information mathématique

n° 18

université d'aix-marseille II

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLES DE LA PUBLICATION

Alain AMBROSINI
Christiane RAMBAUD

Institut de Recherche

sur l'Enseignement des Mathématiques

I. R. E. M.

70, route Léon-Lachamp

13288 MARSEILLE cedex 9

Tél. (91)41.01.40 (poste 32-10)/41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

n. 18 Décembre 1983

S O M M A I R E

Dépôt légal 4e trimestre 1983

EN HOMMAGE A GILLES THOMAS

Gilles était pour moi plus qu'un ami; je sollicitais souvent son avis, je recherchais ses conseils.

Sa connaissance du monde scolaire, son sens des relations humaines et sa valeur personnelle lui donnaient toujours dans les conversations l'ascendant que l'on reconnaît à ceux que l'on respecte; en toute simplicité il savait expliquer à tous, collègues du secondaire ou universitaires, quand ils étaient dans l'erreur: la façon qu'il avait de dire les choses transformait ses critiques en avis, ses avis en conseils; le ton était mesuré et le langage précis, assuré d'un raisonnement d'une extrême rigueur, toujours illustré de l'exemple pertinent et convaincant. Ses interventions étaient toujours acceptées par ses pairs avec l'estime que chacun reconnaissait à l'autorité morale de l'homme de valeur.

Gilles était quelqu'un sur qui l'on pouvait compter: il respectait ses engagements avec la même rectitude, la même sûreté, la même efficacité qui donnait valeur d'exemple à sa maîtrise pédagogique. Son dévouement était aussi la cause des charges qu'il acceptait de prendre: à l'IREM d'Aix-Marseille sa participation était fondamentale: responsable des publications, il était un lecteur intransigeant aussi bien sur le fond que la forme; censeur juste et rigoureux, il donnait ses avis sans que personne n'ait à redire ou à s'offenser de ses remarques.

Mais sa contribution à la vie des IREM, à l'enseignement des mathématiques ne s'arrêtait pas là: il était présent dans les groupes inter-IREM et il apportait son concours au bulletin de l'APMEP et aux bulletins inter-IREM dans lesquels il avait publié plusieurs articles et où il donnait régulièrement des illustrations et dessins dans lesquels on retrouvait les mêmes traits de sa personnalité, avec son humour empreint d'une grande sensibilité et d'une grande simplicité. Ses dessins traduisaient dans un graphisme précis ses clins d'yeux moqueurs mais toujours exprimés avec gentillesse; il savait donner des hommes et des faits de la vie une caricature qui faisait rire chacun, ne vexait personne.

C'était un esprit ouvert et curieux, prêt à l'aventure, avec un souci constant de remise en cause personnelle et un désir de renouvellement. C'est ainsi qu'il était allé au lycée français de Washington il y a quelques années, et qu'il se préparait à partir à la dernière rentrée pour Lisbonne oû il allait prendre un poste avec l'entrain et l'enthousiasme serein qu'il mettait toujours dans ses entreprises.

Comme beaucoup de ses amis, j'ai ressenti durement la disparition de Gilles, avec le regret aujourd'hui de ne l'avoir pas mieux connu, de n'avoir pas sû profiter plus encore de sa personnalité, de n'avoir pas pu apprécier plus longtemps une nature aussi riche de coeur qui savait dire avec élégance ce qu'il croyait, qui savait dire avec esprit les travers et les idées fausses des autres.

Il me reste à dire à Anny, sa femme, à Sylvette et Pascal, ses enfants dont il me parlait quelquefois avec la discrétion et la tendresse d'un mari et d'un père attentif, toute la peine, toute l'estime que je partage avec ceux qui l'ont approché dans sa vie professionnelle et dont je souhaite témoigner ici bien qu'aucune parole ne sache les exprimer avec vérité tant les mots pour les dire devraient être forts.

Mais Gilles était de ces hommes de qualité, qui vont de l'avant avec conviction et sûreté; son regard où l'on pouvait lire la douceur et le rire avait la franchise des êtres sains et sans détour, c'est le présent qu'il nous laisse.

Marc BERGMAN

A la suite de la disparition de Gilles Thomas, l'IREM d'Aix-Marseille organise une collecte au profit de sa famille. Les dons peuvent être adressés, par chèque de préférence, au nom de M. Bergman, avec la mention Gilles.

Le mercredi 14 Décembre, à 17 h 30, aura lieu à l'IREM à Luminy une cérémonie au cours de laquelle le nom de Gilles Thomas sera donné à la salle de séminaire.

L'IREM d'Aix-Marseille éditera en souscription une brochure contenant la plupart des dessins, déjà publiés ou inédits, de Gilles Thomas. Les sommes recueillies à cette occasion seront remises à sa famille.

DERNIERES PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. D'AIX-MARSEILLE

* Calcul des Probabilités et Arithmétique (indépendance et multiplicativité restreinte) - octobre 1978 - monographie de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille
32 pages - prix : 5 F.

* Analyse I - décembre 1978 - monographie de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille
174 pages - prix : 10 F.

* Bulletin "Information Mathématique" n. 17 - novembre 1982.

* Mathématiques, Langage, Enseignement : la réforme des années soixante (Y. CHEVALLARD).

* Publication du groupe L.E.P. :
Correspondance Lycées Professionnels n. 4 (décembre 1981)
(H. CAPELL, M. et M. FARAMIA, A. ROLLAND).
A propos du choix d'un manuel de mathématiques en 4ème préparatoire.

* Publications du Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie : (R. AMALBERTI, J-P ARNAL, J-C BENIAMINO, J-R CLOU, J. MARION, J-L OVAERT, D. PROUDHON, J-M VERNET)

  - "Problèmes de recherche de configurations astreintes à des conditions extremales de mesures" - 61 pages - juin 1982.

  - "Problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane" - 51 pages - janvier 1983.

  -

GEOMETRIE I

Octobre 1983
324 pages - 30 F.

Il regroupe les six fascicules repérés par les lettres A, B, C, D, E et F recorrigés.

Il s'attache à donner une vision cohérente de l'enseignement de la géométrie dans le "tronc commun" 4e - 3e - 2e et essaie de dégager les objectifs terminaux de l'enseignement de la géométrie à l'issue de la 2e de détermination.

PUBLICATIONS INTER-I.R.E.M.

