Documents pour la classe

APPORT D'IDÉES PROBABILISTES DANS L'ENSEIGNEMENT DES STATISTIQUES CONCERNANT DES CLASSES DE B.E.P. ET DE BAC PROFESSIONNELS

par

Robert BAYARD
Alain BRUNEL
Henri CAMOUS
Aimé GANDOLFI
Albert ROLLAND

N° 1

Publication de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille

1987

Présentation provisoire

APPORT D'IDÉES PROBABILISTES DANS L'ENSEIGNEMENT DES STATISTIQUES CONCERNANT DES CLASSES DE B.E.P. ET DE BAC PROFESSIONNELS

APPORT D'IDÉES PROBABILISTES DANS L'ENSEIGNEMENT DES STATISTIQUES CONCERNANT DES CLASSES DE B.E.P. ET DE BAC PROFESSIONNELS

Robert BAYARD
Alain BRUNEL
Henri CAMOUS
Aimé GANDOLFI
Albert ROLLAND

Documents pour la classe
Publications de l'IREM d'Aix-Marseille

"Il n'est point de science
qu'il ne soit plus utile
de faire entrer dans
l'Instruction Publique"

Laplace

Essai philosophique sur
les probabilités 1814

Malgré l'importance de plus en plus grande prise par les probabilités au XIXè et au XXè siècle dans les domaines les plus divers, l'idée de probabilité est restée très longtemps étrangère à notre enseignement du second degré.

Dans les lycées Professionnels les programmes des C.A.P., des B.E.P., des Bac Professionnels comportent une étude des statistiques. Leur interprétation n'a pas, jusqu'à ce jour, donné lieu à l'introduction d'idées probabilistes. Vu l'importance prise par les probabilités dans le commerce et dans l'industrie, il nous semble indispensable de montrer qu'elles sont une des finalités essentielles des statistiques.

PRESENTATION DU DOCUMENT

PREMIERE PARTIE

* Feuilles (A; B; C; ...) :

concernent les commentaires destinés aux professeurs.

DEUXIEME PARTIE

* Feuilles (1; 2; 3; ...) :

sont celles distribuées aux élèves qui doivent les compléter.

* Feuilles (1bis; 2bis; 3bis; ...) :

sont celles des élèves complétées.

PREMIERE PARTIE

Commentaires destinés aux professeurs.

Feuilles (A; B; C; ...)

Objectifs :

Notre travail a consisté à développer les points suivants :

- Concept d'expérience aléatoire.
- Notion d'histogramme.
- Intervention de la moyenne (ou de l'espérance mathématique) et de l'écart-type
- Passage de l'histogramme à la courbe de Gauss.
- Utilisation de la courbe de Gauss et de tables correspondantes.

Prérequis

Les élèves ont acquis les notions suivantes sur les séries non classées :

- Effectifs et fréquences.
- Effectifs cumulés et fréquences cumulées.
- Moyenne et écart-type.
- Diagrammes en bâtons.

Modèle expérimental.

Nous pouvons donner le concept d'expérience aléatoire en citant quelques exemples :

- Jeu de "Pile" ou "Face".
  Quelle est la probabilité d'obtenir "Pile" ?

- Un panier contient 3 boules : une rouge, une blanche, une bleue.
  Quelle est la probabilité de sortir une boule rouge ?

- Un panier contient 30 boules : 10 rouges, 10 blanches, 10 bleues.
  Quelle est la probabilité de sortir une boule rouge ?

La notion de pari avec des mises équitables peut permettre de préciser le concept d'expérience aléatoire.

1. Première expérience que nous allons exploiter :

Jeu de "Pile" ou "Face" avec 4 joueurs.

1.1. Considérons l'expérience suivante :

4 joueurs A,B,C,D lancent chacun une pièce de monnaie.
Quelle est la probabilité pour que 2 et 2 seulement de ces joueurs obtiennent "Pile" ?

Déterminons d'abord toutes les situations possibles à l'aide d'un tableau.

Exemple de situations :
A obtient "Face", B "Pile", C "Pile, D "Face", ce que l'on code :

A	B	C	D
0	1	1	0

Faisons figurer ces résultats dans un tableau (feuille 1) où chaque valeur indiquée est le nombre de joueurs qui, au cours d'une expérience, ont obtenu le côté "Pile".

Cf. Les élèves ont déjà travaillé avec des tableaux semblables concernant des statistiques objectives; ici il s'agit de statistiques subjectives ou mathématiques ou de probabilités.

Calculons les fréquences.

Pouvons-nous répondre à la question posée ?

En répétant un grand nombre de fois l'expérience des 4 joueurs, il est <u>presque certain</u> que les fréquences (statistiques ou objectives) se rapprocheraient de ces fréquences (mathématiques ou subjectives) c'est-à-dire de ces <u>probabilités</u>.

Cf. "Le naturaliste Buffon, qui s'est intéressé aux probabilités, a lancé 4040 fois une pièce de monnaie : il a obtenu 1992 fois "Pile". La fréquence (statistique) obtenue est 0,493 alors que la fréquence (mathématique) est 0,5".

Ces expériences peuvent être simulées sur ordinateur (voir feuille 1).

1.2. Du diagramme en bâtons à l'histogramme à la Courbe de Gauss.

Les élèves connaissent les diagrammes en bâtons : ils peuvent donc traduire la situation par un tel diagramme, puis ils construiront un histogramme.

1.2.1. Diagramme en bâtons. (sur feuille 2).

Faisons tracer le diagramme en bâtons après avoir donné la graduation de l'axe des abcisses.

La hauteur du bâton correspondant à la valeur 2 est fixée à 7,5 cm.

Les élèves doivent calculer la longueur de tous les bâtons. (Les longueurs des bâtons sont proportionnelles aux fréquences).

