphique 2 (32 réponses)</u>
<u>Réponse à la question Q60</u>

A propos de ces résultats, il faut signaler que plusieurs professeurs ont été surpris par le résultat du comptage des calculatrices graphiques dans leur propre classe. On trouve ainsi dans 3 questionnaires des commentaires accompagnant la réponse à la question Q60, du type: "Je pensais qu'il y avait environ 50% de mes élèves qui avaient une calculatrice graphique. Il s'avère, après comptage, qu'il y en a plus ..." . Ces remarques semblent significatives d'une sous-estimation par les professeurs du nombre de calculatrices graphiques possédées par leurs élèves.

Les professeurs interviennent-ils dans l'achat des calculatrices de leurs élèves voir questions Q21 à Q27) ? Dans leur grande majorité, les professeurs donnent des <u>conseils</u> pour l'achat d'une calculatrice programmable, et dans une moindre mesure pour une calculatrice graphique. Mais ce n'est qu'une minorité (12) qui suggère un modèle particulier, et il n'y a plus que 6 professeurs qui donnent des *consignes* pour l'achat d'un tel modèle. Notons aussi que, si le type de calculatrice(s) conseillée(s) fait l'objet parfois d'une concertation des professeurs de mathématiques (lycées de Lunel, Joffre et Clémenceau), cela n'a jamais été le cas avec les professeurs de physique.[1]

TABLEAU II
Conseils des professeurs à leurs élèves pour l'achat d'une calculatrice
Réponses aux questions Q21, Q22, Q23, Q24, Q25, Q26 Q27

	Oui		Non		Pas de rép.		Total	
Avez-vous donné des conseils?	29	91%	3	9%	0	0%	32	100%
Des consignes ?	6	19%	21	66%	5	15%	32	100%
En lien avec les profs de math ?	15	47%	9	28%	8	25%	32	100%
De physique ?	0	0%	19	59%	13	41%	32	100%
Pour une calculatrice programmable?	26	81%	3	9%	3	10%	32	100%
Pour une calculatrice graphique ?	21	66%	7	22%	4	12%	32	100%
Pour un modèle particulier ?	12	38%	15	47%	5	15%	32	100%

On peut déjà conclure que le fait de ne pas donner de consignes claires pour l'achat d'une calculatrice (à l'inverse de ce qui se passe pour les manuels scolaires par exemple) donne à celles-ci un statut très particulier, et que vont cohabiter dans les classes des modèles très divers, ce qui rendra très difficile un apprentissage collectif.

Ce point de vue est confirmé par le graphique de la page suivante, où sont synthétisées les réponses aux questions Q20 et Q40: *"Donnez vous à vos élèves des conseils pour l'achat d'une calculatrice, pour l'apprentissage de son maniement, pour l'aspect programmation, pour l'aspect graphique ?"*.

Seuls 19 professeurs ont consacré des séances spécifiques (en moyenne 2h30 pour l'année) pour l'apprentissage des calculatrices. Ceux qui l'ont fait l'ont tous fait pour l'aspect programmation, et seulement 8 pour l'aspect graphique.

Parmi ceux qui ont justifié de ne pas s'interesser à l'aspect graphique[2] , on trouve trois types d'argumentation:

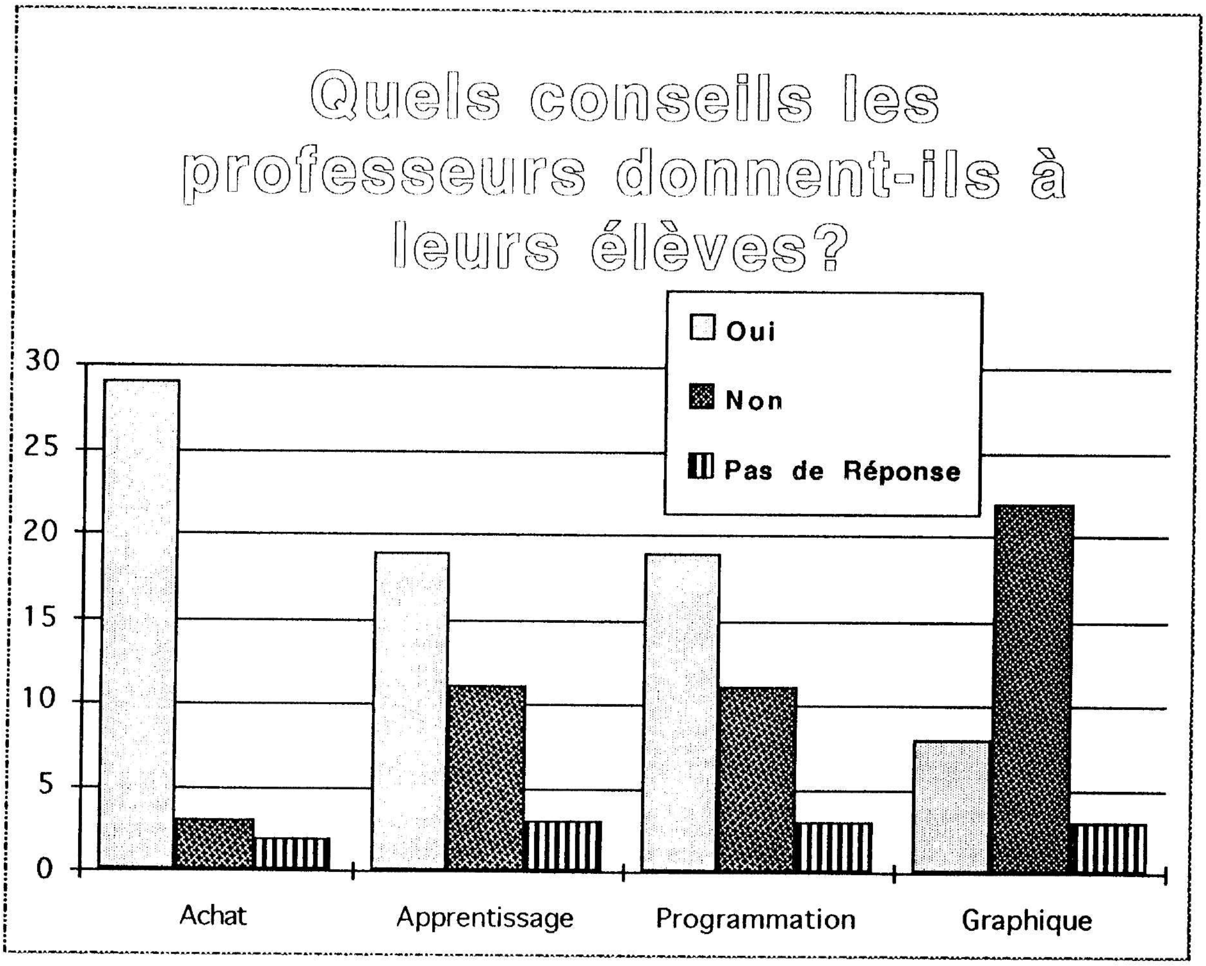
- ce n'est pas au programme

[1] Il faut bien évidemment tenir compte des objectifs fixés par les programmes (voir chapitre 1C) pour interpréter aussi bien les résultats du Tableau II que du graphique 3.

[2] Il s'agit d'observations qui ont été portées parfois dans la marge du questionnaire, ou de remarques orales qui ont été recueillies par l'auteur auprès des collègues de son lycée (Joffre) qui ont rempli le questionnaire.

- tous les élèves n'ont pas de calculatrice graphique

- l'aspect graphique ne nécessite aucun apprentissage spécifique (argument le plus souvent évoqué).



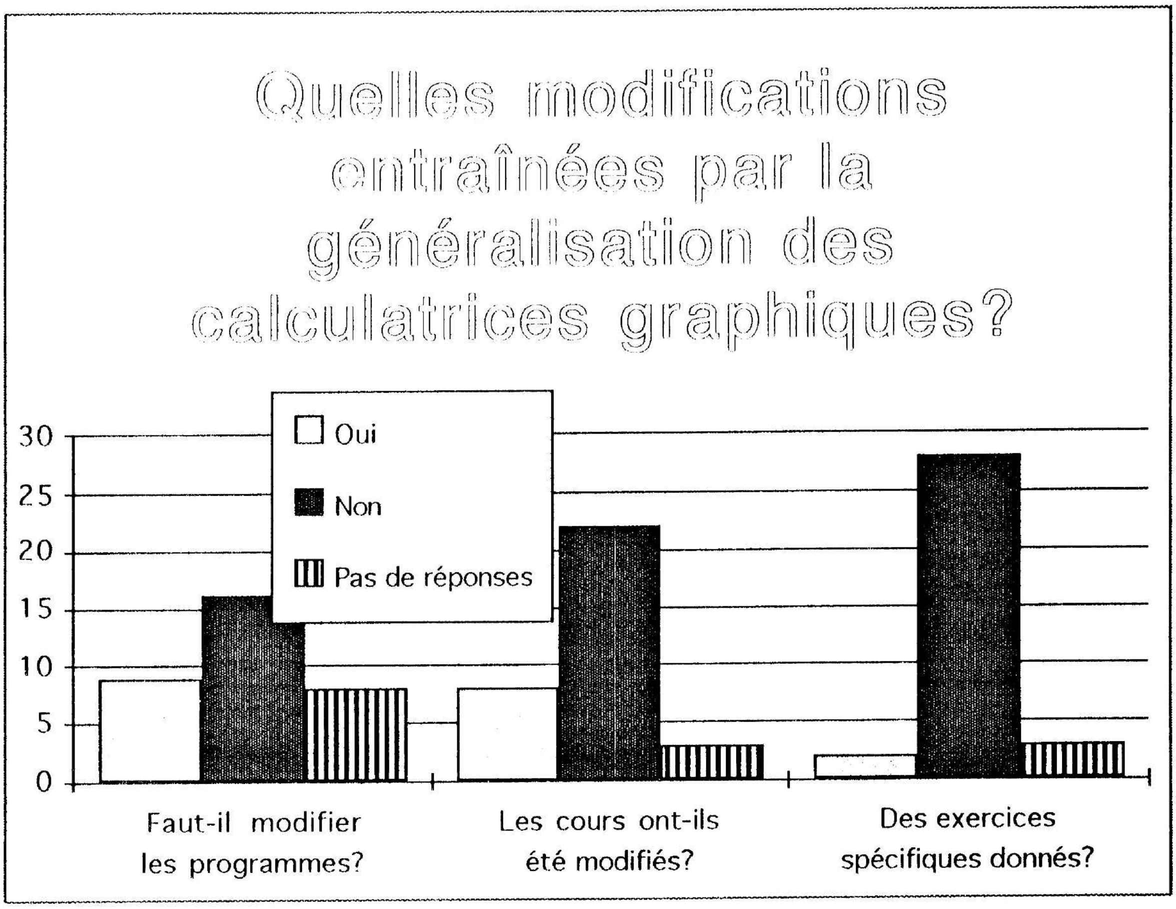
Graphique 3 (32 réponses)
Réponses aux questions Q21, Q40, Q43, Q44

En fait, il semble bien s'agir d'une indifférence assez générale à l'objet calculatrice graphique. Ainsi 30 professeurs, sur 32, autorisent-ils la calculatrice graphique à tous les contrôles (question Q62), ce qui semble indiquer que, pour eux, la possession de cet objet ne constitue pas une discrimination particulière[1] .

Ce qui fait que la généralisation des calculatrices graphiques n'entraîne pour la majorité des professeurs que peu de conséquences: ils sont seulement 9 à penser que les programmes devraient être modifiés, seulement 8 à avoir modifié leur enseignement des fonctions, seulement 2 à avoir donné des exercices spécifiques utilisant les calculatrices graphiques (voir graphique ci-dessous).

[1] Une expérimentation - non analysée ici - menée dans la classe de 1^reS de l'auteur indique pourtant que les résultats d'un même élève peuvent differer sensiblement suivant qu'il peut, ou non, utiliser une calculatrice graphique.

On peut faire un parallèle avec les réactions des enseignants face à l'introduction des ordinateurs à l'école. Pour Alex Mucchielli[1], la typologie des attitudes des enseignants face à l'introduction , dans leur établissement, de l'ordinateur, peut se résumer ainsi: un tiers d'"appréciateurs", un tiers de "fugitifs", un tiers de "réfractaires". C'est bien ce qu'il apparaît face à la généralisation des calculatrices graphiques. Et là, la situation échappe encore plus à l'enseignant: c'est lui qui décidait d'utiliser, ou non, l'ordinateur dans le lycée. Mais c'est l'élève qui a la "maitrise" de sa calculatrice de poche.



Graphique 4 (32 réponses)
Réponses aux questions Q70, Q64, Q66

Cette réserve est confirmée par la réponse à la question Q62:"*Les élèves ayant une calculatrice graphique ont-ils, quant à l'étude des fonctions, une meilleure performance que les autres élèves ?*" (voir graphique page suivante): seuls 7 professeurs le pensent.

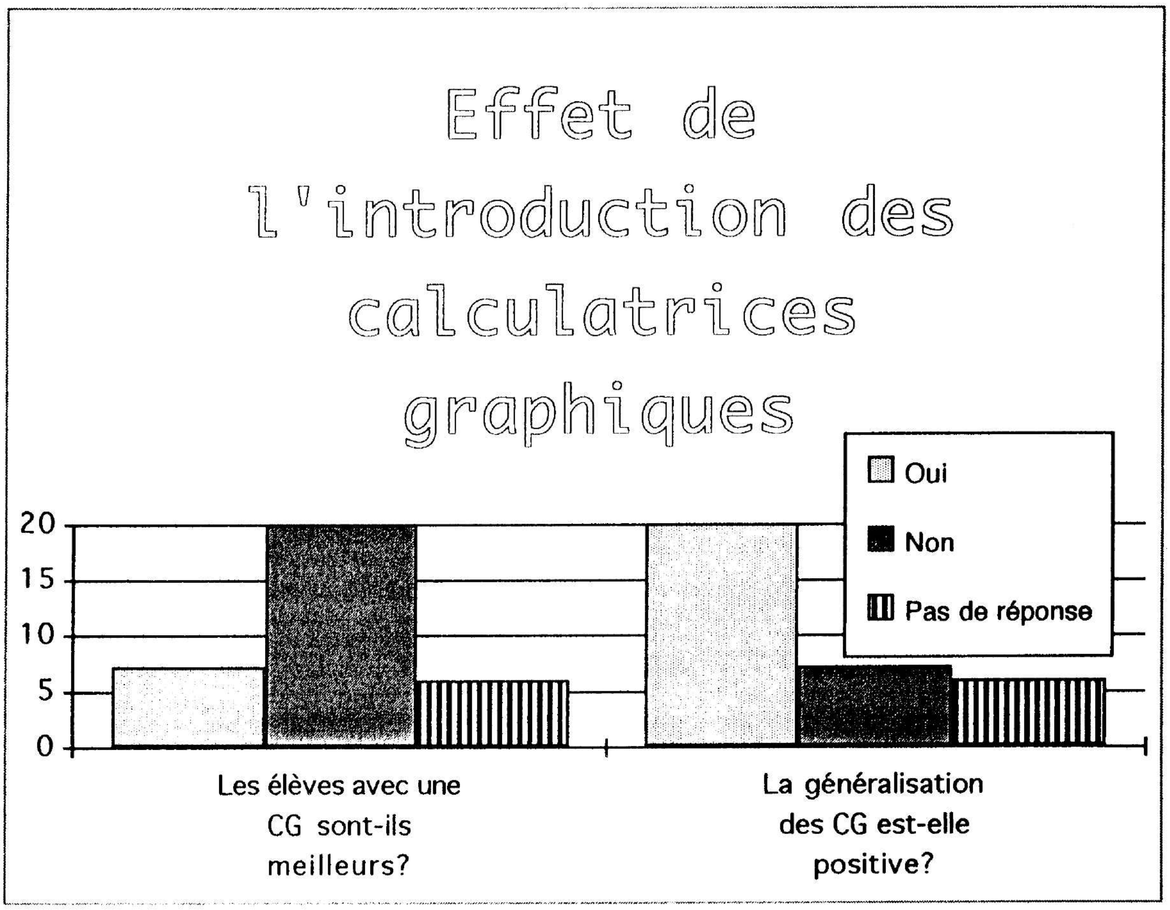
L'ensemble de ces résultats semble valider l'hypothèse de départ: les calculatrices graphiques ne sont pas des objets d'étude, ni des outils, pour les professeurs.

Un élément vient cependant nuancer cette constatation: à la question Q68 "*Pensez vous que la généralisation des calculatrices graphiques soit positive pour*

[1] MUCCHIELLI Alex, 1987, *L'enseignement par ordinateur*, Paris PUF.

l'enseignement des fonctions? ", une grande majorité des professeurs intérrogés répond oui (voir aussi graphique suivant).

L'exact renversement des réponses à ces deux dernières questions, bien visible sur le graphique ci-dessous, peut laisser perplexe... Il me semble significatif d'une période de transition, où interviennent à la fois la résistance aux changements, et l'aspiration à travailler différemment, et mieux, avec des outils nouveaux.



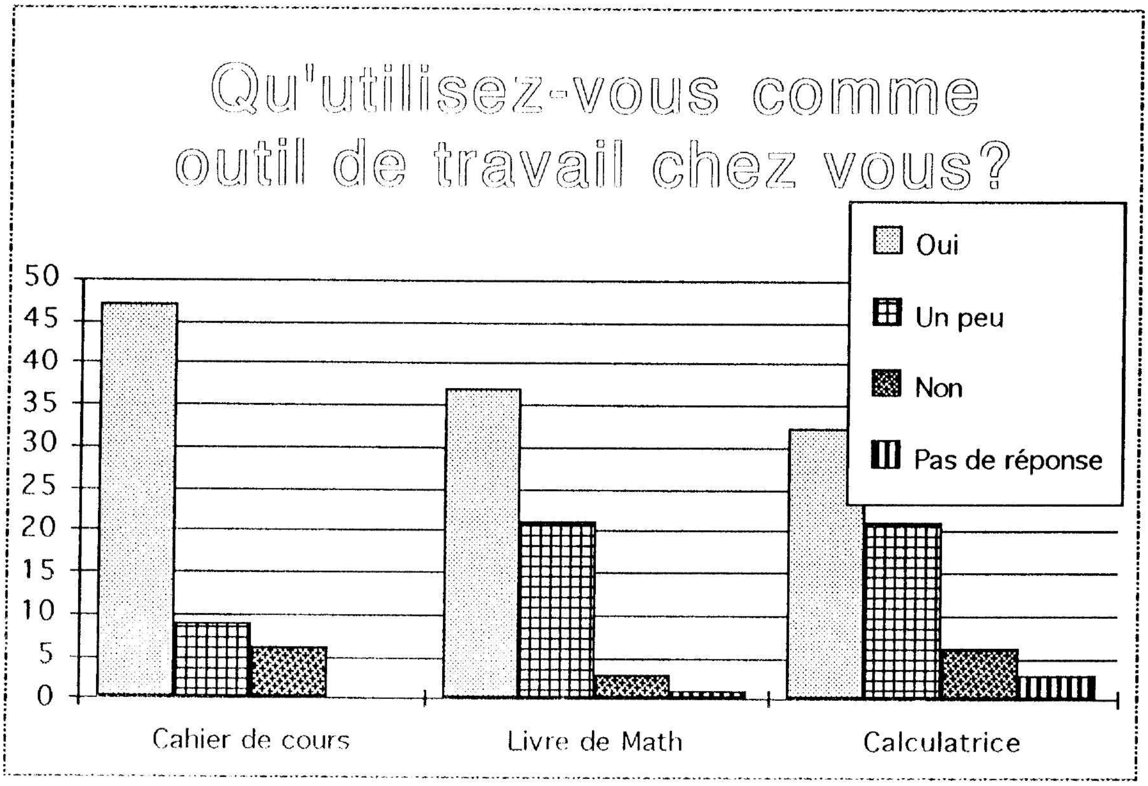
Graphique 5 (32 réponses)
Réponses aux questions Q62 et Q68

1B/ Enquête auprès des élèves de 1°S

Pour confronter les conceptions des professeurs et les conceptions des élèves relatives aux calculatrices graphiques, un questionnaire (cf annexe 3) a été diffusé à tous les élèves de trois 1°S possédant une calculatrice graphique, soit un total de 62 élèves.