Bulletins

n. 18 Histoire des mathématiques et épistémologie
66 pages - prix : 7 F.

n. 19 Anthologie de travaux I.R.E.M. pour le 1er cycle
64 pages - prix : 9 F.

n. 20 Enseignement de l'analyse
69 pages - prix : 10 F.

n. 21 Rétro-projecteur
80 pages - prix : 10 F.

n. 22 Catalogue des publications des I.R.E.M.
151 pages - prix : 20 F.

n. 23 Enseignement de la géométrie
91 pages - prix : 15 F.

Brochures

n. 1 Thèmes en Seconde
237 pages - prix : 30 F.

n. 2 Technologie et mathématiques en F
261 pages - prix : 30 F.

n. 3 Quelles activités pour quels apprentissages du collège au lycée ?
266 pages - prix : 30 F.

BULLETIN DE COMMANDE

N O M................................. Prénom.....................

ETABLISSEMENT

Intitulé exact..

....

COMMANDE LES OUVRAGES SUIVANTS :

TITRE	Nombre d'exemplaires		PRIX		
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
			TOTAL		....

Le règlement en liquide peut être effectué sur place au secrétariat de l'IREM (Mme LEON).

LE REGLEMENT PAR CHEQUE POSTAL OU BANCAIRE DOIT ETRE ADRESSE A L'IREM ET LIBELLE A L'ORDRE DE :

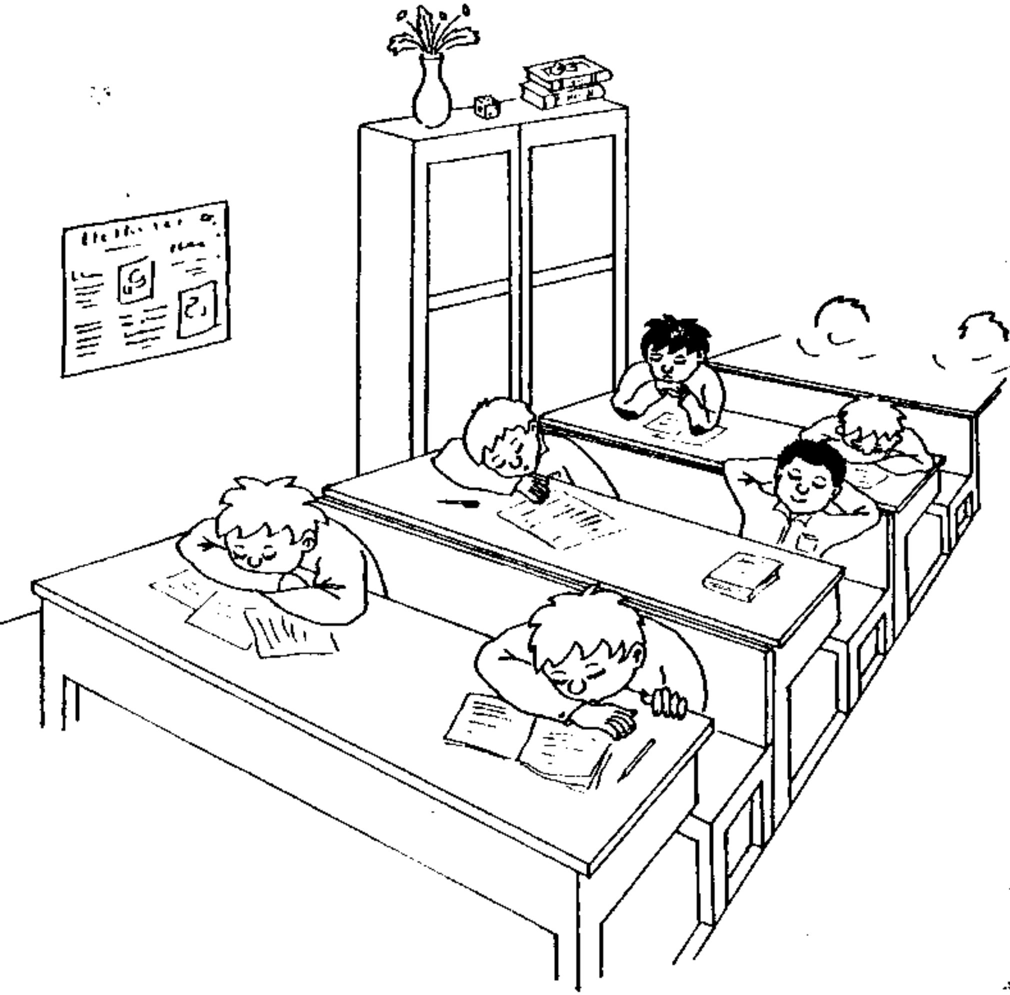
M. l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II

Ci-joint chèque bancaire
chèque postal de ....F

Date : .... Signature :

N. B. Dans la mesure du possible groupez vos commandes.

le dessin de Gill



CLASSE MONOTONE

Un texte de LAPLACE (1749-1827)

présenté par Robert ROLLAND

Le texte de Pierre-Simon De LAPLACE (1749-1827) présenté ici est une partie d'un cours donné à l'Ecole Normale Supérieure en 1795. Ce texte est publié dans les 7e et 8e cahiers (Tome II, Juin 1812) du Journal de l'Ecole Polytechnique.

Rappelons que les travaux du mathématicien français LAPLACE se situent dans des domaines très variés et sont très liés avec des problèmes de physique (mécanique céleste, hydrodynamique, propagation des ondes, tensions superficielles des liquides, théorie des probabilités, etc...).

Dans ce texte se trouvent décrites les missions et le travail de la commission des poids et mesures dont LAPLACE était membre. On conçoit aisément l'importance de ce travail, son impact, aussi bien sur le plan de la vie économique de la France que sur le plan politique et idéologique.

On conçoit aussi l'extrême difficulté, du point de vue de l'enseignement élémentaire, pour rendre le système décimal des mesures opérationnel dans la vie de tous les jours.

On pourra aussi découvrir dans cet extrait des références aux idées principales du XVIIIe siècle (comparer par exemple avec le discours préliminaire de l'Encyclopédie, de D'ALEMBERT).

J'interromps aujourd'hui l'ordre des leçons de mathématiques, pour vous entretenir du système de poids et mesures qui vient d'être définitivement décrété par la Convention nationale. L'un des plus utiles objets qui vous occuperont, après être retournés dans vos départements, sera de faire connaître à vos concitoyens, et spécialement aux instituteurs des écoles primaires ce bienfait des sciences et de la révolution. Je vais donc l'exposer ici avec le détail dû à son importance.

