



IREM
UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

cc 040 - Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER Cedex 05
Tél : 04.67.14.33.83 - 04.67.14.33.84
Fax : 04.67.14.39.09
e.mail : irem@math.univ-montp2.fr
<http://www.irem.univ-montp2.fr>



L'algèbre au lycée et au collège

**Actes des journées de formation de formateurs.
Boisseron, 4-5 juin 1999.**

2000

PREFACE

Si "enseigner" fait partie des métiers impossibles (au même titre, pour Freud, que "gouverner" ou "psychoanalyser"), que dire d'"enseigner à des enseignants", ou mieux encore d'"enseigner à des enseignants d'enseignants" ...

La formation continue des enseignants est cependant décisive pour un système éducatif : cette nécessité apparaît clairement pour intégrer les NTIC (nouvelles technologies de l'information et de la communication¹), elle l'est tout autant pour maintenir un contact entre les enseignants et l'évolution de disciplines vivantes. C'est ce que tente de faire l'IREM, grâce à des équipes de recherches associant enseignants du second degré et enseignants chercheurs de l'université², animant des stages de formation continue, produisant des ressources à disposition de tous.

L'exigence de formation continue pour les formateurs eux-mêmes est tout aussi impérieuse. Que ce soit pour s'adapter aux demandes de formation des équipes pédagogiques dans les établissements, ou pour proposer une offre de formation liée aux problématiques des équipes de recherche, le renouvellement des stages proposés par l'IREM est permanent, aussi bien du point de vue de la forme que du fond. Il implique un renouvellement continu de la formation des formateurs.

Cette "formation de formateurs" est pour une part une auto-formation (lectures et travaux de recherche personnels), elle est aussi prise en charge par l'IREM :

- pour ce qui concerne l'évolution de la forme des stages, une formation interne est organisée depuis la rentrée de septembre 2000 (utilisation de dispositifs de rétroprojection, de logiciels de présentation d'exposés ou de mise en ligne de ressources) ;
- pour ce qui concerne le fond, le réseau national des IREM organise régulièrement des colloques sur des thèmes variés³ ;
- l'IREM de Montpellier organise aussi chaque année des journées de formation de formateurs, auxquelles sont conviés les animateurs de l'IREM, les IPR de mathématiques et les enseignants de l'IUFM.

Ces journées, dédiées à un thème particulier, sont organisées autour d'ateliers consacrés à la présentation des travaux des différentes équipes de l'IREM et de conférences de chercheurs invités, spécialistes du thème choisi.

La publication des Actes de ces journées permet aux participants de conserver la mémoire des travaux auxquels ils ont participé, elle permet surtout la mise à disposition de tous (par le réseau des IREM et leurs centres de documentation, largement consultés par les enseignants stagiaires ou titulaires) de ces nouvelles ressources pour la formation.

Les journées 1999 étaient consacrées à l'algèbre, dont on connaît les difficultés d'apprentissage et l'importance pour la formation mathématique⁴. On trouvera dans ce document issu de ces journées quelques réponses, de nouvelles questions et de nouvelles pistes de recherches. Nous espérons qu'elles seront utiles à tous.

¹ Le dernier rapport annuel (2000) de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale souligne, à propos de l'intégration des NTIC, l'écart entre une minorité d'enseignants motivés, et une majorité "non encore investie".

² La liaison avec l'université est capitale, tant il est vrai qu'il n'y a pas de vraie formation sans lien avec la recherche. Le dernier rapport de l'IGAEN (Inspection générale de l'administration de l'éducation nationale) souligne la nécessité d'améliorer le dispositif de formation continue des cadres, en développant ses liens avec l'Université et la recherche, "actuellement nettement insuffisants" (cf. La lettre de l'éducation n°310, juin 2000).

³ En mai 1998, un colloque national sur l'intégration des calculatrices symboliques et géométriques a eu lieu à la Grande-Motte. En juin 2001, un colloque national sur l'enseignement en collège aura lieu à Montpellier.

⁴ Cf DUPERRÉ J.-C. et FENICE J.-C., 1999, *L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège*. Repères-IREM n° 34, pp. 29-54.

