CALCULATRICES SYMBOLIQUES ET ALGEBRE

Atelier animé par :

Christian FAURE, Joëlle FONTANA, Maryse NOGUES

Groupe Analyse, IREM de Montpellier.

Résumé : Quels sont les apports d'un logiciel de calcul formel pour l'apprentissage de l'algèbre ? A travers deux exemples (factorisation de polynômes et résolution d'équation), on explorera différentes contributions d'un tel logiciel aux gestes de l'algèbre.

On soulignera aussi la nécessité de diversifier les approches afin de donner du sens à certains résultats suivant les commandes ou le mode utilisés.

1. Introduction

Loin de l'étude des structures, les élèves voient dans l'algèbre une manipulation de chiffres et de lettres.

L'intervention des machines à calculer est venue interférer avec l'apprentissage du calcul. Il a été beaucoup dit et écrit sur l'appropriation de cet environnement de « calcul numérique » par les élèves. Le débat n'est pas vraiment clos, mais une idée force s'est dégagée : celle de la maîtrise du résultat par le concept d'ordre de grandeur.

Les calculatrices munies d'un logiciel de calcul formel confrontent les élèves avec un nouvel environnement que nous appelons environnement de «calcul symbolique». Même si cette confrontation est encore confidentielle, car récente, des études ont été faites sur les perspectives comme outil pédagogique et sur les obstacles qu'elle va créer lors de l'apprentissage de l'algèbre, en particulier par Michèle Artigue et l'équipe Didirem [Artigue 95].

Nous reprendrons ici, à la suite de cette analyse, les apports possibles d'un logiciel de calcul formel à l'apprentissage de l'algèbre. Les exemples donnés en ce qui concerne la factorisation et la résolution d'équation correspondent à des travaux qui ont été développés par l'équipe Didirem. Une étude de ces différentes situations est également disponible sur le site WEB : http//www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm, sous le titre "Faire des mathématiques avec un système de calcul formel" tomes 1 et 2.

En premier lieu, nous rappellerons toutefois les grands traits caractéristiques des deux environnements :

- l'environnement calcul numérique tel qu'on le trouve sur la plupart des calculatrices scientifiques ou graphiques qui ont totalement investi le collège et le lycée ;
- l'environnement calcul symbolique tel qu'on le trouve sur de machines haut de gamme telle la TI-89, TI-92 .... et de façon encore plus élaborée et hermétique comme dans mapple, mathématica ...

2. Calcul numérique, calcul symbolique

2.1. Le calcul numérique

(Support : TI-80 à 86, Casio 20 Graph, 40 Graph...)

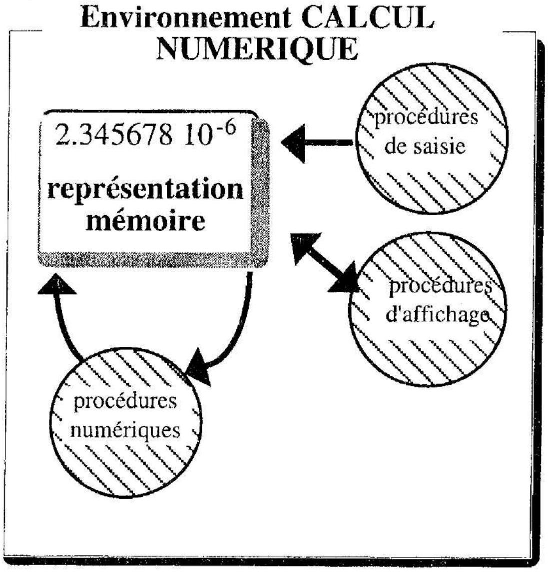
• La représentation mémoire d'un nombre est un «réel tronqué»[16].

• Les procédures numériques travaillent sur des **types** bien définis, construits sur le type «réel tronqué» et ayant un format fixé par la représentation mémoire des nombres.

