Documents pour la classe

# COUT et MARGE

par

Robert Bayard
Alain Brunel
Aimé Gandolfi
Albert Rolland

N° 2

Publication de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille

1989

# Coût et Marge

# Coût et Marge

Robert BAYARD
Alain BRUNEL
Aimé GANDOLFI
Albert ROLLAND

Documents pour la classe
Publications de l'IREM d'AIX-MARSEILLE

Une entreprise doit penser avant tout à sa pérennité ; elle doit pour cela s'assurer de bénéfices suffisants, non nécessairement importants.

Les situations économiques sont d'une grande complexité ; pour les mathématiser avec une probabilité satisfaisante il est nécessaire de rassembler de très nombreuses statistiques.

La marge sur coût de revient n'augmente pas nécessairement avec le chiffre d'affaires.

Alors que les sciences physiques font, depuis toujours, appel aux mathématiques il n'y a qu'un siècle environ que celles-ci apparaissent en économie et même encore à notre époque les sciences économiques ne les utilisent pas suffisamment.

*Parmi les initiateurs de l'économie mathématique ou économétrie sont à citer :*
*Auguste **COURNOT**, mathématicien, économiste et philosophe français (1801 ; 1877)*
*Léon **WALRAS**, économiste français (1834 ; 1910)*

L'importance actuelle de l'économie et de la gestion et les outils mathématiques et informatiques disponibles à présent rendent indispensable d'apprendre à nos élèves de bacs professionnels à mathématiser des situations économiques.

# OBJECTIF

Mathématisation de situations économiques
*(à cette fin, nous utiliserons les notions de fonctions, de dérivées...)*

# PLAN

1 - Quelques définitions d'après le plan comptable

2 - Elasticité économique

3 - Deux problèmes sur la fonction coût de revient moyen
et sur la fonction marge

4 - Idée du coût marginal

# 1 - Quelques définitions d'après le Plan Comptable

## 1.1 - Coût de Revient

Le Coût de revient est l'ensemble des charges :

> Charges variables constituées par les charges qui varient avec le volume d'activité de l'entreprise.
(sans qu'il y ait nécessairement proportionnalité)
.(prix d'achat de marchandises ; frais d'achat ; frais de production ; frais de distribution...)

> Charges de structure ou charges fixes pendant une période relativement courte.
(frais pour les locaux, salaires du personnel de gestion...)

## 1.2 - Coût de Revient Moyen

si x est le nombre d'unités à vendre, on note :

$C : x \longmapsto C(x)$ la fonction coût de revient

et

$C_M : x \longmapsto C_M(x) = C(x)/x$ la fonction coût de revient moyen

*Cf: Bien que x soit une variable discrète par commodité nous nous placerons en continu.*

## 1.3 - Marge

Une marge est la différence entre le chiffre d'affaires et un coût.

*Cf: La marge que nous considérerons est la marge sur coût de revient.*
*> Si cette marge est positive cette marge est un bénéfice.*
*> Si cette marge est négative cette marge est une perte.*

# 2 - Elasticité Economique

## 2.1 - Exemples :

> Elasticité de la demande par rapport au prix

> Elasticité des importations par rapport à la production

### 2.1.1 - Elasticité de la demande par rapport au prix

Dans un supermarché le prix d'une boîte de petits pois passe de 12 F à 13 F, le nombre de boîtes vendues dans la semaine passe alors de 1 400 à 1 200.

Coefficient de variation du prix d'une boîte :

$$(13 - 12)/12 = 1/12$$

Coefficient de variation du nombre de boîtes vendues :

$$(1\,200 - 1\,400)/1\,400 = -1/7$$

Coefficient d'élasticité de la demande par rapport au prix :

$$(-1/7)/(1/12) = -12/7 = -1,71...$$

*Cf: Le coefficient de la demande par rapport au prix est généralement négatif.*
*Dans certaines conditions il peut être positif :*

*> Cela arrive pour des produits de luxe.*

*> "Le paradoxe de Giffen"*
*Au XIXe siècle, régulièrement, quand le prix du pain augmentait la demande de pain augmentait ; l'augmentation du prix du pain diminuait le pouvoir d'achat des consommateurs et les consommateurs de condition modeste se repliaient vers des produits très courants tels que le pain.*
*Cf: Giffen : statisticien et économiste britannique (1837 - 1910)*

### 2.1.2 - Elasticité des importations par rapport à la production

La production augmente de 2% alors que les importations augmentent de 3%.

