

TABLEUR, ARITHMETIQUE ET ALGÈBRE

Atelier animé par :

Bernard CAPPONI

EIAH –Leibniz, Grenoble

&

Lycée Aristide Bergès, Seyssinet-Pariset.

Résumé : Cet atelier présente quelques éléments d'une étude sur les rapports entre arithmétique et algèbre tels qu'ils peuvent être analysés dans le fonctionnement d'un tableur.¹³

1. Quelques éléments de fonctionnement des tableurs

Une présentation rapide des tableurs a été faite dans l'atelier nous ne donnerons ici que quelques conclusions d'une analyse de ces outils.

1.1. Nombres, formules et feuille de calcul

Les tableurs permettent d'éditer des textes, des nombres et des formules.

Les formules permettent de créer des tableaux qui se modifient quand on change les contenus numériques des cellules. On parle alors de feuille de calcul. Dans une feuille de calcul, la priorité de l'affichage est donnée aux nombres, mais ce sont les formules contenues dans les cellules qui fournissent l'aspect dynamique du tableur.

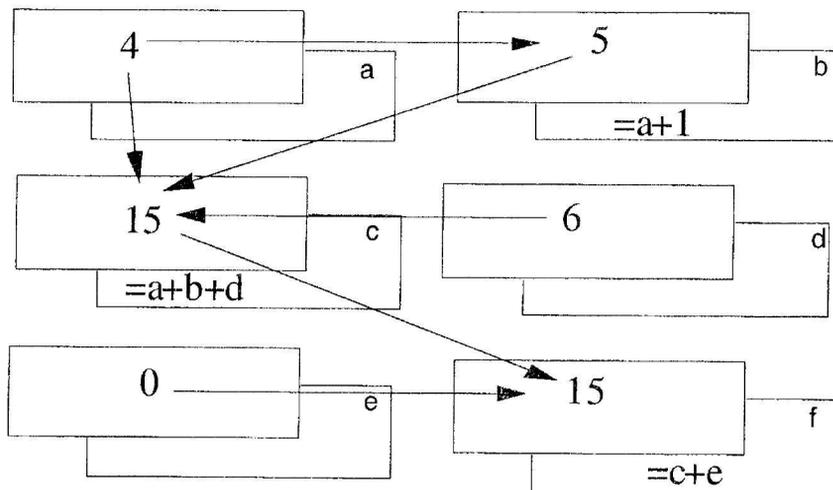


Fig. 1 : Deux niveaux : la formule et l'affichage numérique.

Ainsi on peut distinguer la **feuille de calcul**, qui définit la fonction, des **tableaux** qui sont les images de cette fonction obtenues à partir d'un ensemble de données numériques données par l'utilisateur.

¹³ Les éléments présentés de façon rapide sont développés dans un article à paraître dans la revue Petit x (n°52)

1.2. Le problème de la recopie des formules et les différents systèmes de désignation d'une cellule

Les fonctionnalités de recopie vers le bas ou à droite permettent une utilisation efficace et rapide, mais entraînent quelques obstacles dans la création de formules correctes.

En effet, les systèmes de références utilisés dans les formules influent sur la réalisation du calcul attendu dans le cas d'une recopie. La recopie d'une cellule est le plus souvent faite de manière relative, c'est-à-dire que le calcul recopié fait référence à d'autres cellules qu'à celles qui étaient présentes dans la formule initiale.

On est alors tenu, dans certains cas, de choisir un autre système de désignations que celui qui est utilisé par défaut par le tableur. D'un système relatif, on passe à un système de désignation absolu ou utilisant des noms. Le plus souvent dans l'édition de formules, il est nécessaire de combiner plusieurs types de désignations absolu ou nom et relatif.

Voici un exemple d'un tel problème

Les formules implantées sur la ligne 4 et recopiées vers le bas sans précaution particulière donnent lieu à des calculs inexacts ou des messages d'erreurs.