1.2.2. Diagramme en surface : histogramme. (sur feuille 2).

Cf. "Histogramme vient du grec histos qui signifie peau, surface".

Demandons aux élèves de transformer les bâtons en rectangles adjacents de même largeur, axés sur les bâtons : ils construisent ainsi un histogramme dont ils doivent déterminer l'aire. (Les aires des rectangles sont proportionnelles aux fréquences).

L'aire de l'histogramme est de 100 cm^2. En prenant le dm^2 comme unité, les mesures des aires des rectangles sont aussi les fréquences (ou probabilités).

1.2.3. Polygone statistique (sur feuille 2).

Le polygone statistique est obtenu en joignant les sommets des bâtons (ou milieux des bases supérieures des rectangles, l'histogramme construit étant régulier*) et en le fermant sur l'axe des abscisses.

* Cf. A.F.N.O.R. : "Lorsque les bases des rectangles ont même mesure, l'histogramme est dit régulier".

On notera que sur une feuille de papier millimétrée, format européen, un débordement est nécessaire.

On remarquera qu'un triangle extérieur et un triangle intérieur au polygone ont même aire et que par suite : "l'aire de l'histogramme est égale à l'aire de la surface comprise entre le polygone statistique et l'axe des abcisses".

2. Deuxième expérience que nous allons exploiter :

Jeu de "Pile ou Face avec 6 joueurs.

2.1. Nous considérons un expérience identique avec 6 joueurs.

Nous étudions avec la classe la feuille 3.
Il y a 64 situations possibles.

2.2. Etude de la feuille 4 millimétrée .

Nous devons faire remarquer que l'unité de longueur de chaque bâton a été multipliée par l'écart-type et que par suite l'aire du deuxième histogramme est la même que celle du premier.

Cela pour éviter l'écrasement de la courbe.

Cf. "L'intervention de l'écart-type pour éviter l'écrasement de la courbe et le fait que les polygones statistiques obtenus se rapprochent de la courbe de Gauss sont conformes à la fois aux travaux de Laplace et de Gauss (utilisation de l'analyse) et à ceux de Quetelet (considérations d'ordre statistique).

2.3. La feuille 5 représente la "Courbe de Gauss standard".

En augmentant le nombre de joueurs les polygones statistiques obtenus se rapprochent de la courbe de Gauss (ou courbe de Laplace-Gauss ou courbe de la loi normale).

L'abscisse 0 de la courbe standard correspond à l'abscisse x_i des diagrammes précédents. Les unités de longueurs choisies pour les axes sont les mêmes que pour le diagramme où l'écart-type est 1 (cas de 4 joueurs).

2.4. Simulation expérimentale de la courbe de Gauss.

Cf. "Le groupe I.R.E.M. a imaginé et réalisé un "sablier" qui permet dans d'autres conditions de visualiser la courbe de Gauss" (feuille J).

Cf. "Un autre exemple de simulation est donné par la feuille ci-jointe : répartition de tailles dans une population (feuille K).

3. Il n'y a pas que les jeux.

Nous avons considéré 4 joueurs, puis 6. Nous aurions pu en considérer davantage.

Les joueurs auraient pu lancer des dés avec 2 faces rouges et 4 bleues.

Dans la vie courante il existe des expériences analogues, notamment
- pour les sondages : chaque personne répond par "oui" ou par "non oui"
- pour le contrôle de pièces : une pièce est "valable" ou "non valable".
- pour une assurance : pour l'année un assuré est un "sinistré" ou un "non sinistré".

4. Intérêt et utilisation de la Courbe de Gauss.

4.1. Intérêt.

Dans le cas de jeu de "Pile" ou "Face" avec 4 joueurs nons avons pu déterminer toutes les situations possibles avec un tableau.

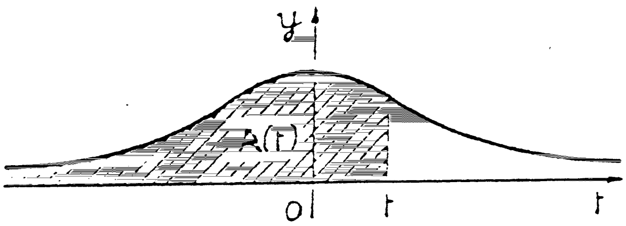
Cette méthode devient rapidement inutilisable avec l'augmentation du nombre de joueurs.

Si le nombre de joueurs n'est pas trop élevé nous avons à notre disposition des formules de la combinatoire, mais celles-ci exigent vite de très longs calculs.

Nous pouvons alors faire appel à la table de Gauss qui donne rapidement des résultats très satisfaisants.

4.2. Utilisation de la courbe de Gauss.

4.2.1. Comment l'utiliser.



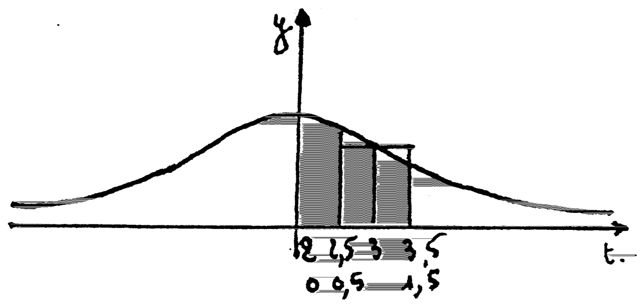
La mesure de l'aire sous la courbe est 1.

Pour t_1 la table de répartition donne la mesure de l'aire sous la courbe jusqu'à t_1 ; c'est-à-dire la probabilité pour que t soit inférieur ou égal à t_1.