A pourra être du type :

un «réel tronqué» ;
un tableau de «réel tronqué» ;
une liste de «réel tronqué» ;
....
un xxxxxxx de «réel tronqué».

Et la procédure appelée par : « A^{-1} » n'a que deux résultats :
soit un xxxxxxx de «réel tronqué» ;
soit un message d'erreur.



• La procédure de saisie fait une évaluation de la chaîne donnée au clavier et pour cela appelle des procédures numériques[17]. Les symboles littéraux sont systématiquement remplacés par leur valeur en accord avec leur type.

Nous dirons qu'ils sont "instanciés" en un couple **(type ; valeur)**[18].

Par exemple π, généralement accessible par une touche, est instancié par le constructeur en un (*réel tronqué* ; 3,141).

Exemple d'analyse : tan ($n*\pi + \pi/2$) pourvu que n soit par exemple (réel tronqué ; 1,414)

$\boxed{n*\pi + \pi/2}$

{somme de produits de réels tronqués}

↳ un réel tronqué

$\boxed{\text{tan(réel tronqué)}}$

{procédure d'approximation d'une tangente}

↳ un réel tronqué
un message d'erreur

Exemple d'analyse : $K*A^{-1}$; K ayant pour valeur 6 de type réel tronqué et A ayant pour valeur des réels tronqués dans un tableau.

$\boxed{A^{-1}}$

{procédure d'approximation d'une inverse de matrice}

↳ une matrice de réels tronqués
un message d'erreur

$\boxed{K*A^{-1}}$

[16] Voir [Bernard et al, 1998].

[17] Calculs approchés d'une racine, d'un logarithme, d'une ligne trigonométrique, etc...

[18] Certaines calculatrices "primaires" règlent ce problème ainsi : tout est instancié en : (réel tronqué ; 0), matrices et listes ne sont définies que par des touches du clavier.

{il y a un réel tronqué et une matrice donc multiplication : réel x matrice}

↳ | une matrice de réels tronqués

Cet exemple montre comment l'opérateur de multiplication s'est adapté. La procédure de multiplication a été définie par le contexte fixé par le type des opérandes ; ici il s'agissait d'une multiplication entre réel et matrice.

Nous retiendrons de cette description de l'environnement calcul numérique que :

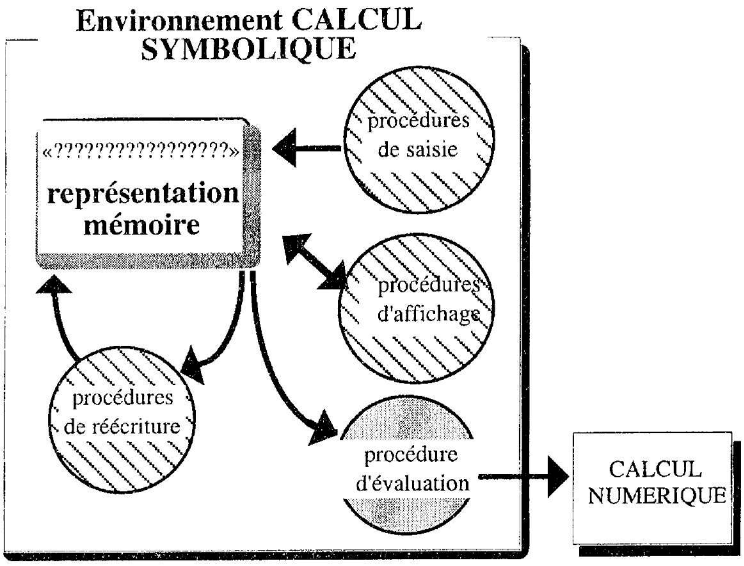
- les procédures numériques sont toutes des procédures d'approximation ; - le contexte pour le symbole l'opérateur définit le type systématiquement associé aux symboles opérandes.

2.2. Le calcul symbolique [19]

(Support : TI-89, 92, Casio 60 Graph...)