Les classes ont été choisies après le dépouillement des 32 questionnaires "profs", ce qui a permis de selectionner, du point de vue du rapport avec la calculatrice, des profils à peu près "moyens" (de 2 à 3 heures d'apprentissage)[1] . Quel est le point de vue des élèves sur leur calculatrice ?

Un outil important : A la question Q40(" *Qu'utilisez-vous comme outil de travail chez vous?* "), les élèves avaient comme réponse possible: Le cahier de cours, le livre de math, la calculatrice, ou autre. Dix élèves ont coché la case " autre", en indiquant des recueils d'exercices corrigés (4), la télévision (3), les livres de math des classes antérieures (1), les outils géométriques -compas, équerre- (1)... et la matière grise (1).



Graphique 6 (62 réponses)
Réponses à la question Q40

[1] Un autre choix aurait été possible: étudier des questionnaires d'élèves issus de classes très différentes du point de vue de l'apprentissage des calculatrices. Ce pourra être l'objet d'une étude ultérieure...

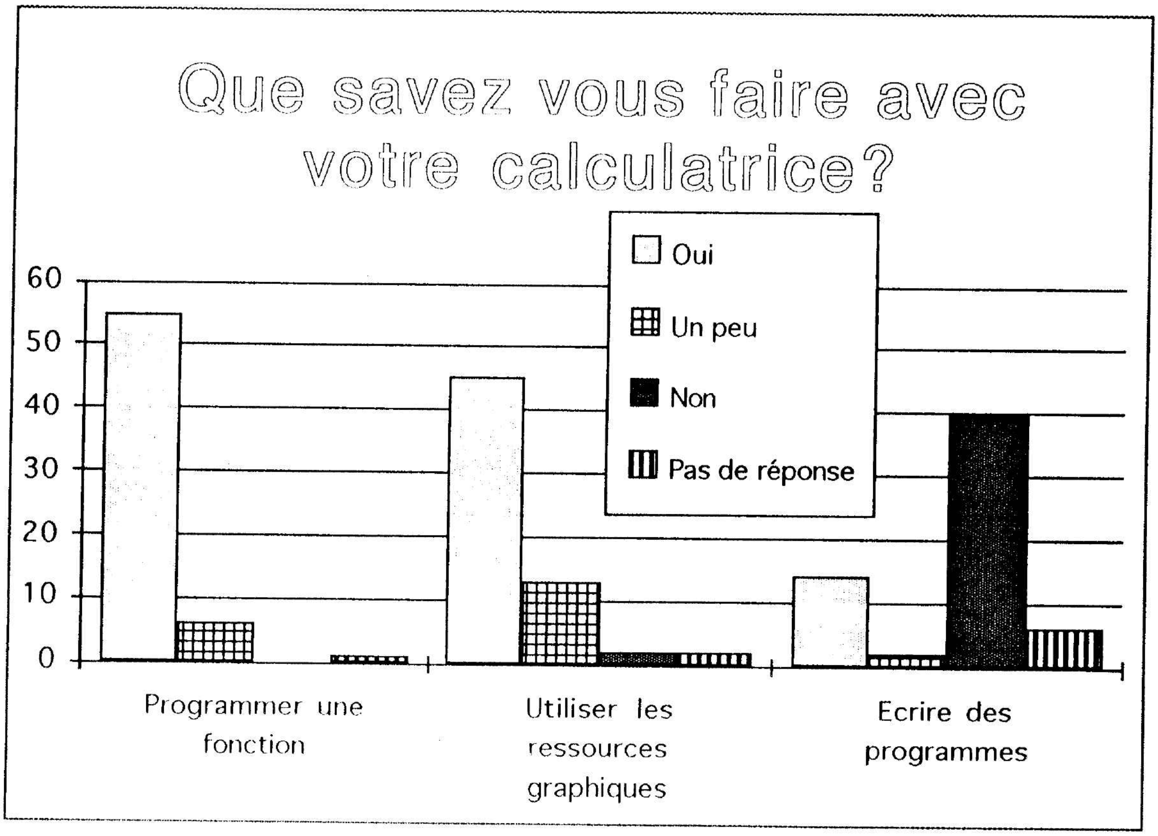
De ce graphique, il ressort que la calculatrice est perçue comme outil de travail par 55 élèves sur 62, une proportion à peu près équivalente aux résultats concernant le livre de mathématiques. C'est un résultat interessant (Il aurait fallu cependant préciser ce que les élèves entendent par "outil de travail"...) . Ce résultat n'en demeure pas moins significatif de l'importance prise par la calculatrice graphique dans le travail personnel des élèves.

L'aspect graphique domine: A la question Q10 (" *Que trouvez-vous plus utile sur votre calculatrice, l'aspect graphique ? L'aspect programmation ?"),* les réponses se répartissent comme suit:

TABLEAU III
Que trouvez-vous plus utile sur votre calculatrice ?
(Réponse à la question Q10)

L'aspect graphique		L'aspect programme		Les deux		Pas de réponse	
31	50%	10	16%	10	16%	11	18%

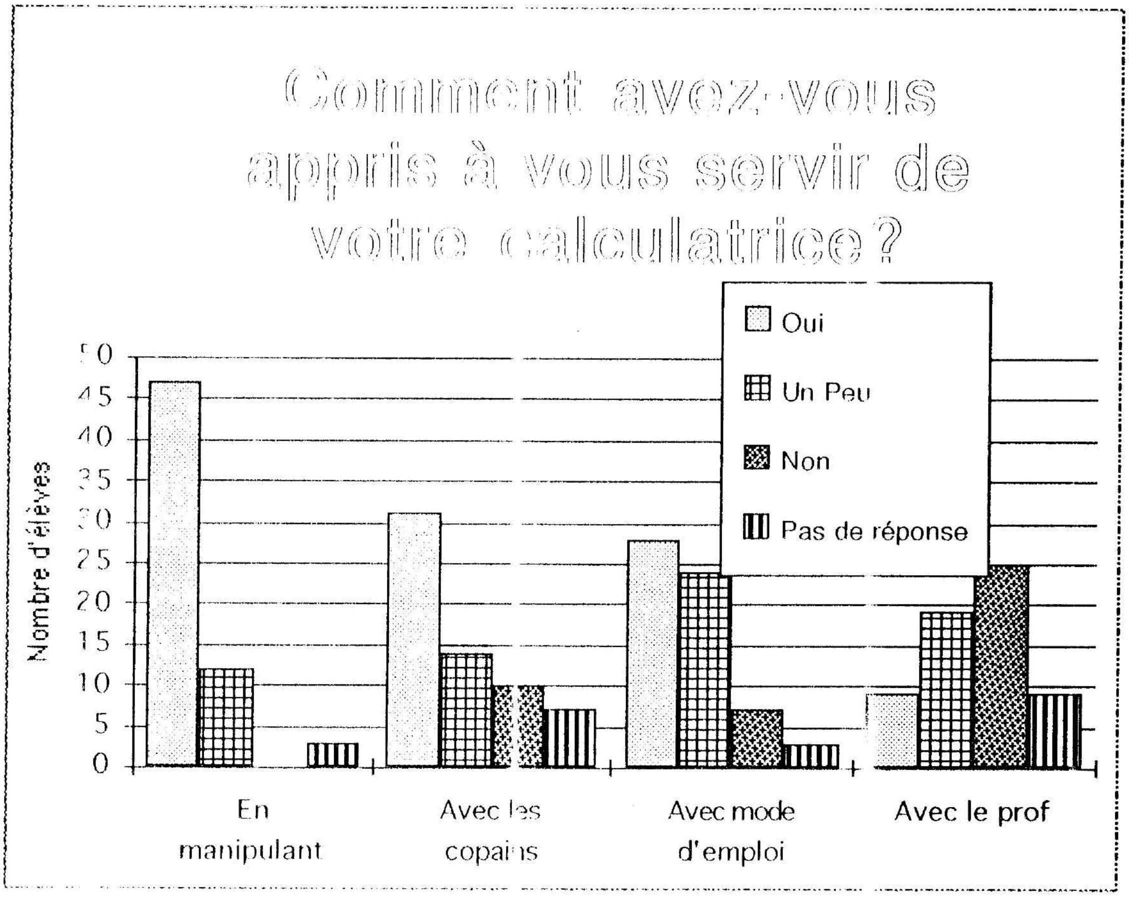
Cet aspect graphique dominant doit être mis en relation avec les réponses à la question Q20 ("*Que savez-vous faire avec votre calculatrice?*").



Graphique 7 (62 réponses)
Réponse à la question Q20

Par programmer une fonction, les élèves entendent enregistrer son expression algébrique pour calculer "automatiquement des valeurs,ou pour faire apparaître sa "représentation graphique" à l'écran. Par utiliser les ressources graphiques, les élèves entendent utiliser les options "zoom", "trace"... Les élèves déclarant savoir écrire des programmes devaient indiquer lesquels. Ils citent: des jeux (8), stockage de formules (4), résolution des équations du 2° degré (4), étude des suites (2), étude statistique (2). Il reste que la grande majorité des élèves déclare ne pas savoir écrire des programmes sur sa calculatrice (autres que la simple écriture d'une fonction). Pour les élèves, les calculatrices programmables graphiques sont en fait des calculatrices graphiques.

Un apprentissage indépendant du professeur : Il y a une cohérence entre les réponses des professeurs et les réponses des élèves. Pour les professeurs, l'aspect graphique des calculatrices ne nécessite aucun apprentissage spécifique; pour les élèves, cet aspect est dominant: il est donc naturel que les élèves déclarent avoir appris à se servir de leur calculatrice sans l'aide de leur professeur (Question Q30)



Graphique 8 (62 réponses)

On peut noter que cet apprentissage est largement social, entre pairs. Le professeur y est en général extérieur. Cela va rejaillir sur le statut de la calculatrice pour les élèves.

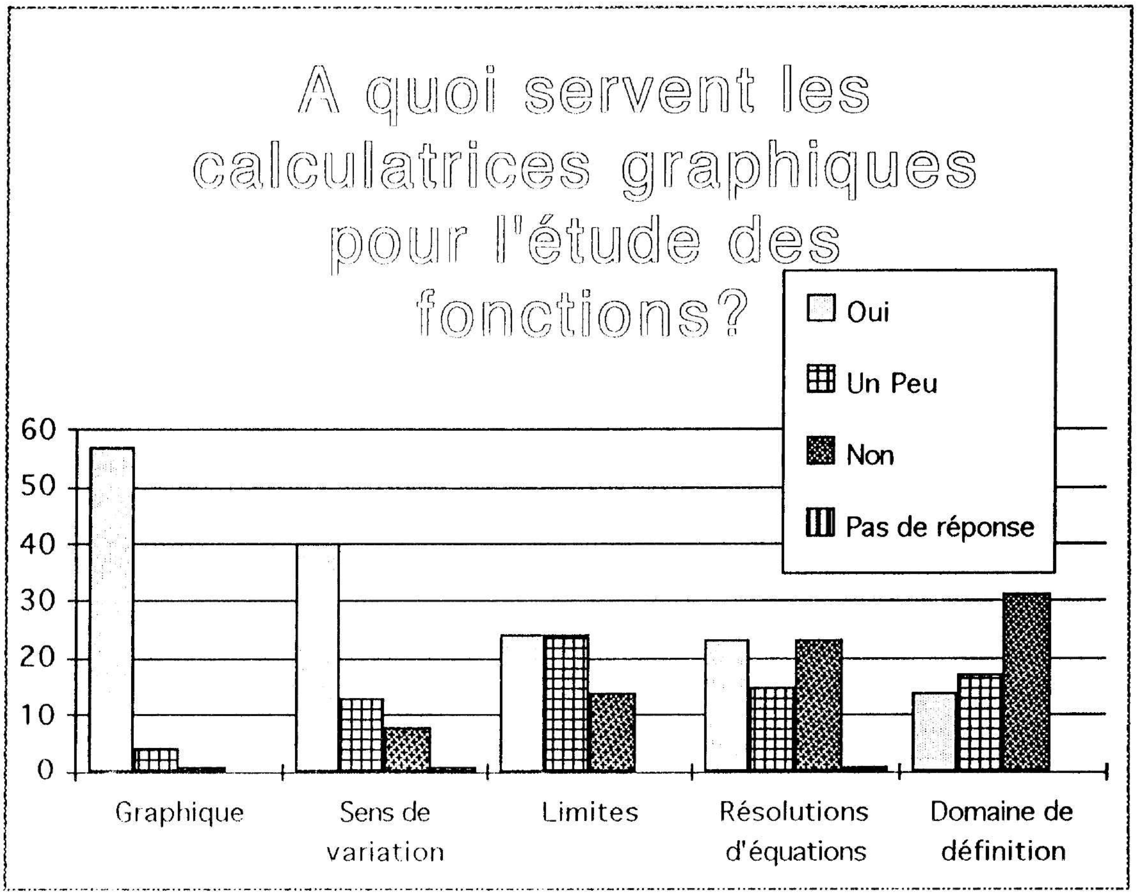
Un outil "inavouable": Une calculatrice sert-elle à prévoir, ou vérifier, un graphique ? (Q70) Les élèves répondent:

TABLEAU IV
Réponse à la question 70
Pour l'étude d'une fonction, votre calculatrice vous permet plutôt de:

	Oui		Un peu		Non	
Prévoir le graphique	35	56%	17	27%	6	10%
Vérifier le graphique	52	84%	6	19%	2	3%

Quelle conclusion tirer de ces résultats ? Pour les élèves, prévoir le graphique signifie afficher la représentation graphique de la fonction sur l'écran avant l'étude de la fonction, vérifier signifie le faire après. Il est remarquable que 23 élèves (17+6) déclarent n'utiliser leur calculatrice que peu ou pas du tout pour prévoir un graphique, alors que tous, à la question Q50 (" *Dans quel ordre étudiez-vous une fonction?* ") placent l'affichage du graphique sur la calculatrice en premier. Pour un élève sur trois, il ne paraît donc pas mathématiquement convenable de dire que la calculatrice a un rôle prédictif,... même si, dans la pratique, il l'utilise ainsi.

Un outil à l'utilisation circonscrite:

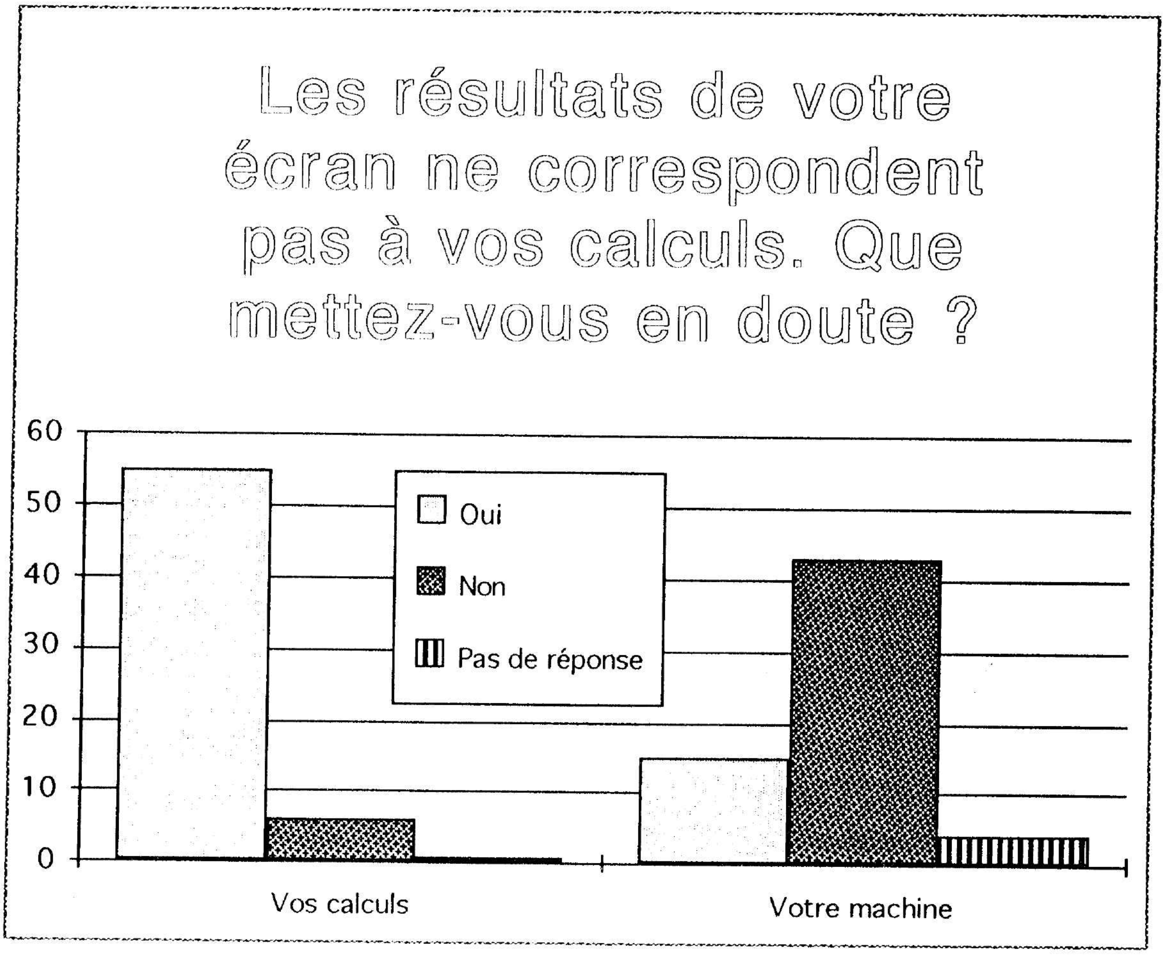


Graphique 9 (62 réponses)
Réponses à la question Q60

Il est clair qu'en dehors de la seule construction des graphiques, la calculatrice graphique n'apparaît vraiment utile que pour une minorité d'élèves.