On ne peut pas voir le nombre prodigieux de mesures en usage, non-seulement chez les différens peuples, mais dans la même nation ; leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs, la difficulté de les connaître et de les comparer ; enfin, les embarras et les fraudes qui en résultent dans le commerce, sans regarder, comme l'un des plus grands services que les sciences et les gouvernemens puissent rendre à l'humanité, l'adoption d'un système de mesures, dont les divisions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérive de la manière la moins arbitraire, d'une mesure fondamentale, indiquée par la nature elle-même. Un peuple qui se donnerait un semblable système de mesures, réunirait à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits, celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur ; car l'empire lent, mais irrésistible de la raison, l'emporte à la longue sur les jalousies nationales, et sur tous les obstacles qui s'opposent au bien d'une utilité généralement sentie. Tels furent les motifs qui déterminèrent l'Assemblée constituante à charger de cet important objet l'Académie des sciences. Le nouveau système des poids et mesures, est le résultat du travail de ses commissaires, secondés par le zèle et les lumières de plusieurs membres de la représentation nationale.

L'identité du calcul décimal et de celui des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages de la division de toutes les espèces de mesures en parties décimales : il suffit, pour s'en convaincre, de comparer la difficulté des multiplications et des divisions complexes, avec la facilité des mêmes opérations sur les nombres entiers, facilité qui devient plus grande encore, au moyen des logarithmes, dont on peut rendre, avec des instruments simples et peu coûteux, l'usage extrêmement populaire. On ne balança donc point à adopter la division décimale, et pour mettre de l'uniformité dans le système entier des mesures, on résolut de les dériver toutes d'une même mesure linéaire, et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite au choix de cette mesure universelle à laquelle on donna le nom de mètre. Pour vous faire connaître les motifs qui, dans ce choix, ont guidé les commissaires de l'Académie, il convient de rappeler en peu de mots les principaux résultats que l'on a trouvés sur la figure de la Terre et sur la variation de la pesanteur à sa surface.

Du moment où l'homme eut reconnu la sphéricité du globe qu'il habite, sa curiosité dut le porter à en mesurer les dimensions ; il est donc vraisemblable que ses premières tentatives sur cet objet, remontent à des temps bien antérieurs à ceux dont l'histoire nous a conservé le souvenir, et qu'elles ont été perdues dans les révolutions physiques et morales que la Terre a éprouvées. Les rapports que plusieurs mesures de la plus haute antiquité, ont entre elles, et avec la longueur de la circonférence terrestre, viennent à l'appui de cette conjecture, et semblent indiquer, non-seulement que, dans des temps fort anciens, cette mesure a été exactement connue, mais qu'elle a servi de base à un système complet de mesures dont on retrouve des vestiges en Egypte et dans l'Asie. Quoi qu'il en soit, la première mesure précise de la Terre, dont nous ayons une connaissance certaine, est celle que PICARD exécuta en France, vers la fin du dernier siècle, et qui, depuis a été plusieurs fois vérifiée. Cette opération est facile à concevoir. En s'avançant vers le nord, on voit le pôle s'élever de plus en plus ; la hauteur méridienne des étoiles situées au nord augmente, et celle des étoiles situées au midi diminue, quelques-unes même deviennent invisibles. La notion de la courbure de la Terre, est due, sans doute, à l'observation de ces phénomènes qui ne pouvaient pas manquer de fixer l'attention des hommes dans les premiers âges des sociétés, où l'on ne distinguait les saisons et leurs retours que par le lever et le coucher des principales étoiles, comparés à ceux du soleil. L'élévation ou la dépression des étoiles, fait connaître l'angle que les verticales élevées aux extrémités de l'arc parcouru sur la Terre font au point de leurs concours ; car cet angle est évidemment égal à la différence des hauteurs méridiennes d'une même étoile, moins l'angle sous lequel on verrait du centre de l'étoile l'espace parcouru, et l'on s'est assuré que ce dernier angle est insensible. Il ne s'agit plus ensuite que de mesurer cet espace ; il serait long et pénible d'appliquer nos mesures sur une aussi grande étendue ; il est beaucoup plus simple d'en lier, par une suite de triangles, les extrémités à celles d'une base de cinq ou six mille toises, et vu la précision avec laquelle on peut déterminer les angles de ces triangles, on a très-exactement sa longueur. On a trouvé de cette manière qu'en France l'arc du méridien terrestre, correspondant à la centième partie de l'angle droit, et coupé dans son milieu par le parallèle moyen entre le pôle et l'équateur, est de $51324,^{\text{toises}}3$.

De toutes les figures rentrantes, la figure sphérique est la plus simple, puisqu'elle ne dépend que d'un seul élément, la grandeur de son rayon. Le penchant naturel à l'esprit humain, de supposer aux objets la forme qu'il conçoit le plus aisément, le porta donc à donner une forme sphérique à la Terre. Mais la simplicité de la nature ne doit pas toujours se mesurer à celle de nos conceptions. Infiniment variée dans ses effets, la nature n'est simple que dans ses causes, et son économie consiste à produire un grand nombre de phénomènes, au moyen d'un petit nombre de lois générales. La figure de la Terre est qu'un résultat de ces lois, qui, modifiées par mille circonstances, peuvent l'écarter sensiblement de la sphère, et la rendre fort compliquée. De petites variations observées dans la grandeur des degrés du méridien en France, indiquaient ces écarts ; mais les erreurs inévitables des observations laissaient des doutes sur cet intéressant phénomène, et l'Académie des sciences, dans le sein de laquelle cette grande question fut vivement agitée, jugea avec raison que la différence des degrés terrestres, si elle était réelle, se manifesterait principalement dans la comparaison des degrés mesurés à l'équateur et vers les pôles. Elle envoya les académiciens à l'équateur même et ils y trouvèrent le degré décimal du méridien, égal à 51077,^{t}7, plus petit de 246,6 que le degré correspondant au parallèle moyen. D'autres académiciens se transportèrent au nord à 73°,7 environ de latitude et le degré décimal du méridien y fut observé de 51664,^{t}5, plus grand de 586,^{t}8 qu'à l'équateur. Ainsi l'accroissement des degrés des méridiens de l'équateur aux pôles, fut incontestablement prouvé par ces mesures ; et il fut reconnu que la Terre n'est pas exactement sphérique.