A l'aide des feuilles 2,4 et 5 nous devons faire comprendre que pour utiliser la courbe standard il faut effectuer, pour l'axe des abscisses des autres diagrammes, un changement d'origine et un changement d'unité : $t_1 = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$.

4.2.2. Application au jeu de "Pile ou "Face" avec 4 joueurs.
(feuille 6 et feuille 7 (table)).

A l'aide de la courbe de Gauss et de la table de Gauss, nous nous proposons de déterminer quelle est la probabilité pour que 3 joueurs et 3 seulement obtiennent "Pile".



Il s'agit de connaître la mesure de l'aire du rectangle correspondant à 3 pour le premier histogramme : elle est sensiblement égale à la mesure de l'aire sous la courbe de 2,5 à 3,5.

Effectuons les changements d'origine et d'unité :

$$t_1 = \frac{2{,}5 - 2}{1} = 0{,}5 \qquad\qquad t_2 = \frac{3{,}5 - 2}{1} = 1{,}5$$

La table donne :

$$A(0{,}5) = 0{,}6915 \qquad\qquad A(1{,}5) = 0{,}9332$$

Par suite :

$$P(x=3) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

Comparons ce résultat avec celui obtenu précédemment : bien qu'il ne s'agisse que de 4 joueurs, ce résultat est déjà proche de celui obtenu précédemment (0,25).

4.2.3. Application au jeu de "Pile" ou "Face" avec 6 joueurs ...

4.2.4. Intervalle de confiance.

Dans une expérience aléatoire qui obéit à une loi normale :

$P(x \in [-\sigma ; \sigma]) = 0,68$ ...

$P(x \in [-2\sigma ; 2\sigma]) = 0,95$ ...

En d'autres termes dans une expérience aléatoire qui obéit à une loi normale il y a une probabilité de 0,95 pour qu'un évènement ne s'écarte pas de la moyenne, dans un sens ou dans l'autre, de plus de deux fois l'écart-type (plus précisément 1,96 fois l'écart-type).

5. Application dans le domaine professionnel.

5.1. Un problème concernant l'assurance.

Dans une région, pour un an, et pour une catégorie d'accidents, la probabilité qu'un assuré soit accidenté est de 0,15.

Un cabinet d'assurance de cette région a 1 200 assurés pour cette catégorie de sinistres. Quel est le maximum d'accidents dans l'année que peut prévoir ce cabinet avec une certitude d'environ 0,95 ?

Si le nombre d'accidentés correspondait à la probabilité de 0,15, il y aurait :

$0,15 \times 1\,200 = 180$ soit 180 accidentés.

Ecart-type :
Il s'agit ici d'une loi binômiale, l'écart-type peut se calculer de la façon suivante :

$\sqrt{1\,200 \times 0,15 \times 0,85} = 12,36$...

En prenant 25 pour estimer le double de l'écart-type, l'assureur peut prévoir avec une certitude supérieure à 0,95 :

$180 + 25 = 205$ soit 205 accidentés.

5.2. Un problème du domaine industriel .

Une usine fabrique des billes dont le diamètre nominal est de 8 mm.

Pour cette utilisation, cette usine a besoin de 13 600 billes dont le diamètre admet une tolérance de 0,01 mm.

Des statistiques portant sur des fabrications antérieures ont permis d'établir que la probabilité d'obtenir des billes correspondant à ces normes est de 0,90.

Combien doit-on fabriquer de billes pour obtenir, avec une certitude d'environ 0,95 un minimum de 13 600 billes utilisables ?

Soit X le nombre de billes fabriquées.
Si le nombre de billes utilisables correspondait à la probabilité de 0,90, on obtiendrait 0,90 X billes utilisables.

Ecart-type :
Il s'agit d'une loi binômiale, l'écart-type peut se calculer de la façon suivante :

$$\sqrt{X \times 0{,}90 \times 0{,}10}$$

Par suite :

$$0{,}90\,X - 2\sqrt{X \times 0{,}90 \times 0{,}10} = 13\,600$$

$$X = 15\,193,...$$

Il pourra être demandé la fabrication de 15 200 billes pour prévoir 13 600 billes utilisables avec une certitude supérieure à 0,95.