	A	B	C	D
1			Taux TVA	20,6
2				
3	Articles	prix HT	TVA(20,6)	Prix TTC
4	Marteau	45	9,27	54,27
5	Pince U	57	0	57
6	Tournevis 10	13	#VALEUR!	#VALEUR!
7	Clé tube 12	18	9,7686	27,7686
8	Allen 15	25	14,25	39,25
9				

	A	B	C	D
1			Taux TVA	20,6
2				
3	Articles	prix HT	TVA(20,6)	Prix TTC
4	Marteau	45	=B4*D1/100	=B4+C4
5	Pince U	57	=B5*D2/100	=B5+C5
6	Tournevis 10	13	=B6*D3/100	=B6+C6
7	Clé tube 12	18	=B7*D4/100	=B7+C7
8	Allen 15	25	=B8*D5/100	=B8+C8
9				

Fig.2 : En haut les valeurs affichées et en bas les formules)

Une solution consiste à écrire une formule où la référence à la cellule contenant le taux de TVA soit considérée de manière absolue (D1). Dans Excel, on peut utiliser la notation \$D\$1 pour indiquer que l'on désire une référence absolue.

La formule correspondante est donnée dans la figure 3. La recopie fournit alors un tableau correct.

	A	B	C	D
1			Taux TVA	20,6
2				
3	Articles	prix HT	TVA(20,6)	Prix TTC
4	Marteau	45	=B4*\$D\$1/100	54,27
5	Pince U	57	11,742	68,742
6	Tournevis 10	13	2,678	15,678
7	Clé tube 12	18	3,708	21,708
8	Allen 15	25	5,15	30,15
9				

Fig.3

Une autre solution consiste à désigner la cellule D1 par un nom, si possible signifiant comme TVA. On utilisera alors le nom dans la formule. Tous les tableurs proposent une option pour donner un nom à une cellule.

2. Les savoirs en jeu et erreurs rencontrées

2.1. Arithmétique ou algèbre

Dans les exemples précédents, nous avons rencontré des nombres, des formules et des désignations sous forme de noms ou de références (B2). Ces questions de statut des objets, nombres, variables, formules (comme description de calculs) incitent à s'interroger sur les mathématiques présentes dans les tableurs. S'agit-il de simples calculs sur des nombres ? Une formule est-elle une expression algébrique ? manipule-t-on des variables ?

Le tableur est-il un outil arithmétique ou un outil plutôt algébrique ?

Le tableur n'apparaît pas d'emblée comme un outil algébrique, dans la mesure où l'on peut éditer des formules sans donner de signification aux références et en montrant uniquement des nombres quand on édite la formule.

Pour illustrer ceci, il suffit de reprendre l'exemple de la formule de la figure 3b. Cette figure montre ce que l'élève obtient après l'édition de la formule : un tableau où aucune formule n'est présente. Nous savons qu'il existe une formule de calcul. Cette formule est éditée puis disparaît devant le résultat qu'elle calcule.

	A	B
1		
2	exemple	45
3		22
4		67
5		

Fig. 4

Au moment de l'édition de la formule l'élève conduit plusieurs actions :

- Edition du signe "=" (Intention de faire un calcul).
- Sélection des nombres 45 et 22 et frappe du signe +.
- Validation.

Ces trois étapes peuvent être contrôlées à l'aide des rétroactions du système (c'est à dire ce que l'action produit de visible pour l'élève sur l'écran). Par exemple en reprenant les trois étapes précédentes :

Rétroactions :

- Affichage du signe "=" dans la cellule B4.
- Affichage de la formule dans la cellule B4 et la barre d'édition, au-dessus de la feuille.
- Disparition de la formule et affichage du résultat.

Les observations des élèves de troisième (CAPPONI 90) ont montré que l'analyse de la formule n'est pas nécessaire et qu'elle n'est pas spontanément effectuée par l'élève, dans un premier temps du moins.

L'étape 3, dans la mesure où elle ne fournit pas de message d'erreur, mais au contraire le nombre attendu, conduit à ne plus s'intéresser à la formule qui a produit le résultat.

Tout se passe comme si l'utilisateur, après avoir manifesté l'intention de faire un calcul, montrait deux nombres 45 et 22 séparés par un signe d'opération puis obtenait un résultat. Ceci est le fonctionnement traditionnel d'une calculatrice.

Il ne va pas de soi que l'édition de la formule puisse être considérée comme un travail qui relève du cadre de l'algèbre. Ce sont les situations traitées dans le tableur, l'analyse des formules, qui vont permettre de se placer dans un autre cadre.

L'originalité des situations traitées dans le tableur provient du fait qu'il est bien autre chose qu'un simple outil de calcul comme une calculette puisqu'il calcule à partir d'expressions algébriques implantées dans les cellules. De surcroît ces formules sont accessibles et éditables.