Ces voyages fameux des académiciens français, ayant dirigé vers cet objet l'attention des observateurs, de nouveaux degrés des méridiens furent mesurés en Italie, en Allemagne, en Afrique et en Pensylvanie : toutes ces mesures concourent à donner à la Terre une figure aplatie aux pôles.

L'ellipse étant, après le cercle, la plus simple des courbes rentrantes, on regarda la terre comme un solide formé par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe. Son aplatissement dans le sens des pôles est nécessairement indiqué par l'accroissement observé des degrés des méridiens des pôles à l'équateur. Les rayons de ces degrés étant sur le prolongement des lignes verticales, ou dans la direction de la pesanteur, ils sont, par la loi de l'équilibre des fluides, perpendiculaires à la surface des mers dont la Terre est en grande partie recouverte. Ils n'aboutissent pas, comme dans la sphère, au centre de l'ellipsoïde ; ils n'ont ni la même direction, ni la même grandeur que les rayons menés de ce centre à la surface, et qui la coupent obliquement par-tout ailleurs qu'à l'équateur et aux pôles. La rencontre de deux verticales voisines, situées sous le même méridien, est le centre du petit arc terrestre qu'elles comprennent entre elles ; si cet arc était une droite, ces verticales seraient parallèles ou ne se rencontreraient qu'à une distance infinie ; mais à mesure qu'on le courbe, elles se rencontrent à une distance d'autant moindre que sa courbure devient plus grande ; ainsi l'extrémité du petit axe étant le point où l'ellipse approche le plus de se confondre avec une ligne droite, le rayon du degré du pôle, et par conséquent ce degré lui-même est le plus considérable de tous. C'est le contraire à l'extrémité du grand axe de l'ellipse, à l'équateur où la courbure étant la plus grande, le degré dans le sens du méridien est le plus petit. En allant du second au premier de ces extrêmes, les degrés vont en augmentant, et si l'ellipse est peu aplatie, leur accroissement est à très-peu-près proportionnel au carré du sinus de la latitude.

Ces résultats sont autant de vérités incontestables, généralement admises par les géomètres. On peut même démontrer, qu'en supposant à la Terre une figure de révolution sur laquelle les degrés des méridiens vont en augmentant de l'équateur aux pôles, l'axe qui la traverse dans le sens des pôles, est moindre que le diamètre de l'équateur. L'importance de l'objet m'engage à vous donner cette démonstration fort simple.

Vous avez vu, dans la leçon précédente, que les points de concours de toutes les perpendiculaires à une courbe, forment sa développée. Représentez-vous donc le rayon osculateur du méridien au pôle boréal, et la suite de tous les rayons osculateurs depuis ce pôle jusqu'à l'équateur, rayons qui, par la superposition, vont en diminuant sans cesse ; la développée sera évidemment tangente à l'axe du pôle ; ensuite, elle s'écartera de cet axe, en tournant vers lui sa convexité et en s'élevant vers le pôle, jusqu'à ce qu'enfin le rayon osculateur prenne une direction perpendiculaire à la première ; alors, il sera sur le diamètre même de l'équateur. Considérons comme le centre de la Terre l'intersection de ce diamètre et de l'axe du pôle ; il est visible que la somme des deux tangentes à la développée du méridien, menées de ce centre, la première suivant l'axe du pôle, et la seconde suivant le diamètre de l'équateur, sera plus grande que l'arc de la développée qu'elles comprennent entre elles ; or le rayon mené du centre de la Terre au pôle boréal, est égal au rayon osculateur du méridien de ce pôle, moins la première tangente ; le demi-diamètre de l'équateur est égal au rayon osculateur du méridien à l'équateur, plus la seconde tangente ; l'excès du demi-diamètre de l'équateur, sur le rayon terrestre du pôle, est donc égal à la somme de ces tangentes, moins l'excès du rayon osculateur du pôle sur celui de l'équateur ; ce dernier excès est l'arc même de la développée, arc qui est moindre que la somme des tangentes extrêmes ; donc l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le rayon mené du centre de la Terre au pôle boréal est positif. On prouvera de même que l'excès du demi-diamètre de l'équateur sur le rayon mené du centre de la Terre au pôle austral, est positif ; l'axe entier des pôles est donc moindre que le diamètre de l'équateur, ou, ce qui revient au même, la Terre est aplatie dans le sens de ses pôles.

En considérant chaque partie du méridien comme un arc très petit de sa circonférence osculatrice, il est facile de voir que le rayon mené du centre de la Terre à l'extrémité de l'arc la plus voisine du pôle, est plus petit que le rayon mené du même centre à l'autre extrémité ; d'où il suit que les rayons terrestres vont en croissant des pôles à l'équateur, si, comme toutes les observations l'indiquent, les degrés du méridien augmentent de l'équateur aux pôles ; et il est visible que ces démonstrations ont encore lieu, dans le cas où les deux hémisphères boréal et austral ne seraient pas égaux et semblables.

La différence des rayons osculateurs au pôle et à l'équateur, est égale à la différence des rayons terrestres correspondants, plus à l'excès du double de la développée sur la somme des deux tangentes extrêmes, excès qui est évidemment positif. Ainsi, les degrés des méridiens croissent de l'équateur aux pôles dans un plus grand rapport que celui de la diminution des rayons terrestres.

La mesure des deux degrés dans le sens du méridien, suffit pour déterminer les deux axes de l'ellipse génératrice de la Terre, et par conséquent sa figure, en la supposant elliptique. Si cette hypothèse est celle de la nature, on doit trouver le même rapport entre ces axes, en comparant deux à deux les degrés mesurés : mais leur comparaison donne à cet égard des différences qu'il est difficile d'attribuer aux seules erreurs des observations, et qui semblent indiquer à la Terre une figure beaucoup plus composée qu'on ne l'avait cru d'abord ; ce qui ne paraîtra point extraordinaire, si l'on fait attention aux irrégularités de sa surface, et à l'inégale densité de ses différentes couches et des eaux de la mer.

