DIMENSION LOGIQUE DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE AU COLLEGE ET AU LYCEE

Publication de l'I.R.E.M de l'académie d'Aix-Marseille n° 19

I.R.E.M - M.A.F.P.E.N
Académie d'Aix-Marseille.

DIMENSION LOGIQUE DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE AU COLLEGE ET AU LYCEE

Jean-Claude Beniamino
Beorges Blanc
Bernard Martini
Serge Notebaert

Publications de l'IREM d'Aix-Marseille

ISSN 0297-4347

Le présent document a été élaboré par le Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, à l'initiative de Jean Claude Beniamino, inspecteur pédagogique régional de mathématiques, et Georges Blanc, professeur à l'université d'Aix-Marseille II.

Grâce à la MAFPEN ce texte a servi de base à un travail de formation pédagogique lors du stage "Dimension Logique de l'activité mathématique au collège et au lycée"

Ont contribué à ce travail :

- J.C. Beniamino, IPR.IA, Rectorat
- G. Blanc, IREM Luminy
- B. Martini, formateur MAFPEN, CLG les Prêcheurs Aix en Provence
- S. Notebaert,CLG Gassendi, Digne les Bains

IREM: Faculté des Sciences de Luminy
163 Avenue de Luminy, 13288 Marseille cedex 9

MAFPEN:
Rectorat, Place Lucien Paye 13621 Aix en Provence

TABLE DES MATIERES

I - Introduction .... p. 4

II - Epreuves de déduction de l'APMEP .... p. 9

III - Le "si... alors..." : deux erreurs communes .... p. 13

IV - Le principe d'information maximum .... p. 26

V - La méta-information mal contrôlée .... p. 31

VI - De l'usage des lettres et des symboles .... p. 38

VII - Conclusion .... p. 46

VIII - Bibliographie .... p. 48

I -

INTRODUCTION

I. INTRODUCTION

Il ne fait pas l'ombre d'un doute que toutes les articulations déductives de notre discours de professeur de mathématiques sont sans ambigüité entre nous, entre les livres et nous, entre les programmes et nous, entre la vérité mathématique et nous, entre les recherches actuelles en mathématiques et nous, etc...

Et les élèves dans tout ça ?

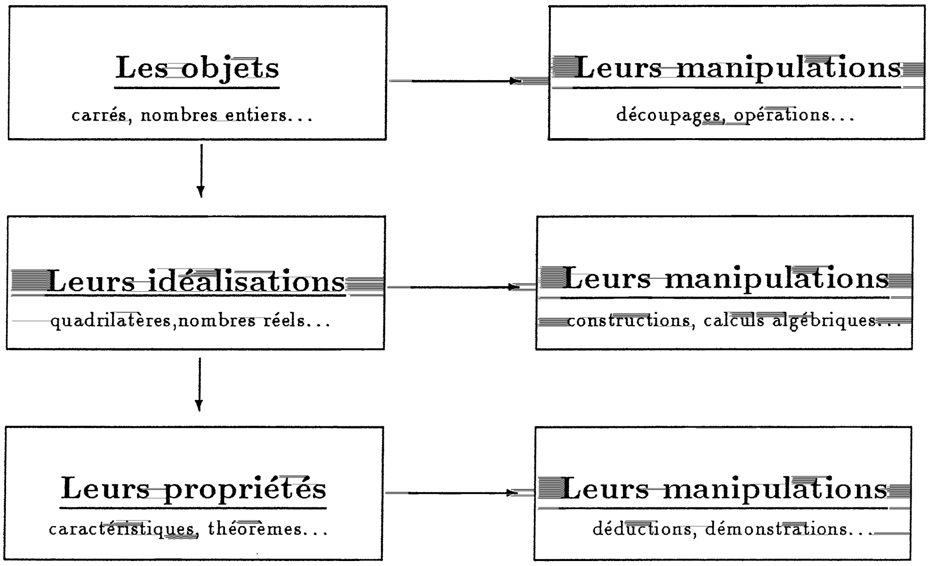
Pourquoi les élèves (certains élèves !), ont-ils tant de mal à nous suivre dans ces articulations déductives ? et surtout pourquoi ont-ils tant de mal à reconstruire eux mêmes correctement ces articulations ? même lorsqu'on peut penser qu'ils ont en tête une conviction correcte.

Ne parlons pas de trouver une démonstration, question qui relève sans doute d'une problématique fort complexe. Mais simplement d'acquérir une conviction, aidé par l'articulation du raisonnement du professeur (vous savez qu'il n'est pas du tout facile de convaincre beaucoup d'élèves que 3 est bien inférieur ou égal à 5), et d'être capable de reproduire correctement de telles articulations, quand on a clairement en tête une raison pour justifier sa conviction : une démonstration.

Nous nous proposons à travers la forme même de notre discours, de décoder ce qui après tout n'a que peu de raison d'être compris par l'élève comme nous l'entendons, et ceci pour les "**si-alors**", les "**pour chaque** x", les "**puisque**", les "**ne sont pas**", les "$2k\pi$ **près**", les "**parce que**", et beaucoup d'autres encore.

Quels besoins de porter notre attention sur le contenu logique de l'activité mathématique dans son enseignement?
Il y a au moins deux raisons pour cela, chacune étant suffisante en elle même, la première épistémologique, la seconde socio-professionnelle.

La première tient à la nature même de la connaissance et de la pratique des mathématiques, dont on peut dire grosso modo que l'apprentissage passe par des chemins, qu'on pourrait d'écrire comme ci-dessous :



l'essentiel de l'activité strictement mathématique est évidemment sur la dernière ligne, et l'outil de ces manipulations est précisement ce qu'on entend habituellement par " la logique ".

La deuxième raison provient du souci unanime (cf. tableau ci-dessous) des professeurs de mathématiques, depuis la 6º jusqu'à... l'université, qui classent " l'initiation au raisonnement déductif " comme la première difficulté pour les élèves.

OPINIONS des ENSEIGNANTS

Dites ce que vous pensez des points suivants en ce qui concerne

LES DIFFICULTES POUR LES ELEVES

Numérotez de 1 à 8 les rubriques ci-dessous selon l'ordre de difficulté que vous leur attribuez (1 étant la plus importante, 8 la moins importante

6°

	1	2	3	4	5	6	7	8
Géométrie de l'espace	14%	23%	22%	15%	10%	6%	5%	3%
Géométrie plane : les configurations	1%	5%	9%	19%	23%	18%	16%	7%
Géométrie plane : la symétrie	2%	5%	8%	13%	13%	19%	19%	18%
Calcul numérique	2%	3%	6%	6%	10%	14%	19%	38%
Calcul littéral	13%	32%	19%	12%	6%	6%	6%	1%
Organisation et Gestion de données	3%	7%	11%	11%	18%	17%	13%	18%
Aires et Volumes	2%	6%	18%	22%	14%	16%	15%	5%
Initiation au raisonnement déductif	64%	19%	5%	4%	3%	1%	1%	3%

5°

	1	2	3	4	5	6	7	8
Géométrie de l'espace	10%	19%	18%	10%	9%	6%	5%	3%
Géométrie plane : les configurations	2%	4%	14%	14%	15%	15%	11%	7%
Géométrie plane : la symétrie	1%	5%	8%	16%	20%	15%	12%	3%
Calcul numérique	1%	4%	5%	10%	10%	10%	13%	27%
Calcul littéral	10%	32%	14%	9%	5%	4%	4%	1%
Organisation et Gestion de données	0%	2%	7%	9%	12%	13%	12%	26%
Aires et Volumes	1%	3%	9%	14%	12%	17%	18%	6%
Initiation au raisonnement déductif	57%	16%	4%	1%	1%		1%	2%

4°

	Ordre de difficulté attribue							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Initiation au raisonnement déductif	75%	15%	04%	02%	02%	01%	01%	01%
Calcul littéral	09%	33%	19%	12%	10%	06%	07%	01%
Géométrie de l'espace	11%	22%	21%	16%	12%	08%	06%	01%
Géométrie plane: Transformations	01%	10%	18%	22%	18%	11%	11%	05%
Géométrie plane: sauf transformations	01%	12%	15%	21%	18%	17%	09%	04%
Aires et volumes	00%	01%	04%	10%	19%	19%	28%	16%
Calcul numérique	01%	03%	08%	09%	10%	20%	16%	31%
Organisation et gestion de données	01%	02%	09%	10%	10%	16%	18%	30%

3°

	Ordre de difficulté attribuée								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Géométrie de l'espace	9%	17%	15%	18%	13%	10%	5%	5%	1%
Géométrie plane: Transformations	5%	8%	12%	17%	17%	14%	10%	7%	3%
Géométrie plane: sauf transformations.	1%	8%	11%	18%	22%	18%	10%	4%	2%
Calcul numérique	2%	1%	5%	6%	8%	12%	18%	22%	18%
Calcul littéral	8%	18%	13%	15%	12%	14%	7%	6%	0%
Organisation et gestion de données	1%	3%	2%	7%	8%	11%	17%	21%	22%
Problèmes et équations	6%	23%	24%	15%	10%	8%	6%	6%	0%
Aires et volumes	1%	3%	7%	8%	9%	14%	18%	19%	14%
Entrainement au raisonnement déductif	61%	14%	9%	4%	2%	2%	1%	2%	1%

Source : EVAPM (APMEP)

Que pouvons nous faire ?