Elasticité des importations par rapport à la production :

$$0,03/0,02 = 1,5$$

## 2.2 - Un problème sur l'élasticité économique

Un supermarché fait une analyse sur les ventes de boîtes de petits pois de 1 kg.
Le coût de revient unitaire de ces boîtes est de 9 F.
La concurrence conduit le super marché à pratiquer un prix de vente unitaire n'excédant pas 15 F.
Le supermarché dispose des statistiques suivantes :

| Prix de vente unitaire<br>x | Nombre de boîtes vendues en une semaine<br>y |
|---|---|
| 15 | 820 |
| 14 | 998 |
| 13 | 1 175 |
| 12 | 1 406 |
| 11 | 1 632 |
| 10 | 1 805 |
| 9 | 1 983 |

1° - Représenter graphiquement les couples (x;y) par 7 points.
Quelle courbe peut-on choisir pour lisser le nuage de points ?
(Etablir l'équation de la courbe par la méthode des moindres carrés en arrondissant les coefficients à la centaine la plus proche).
Etudier la fonction par laquelle x a pour image y
Commenter.

2° - Etudier la fonction par laquelle x a pour image v(x), v(x) étant le chiffre d'affaires.
Commenter.

3° Etudier la fonction par laquelle x a pour image M(x),
M(x) étant la marge sur coût de revient.
Commenter.

## Solution

1° Nous laissons au lecteur le soin de la construction graphique.

La représentation graphique montre qu'on peut lisser le nuage de points par une droite.
Etablissons l'équation de cette droite par la méthode des moindres carrés.

| $x_i$ | $y_i$ | $(x_i-\bar{x})$ | $(y_i-\bar{y})$ | $(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $(y_i-\bar{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1983 | -3 | 580,29 | -1740,87 | 9 | 336736,48 |
| 10 | 1805 | -2 | 402,29 | -804,52 | 4 | 161837,24 |
| 11 | 1632 | -1 | 229,29 | -229,29 | 1 | 52573,90 |
| 12 | 1406 | 0 | 3,29 | 0 | 0 | 10,82 |
| 13 | 1175 | 1 | -227,71 | -227,71 | 1 | 51851,84 |
| 14 | 998 | 2 | -404,71 | -809,42 | 4 | 163790,18 |
| 15 | 820 | 3 | -582,71 | -1748,13 | 9 | 339550,94 |
| 84 | 9819 | 0 | 0,... | -5560,00 | 28 | 1106351,42 |

Moyennes : $\bar{x} = 12$ $\bar{y} = 1402,71$

Coefficient de corrélation : $r = -5560/\sqrt{28 \times 1106351,42}$

$r = -0,998...$

Le coefficient de corrélation étant voisin de -1 la forte corrélation indiquée par la représentation graphique est confirmée.

Etudions la fonction f.

La nature du problème nous conduit à considérer la fonction f définie dans l'intervalle [9 ; 15] à valeurs dans IR.

L'équation de la fonction est :
$y - 1402,71 = (-5560/28)(x - 12)$
En arrondissant :
$y = -200\,x + 3800$

La fonction f est une fonction affine décroissante (coefficient directeur négatif)
L'image par f de l'intervalle [9 ; 15] est l'intervalle [800 ; 2000]

*Cf. Au prix de vente unitaire minimal correspond le nombre maximal de boîtes vendues et inversement.*

2° - Etudions la fonction v :

La nature du problème nous conduit à considérer la fonction v définie dans l'intervalle [9 ; 15] à valeurs dans IR.

