Documents pour la classe

POURCENTAGES

par

Robert Bayard
Alain Brunel
Albert Rolland

N° 5

Publication de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille

1992

Pourcentages

Pourcentages

Robert BAYARD
Alain BRUNEL
Albert ROLLAND

Documents pour la classe
Publications de l'IREM d'AIX-MARSEILLE

Avant - Propos

Au début la compréhension des pourcentages est facile, si bien que les enseignants des premières années des collèges ne se doutent pas des difficultés rencontrées plus tard, à tous les niveaux, par les professeurs de l'Enseignement Technique qui doivent faire travailler à leurs élèves les pourcentages dans tous les sens.

**Dans les situations de proportionnalité,
le pourcentage correspond au coefficient
d'une fonction linéaire**

Objectif

Traduction mathématique des pourcentages

Plan

1 - Une étude épistémologique succincte sur les pourcentages

1.1 - Ambiguïté des pourcentages

Les pourcentages se rencontrent dans de nombreux domaines avec des significations sensiblement différentes. *(Les didactitiens parlent de divers champs conceptuels)*
Citons les exemples suivants:
- Dans cette classe il y a 18% d'élèves présents.
- Cette route monte avec des passages à 12%.
- Ce produit est assujetti à la T.V.A. de 18,60%.
- Ce commerçant accorde sur certains articles une remise de 10%.
- On place de l'argent à 7%.
- Un alliage d'or contient 75% d'or fin.

1.2 - Divers procédés calculatoires

Divers procédés calculatoires sont pratiqués avec des raisonnements pas toujours conformes à la logique.
La règle de trois est encore très souvent appliquée ainsi que l'opérateur "fraction d'un nombre".
La fonction linéaire commence, timidement, à être utilisée.

1.3 - Les pourcentages constituent un concept très ancien

Les premiers pourcentages paraissent concerner les échanges commerciaux.

Le besoin de parler en centièmes s'est fait sentir très tôt.

Il est question notamment chez les Romains, sous Auguste (-63 ; +14) d'une taxe de 1/100 sur des marchandises vendues aux enchères *(Centesima verum venalium)*.

Dans des manuscrits italiens du XVe siècle on trouve des expressions telles que "VI per cento".

Le chapitre 2 de l'ouvrage chinois "L'art du calcul en 9 sections traite des problèmes de pourcentages.
(Cet ouvrage est considéré par la plupart des historiens comme une bible des mathématiques chinoises. Les diverses parties sont difficilement datables ; certaines auraient pu être écrites avant l'an -200)

L'expression "pourcentage" est bien ancrée dans notre langage. Il serait vain de penser que nous puissions la faire disparaître.
Cependant l'expression "pourcentage" appartient au langage courant et une traduction mathématique est nécessaire pour l'utilisation opératoire.

1.4 - Coefficient de fonction linéaire

Dans le cas d'une situation de proportionnalité, l'utilisation de la fonction linéaire devrait s'imposer (Le pourcentage correspond au coefficient). La compréhension de cette technique est bloquée par les processus ancestraux d'automatisation que sont la règle de trois et l'opérateur "fraction d'un nombre".
Il est regrettable qu'une fraction soit encore considérée par beaucoup, seulement comme un opérateur et non pas, surtout comme une des représentations d'un nombre.

1.5 - Nombres à virgule

L'utilisation plus systématique des nombres à virgule, depuis l'arrivée des calculatrices électroniques, paraît devoir apporter une simplification à l'étude des pourcentages.
L'invention des nombres à virgule est une longue histoire. Parmi les principaux mathématiciens qui ont contribué à l'invention des nombres à virgule citons Al-Kasi, (XVe siècle), Viète (1540 - 1603), Stevin (1548 - 1620) ; puis...La Révolution.
La Révolution pensait que la création du système métrique décimal avec l'écriture des nombres à virgule était un bienfait pour l'humanité ; mais c'était un bouleversement ; et un bouleversement, tout bénéfique qu'il soit, triomphe difficilement des vieilles habitudes...

2 - Pourcentages concernant des situations de non proportionnalité

2.1 - Pourcentages statistiques ou pourcentages de comparaison ou fréquences

2.1.1.Recherche de pourcentages

Dans une classe de 30 élèves 18 élèves sont présents :
18/30 est le premier objet mathématique qui traduit la situation.

Dans une classe de 40 élèves 32 élèves sont présents :
32/40 est le premier objet mathématique qui traduit la situation.

Pour pouvoir comparer nous décimalisons :

0,60 est un représentant du nombre représenté par 18/30.

0,80 est un représentant du nombre représenté par 32/40.

Par suite l'assiduité est plus forte dans la deuxième classe.