1. Comprendre, autant que faire se peut, les origines de la difficulté.

2. S'assurer pour nous-même qu'il n'y a pas de doute dans notre vision du rapport :

   Discours démonstratif - Apport d'une conviction

3. Eviter, limiter, contrôler, certains aspects fréquemment à l'origine du malentendu :

   Explication de l'élève - Explication du professeur

   Preuve de l'élève - Preuve du professeur

   Démonstration de l'élève - Démonstration du professeur

Quelques thèmes se rapportent à cette problématique :

- le besoin de démonstration
- le **si** ... **alors** ...
- les locutions déductives
- la méta - information
- les lettres et symboles
- le contre-exemple
- le principe d'information maximum
- l'archétype comme idéalisation
- le vrai et le faux
- ...

Le lecteur rencontrera certains de ces thèmes dans les pages qui suivent.

II -

EPREUVES DE DEDUCTION DE L'APMEP

EPREUVES "ARGUMENTATION - DEDUCTION - EXPRESSION"
de l'A.P.M.E.P. (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Ces épreuves ont pour but de repérer dans quelle mesure les élèves :

- peuvent prendre en compte et organiser des arguments,
- peuvent utiliser un ou plusieurs arguments pour en déduire la valeur de vérité d'un autre, qu'il soit induit par l'énoncé ou à découvrir,
- peuvent présenter leurs argumentations et leurs déductions par écrit.

Ces épreuves d'évaluation peuvent aussi constituer des situations visant à initier progressivement à la démonstration.

<u>VOICI CINQ EXEMPLES :</u>

A Trace une droite (D) et marque un point M qui n'appartient pas à la droite (D).

a) Construis le point N symétrique de M par rapport à la droite (D).

b) Construis un point P sur la droite (D) tel que les distances MP et MN soient égales.

c) Quelle est la nature du triangle MPN ? Justifie ta réponse.

B

1) Peux-tu tracer un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne soit pas un losange ? Si oui, fais-le, si non, explique pourquoi.

2) Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires peut-il être un losange ? A quelles conditions ? Justifie ta réponse.

3) Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires peut-il être un carré ? A quelles conditions ? Justifie ta réponse.

C Soit un triangle ABC et soit D un point du côté [AB].
La parallèle à (BC) passant par D coupe le côté [AC] en E.

1º) Les triangles BDC et BEC ont-ils la même aire ?

2º) Les triangles ABE et ADC ont-ils la même aire ?

Chaque fois, justifie ta réponse.

D Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de même centre O et de rayons respectifs R et R', avec $R < R'$.

Une droite (X) est tangente en T au cercle $\mathcal{C}$ et coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en E et F. Que peut-on dire de la disposition des points E, T, F ? Justifie ta réponse.

E Pour faire du jus d'orange, Hervé met 4 volumes de sirop pour 7 volumes d'eau.
Sandrine met 5 volumes de ce sirop pour 9 volumes d'eau.
Qui fait le sirop qui a le plus fort goût d'orange ? Justifie ta réponse.

COMMENTAIRES :

A Exercice donné en 5ème mais que l'on peut aborder en 6ème.

La difficulté est de juxtaposer les deux égalités MP = MN (énoncé) et MP = NP (d'après la symétrie). Tenir compte de deux informations à la fois est une capacité qui est loin d'être acquise.

B Exercice donné en 5ème.

De nombreux élèves construisent un carré en réponse à la question 1) et disent ensuite que "le quadrilatère peut être un losange si les diagonales n'ont pas la même longueur". Pour ces élèves, il a donc été difficile de répondre à la question c).

On aurait peut-être pu limiter cet inconvénient en modifiant ainsi la question a) : "*Peux-tu tracer un quadrilatère dont les diagonales soient perpendiculaires et qui ne soit ni un carré, ni un losange ?*"

Si l'élève ne pense qu'au carré à la question a), cela vient du fait que, dans son expérience, il y a peu de quadrilatères quelconques.

Il généralise quelques idées comme l'association "diagonales perpendiculaires <=> losange" et tente de tout expliquer à travers elles.

C Exercice donné en 4ème.

Beaucoup d'élèves font des mesures et des calculs. Deux cas se présentent à partir de la mesure des hauteurs :

1) on trouve la même mesure et, avec la base commune BC, on obtient la même aire. Mais mesurer n'est pas démontrer. Aussi, il faudra découvrir un raisonnement général.
2) On trouve des mesures voisines et donc des aires voisines. On peut conjecturer que les aires sont égales, ce qui nous renvoie là encore à la recherche d'un raisonnement général.

D Exercice donné en 4ème.

La plupart des élèves répondent que les points E, T, F, sont alignés et prennent la peine de justifier cette réponse !

Très peu démontrent correctement que T est le milieu de [EF] (référence à la hauteur relative à la base dans un triangle isocèle). Il y a aussi quelques tentatives liées à la perception de l'axe de symétrie.

E Exercice numérique donné en 5ème et en 3ème, mais que l'on peut proposer à tous les niveaux du collège.

On relève beaucoup de démonstrations différentes basées sur la comparaison de fractions, la proportionnalité, les pourcentages, ...

C'est justement la variété des démonstrations qui fait la richesse de cet exercice et il faudra mettre en valeur toutes les méthodes conduisant au succès.

Signalons une faute fréquente (7-4 ; 9-5) qui conduit à la bonne réponse : "Sandrine met un volume d'eau de plus qu'Hervé, donc elle dilue plus, donc c'est Hervé qui fait le sirop qui a le plus fort goût d'orange". Une faute de raisonnement se règle par le débat dans la classe. Au besoin, en imaginant un contre-exemple.

Mais la meilleure conclusion n'est-elle pas que les deux sirops "ont pratiquement le même goût" !

BILAN :

L'examen du travail des élèves fait apparaître des difficultés :

1) <u>incompréhension de l'énoncé</u> : on ne saisit pas bien les données, on ne localise pas l'essentiel, on confond ce que l'on sait et ce que l'on veut savoir, on introduit des cas particuliers.

Il faut apprendre à analyser un énoncé, à le traduire pour comprendre le problème posé. Ce n'est pas simple : par exemple, si dans l'énoncé il y a le mot "parallélogramme", on peut hésiter entre plusieurs traductions.

2) <u>manque de connaissances</u> : des questions essentielles du cours (définitions, règles, théorèmes) ne sont pas maîtrisées. Par exemple, on confond souvent les droites remarquables dans le triangle.

3) <u>manque de méthodes</u> : on ne trouve pas assez de figures à main levée, bien codées, où sont visualisées les données ; il n'y a pas assez de concentration et d'activité pendant la recherche (par exemple, il n'y a pas assez d'essais, d'erreurs d'expérimentations).

4) <u>rédaction brouillonne</u> : il y a beaucoup de phrases incohérentes et une mauvaise utilisation des mots-clefs du raisonnement.

5) <u>illusion de démontrer</u> : pour beaucoup d'élèves, démontrer consiste à commenter un dessin. C'est une approche perceptive, "sensualiste", qui s'appuie sur une conjecture. Mais il y a un gouffre conceptuel entre la conjecture et la démonstration. L'approche résolument déductive, consistant à trouver un itinéraire qui relie les données et la conclusion est difficile à trouver. La partie féconde réside dans la recherche des moyens termes de cet itinéraire en faisant fonctionner les théorèmes comme des outils.

III -

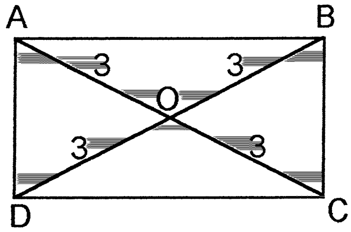
LE "SI... ALORS...": DEUX ERREURS COMMUNES

DEUX ERREURS D'ORDRE LOGIQUE COURAMMENT RELEVEES CHEZ LES ELEVES DE COLLEGE
TENTATIVE D'ANALYSE DES COMPORTEMENTS

C'est au Collège que sont mis en place raisonnement logique et démonstration. L'élève passe en effet, selon les termes mêmes des programmes, de "brèves séquences déductives" en 6ème, à un "entraînement au raisonnement déductif" et un "développement des capacités de démonstration" en 3ème. Sur ce chemin les obstacles sont nombreux et importants.
On peut les classer en trois groupes :
Le sens de la démonstration : Les premières questions se posent, fondamentales : que signifie "démontrer" ? pourquoi refuser les arguments du type "ça se voit", "je l'ai vérifié en mesurant", au bénéfice de discours quelquefois difficiles à comprendre. L'élève de Collège passe de preuves empiriques (la constatation, la mesure) à la preuve rationnelle. La mutation est délicate.
La voie de la démonstration : On suppose ici acquis le sens de la démonstration. Il reste à découvrir, problème après problème, le chemin pour démontrer. La difficulté réside en ce que cette recherche ne peut être guidée par aucune règle générale infaillible. Des conseils d'approche sont possibles, aucune méthode n'est sûre. La démonstration est un art, non une technique.
Les erreurs d'ordre logique : L'élève sait, ici encore, ce que signifie "démontrer". Il propose des démonstrations, et ces démonstrations ont à ses yeux valeur de preuve, mais des erreurs de logique s'insinuent et invalident son propos. Régulièrement dénoncées par le professeur, ces errreurs reviennent souvent à la charge.
C'est sur cette troisième difficulté que portent les lignes qui suivent, et, parmi les nombreuses erreurs observées, sur deux d'entre elles qui sont parmi les plus fréquentes. Après les avoir constatées, nous tenterons d'analyser le comportement de l'élève qui les commet, c'est-à-dire de retrouver son fonctionnement mental, puis de remonter aux origines de ces erreurs. Nous serons conduits ensuite à poser la question des solutions pédagogiques.