La question Q60, dont les résultats sont présentés ci-dessus, comportait une 6°option ouverte: "autre utilisation possible de la calculatrice graphique". Aucun élève ne l'a utilisée. La calculatrice graphique apparaît bien comme un outil à l'utilisation circonscrite, mais essentiel pour l'étude des fonctions. Ce point de vue est confirmé aussi bien par les résultats de la question Q5 (l'étude d'une fonction commence par l'observation de son graphique sur l'écran) que par ceux de la dernière question (Q11) très vague dans sa formulation: "*Que savez-vous faire avec votre calculatrice graphique?*". 45 élèves ont répondu à cette question. 37 d'entre eux mentionnent le travail direct sur les représentations graphiques de fonction (aggrandissement par la touche zoom, déplacement d'un point sur la courbe); 10 d'entre eux précisent des objectifs précis pour ces manipulations (détermination d'extrémas, recherche de limites, d'asymptotes...); 3 évoquent la construction d'histogrammes; 10 utilisent leur machine pour des jeux. Et 12 comme aide mémoire. Dix élèves estiment qu'ils sous-emploient leur machine:" je sais faire pas assez de chose, à mon avis..."

Un outil relativement fiable: A la question Q80 ("*Si les résultats affichés sur votre écran ne correspondent pas à vos calculs, que mettez-vous plutôt en doute: vos calculs? Les performances de votre machine?*"), les élèves répondent comme suit:



Graphique 10 (62 réponses)
Réponse à la question Q80

Il est à noter que parmi les 15 élèves qui remettent en cause les performances de la machine, 10 remettent aussi en cause leurs propres calculs. C'est à dire qu'il n'y a que 5 élèves qui remettent en cause leur machine, et pas leurs calculs. Ces résultats sont compatibles avec l'hypothèse que la machine est plutôt fiable pour les élèves.

Cette confiance est, paradoxalement, confirmée par les réponses à la question Q100 (*"Une fonction est-elle représentée fidèlement par une calculatrice graphique?")*: celles-ci se répartissent en 22 OUI, 33 NON, et 7 "non réponse". Mais ce sont les arguments des uns et des autres qui doivent être examinés avec attention:

- ceux qui répondent OUI sont en général formels: "Oui, c'est fait pour ça", "Oui, car nous copions la machine", "oui, parce qu'elle est très forte..." ou ne donnent aucun argument.

- parmi ceux qui répondent NON, 20 remettent en fait en cause l'utilisateur et non la machine: pour 17 élèves, l'"infidélité" de la machine est due à un mauvais choix de la fenêtre d'affichage (le "range"), et pour 3 élèves, cela vient d'une mauvaise rentrée de la fonction elle même (erreur de frappe, oubli des parenthèses...). Seuls 13 élèves remettent en cause les capacités de la machine elle même: pour 10 d'entre eux, cela vient du fait que la machine fait des calculs approchés. Seuls 5 élèves évoquent les limites purement graphiques: "elle respecte mal les courbes", "c'est des cristaux liquides pas très prècis", "la résolution de l'écran n'est pas très précise", "les zones interdites sont affichées avec des traits verticaux, ce qui brouille le dessin", "la calculatrice trace un morceau d'asymptote avec une fonction homographique".

Pour la grande majorité des élèves interrogés, la calculatrice graphique est donc un outil relativement fiable pour l'étude des fonctions. Point de vu confirmé aussi par les réponses à la question Q9 (*"Avez-vous été surpris par certains résultats affichés par votre calculatrice ?")*. 33 élèves répondent OUI, 29 élèves répondent NON. Ceux qui répondent NON ne font évidemment aucun commentaires. Ce sont les commentaires de ceux qui ont été, à l'occasion, surpris par l'écran de leur machine qui nous interessent ici:

- Pour 4 élèves, la surprise venait du "mode degré" choisi pour l'étude des fonctions trigonométriques
- Pour 4 élèves, d'une erreur de programmation
- Pour 7 élèves, d'un mauvais "range" choisi ("le graphe était très serré et donc quasiment illisible")
- Enfin 4 élèves évoquent la présence d'asymptotes non prévues.

Ces surprises remettent plutôt en cause non pas la machine, mais la mauvaise connaissance que l'utilisateur a de celle-ci... Ceci dit, le questionnaire ne permet pas de répondre à la question: en cas de discordance entre la machine et les calculs, que va faire *pratiquement* l'élève ? Ceci sera examiné à partir de travaux d'élèves dans la deuxième partie de ce mémoire.

On ne peut qu'être frappé, en conclusion de ces deux enquêtes, par la différence de statut des calculatrices graphiques pour les professeurs et pour les élèves. Outil marginal pour les uns, outil central pour les autres. Cet éclatement est-il significatif d'une situation transitoire, dans laquelle les élèves s'approprieraient (*à leur manière*) les nouveaux outils- ici les calculatrices graphiques- plus vite que ne le font les professeurs ?

Pour avoir des éléments de réponse, on peut observer le troisième pôle du triangle didactique, celui des contenus à enseigner ou à s'approprier, et ce à partir des programmes, et de leur évolution. Quel est le rôle qui y est assigné aux calculatrices graphiques, et comment évolue-t-il ?

1 C / Du côté des programmes

On fera le choix ici d'étudier l'évolution des programmes d'analyse en Terminale C, de 1966 à 1991. Le choix de la TC est justifié par le fait que cette section est la clef de voute de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire français: ce sont les évolutions à ce niveau qui ont souvent piloté les évolutions ailleurs. Mais surtout cette section a gardé le même statut pendant toute cette période , à l'inverse de la 1°S (issue d'une fusion entre la 1°C et la 1°D) et de la seconde (maintenant indifférenciée). Le choix de la période de 25 ans est justifié car cela couvre exactement la période d'apparition, puis de généralisation, des calculatrices programmables, puis graphiques.

On distinguera 5 étapes, correspondant à 5 changements de programme :

1966: les calculatrices n'existent pas...

Un nouveau programme pour les TC paraît au BO n°26 du 30 Juin 1966. Quelques caractéristiques:

- les représentations graphiques des fonctions ne sont évoquées que de façon marginale, dans le paragraphe *Dérivées* (*"équation de la tangente en un point de la courbe représentative"*), dans le paragraphe *Fonction réciproque* (*"représentation graphique dans un repère cartésien normé"*) et dans le paragraphe *Etude de quelques fonctions numériques* (*"courbe représentative de la fonction logarithme népérien en repère orthonormé", "courbe représentative de la fonction exponentielle de base e"*).

- Dans le paragraphe *Etude de quelques fonctions numériques,* on trouve à la fois les suites et les fonctions log, exp, ...

- Le chapitre *Calcul numérique* est à part, et sans lien avec les représentations graphiques de fonction:

" *Tables numériques. Usage des tables numériques de fonctions usuelles, usage des tables de logarithmes. Notions pratiques sur l'interpolation linéaire. Usage de la règle à calcul. De nombreux exercices de calcul numérique seront faits, à l'occasion de l'étude des fonctions usuelles et à l'occasion de problèmes, pour mettre en application des notions de valeurs approchées, d'encadrement, d'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une erreur.*"

1971: apparition des "machines à calculer de bureau"

Un nouveau programme pour les TC est publié, par arrêté du 14 Mai 1971.

- La représentation graphique des fonctions apparaît maintenant comme tache usuelle, après *l'étude du sens de variation d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.*

- Le chapitre *Exemples de fonction d'une variable réelle* contient toujours à la fois les suites, les fonctions puissances, log, exp...

- Le chapitre *Calcul numérique* est encore à part. Son intitulé est le même qu'en 1966. On y a seulement rajouté: "*Usage de machines à calculer de bureau*"...

1982: généralisation des calculatrices

Un nouveau programme pour les TC est publié au BO du 22 Avril 1982.

- La représentation graphique des fonctions apparaît comme tâche centrale, indiquée en introduction du chapitre *Fonctions numériques: "On entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle* ***important*** *dans la description du comportement; une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsque on passe aux aspects quantitatifs".*

- Il y a séparation du chapitre *Suites numériques* et du chapitre *Fonctions numériques.*

- Il n'y a plus de chapitre spécifique sur le calcul numérique, mais on lit en introduction du programme: *On continuera à utiliser* **largement** *les calculatrices.* ("continuera" s'entend par rapport à la classe de 1°S).On lit encore des références au type de calcul numérique pratiqué antérieurement : *La fonction logarithme décimal sera introduite le plus tôt possible en vue du calcul numérique.* Ce programme apparaît donc largement comme un programme de transition entre le calcul "tables numériques" et le calcul "calculatrice".

1986: Généralisation des calculatrices programmables.

Un nouveau programme pour les TC est publié au BO du 11 Septembre 1986.
- Les représentations graphiques voient leur place renforcée. En introduction, on lit: "*Les représentations graphiques doivent tenir une place* ***très importante*** *dans l'ensemble des parties du programme. Outre leur interêt propre, elles permettent de donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques étudiés; leur mise en oeuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique*". Dans le chapitre sur les fonctions usuelles, on lit: "*Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées*".

- Les allusions à l'utilisation des logarithmes pour le calcul numérique disparaissent. On lit par contre en introduction du programme: "*Les problèmes et méthodes numériques figurant dans les différentes parties du programme doivent être largement exploités: ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à combiner l'expérimentation et le raisonnement en mathématiques et concourrent au développement des qualités de soin et de rigueur. L'emploi* ***systématique*** *des calculatrices vient renforcer les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche.*"

- On notera que, de 1982 à 1986, on passe de **important** à **très important**, de **largement** à **systématiquement**. L'interêt du texte de 1986 est aussi que, pour la première fois, il indique le matériel requis, et les compétences exigibles: " *Les élèves doivent savoir utiliser une* ***calculatrice scientifique programmable. Un modèle de bas de gamme suffit.*** *Cet emploi repose sur les capacités suivantes,* *qui constituent un savoir faire de base et sont seules exigibles: **savoir utiliser les** touches de fonctions qui figurent au programme, **savoir programmer le calcul des** valeurs d'une fonction d'une variable permis par ces touches, savoir programmer le calcul du nième terme d'une suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale".*

- Enfin, pour la première fois, le programme mentionne, dans son introduction, l'outil informatique: " *L'impact de l'informatique doit être **progressivement pris en** compte: il convient d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, **à rédiger des programmes** de manière méthodique, mais aucune capacité n'est exigible des élèves dans ce domaine".* On notera que l'utilisation de l'informatique n'est évoquée que sous l'aspect programmation, et pas du tout pour l'observation graphique.

1991: apparition des calculatrices graphiques

Dans le B0 du 2 Mai 1991 paraissent simultanément les nouveaux programmes de 1°S et de TC. On lit, dans un préambule commun, les mêmes considérants sur l'importance des représentations graphiques, et des problèmes numériques. On lit les mêmes compétences exigibles pour le maniement des calculatrices programmables. Mais il y a aussi des différences notables:

- Première différence: à propos du matériel requis, disparait l'allusion au "modèle bas de gamme". On lit en revanche: " *Il est conseillé de disposer d'un modèle dont les caractéristiques répondent aux spécifications et aux objectifs précédents, et comportant, en vue d'emploi dans les autres disciplines et dans les études supérieures, les fonctions statistiques (à une ou deux variables). **En revanche les écrans graphiques ne sont pas demandés"**.* Les calculatrices graphiques ne sont donc évoquées qu'en négatif...

- Par contre, l'aspect graphique intervient cette fois-ci à propos de l'utilisation de l'informatique: " *Il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements, notamment à travers l'exploitation des systèmes graphiques (écrans, tables traçantes), et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à rédiger des programmes de manière méthodique, mais aucune capacité n'est exigible des élèves dans ce domaine".*

On pourrait prolonger cette étude par une observation fine de l'évolution des manuels scolaires, et des annales du baccalauréat. Mais l'étude des programmes seuls nous permet de tirer déjà quelques conclusions: en 25 ans, le développement de l'outil informatique a profondément modifié le statut du calcul numérique et des représentations graphiques des fonctions.

- De catégorie à part, le calcul numérique est passé à une catégorie constitutive de l'ensemble des chapitres du cours d'analyse, et on dispose, avec les calculatrices programmables, de l'outil adéquat, reconnu par le progamme officiel, pour le pratiquer.

- D'un chapitre général sur les fonctions numériques (où on trouvait à la fois les suites, les fonctions numériques, les fonctions vectorielles, et où les problèmes des courbes représentatives se posaient peu...), on est passé à un chapitre spécifique sur les fonctions numériques réelles à variable réelle, où la place des représentations graphiques est présentée comme centrale. Et c'est là qu'apparaît le paradoxe: alors que l'outil d'étude des représentations graphiques existe (les calculatrices graphiques), il n'est pas reconnu par les textes officiels. Et on présente comme solution de remplacement l'utilisation de l'outil informatique dont on connait la lourdeur d'utilisation.

Cette situation me semble significative d'un double point de vu :

- Significative d'un retard du système éducatif sur l'évolution de la société

- Significative aussi d'un certain mépris du système éducatif pour les "outils d'enseignement". On peut ainsi élaborer de nouveaux programmes sans réellement poser le problème des outils utiles à leur application.

Les calculatrices graphiques apparaissent donc comme un outil marginal. Ainsi s'explique sans doute le nombre extrêmement restreint des documents relatifs à leur utilisation[1] . On lit même dans une brochure de l'IUFM de Grenoble[2] la phrase extraordinaire suivante: "Les textes relatifs à l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement sont devenus rares ces dernières années"... Et cette brochure ne cite, à propos de l'utilisation des calculatrices graphiques en lycée, que 2 références...Cette situation explique tout à fait la différence de statut des calculatrices graphiques pour les élèves et pour le maître, révélée par les deux enquêtes étudiées dans les deux chapitres précédents.

Mais ceci va avoir des conséquences sur la construction des concepts en cause. Ainsi Suzanne Nadot [3] écrit-elle, dans une thèse relative aux représentations graphiques : " La compréhension, à travers le shéma, n'est pas évidente, pouvant même conduire à une construction erronée des concepts visés (...) Une lecture correcte ne peut se faire qu'à partir d'un ensemble de notions préalables (...) Une bonne utilisation de ces dernières demanderait un apprentissage propre."

On est précisément, avec les calculatrices graphiques, dans une situation où l'élève est confronté à une abondance de shémas, sans apprentissage propre...

Quelles en sont les conséquences, c'est ce que nous allons observer dans le chapitre suivant.

---

[1] Je ne comptabilise pas dans ces documents les modes d'emploi des calculatrices qui sont souvent totalement hermétiques...

[2] IUFM Mathématiques Grenoble, Mars 1992, *Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée* , publié par l'IREM de Paris 7

[3] NADOT Suzanne, 1991, *Représentations graphiques et études de fonctions, les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère,* Thèse de Doctorat, Université René Descartes.

2

Observations des travaux des élèves

On se propose d'analyser dans ce chapitre l'utilisation que les élèves font de leur calculatrice graphique, à l'occasion de trois activités, toutes observées dans la 1°S de l'auteur pendant le mois d'Avril 1992 au lycée Joffre de Montpellier. Quelques précisions utiles:

- Aucun apprentissage particulier n'avait été organisé dans ces deux classes, concernant l'utilisation graphique de la calculatrice. Les élèves, conformément au programme de ces classes, savent simplement "programmer une fonction", pour obtenir les images de nombres donnés.
- Il a été bien précisé aux élèves que les travaux réalisés par eux ne seraient pas notés, qu'ils entraient dans le cadre d'études universitaires sur l'utilisation des calculatrices. Il était donc souhaitable que les réponses soient données avec le plus de précisions et de justifications possibles. On peut parler, après Nassefat[1], de méthode d'interrogatoire standardisée, intermédiaire entre l'interrogatoire clinique et le "testing".
- Les élèves, en demi groupes, travaillaient par paire, de telle façon que le débat ainsi sollicité fasse émerger plus facilement les conceptions de l'un et de l'autre. Ce dispositif d'interaction sociale[2] crée ainsi une situation de communication entre deux élèves qui, pour résoudre en commun un problème, vont devoir mettre en place un langage commun et accorder leurs points de vue. Cela va permettre à l'auteur d'observer les rapports entre les élèves et la calculatrice.Autre avantage de ce dispositif: les élèves ne possédant pas de calculatrice graphique ont pu être ainsi associés à d'autres en possédant.
- Le professeur est resté totalement muet pendant toute la durée de l'expérience: un bilan n'a été fait qu'au terme de celle-ci.

On se propose de verifier l'hypothèse suivante: les domaines "utilisation de la calculatrice" et "utilisation du cours" sont, pour l'élève, des domaines relativement étanches. Cette étancheïté peut apparaître comme une conséquence de la différence des statuts accordés à la calculatrice par le maître, détenteur du savoir, et par l'élève.Plus profondément, on s'interrogera sur les rapports entre la représentation graphique "du maître", "résultat d'un algorithme qui permet de passer de la formule au graphique, par l'intermédiaire d'un troisième objet: le tableau de variation" [3] , et le graphique "de la machine", obtenue par simple pression sur un bouton, et délimitée par une fenêtre d'affichage standart.

---

[1] NASSEFAT, M. (1961): *Une méthode d'expérimentation standardisée et un shéma d'ordination des réactions*, Revue de Psychologie appliquée, 2,3, 197-206

[2] BALACHEFF, N. (1982): *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*, Recherche en Didactique des Mathématiques, 3, 261-304

[3] ROGALSKY, J, (1982); *Seconde école d'été de Didactique des Mathématiques.*

2 A / Activité n°1

Le contexte: nous sommes le 10 Avril 1992. La classe de 1°S vient d'étudier les fonctions trigonométriques, en particulier la fonction tangente. Il est distribué à chaque paire d'élèves une feuille avec en tête l'énoncé suivant:

On se propose, dans les deux exercices qui suivent, de résoudre graphiquement les équations f(x)= g(x) sur ***R****, c'est à dire de rechercher les abscisses de toutes les intersections des représentations graphiques des fonctions f et g. On justifiera les résultats en détaillant les étapes de la recherche, et en reproduisant sur cette feuille le graphique apparu sur l'écran de la machine qui a permis de conclure.*

1) f(x)=x , g(x)=tanx *2) f(x)=100x , g(x)=tanx*

Cette consigne est distribuée en haut d'une feuille blanche. Les élèves doivent tout écrire sur cette feuille, ou sur d'autres feuilles blanches qui sont à leur disposition. Ils ont une heure pour travailler. 32 élèves sont regroupés par paire, mais chacun doit rendre son propre travail.

1) Equation x=tanx

On peut "éliminer" les productions de 6 élèves: trois d'entre eux n'ont rien fait (le travail n'était pas noté...). Le quatrième s'est fourvoyé: il n'a en fait pas utilisé sa machine, a constaté que x=tanx pour x=0, et en a conclu que les solutions de l'équation étaient les valeurs de x qui annulaient tanx, c'est à dire Π, 2Π,...(La même erreur sera reproduite par le même élève pour la deuxième équation). Les deux dernières ont recherché d'emblée les intersections de la courbe "tangente" avec l'axe des abscisses (car pour elles, la droite d'équation y=x, c'est l'axe des abscisses...)

Les autres élèves ont donc tenté de déterminer le nombre, et si possible une valeur approchée des solutions à cette équation, au vu de l'écran . Les problèmes qui vont se poser vont être de trois ordres. Premièrement, que se passe-t-il en zéro ? (du fait de la proximité entre la courbe et la droite au voisinage de ce point). Deuxièmement: les asymptotes apparaissant sur l'écran font-elles partie de la représentation graphique ? (c'est à dire faut-il prendre en compte les intersections de la droite d'équation y=x avec les asymptotes ?). Troisièmement: y a-t-il des intersections entre cette droite et la courbe "aussi loin qu'on aille" (c'est à dire la courbe "monte-t-elle " assez haut pour cela ?)