Un phénomène très-remarquable, dont nous devons la connaissance aux voyages astronomiques, est la variation de la pesanteur à la surface de la Terre. Cette force singulière anime, dans le même lieu, tous les corps proportionnellement à leurs masses, et tend à leur imprimer dans le même temps des vitesses égales. Il est impossible, au moyen d'une balance, de reconnaître ces variations, puisqu'elles affectent également le corps que l'on pèse et le poids auquel on le compare. Mais les observations du pendule sont propres à les faire découvrir ; car il est clair que ses oscillations doivent être plus lentes dans les lieux où la pesanteur est moindre. Vous connaissez cet instrument, dont l'application aux horloges, en fournissant une mesure du temps très-précise, a été l'une des causes principales des progrès de l'astronomie moderne. Il consiste dans un corps suspendu à l'extrémité d'un fil ou d'une verge mobile autour du point fixe à l'autre extrémité ; on écarte un peu l'instrument de sa situation verticale, et on l'abandonne à l'action de la pesanteur ; il fait de petites oscillations qui sont à très-peu-près de la même durée, malgré la différence des arcs décrits. Cette durée dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, et de la masse de la verge ; mais les géomètres ont trouvé des règles générales pour déterminer, par l'observation des oscillations d'un pendule composé, de figure quelconque, la longueur d'un pendule dont les oscillations auraient une durée connue, et dans lequel la masse de la verge serait supposée nulle relativement à celle du corps considéré comme un point infiniment dense. C'est à ce pendule idéal, nommé pendule simple, que l'on a rapporté toutes les expériences du pendule faites dans les divers lieux de la Terre.

RICHER, envoyé en 1762, à Caienne, par l'Académie des sciences, pour y faire des observations astronomiques, trouva que son horloge, réglée à Paris sur le temps moyen, retardait d'une quantité sensible, à l'équateur ; il fut obligé d'en raccourcir le pendule de plus d'une ligne, pour corriger ce retard. Cette observation donna la première idée de la diminution de la pesanteur à l'équateur, diminution qu'il était cependant facile de prévoir, d'après le mouvement déjà reconnu de la rotation de la Terre. Mais l'esprit humain, si actif dans la formation des systèmes, a presque toujours attendu que l'observation et l'expérience aient fait connaître d'importantes vérités, qu'un raisonnement fort simple eût pu faire découvrir : c'est ainsi que la découverte des télescopes, a suivi de près de trois siècles, celle des verres lenticulaires, et n'a été due qu'au hasard ; c'est encore ainsi que l'aberration des étoiles, résultat fort simple du mouvement progressif de la lumière, a échappé aux savans célèbres du commencement de ce siècle, et n'a été reconnue que par l'observation, cinquante ans après la découverte de ce mouvement.

L'expérience du pendule a été faite avec beaucoup de soin, dans un grand nombre d'endroits, en tenant compte de la température et de la résistance de l'air. Il en résulte que la pesanteur augmente de l'équateur aux pôles, et que son accroissement, qui, sous le pôle même, est égal à cinquante-cinq dix millièmes de la pesanteur totale, suit à-peu-près la loi du carré du sinus de latitude. Une nouvelle mesure de la longueur du pendule à secondes, que BORDA vient de faire à l'Observatoire national, avec une précision remarquable, lui a donné 3 pieds 8 lignes 56 centièmes pour cette longueur réduite au vide, et rapportée à la toise de fer qui a servi à la mesure de la Terre à l'équateur, la température de cette toise à 13 degrés du thermomètre de REAUMUR.

Je reviens présentement au choix du mètre. La longueur du pendule et celle du méridien, sont les deux moyens principaux qu'offre la nature pour fxer l'unité des mesures linéaires. Indépendans l'un et l'autre des révolutions morales, ils ne peuvent éprouver d'altération sensible que par des très-grands changemens dans la constitution physique de la Terre. Le premier moyen d'un usage facile, a l'inconvénient de faire dépendre la mesure de la distance de deux élémens qui lui sont hétérogènes, la pesanteur et le temps, dont la division est d'ailleurs arbitraire. On se détermina donc, pour le second moyen qui paraît avoir été employé dans la plus haute antiquité, tant il est naturel à l'homme de rapporter les mesures itinéraires aux dimensions même du globe qu'il habite ; en sorte qu'en se transportant sur ce globe, il connaisse par la seule dénomination de l'espace parcouru, le rapport de cet espace au circuit entier de la Terre. On trouve encore à cela l'avantage de faire correspondre les mesures nautiques avec les mesures célestes. Souvent le navigateur a besoin de déterminer l'un par l'autre, le chemin qu'il a décrit et l'arc céleste compris entre les zénith du lieu de son départ et de celui où il est arrivé. Il est donc intéressant que l'une de ces mesures soit l'expression de l'autre, à la différence près de leurs unités ; mais, pour cela, l'unité fondamentale des mesures linéaires, doit être une partie aliquote du méridien terrestre, qui corresponde à l'une des divisions de la circonférence : ainsi, le choix du mètre fut réduit à celui de l'unité des angles.

L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan, et de la hauteur des objets sur l'horizon ; d'ailleurs, c'est dans le premier quart de la circonférence que se forment les sinus, et généralement toutes les lignes que la trigonométrie emploie, et dont les rapports avec le rayon ont été réduits en tables : il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On le divisa en parties décimales, et pour avoir des mesures correspondantes sur la Terre, on divisa dans les mêmes parties, le quart du méridien terrestre, ce qui a été fait dans des temps fort anciens ; car la mesure de la Terre, citée par ARISTOTE, et dont l'origine est inconnue, donne cent mille stades au quart du méridien. Il ne s'agissait plus que d'avoir exactement sa longueur. Ici se présentaient plusieurs questions que l'ignorance où nous sommes de la vraie figure de la Terre, ne nous permet pas de résoudre. La Terre est-elle un sphéroïde de révolution ? Ses deux hémisphères sont-ils égaux et semblables de chaque côté de l'équateur ? Quel est le rapport d'un arc du méridien mesuré à une latitude donnée au méridien entier ? Dans les hypothèses les plus natureles sur la constitution du sphéroïde terrestre, la différence des méridiens est insensible, et le degré décimal coupé dans son milieu, par le parallèle moyen entre le pôle boréal et l'équateur, est la centième partie du quart du méridien. L'erreur de ces hypothèses, si elle existe, ne peut influer que sur les distances géographiques où elle n'est d'aucune importance. On pouvait donc conclure la grandeur du quart du méridien, de celle de l'arc qui traverse la France, depuis Dunkerque jusqu'aux Pyrénées, et qui a été mesuré avec soin en 1740, par les Académiciens français. Mais une nouvelle mesure d'un arc plus grand, faite avec des moyens encore plus précis, devant inspirer en faveur du nouveau système de mesures, un intérêt propre à le répandre ; on résolut de mesurer l'arc du méridien terrestre, compris entre Dunkerque et Barcelone ; et cependant, pour que la nation française pût jouir promptement des avantages de ce nouveau système, on se servit provisoirement des mesures exécutées, et après en avoir conclu la longueur du quart du méridien, on prit la dix-millionième partie de cette longueur, pour le mètre ou l'unité des mesures linéaires. La décimale au-dessus eût été trop grande ; la décimale au-dessous, trop petite, et le mètre, dont la longueur est de 3 pieds 11 lignes 44 centièmes, remplace avec la toise et l'aune, deux de nos mesures les plus usuelles.