• La représentation en mémoire des objets manipulés dans cet environnement met en jeu des aspects syntaxiques et des choix ou des styles de programmation qui ne sont pas connus de l'utilisateur.

• Les procédures de réécriture traitent des symboles que nous définissons comme un couple : **(nom ; ensemble de règles).**



Exemple : π , *, ln, ∞, A, x, symboles correctement construits,... etc.

π est - un nom (accessible par une touche sur la TI-89, 92) ;

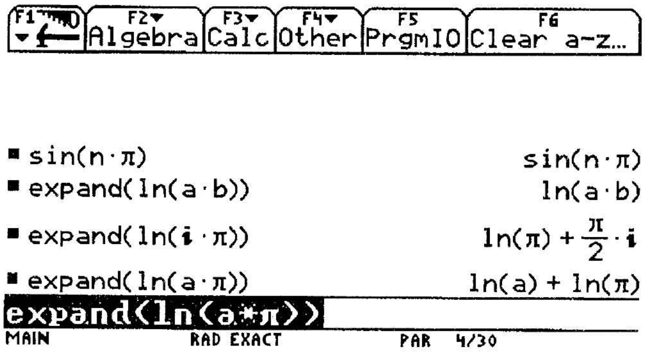
- un ensemble de règles (telles que $\sin(\pi) = 0$, $\pi > 0$, représentation tronquée...).

Le symbole π est associé par le concepteur du logiciel à un ensemble de règles qui conditionneront la performance du logiciel.

Il en và autrement pour un mot quelconque (non réservé) il est susceptible d'être un nom de symbole mais aucun ensemble de règles ne lui est attaché, il n'a aucun type.

[19] Voir [Salvy, 1999].

Exemple :

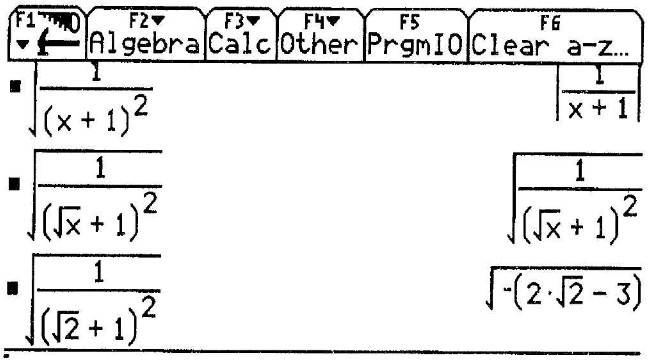


• n*π est un symbole construit où n n'a aucune règle (il est plus naturel d'appeler n*π une expression) mais n*π n'a aucune raison d'être lié à sin (n*π) = 0 du moins dans le logiciel de la TI-92.

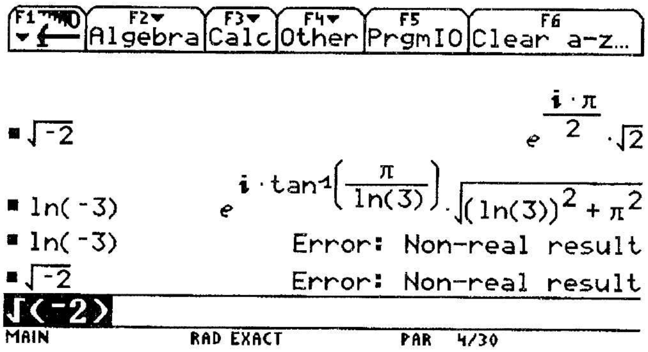
• a et b ne sont pas associés à des règles mettant en jeu le développement du logarithme d'où aucun résultat.

• i et π sont associés à des règles, le contexte place ln sur le domaine complexe.

• π est réel, la règle s'applique (et reste correcte quand bien même a serait complexe).



• La procédure de saisie qui reçoit la chaîne de caractères frappée au clavier, fait une analyse syntaxique "en profondeur" et procède à des réécritures liées aux symboles rencontrés.