60/100 et 80/100 sont aussi des représentants des nombres représentés respectivement par 18/30 et 32/40 d'où les expressions 60% et 80%

Dans les 2 situations précédentes, qui font partie du domaine de la statistique descriptive, il n'y a pas proportionnalité.
Dans un second temps, des fréquences obtenues par la statistique descriptive, peuvent être considérées comme des probabilités, coefficients de fonctions linéaires corrigés par des intervalles de confiance.

2.1.2. Le pourcentage est donné
Dans une classe de 35 élèves il y a 60% d'élèves présents.
Quel est le nombre d'élèves présents ?

x/35 est le premier objet mathématique qui traduit la situation.
Par suite :
x/35 = 0,60
La résolution de l'équation conduit à :
x = 0,60 x 35
x = 21

2.2 - Pourcentages, tangentes trigonométriques

Une route monte avec des passages à 12%

Dire qu'à un endroit une route monte à 12% c'est dire qu'à cet endroit la tangente trigonométrique de l'angle que fait la route avec l'horizontale est 0,12.

L'angle étant mesuré en degrés :
Arctg 0,12 = 6,8...
L'angle que fait la route avec l'horizontale est de 6,8 degrés.

(Cette route est considérée comme montant sévèrement)

Les cartes Michelin indiquent par une flèche les pentes comprises entre 5% et 9%, par 2 flèches les pentes comprises entre 9% et 13%, par 3 flèches les pentes de plus de 13% ; elles précisent les pourcentages pour les très fortes dénivellations.

3 - Pourcentages concernant des situations de proportionnalité

Le pourcentage donné peut être traduit par un tableau qui fournit des coefficients de fonctions linéaires.
(Didactiquement : nous nous plaçons dans un système d'enseignement où la fonction linéaire est un objet connu)

3.1 - Taxe sur la valeur ajoutée

Un produit est assujetti à la T.V.A. de 18,60% (sur le prix hors-taxe).

3.1.1. Ce pourcentage peut être traduit ainsi :
Si un produit coûte 1 F hors-taxe alors la taxe est de 0,186 F et le prix de ce produit taxe comprise est de 1,186 F.
D'où le tableau :

Hors-taxe	Taxe	Taxe comprise
1	0,186	1,186

Ce tableau donne les coefficients (de fonctions linéaires) 0,186 et 1,186 à appliquer au prix hors-taxe pour obtenir respectivement le montant de la taxe et le prix taxe comprise.

Si le prix hors-taxe est de 350 F alors :
- le montant de la T.V.A. est de :
0,186 x 350 = 65,10
- le prix taxe comprise est de :
1,186 x 350 = 415,10

3.1.2. Si nous connaissons le prix taxe comprise pour obtenir soit le prix hors-taxe soit le montant de la taxe nous écrivons dans le tableau une deuxième ligne "équivalente" à la première. Cette deuxième ligne est obtenue en divisant chaque nombre de la première par 1,186, ce qui nous permet d'avoir 1 au prix taxe comprise :

Hors-taxe	Taxe	Taxe comprise
1	0,186	1,186
1/1,186	0,186/1,186	1

La nouvelle ligne donne les coefficients 1/1,186 et 0,186/1,186 à appliquer au prix taxe comprise pour obtenir respectivement le prix hors-taxe et le montant de la taxe.

Si le prix taxe comprise est de 533,70 F alors :
- le prix hors taxe est de :
1/1,186 x 533,70 = 450
- le montant de la taxe est de :
0,186/1,186 x 533,70 = 83,70

Avec les calculatrices électroniques il est inutile de retenir les écritures à virgule des coefficients : en effet, sauf dans les cas simples, il est plus aisé de se souvenir des formes quotients dont l'entrée dans les calculatrices est au moins aussi rapide.

Utilisation du coefficient constant d'une calculatrice :
Si par exemple nous vérifions les T.V.A. inscrites sur plusieurs factures qui ne donnent pas le prix hors-taxe mais le prix taxe comprise et la T.V.A nous mettons en constant le coefficient 0,186/1,186

3.2 - Bénéfices pour cent

3.2.1.Un commerçant réalise un bénéfice de 25% sur le coût de revient des produits qu'il vend.

3.2.1.1.Ce pourcentage peut être traduit ainsi :
Si le coût de revient d'un produit est de 1 F alors le montant du bénéfice est de 0,25 F et le prix de vente est de 1,25 F.
D'où le tableau :

R	B	V
1	0,25	1,25

Si le coût de revient d'un produit est de 420 F alors :
- le montant du bénéfice est de :

0,25 x 420 = 105
- le prix de vente est de :

1,25 x 420 = 525

3.2.1.2.Si nous connaissons le prix de vente pour obtenir soit le coût de revient soit le montant du bénéfice nous écrivons dans le tableau une deuxième ligne "équivalente" à la première :

R	B	V
1	0,25	1,25
1/1,25	0,25/1,25	1

La deuxième ligne est obtenue en divisant chaque nombre de la première par 1,25 ce qui nous permet d'avoir 1 au prix de vente.