Simulation sur ordinateur
de l'expérience des n joueurs

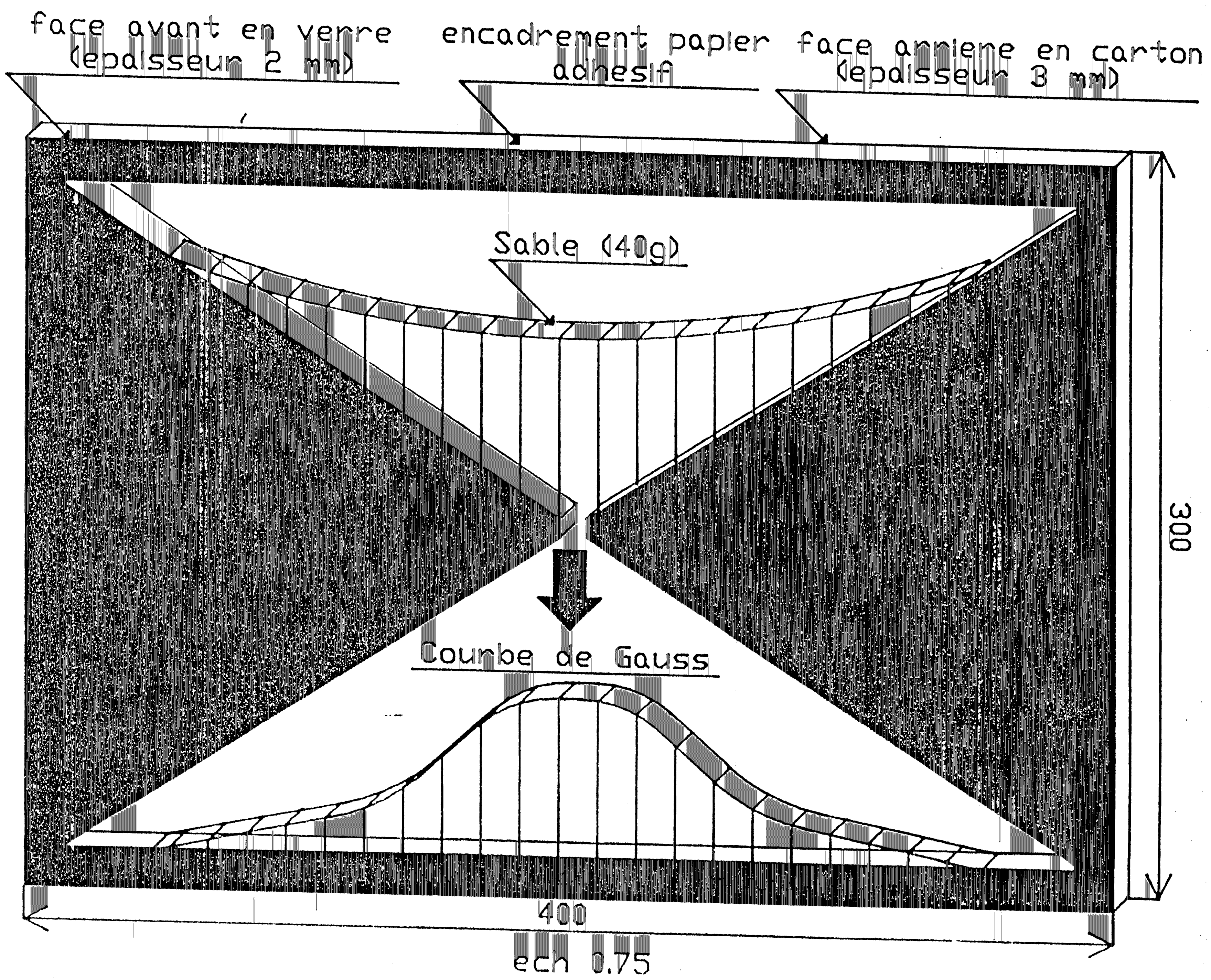
PROGRAMME EN BASIC

```
10 D=0
20 INPUT "NOMBRE DE JOUEURS";M
30 INPUT "NOMBRE DE PARTIES";N
40 INPUT "NOMBRE DE PILES PAR PARTIE";P
50 FOR A=1 TO N
60 C=0
70 FOR B=1 TO M
80 R=INT(RND*10)
90 IF R>4 THEN C=C+1
100 NEXT B
110 IF C=P THEN D=D+1
120 NEXT A
130 D=D/N
140 PRINT "PROBABILITE";D
150 END
```

PROGRAMME EN PASCAL

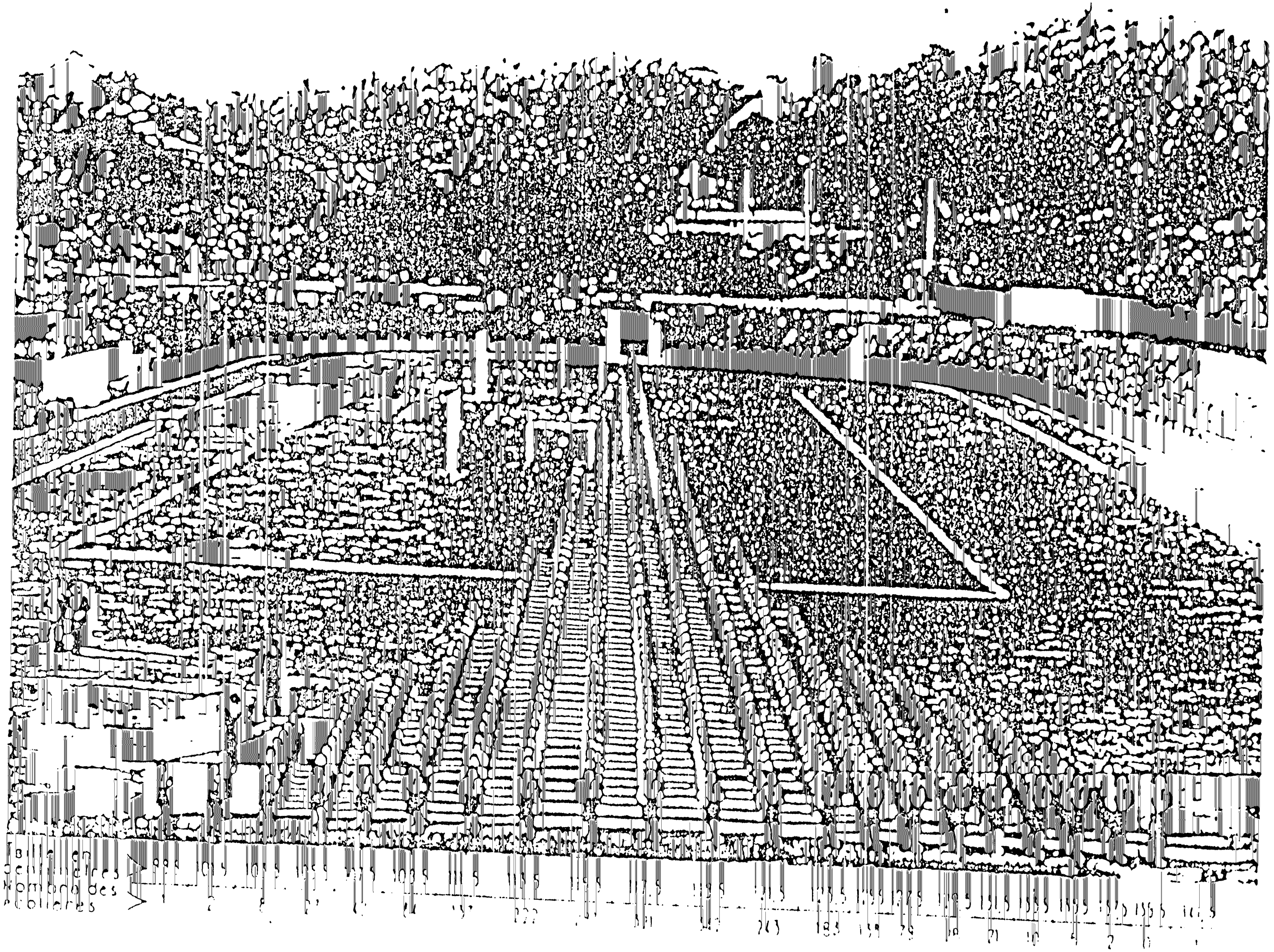
```
var
  nb_exper    :integer;
  nb_pile     :integer;
  nb_joueur   :integer;
  i,j         :integer;
  cumul_pile:integer;
  gagne       :integer;


begin
  clrscr;
  write('nombre de joueurs ');
  readln(nb_joueur);
  writeln;
  write('nombre de parties ');
  readln(nb_exper);
  writeln;
  write('nombre de piles par partie ');
  readln(nb_pile);
  writeln;
  gagne:=0;
  randomize;
  for i:=1 to nb_exper do
    begin
      cumul_pile:=0;
      for j:=1 to nb_joueur do cumul_pile:=cumul_pile+random(2);
      if cumul_pile=nb_pile
        then gagne:=gagne+1;
    end;
  writeln;
  write('probabilite = ',gagne/nb_exper);
end.
```