DELAMBRE s'est déjà avancé, depuis Dunkerque jusqu'à Orléans, en formant une chaîne de triangles, qu'il doit joindre à celle que MECHAIN, parti de Barcelone, forme de son côté, en s'avançant au nord ; et il y a lieu de croire que la mesure de l'arc du méridien, compris entre Dunkerque et Barcelone, sera terminée dans le cours de la campagne prochaine. Les commissaires nommés par l'Académie des sciences, sont de nouveau réunis pour suivre avec activité cette grande opération, trop long-temps suspendue : mais nous avons la douleur de ne point revoir parmi nous l'infortuné LAVOISIER, que la plus sanglante tyrannie a fait périr au milieu d'une carrière illustrée par d'importantes découvertes, et par la révolution heureuse qu'il a opérée dans la philosophie chimique.

Pour conserver la longueur du mètre, la Convention a décrété qu'un étalon exécuté en platine, d'après les expériences et les observations des commissaires chargés de sa détermination, serait déposé près du Corps législatif. Cette longueur sera d'ailleurs liée d'une manière si précise, à celle du pendule à secondes, qu'il sera facile de la retrouver dans tous les temps, sans être obligé de recourir à la mesure du grand arc qui l'aura donnée. Deux monumens durables, élevés sur la base qui doit être mesurée près de Melun, et séparés par un intervalle exact de dix mille mètres, offriraient un nouveau moyen pour retrouver la longueur de la mesure universelle, si, par la suite des siècles, elle vient à s'altérer.

Toutes les mesures dérivent du mètre, de la manière la plus simple ; les mesures linéaires en sont des multiples et des sous-multiples décimaux.

L'unité des mesures superficielles pour le terrain, est un carré dont le côté est de dix mètres ; elle se nomme are.

On a nommé stère, une mesure égale au mètre cube, et destinée particulièrement au bois de chauffage.

L'unité des mesures de capacité est le cube de la dixième partie du mètre ; on lui a donndé le nom de litre.

L'unité de poids, que l'on a nommé gramme, est le poids absolu du cube de la centième partie du mètre, en eau distillée, et considérée à la température de la glace fondante. On a préféré l'eau, comme étant l'une des substances les plus homogènes, et celle que l'on peut réduire le plus facilement à l'état de pureté ; on l'a rapportée à la température de la glace fondante, comme au degré de température le plus fixe et le plus indépendant des modifications de l'atmosphère. Le citoyen HAUY vous a fait connaître les précautions délicates qui ont été prises pour avoir, avec une grande précision, le poids d'un volume connu d'eau distillée. Cette expérience va être répétée avec des moyens encore plus précis ; ainsi, quand la longueur du mètre sera irrévocablement fixée, on aura très-exactement le rapport du gramme à la livre actuelle.

Toutes les mesures étant comparées sans cesse à la livre monnaie, il était sur-tout important de la diviser en parties décimales ; on lui a donné le nom de franc ; sa dixième partie s'appelle décime, et sa centième partie, centime. La Convention nationale ayant décrété la fabrication de pièces de monnaie, multiples d'un centime, et d'un poids multiple du gramme, on aura des poids justes dans ces pièces, ce qui sera très-utile au commerce.

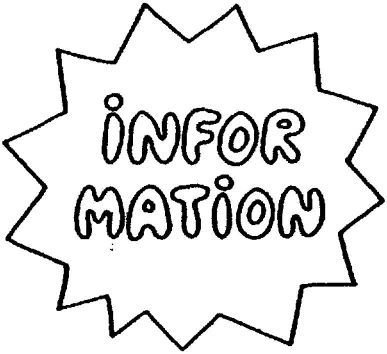
Les unités de superficie, de capacité, de poids et de monnaie, sont assez petites pour que l'on n'ait pas besoin de considérer, dans les calculs ordinaires, des fractions décimales au-dessous du centième, ce qui est un avantage ; car l'esprit saisit plus aisément les multiples que les sous multiples, dont l'idée se compose de divisions et de multiplications.

Il me reste à vous parler de la nomenclature qui a été adoptée. Deux moyens se présentent pour dénommer les mesures : l'un consiste à exprimer leurs multiples et leurs aliquotes, par des mots différens, d'une seule syllabe ; l'autre consiste à ne désigner, par un nom propre, que l'unité principale de chaque espèce de mesures, et à distinguer ses aliquotes et ses multiples, par un système de mots qui se composent avec le nom de cette unité. On a préféré ce second moyen, qui, en réduisant la nomenclature des poids et mesures au plus petit nombre de mots possible, a l'avantage de soulager la mémoire et de simplifier la langue du commerce, celle de toutes les langues qui doit être la plus facile et la plus claire.

Pour désigner les multiples de l'unité principale, dix, cent, mille et dix mille fois plus grands, on la fait précéder des mots suivans tirés du grec, deca, hecto, kilo, myria. On exprime les sous multiples, en la faisant précéder des mots, deci, centi, milli, qui répondent à sa dixième, centième et millième partie. Au reste, je vous engage à lire le rapport intéressant du citoyen PRIEUR, sur cet objet, à la Convention nationale, et la note instructive qu'il y a jointe.

Pour faciliter le calcul de l'or et de l'argent fin contenu dans les pièces de monnaie, les commissaires de l'Académie ont proposé de les fabriquer avec un dixième d'alliage, et d'égaler leur poids à des multiples décimaux du gramme. Enfin, l'uniformité du système entier des poids et mesures, leur a paru exiger que le jour fût divisé en dix heures, l'heure en cent minutes, la minute en cent secondes, &c. Cette division du jour, qui va devenir nécessaire aux astronomes, est moins utile dans la vie civile, où l'on a peu d'occasions d'employer le temps comme multiplicateur ou comme diviseur. La difficulté de l'adapter aux horloges et aux montres, et nos rapports commerciaux en horlogerie avec les étrangers, ont fait suspendre indéfiniment son usage. On peut croire cependant qu'à la longue, la division décimale du jour remplacera sa division actuelle, qui contraste trop avec les divisions des autres mesures, pour n'être pas abandonnée.