3.2.2. Un commerçant réalise un bénéfice de 20% sur le prix de vente des produits qu'il vend.

Ce pourcentage peut être traduit ainsi :
Si le prix de vente d'un produit est de 1 F alors le montant du bénéfice est de 0,20 F et le coût de revient est de 0,80 F.
D'où le tableau :

R	B	V
0,80	0,20	1

Si nous connaissons le coût de revient alors :

R	B	V
0,80	0,20	1
1	0,20/0,80	1/0,80

Nous avons choisi volontairement 2 pourcentages équivalents : en effet dire que le bénéfice est de 20% sur le prix de vente revient à dire que le bénéfice est de 25% sur le coût de revient. (0,20/0,80 donne bien 0,25)

Si le bénéfice pour cent sur le coût de revient est inférieur à 100% seul le naturel 25 a un correspondant naturel ; 100 a pour correspondant 50 ; nous n'irons pas au-delà de ce bénéfice qui est déjà très fort.

3.3 - Réductions sur les prix

Un commerçant accorde sur certains des articles qu'il vend une remise de 10% *(sur les prix marqués)*.

3.3.1. Ce pourcentage peut être traduit ainsi :
Si le prix marqué d'un article est de 1 F alors la remise est de 0,10 F et le prix net est de 0,90 F.
D'où le tableau :

PM	r	PN
1	0,10	0,90

Si nous connaissons le prix net pour obtenir soit le prix marqué soit le montant de la remise nous écrivons dans le tableau une deuxième ligne "équivalente" à la première :

PM	r	PN
1	0,10	0,90
1/0,90	0,10/0,90	1

Si le prix net est de 360 F alors:
- le prix marqué est de :
1/0,90 x 360 = 400
- le montant de la remise est de :
0,10/0,90 x 360 = 40

3.3.2. Recherche de la remise pour-cent accordée
Un client paye 396 F une marchandise qui est marquée 450 F.
Quelle est la remise pour-cent accordée ?
Nous écrivons le tableau :

PM	r	PN
450	(450 — 396)	396
1	54/450	396/450

La remise pour-cent accordée est :
(450-396)/450 = 0,12 soit 12%
ou
396/450 = 1,12 soit 12%

3.4 - Titre d'un alliage d'or

En bijouterie un alliage d'or au titre de 0,750 ou de "750 millièmes" est un alliage qui contient (en masse) 75% d'or pur (ou or fin).
On dit aussi (encore maintenant) qu'il s'agit d'un alliage à 18 carats c'est-à-dire d'un alliage qui contient 18/24 d'or pur (18/24 = 0,750).
(L'expression "x carats", d'origine ancienne, aurait dû disparaître avec l'adoption du système métrique)

1 g d'or rouge contient 0,75 g d'or pur et 0,25 g de cuivre.

1 g d'or jaune contient 0,75 g d'or pur, 0,10 g d'argent et 0,15 g de cuivre.

L'or blanc désigne le platine.

"Dans les transactions relatives aux diamants, perles fines et pierres précieuses, la dénomination de carat peut être donnée au double décigramme." (Décret du 26 juillet 1919.)
Philippe d'Orléans, régent de France de 1715 à 1723 a acheté en 1717 le célèbre diamant : le Régent. Ce diamant d'une pureté exceptionnelle est déposé au musée du Louvre ; il pèse 136 carats ou 27,2 grammes.

3.5 - Taux d'intérêt

Un taux d'intérêt donne 2 renseignements :
- le montant de l'intérêt pour 1 F placé
- la période à la fin de laquelle cet intérêt est dû

Un taux de 8% l'an signifie que 1 F placé rapporte 0,08 F pour une période d'un an.
(La coutume veut qu'il s'agisse d'une période d'un an si celle-ci n'est pas précisée par le taux)

L'utilisation de formules, pour le calcul des intérêts, évite en grande partie, les difficultés habituelles des pourcentages.
L'étude des intérêts présente des complications d'un autre ordre : elle nécessite la rédaction d'un document particulier.

BIBLIOGRAPHIE

History of mathematics (Tome 2)

D.E. Smith
New York, Dover 1958

Histoire des mathématiques chinoises

J.C.Martzoff
Masson 1987

Fragments d'histoire des mathématiques

Brochure 41 APMEP 1981

Rigueur et calcul

IREM de Rouen
CEDIC 1982

Histoire des mathématiques
J.C.Colette
Vuibert Tome 1 1973
Tome 2 1979

Les pourcentages, sous des allures anodines au début, présentent vite d'énormes difficultés.

Ce document a été rédigé d'après des expériences pédagogiques qui ont donné des résultats satisfaisants.

30 F