• Le symbole ln peut s'associer aussi à un nombre complexe. Le logiciel se place dans le domaine le plus large produisant des résultats qui peuvent être indésirables.

• On peut cependant (sur la TI-92) ajuster un "filtrage" sur l'affichage (MODE -> REAL).

Nous retiendrons de cette description de l'environnement calcul symbolique que :

- les procédures symboliques sont des procédures de réécritures, et il n'y a pas de format d'écriture canonique ;
- un symbole n'est pas associé systématiquement à un type ;
- contexte parfois équivoque sinon indésirable.

3. Les apports potentiels d'un logiciel de calcul formel à l'enseignement de l'algèbre

3.1. Favoriser le travail sur la reconnaissance des formes syntaxiques

Par exemple, l'utilisation des différentes commandes qui correspondent à Solve et Factor demande que soient distingués l'inconnues et paramètres. Il faut aussi prendre en compte l'ensemble sur lequel on cherche les solutions.

Les résultats obtenus seront différents selon les spécifications.

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\text{solve}(x^2 + x - a = 0, x)$

$$x = \frac{-(\sqrt{4 \cdot a + 1} + 1)}{2} \text{ or } x = \frac{\sqrt{4 \cdot a + 1} - 1}{2}$$

■ $\text{solve}(x^2 + x - a = 0, a)$ $\quad a = x \cdot (x + 1)$

solve(x^2+x-a=0)

MAIN RAD EXACT FUNC 2/30

• Selon que l'on déclare x ou que l'on déclare a comme inconnue, le résultat est différent (il n'y a d'ailleurs dans le premier cas aucune indication sur la validité de la solution). La dernière commande entraîne un message d'erreur : « pas assez d'arguments ».

■ $\text{factor}(x^2 + x - 1)$ $\quad x^2 + x - 1$

• Correspond au mode exact, les racines irrationnelles ne sont pas « détectées ».

■ $\text{factor}(x^2 + x - 1)$

$$(x - .61803398875) \cdot (x + 1.61803398875)$$

• Correspond au mode approché.

■ $\text{factor}(x^2 + x - 1, x)$

$$\frac{(2 \cdot x + \sqrt{5} + 1) \cdot (2 \cdot x - \sqrt{5} + 1)}{4}$$

factor(x^2+x-1,x)

MAIN RAD EXACT FUNC 4/4

• L'introduction de x permet d'obtenir les racines irrationnelles sous forme exacte.

■ $\text{factor}(x^3 + x - 2)$ $\quad (x - 1) \cdot (x^2 + x + 2)$

■ $\text{factor}(x^3 + x - 2, x)$ $\quad (x - 1) \cdot (x^2 + x + 2)$

• La factorisation rationnelle ou réelle donne le même résultat.

■ $\text{cFactor}(x^3 + x - 2)$ $\quad (x - 1) \cdot (x^2 + x + 2)$

■ $\text{cFactor}(x^3 + x - 2, x)$

$$\frac{(x - 1) \cdot (2 \cdot x - (-1 + \sqrt{7} \cdot i)) \cdot (2 \cdot x + 1 + \sqrt{7} \cdot i)}{4}$$

cfactor(x^3+x-2,x)

MAIN RAD EXACT FUNC 3/4

• cFactor permet d'obtenir la factorisation dans $\mathbb{C}$ (ici en mode rectangulaire). La non spécification de x a des effets similaires à ceux de la commande factor : les coefficients de a + ib ne peuvent être que rationnels.

3.2. Donner du sens à certains gestes de l'algèbre

Par exemple à certaines manipulations sur les (in)équations.

Les manipulations sur les équations et inéquations ont été installées (ou se sont installées) sous la forme d'algorithmes à base de "faire passer". Ces algorithmes créent des obstacles importants dès qu'il s'agit de traiter des inéquations un peu élaborées.