Pour conclure, nous tenons à remercier l'UFM de Montpellier et la DAFP (division académique pour la formation des personnels) sans le concours financier desquels nous n'aurions pas pu organiser ces journées. La publication de ces actes, mettant à la disposition de tous les enseignants le contenu de ces journées, est un argument de plus, s'il en fallait, pour que ce concours soit assuré pour les années à venir.

Dominique Guin, directrice de l'IREM au moment du colloque de Boisseron
Luc Trouche, directeur de l'IREM depuis juillet 2000.

Il est possible de consulter ou de commander à la bibliothèque de l'IREM les Actes des précédentes journées de formation de formateurs ou des colloques organisés par l'IREM de Montpellier :

- 1993. *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, Actes de la première université d'été européenne, Montpellier.
- 1995. *Figuration et formalisme*, Actes des journées de formation des formateurs de Dourbie.
- 1996. *23^{ème} colloque Inter-Irem des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (COPIRELEM)*, la Grande-Motte.
- 1997. *Nombres et calcul*, Actes des journées de formation des formateurs de Port-Leucate.
- 1998. *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques*, Actes du colloque francophone européen de la Grande-Motte.

...

À paraître fin novembre 2000 : une brochure reprenant des travaux des journées de formation de juin 2000, consacrées à l'enseignement des statistiques.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	3
UNE STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE EN ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE : CONCEPTION, EXPLOITATION ET PERSPECTIVES (B. Grugeon)....	5
1. ANALYSE DE LA COMPÉTENCE ALGÈBRIQUE.....	5
1.1. <i>La rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre</i>	7
1.2. <i>Les « nouveaux » objets de l'algèbre</i>	8
1.3. <i>Caractérisation des problèmes algébriques</i>	11
1.4. <i>Vers une définition de la compétence algébrique</i>	12
2. UNE STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE DE LA COMPÉTENCE ALGÈBRIQUE.....	13
2.1. <i>Construction d'une structure d'analyse multidimensionnelle</i>	13
2.2. <i>Applications du côté institutionnel</i>	20
2.3. <i>Méthodologie utilisée</i>	20
2.4. <i>Transition entre deux cycles</i>	21
2.5. <i>Une nécessaire articulation entre des stratégies d'enseignement de l'algèbre</i>	23
3. APPLICATIONS DU CÔTÉ DE L'ÉLÈVE.....	25
3.1. <i>Diagnostic et profils d'élèves</i>	25
3.2. <i>Une nécessaire automatisation</i>	28
4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	32
BIBLIOGRAPHIE.....	33
QU'EST-CE QUE L'ALGÈBRE ? UN DOMAINE OU UN LANGAGE ? (J.P. Guichard)....	40
1. DES QUESTIONS.....	40
2. LE DOMAINE DES ÉQUATIONS.....	41
2.1. <i>Babylone. Tablette BM 13901 Problème 2. 1800 avant J.C.</i>	42
2.2. <i>EUCLIDE. Les Eléments, livre II, proposition 11. 3^e siècle avant J.C.</i>	43
2.3. <i>Diophante : Les Arithmétiques, livre I, problème 27. 3^{ème} siècle</i>	43
3. LE LANGAGE UNIVERSEL.....	46
3.1. <i>L'algèbre littérale de VIÈTE</i>	46
3.2. <i>L'outil de la méthode cartésienne</i>	48
3.3. <i>Le domaine des structures</i>	50
4. QUELS ENSEIGNEMENTS POUR LA CLASSE ?.....	51
4.1. <i>Un problème de construction</i>	52
4.2. <i>Des ensembles de points</i>	53
4.3. <i>Des formules générales</i>	54
BIBLIOGRAPHIE.....	57
TABLEUR, ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE (B. Capponi).....	58
1. QUELQUES ÉLÉMENTS DE FONCTIONNEMENT DES TABLEURS.....	58
1.1. <i>Nombres, formules et feuille de calcul</i>	58
1.2. <i>Le problème de la recopie des formules et les différents systèmes de désignation d'une cellule</i>	59
2. LES SAVOIRS EN JEU ET ERREURS RENCONTRÉES.....	60
2.1. <i>Arithmétique ou algèbre</i>	60
2.2. <i>Des erreurs rencontrées</i>	62
2.3. <i>Deux situations</i>	64
BIBLIOGRAPHIE.....	65
CALCULATRICES SYMBOLIQUES ET ALGÈBRE (Equipe Analyse).....	67
1. INTRODUCTION.....	67
2. CALCUL NUMÉRIQUE, CALCUL SYMBOLIQUE.....	68
2.1. <i>Le calcul numérique</i>	68
2.2. <i>Le calcul symbolique</i>	69
3. LES APPORTS POTENTIELS D'UN LOGICIEL DE CALCUL FORMEL À L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE.....	71
3.1. <i>Favoriser le travail sur la reconnaissance des formes syntaxiques</i>	71
3.2. <i>Donner du sens à certains gestes de l'algèbre</i>	71
3.3. <i>Modifier le rapport aux nombres</i>	72
3.4. <i>Favoriser des démarches conjectures - démonstrations</i>	73