Il faut souligner que les élèves avaient à leur disposition toutes les réponses théoriques à ces questions:

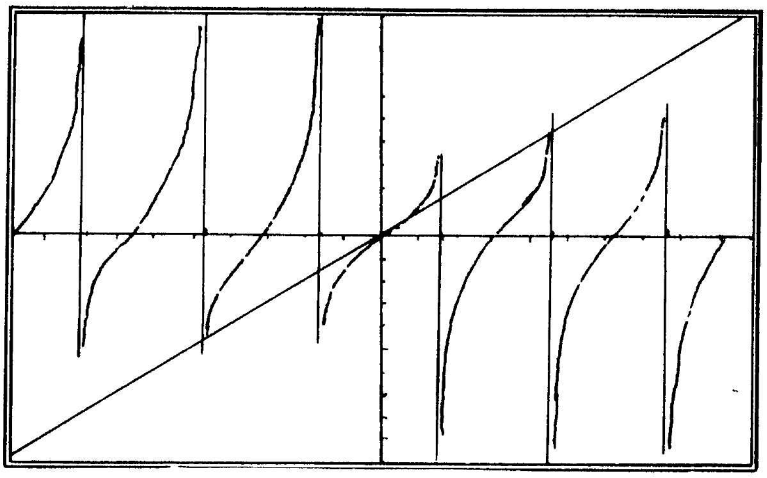
Ils savent que la droite d'équation y=x est tangente à la courbe en zéro, et que x est donc la "meilleure approximation affine" de tanx au voisinage de zéro;

Ils connaissent le domaine de définition de la fonction tangente (et donc le fait que Π/2, etc... ne font pas partie de ce domaine

Ils savent enfin que la limite de la fonction tangente quand x tend vers Π/2 (par valeur inférieure) est + l'infini , et que cette fonction est Π-périodique, donc qu'on aura des points de rencontre "aussi haut qu'on veut".

De façon significative, aucun élève ne va évoquer des éléments du cours pour répondre aux questions posées.

Mais la simple observation de l'écran, sans référence, même implicite, au cours, peut donner des réponses fausses. En effet, pour une fenêtre d'affichage "standart" (c'est à dire, pour les élèves, comme pour le constructeur, x et y compris entre -10 et 10), les élèves verront le graphique ci-dessous à l'écran:



Comment les élèves vont-ils réagir devant ce graphique ?

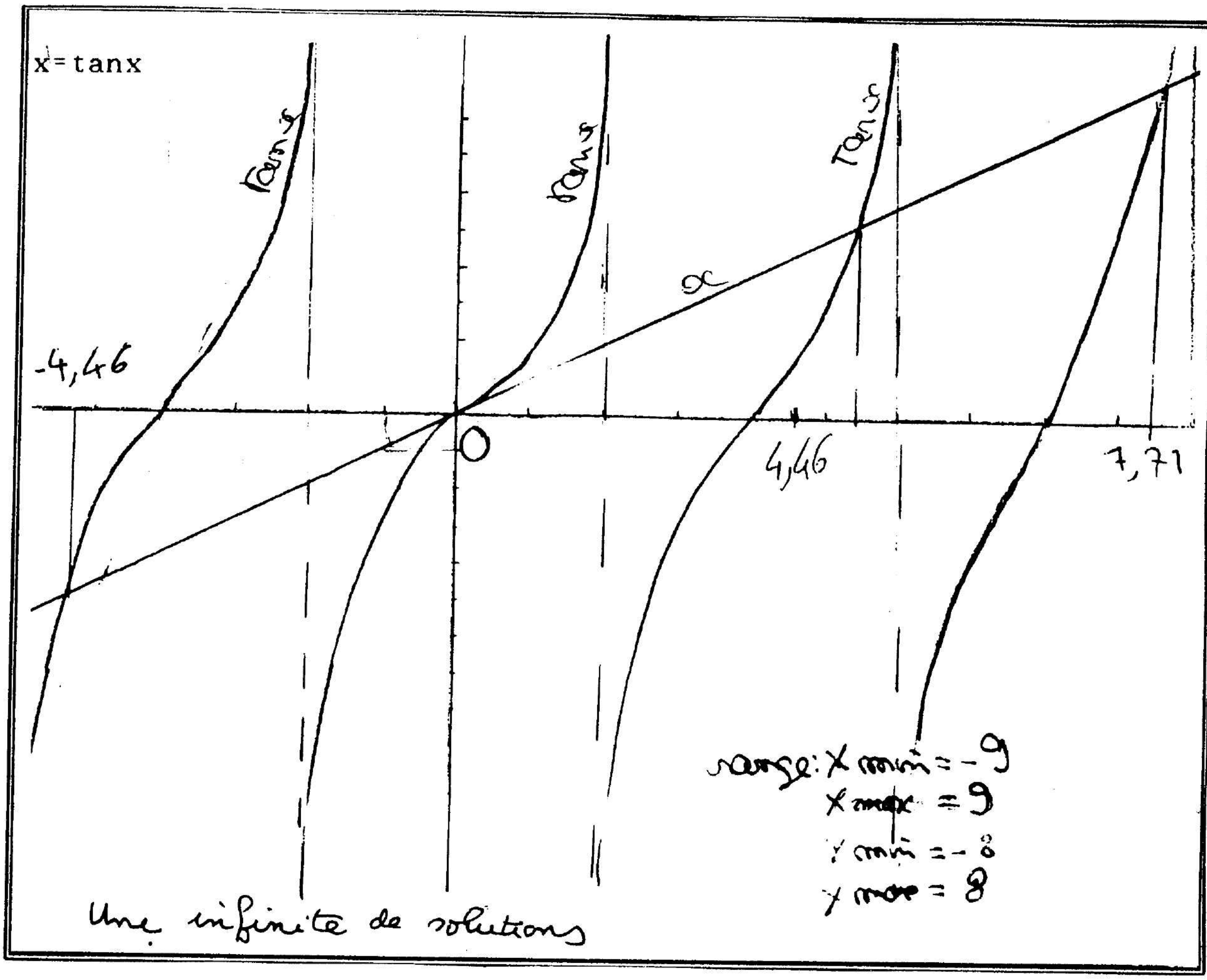
- En ce qui concerne l'origine, plus les élèves vont opérer des zoom pour "voir" ce qui se passe, plus la courbe et la droite vont apparaître inextricablement confondues.

- En ce qui concerne les "asymptotes" affichées directement sur l'écran (du fait du fonctionnement de la machine), les élèves peuvent imaginer qu'elles font partie de la représentation graphique: en effet, la machine n'avait pour consigne que le traçage de cette courbe et n'a donc "pas pu" tracer "spontanément" autre chose.

- En ce qui concerne les "limites" de la courbe, les élèves vont être tentés d'opérer des reculs successifs pour s'assurer que la droite ne rencontre vraiment pas la courbe, ce qui évidemment ne donnera rien de bon...

On peut partager les résulats des élèves en deux catégories principales: ceux qui repèrent une infinité de solutions à l'équations, et ceux qui n'en repèrent qu'un nombre fini.

On trouve seulement 4 élèves (2 groupes de 2) dans la première catégorie. De façon significative, ces quatre élèves ne se trompent ni sur la situation à l'origine, ni sur les asymptotes. Ils repèrent bien la symétrie des solutions par rapport à l'origine. C'est à dire qu'ils ont analysé l'écran de leur machine avec l'éclairage de leurs connaissances. (voir le dessin ci-dessous, réalisation de l'un d'entre eux.)



On trouve 22 élèves dans la deuxième catégorie, qui ne repèrent qu'un nombre fini de solutions. On va voir que le fait de rester "collé" à l'image-écran va avoir des conséquences multiples:

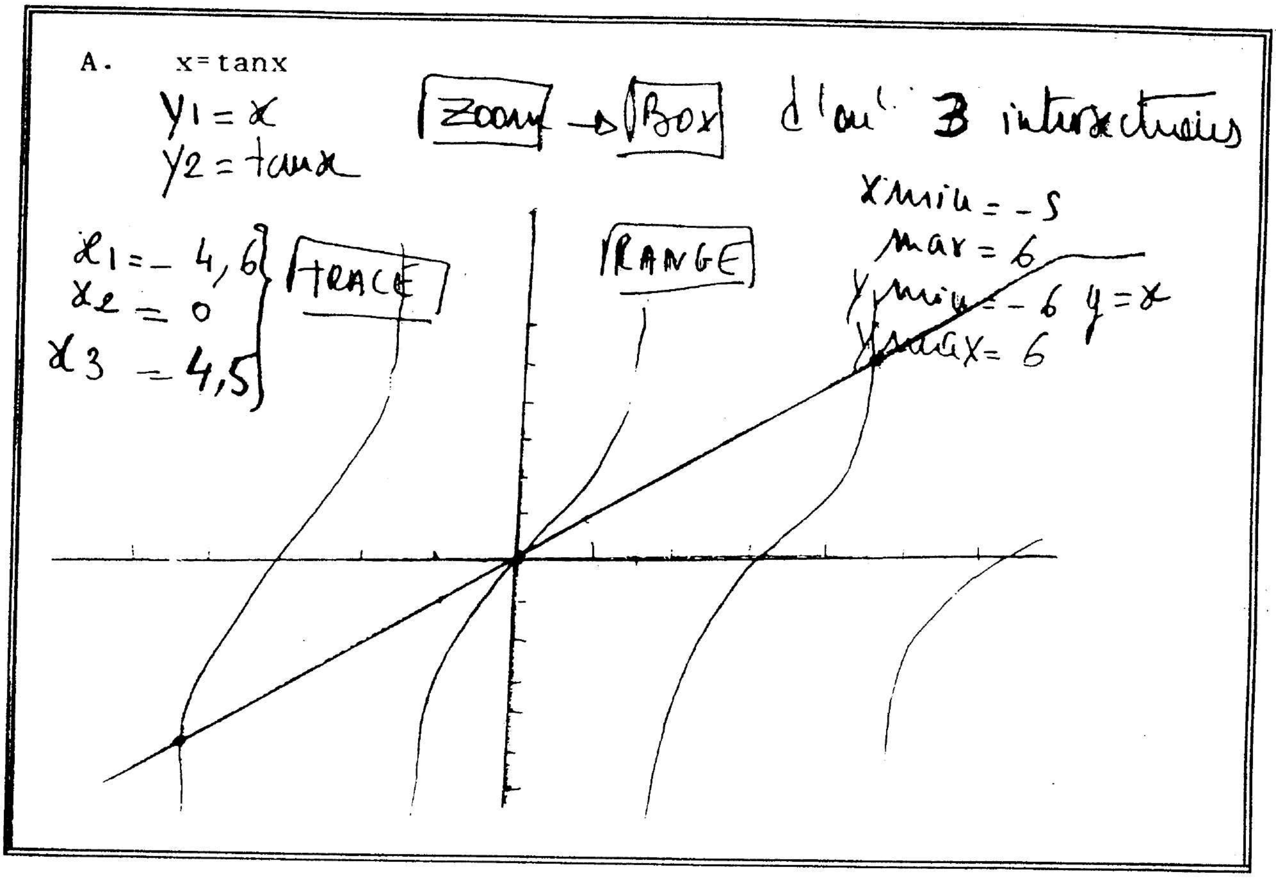
- Ne pas voir le caractère symétrique des solutions de part et d'autre de zero (shéma 1 page 23: on trouve 4,5 et -4,6): 3 élèves ont fait cette erreur.

- Ne pas voir 0 comme solution, mais une valeur proche (sur le shéma 2 page 23, on trouve 0,052 comme solution): 5 élèves ont fait cette erreur.

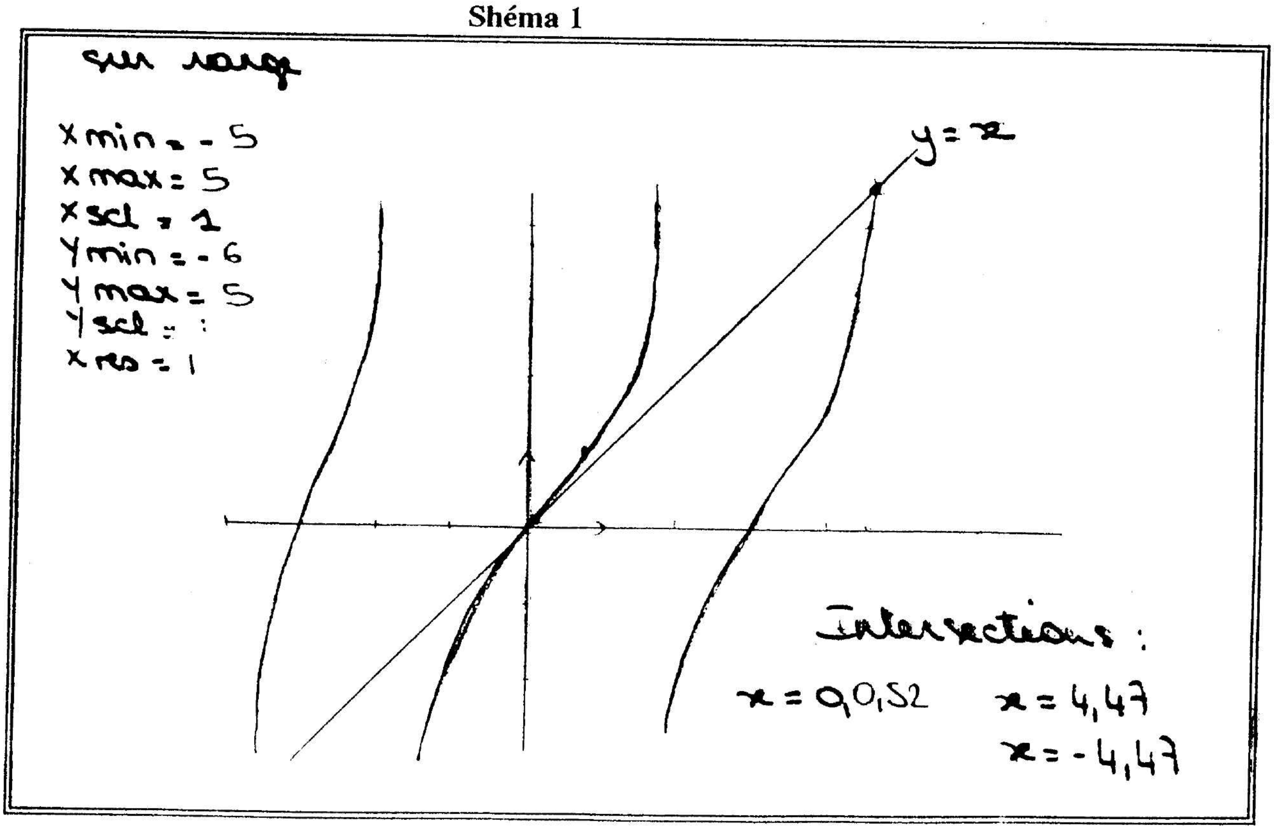
- Confondre courbe et asymptote (sur le shéma 3 page 24): 7 élèves ont fait cette erreur.

- Faire à la fois l'erreur relative à l'origine, et l'erreur relative aux asymptotes (shéma 4 page 24): il s'agit là d'une rupture totale avec les résultats du cours. 7 élèves ont fait ces erreurs.

Ainsi 4 élèves sur 32 ont résolu correctement la première équation. Et ce sont précisément ceux qui ont pu établir des passerelles entre les propriétés des fonctions en cause, et ce que leur montrait leur calculatrice. Pour la grande majorité des élèves, la représentation graphique de la fonction tangente n'est rien d'autre que ce qui est affiché à l'écran (disparition de la limite infinie), et c'est aussi tout ce qui est affiché à l'écran, asymptotes comprises.On pourrait penser que cela est du à la complexité de la fonction

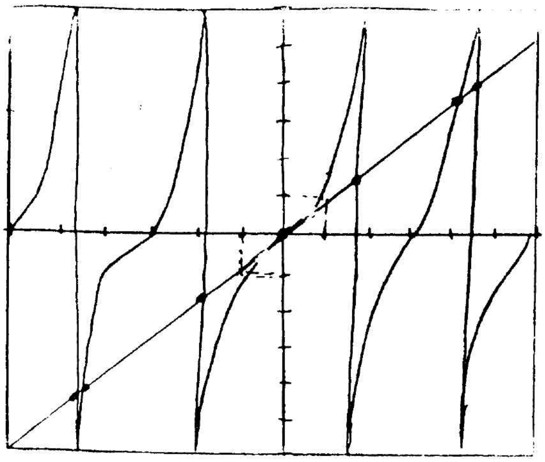


Shéma 1



Shéma 2

on trace les 2 fonctions : y=x y1= tan x.
Ensuite on fait un zoom "box" et l'on définit un écran susceptible de nous donner une approximation au nombre de solution.

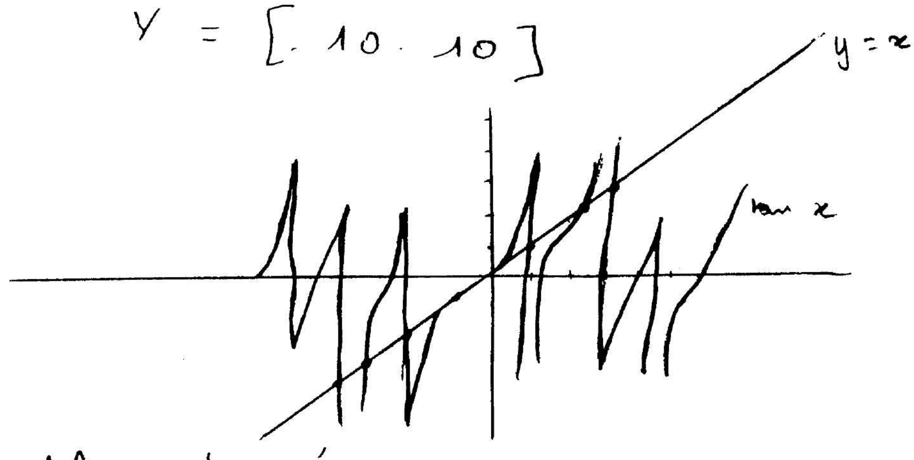


S = { -4,65 ; -4,41 , -1,49 , ; 0 ; 1,67 ; 4,41 , 4

toutefois, on peut supposer qu'il y a une symétrie.