En utilisant une addition et une multiplication à opérateurs réels définies sur les fonctions propositionnelles, ont peut illustrer de façon très significatives les équivalences classiques.

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ solve(7·x − 2 = 5 − 3·x, x)	x = 7/10
■ 7·x − 2 = 5 − 3·x → eq	7·x − 2 = ⁻3·x + 5
■ (7·x − 2 = ⁻3·x + 5) + 3·x	10·x − 2 = 5
■ (10·x − 2 = 5) + 2	10·x = 7
■ $\frac{10\cdot x = 7}{10}$	x = 7/10

ans(1)/10

MAIN RAD EXACT FUNC 5/30

• Le type fonction propositionnelle définit un contexte où addition et multiplication par une expression prennent une forme qui redonne sens au "faire passer".

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ x − 5 > 2 + 7·x → ineq	x − 5 > 7·x + 2
■ ineq − 7·x → ineq	⁻6·x − 5 > 2
■ ineq + 5 → ineq	⁻6·x > 7
■ $\frac{\text{ineq}}{^{-}6}$ → ineq	x < ⁻7/6

ineq/⁻6→ineq

MAIN RAD EXACT PAR 4/30

• Ce sens est particulièrement important dans le traitement des inéquations où il est essentiel de bien montrer qu'il s'agit de multiplier des deux côtés.

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\frac{5\cdot x - 1}{x - 2} > 2$ → eq	$\frac{5\cdot x - 1}{x - 2} > 2$
■ eq·(x − 2)	$(x - 2)\cdot\left(\frac{5\cdot x - 1}{x - 2} > 2\right)$
■ eq·(x − 2) | x > 2	5·x − 1 > 2·(x − 2)
■ eq·(x − 2) | x < 2	5·x − 1 < 2·(x − 2)

MAIN RAD EXACT FUNC 4/30

• La multiplication par (x-2) reste inopérante puisque illégale. Par contre, en spécifiant le signe de (x-2), la multiplication est faite conformément aux règles.

• Sur d'autres exemples, on peut remarquer qu'il n'y a pas de gestion des "valeurs interdites". Celle ci relève d'une phase préalable à faire à la main.

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\frac{3\cdot(x - 1)}{7} = 7\cdot x - 3$ → eq	$\frac{3\cdot(x - 1)}{7} = 7\cdot x - 3$
■ eq·7 → eq	3·(x − 1) = 7·(7·x − 3)
■ $(2\cdot x - 3)^2 = 4$ → eq	$(2\cdot x - 3)^2 = 4$
■ eq − 4 → eq	$4\cdot x^2 - 12\cdot x + 5 = 0$

eq−4→eq

MAIN RAD EXACT PAR 4/30

• L'analyse syntaxique échappe à tout contrôle de l'utilisateur, ce qui peut conduire à des situations qui peuvent susciter un débat intéressant :

cas : $\frac{3(x-1)}{7} = 7x - 3.$

Mais ces mêmes procédures peuvent conduire sur un cul de sac :

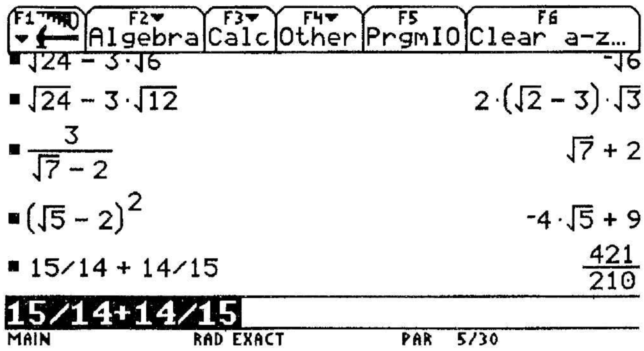
cas : $(2x - 3)^2 = 4.$

3.3. Modifier le rapport aux nombres

Par exemple en régénérant la problématique du "simplifier".