Pour situer le tableur dans un domaine particulier de savoirs, on peut utiliser des outils comme ceux qu'a proposés Brigitte GRUGEON dans la conférence présentée au cours des présentes journées d'étude de l'IREM de Montpellier, ces 4 critères distinguent :

- **La démarche de résolution** présente un caractère très particulier dans la mesure où c'est l'implantation de formules pour réaliser des calculs numériques qui est la démarche de base. Elle utilise l'édition de formules, il n'y a cependant pas de traitement de type résolution d'équations¹⁴. En ce qui concerne, par exemple, les choix de nombres pour approcher un résultat par essais successifs, les choix et les nombres présents sont plutôt du côté d'une démarche de type arithmétique, mais les formules utilisées dans les calculs et leur implantation relèvent plutôt d'une démarche d'écriture d'expression littérale qui concerne l'algèbre.

- **Le statut de l'égalité est double** : en début d'expression, il indique que l'on édite une formule, ce qui est une façon d'exprimer que c'est un calcul qui va être décrit. On est plutôt du côté arithmétique. On trouve cependant des signes d'égalité dans les tests des formules logiques du type Si(a=b ; ... ;...). Il s'agit d'une égalité qui ne relève plus de l'arithmétique.

¹⁴ Nous n'aborderons pas ici les outils comme les « solveurs » présents dans les tableurs actuels. Ils ne nous semblent pas pertinents compte tenu des résultats peu contrôlés qu'ils fournissent.

- **Le statut des lettres** est proche de celui utilisé en algèbre. Une lettre désigne une quantité, connue ou inconnue. Cependant, le rôle qui leur est attribué est celui de la description d'un calcul qui va être effectivement réalisé. Par ailleurs, le choix de la désignation est imposé par l'environnement et la production d'une référence de cellule dans une formule peut être faite de manière transparente (en cliquant dans une cellule par exemple).

- **Les objets produits** sont essentiellement des formules, des descriptions de calculs. On produit ainsi des expressions algébriques, mais leur finalité n'est pas le traitement algébrique qu'elles subissent pour produire, par exemple, des solutions d'équations. D'une manière générale, il n'y a pas de traitement des expressions.

En conclusion on peut dire que ni l'écriture des formules ni la désignation des cellules ne sont des concepts relevant de l'arithmétique. Mais dès l'édition d'une formule, c'est un nombre qui est produit, ainsi la production des expressions est d'une toute autre nature puisque la rétroaction produite par le système après l'édition d'une formule est l'apparition d'un nombre. Enfin la production même des références, avec l'action de montrer un nombre, dissimule le rôle de la désignation dans l'édition des expressions.

Ainsi la présence constante d'un résultat calculé donne à l'expression un aspect nettement lié à l'aspect « exécutable » d'un calcul plutôt qu'à l'aspect traitement d'une expression.

Signalons aussi que l'aspect variable en algèbre est remplacé par une approche plus discrète, puisque ce sont des contenus de cellules, présentes sur l'écran qui interviennent dans les formules.

Cette situation intermédiaire du tableur permet de le situer à un niveau "post-arithmétique" ou "pré-algébrique" chez les élèves utilisateurs comme il a été proposé dans CAPPONI 90.

On peut alors penser que le tableur peut jouer un rôle dans l'apprentissage de l'algèbre, l'approche de la notion de variable et le traitement d'expressions algébriques.

Il peut sans doute permettre de donner du sens aux expressions formelles que les élèves manipulent sans les reconnaître dans leurs aspects numériques (CHEVALLARD 84).

2.2. Des erreurs rencontrées

Des situations spécifiques peuvent être créées pour que les élèves soient conduits à analyser des formules et à faire un travail dans le cadre algébrique. Les élèves sont alors confrontés à des difficultés qui sont liées à l'apprentissage de l'algèbre effectué au collège (les habitudes, les règles et conventions qu'ils connaissent parce qu'elles sont enseignées dans le cours de mathématiques). Ces connaissances sont à la fois un atout et un obstacle quand il s'agit de comprendre la signification des formules. D'autres difficultés sont liées au système de référence déjà abordé plus haut (références relatives et absolues).

Ces questions ont été partiellement abordées, dans le cadre du tableur Multiplan, dans un article de la revue *Petit x* (CAPPONI 92) et dans l'article cité dans la note de première page.

Les obstacles rencontrés par les élèves sont de quatre types :

- Obstacles liés à la lecture et dus à la densité de l'écriture. Le nombre de symboles nécessaires à l'écriture des références est notablement augmenté.