face avant en verre
(epaisseur 2 mm)
encadrement papier
adhesif
face arriere en carton
(epaisseur 3 mm)
Sable (40g)
Courbe de Gauss
300
400
ech 0.75

DISTRIBUTION NORMALE

COURBE "EN CLOCHE" OU DE GAUSS



DEUXIEME PARTIE

Feuilles distribuées aux élèves : à compléter.

Feuilles (1; 2; 3; ...)

Feuilles des élèves complétées.

Feuilles (1bis; 2bis; 3bis; ...)

JEU DE "PILE" OU "FACE"

AVEC 4 JOUEURS

Valeurs	Effectifs	Fréquences	"Longueurs" des Bâtons en cm.
0	1		
1	4		
2	6		7,5
3	4		
4	1		
	----	-------------	------------
	16		

MOYENNE :

ECART-TYPE :

Il s'agit de 16 expériences : 4 joueurs lancent chacun une pièce de monnaie au cours d'une expérience.
Chaque valeur indiquée est le nombre de joueurs qui obtiennent le côté "Pile" au cours d'une expérience.

En répétant un grand nombre de fois l'expérience des 4 joueurs il est <u>presque certain</u> que les fréquences (statistiques ou objectives) se rapprocheraient de ces fréquences (mathématiques ou subjectives) c'est-à-dire de ces <u>probabilités</u>.

JEU DE "PILE" OU "FACE"

AVEC 4 JOUEURS

Valeurs	Effectifs	Fréquences	"Longueurs" des Bâtons en cm.
0	1	0,0625	1,25
1	4	0,2500	5
2	6	0,3750	7,5
3	4	0,2500	5
4	1	0,0625	1,25
	16	1,0000	20,00

MOYENNE :