Tel est le nouveau système des poids et mesures que les savans ont offert à la Convention nationale, qui s'est empressée de le sanctionner. Ce système fondé sur la mesure des méridiens terrestres, convient également à tous les peuples, il n'a de rapport avec la France, que par l'arc du méridien qui la traverse ; mais la position de cet arc, dont les extrémités aboutissent aux deux mers, et qui est coupé par le parallèle moyen, est si avantageuse, que les savans de toutes les nations, réunis pour fixer la mesure universelle, n'eussent pas fait un autre choix. Il est donc permis d'espérer qu'un jour ce nouveau système sera généralement adopté. Incomparablement plus simple que l'ancien, dans ses divisions et dans sa nomenclature, il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance. Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, qu'une longue habitude a familiarisés avec les anciennes mesures : il leur paraîtra fort compliqué ; car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses, la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir ; mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles.



Pour mémoire

Les groupes de recherche de l'I.R.E.M. pour l'année 1983-84 ont établi leur emploi du temps comme suit :

* Groupe de recherche "Algorithme"
  le jeudi à 14 h au lycée Victor Hugo, 3, bd. Gustave-Desplaces
  13003 Marseille.

* Groupe de recherche "Analyse"
  le mercredi à 14 h 30 dans les locaux de l'I.R.E.M.

* Groupe de recherche "Didactique des mathématiques"
  le vendredi à 14 h 30 dans les locaux de l'I.R.E.M.

* Groupe de recherche "Géométrie"
  le jeudi à 15 h dans les locaux de l'I.R.E.M.

* Groupe de recherche "Informatique"
  le vendredi à 14 h 15 dans les locaux de l'I.R.E.M.

* Groupe de recherche "L.E.P."
  le vendredi à 14 h dans les locaux de l'I.R.E.M.

* Groupe de recherche "Equations différentielles"
  le jeudi à 14 h au lycée Victor Hugo.

* Groupe de recherche "Exercices et problèmes de baccalauréat"
  le mercredi à 14 h 30 dans les locaux de l'I.R.E.M.

LES INTERVENTIONS DE L'OUTIL VECTORIEL DANS LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE ET DANS SON ENSEIGNEMENT (*)

I - QUELQUES JALONS HISTORIQUES

1) Sur le développement de l'outil vectoriel

a) Dans la première moitié du XVIIe siècle DESCARTES ([3]) et FERMAT ([6]) montrent que via le choix d'un repère, à des points on peut associer des systèmes de nombres ; c'est la naissance de la dialectique plan $\leftrightarrow R^2$, espace $\leftrightarrow R^3$. Le champ d'investigations de la géométrie, restreint jusque là au domaine des configurations, s'adjoint le domaine numérique, mais comme outil seulement ; le concept de vecteur n'apparaît pas encore, même à l'état de spore. Ainsi chez DESCARTES on part d'un problème de géométrie et on ne fait des calculs que si, à chaque pas intermédiaire du calcul, on a une interprétation géométrique (sinon on exclut le calcul). Ce souci, déjà moins marqué chez FERMAT, disparaît chez EULER véritable fondateur de la géométrie analytique qui coïncide avec les premiers pas de la géométrie algébrique.

b) EULER développe systématiquement le calcul sur les systèmes de nombres, ne s'intéressant aux interprétations géométriques ou algébriques qu'en

---

(*) Exposé de J. MARION (I.R.E.M. - Marseille) au groupe inter-I.R.E.M. "Géométrie" en mars 1983.

fin des calculs. Pour les problèmes de géométrie, de manière systématique il choisit le repère le mieux adapté à la configuration, ce qui simplifie les calculs. Au XVIIe siècle deux problèmes de géométrie sont dominants : celui de la réduction d'une forme quadratique en somme de carrés et celui de la recherche des axes d'une quadrique ; EULER met en évidence le caractère linéaire des "formules de changement d'axes" ([5]) ; toujours EULER puis CAUCHY ([2]) établissent la réalité des valeurs propres d'une forme quadratique et leur invariance par changement d'axes. Quant aux transformations linéaires, elles sont largement utilisées chez EULER sous forme de "substitutions linéaires" sur les coordonnées. Ainsi dès le début du XIXe siècle bon nombre de concepts de l'algèbre linéaire sont manipulés de manière constante, même si leur statut et leur intégration au sein d'une théorie ne sont pas encore explicités.

c) Au XIXe siècle HAMILTON introduit les quaternions, et MAXWELL montre qu'il suffit de la "partie vectorielle" d'un quaternion pour décrire un élément de R^3 et développe le calcul vectoriel de R^3 à partir du calcul sur les quaternions. Dans la deuxième moitié du XIXe siècle PEANO, reprenant les travaux de MAXWELL et de GRASSMANN ([7]), non seulement synthétise ce calcul vectoriel, mais donne la définition d'un espace vectoriel ([12]). L'outil vectoriel se développera ensuite pour des espaces vectoriels de fonctions (passage à la dimension infinie) avec FRECHET, puis dans les espaces vectoriels "abstraits" avec BANACH juste après la première guerre mondiale.

2) <u>Sur son enseignement au collège et au lycée</u>

Au niveau de l'enseignement secondaire les vecteurs sont d'apparition récente.

a) Dans l'après-seconde-guerre-mondiale les vecteurs apparaissent dans les classes de premières scientifiques de l'époque (1ère C, 1ère M, 1ère M') sous forme de vecteurs de types variés (liés, glissants, libres) ; à la fois le professeur de mathématiques et le professeur de physique "enseignent les vecteurs" ; les vecteurs "libres" s'ajoutent suivant la règle du triangle ou du parallélogramme, on peut les multiplier par un nombre, ils ont une "grandeur", une "direction" et un "sens", ils ont des composantes, et on peut en faire leur produit scalaire (qu'on investit pour trouver plus rapidement les relations métriques du triangle et les "formules d'addition des lignes trigonométriques"). Les vecteurs sont essentiellement utilisés pour l'enseignement de la cinématique (faite alors en maths. et en physique), et en mécanique ("calculs sur les forces"). On utilise aussi les vecteurs pour définir et étudier les homothéties et les translations, mais pas les autres transformations usuelles de la géométrie.

b) La période qui vient d'être décrite prend fin lorsque la Commission "LICHNEROWICZ" introduit les vecteurs en Seconde. Dans la pratique des classes on aboutit à la mise en place d'un discours formel sur l'algèbre linéaire, dont le souci était de donner les définitions et les théorèmes généraux, qui non seulement restait sans prise réelle sur de vrais problèmes de géométrie, mais qui se substituait entièrement au discours géométrique. On peut résumer cette situation en disant qu'on présentait un travail de synthèse à des élèves qui n'avaient rien à synthétiser, de sorte que "les concepts ronronnaient dans le vide" ([11]).

c) La réforme des Collèges, dite "réforme HABY" et les programmes qui se sont succédés introduisent en 4ème les vecteurs du plan, à partir du parallélogramme. Au niveau de la 2ème, l'un des objectifs assignés à l'enseignement de la géométrie dans l'espace est de permettre, au niveau de

1ère S, de développer l'outil vectoriel dans l'espace.