«Simplifier» sous entend un contrat tacitement fixé par le professeur, contrat déclencheur d'un algorithme conduisant à un format réputé "plus simple" (avec moins de symboles ?).

Cette démarche masque l'objectif visé : la prise en compte des multiples écritures d'un nombre, dont l'une sera, selon le problème, plus adaptée. Sans oublier, que dans tous les cas, on peut obtenir les "caricatures" que sont les approximations décimales.



• L'analyse syntaxique que fait le logiciel de calcul formel induit une nouvelle problématique : justifier que deux écritures représentent le même nombre.

• Cette problématique peut trouver sa place, par exemple, quand il faudra confronter deux écritures d'un résultat.

3.4. Favoriser des démarches conjectures - démonstrations

La géométrie, l'analyse sont des champs privilégiés pour l'exercice d'une démarche expérimentale. En utilisant la puissance de calcul de la machine on peut dans le domaine de l'algèbre, qui parait pourtant assez peu propice, créer les conditions d'une démarche par conjecture, preuve.

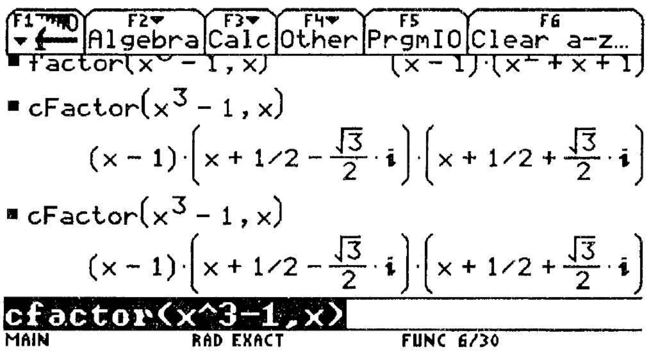
<u>A propos de la factorisation[20] de $X^n - 1$</u>

On peut utiliser les différentes commandes :

factor (......) qui correspond à une factorisation rationnelle ;

factor(......,x) qui correspond à une factorisation réelle ;

cFactor(......) ou cFactor(......,x) qui correspond à une factorisation complexe. On pourra observer les différents résultats en fonction du mode choisi : rectangulaire ou polaire.



• Les factorisations proposées par la calculatrice pour $x^3 - 1$. Si le mode est « polar », avec cfactor on obtient une forme avec une écriture exponentielle.

---

[20] Nous rappelons que ce qui suit est un simple aperçu d'une activité qui a été largement développée dans les ouvrages indiqués en introduction.

Quelques pistes

La factorisation rationnelle semble la plus adaptée dans le cadre d'un travail avec des élèves de première sur les factorisations de $X^n - 1$; en effet, les élèves peuvent dans ce cas, en observant les résultats donnés par la machine, émettre un certain nombre de conjectures et tenter de les justifier, par exemple :

la factorisation par $X - 1$ dans tous les cas et chercher la forme générale de l'autre facteur ; remarquer ensuite que c'est cette factorisation que donne la machine lorsque n est premier.

la factorisation par $X^2 - 1$ lorsque n est pair et tenter d'obtenir la forme générale de l'autre facteur ; remarquer aussi que la machine donne la plupart du temps d'autres factorisations.

ou encore : le nombre de facteurs est égal au nombre de diviseurs de n ; remarquer l'occurrence de certains facteurs $(X^2 + X + 1)$, $(X^2 - X + 1)$...

Compléments théorique

La factorisation rationnelle de $X^n - 1$ donnée par la machine est celle correspondant à la théorie des polynômes cyclotomiques qui établit les résultats suivants :

- Si n est premier, on a la décomposition rationnelle unique suivante :

$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)$

- Dans le cas général : $X^n - 1 = \prod_d \phi_d$ où d est un diviseur de n et pour d entier naturel, ϕ_d

est le polynôme défini par $\phi_d = \prod_i (X - \chi_i)$ où χ_i est une racine primitive d-ième de l'unité (On appelle racine primitive d-ième de l'unité un nombre $e^{i2\pi k/d}$ où k et d sont premiers entre eux et on pose $\phi_1 = X - 1$.