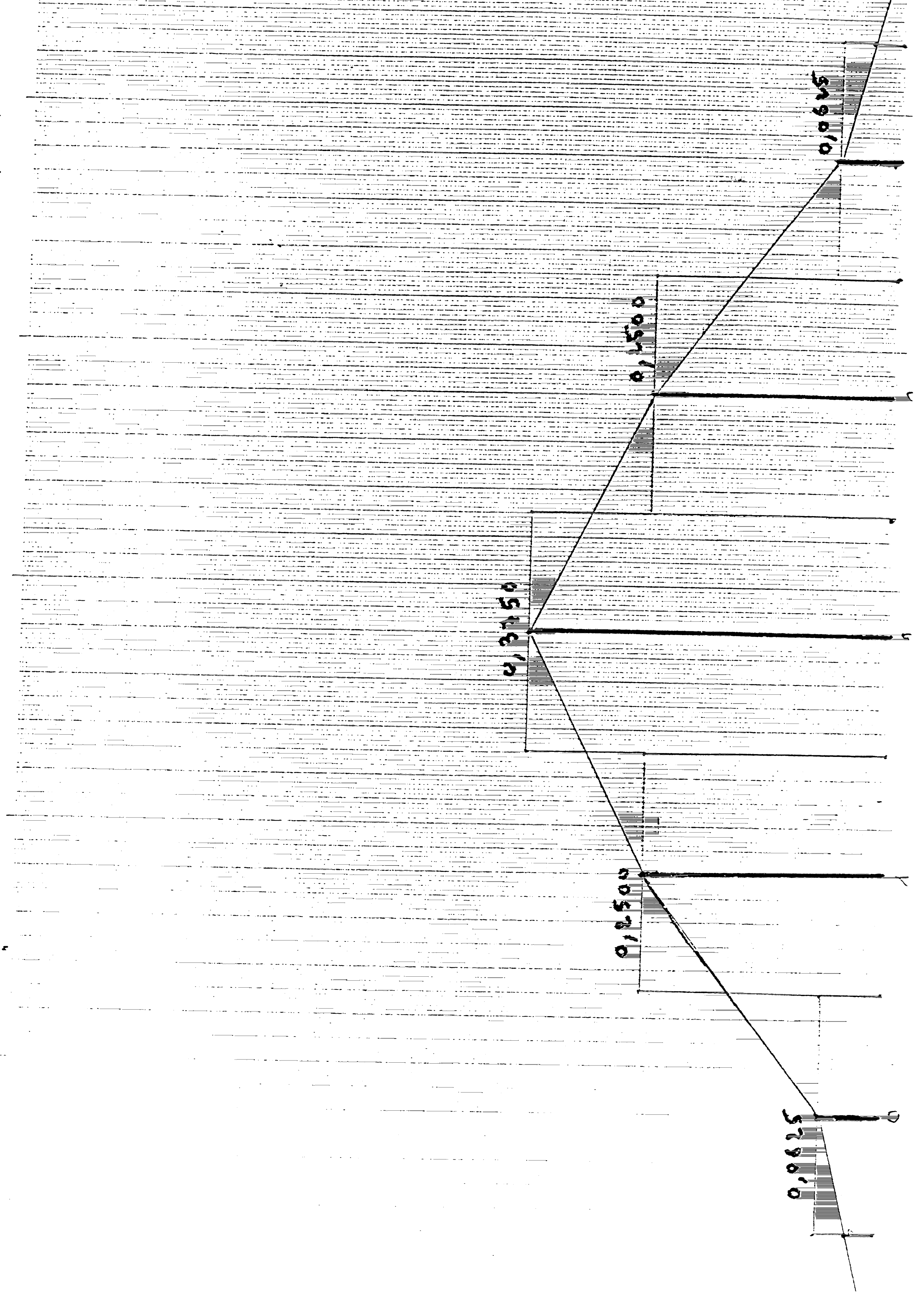
2

ECART-TYPE :

$\sqrt{1} = 1$

Il s'agit de 16 expériences : 4 joueurs lancent chacun une pièce de monnaie au cours d'une expérience.
Chaque valeur indiquée est le nombre de joueurs qui obtiennent le côté "Pile" au cours d'une expérience.

En répétant un grand nombre de fois l'expérience des 4 joueurs il est presque certain que les fréquences (statistiques ou objectives) se rapprocheraient de ces fréquences (mathématiques ou subjectives) c'est-à-dire de ces probabilités.


0,0625
0,1500
0,3150
0,2500
0,0625

JEU DE "PILE" OU "FACE"

AVEC 6 JOUEURS

Valeurs	Effectifs	Fréquences	"Longueurs" des Bâtons en cm
0	1	0,015 625	0,382 732 7
1	6	0,093 750	2,296 396 5
2	15	0,234 375	5,740 991 2
3	20		7,654 655 0
4	15	0,234 375	5,740 991 2
5	6	0,093 750	2,296 396 5
6	1	0,015 625	0,382 732 7
	64	1,000 000	24,494 895 8

MOYENNE :

3

ECART TYPE :

Dans chacune de ces situations "probabilistes" ou "subjectives"

les fréquences sont dites aussi :

la moyenne est dite aussi :

JEU DE "PILE" OU "FACE"

AVEC 6 JOUEURS

Valeurs	Effectifs	Fréquences	"Longueurs" des Bâtons en cm.
0	1	0,015 625	0,382 732 7
1	6	0,093 750	2,296 396 5
2	15	0,234 375	5,740 991 2
3	20	0,312 500	7,654 655 0
4	15	0,234 375	5,740 991 2
5	6	0,093 750	2,296 396 5
6	1	0,015 625	0,382 732 7
	64	1,000 000	24,494 895 6

MOYENNE :

3

ECART-TYPE :

$\sqrt{1,5} = 1,2247448...$

Dans chacune de ces situations "probabilistes" ou "subjectives"

les fréquences sont dites aussi : probabilités

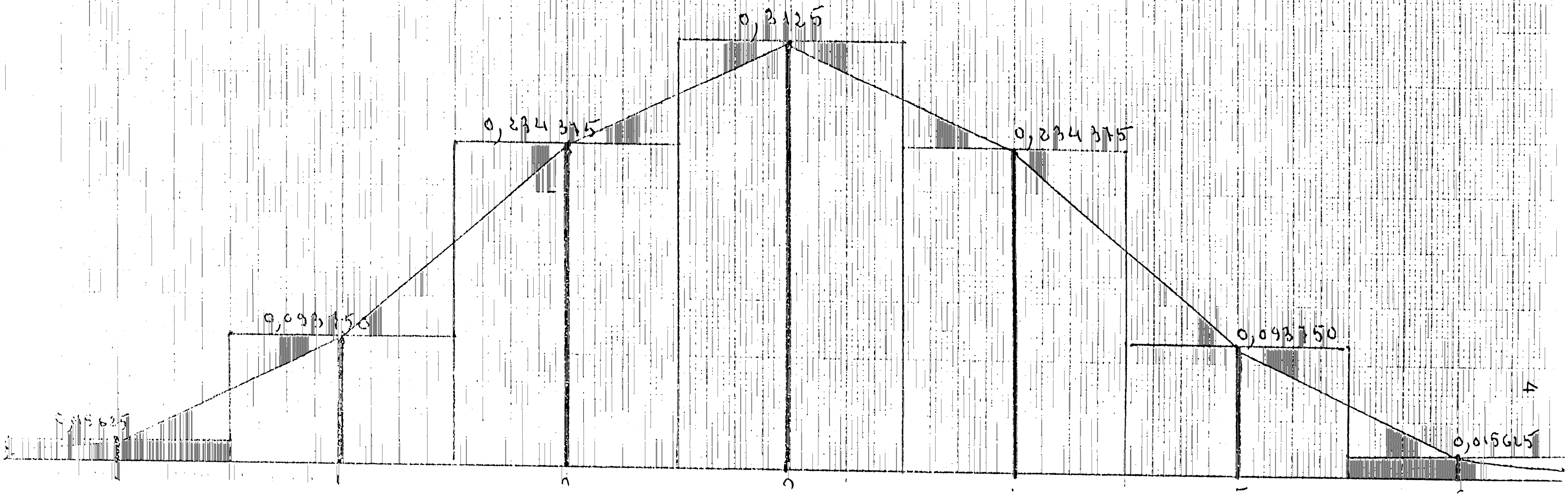
la moyenne est dite aussi : espérance mathématique