Première erreur "classique"

a) Exemples



A la question : "quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? ", on observe souvent ces réponses :

exemple 1 :

"Les diagonales d'un rectangle ont même longueur.
Or, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur.
Donc ABCD est un rectangle."

exemple 2 :

"Les diagonales d'un rectangle ont même longueur et même milieu.
Or, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur et même milieu.
Donc ABCD est un rectangle."

L'élève, qui devrait mettre en évidence une propriété qui soit une condition suffisante (CS) du rectangle, énonce une condition nécessaire (CN).
Dans l'exemple 1 la CN énoncée (les diagonales ont même longueur) n'est pas une CS.
Dans l'exemple 2 la CN énoncée (les diagonales ont même milieu et même longueur) est aussi une CS, mais elle n'est pas formulée en tant que telle.

b) Difficulté de dénoncer de telles erreurs aux yeux des élèves

Les deux exemples ci-dessus présentent une même première difficulté lorsqu'il s'agit d'expliquer à l'élève l'erreur commise. Dans l'exemple 2, une difficulté supplémentaire intervient.
Dans chacun des deux cas tout d'abord, la conclusion produite est vraie, l'erreur n'entache "que" la démarche, mais la réponse est considérée comme globalement fausse. En début d'apprentissage l'élève éprouve quelque difficulté à accepter ce dédain porté à ce qu'il considère, lui, comme l'essentiel : la conclusion.
Quant à l'erreur de raisonnement par elle-même, il est relativement facile de la mettre en évidence dans le cas n°1. Il est possible en effet de présenter un quadrilatère ABCD dont les diagonales aient même longueur mais qui ne soit pas un rectangle : le raisonnement de l'élève s'applique à cette nouvelle figure, et pourtant la conclusion à laquelle on parvient est maintenant fausse. C'est donc que le raisonnement est faux en lui-même.
Le deuxième cas est plus délicat. On pourrait dire en effet que la condition énoncée (les diagonales ont même milieu et même longueur) est "bien choisie" puisqu'elle est aussi CS. L'erreur consiste à ne pas l'avoir citée "dans le bon sens". Aucun exemple montrant la faute logique ne peut être exhibé. L'erreur semble bien artificielle à de nombreux élèves.

c) Description de l'erreur en termes de logique formelle

Si l'on ré-écrit en termes de *si ...alors* les propriétés citées par les élèves, on obtient les formulations suivantes :

exemple 1 :

"Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.
Or, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur.
Donc ABCD est un rectangle."

exemple 2 :

"Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur et même milieu.
Or, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur et même milieu.
Donc ABCD est un rectangle."

Dans les deux cas le schéma du raisonnement est le suivant :

L'élève se pose la question : "le quadrilatère ABCD est-il un rectangle ? Question du type : la proposition a est-elle vraie ?

Il énonce alors une propriété de la forme : $a \Rightarrow b$.

Il constate que la proposition b est vraie.

Il conclut à la vérité de a.

Formalisé, le cheminement est donc le suivant :

a?
$a \Rightarrow b$
Or b
Donc a

d) Analyse de "l'implication-élève"

Pour prouver a, l'élève énonce un raisonnement proche d'un syllogisme de type approprié :

"$b \Rightarrow a$, or b, donc a".

Mais son erreur consiste dans l'utilisation d'une implication du type $a \Rightarrow b$ au lieu d'une implication du type $b \Rightarrow a$.

Comment expliquer cette erreur sur la position de a dans le choix du type d'implication utilisé (CN de a ou CS de a)?

Est-ce le mouvement logique du syllogisme qui n'est pas en place ?

Ou, plus fondamentalement, l'enfant n'a-t-il pas encore acquis le sens-même de l'implication ?

De même que l'on parle de "théorème-élève" pour désigner la conception fausse mais cohérente et solidement établie que certains élèves ont d'un théorème mathématique, ne peut-on envisager une "implication-élève" qui serait à l'oeuvre lorsque la faute qui nous intéresse ici est commise ?

L'implication $a \Rightarrow b$ se caractérise par une table de vérité :

a	b	$a \Rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Présentons à l'élève qui commet l'erreur une implication, et interrogeons-le.
Au tableau est inscrite la phrase dont on l'assure de la vérité :
"Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur".
L'entretien se déroule :
- J'ai dessiné dans mon cahier un rectangle. Peux-tu me dire, en te servant de la phrase écrite au tableau, comment sont ses diagonales ?
- Oui, elles ont la même longueur.
L'enfant affirme que, entre égalité et non-égalité, seule l'égalité de longueur des diagonales est compatible avec la nature du rectangle. Sa réponse revient donc à poser deux lignes de sa propre table de vérité de l'implication :

a	b	$a \Rightarrow b$
V	V	V
V	F	F

- J'ai dessiné maintenant un quadrilatère qui n'est pas un rectangle. Peux-tu me dire, en te servant de la phrase écrite au tableau, comment sont ses diagonales ?
- Oui, je peux dire qu'elles ne sont pas égales.
L'enfant complète donc ainsi **sa** table de vérité :

a	b	$a \Rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La suite de l'entretien est cohérente avec ces premières réponses.
- J'ai dessiné maintenant un quadrilatère dont les diagonales sont égales. Peux-tu me dire, en te servant de la phrase écrite au tableau, quelle est sa nature géométrique ?
- Oui, c'est un rectangle.
- J'ai dessiné maintenant un quadrilatère dont les diagonales ne sont pas égales. Peux-tu me dire, en te servant de la phrase écrite au tableau, s'il s'agit d'un rectangle ?
- Je peux dire qu'il ne s'agit pas d'un rectangle.
On peut conduire un entretien comparable avec une implication dont les termes sortent du domaine mathématique, comme : *Si demain il pleut, alors je mettrai mon imperméable.*
L'observation qui peut être faite est en général la même :
La table de vérité de l'implication, telle que la comprend ici l'enfant, est celle de l'équivalence logique $a \Leftrightarrow b$.
Cette affirmation devrait faire l'objet d'une véritable expérimentation. Il semble bien pourtant que l'on puisse raisonnablement accepter, après avoir conduit quelques entretiens, et tout au moins à titre d'hypothèse, la conclusion suivante : l'enfant qui commet l'erreur logique rencontrée ci-dessus a une conception très particulière de l'implication :
son implication est en réalité une équivalence logique.

C'est dire qu'il comprend la propriété *si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont égales* et sans doute aussi *les diagonales d'un rectangle ont même longueur* comme une équivalence entre *rectangle* et *diagonales égales*.
On ne peut pas vraiment dire qu'il se trompe dans le choix qu'il fait d'une propriété du type a⟹b au lieu d'une propriété du type b⟹a puisque pour lui ces deux implications se valent et valent toutes deux une propriété du type a⟺b.
Son raisonnement erroné est donc pour lui strictement identique au raisonnement correct.
On comprend dès lors la difficulté à lui faire admettre que son raisonnement est faux, et que, dans l'exemple 2 il lui suffirait, pour corriger son erreur, de citer la propriété "à l'envers", c'est-à-dire, dans son esprit, de citer la même propriété, mais dite sous une forme différente !

e) Analyse du choix erroné

L'erreur commise résulte de la convergence de deux facteurs :
- l'élève ne distingue pas l'implication de l'équivalence.
- entre les deux implications a⟹b et b⟹a, pour lui logiquement identiques, puisque toutes deux identiques à a⟺b, il choisit le "mauvais sens".

Ce choix erroné n'est sans doute pas aléatoire puisqu'il revient systématiquement chez les mêmes élèves.
On peut d'ailleurs comprendre la démarche mentale qui l'explique :
1) Formulation du but à atteindre : *"ABCD est un rectangle"*.
Ce but peut être dicté par l'énoncé de l'exercice ou par l'examen de la figure ; il peut aussi n'être qu'une conjecture.
2) L'enfant passe spontanément de cette proposition à une proposition qui en découle, c'est-à-dire à l'énoncé d'une proposition qu'il sait être vraie lorsqu'on est en présence d'un rectangle.
3) Vérification, dans le cas étudié, de cette seconde proposition, et conclusion quant à la nature de la figure.
Il semble donc que, alors même que l'implication n'est pas clairement distinguée de l'équivalence, il soit plus naturel, en présence d'une proposition **P**, d'évoquer une propriété du type **P**⟹Q, qu'une propriété du type Q⟹**P**.