Shéma 3

Range X : [-10 ; 10] unite 1
Y = [-10 . 10]



Valeurs trouvées
−4,89 ; −4,46 ; −1,7 ; −0,63 ; 0
4,89 4,46 ; 1,7 ; 0,63

Shéma 4

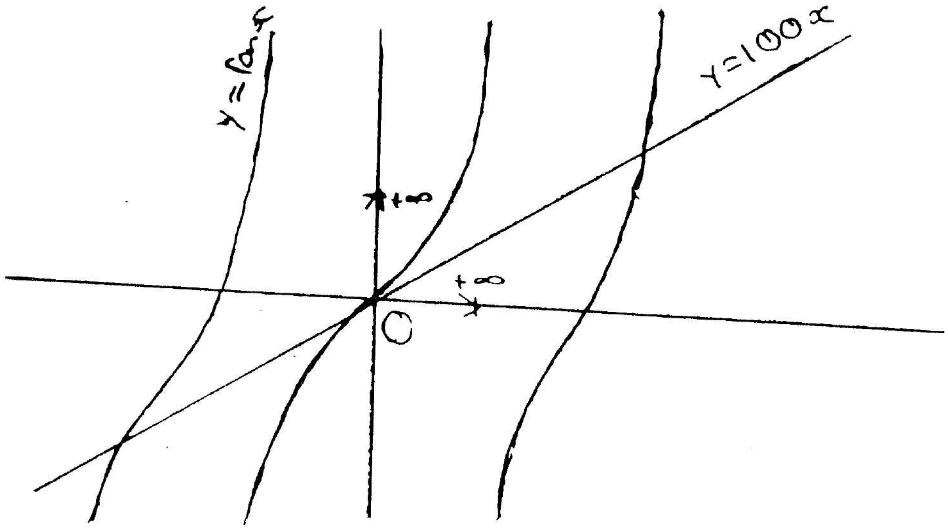
(Suite de la page 22)

tangente, avec laquelle les élèves sont fort peu familiers (ils venaient tout de même de l'étudier en classe...). On va voir pour la résolution de l'équation suivante que la même attitude se reproduit pour une fonction plus familière: la fonction linéaire. Il s'agit bien d'une "contagion du signifiant"[1] , particulièrement active avec une calculatrice graphique.

2) Equation 100x = tanx

On a là une équation du même type, mais une difficulté nouvelle va apparaître avec la représentation graphique de la fonction linéaire 100x, " collée" à l'axe des ordonnées.Seuls deux élèves, qui avaient, aussi, bien répondu à la question précédente, ont répondu à peu près convenablement, c'est à dire qu'ils ont superposé une droite de pente positive et la représentation graphique de la fonction tangente, pour en déduire qu'il y aura d'autre (s ?) intersection qu'en l'origine. Il est clair sur le dessin justificatif ci-dessous qu'il ne s'agit pas d'une reproduction de l'écran de la calculatrice (cf les pentes en zéro), mais d'une extrapolation, à partir des caractères généraux des fonctions en présence.

O est le seul pt d'intersection visible mais nous pouvons dire que pour une ordonné infinie (ou qd y tend vers $\pm\infty$) la courbe de la fonction $f(x) = 100x$ croisera la fonction périodique de la tangente.

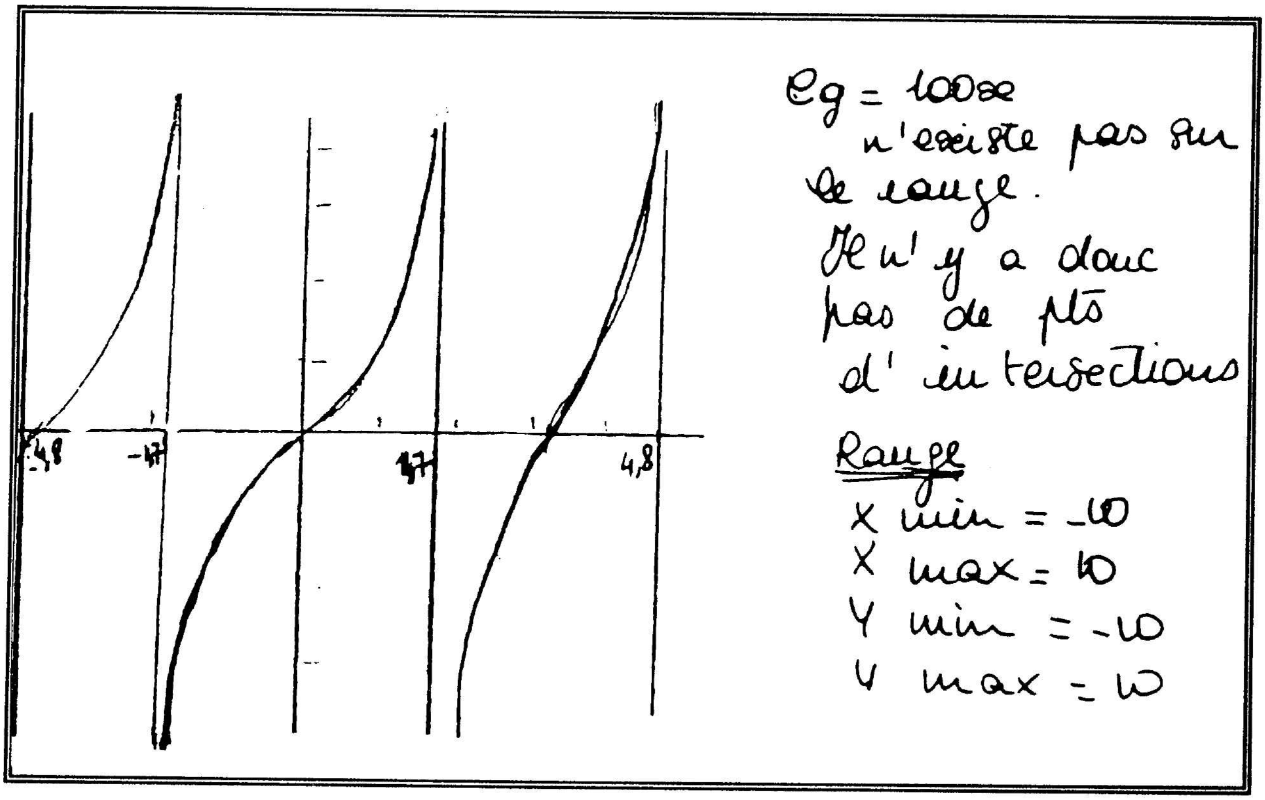


[1] LEROUGE A. , *Contagion de signifiant et contagion de référence* , in Revue Les Sciences de l'Education.

Les autres élèves se répartissent ainsi: 4 élèves n'ont pas abordé la question, 6 avouent leur perplexité, 5 ne trouvent aucun point d'intersection, et 9 en trouvent un seul (l'origine).

- Ceux qui avouent leur perplexité évoquent les arguments suivants: "Graphique difficile à analyser: la courbe f(x)= 100x **se confond** avec la droite (y'y)", "Problèmes d'échelles: on ne voit jamais la courbe!", "Machine pas précise, Range insuffisamment petit". Ces 6 élèves (3 groupes de 2) n'ont pas pu sortir du dilemme: soit "voir" la courbe et ne pas "voir" la droite, soit le contraire...

- Les 5 élèves qui ont trouvé qu'il n'y avait pas de point d'intersection sont très explicites: il n'y a pas de point d'intersection parce qu'on ne voit pas de point d'intersection sur l'écran, ou plus exactement parce que la courbe 100x **n'existe pas.** Ainsi, ci-dessous, l'explication d'une élève qui avait pourtant correctement répondu à la première question:

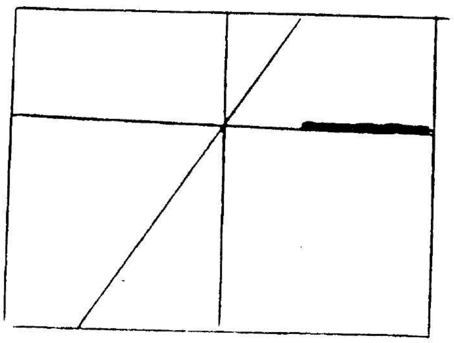


Shéma 5

Les 9 élèves qui ont trouvé <u>une</u> solution ont du faire un choix: soit **voir** la fonction tangente, et **imaginer** la fonction linéaire, soit le contraire, ce qui donne les représentations des shémas 6 et 7 page 27. Evidemment, dans un cas, une représentation est aplatie sur l'axe des ordonnées, dans l'autre cas, l'autre est appaltie sur l'axe des abscisses... L'origine est, dans ces conditions, **la** solution la plus "visible".

En conclusion, sur 26 élèves (si on exclut les 6 élèves qui n'ont pas su - ou pas voulu- s'inscrire dans cette activité), seuls 2 élèves ont pu interpréter les résultats de l'écran à partir de leurs connaissances antérieures. On peut considérer que 9 élèves ont pu se détacher partiellement de l'écran en faisant coexister à la fois la fonction linéaire et la fonction tangente sur l'écran pour faire apparaître une seule solution. Pour les autres, l'écran est resté muet, ou plutôt porteur des seules informations graphiques affichées, détachées de tout contexte mathématique, et donc impossibles à interpréter.

On trace toujours les 2 fonctions et là, on obtient, avec un range standard, un graphe impossible à lire donc on change set factor et on augmente le pouvoir de grossissement du Box (100, 100) là encore, il est difficile de lire après une quinzaine de zoom je pense qu'il n'y a qu'un point d'intersection en O.



Range :

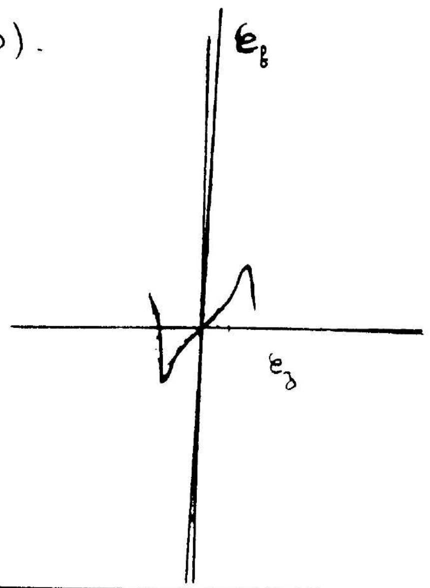
Xmin : -1,38 E -17
Xmax : 1,54 E -17
Ymin : -1.147 E -15
Ymax : 5,23 E -16

Shéma 6

On trace $f(x) = 100x$ et $g(x) = \tan x$

Il y a 1 intersection en $(0,0)$.

$f(x) = 100x$ est, avec nos unités, presque confondue à l'axe des ordonnées



Shéma 7

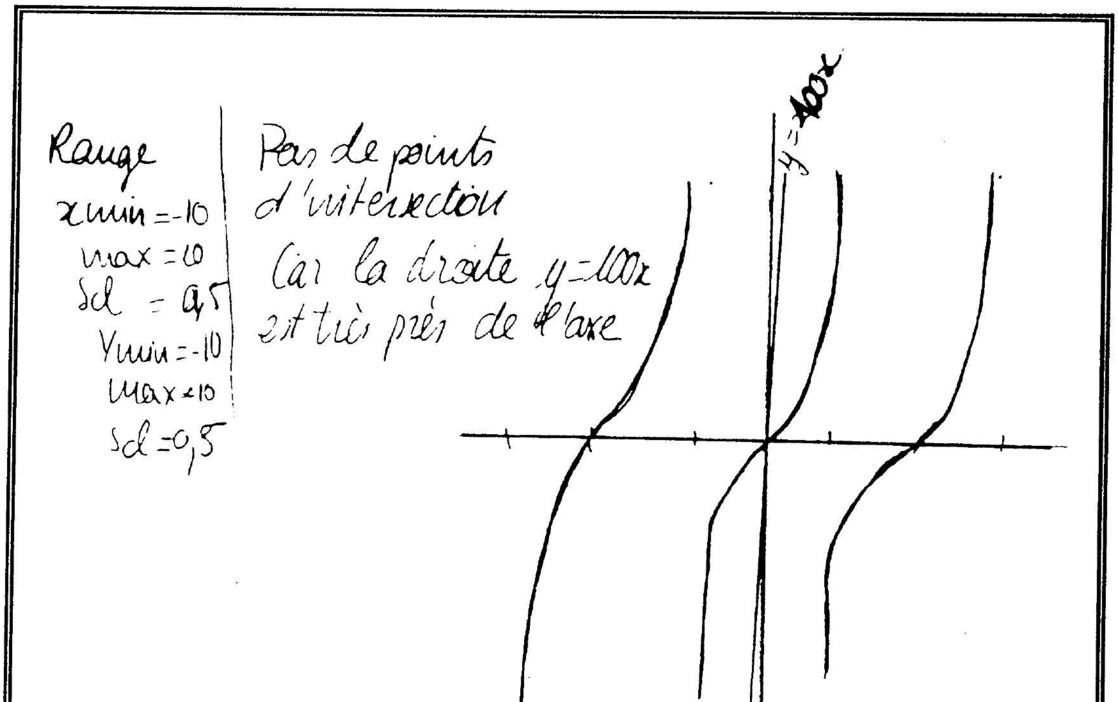
Précisons pour finir que peuvent coexister des images "du cours" et des images "machine".

Ainsi sur le shéma 8 ci-dessous, l'élève a fait apparaître non pas le contenu de l'écran de la machine (avec le Range affiché, la droite apparaît confondue avec l'axe des ordonnées), mais ce qu'il sait être la représentation graphique de la fonction 100x. Sur le papier apparait donc bien un point d'intersection, mais l'élève note le résultat induit par la vision de l'écran: sur l'écran, pas d'intersection visible, donc pas de solution.

On est en présence ici d'un phénomène qu'on retrouvera plus loin: en cas de résultats contradictoires machine/ cours, il n'y a pas action de l'un pour rectifier, ou réinterpréter l'autre, mais au contraire remplacement pur et simple de l'un par l'autre.

Celui qui l'emporte est fonction des autorités en présence: si c'est l'élève contre la machine, c'est la machine.

Mais si c'est le professeur contre la machine,... c'est une autre histoire (cf activité 3).



Shéma 8

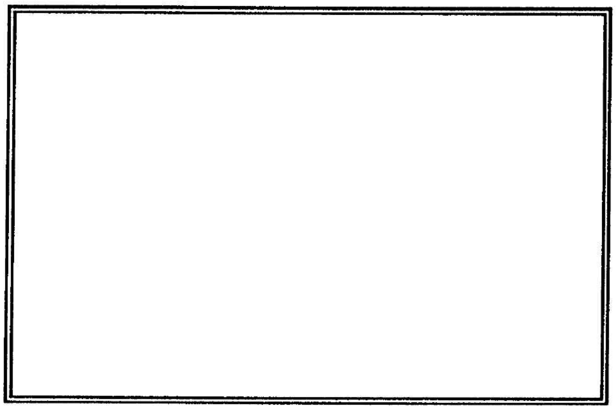
2 B / Activité n°2

Lors cette séance, tirant les leçons de la première activité, trois variables didactiques, importantes, sont modifiées:

- La séance se déroule désormais hors de l'emploi du temps normal de la classe. Seuls y viennent les élèves volontaires. Le contrat est simple: le travail n'est pas noté, mais le bilan qui sera fait en fin de course sera utile pour tous. Sont donc présents non pas les élèves "les plus forts", mais les plus motivés (qui constituent un échantillon assez représentatif de la classe). Il y a ainsi élimination des copies fantaisistes. Le recueil des représentations en est ainsi facilité.

- Les élèves n'avaient pour la plupart pas utilisé du tout le cours d'analyse: mais la possiblité n'en était pas évoquée dans l'énoncé de l'exercice. On peut ainsi penser que le cours d'analyse était hors contrat. Le nouvel énoncé réintroduit donc le cours d'analyse dans le cadre de l'activité.

- Les élèves ont en général décrit très sommairement les manipulations de leur écran. Pour obtenir des données plus complètes, il leur est distribué des feuilles avec, sur chacune d'entre elles, huit écrans représentés (voir le modèle représenté ci-dessous). La consigne est d'y noter toutes les représentations obtenues successivement.



15 élèves sont présents: 7 groupes de 2, et un solitaire. Le texte de l'exercice est le suivant:

On se propose de tracer les représentations graphiques des deux fonctions suivantes, dans un repère adapté, ***en utilisant une calculatrice graphique, et les ressources du cours d'analyse****. On précisera, avec tous les détails voulus, les étapes des calculs, du raisonnement , de la manipulation de la machine (choix du "Range" en particulier).*

1) $f(x)= (x+3)/(x-1000)$ *2)* $g(x)= \sqrt{(-x2 + 101\,x -2550)}$

1) Etude de f(x) = (x+3) / (x-1000)

Ce type de fonction est parfaitement connu des élèves. La difficulté apparaît avec le choix de la valeur critique pour x=1000. On va distinguer trois familles de réactions parmi les élèves présents.

- L'élève solitaire (élève très "agile" intellectuellement) reconnait tout de suite une fonction homographique, identifie les positions des asymptotes autour desquelles va s'organiser le représentation graphique, vérifie sur sa calculatrice, et trace l'allure générale de la courbe demandée.

- 4 groupes (8 élèves) essaient d'emblée leur calculatrice graphique sur un range standart, ne voient rien, et entreprennent alors l'étude analytique complète de la fonction (domaine de définition, dérivée, limites, tableau...), la tracent, et vérifient alors sur leur machine. Deux éléments sont à noter: l'étude analytique est faite machine etteinte. Et un argument pour le choix de cette étude est: "la fonction a l'air simple, on doit y arriver par le calcul".

- 3 groupes (6 élèves) vont faire le choix de manipuler la machine jusqu'à l'obtention d'un résultat probant (pour eux). Tous se manifestent par une adhésion compléte aux résultats affichés, et l'absence totale de référence au cours:

<u>Protocole 1 (</u> cf page 31): C'est le plus significatif d'une absence de références. Le seul résultat qui est repéré est " *On remarque bien que 1000 exclu* ". Le choix de la fenêtre d'affichage pour les y est fait à partir du calcul d'un certain nombre de valeurs (f(1),... , f(700)). Pour les x, le résultat est obtenu par agrandissement successif, toujours centré en 0. Le dernier shéma témoigne d'une certaine habileté: pour lever l'indétermination "pour les grandes valeurs de x", l'élève choisit une fenêtre -100000, 1000000. L'absence de référence est pour finir révélé par l'absence de shéma récapitulatif (asymptotes)

<u>Protocole 2</u> (cf page 32): Là un certain nombre de résultats sont évoqués (on n'en trouve cependant pas trace sur la feuille: ni dérivée, ni tableau de variation). Cependant, le cadre de travail reste la calculatrice: les références théoriques sont évoquées de façon ponctuelle, pour justifier l'étude au voisinage de 1000, où pour justifier la décroissance. Mais en aucun cas le cadre théorique n'apparaît dans sa globalité: l'élève se satisfait donc du résultat final, avec une limite en l'infini égale manifestement à 0.

<u>Protocole 3</u> (cf page 33): On trouve d'emblée un embryon d'étude théorique: domaine de définition, dérivée. L'élève expose un problème: que se passe-t-il quand x=-3 ? Il y a confusion entre l'annulation de x, et l'annulation de f(x). Le problème est résolue par l'adhésion au résultat machine (*la courbe est confondue avec l'axe des abscisses*). Il est clair que les résultats théoriques annoncés en départ ne vont intervenir qu'occasionnellement: la valeur 1000 exclue n'apparaît qu'à la fin, la décroissance de la fonction n'est évoquée que dans le cadre 4, et pas pour le résultat final, assez éloigné de l'hyperbole "familière"...