Ces difficultés interviennent au niveau :

- de la priorité des opérations en jeu (addition et Multiplication),
- de la signification des références.
- Obstacles liés aux références relatives à une cellule. L'origine du repère varie avec chaque formule et les désignations ne sont plus uniques pour chaque cellule. La lecture peut être notablement perturbée dans la mesure où le rôle de la cellule active n'est pas identifié.
- Obstacles liés à une modification, relativement à l'univers papier-crayon, des symboles opératoires notamment pour la multiplication (*) et la division (/).
- Obstacles liés à la manipulation des fonctions. Dans Multiplan, les fonctions comme **Somme()** , **MIN()** ou **Moyenne()** sont à l'origine de difficultés concernant la syntaxe et la sélection des arguments.

L'étude précédente ayant été faite dans le cadre de Multiplan, dont le système de référence est différent de celui d'Excel, par exemple, et doit être corrigée en tenant compte de cette différence.

Pour les obstacles liés à la lecture, on peut penser que passer d'un système du type "entièrement relatif"¹⁵ L[-4]C[+3] (4 lignes au-dessus , 3 colonnes à droite) à un système "pseudo-relatif" (B2 : colonne B, ligne 2) va rendre le décodage de la formule plus aisé.

Les formules deviennent notablement plus courtes et plus lisibles.

Ainsi une formule du type $px+qy+a+b$ (Capponi 92 p 66) s'écrit :

Dans un système entièrement relatif :

LC[-2]*L[-5]C[-1]+LC[-1]*L[-5]C[-3]+ L[-5]C[-2] + L[-5]C[-3]

Dans un système pseudo-relatif. :

C2*B7+D2C7+A2+B2

On voit que la complexité diminue notablement. On peut cependant s'attendre encore ici à des difficultés de décodage parce que chaque cellule a une référence contenant deux caractères dont l'un est une lettre et l'autre un nombre.

De plus, dans un système pseudo relatif, on s'affranchit d'un type de lecture qui compte les décalages par rapport à la cellule active (qui contient la formule) pour lire directement la référence de la cellule par rapport au repérage fixe du tableau. Le décodage des formules est alors plus facile puisque chaque cellule est toujours désignée par la même référence, alors que dans un système entièrement relatif, comme celui de Multiplan, la même cellule a des désignations différentes, suivant la cellule où est implantée la formule qui y fait référence.

Par contre, les difficultés liées à la présence des signes opératoires : * et / notamment, ainsi qu'à la priorité des opérations restent les mêmes. On peut cependant observer que l'usage de

¹⁵ "Pseudo-relatif" signifiant, ici, que la recopie est relative, "entièrement relatif" que les désignations elles-mêmes sont relatives. Le système "entièrement relatif" peut être utilisé dans un logiciel comme Excel en choisissant l'option LC dans les préférences.

l'informatique et des calculatrices tend à rendre plus familières aux élèves d'aujourd'hui ces notations qui étaient inconnues des élèves il y a une dizaine d'années.

Les obstacles liés à la syntaxe des fonctions comme **Somme()** , **MIN()** ou **Moyenne()** restent présents et sont de même nature que ceux concernant l'utilisation de l'écriture $f(x)$. Les programmes de troisième actuels proposent maintenant d'aborder ce type de notation en troisième, le tableur peut être un élément de cet apprentissage. Il s'agit cependant de fonctions opérant sur des listes, ce qui ne va pas de soi pour les élèves.

De manière générale, on peut cependant observer que les tâches d'analyse des formules sont notablement plus simples dans le système de référence pseudo-relatif qui est le plus présent aujourd'hui sur les tableurs. Rappelons cependant que cela ne supprime pas les difficultés liées à la nécessité de formules contenant des références absolues et relatives comme nous l'avons exposé plus haut.

Ces analyses traitent le cas de l'analyse des formules par des élèves. On peut aussi noter que nous avons observé des difficultés d'autre nature en observant des élèves au cours de tâches de formation ou d'observations réalisées dans le cadre d'une recherche sur les tableurs (CAPPONI 90).

Signalons particulièrement :

Non prise en compte de la formule

Le fait qu'un calcul réalisé dans une cellule n'est pas toujours reconnu comme le résultat produit par une formule. Nous avons pu l'observer chez des étudiants ayant suivi une formation au tableur. La formule n'est pas reconnue comme l'élément fondamental du tableur.