L'aire de l'histogramme est égale à l'aire de la surface comprise entre le polygone statistique et l'axe des abscisses

Axe des abscisses : $5/\sqrt{1,5}$ soit 4,08 ... cm

Longueur des bâtons : $20 \times \sqrt{1,5}$ soit

Aire de l'histogramme :

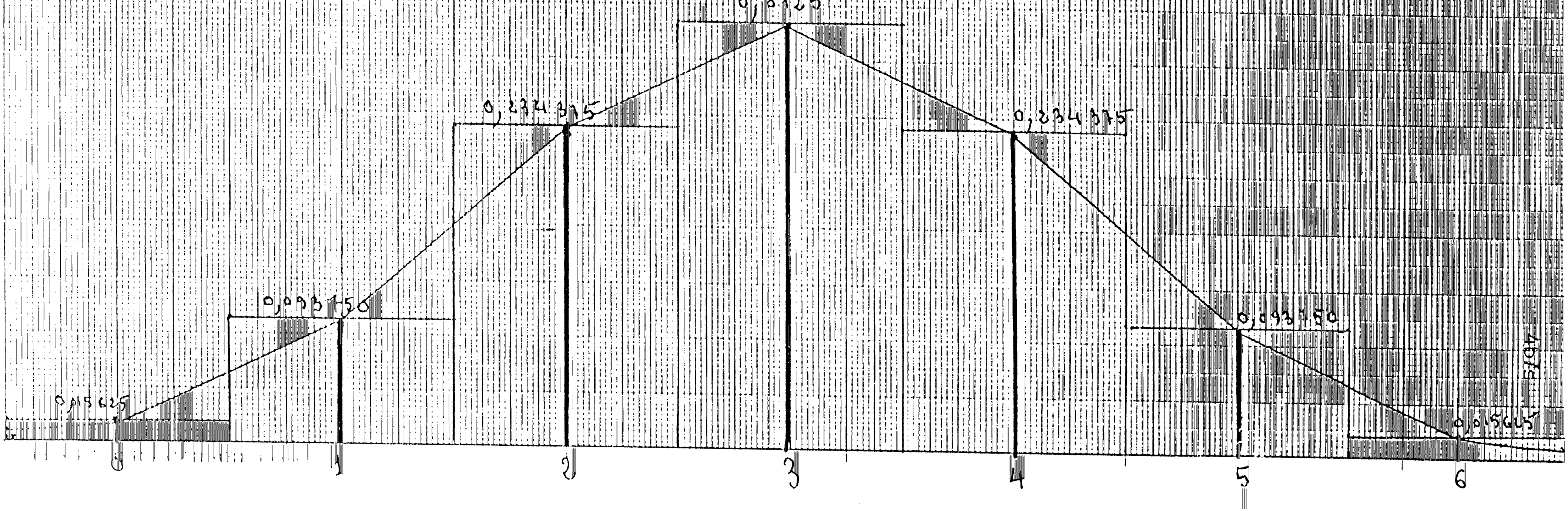


L'aire de l'histogramme est égale à l'aire de la surface comprise entre le polygone statistique et l'axe des abscisses