L'équation de la fonction v est :
$v(x) = xy$
$v(x) = x(-200\ x + 3800)$
$v(x) = -200\ x^2 + 3800\ x$

Précisons les variations de cette fonction.

L'équation de la fonction dérivée de la fonction v est :

$v'(x) = -400\ x + 3800$

$v'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 9{,}5$

Le tableau de variations de la fonction v est :

| x | 9 | | 9,5 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| v'(x) | | + | 0 | - | |
| V(x) | 18000 | ↗ | max 18050 | ↘ | 12000 |

L'image par v de l'intervalle [9 ; 15] est l'intervalle [12000 ; 18050]

Si le prix de vente unitaire est de 9,50 F alors le chiffre d'affaires est maximal et égal à 18050 F pour un nombre de boîtes vendues:
$y = -200 \times 9{,}5 + 3800 = 1900$

*Cf. 1900 n'est pas le nombre maximal de boîtes pouvant être vendues par semaine.*

3° - Le coût de revient unitaire étant de 9 F étudions la fonction M :

La nature du problème nous conduit à considérer la fonction M définie dans l'intervalle [9 ; 15] à valeurs dans IR.

L'équation de la fonction M est :
$M(x) = v(x) - 9y$
$M(x) = -200 x^2 + 3800 x - 9(-200 x + 3800)$
$M(x) = -200 x^2 + 5600 x - 34200$

Précisons les variations de cette fonction.

L'équation de la fonction dérivée de la fonction M est :

$M'(x) = -400 x + 5600$

$M'(x) = 0 <===> x = 14$

Le tableau de variations de la fonction M est :

| x | 9 | | 14 | | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| M'(x) | | + | 0 | - | |
| M(x) | 0 | ↗ | max 5000 | ↘ | 4800 |

L'image par M de l'intervalle [9 ; 15] est l'intervalle [0 ; 5000]

Si le prix de vente unitaire est de 9 F la marge est nulle.
(Le prix de vente unitaire est égal au coût de revient unitaire)

Si le prix de vente unitaire est de 14 F :
- > la marge est maximale et égale à 5000 F
- > le nombre de boîtes vendues est alors x = 1000 (exactement 998)
- > le chiffre d'affaires est de 14000 F *(Cf. il n'est pas maximal)*

# 3 - Fonction coût de revient moyen - Fonction marge

## 3.1 - Problème

Une entreprise qui fabrique un certain produit et qui sait que la demande est suffisante pour écouler 200 objets a établi le tableau suivant :

| $x$ | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_M(x)$ | 427 | 419 | 412 | 407 | 402 | 399 | 397 | 396 | 397 | 398 | 401 |

où :
$x$ est le nombre d'objets
$C_M(x)$ est le coût de revient moyen

L'analyse de ce tableau doit permettre à l'entreprise de prendre des décisions quant au nombre d'objets à fabriquer.

### 3.1.1 - Fonction coût de revient moyen

Si nous représentons graphiquement les couples $(x ; C_M(x))$ par 11 points la disposition de ces points montre la possibilité d'un lissage par une courbe du second degré .

L'équation de cette courbe, établie par la méthode des moindres carrés, est la suivante :

$C_M(x) = 0{,}006\,x^2 - 2{,}06\,x + 573$

La nature du problème nous conduit à étudier la fonction $C_M$ définie par :

$$C_M : [100 ; 200] \longrightarrow IR$$

$$x \longmapsto C_M(x) = 0{,}006\,x^2 - 2{,}06\,x + 573$$

Précisons les variations de cette fonction .