Remarque concernant une difficulté de l'apprentissage de la démonstration

Lorsque l'implication est, par la suite, mieux maîtrisée, cette tendance de la pensée demeure et peut alors se traduire en d'autres termes : *l'esprit va plus facilement d'une proposition à une conséquence, que d'une proposition à un antécédent.*
Nous tenons ici une difficulté majeure de l'apprentissage de la démonstration : souvent, la démarche mentale que suppose la recherche contredit cette "loi" de l'esprit, au contraire de la démonstration rédigée qui, elle, lui obéit.
La rédaction classique d'une démonstration consiste en effet, tout comme dans la démarche analysée ci-dessus, à passer d'une proposition à ce que l'on sait lorsque cette proposition est vraie, c'est-à-dire, en terme de démonstration, à passer d'une proposition à une conséquence, et ceci à l'aide d'un théorème qui lie la première à la seconde. C'est ainsi que la lecture d'une démonstration "coule de source".

Ordre de la démonstration :

$\boxed{\text{HYPOTHESE "b"}} \Longrightarrow \boxed{\text{THEOREME b} \Rightarrow \text{a}} \Longrightarrow \boxed{\text{CONCLUSION "a"}}$

La recherche, elle, procède en sens inverse : elle **remonte** du but aux moyens d'atteindre ce but.
Elle part d'une conjecture "a", pour chercher un théorème, une propriété, dont la conclusion sera la proposition "a".

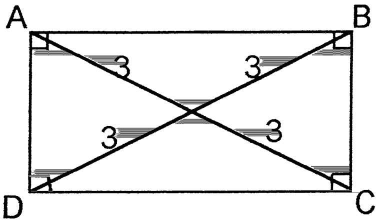
Ordre de la recherche :

$\boxed{\text{CONJECTURE "a"}} \Longrightarrow \boxed{\text{THEOREME b} \Rightarrow \text{a}} \Longrightarrow \boxed{\text{La proposition "b" est-elle vraie ?}}$

Cette démarche prend donc à rebours le cheminement plus naturel de la pensée qui consiste à aller d'un état de fait à ce qui en découle, d'une proposition à ses conséquences, ou CN. Elle consiste, au contraire, à aller d'une proposition à une (ou des) CS, et présente ainsi une difficulté **d'une toute autre nature** que celle qui réside dans la compréhension des démonstrations toutes faites.
Cette remarque conduit à se poser la question de l'utilité des "corrigés", même compris par les élèves, en matière de démonstration ! La démonstration rédigée ne dit en effet rien de la remontée nécessaire, au moment de la recherche, d'une proposition à une CS, et ne permet pas de comprendre comment ont pu être choisis l'hypothèse utile "b" et le théorème b ⇒ a. La démarche qui a conduit à la découverte est gommée, comme est ôté l'échafaudage après la construction. C'est pourquoi la multiplication des exemples reste inefficace auprès de certains élèves, ceux qui ne parviennent pas à induire par eux-mêmes des méthodes de recherche à partir des exemples proposés.

Remarque à propos de l'accumulation de conditions nécessaires

Dans le but de démontrer une proposition "a" certains élèves énumèrent **plusieurs** CN de cette proposition, et s'assurent que **chacune d'elles** est vérifiée.
On propose par exemple la figure suivante, la même que celle reproduite plus haut mais avec des informations redondantes :



A la question : *quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?* on peut observer des réponses du type :
ABCD est un rectangle car ses diagonales ont même milieu, même longueur, et car il a quatre angles droits.
Lorsqu'on lui demande alors de préciser la ou les propriétés utilisées, il répond en général :
Les diagonales d'un rectangle ont même milieu et même longueur.
Les quatre angles d'un rectangle sont des angles droits.
La réponse à la question est d'ailleurs, quelquefois, directement :
ABCD est un rectangle car les diagonales d'un rectangle ont même milieu et même longueur, et les quatre angles d'un rectangle sont des angles droits.

Transcrivons en langage formel :

a ⇒ (b et c et d)
Or, b et c et d
Donc a

L'élève va donc, conformément au processus décrit pour les exemples précédents, de la proposition *ABCD est un rectangle*, (proposition "a"), à "ce qu'il sait" du rectangle (guidé en cela par les indications portées sur la figure), c'est-à-dire à l'énoncé de conditions **nécessaires** de "a". Puis il s'assure que chacune de ces CN est vérifiée.
Ici comme plus haut, la vérification d'une CN (ou d'une conjonction de CN) est considérée comme suffisante pour affirmer la vérité de la proposition "a".

Mais **pourquoi l'élève accumule-t-il les CN ?**
Deux hypothèses peuvent être avancées :

- L'élève, guidé par les indications, ou les évidences, de la figure, ou encore par ses souvenirs d'une leçon, déroule mécaniquement tout ce qu'il sait du rectangle, puis montre l'accord des CN qu'il vient ainsi d'énoncer avec les informations portées sur la figure (ou selon le cas avec les hypothèses du problème). C'est la démarche rencontrée plus haut, sauf qu'ici la CN unique est remplacée par une conjonction de CN. La distinction entre CN et CNS ne serait donc, ici, pas davantage en place que nous l'avions postulé dans les exemples précédents.
- L'élève, qui cherche à prouver "a", se remémore une CN de "a", c'est-à-dire une propriété du type a⇒b (par exemple, *les diagonales d'un rectangle ont la même longueur)*, induite là encore par les données du problème ou par la figure. Mais **peut-être** a-t-il alors l'impression confuse que l'utilisation d'une CN risque d'être insuffisante pour démontrer "a". Autrement dit, peut-être fait-il une première distinction, non explicitée, entre CN et CS, ou entre CN et CNS, et accumule-t-il alors les CN pour avoir *plus de chances* d' obtenir une CS. Un premier pas vers la compréhension du *si ... alors* serait donc accompli.

Entre ces deux analyses il est difficile de trancher a priori. Peut-être conviennent-elles toutes deux. Elles s'appliqueraient alors, selon les cas, à des enfants différemment avancés. Seuls une expérimentation plus approfondie ou un entretien avec l'élève pourrait permettre de conclure.

Les obstacles à la distinction du "si...alors..." et de l'équivalence logique

La difficulté que représente, pour un élève, cette distinction provient de la convergence de plusieurs obstacles.

1) Obstacle d'ordre épistémologique

Un obstacle épistémologique consiste en une difficulté interne au contenu du savoir. Le niveau de complexité que représente en lui-même le concept logique d'implication constitue un obstacle de cet ordre dans la mise en place du "si...alors....". Et si l'on voit souvent le "si...alors..." fonctionner comme une équivalence logique c'est que celle-ci est d'un maniement plus simple que le "si...alors....".
L'équivalence logique, en effet, associe biunivoquement chaque valeur logique d'une première proposition "a" (a ou non a) à une valeur logique d'une seconde proposition "b" (b ou non b). Elle se prête donc aisément au fonctionnement mental de l'association d'idées :
- l'évocation de a déclenche l'évocation de b.
- l'évocation de non a déclenche l'évocation de non b.
Un quadrilatère est un parallèlogramme (côtés parallèles deux à deux) si et seulement si ses diagonales se coupent en leurs milieux.
L'image du parallèlogramme doit déclencher l'image de deux diagonales de même milieu.
L'image d'un quadrilatère différent du parallèlogramme doit déclencher l'image de deux diagonales qui n'ont pas le même milieu.
L'image de deux diagonales de même milieu doit déclencher l'image d'un parallèlogramme.
etc.

Le "si...alors..." bien compris ne se prête pas à cette forme simple de fonctionnement mental.
Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur.
L'évocation mentale du rectangle doit déclencher l'image de deux diagonales de même longueur.
Mais l'évocation d'un quadrilatère dont les diagonales ont la même longueur doit laisser ouverte les deux possibilités : rectangle et non rectangle.
C'est cette ouverture sur des possibles contradictoires qui constitue la difficulté propre de l'implication.
Le contenu logique du "simple" $\Longrightarrow$ apparaît donc moins accessible que le $\Leftrightarrow$, malgré la plus grande complexité apparente de ce dernier qui se manifeste lorsqu'on le décompose en deux implications.

2) Obstacle d'ordre psychologique

La construction des relations logiques d'équivalence et d'implication se fait par étapes successives :
a) un premier stade durant lequel le "si...alors..." fonctionne comme une équivalence logique.
b) un stade où l'on voit l'implication se mettre en place ; c'est le collège qui participe à cette mutation.
c) un stade ultime lors duquel l'équivalence prend le sens de la synthèse de deux implications réciproques (ce sens de l'équivalence logique est introduit, dans les programmes de mathématiques, en lycée).
Le passage d'un stade au suivant représente un véritable saut, qui permet d'accéder à un autre mode de fonctionnement mental.
Le maintien au premier stade constitue ainsi un véritable obstacle à la bonne utilisation et à la compréhension du "si...alors...", et il est illusoire de penser que tout enfant dont le langage se trouve suffisamment avancé, soit prêt à comprendre spontanément le sens de cette relation logique, et à la mettre en oeuvre à bon escient.
L'accés à ce niveau suppose une maturation suffisante, à laquelle contribue un accompagnement pédagogique adéquat.