- Exemple : Factorisation rationnelle de $X^6 - 1$

Les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3, 6.

- On a $\phi_1 = X - 1$.
- L'unique racine seconde primitive de l'unité est $e^{i2\pi/2} = -1$ donc $\phi_2 = X + 1$.
- Les deux racines troisièmes primitives de l'unité sont : $e^{i2\pi/3}$ et $e^{-i2\pi/3}$ donc

  $\phi_3 = (X - e^{i2\pi/3})(X - e^{-i2\pi/3}) = X^2 + X + 1$.
- Les deux racines sixièmes primitives de l'unité sont $e^{i2\pi/6}$ et $e^{i10\pi/6}$ et donc

  $\phi_6 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}) = X^2 - X + 1$.

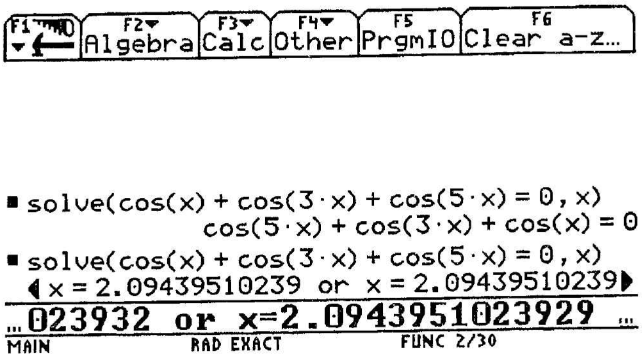
On a donc $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

3.5. Conforter des liens entre l'algèbre et l'analyse

L'utilisation d'une calculatrice symbolique permet des aller-retour permanents entre aspect formel et graphique. Ces interactions permettront de vérifier ou d'infirmer la validité de certaines hypothèses.

Par exemple, résolution de l'équation $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

Utilisation de la commande solve.



• En mode exact, la calculatrice ne renvoie aucune solution, en mode approché, on obtient 16 solutions.

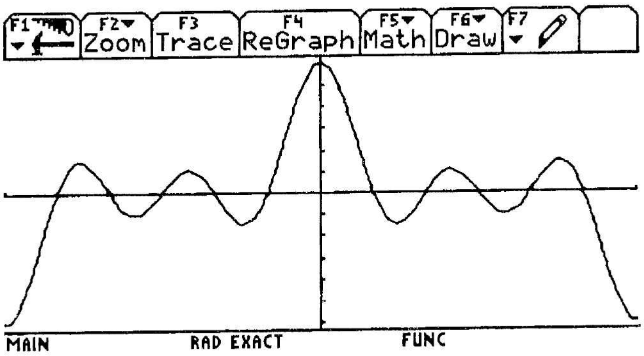
Dont deux semblent être répétées deux fois... (en fait si l'on observe les chiffres cachés par la calculatrice, on découvre que les dernières décimales ne sont pas les mêmes).

• Si l'on utilise le mode auto, 13 solutions apparaissent...

Le traitement de cette équation demande quelques petits détours théoriques qui permettront de valider ou invalider ces réponses assez contradictoires.

Petit détour graphique

La fonction $f(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x$ est de période 2π, ainsi il suffit de connaître les solutions dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ pour obtenir les solutions dans $\mathbb{R}$.