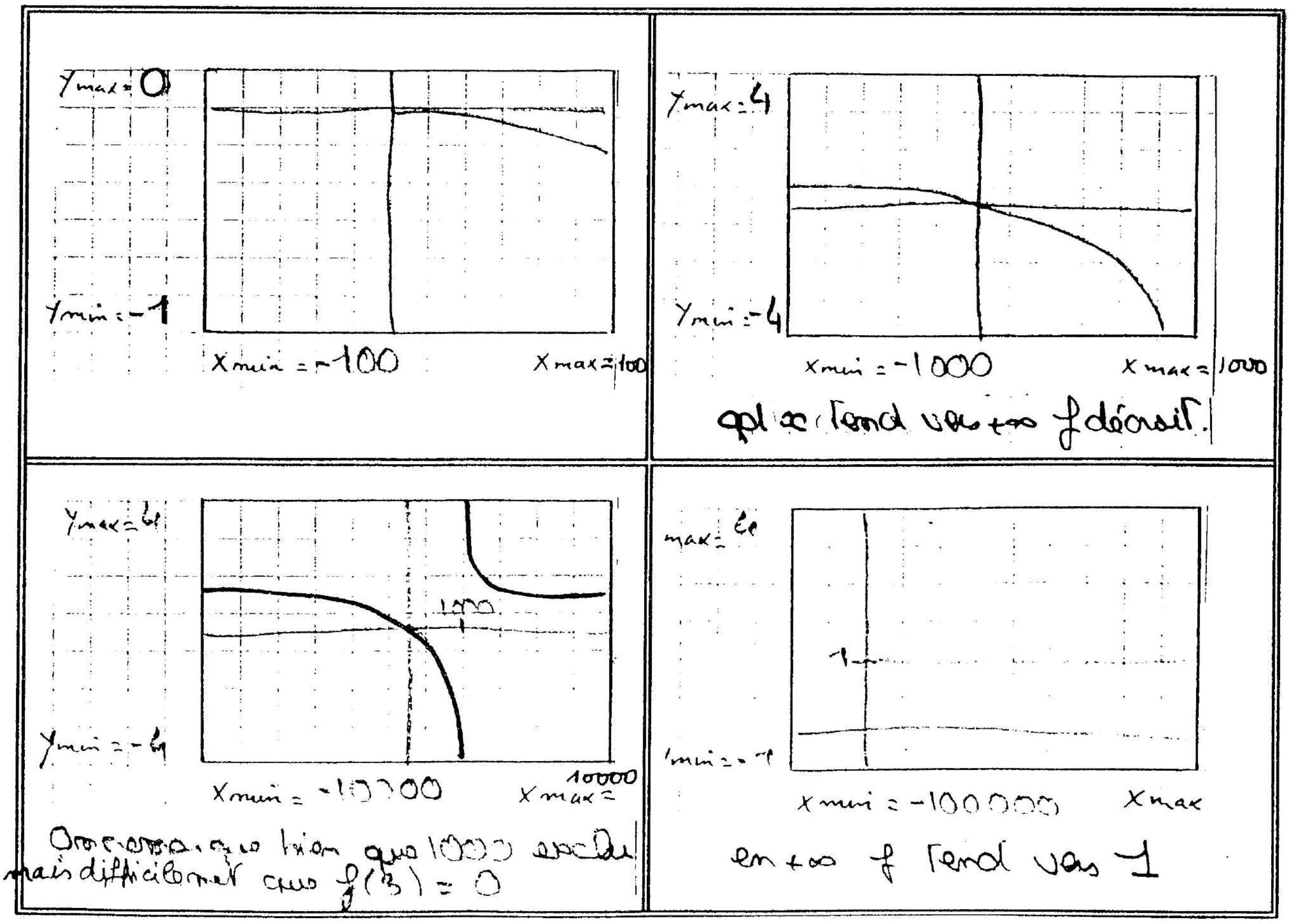
Ceci me semble confirmer l'hypothèse annoncée: dès que l'on s'éloigne des fonctions connues (c'est à dire des **fonctions de référence** se déployant dans un **écran "standard"**), les élèves vont avoir recours soit à une étude analytique complète, soit à l'observation de leur calculatrice, les deux cadres étant à peu près étanches.

A. $(x+3)/(x-1000)$. $f(1) = \dfrac{4}{-999} \approx -4 \cdot 10^{-3}$ $f(-100) = 0{,}09$

$> x > -5$
$> y > -6$ Rien

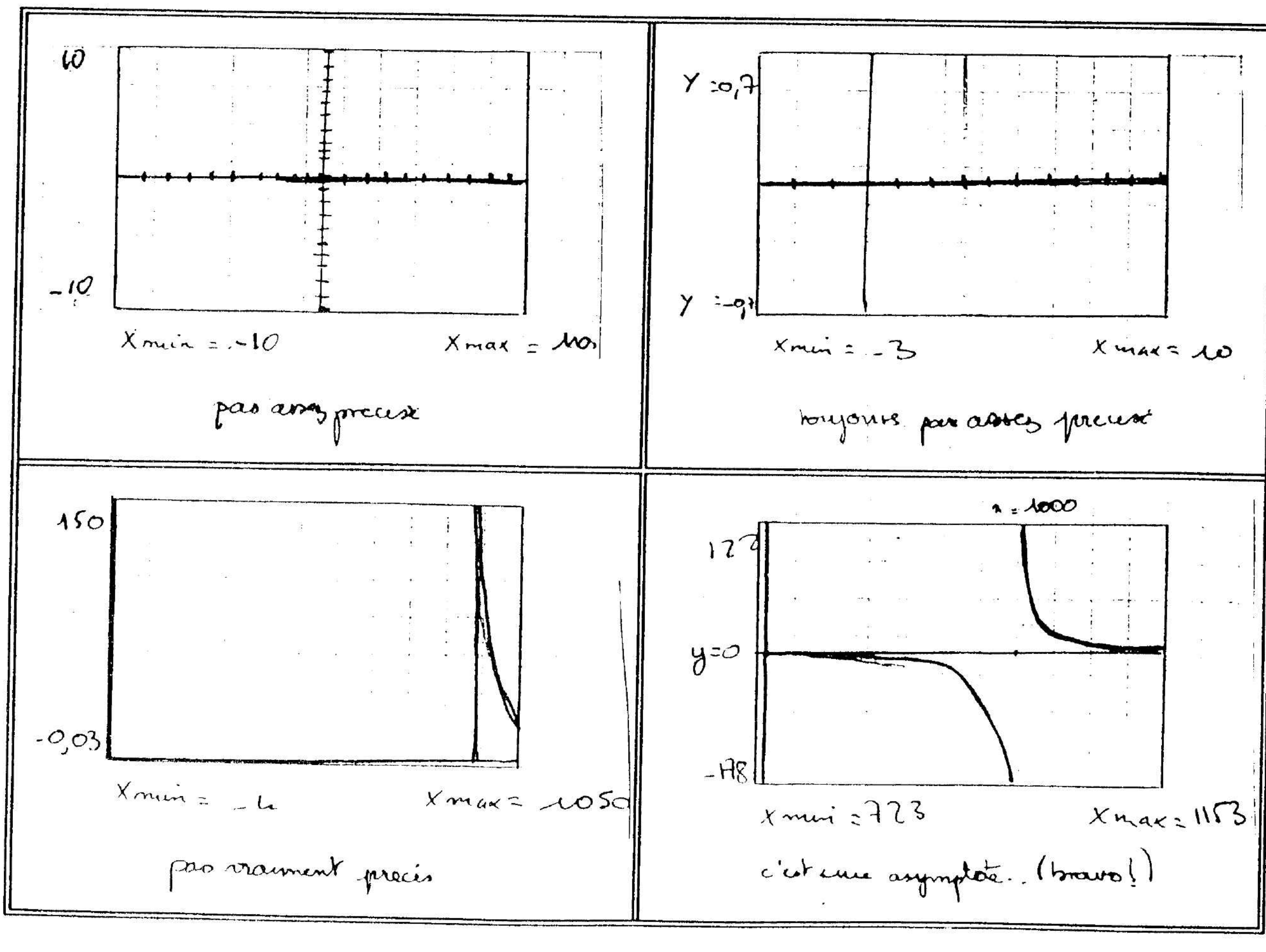
$f(10) = \dfrac{13}{-987} = -0{,}0131$. $f(-200) = 0{,}16$ $f(-500) = 0{,}33$

$f(100) = -0{,}114$
$f(200) = -0{,}25$
$f(500) = -1$
$f(700) = -2{,}34$



Protocole n°2

. au debut, on rentre la fonction. ensuite, vu que le range est "standard" on fait un zoom ~~par~~ "box" en redefinissant un carré de ecran plus precis (etape 2) la fonction étant toujours illisible on redefinit un autre range. (etape 3) pour redefinir le range, on sait que la fonction est negative jusqu'a $x > 1000$ vu que cette fonction n'est pas defini pour $x = 1000$. donc, on prend un range suffisant pour voir l'allure generale de la courbe, c'est a dire etape 3. en faisant de fin calcul, on en deduit que $f'(x)$ est negative, donc que la courbe est asymptotique a la valeur "interdite": 1000. donc, on fait un zoom sur les zones problemes et on en deduit l'allure generale de la courbe (etape 4)

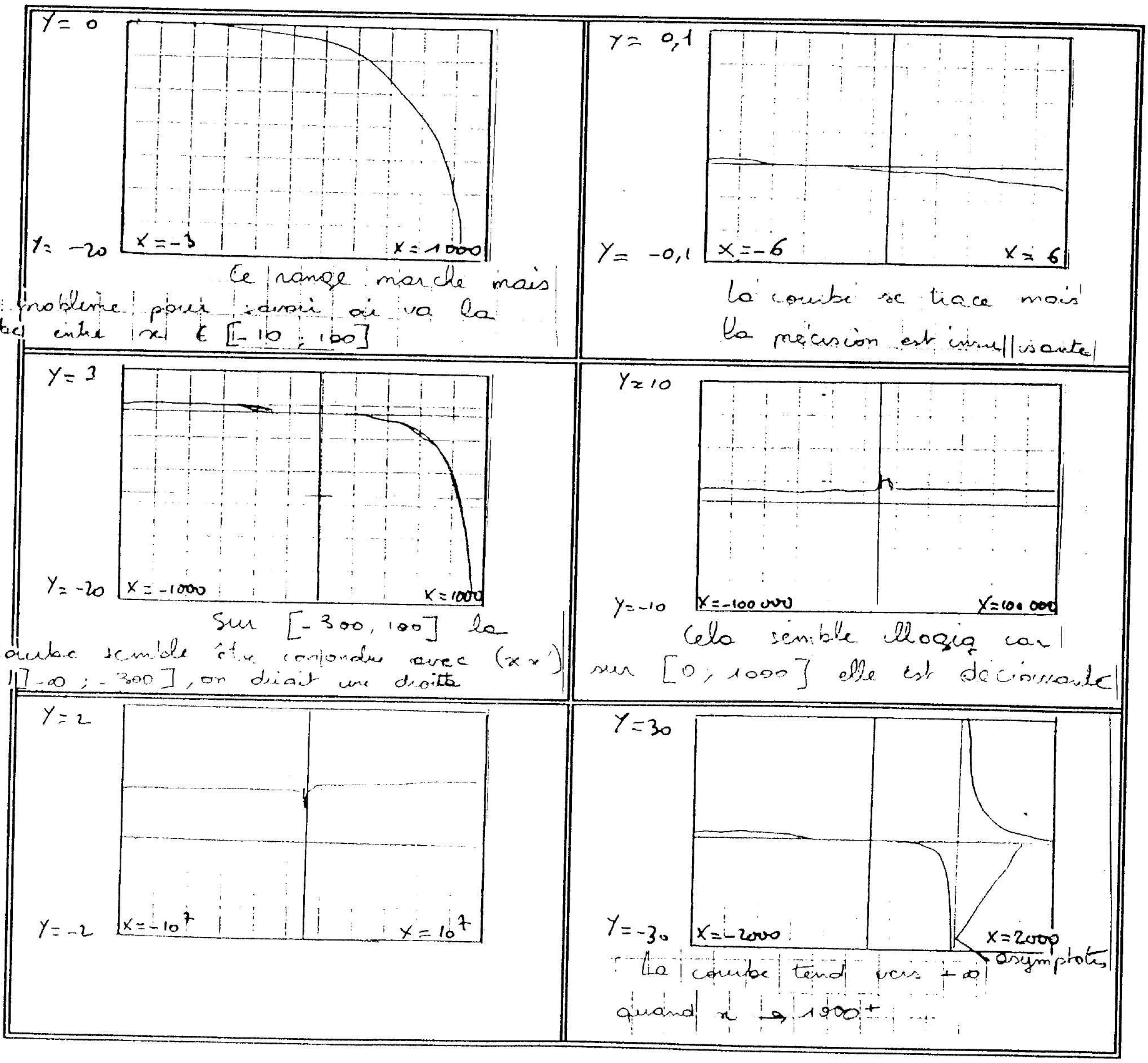


$D_f = \mathbb{R} - \{1000\}$

Protocole n°3

Logiquement elle devrait s'annuler en $x = -3$ mais ce n'est pas le cas sur la machine, la courbe ne se trace pas. Et cela même si je zoome au maximum la courbe en la limitant à un espace. La courbe ne se trace pas à l'approche de 0 car quand $x \to 0$ $f(x) \to 0$ car cela se rapproche du quotient $\frac{3}{1000} \simeq 0$. La courbe est confondue avec l'axe des abscisses.

$$f'(x) = \frac{(x-1000) - x - 3}{(x-1000)^2} = \frac{-1003}{(x-1000)^2} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} - \{999\}$$



2) Etude de $f(x)= \sqrt{-x^2+ 101x-2550}$

Nous sommes ici dans un cas de figure tout à fait différent: cette fonction ne fait pas partie des fonctions de référence. Les élèves, en particulier, ne savent pas la dériver. Ils peuvent cependant l'étudier à partir des variations de la fonction trinôme, elle bien connue. Sur les quinze élèves présents, seul l'élève travaillant seul, déjà distingué à l'occasion du précédent exercice, va déduire directement les variations de f de celles de la fonction trinôme (cf protocole 4 page 35).

Les quatorze élèves restant vont manipuler leur calculatrice pour "voir quelque chose". La justification de ce choix est souvent: "c'est une fonction trop compliquée, ce sera plus rapide avec la calculatrice directement". Ils vont ainsi opérer des reculs successifs, toujours centrés en 0, pour voir ce "quelque chose". Je relève la phrase suivante: "Je prends des Range démoniaques, et **pourtant** je ne trouve rien...". Et pour cause, quand la représentation graphique serait susceptible d'apparaître sur l'écran, les élèves en sont à une fenêtre pour x de [-51, +51] (au minimum), et à cette échelle, on ne voit rien...

Ainsi 5 élèves ne trouveront rien: parmi eux, deux ont fait une tentative (infructueuse) de recherche du domaine de définition, pour préciser la fenêtre d'application (et ce, après une manipulation très longue de leur écran). Les trois autres sont restés collés à leur écran.

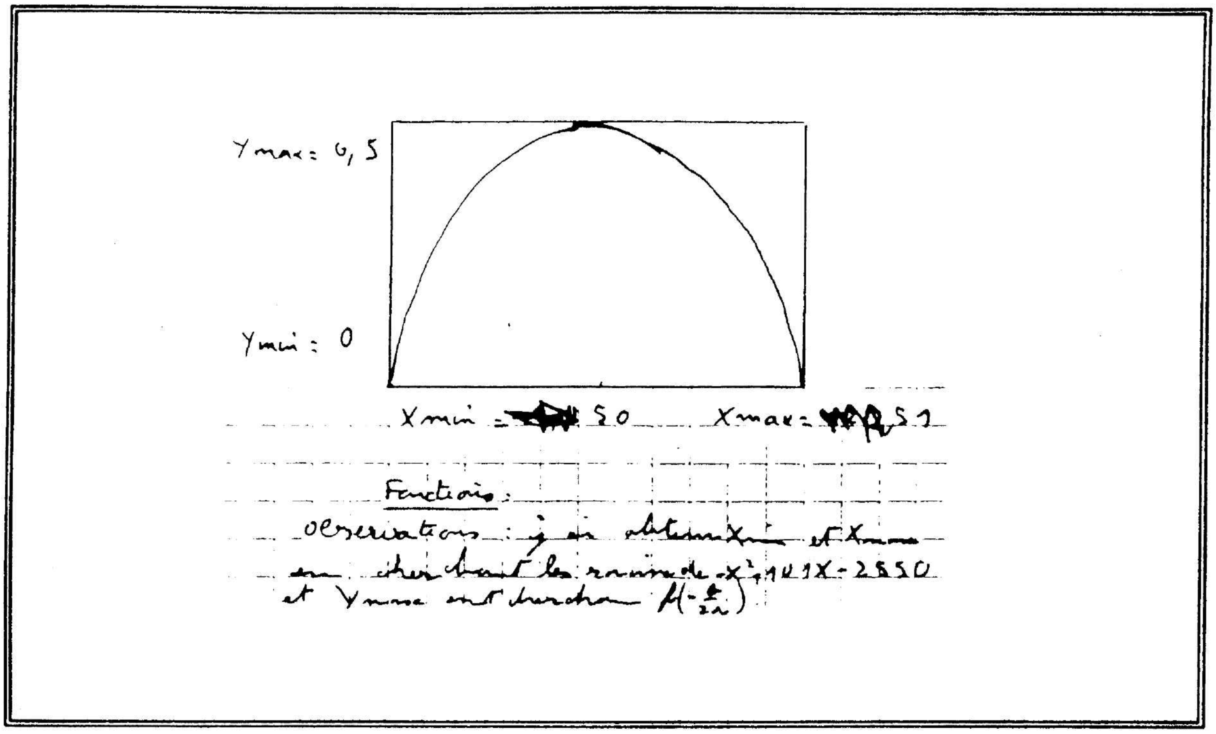
Les 9 derniers élèves, après une dizaine de minutes de manipulation sans résultats, vont chercher, eux avec succès, le domaine de définition. Il leur apparaît ainsi que la fonction n'"existe" qu'entre 50 et 51. Ces élèves vont alors se partager en deux catégories:

- 5 d'entre eux vont choisir la fenêtre induite par le domaine [50,51]. Ils trouvent alors une représentation graphique "convenable" (cf protocole 5, page 35)

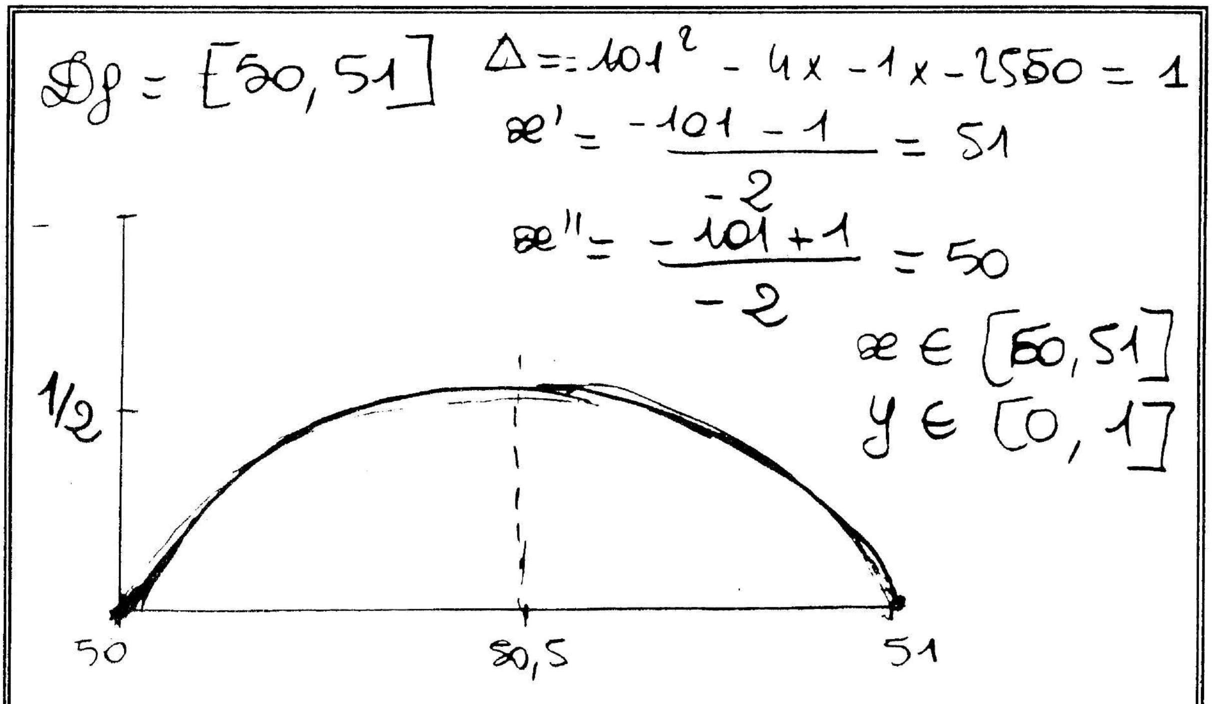
- 4 d'entre eux vont choisir (" pour être sûr de ne rien louper"), une fenêtre d'affichage [49,52] . Certains élèves choisissent cette marge de manoeuvre pour des raisons quasiment esthétiques (*pour que la courbe ne soit pas collée aux bords de l'écran*), cf protocole 6 page 36. Pour d'autres, qui n'ont trouvé le domaine que par "contagion", il y a, derrière, une nécessité de justification: quand on ne fait que constater que 48 et 52 n'ont pas d'image (cf protocole 7 page 36), il faut bien répondre, au moins graphiquement, pour les valeurs entre 48 et 50, et les valeurs entre 50 et 51...