3) Obstacle d'ordre didactique

Certaines habitudes didactiques tendent à laisser l'enfant dans la confusion entre le "si...alors..." et l'équivalence logique, à ne pas favoriser suffisamment son passage à un stade ultérieur. Ces pratiques, en effet, ne contredisent pas clairement sa conception erronée, et ne lui permettent pas de prendre conscience de l'exacte signification de l'implication.
Ainsi, une propriété du type "$a \Rightarrow b$" est souvent illustrée exclusivement par une situation dans laquelle la proposition "a" est supposée vraie.
Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur :
On illustre cette propriété par un rectangle dont on affirme l'égalité de la longueur des diagonales.
Il n'est que rarement mis en évidence que la propriété énoncée <u>ne permet pas</u> de répondre aux <u>deux</u> questions suivantes :
Un quadrilatère qui n'est pas un rectangle a-t-il des diagonales de même longueur ?
Un quadrilatère dont les diagonales ont la même longueur est-il un rectangle ?
Une telle implication dont la réciproque est fausse permettrait pourtant de circonscrire nettement les informations contenues dans une implication :
"La propriété suivante est vraie :
Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur.
et, par ailleurs :
on peut tracer un quadrilatère qui ne soit pas un rectangle et dont les diagonales ont la même longueur, etc."
De telles occasions ne sont pas souvent saisies.
D'ordinaire, l'énoncé d'une propriété du type "$a \Rightarrow b$" n'est illustrée que par des situations qui pourraient aussi bien illustrer l'équivalence "$a \Leftrightarrow b$". La distinction entre ces deux formes logiques n'est donc pas clairement exploitée ; c'est elle pourtant qui pose problème.

4) Obstacle d'ordre linguistique

Les significations implicites du langage contribuent à tirer le "si...alors..." du côté de l'équivalence, et constituent donc à leur tour un obstacle à la distinction entre les deux relations logiques.

• Dans le langage courant, une formulation comme : "*si tu es sage, alors tu auras du chocolat*", laisse sous-entendre que, s'il n'est pas sage, l'enfant sera privé de la récompense. Sans quoi la promesse, qui équivaut à un contrat, serait dépourvue de signification. Et l'enfant, en effet, qui est davantage sensible à la raison d'être de l'engagement pris qu'à son contenu strictement logique, comprend spontanément le "si...alors" comme une équivalence.

"*Si vous êtes célibataire, présentez-vous au bureau A*". Chacun comprend qu'une personne mariée ne doit pas s'y rendre. Ne pas le supposer dénaturerait la signification implicite de la consigne. Et c'est pourtant là ce qu'elle signifie stricto sensu.

Dans le langage courant, le "si...alors" possède donc un sens dérivé qui est celui de l'équivalence logique.

• Dans la pratique du langage, et notamment du langage mathématique, l'implication est par ailleurs mal acceptée lorsqu'elle s'éloigne trop de l'équivalence.

Le "si...alors..." s'utilise couramment dans des propriétés comme :

Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle y est continue.

Les énoncés suivants, eux, choquent :

Si un triangle est isocèle, alors la somme de ses angles vaut 180°.

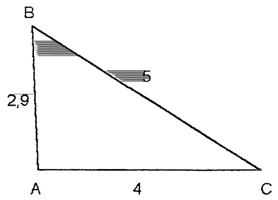
Si une fonction est dérivable et croissante sur un intervalle, alors elle y est continue.

C'est que l'antécédent contient des informations indifférentes au regard de la conclusion qui suit. L'enchaînement logique est correct, mais on est gêné par l'inutilité de certaines CS.

La pratique du langage conduit ainsi à privilégier les implications dans lesquelles les CS restent en rapport avec le contenu de la conclusion, à préférer l'implication qui ne s'éloigne pas trop de l'équivalence. Ce tri qui ne retient que les implications "acceptables" n'est-il pas, lui aussi, de nature à masquer le sens véritable de cette relation logique ?

Deuxième erreur "classique"

a) Exemple



"$AB^2 = 8,41$; $AC^2 = 16$; $BC^2 = 25$.
25 n'est pas égal à 8,41+16.
D'après l'énoncé réciproque de Pythagore, *ABC n'est pas un triangle rectangle."*

Ici, l'élève, pour justifier sa conclusion, cite la réciproque au lieu de la propriété directe.

b) Description en termes de logique formelle

Les élèves font preuve ici du souci de ne pas utiliser indifféremment le théorème et sa réciproque. On remarque d'ailleurs, en général, qu'en d'autres occasions, lorsque les propositions qui interviennent sont affirmatives, ils citent à bon escient pour justifier leur démarche l'une ou l'autre de ces deux propriétés. Ces élèves, qui distinguent donc bien, semble-t-il, une implication de sa réciproque, et, par là, de l'équivalence logique, fondent cependant la contraposée d'une implication sur sa réciproque. Pour eux $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ est une conséquence de $b \Rightarrow a$.
L'erreur commise ici semble plus subtile, et d'un autre niveau que la précédente.
Analysons pourtant la conception de l'implication qui est en jeu.
La propriété $b \Rightarrow a$ est mise en avant lorsqu'il s'agit :
- de conclure que a est vraie lorsque b est vraie
- de conclure que a est fausse lorsque b est fausse.

Nous voyons ainsi réapparaître l'équivalence logique.
En arrière-plan de cette erreur plus subtile, on retrouve donc une résurgence de la confusion entre implication et équivalence.

c) Analyse de l'erreur

L'élève qui commet l'erreur ci-dessus prend garde de montrer qu'il sait distinguer propriété directe et réciproque, mais cette distinction s'opère sur fond de confusion entre chacun de ces deux théorèmes et l'équivalence logique.
La distinction qu'il fait n'est donc pas de nature proprement logique. Il s'agirait plutôt d'une différence, dans l'ordre (chronologique) de la recherche, entre les différents types de données qui interviennent :
Lorsqu'il connaît la nature du triangle, l'élève conclut au sujet des carrés des longueurs des côtés à l'aide du théorème direct.
Lorsqu'il connaît les longueurs des côtés, il conclut sur la nature du triangle à l'aide de la réciproque.

Pistes de remédiation

Pour favoriser chez l'enfant la mise en place de la compréhension du "si...alors..." et son bon fonctionnement, certaines pratiques pédagogiques peuvent être suggérées :

• Faire apparaître, en présence d'une propriété du type $a \Rightarrow b$, qu'elle ne fournit aucune indication sur la validité de "b" lorsque "a" est fausse ou sur la validité de "a" lorsque "b" est vraie.

Cette démarche est facilement mise en oeuvre dans le cas où la réciproque de $a \Rightarrow b$ se trouve être fausse. Nous en avons déjà donné un exemple :

L'énoncé de la propriété :

"Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur"

sera utilement accompagné d'une activité du type :

Pourrais-tu tracer un quadrilatère dont les diagonales aient la même longueur mais qui ne soit pas un rectangle ?

• Séparer dans la durée, dans certains cas comme Pythagore ou Thalès, l'étude du théorème direct et celle de sa réciproque. Et c'est lors du travail sur le théorème direct $a \Rightarrow b$, que sa conséquence sous la forme de la contraposée $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$, sera utilisée.

• Il semble par ailleurs que certaines formulations de l'implication facilitent sa compréhension. On a pu, par exemple, mettre en évidence qu'un énoncé comme :

"chaque fois qu'on a ...., alors, forcément, on a ....."

soit plus accessible que le classique "si ... alors...".

IV -

LE PRINCIPE D'INFORMATION MAXIMUM

Le Principe d'Information Maximum

Le principe d'information maximum (PIM), constitue un des implicites essentiels de la communication en général. Dégagé en didactique des mathématiques, dans les années 60 par Daniel Lacombe, on le retrouve dans presque toutes les difficultés liées à la communication de l'enchaînement déductif: le discours du professeur de mathématiques.
Sous sa forme la plus simple, c'est le principe qui fait que nos élèves n'apprécient en général pas du tout que le professeur considère comme vraie l'assertion:

$$\boxed{\text{3 est inférieur ou égal à 5}}$$

alors que toute la classe sait bien, et le professeur le premier, que 3 n'est pas égal à 5.

Sous des formes plus techniques mais d'actualité, signalons par exemple que c'est aussi ce principe courant du discours quotidien, qui en Intelligence Artificielle conduit à algébriser de nouvelles formes de logiques (logiques par défaut, logiques non monotones, etc.). Le but de l'Intelligence Artificielle nécessitant d'automatiser (et donc de commencer par algébriser) les raisonnements du discours quotidien[1].

Le professeur en classe de mathématiques aura un travail très difficile, pour faire progresser l'élève depuis la logique du discours quotidien, qui est la seule à sa disposition comme outil de déduction, jusqu'à la logique du discours mathématique.

---

[1]Remarquons que ce n'est pas du tout le but de la logique mathématique qui, elle se propose d'algébriser le raisonnement mathématique, ce dernier n'ayant rien à faire d'aspects aussi subjectifs que le PIM par exemple. Cette différence sur les objectifs, mal reconnue par les uns ou les autres, fait que, logiciens mathématiciens et logiciens informaticiens se reprochent mutuellement depuis quinze ans de "faire joujou avec des logiques exotiques" ou d'"étudier religieusement une logique archaïque"!