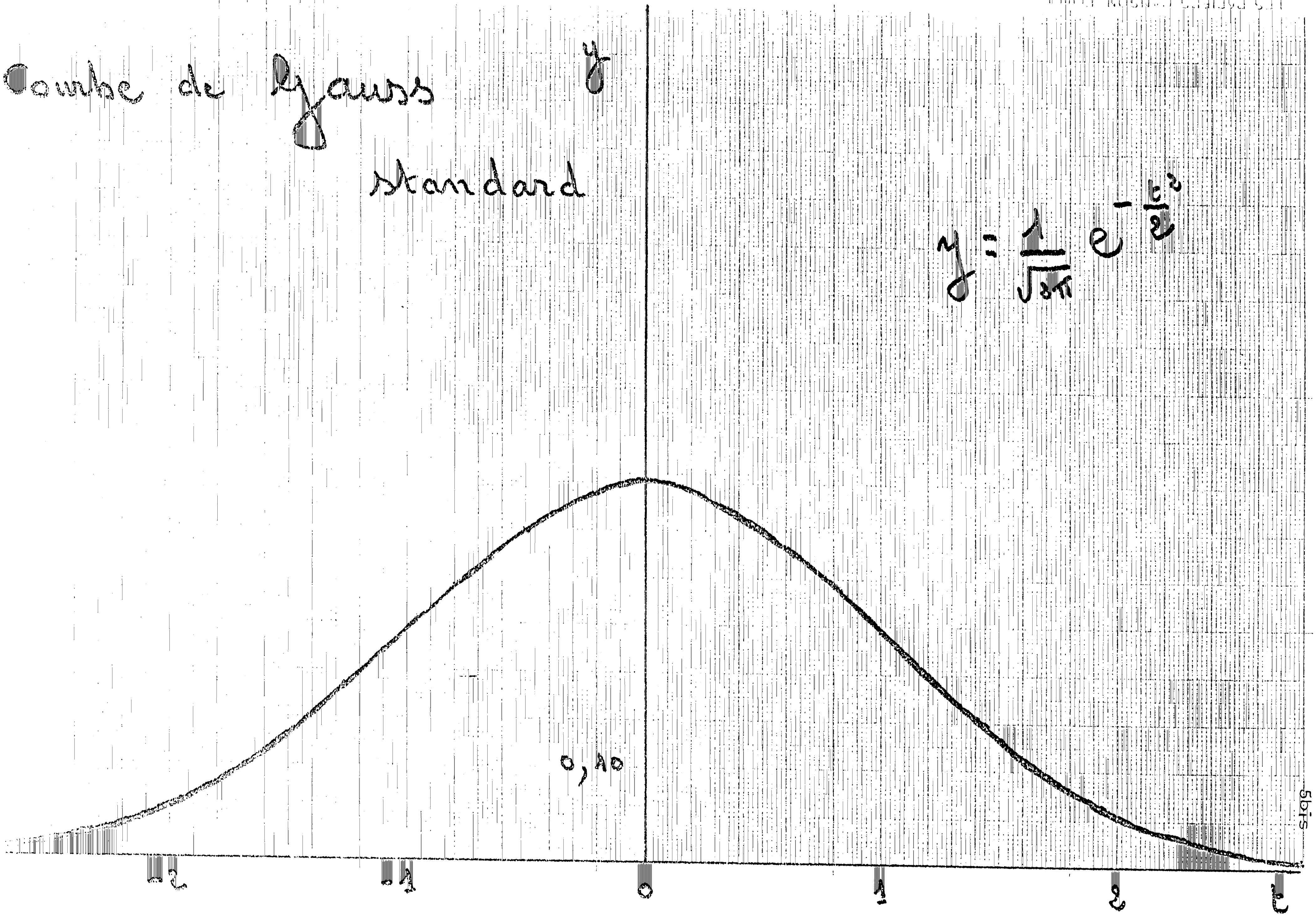
Axe des abscisses : $5/\sqrt{1,5}$ soit 4,08 cm

Longueur des bâtons : $20 \times \sqrt{1,5}$ soit 24,[illegible]

Aire de l'histogramme : [illegible]



Courbe de Gauss standard



UTILISATION DE LA TABLE DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE OU LOI DE LAPLACE-GAUSS

Jeu de "Pile" ou "Face" : quelle est la probabilité pour que x joueurs et x seulement obtiennent "Pile" ?

$$t_1 = \frac{(x - 0{,}5) - \bar{x}}{\sigma} \qquad\qquad t_2 = \frac{(x + 0{,}5) - \bar{x}}{\sigma}$$

$$P(x) = A(t_2) - A(t_1)$$

Jeu de "Pile" ou "Face" avec 4 joueurs : $x = 3$

$$t_1 = \frac{2{,}5 - 2}{1} = 0{,}5 \qquad\qquad t_2 = \frac{3{,}5 - \overset{2}{\cancel{0{,}5}}}{1} = 1{,}5$$

$$P(x=3) = A(1{,}5) - A(0{,}5) =$$

Jeu de "Pile" ou "Face" avec 6 joueurs : $x = 4$

$t_1 = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$ $\qquad\qquad$ $t_2 = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$

$P(x=4) =$

UTILISATION DE LA TABLE DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE OU LOI DE LAPLACE-GAUSS

Jeu de "Pile" ou "Face" : quelle est la probabilité pour que x joueurs et x seulement obtiennent "Pile" ?

$$t_1 = \frac{(x - 0{,}5) - \bar{x}}{\sigma} \qquad t_2 = \frac{(x + 0{,}5) - \bar{x}}{\sigma}$$

$$P(x) = A(t_2) - A(t_1)$$

Jeu de "Pile" ou "Face" avec 4 joueurs : x = 3

$$t_1 = \frac{2{,}5 - 2}{1} = 0{,}5 \qquad t_2 = \frac{3{,}5 - \overset{2}{\cancel{0{,}5}}}{1} = 1{,}5$$

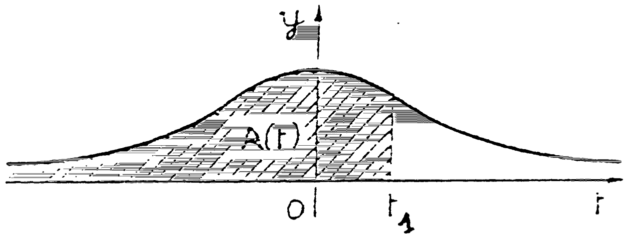
$$P(x=3) = A(1{,}5) - A(0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}6915 = 0{,}2417$$

Jeu de "Pile" ou "Face" avec 6 joueurs : x = 4

$$t_1 = \frac{3{,}5 - 3}{\sqrt{1{,}5}} = 0{,}40\ldots \qquad t_2 = \frac{4{,}5 - 3}{\sqrt{1{,}5}} = 1{,}22\ldots$$

$$P(x=4) = A(1{,}22) - A(0{,}40) = 0{,}8888 - 0{,}6554 = 0{,}2334$$

TABLE LOI NORMALE (répartition)



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7290	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

CAS DES GRANDES VALEURS DE t

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
Π(t)	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

BIBLIOGRAPHIE

Préparation à l'étude des probabilités - Th.Leconte et R.Deltheil
Librairie Vuibert 1937

Lettres sur la théorie des probabilités 1846 - A. Quetelet.

Théorie des probabilités - H.Vensel.
Editions MIR.

La statistique - A.Vessereau
Collection Que sais-je ? n° 281.

Les probabilités - A.Jacquard
Collection Que sais-je ? n° 1571

A.F.N.O.R. Recueil de normes de la statistique.