Et là, hélas,la machine affiche une courbe qui n'est pas raccordée à l'axe des abscisses . Et les élèves ne sont pas du tout gênés de faire coexister cette courbe avec un tableau de variation (déduit de la courbe, y compris le signe de la dérivée...) où manifestement 50 ou 51 ont comme image 0. Les élèves interrogés sur ce point précis, répondent: *50 n'a pas d'image, mais la limite de la fonction en 50 est O.* Il est clair à nouveau que les domaines du calcul et de l'observation graphique ont une relative étanchéité: en cas de conflit, c'est l'observation graphique qui l'emporte. On voit cependant que la résolution du conflit va induire une confusion complète des notions d'image et de limite.

On reviendra sur ces caractères réducteurs et producteurs d'une représentation graphique page 37.



Protocole n°4

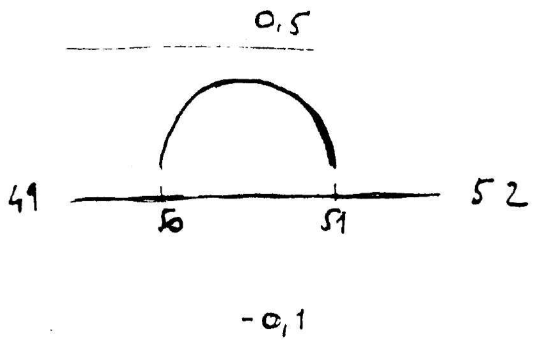


Protocole n°5

$-x^2 + 101x - 2550 = 0$

$\Delta = 1$

$x' = 51$
$x'' = 50$

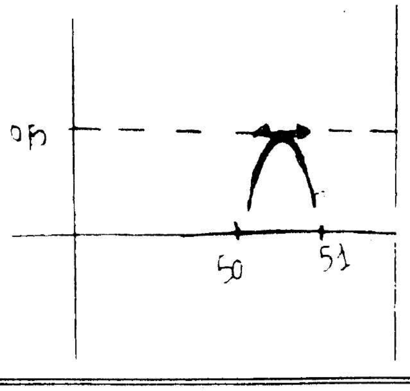


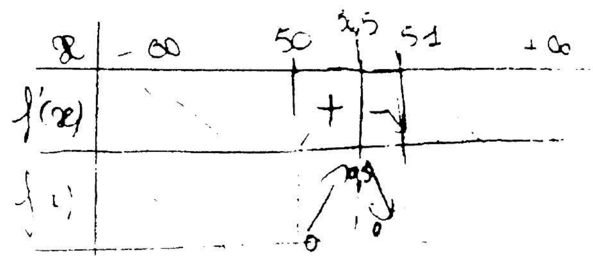
Range $49 < x < 52$
$-0,1 < y < 0,5$

Protocole n°6

La courbe n'existe qu'entre 50 et 51 sinon la calculatrice marque "error" en $x = 48$ ou $x = 52$

$[50, 51] = D_f$





Protocole n°7

Pour Janine Rogalski[1] , "le graphisme, par ses propriétés matérielles et éventuellement son mode de construction, a un double caractère (...) réducteur et producteur". Dans l'article cité, elle analyse ces caractères dans le cas de graphisme "à la main", issu de l'étude d'une fonction. Il semble que le graphisme machine, issu, sous le seul contrôle de l'élève, de la pression sur un bouton, a à la fois un caractère réducteur et producteur amplifié.

Janine Rogalski distingue un double caractère réducteur du tracé:

- un tracé est "minoré", car "l'infiniment petit est impossible à représenter, le point matériel est étendu". Dans le cadre d'une représentation machine, cette contrainte est encore plus forte: la machine ne peut tracer qu'un nombre fini de points, liés à la définition de l'écran.

- un tracé est "majoré": on ne peut directement représenter ce qui se passe pour x et y "grands", le papier est borné. J.R. signale que tout ce qui concerne les limites va necessiter des règles spécifiques: par exemple "c'est l'opposition tracé-absence de tracé qui marque l'existence ou la non-existence". On a vu précisément que cette distinction n'existe plus pour la machine qui va tracer (cf la fonction tangente) des brins d'asymptotes avec le même statut que la représentation graphique. Donc autres conventions nécessaires. De même, on a vu comme l'illusion de la transparence était forte chez les élèves concernant l'observation de la machine: ils ont précisément l'impression que leur écran n'est pas borné, puisqu'ils peuvent prendre les "range" les plus "déments". En fait, s'agissant de "grands nombres", vont intervenir des phénomènes que les élèves ne contrôleront plus (cf la lecture de la limite de la fonction $(x+3)/(x-1000)$ en $+\infty$).

Janine Rogalski évoque aussi les caractères producteurs d'un tracé, comme porteur des propriétés globales de la fonction, qui acquiert ainsi un statut d'objet à part entière (et non plus d'étape ultime d'un algorithme: domaine de définition, dérivation, construction point par point...). Ainsi, le tracé "expose des informations qu'il faut démontrer si l'on part des représentations symboliques: existence de points d'intersections de tracés, existence de points d'inflexions, de maximums ou de minimums..." . Mais dans le cadre d'un tracé "automatique" par la machine, le caractère producteur va être amplifié:

Il y a d'abord, on l'a vu, le redéploiement "à l'envers" de l'étude d'une fonction: du tracé, les élèves déduisent directement le tableau de variation (et donc au passage la dérivabilité automatique...)

Il y a enfin la réinterprétation des notions du cours pour donner un sens au tracé (par exemple la notion de limite pour $\sqrt{-x^2+101x-2550}$).

Le problème est que tout ceci se passe sous le seul contrôle des élèves, puisque rien, ni dans les programmes, ni dans les pratiques d'enseignement, ne prend en compte l'objet "calculatrice graphique".

Nous avons vu ce qui se passe en cas de conflit élève-machine. Nous allons voir ce qui se passe en cas de conflit professeur/ machine.

---

[1] In "Les représentations graphiques dans l'enseignement: concepts et méthodes d'analyse..." Seconde ecole d'été de didactique des mathématiques , 1982

2 C / Activité n°3

Les élèves sont en classe entière. Je me propose, au moyen d'une activité très dirigée, d'observer leurs réactions, confrontés à une contradiction entre les résultats affichés par leur machine et les résultats annoncés par le maître.

Il s'agit d'étudier la limite éventuelle en zero de la fonction $(\sin x - x)/x^3$.

Les élèves n'ont évidemment pas les moyens théoriques de déterminer seuls cette limite en 1°S.

Dans un premier temps, je leur propose une étude graphique: ils reçoivent chacun une feuille avec 8 écrans, et les fenêtres d'affichage imposées. Ils doivent observer ce qui se passe "quand on se rapproche de plus en plus de zero". Les élèves qui disposent d'une TI 81, et ils sont les plus nombreux dans ce cas, vont observer les graphiques successifs reproduits page 39. Jusqu'à Xmax= 10^{-4}, le résultat affiché de -1/6 n'est pas étonnant pour le mathématicien averti... Mais ensuite, on assiste à un comportement erratique, puis à un "applatissement" de la courbe sur l'axe des abscisses: cela vient du fait qu'à partir de $x=10^{-5}$, on va avoir au numérateur comme au dénominateur des réels de l'ordre de 10^{-15}, c'est à dire hors des zones de contrôle de la machine.

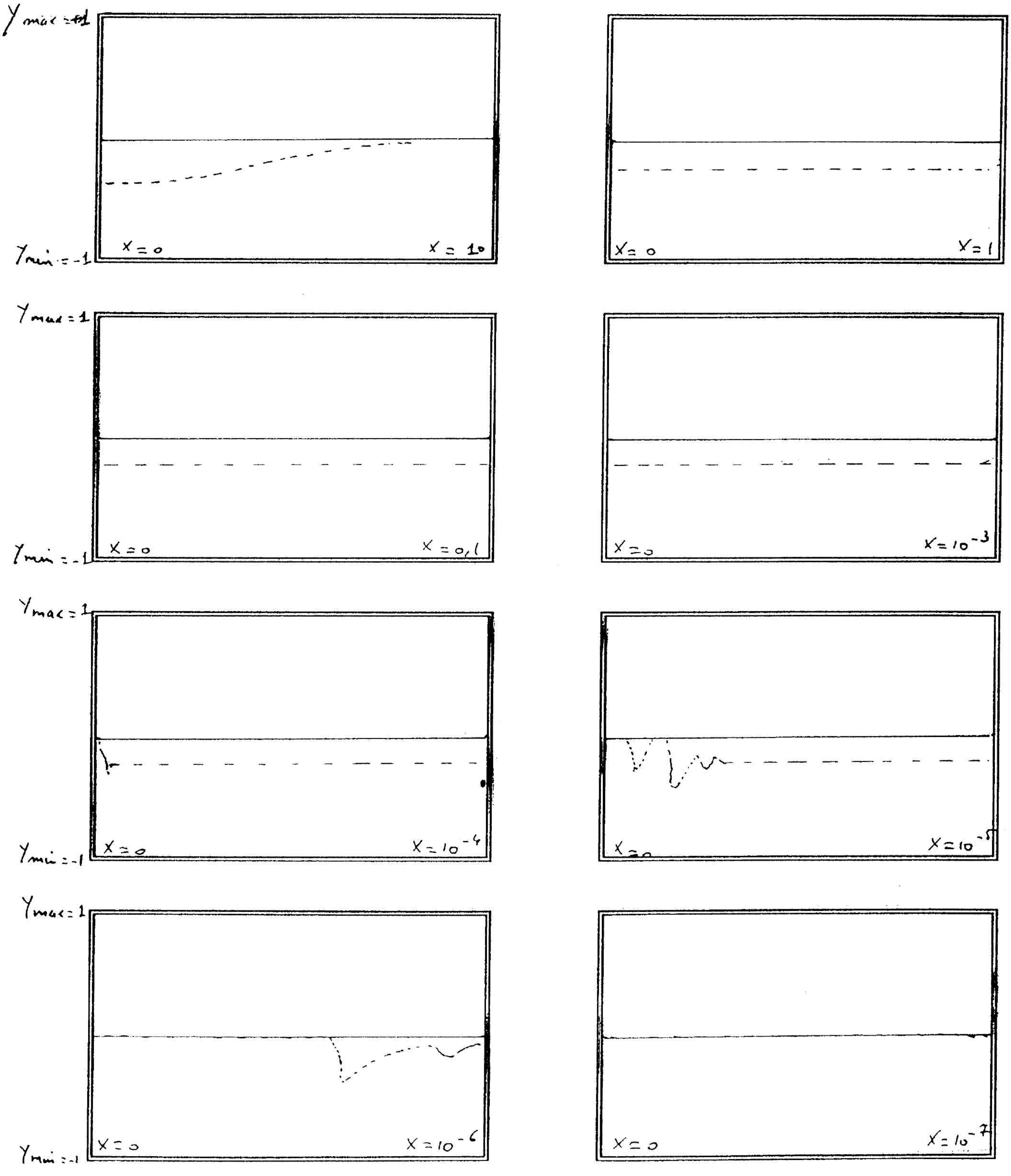
Confrontés à cette situation, <u>tous</u> les élèves concluent à une limite nulle en zéro de la fonction: pour plus de sécurité, certains se rapprochent encore plus prêt sur les deux écrans laissés libres au bas de la feuille à leur disposition. Sur quatre copies, on trouve des expressions du type: "au début, la limite paraît être -1/5 (!) , puis il y a une incertitude, puis une stabilisation: la limite est 0, c'est une <u>certitude</u>". Le débat provoqué par le maître sur la raison des errements de la représentation graphique à un moment donné ne suscite aucun enthousiasme: la réponse qui semble faire consensus est que, venant de la fonction sinus, on pouvait bien s'attendre à quelques oscillations...

Dans un deuxième temps, je leur propose une démonstration analytique: je démontre que, pour x positif, $(\sin x - x + x^3/6)$ est compris entre 0 et $x^5/120$. Puis que $[(\sin x - x)/x^3 + 1/6]$ est compris entre 0 et $x^2/120$, ce qui permet de conclure que la limite cherchée est -1/6.

Les élèves sont donc confrontés à deux résultats contradictoires: un résultat, incontestable, de la machine. Et un résultat, incontesté, du maître.

Ils ont 15mn pour réfléchir à cette contradiction, et proposer des tentatives d'explications.

Recherche expérimentale de la limite de f en zero.



(En pointillé ce que les élèves ont fait apparaître)

27 élèves vont répondre à cette question.

Je classe les réponses en quatre catégories

- **Il y a d'abord la catégorie la plus nombreuse, celle des "exclusifs".** En cas de conflit résultats théoriques/machine, l'un prend immédiatement le pas sur l'autre. Vu les conditions du contrat didactique, c'est ici évidemment le maître qui l'emporte sur la machine. Les arguments sont à observer de près:

- Pour 8 élèves, l'argument est très frustre: " La **meilleure** réponse est celle du calcul, car la machine ne donne que des approximations ". On notera au passage le mot meilleure, présent dans 5 copies sur 8. Pour ces élèves, il n'y a pas une bonne réponse, et une mauvaise, mais des réponses dont la qualité est plus ou moins bonne.

- Pour 9 élèves, l'argument est plus précis: la machine se trompe parce qu'on est dans des zones trop "petites": *"On ne peut se fier à la machine que pour des calculs simples, et ne dépassant pas une certaine valeur limite", "Pour un petit nombre, la machine a tendance à arrondir, "La machine arrondit les nombres quand ils sont trop grands ou trop petits", "Pour des chiffres si infimes, elle se dérègle", "La machine arrondit les résultats surtout dans des zones extrèmement pointues", " On ne peut pas se fier à la machine pour un calcul si minutieux".*

Pour ces 17 élèves, le résultat du maître supprime purement et simplement le résultat machine.

- **Il y a ensuite la catégorie des "conciliateurs":** ces élèves vont essayer de faire coexister les résultats machines et les résultats théoriques. Il s'agit en fait d'une superposition des deux résultats, d'une "relecture" du résultat machine pour le faire rentrer "dans le rang". Ainsi, pour 4 élèves: " *la machine donnait à peu près le résultat: -1/6 est plus ou moins égal à 0", "Le range de la machine en y était trop grand et ne laissait pas à la machine la possibilité de distinguer la courbe de l'axe des abscisses".*

- **Il y a aussi la catégorie des "critiques":** ceux-ci vont tenter d'analyser la contradiction, vont faire agir un résultat sur l'autre. Ainsi 4 élèves notent que pour un Range "raisonnable", la machine donnait "le bon" résultat. C'est à dire que ces élèves essaient de cerner le domaine de validité de la machine: *"Quand x max plus grand que 10^{-3}, la machine donnait bien -1/6, après, comme elle calcule point par point, quand les nombres sont trop petits, on ne voit plus rien"*

- **Il y a enfin la catégorie des "perplexes":** Ces réactions me semblent importantes, parce que significatives des conceptions de beaucoup d'élèves. Voici ce qu'écrivent donc les deux derniers élèves:

*" Les résultats machine démontrent que la fonction se concentre de plus en plus avec l'axe des abscisses ; **la fonction, elle, ne semble pas démontrer** que sa limite en 0 est -1/6"*

" La machine arrondit les résultats, donc le graphique n'est pas précis, et on ne peut pas voir que la fonction tend vers 0"

Il ressort de ces phrases il me semble deux éléments très importants: pour l'élève pourvu d'une calculatrice graphique, la fonction **est** sa représentation graphique, plus que sa formulation algébrique. Et une calculatrice graphique confère le statut de preuve aux observations qu'on sera amené à faire.

Un mot pour conclure sur les conditions de mise en oeuvre de cette troisième activité. Avec plus de temps, j'aurai souhaité procéder autrement. Avec un demi groupe, étudier graphiquement la limite; puis avec un autre demi groupe, effectuer la recherche théorique. Enfin organiser le confrontation entre ces deux groupes, et recueillir les conceptions émergeant à l'occasion de ce débat. Faute de temps (nous étions à la fin de l'année) cela n'a pas été possible.

Cette typologie des attitudes des élèves devant les calculatrices graphiques est donc tout à fait sommaire. Peut-être peut-on faire un parallèle avec les attitudes des élèves devant les calculatrices au collège. Bernard Blochs[1] distingue le calcul machine, le calcul papier-crayon, et le calcul mental.

Il cite F. Pluvinage: "Si le fait de savoir mettre en oeuvre une technique de calcul renvoie à une formation qui reste étroitement limitée, celui de choisir entre plusieurs techniques, pour appliquer celles qui sont le plus efficaces pour traiter des problèmes donnés, correspond à une formation mathématique réelle".

Il me semble que l'on retrouve la même problématique si on associe au calcul machine la manipulation de la calculatrice graphique, au calcul papier-crayon l'étude analytique des fonctions, et au calcul mental le recours aux fonctions de référence.

Le problème, pour l'enseignant, va donc être de réduire les attitudes exclusives, ou conciliatrices, au bénéfice des attitudes critiques.

Pour cela, il est indispensable d'introduire les calculatrices graphiques **dans** le processus d'apprentissage.