Le PIM peut s'énoncer ainsi:

Lorsqu'un interlocuteur m'informe sur un fait,

1. **il m'apporte tous les renseignements qu'il a à sa connaissance relativement à ce fait,**
2. **il se garde de n'apporter aucune information superflue qu'il saurait n'avoir aucun rapport avec ce fait**

si ce n'est pas le cas, c'est que l'interlocuteur n'est pas fiable, plaisante, ou se moque de moi. C'est ainsi par exemple que dans le discours quotidien, un rectangle n'est pas un carré, sinon on le dirait. Quand l'auteur évoque "le petit rectangle de bois blanc par lequel Harry signait ses forfaits" l'information contient qu'il ne s'agit pas d'un carré. C'est aussi le cas lorsque dans une salle d'attente on annonce:

"si votre numéro se termine par zéro, présentez vous au guichet A"

il est clair que je devrai encore attendre si mon numéro se termine par 5, (on me rabrouerait d'un: " vous n'avez pas entendu l'annonce ?"). L'annonceur a donné les conditions maximales pour se présenter au guichet A, et si les possesseurs de numéro se terminant par 5 pouvaient aussi se présenter à ce guichet, il n'aurait pas pu le taire sans transgresser son devoir d'information.

On imagine facilement les dégâts, si Daniel interprète de la même façon l'information du professeur:

"si un nombre se termine par zéro, il est divisible par 5,... voyons Daniel...!"

On pourrait confronter sans cesse le discours logique du quotidien à celui du professeur de mathématiques. Comparer "si vous ne payez pas dans les 10 jours, vous ne recevrez pas vos réservations "[2], à "si les diagonales ne sont pas égales ce n'est pas un rectangle".

On ne peut pas trop en vouloir à l'élève qui pense alors que ce qui empêche le quadrilatère d'être un rectangle, c'est d'avoir ses diagonales différentes, et que donc, lorsque les diagonales sont égales c'est un rectangle. S'il y avait d'autres raisons qui pouvaient l'empêcher d'être un rectangle, c'est

[2] remarquer les formes négatives qui enrichissent le contexte: menaces, injonctions..., et créent toutes sortes de non-dit

injuste que le professeur me l'ait caché à cet instant.
Quand le professeur me dit que dans ce "cas-là", on a "ça", il est sérieux et c'est le maximum d'information qu'il me donne, c'est que dans "les autres cas " on n'a pas " ça ", sinon il me le dirait.
Il faut réellement prendre conscience combien cette démarche est permanente dans le discours quotidien, " si vous répondez avant le 15 vous bénéficiez de 25% de réduction " contient incontestablement l'idée que si l'on pouvait répondre jusqu'au 20 pour bénéficier de la réduction, il y aurait quelque chose de louche à ne pas le dire, des privilèges cachés.

C'est par cette confiance en l'information maximale permanente de l'interlocuteur attendu fiable, que nos élèves n'aiment pas nous entendre affirmer:

- 3 est inférieur ou égal à 5

- puisque $f(x) > 0$ alors $f(x) \geq 0$

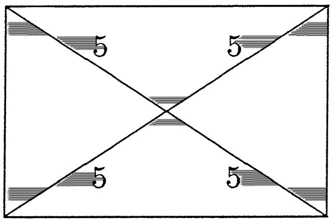
-puisque pour tout entier n on a la propriété P, on peut dire qu'il existe un entier k pour lequel on a la propriété P , (si $\forall x$P est vrai, l'élève estime souvent que $\exists x$P est faux)

De la même facon, l'élève a un sentiment de faute s'il ne se sent pas en mesure de fournir une information maximale, il ne croit par exemple guère prouver qu'une fonction n'est pas paire en exhibant un x_0 particulier pour lequel on aurait $f(x_0) \neq f(-x_0)$. Si on avait pu lui fournir une méthode pour déterminer tous les x tels que $f(x) \neq f(-x)$, il l'appliquerait avec la meilleure volonté du monde sans états d'âme. Cet aspect du PIM est evidemment lié aussi à la compréhension des quantifications (cf VI) et à la quête du refuge des méthodes. La gêne qu'éprouvent les élève à ne pas pouvoir communiquer l'information maximale associée à la question qui leur est posée a souvent été constatée dans les situations suivantes:
dans une classe avec n garcons et p filles ($n \approx p$), peu d'élèves savent comment s'y prendre pour justifier que "tous les élèves de la classe sont des garçons " est faux. Par contre, si la classe contient n garcons et une seule fille: Valérie, c'est l'unanimité:

“ c’est faux parce qu’il y a Valérie ”

on est capable de transmettre LA raison pour laquelle c’est faux.

Terminons en remarquant que le PIM est partout, et que le professeur de mathématiques lui même dans son discours d’enseignant est victime du PIM; quand aprés avoir posé la question de la nature du quadrilatère ci-dessous:



il met une mauvaise note à l’élève qui a répondu qu’ayant ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c’est un parallélogramme !, n’attendait-il pas lui aussi un maximum d’information ?, qu’il n’explicite pourtant pas, si ce n’est en le cachant derrière “...LA nature du ...”.

V -

LA META-INFORMATION MAL CONTROLEE

La Méta-Information mal contrôlée

On sait depuis l'Antiquité que si l'on ne prend pas de précautions de langage entre l'objet, sa représentation, ce que j'en dis, le jugement que je porte sur ce que j'en dis, etc..., toutes sortes d'incohérences peuvent apparaître.

Exemples

- long est court

- ce qui est écrit sur cette ligne est faux.

Des situations aussi flagrantes constituent sans doute des amusements en société, mais n'ont évidemment pas à venir jeter un trouble quelconque dans nos classes de mathématiques[1].
Pourtant est-ce que notre discours (et plus souvent encore celui des élèves) ne frise pas parfois ce danger ? Danger d'ambigüité que l'élève ne saura pas contrôler.

Un effet pédagogique souhaitable, ou un effet simplement plus agréable grammaticalement, ne contient-t-il pas parfois des inférences d'information, soit sur l'esprit du problème, soit sur l'état de connaissance des élèves à ce moment du cours, soit sur le contenu du progamme de cette classe, etc...

Il y a quelques cas types, nous allons en examiner quelques uns, qui tournent autour de verbes à fortes connotations comme "falloir" et "pouvoir". Le premier contient entre autres choses une connotation dirigiste, donc normalisatrice; le second contient évdemment une quantification existentielle, ou même, explicitement, un jugement non plus sur les faits mais sur les méthodes, comme par exemple dans "puisque...,on va pouvoir...".

[1] Ce commentaire ne négligeant en rien évidemment l'outil que constitue l'autoréférence en logique mathématique, comme dans les théorèmes de limitation de Gödel par exemple.

1. Il faut que ...

C'est certainement la tournure qui possède le plus d'interprétations variées, lors d'un usage trop approximatif; elle est donc très dangereuse, mais évidemment incontournable, ne négligeons pas la rigueur dans son utilisation.

"Pour que A, il faut que B", dans sa forme la plus naturellement entendue par le professeur, correspond à:

$$A \Longrightarrow B$$

"Pour que n soit divisible par 9, il faut qu'il soit divisible par 3".

Hélas, la forte tendance qu'a cette tournure à s'ériger en règle, méthode, mode d'emploi, lui confère parfois le sous-entendu "si et seulement si". Incontestablement, si la conclusion comporte plusieurs points, on est tenté (l'élève, surtout évidemment quand il ne faut pas) de ressentir "les conditions à satisfaire pour que ...":

"Pour que A, il faut que B et C et D"

Toutes ces tournures correspondent d'ailleurs bien dans le quotidien à des conditions nécessaires et suffisantes: "Pour déclencher l'enregistrement de votre magnétoscope, il faut que vous régliez ...et appuyiez sur..."
"Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il faut que ses diagonales soient égales et qu'elles se coupent en leur milieu"

Mais il y a pire encore, l'usage du "Pour que A, il faut que B", cache parfois (surtout dans le discours, et donc dans l'esprit de l'élève) la tournure:

"Pour que A, il faut que je démontre B.

Cet aspect sous entend naturellement que je sais déja que $B \Rightarrow A$ est vrai, et que voulant démontrer A, il me suffit de démontrer B. Dans cette phase de méta-information, d'information sur la méthode et non plus sur l'interaction des propriétés en jeu, le **il faut** sera utilisé pour **il suffit**.
Le pire n'étant pas encore atteint, dans une telle confusion de niveaux d'information. Cette dernière tournure utilisant un "il faut" au lieu d'un "il suffit", n'est pas du tout incorrecte, si c'est en référence à l'état de connaissance de l'élève, l'état d'avancement du cours, ou du contenu du programme quelle est utilisée.

"Voyons Danièle, pour que A, il faut que tu démontres B" qui est une aide bienveillante du professeur, sous entendant: ""tu ne peux pas faire autre chose d'après le cours, vous n'avez pas encore d'autres moyens". Dans le contexte limité des connaissances des élèves, ou d'un contenu de programme, **"il nous suffit de montrer que"**, peut évidemment avoir la même signification que **"il nous faut démontrer que"**.
Remarquons de plus que l'usage du **"il nous faut"** est d'un effet pédagogique heureux, puisqu'il est directif et donc rassurant pour l'élève, **"il nous suffit"** inquiète par le degré de liberté qu'il laisse (cf IV).