3.5. Conforter des liens entre l'algèbre et l'analyse	74
BIBLIOGRAPHIE	76
ASPECTS SYNTAXIQUES, SÉMANTIQUES ET ÉPISTÉMOLOGIQUES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE EN VUE DE L'UTILISATION DES LOGICIELS DE CALCUL FORMEL (M. Janvier).....	77
1. ASPECTS SYNTAXIQUES.....	79
1.1. Les langages formels.....	79
1.2. Les définitions et démonstrations inductives.....	79
1.3. Les langages.....	80
1.4. La structure en arbre des expressions algébriques.....	81
1.5. La structure fonctionnelle des expressions.....	81
2. ASPECTS SÉMANTIQUES.....	83
2.1. Les conceptions des jeunes élèves sur le signe égal.....	83
2.2. Installation du signe égal comme symbole d'une relation.....	84
2.3. Le signe égal comme signe d'affectation.....	85
2.4. Le signe égal comme indication d'une règle de substitution.....	85
2.5. La signification des variables en informatique et en algèbre.....	86
2.6. La programmation par règles et les procédures de résolution des problèmes en algèbre.....	87
3. LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES NÉCESSAIRES À UNE BONNE UTILISATION DU CALCUL FORMEL	88
4. CONCLUSION.....	89
BIBLIOGRAPHIE	89
INTERNET (J. Delgoulet).....	91
1. QUELQUES RÉFLEXIONS SUR INTERNET	91
2. UN EXEMPLE : LA NOTION DE DÉRIVÉE.....	92
2.1. Première difficulté : la recherche.....	92
2.2. Deuxième difficulté : le téléchargement.....	92
2.3. Le contenu des documents	93
3. CONCLUSION.....	93

INTRODUCTION

« Nombres et calculs » avaient été au centre des journées de "formation de formateurs" de l'IREM à Leucate, en mai 1997. Ce thème avait déjà permis une réflexion sur les rapports aux nombres que se construisaient les élèves dans le cours de mathématiques.

En 1999, l'équipe "didactique" de l'IREM, chargée de l'organisation de ces journées, a proposé comme thème d'étude « l'algèbre », qui s'inscrit bien dans la continuité des précédentes journées : si les mathématiques et les mathématiciens s'intéressent aux calculs, ils s'intéressent aussi et, depuis fort longtemps, à la recherche de certains nombres, en particulier par la résolution d'équations. Ils ont ainsi « créé » cette partie des mathématiques, l'algèbre, chargée de « la réduction⁵ » des équations.

Ce thème d'étude s'inscrit aussi dans la continuité des travaux de l'équipe didactique : celle-ci s'est intéressée à ce sujet depuis plusieurs années, à la suite de demandes émanant d'enseignants dans le cadre de la formation continue. Elle s'est approprié les résultats de travaux de recherche français et étrangers, en particulier ceux d'Alain Bronner⁶, membre de l'équipe, et ceux de Brigitte Grugeon⁷.