L'équation de la fonction dérivée de la fonction $C_M$ est :

$C_M'(x) = 0{,}012\,x - 2{,}06$
$C_M'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 172$

Le tableau de variations est :

| $x$ | 100 | | 172 | | 200 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_M'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $C_M(x)$ | 427 | ↘ | minimun 396 | ↗ | 401 |

L'image par $C_M$ de l'intervalle $[100 ; 200]$ est l'intervalle $[396 ; 427]$

3.1.2 - Fonction marge sur coût de revient

Le marché conduit l'entreprise à pratiquer un prix unitaire de 414 F.

M(x) est la marge sur coût de revient .
(Marge = Chiffre d'affaires - Coût de revient)

L'équation de la fonction M est :
$M(x) = 414\,x - (0{,}006\,x^2 - 2{,}06\,x + 573)\,x$
$M(x) = 414\,x - 0{,}006\,x^3 + 2{,}06\,x^2 - 573\,x$

$$M(x) = -0{,}006\,x^3 + 2{,}06\,x^2 - 159\,x$$

$M(x) = 0$ et $x \in [100\,;200] \iff x = 117$

L'équation de la fonction dérivée de la fonction M est :

$M'(x) = -0{,}018\,x^2 + 4{,}12\,x - 159$

$M'(x) = 0$ et $x \in [100\,;200] \iff x = 180$

Le tableau de variations est :

| x | 100 | | 117 | | 180 | | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M'(x) | | + | | + | 0 | − | |
| M(x) | −1300 | ↗ | 0 | ↗ | maximun 3132 | ↘ | 2600 |

Le prix de vente unitaire étant de 414 F :

> Si l'entreprise produisait 200 objets :
- le chiffre d'affaires serait de 8 280 F
- la marge serait de 2 600 F

> Si l'entreprise produisait 180 objets :
- le chiffre d'affaires serait de 7 452 F
- la marge serait de 3 132 F

*Cf. La marge sur coût de revient n'augmente pas nécessairement avec le chiffre d'affaires.*

## 3.2 - Un autre exercice sur la fonction marge

Soit la fonction suivante :

$C : [0 ; 1000] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto C(x) = 0,002\,x^3 - x^2 + 4000\,x$

Cette fonction traduit le coût de revient de la production de x objets.

On sait que pour 1000 objets la demande est suffisante.

Le prix de vente imposé par le marché est de 4500 F.

Etudier la fonction $C_M$ par laquelle x a pour image $C_M(x)$, $C_M(x)$ étant le coût de revient moyen.

Etudier la fonction M par laquelle x a pour image M(x), M(x) étant la marge sur coût de revient.

Commenter.

# 4 - Idée du coût marginal

## 4.1 - Définitions :

4.1.1 - x est le nombre d'unités produites .
Soit la fonction coût de revient total telle que :

$$C : x \longmapsto C(x)$$

Bien que x soit une variable discrète, pour plus de commodité, nous nous plaçons en continu avec C dérivable.

Le nombre dérivé $C'(x_0)$ est appelé coût marginal pour la production $x_0$ .

4.1.2 - Approche des économistes
Les économistes appellent aussi coût marginal pour la production $x_0$ l'augmentation du coût pour la production d'une unité supplémentaire .
Il s'agit en fait d'une approche du nombre dérivé .

Remarques :
> Cette définition a permis aux économistes de faire une ébauche immédiate de l'analyse d'une situation .
> A présent les ordinateurs donnent une analyse rapide et complète d'une situation économique .

## 4.2 - Quelques propriétés du coût marginal

4.2.1 - Le coût marginal est indépendant des coûts fixes (la dérivée d'une constante est égale a 0).

Par exemple si vous faites payer une communication à une personne qui a utilisé votre téléphone, sans tenir compte de l'abonnement, vous lui faites payer la communication au coût marginal .

4.2.2 - Dans un intervalle si le coût marginal diminue( augmente, est constant) les économistes disent qu'il y a rendement croissant (décroissant, constant) .

4.2.3 - Dans un intervalle ouvert si pour $x_0$ la fonction coût de revient moyen passe par un minimun pour $x_0$ le coût de revient moyen et le coût marginal correspondant sont égaux.