Terminons cette partie en remarquant qu'entre "l'objet mathématique" que constitue la propriété, et celui que constitue la preuve de la propriété, la confusion est permanente dans l'esprit de l'élève, et se traduit dans la plupart de ses démonstrations par des :

- **pour montrer que A_1**
- **montrons d'après le cours que A_2**
- **donc que A_3**
- **qui lui est bien vrai**

sans qu'il n'y ait trop de liens entre son enchaînement et les $A_i \Rightarrow A_j$ qui sont vrais. Enfin même si l'élève voulait dire quelque chose de très correct comme:
"Pour montrer que Q_0 est un losange, **il faut** (parce que c'est ce que semble me suggérer le sens du problème), que je démontre que les

diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu",
il dira dans beaucoup de cas (au désespoir du professeur):
"Pour que Q_0 soit un losange, il faut[2] que ses diagonales soient perpendiculaires. Montrons qu'elles le sont, ..., elles le sont, donc c'est bien un losange".

2. ...ne peut pas être...

C'est l'association de la négation du discours quotidien (qui ordinairement contient plus d'information que la négation froidement objective du discours mathématique), et du verbe **pouvoir** qui cache une quantification existentielle, qui rend cette tournure sujette à de mauvais contrôles chez les élèves.
Lorsque le professeur l'utilise, c'est souvent pour attirer l'attention sur la force de l'information $nonB \Longrightarrow nonA$ quand on dispose déjà de l'information $A \Longrightarrow B$.
C'est dans un souci pédagogique totalement fondé, pour renforcer l'effet sur l'élève de l'importance de l'observation que l'on peut être conduit à utiliser des tournures du type:
"Voyons Danièle, puisqu'on **n'a pas ça** on **ne peut pas être** dans **ce cas là**".
"Puisque les diagonales de Q_0 ne se coupent pas en leur milieu, Q_0 ne peut pas être un losange".
On sait par le Principe d'Information Maximum (cf IV), qu'il y a beaucoup de chances pour que certains élèves trouvent naturel que si c'est parce qu'il n'a pas ses diagonales qui se coupent en leur milieu, qu'il n'est pas un losange, c'est que s'il les avait ...(cf. le point 3 suivant).

Mais même si l'élève reçoit l'information raisonnablement, et en tire une règle personnelle correcte: " si un quadrilatère Q_1 a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, il **peut être** un losange", le danger d'un dérapage reste présent car jusqu'à quel degré poussera-t-il les nuances qui font que **ne peut pas être** est synonyme dans un contexte froidement objectif et mathématique de **n'est pas** (le verbe

[2] si le "il faut" de la phrase précédente portait sur la méthode, celui-ci semble porter sur un fait.

pouvoir n'étant là que pour apporter une méta-information) alors que la différence est considérable entre **peut être** et **est**.

Le "ne peut pas être" est dangereux à manipuler: il conforte un cas particulier; la locution correspond en effet à:

$$\textbf{non}\ \exists Q\ (\textbf{Propriété}(Q))$$

et permet évidemment d'en conclure

$$\textbf{non Propriété}(Q_0)$$

Ce n'est évidemment pas le cas de la tournure "peut être", qui correspond elle à : $\exists Q(\textbf{Propriété}(Q))$, et n'a aucune raison évidemment de fournir l'information particulière: **Propriété**(Q_1).

3. <u>**...c'est parce que...**</u>

Le contenu naturel semble ici être a priori: "si on a A, c'est parce que B", et donc correspondre à l'information $B \Longrightarrow A$.
La tournure s'emploie aussi fréquemment pour insister sur la forme contraposée: "c'est parce qu'on n'a pas A, qu'on n'a pas B". Mais cette forme renferme un lien de causalité suffisamment étroit, pour évoquer aussi bien l'une des raisons qui font que B n'est pas satisfait, que parfois **LA** raison qui empêche B d'être satisfait, ce qui sous entend alors évidemment que si on avait A, on aurait B.

Hélas cette tournure risque aussi de s'employer avec d'autres ambigüités. Il arrive parfois qu'elle soit utilisée en raccourci de "c'est parce que les conditions de l'hypothèse **ne sont pas remplies**, qu'il ne faut pas s'étonner que la conclusion **ne soit pas satisfaite**, faisant ainsi référence à un résultat déjà connu:
"C'est parce que la fonction paire $f(x) = 1- \mid x \mid$ n'est pas dérivable sur [-1,1], qu'elle n'a pas de tangente horizontale sur cette intervalle".
On a évidemment bien pour une fonction paire

$$\textbf{dérivable sur [-1,1]} \Longrightarrow \textbf{tangente horizontale}$$

mais la tournure est surtout utilisée cette fois pour illustrer que l'exemple en question n'est pas un contre-exemple à un théorème déjà connu, le théorème de Rolle en l'ocurrence, et une interprétation telle que celle donnée au début de cette section, conduirait à l'information **" si une fonction paire n'est pas dérivable sur [-1,1], elle n'a pas de tangente horizontale sur cet intervalle "**.
Signalons enfin, qu'il y aurait bien d'autres tournures heureuses peut-être sur le plan linguistique, voire même souhaitables sur le plan pédagogique, pour renforcer une information d'ordre méthodologique, sur une information strictement mathématique, mais souvent dangeureuse pour une interprétation incontrôlée par l'élève. Ce serait ainsi par exemple encore le cas de **"...suppose nécessairement..."**:
" La dérivabilité suppose nécessairement la continuité ".
Comment peut on raisonnablement espérer que l'élève en difficulté en mathématiques puisse gérer les nuances strictement déductives entre **" ...suppose nécessairement que... ", " ...a besoin de l'hypothèse que... ", " ...à condition que... "**.
Le lecteur est vivement encouragé à débusquer lui même ces locutions qui sont à la fois pédagogiquement riches parce qu'expressives, vivantes sans la froide aridité des déductions formelles et codées, mais si dangereuses parce que véhiculant précisement de (peut être) délicieuses nuances linguistiques.

VI -

DE L'USAGE DES LETTRES ET DES SYMBOLES

DE L'USAGE DES LETTRES ET DES SYMBOLES

Ce qui frappe au tout premier chef l'opinion peu familiarisée avec le discours mathématique, c'est l'usage intensif de symboles.

Il est clair qu'il ne saurait en être autrement. Puisque l'essentiel de l'activité mathématique consiste non pas à s'intéresser à tel ou tel objet du monde réel, mais aux interactions entre propriétés de tels et tels objets. Les objets n'apparaissant jamais par leur réalité, mais par un symbole, puisque c'est la classe qu'ils constituent, relativement à une propriété, qui nous intéresse. Si par exemple je m'intéresse à des diagonales qui se coupent en leur milieu, j'aurai à parler de quadrilatères Q (puis Q' ou Q_1 ...), puis de segments D_1 ..., mais pas de tel quadrilatère particulier matérialisé dans la nature.

Quels sont donc les différents statuts des symboles, et essentiellement des lettres, utilisés : *inconnues, variables, indices, constantes, paramètres, valeurs numériques, fonctions, nombres, points, racines* ...?
Nos élèves ont évidemment beaucoup de mal à nous suivre dans ces appellations. Comment réagiraient-il à une question du genre:

Que désigne l'écriture $cos^2x + sin^2x$?

- un nombre réel
- une fonction de x
- (une fonction de y)
- une constante
- une valeur numérique
- une racine de $x^2 - 1$

Même question avec l'expression

$$\sum_{y=1}^{y=5} (y(cos^2x + sin^2x))$$

Peut-on parler de “*calculer* ” l’une ou l’autre de ces expressions ?

Disons tout de suite que les diverses appellations évoquées ci-dessus (*inconnues, paramètres...*), sont uniquement associées à un contexte pour (a priori) en faciliter la compréhension. Structurellement, il n’y a que deux classes de symboles lettres:

1) **Les désignateurs**

2) **Les marqueurs**

(la logique mathématique parle de variables libres et variables liées)

Les désignateurs représentent dans un contexte donné (fût-il d’attente d’affectation) un objet. C’est la vague idée de paramètre.

Les marqueurs repèrent des places particulières dans l’articulation d’une expression, (cette expression fût-elle même une propriété). C’est la vague idée d’indice muet.

Ainsi dans:

$$\sum_{y=1}^{y=5}(y\cos^2 x) \qquad \textit{ou bien} \qquad \sum_{y=1}^{y=5}(y(\cos^2 x + \sin^2 x))$$

x est un désignateur, y est un marqueur;

- Dans l’approche la plus pragmatique, ces expressions utilisent dans leur écriture les lettres x et y.
- Dans une approche en compréhension, **“ elles ne parlent en fait strictement que de x ”**
- (dans l’approche mathématique finale, la deuxième “ ne parle même plus de qui que ce soit ”, mais ceci est une autre histoire).

1. Les désignateurs

Ils ne présentent en général que peu de problèmes. Les éventuelles difficultés pédagogiques qu'ils peuvent poser, viennent de :

- leur forte dépendance du contexte
- la confusion avec les marqueurs

(a) Dépendance du contexte

A une extrémité, on pourrait dire " contexte universel", des désignateurs comme π, **e**, **Z** . . . codent des objets spécifiques identifiés et reconnus par la communauté internationale, s'opposent aux désignateurs utilisés dans le contexte d'un propos particulier tenu par un professeur donné de mathématiques à un moment précis de sa journée:
- soit $\boldsymbol{M}$ un point tel que . . .
- soit $\boldsymbol{n}$ l'entier qui . . .
- désignons par $\boldsymbol{D}_0$ la droite qui . . .
- supposons $\boldsymbol{x}$ un réel positif . . .