En proposant le contenu de ces journées, l'équipe "didactique" a voulu mettre en évidence la multiplicité des concepts et des outils liés à l'algèbre. L'algèbre, de ses origines au IX^{ème} siècle à Bagdad avec Al-Khwarismi, jusqu'au XX^{ème} siècle avec les logiciels de calcul formel, est un domaine aux aspects multiples. Du point de vue de l'enseignement, cela pose le problème des compétences à construire chez l'élève et des choix didactiques à faire, en liaison avec les nouveaux outils comme les tableurs et les calculatrices symboliques. Du point de vue de la formation des enseignants, la réflexion, qui va de pair avec l'élaboration de logiciels et la communication par Internet, crée des connaissances nouvelles sur la complexité du langage algébrique.

On trouvera dans ces actes des éléments de réponse à quelques questions essentielles :

- Actuellement, l'algèbre est introduite au collège : quelles stratégies d'enseignement peut-on mettre en place, quelles compétences sont attendues ? Brigitte Grugeon (équipe Didirem, Paris 7) reprend ces questions dans sa conférence introductive. Elle y définit en particulier ce qu'elle appelle "la compétence algébrique".
- L'algèbre constitue-t-elle un domaine, ou un langage ? Dans une deuxième conférence, Jean-Paul Guichard (IREM de Poitiers) donne des éléments de réponse : si, d'un point de vue historique, l'algèbre correspond à un domaine, identifié par la résolution d'équations, l'utilisation de celui-ci, ensuite, comme outil de modélisation dans toutes les branches des mathématiques, en fait un langage. Ce glissement de terme n'est certainement pas sans incidence sur l'enseignement de l'algèbre.

Divers ateliers ont complété ces deux conférences, en proposant aux participants une réflexion relative à l'incidence, sur l'algèbre, du développement de nouveaux outils de calcul :

- Bernard Capponi de l'EIAH de Grenoble présente quelques éléments de réflexion sur les rapports entre arithmétique et algèbre, à partir de situations utilisant une feuille de calcul d'un tableur ;

⁵ Pour rappel, le mot algèbre de l'arabe « al-jabr », signifie littéralement la réduction.

⁶ Bronner, Alain, 1997, *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

⁷ Grugeon, Brigitte, 1995, *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et 1^{ère} G*, thèse de doctorat, Université Paris 7.

- L'équipe "analyse" de l'IREM s'interroge sur l'apport possible d'un logiciel de calcul formel à l'apprentissage de l'algèbre à travers deux exemples de résolution d'équations ;
- Michel Janvier de l'IREM de Montpellier nous fait découvrir l'importance de la syntaxe utilisée en algèbre par des logiciels de calcul formel tels Maple, Mathematica.
- Enfin Jacques Delgoulet⁸ fait part de ses réflexions sur l'utilisation d'Internet pour obtenir des documents de travail.

Ces journées ne mettent bien sûr pas un terme à la réflexion : celle-ci se poursuit en particulier dans le cadre du SFODEM⁹, dont l'objectif est de développer le suivi à distance de la formation de professeurs. En effet, un des 4 thèmes de cette formation est intitulé : « diagnostic des compétences des élèves et aide individualisée en algèbre ». Le système informatique Pepite (conçu à partir des travaux de Brigitte Grugeon), est un des outils essentiels de ce projet, dont l'objectif principal est de permettre un enseignement individualisé, en fonction de profils d'élèves identifiés.

La recherche sur l'algèbre et son enseignement se poursuit donc. Bilan aux prochaines journées de formation de formateurs ?

L'équipe "didactique" de l'IREM de Montpellier

⁸ Jacques Delgoulet est décédé quelques mois après. Il avait beaucoup contribué au développement de la recherche à l'IREM de Montpellier. Nous lui avons dédié ces actes.

⁹ Suivi de Formation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques, organisé dans le cadre d'une collaboration entre l'IREM, le CRDP, l'IUFM et la DAFP de Montpellier. Consulter le site de l'IREM pour plus de détails : <http://www.univ-montp2.fr/~irem>