La démonstration de cette propriété peut faire l'objet d'un exercice :

$$x > 0$$

$$C_M(x) = C(x)/x$$

$$C'_M(x) = (xC'(x)-C(x))/x^2$$

si dans un intervalle ouvert la fonction $C_M$ passe par un minimun pour $x_0$

$$x_0C'(x_0) - C(x_0) = 0 \text{ d'où } C'(x_0) = C(x_0)/x_0$$

4.2.4 - Dans un intervalle si la fonction coût marginal C' est strictement croissante la marge augmente jusqu'à ce que le coût marginal égale le prix de vente unitaire p imposé par le marché.

Justifions cette proposition.

Hypothèses :
- intervalle $[x_1 ; x_2]$
- C : fonction dérivable
- C' : fonction continue strictement croissante
- $C'(x_1) \leq p \leq C'(x_2)$
- $M(x) = px - C(x)$

Conclusion :
- Il existe une et une seule valeur $x_0$ de x telle que
- $C'(x_0) = p$
- La plus grande valeur de M(x) dans l'intervalle $[x_1 ; x_2]$ est atteinte pour $x = x_0$ et seulement pour $x = x_0$ .

Démonstration :
- $x_0$ existe et est unique (théorème des valeurs intermédiaires)
- $M(x) = px - C(x)$
- $M'(x) = p - C'(x)$
- $M'(x)$ est strictement positive dans l'intervalle $[x_1 ; x_0[$ et strictement négative dans l'intervalle $]x_0 ; x_2]$

Ce qui donne le tableau de variations :

| x | $x_1$ | | $x_0$ | | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| M'(x) | | + | | - | |
| M(x) | | ↗ | maximun | ↘ | |

## 4.3 - Exercice traité par l'analyse d'un tableau

Le prix de vente unitaire déterminé d'après le marché est de 3 610 F.

Etant donné le tableau suivant étudier la marge d'après la production .

| x | C(x) | $C_M$ | C(x+1) — C(x) |
|---|---|---|---|
| 6 | 21 840 | 3 640 | 3 220 |
| 7 | 25 060 | 3 580 | 3 260 |
| 8 | 28 320 | 3 540 | 3 270 |
| 9 | 31 590 | 3 510 | 3 310 |
| 10 | 34 900 | 3 490 | 3 490 |
| 11 | 38 390 | 3 490 | 3 610 |
| 12 | 42 000 | 3 500 | 3 760 |
| 13 | 45 760 | 3 520 | 4 080 |
| 14 | 49 840 | 3 560 | 4 310 |
| 15 | 54 150 | 3 610 | |

A partir d'une production de 7 unités la marge est positive et augmente. (Le prix de vente unitaire étant supérieur au coût de revient moyen)

Pour une production de 11 unités la marge est maximale et égale à 1320 F. (Le prix de vente unitaire étant égal au coût marginal correspondant à la production de 11 unités)

La marge diminue ensuite ; elle s'annule pour la production de 15 unités. (Le prix de vente unitaire étant égal au coût de revient moyen).

Il serait possible de traiter ce problème avec l'équation suivante obtenue par la méthode des moindre carrés :

$$C_M(x) = 6,7\, x^2 - 144\, x + 4262$$

# BIBLIOGRAPHIE


Le calcul économique

Patrick Jeanjean
Collection Que sais-je N° 1 625

L'économétrie

Pierre Maillet
Collection Que sais-je N° 1 423

Initiation à l'économie

J.Brémond & M.M. Salor
Librairie Hatier (octobre 1966)

Dictionnaire des théories
et mécanismes économiques

J.Brémond & A.Gélédan
Librairie Hatier (octobre 1984)

Plan comptable

Imprimerie nationale
(avril 1982)

L'étude des mathématiques dans l'Enseignement Technique doit s'appuyer sur des situations professionnelles.

Ce document donne des exemples choisis en économie et en gestion.

Il insiste pour que la vie professionnelle fasse davantage appel aux outils mathématiques.