On a, il me semble, assez peu d'exemples, dans l'enseignement , de tels objets, décisifs pour les élèves, négligés par le maître.

A la différence de la télévision, qui a joué peut-être un rôle de ce type pour le professeur d'Histoire et Géogaphie, la calculatrice graphique est à disposition des élèves au sein même de la classe, et interfère en permanence avec le discours du maître.

Ainsi, la calculatrice graphique va avoir un caractère producteur très important, agissant sur toutes les concepts en cause dans le cours d'analyse (on l'a vu pour le concept de limite).

Comment, après ce constat des différences de statut accordées aux calculatrices par le maître et les élèves, peut-on envisager une intégration de ces objets dans la classe?

On lira ci-après quelques pistes de réflexion à cet égard.

---

[1] Bernard BLOCHS, "Calculs numériques en classe de quatrième", mémoire de DEA en Didactique des Mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg 1986.

3 Quelques perspectives

Il s'agit ici de donner quelques pistes de réflexion, en guise de conclusion. Ces pistes pourraient donner matière à des travaux ultérieurs, dans le cadre d'une ingéniérie didactique adapté aux calculatrices graphiques.

Il y a déjà des conditions d'ordre institutionnel

Ne pas tenir compte des calculatrices graphiques pour ne pas défavoriser les élèves qui n'en ont pas est largement illusoire. Cela revient à fermer les yeux devant une situation de fait. Prendre en compte cet outil supposerait :

- inscrire son apprentissage dans les programmes des sections scientifiques de lycée, au même titre que pour les calculatrices programmables. Cette évolution est inéluctable.

- comme pour les manuels scolaires, choisir un modèle par établissement, pour un certain nombre d'années, de telle façon que l'apprentissage collectif en soit facilité.

Il y a des conditions d'ordre pédagogique

Il est indispensable de prendre en compte les performances de la machine, et ceci de deux poins de vue:

- du point de vue des calculs: domaine de validité, précision des calculs (de telle façon que les élèves comprennent les errements éventuels, cf activité 3)

- du point de vue graphique propre: les manuels d'utilisation sont singulièrement discrets sur ce point[1] . Comment une courbe est-elle tracée ? Quelle est l'aire d'un point affiché ? Combien la calculatrice en trace-t-elle ? Relie-t-elle toujours deux points consécutifs, et de quelle façon ? Répondre à ces questions de façon claire est indispensable pour que les élèves puissent comprendre le surgissement inopiné d'asymptotes non sollicitées (cf en particulier dans l'activité 1 la résolution de l'équation x=tanx) . Le caractère réducteur du graphique-machine a ceci de commode qu'il présente des permanences que ne présentent pas les graphiques-papier des élèves. Mais ces permanences n'ont rien de naturel, de "transparent". Faire toute la clarté sur ce point est indispensable à la compréhension des graphiques affichés.Ceci nécessite de trouver des situations où ces problèmes se posent.

Il y a enfin des conditions plus générales d'ordre didactique

"Il faudrait qu'un autre traitement des rapports entre graphique et algébrique soit perçu par les élèves comme l'outil adapté et légitime pour résoudre une classe importante de problèmes (...). Mais ceci necessite un changement de statut du

---

[1] Pas un mot sur ce point par exemple dans le manuel d'utilisation de la récente TI 81, ni dans le manuel d'accompagnement pour les professeurs, de Gilles Baudrant et Daniel Vagost.

graphique dans l'enseignement: il ne peut rester un cadre mineur servant uniquement à la représentation, il doit prendre le statut de véritable cadre de travail mathématique"[1]

Ceci suppose des conditions sortant largement du cadre de ce mémoire, mais il me semble utile d'indiquer que les calculatrices graphiques peuvent être un outil tout à fait précieux pour permettre ce changement du statut du graphique dans l'enseignement:

Cela suppose déjà que l'interprétation graphique des programmes/ machine soit faite à chaque occasion: il est à ce propos tout à fait étrange que les manuels d'utilisation ou d'acompagnement des calculatrices graphiques soient silencieux sur l'interprétation graphique de deux points clefs: N-Dériv (qui donne une valeur approchée de la dérivée en un point), et le calcul approché d'une intégrale par la méthode de Simpson [2].

Cela suppose ensuite quele cadre graphique soit privilégié, dès lors qu'il est le plus efficace pour résoudre une classe de problèmes. On trouve dans de nombreux ouvrages des programmes de dichotomie pour résoudre des équations. Or il est beaucoup plus rapide - et plus naturel - de déterminer les valeurs approchées des solutions cherchées graphiquement, par zoom successifs, dès lors que les conditions d'existence des solutions, et de validité des tracés, ont été établies (cf l'équation tanx=100x...).

Cela suppose enfin de privilégier les activités pour lesquelles une combinaison des méthodes analytiques et des observations graphiques est nécessaire. Ainsi, la résolution de l'équation tanx=100x pourrait être reprise avec profit sous la forme: *"trouver la plus petite racine strictement positive de cette équation, avec une précision de 10^{-4}"*. La résolution de cet exercice nécessite d'abord la mobilisation de fonctions de référence, puis la justification analytique de l'existence d'une solution unique strictement positive inférieure à $\Pi/2$, puis le choix d'une fenêtre d'affichage centrée autour de $[\Pi/2, 50\Pi]$, qui permettra de localiser à la fois la représentation de la fonction tangente et le droite d'équation y=100x, puis dans cette fenêtre la dissociation de la courbe elle même et de l'asymptote qui vient encore parasiter l'écran...

Bref, un travail où, dans une complémentarité outil analytique/ outil machine, la calculatrice graphique retrouve un statut de légitimité commune professeur/élève, est réinsérée dans le processus de preuve, comme outil avec ses capacités, et ses limites propres, et qui exerce son pouvoir sous le contrôle de l'élève.

Les récents travaux sur les calculatrices graphiques sont, soit muets sur l'aspect graphique [3], soit présentent l'aspect graphique comme illustration, ou application, de l'aspect théorique [4].

Un travail de construction de séquences didactiques réinsérant l'outil graphique dans le processus de preuve est à faire. C'est en tous cas ce à quoi invite ce mémoire.

---

[1] Artigue M., Audimath n°2. Le mot cadre est ici à prendre dans son sens courant...

[2] TROUCHE L., 1991, *Documents pour les stages*, Groupe analyse, IREM de Montpellier

[3] IREM de Nice, 1990, *Apprentissage de la programmation de votre calculatrice*

[4] BAUDRANT et VAGOST, déjà cités, ou la production américaine, très riche sur le sujet (en particulier DEMANA-WAITS-CLEMENS, 1992)

Annexe 1

A propos de l'enseignement de l'analyse en 1°S

QUESTIONNAIRE A DESTINATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

Q10 Les élèves en 1°S cette année suivent depuis la 6° un nouveau programme en mathématiques. Comment jugez-vous leur réussite en analyse, comparée aux années antérieures?

	Meilleure	Identique	Moins bonne
Suites			
Limites			
Dérivées			
Graphiques			

Q20 Pour l'achat d'une calculatrice en début d'année, avez-vous donné à vos élèves **(répondre par oui ou par non)** :
Q21 des conseils
Q22 des consignes
Q23 Si oui, l'avez-vous fait en collaboration avec vos collègues de mathématiques?
Q24 de physique ?
Q25 Avez-vous suggéré une calculatrice programmable ?
Q26 une calculatrice graphique ?
Q27 un modèle particulier ?

Q30 Jugez-vous le programme d'analyse de 1°S:
Trop lourd ☐ Equilibré ☐ Trop léger ☐
Q31 S'il est trop lourd, quelle partie alléger ?
Q32 S'il est trop léger, qu'y rajouter ?
Q33 De façon générale, quelle modification jugeriez-vous utile d'y apporter ?

Q40 Avez-vous organisé des séances spécifiques cette année pour l'apprentissage du maniement des calculatrices ? (**Oui ou non**)
Q41 Si oui, combien d'heures ?
Q42 Sous quelle forme: COURS ☐ TP ☐ AUTRE ☐
Q43 Pour l'aspect programmation ? OUI ☐ NON ☐
Q44 Pour l'aspect utilisation graphique OUI ☐ NON ☐
Q45 Vous êtes-vous heurtés à des problèmes inattendus dans l'utilisation de la calculatrice ?
Q46 Si oui, lesquels ?

Q50 Pensez-vous finir le programme d'analyse cette année **(oui ou non)** ? Sinon, quelle partie sacrifierez vous ?

Q60 Quel pourcentage d'élèves de votre classe possède-t-il une calculatrice graphique ?
Q61 Les calculatrices graphiques sont-elles autorisées lors des contrôles en classe ? **(Oui ou non)**
Q62 Les élèves ayant une calculatrice graphique ont-ils, quant à l'étude des fonctions, une meilleure performance que les autres élèves ? **(Oui ou non)**
Q63 Si oui, en quoi ?
Q64 L'introduction des calculatrices graphiques vous a-t-elle conduit à modifier votre enseignement des fonctions ? **(Oui ou non)**
Q65 Si oui, en quoi ?
Q66 Donnez-vous des travaux spécifiques nécessitant l'utilisation des calculatrices graphiques? **(Oui ou non)**
Q67 Si oui, des travaux de quel type ?
Q68 Pensez-vous que la généralisation des calculatrices graphiques soit positive pour l'enseignement des fonctions ?
Q69 En quoi ?

Q70 La généralisation des calculatrices graphiques doit-elle conduire à une modification des programmes ?
Q71 Si oui, dans quel sens ?

Q80 De façon générale, comment qualifierez-vous les élèves que vous avez en 1°S cette année par rapport aux élèves des années précédentes ?

Merci de bien vouloir remplir ce questionnaire, qui sera tout à fait utile dans le cadre des travaux engagés à l'IREM de Montpellier, et qui le sera d'autant plus qu'il aura été rempli par plus de collègues concernés.

Le questionnaire rempi peut être retourné à........ ou à la commission analyse de l'IREM de Montpellier.

Annexe 2
TABLEAU RECAPITULATIF DES RÉPONSES AU QUESTIONNAIRE
"PROFESSEURS DE 1°S"
(Mai 1992, 32 questionnaires remplis)

Q10: Les élèves en 1°S cette année suivent depuis la 6° un nouveau programme en math
Comment jugez-vous leur réussite en analyse, comparée aux années antérieures?

	Meilleure	Identique	Moins bonne
Suites	2	20	2
Limites	9	16	2
Dérivées	3	21	3
Graphiques	7	16	3

Q20: Pour l'achat d'une calculatrice en début d'année, avez-vous donné à vos élèves:

	Oui	Non
Q21: Des conseils	29	3
Q22: Des consignes	6	21
Q23: En lien avec les profs de math	15	9
Q24: De physique?	0	19
Q25: Pour une calculatrice programmabl	26	3
Q26: Pour une calculatrice graphique?	12	15

Q30: Jugez-vous le programme d'analyse en 1°S:

Trop lourd	Equilibré	Trop léger
2	25	4

Q40: Avez-vous organisé des séances spécifiques cette année
pour l'apprentissage du maniement des calculatrices?

Oui: 19 Non: 11

Q41: Si oui, combien d'heures? Moyenne des 16 réponses: 2h30mn

Q43: Pour la programmation? Oui:18 Non:1

Q44: Pour l'aspect graphique ? Oui: 8 Non:11

Q50: Pensez-vous finir le programme d'analyse cette année?

Oui: 28 Non: 4

Q60: Quel poucentage d'élèves de votre classe possède-t-il une calc. graphique ?

Réponse moyenne, sur 29 réponses: 69%

Annexe 2 (suite)

Q61: Les calc. graphiques sont-elles autorisées lors des contrôles?			
Oui:	30	Non:	0
Q62: Les élèves ayant une calc. graphique ont-ils, quant à l'étude ds fonctions, une meilleure performance que les autres élèves?			
Oui:	7	Non:	20
Q64: L'introduction des calculatrices graphiques vous a-t-elle conduit à modifier vote enseignement des fonctions ?			
Oui:	8	Non:	22
Q66: Donnez-vous des travaux spécifiques nécessitant l'utilisation des calculatrices graphiques ?			
Oui:	2	Non:	28
Q68: Pensez-vous que la généralisation des calc. graphiques soit positive pour l'enseignement des fonctions?			
Oui:	20	Non:	7
Q70: La généralisation des calc. graphiques doit-elle conduire à une modification des programmes ?			
Oui:	9	Non:	16
Q80: De façon générale, comment qualifierez-vous les élèves que vous avez en 1°S cette année par rapport aux élèves des années précédentes ?			

Questionnaire rempli par 32 professeurs de 1°S

Lycées de la région de Montpellier

Mai 1992

Annexe 3

A propos de l'enseignement de l'analyse en 1°S

QUESTIONNAIRE A DESTINATION DES ELEVES
AYANT UNE CALCULATRICE GRAPHIQUE

Q10 Que trouvez -vous le plus utile sur votre calculatrice:
L'aspect graphique ? L'aspect programmation ?

Q20 Savez-vous:			
Q21 Programmer une fonction	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q22 Ecrire des programmes plus sophistiqués	Oui ☐	Non ☐	
Q23 Si oui, lesquels ?			
Q24 Utiliser les ressources graphiques ?	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐

Q30 Comment avez-vous appris à vous servir de votre calculatrice ?			
Q31 En manipulant la calculatrice	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q32 En lisant le mode d'emploi	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q33 En regardant faire les copains	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q34 Avec le professeur	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q35 Autrement			

Q40 Qu'utilisez-vous comme outil de travail chez vous			
Q41 Le cahier de cours	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q42 Le livre de mathématiques	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q43 La calculatrice	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q44 Autre (lequel?)			

Q50 Vous étudiez une fonction dans quel ordre ? (numérotez de 1 à 6 ou 7)
Calcul de limites
Affichage du graphique sur la calculatrice
Etude de la dérivée
Construction de la représentation graphique
Utilisation de fonctions de références
Etude du domaine de définition
Autre (quoi ?)....

Q60 Les calculatrices graphiques sont-elles utiles pour			
Q61 L'étude du sens de variation des fonctions	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q62 L'étude des limites des fonctions	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q63 La construction du graphique des fonctions	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q64 La résolution d'équations	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q65 La détermination du domaine de définition	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q66 Autre (quoi ?)			

Q70 Pour l'étude des fonctions, votre calculatrice vous permet plutôt de			
Q71 Prévoir le graphique	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐
Q72 Vérifier le graphique	Oui ☐	Non ☐	Un peu ☐

Q80 Si les résultats affichés sur votre écran ne correspondent pas à vos calculs, que mettez-vous plutôt en doute:

Vos calculs	Oui ☐	Non ☐
Les performances de la machine	Oui ☐	Non ☐

Q90 Avez-vous été surpris par certains résultats affichés par votre calculatrice ?
Oui ☐ Non ☐

Q91 Si oui, en quelles occasions ?

Q100 Une fonction est-elle représentée fidèlement par une calculatrice graphique ?
Q101 Pourquoi ?

Q110 Que savez-vous faire avec votre calculatrice graphique ?

Annexe 4
TABLEAU RECAPITULATIF DES REPONSES AU QUESTIONNAIRE "ELEVES DE 1°S"

(Mai 1992, 62 élèves, issus de 3 classes, interrogés)

Q10: Que trouvez-vous plus utile sur votre calculatrice:

L'aspect graphique: 31 ...ou programmation: 10

Q20 :Savez-vous...	Oui	Un peu	Non
Prog. une fonction	55	6	0
D'autres prog ?	14	2	40
Utiliser la calc graph.	45	13	2

Q30: Comment avez-vous appris à vous servir de cette machine ?

	Oui	Un peu	Non
En manipulant	47	12	0
Avec les copains	31	14	10
Avec mode d'emploi	28	24	7
Avec le prof	9	19	25

Q40: Qu'utilisez-vous comme outil de travail chez vous ?

	Oui	Un peu	Non
Le cahier de cours	47	9	6
Le livre de math	37	21	3
La calculatrice	32	21	6

Q50: Vous étudiez une fonction dans quel ordre? (numéroter de 1 à 6 ou 7)

Calcul de limites	
Dérermination du domaine de définition	
Affichage du graphique sur la calculatrice	
Etude de la dérivée	
Construction de la représentation graphique	
Comparaison avec des fonctions de référence	
Autre (quoi?)	

Q60: Les calculatrices graphiques sont-elles utiles pour l'étude:

	Oui	Un peu	Non
Du sens de variation	40	13	8
Des limites	24	24	14
Du graphique	57	4	1
Des équations	23	15	23
Du dom. de déf.	14	17	31
Autre			

Annexe 4 (Suite)

Q70: Pour l'étude d'une fonction, votre calculatrice vous permet plutôt de:

	Oui	Un Peu	Non
Prévoir le graphique	35	17	6
Vérifier le graphique	52	6	2

Q80: Si les résultats affichés sur votre écran ne correspondent pas à vos calculs, que mettez-vous plutôt en doute ?

	Oui	Non
Vos calculs	55	6
Les performances de la machine	15	43

Q90: Avez-vous été surpris par certains résultats affichés par votre calculatrice?

Oui:	33	Non:	29

Q100: Une fonction est-elle représentée fidèlement par une calculatrice graphique ?

Oui:	22	Non:	33

Q110: Que savez-vous faire avec votre calculatrice graphique ?

Petite bibliographie

AUDIMATH, 1990,*Graphiques et raisonnements, de l'Ecole Primaire au Deug*, Paris, Education Nationale.

BAUDRANT Gilles et VAGOST Daniel, 1991,*Mathématiques et Physique avec un calculateur programmable"*, Paris, Texas Instrument.

BLOCHS Bernard, 1986, *Calculs numériques en classe de quatrième*, Strasbourg, Mémoire de DEA.

DEMANA-WAITS-CLEMENS, 1992, *Graphing calculator and computer, graphing laboratory manual*, et *Collège algebra et trigonometry, a graphing approach*, New-York, Addison-Wesley.

DUVAL R., 1988, *Graphiques et equations, l'aticulation de deux registres* , Strasbourg, Annales de didactique de l'IREM de Strasbourg.

IREM , 1990/1992, *Calculatrices programmables au lycée* , Nice.

IUFM Grenoble mathématiques, 1992, *Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée*, Université Paris 7.

LEROUGE Alain, (A Paraître), *Contagion de signifiant et contagion de référence sur la conceptualisation mathématique de l'intersection de deux droites*, Revue Les Sciences de l'Education.

MUCCHIELLI Alex, 1987,*L'enseignement par ordinateur*, Paris, PUF.

NADOT Suzanne, 1991, *Représentations graphiques et études de fonctions, les problèmes didactiques et cognitifs du changement de repère* , Thèse soutenue à l'Université René Descartes.

ROGALSKI J.,1982, *Les représentations graphiques dans l'enseignement*, Seconde école d'été de didactique des mathématiques .

TROUCHE Luc, 1991, *Quelques problèmes autour de l'introduction des calculatrices graphiques*, et *Activités numériques et graphiques autour de la notion de tangente et du nombre dérivé*, Documents Irem de Montpellier.


DRÔLE DE SITUATION ... JE ME DEMANDE POURQUOI JE FINIS TOUJOURS PAR ÊTRE MÊLÉ A CE GENRE D'HISTOIRES.
QUE DE PROBLÉMES ... QUE DE PROBLÉMES... QUE DE PROBLÉMES...