(b) Confusion avec les marqueurs

(voir numéro suivant)

2. Les marqueurs

Ils sont liés à un opérande d'abstraction comme le sont par exemple :

$$\sum_{k} ***, \qquad \int *** \, dx, \qquad \{x \mid ***\}, \qquad \{x \in \quad \mid ***\}$$

mais aussi plus sournoisement peut-être avec les " . . ", comme dans :

$$—*** \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 100$$

ou surtout les locutions quantifiantes comme :

- pour chaque point $\boldsymbol{M}$ tel que $****$,
- il existe un seul entier $\boldsymbol{k}$ pour lequel $****$,

- il existe au moins une droite D telle que $****$.

Il n'est pas si naturel qu'on le croit, pour un élève, de mesurer la profonde différence qu'il y a entre " le M " de la phrase :

- *Considérons un point M quelconque du cercle C de centre O, tel que* $(MA, MO) \geq (MO, MB) \geq \pi/3$.

et celui de la phrase :

- *Pour chaque point M du cercle C de centre O, on a :*

$$(MA, MB) = \pi/2 \ .$$

L'élève aura beaucoup de mal à ressentir que si la première phrase émet une information sur les objets C, O, A, B, M, la seconde par contre ne parle que des objets C, O, A, B.
Il aura d'autant plus de mal que le passage d'un statut à l'autre pour une même lettre est permanent dans le discours du professeur. Celui ci justifiera la deuxième phrase par exemple en commençant par dire quelque chose du genre : " *Soit en effet un point M du cercle ...* ", et dorénavant la même lettre prend un statut de désignateur.
De la même façon si le professeur veut exploiter, au cours d'une démonstration, le fait qu' " *il existe une droite D qui ...* " il dira à bon droit " *pour cela considerons une droite D qui ...* ", faisant passer du statut de marqueur à celui de désignateur la lettre D.
Il y a une difficulté conceptuelle à franchir pour préhender correctement ces lettres dont il n'est pas du tout question dans la propriété, mais à qui donne corps la démonstration ou l'exploitation de cette propriété (c'est ce qu'on appelle introduction du $\forall$, et élimination du $\exists$ en logique).

Notre habitude de la pratique des mathématiques nous fait oublier tout le sous-entendu qu'il y a derrière des phrases comme “*les solutions de* $(\cos x + i \sin x)^n = 1$ *sont*

$$x = \frac{2j\pi}{n} \quad pour \; j = 0, 1, \ldots (n-1), \; à \; 2k\pi \; près \text{''}$$

. Les lettres-symboles en jeu sont : $x, i, n, 0, 1, 2, j, \pi, k$.
Les désignateurs sont de nature très différente

(a) ceux de contexte on ne peut plus général (les mathématiques)

$$i, 0, 1, 2, \pi$$

(b) un désignateur local, mais “assez indifférent” à la question qui se pose : l’entier n (il semble que le problème se pose sans qu’il n’ait vraiment son mot à dire)

(c) enfin le dernier désignateur: x, très lié au contexte et au problème lui-même puisqu’il est supposé représenter l’objet qu’on cherche à caractériser autrement que par la première égalité. C’est lui qui justifie l’information.

Enfin restent les deux marqueurs: j *et* k , ayant chacun des fonctions assez différentes. Le premier est un simple raccourci d’écriture toutefois indispensable dans ce cas précis.
Raccourci d’écriture parce qu’on écrirait peut-être

$$x = \ldots \quad ou \; x = \ldots \quad ou \; x = \ldots$$

si l’objet 3 occupait les places du désignateur n, mais on utiliserait sans doute j si c’était 18.
Indispensable (chose toute relative) parce que précisement n reste un désignateur général.
k, par contre, est inévitable, parcourant tous les entier relatifs.

Ce qui n’est pas surtout explicité et peut présenter par suite un écueil pour une bonne compréhension par l’élève, c’est que ces deux marqueurs sont ici quantifiés existentiellement, sous-entendu sémantique fourni par “*pour* $= \ldots$ ” dans le cas de j, et par “*à* ... *prés*” dans celui de k.

Une formulation plus explicite pourrait en effet être:

"*le réel* x *satisfait* $(\cos x + i \sin x)^n = 1$, *si et seulement si existent un entier positif* $j \leq n$, *et un entier relatif* k *tels que*

$$x = \frac{2j\pi}{n} + 2k\pi \text{''}.$$

(nous choisissons évidemment une forme dans laquelle on souhaiterait désigner par un indice les n arguments complexes $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$).

Remarquons enfin que le statut de désignateur n'est en substance pas si fondamental que ça (paramètre ou inconnue). Puisque l'information qui nous intéresse vraiment est:

"*Pour chaque entier positif* n *et chaque réel* x, $(\cos x + i \sin x)^n = 1$ *si et seulement si existe un entier relatif* k, *tel que* $x = \frac{2k\pi}{n}$"

Expression dans laquelle ne figurent plus que les désignateurs $i, 1, \pi$, et les marqueurs $x, n,$ et k

Toute la difficulté pédagogique est là, on a besoin de vocables comme *paramètre, inconnue, variable, constante*, pour rendre plus lisibles les intensions; des tournures stylistiques plus aérées conduisent ainsi à ne pas trop expliciter les quantifications si indispensables à la structure déductive du propos mathématique

"*Dans un triangle, la somme de deux côtés est toujours supérieure au troisième* "

est évidemment plus agréable à lire que:

"*Pour chaque triangle* T, *chacun des cotés est inférieur à la somme des deux autres* ".

C'est le "toujours" dans la première formulation qui doit faire penser à l'élève que c'est vrai pour tous les triangles et tous les côtés.

Mais il ne faut pas que nous nous étonnions alors que, voulant utiliser l'information sous sa forme caractéristique , certains élèves justifient

" $52 + 13 > 38$, *donc il existe un triangle de côtés* $52, 13,$ *et* 38 "

Il est souhaitable dans un souci de fluidité du discours de ne pas trop expliciter, donc de ne pas trop formaliser les quantifications.

L'usage le plus courant étant par exemple celui de ne pas faire figurer les quantifications[1] universelles devant une propriété de la forme "*Si ... alors...*" ou " *... si et seulement si ...* "

Dans la phrase : "*Si n est multiple de 12, alors il est multiple de 3* " la quantification universelle " *pour tout n* " qui est sous-entendue n'est pas bien dangeureuse.
La quantification existentielle sous-entendue dans:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ à } 2k\pi \text{ près}$$

est bien plus dangereuse.
Il en est de même dans le cas des implications ou équivalences dans lesquelles la variable sous-entendue quantifiée ne figure que dans un seul membre; on pourra méditer par exemple les éventuelles quantifications sur l'entier p ou le réel positif ε dans les propriétés:

$$(np + 8 = 1) \Longrightarrow (n \text{ impair})$$

$$(np + 8 = 1) \Longleftrightarrow (n \text{ impair})$$

$$(0 \leq x \leq \varepsilon) \Longrightarrow (x = 0)$$

$$(0 \leq x \leq \varepsilon) \Longleftrightarrow (x = 0)$$

[1] "quantification" doit être ici entendu pour désigner les locutions rhétoriques "il existe" et "pour chaque", indispensables au discours mathématique ordinaire et indépendamment de tout raccourci graphique.

VII -

CONCLUSION

CONCLUSION

Le sujet abordé est très vaste.
Ce document ne peut donc être qu'une contribution partielle à son approche et appelle de nouveaux développements.
Un tel travail est nécessaire :
il touche au coeur de l'enseignement des mathématiques, quelles que soient les mutations des programmes.

VIII -

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- Adda : L'importance des quantifications dans la compréhension des mathématiques.
  VICO décembre 1975
- Lacombe : Sur les mots et les symboles.
  Bulletin APMEP n° 239 avril-mai 64
- Noirfalise (1993) : Contribution à l'étude didactique de la démonstration.
  Recherches en didactique des mathématiques, vol 13/3 p.229-256
- Apprentissage du raisonnement, IREM de Grenoble, 1985
- Cahiers pédagogiques n° 316 : thème "français-maths" (articles sur l'apprentissage de la démonstration).
- Initiation au raisonnement déductif au collège, Irem de Lyon et Presses Universitaires de Lyon.

Dépot légal quatrième trimestre 1994.

TITRE: DIMENSION LOGOQUE DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE AU COLLEGE ET AU LYCEE.

AUTEURS: Groupe de Reflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (G.R.E.M) IREM - MAFPEN Académie d'Aix-Marseille.

NIVEAU: COLLEGE ET LYCEE.

DATE: 1994

MOTS CLES:

Spécialité: Mathématiques, Logique.

autres:.

RESUME: Cette brochure présente une reflexion sur les procédures logiques rencontrées dans les démonstrations mathématiques et une analyse de certaines erreurs couramment relevées chez les élèves.
Elles propose quelques pistes de remédiation.

FORMAT:	Nombre de pages:	Prix:	IREM
A4	50	40F + Port	19