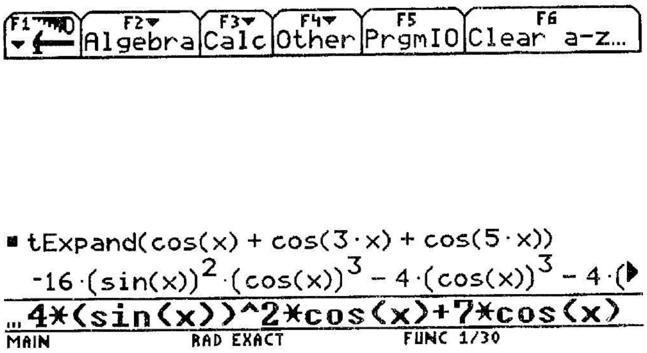
• L'observation de la courbe sur $[-\pi ; \pi]$ donne apparemment 10 solutions.

• Alors que si l'on dénombre les solutions approchées données par solve, il y en a 12 pour le même intervalle.

• On pourrait aussi restreindre à l'intervalle $[0 ; \pi]$ en considérant la parité de $f(x)$.

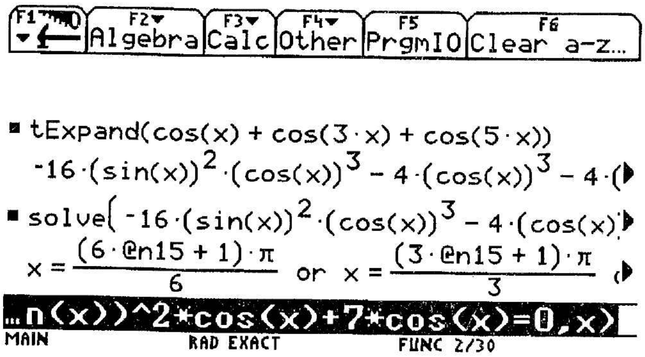
Le mode approché a introduit des " solutions " incorrectes (problème d'approximation par dichotomie ou autre qui génère ce genre d'erreur), une vérification s'impose.

Retour sur les outils de calcul formel



• La fonction trigonométrique donnée est linéarisée, par l'opération inverse nous pouvons espérer récupérer un polynôme en cos x. L'opération inverse de la linéarisation est obtenue par la commande tExpand.

La forme obtenue n'est pas exactement idéale, mais il suffit de transformer $\sin^2 x$ pour une recherche à la main des solutions.



• Solutions qui sont d'ailleurs cette fois-ci données par la calculatrice sous forme exacte dans $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'un travail d'interprétation à effectuer pour retrouver les 10 solutions dans [-π ; π] correctes. Il s'agissait bien dans le mode approché d'une erreur d'approximation.

On peut aussi observer que si l'on demande la résolution de l'équation pour $0 < x < \pi$, la calculatrice renvoie les solutions avec le même format.

<u>Remarques</u>

Pour un calcul « à la main », la forme obtenue avec tExpand est :

$$f(x) = -16 \sin^2x \cos^3x - 4 \cos^3x - 4 \sin^2x \cos x + 7 \cos x$$

soit $f(x) = -16 (1 - \cos^2x) \cos^3x - 4 \cos^3x - 4 ((1 - \cos^2x) \cos x + 7 \cos x$

ou encore $f(x) = \cos x (16 \cos^4x - 16\ co^s2x + 3)$

Ainsi on a pour les valeurs possibles de cos x : 0 ; 1/2 ; -1/2 ; ° 3/2 ; - ° 3/2.

D'où les solutions modulo π sont : π/6 ; π/3 ; π/2 ; 2π/3 ; 5π/6 et leurs opposés.

Notons que la forme des solutions exactes données par la calculatrice correspond à un regroupement de π/6 et - 5π/6, π/3 et - 2π/3, etc... (solutions modulo π), ce que l'on pouvait déjà prédire puisqu'une des propriétés de f est : $f(x + \pi) = - f(x)$.

Bibliographie

ARTIGUE M. [1995]. *Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques.* Repères n°19.

BERNARD R. et al. [1998]. *Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée.* IREM de Montpellier.

CRDP Reims, *Faire des mathématiques avec un système de calcul formel,* tomes 1 et 2, http//www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm.

SALVY B., Dumas P. [1999]. HYPOTHESES, n° Avril - Mai.