Aspect dynamique

Des élèves utilisent le tableur comme une calculatrice : avec des formules éditées ou aucune référence n'apparaît : par exemple $= 23*56$ qui fournit bien le résultat attendu.

Décodage d'une formule

Des difficultés déjà signalées plus haut dans la lecture et l'interprétation des formules sont fréquentes. Elles sont souvent l'indice que les connaissances algébriques ne sont pas toujours disponibles chez les élèves de troisième que nous avons observés.

2.3. Deux situations

Nous proposons pour terminer l'atelier l'étude dans un tableur de ces deux situations. Chacune présentant à nos yeux un intérêt particulier tant dans la modélisation que dans sa mise en œuvre pratique dans un tableur.

Equations

Rechercher les solutions approchées avec le maximum de précision donnée par le tableur de l'équation $x^5 + 4x^3 - x + 2 = 0$

Voiture d'occasion

L'argus automobile donne le prix estimé d'une voiture en janvier 97 (35000 F) et en janvier 98 (25000F). Donner les prix mois après mois pendant l'année 97.

PGCD

Produire un algorithme pour la recherche du PGCD de deux nombres, en utilisant des différences.

Votre tableur passera-t'il l'an 3000 ?

Etudier le calendrier de votre tableur. Premier et dernier jour, l'an 2000, et 3000 ? Trouver le nombre de jours de votre existence aujourd'hui. (Utiliser les formats de nombres présents dans le tableur).

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOVICH S., STOHL DRIER H., DUGDALE S., MOCHON S., NEUWIRTH E., WOODWARD J., 1999, "*Spreadsheets: A New Form of Educational Software for School Mathematics ?*" Proceedinds of the International Conference on Mathematical/science Education and Technology (M/SET 99). San Antonio Texas USA. (www.aace.org).

ABRAMOVICH, S., STEPHENS G., 1998, "*Using spreadsheets as a milieu of mediated mathematical action in elementary teacher education*". Manuscript submitted for publication.

BELLAY M., COUDERC G, JANVIER M, MOIGNARD J-G, VIGUIE H., 1996, "*Utilisation d'un tableur pour des études statistiques*". IREM Montpellier.

CAPPONI B., 1990, "*Calcul Algébrique et programmation dans un tableur. Le cas de Multiplan*". Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble 1. Bernard.capponi@imag.fr

CAPPONI B., 1992, "*Désignations dans un tableur et interactions avec les connaissances algébriques*". Petit x n° 29.

CAPPONI B., BALACHEFF N., 1989, "*Tableur et calcul algébrique*". Educational Studies in Mathematics n° 20, p. 179-210.

CAPPONI B., 1999, "*Le tableur pour le collège, un outil pour l'enseignement des mathématiques*". Petit X (à paraître).

CHEVALLARD Y., 1984, "*Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*". Petit X n°5, p. 51-94, IREM de Grenoble.

DELORD R., VINRICH G., et al., 1998, "*Cinq sur cinq Math 4^{ème}* (Manuel)". Hachette Education, Paris.

DUGDALE S. [1998] *Newton's method for square root: A spreadsheet investigation and extension into chaos*. Mathematics Teacher, 91(7), p. 576-585.

GRENIER D., MEYSSIREL B. [1994] *Utilisation d'un tableur au lycée*. IREM de Picardie, Saint-Quentin.

HEALY L., SUTHERLAND R. [1991] *Exploring mathematics with spreadsheets*. Basil Blackwell. Oxford.

LAUR P., VOLDOIRE C., COURBON D. [1998] *Mathématiques et tableur au collège. Classe de 4^{ème}*. IREM de Clermont-Ferrand.

MARANINCHI J-B., FAVRE-NICOLIN R. [1986] *Tableur et pédagogie de l'informatique*. CRDP de Grenoble.

PENE N., DEPRESLE P., et al. [1998] *Décimale Math 4^{ème}* (Manuel). Belin, Paris.

RONXIN D. [1995] *Le tableur au collège*. CNDP Paris. Collection Micro-savoirs.

ROUSSELET M. [1998] *Avec un tableur : quel est le prix de revient d'une page imprimée*. Bulletin APMEP n° 419.

Sites internet :

<http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/utiordi1.html>

<http://www.irem.univ-mrs.fr/publimath/>

<http://sunsite.univie.ac.at/Spreadsite/>

<http://www.ac-clermont.fr/pedago/math/pages/a2.html>