Si en 1ère S les programmes préconisent, pour des commodités de présentation, de donner la définition générale d'espace vectoriel et d'application linéaire, au niveau des activités, on reste dans des espaces vectoriels de dimension 2 et 3. En terminales C, D, E on étudie les espaces vectoriels R^n . Tout au long du cursus scientifique 2ème - 1ère S - Ter. C, E on enrichit l'ensemble des exemples d'applications linéaires, et l'on s'intéresse à des groupes de transformations en 1ère S - Ter. C, E. Un point positif consiste à proposer aux élèves des synthèses qu'après qu'il y ait des choses à synthétiser, et à s'appuyer sur les problématiques de la géométrie pour développer l'outil vectoriel et l'algèbre linéaire.

II - LES ROLES DE L'OUTIL VECTORIEL EN GEOMETRIE

L'analyse conduite dans [10] essaie de rendre compte de la manière dont s'articulent les différents domaines d'investigations de la géométrie élémentaire : domaine des configurations, domaine numérique, domaine vectoriel, dont les champs sémantiques ne sont pas a priori superposables, mais qui offrent tous trois un domaine d'interprétation pertinent pour les problèmes de la géométrie. Cette pertinence est essentiellement fondée sur les rôles de l'outil vectoriel.

1) Fonction primaire : le calcul vectoriel

Le plus tard venu dans le champ d'investigations de la géométrie élémentaire, il s'est d'abord imposé parce qu'il offrait un outil permettant le traitement calculatoire de certaines classes de problèmes. Le traitement est rendu possible parce que l'on dispose d'une dialectique "domaine des configurations $\longleftrightarrow$ domaine vectoriel". Le calculatoire est pertinent en raison de deux facteurs : les opérations sur les vecteurs d'une part généralisent celles fonctionnant sur les nombres, d'autre part ont une traduction signifiante dans le domaine des configurations. C'est la fonction primaire de l'outil vectoriel.

2) Fonction secondaire : le support des transformations et l'outil de leur étude, et la constitution d'objets nouveaux

La dialectique "points-vecteurs" se révèle de deux manières : d'une part dans la dialectique "transformations de la géométrie élémentaire $\longleftrightarrow$ transformations linéaires" d'autre part parce que les vecteurs vont fournir de nouveaux objets (bases, sous-espaces, drapeaux, ...) sur lesquels les transformations linéaires vont également opérer, ce qui permet à la fois d'étudier ces objets nouveaux et d'avoir un outil pour étudier les transformations. C'est ce que nous appellerons la fonction secondaire de l'outil vectoriel.

3) Fonction tertiaire : le rôle unificateur et classification

C'est la fonction de synthèse de l'outil vectoriel, à l'intersection de l'algèbre linéaire et de la théorie des groupes, magistralement exprimée par F. KLEIN, et dont le rôle a toujours été mal évalué dans l'enseignement de la géométrie au niveau du lycée. En effet cette fonction fut ignorée avant la Commission LICHNEROWICZ, puis hyperprivilégiée, grâce au pan-structuralisme ambiant, dans les années qui suivirent les retombées des travaux de cette Commission.

Nous allons examiner ces trois fonctions, en illustrant cette étude de quelques exemples.

III - LA FONCTION PRIMAIRE

Elle est caractérisée par la dialectique "domaine des configurations $\longleftrightarrow$ domaine vectoriel" qui revêt trois aspects : la correspondance entre objets, la correspondance entre concepts, et la correspondance entre propriétés. Cette triple correspondance décide des principaux modes d'intervention directe de l'outil vectoriel.

1) Eléments de la dialectique

Il s'agit essentiellement des correspondances suivantes :

a) Pour les objets :

- points $\longleftrightarrow$ vecteurs,
- parallélogrammes $\longleftrightarrow$ vecteurs et leur addition,
- angles $\longleftrightarrow$ couples de vecteurs non nuls,
- variétés affines $\longleftrightarrow$ sous-espaces,
- hyperplans $\longleftrightarrow$ formes linéaires.

b) Pour les concepts :

- parallélisme de variétés $\longleftrightarrow$ égalité des sous-espaces vectoriels associés,
- distance $\longleftrightarrow$ norme et produit scalaire,
- aire, volume $\longleftrightarrow$ produit mixte,
- ....

c) Pour les propriétés :

- alignement et parallélisme de droites $\longleftrightarrow$ colinéarité,
- théorème des 3 parallélogrammes $\longleftrightarrow$ transitivité de l'équipollence,

- théorème de Thalès ⟷ distributivité de la multiplication par un nombre par rapport à l'addition des vecteurs,
- théorème duaux ⟷ dualité vecteurs-formes linéaires (alignement-concours),
- enveloppe convexe ⟷ barycentres correspondants à tous les systèmes de coefficients positifs,
- inégalité triangulaire ⟷ inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowsky,
- ....

2) Interventions de l'outil

En géométrie affine et euclidienne les principales interventions directes de l'outil vectoriel portent d'une part sur les problèmes d'incidence, d'autre part sur les problèmes métriques.

a) En ce qui concerne l'intervention dans les problèmes d'incidence, ses diverses modalités ont été étudiées dans les chapitres I, II et III de [13], illustrées par de nombreux exemples. Dans ce travail il est notamment montré, que si dans les problèmes d'alignement et de parallélisme l'intervention du calcul vectoriel (lorsqu'on l'utilise pour de tels problèmes) se fait directement par la mise en évidence d'une colinéarité, d'une coplanairité, ... l'accès aux problèmes de concours est moins direct et passe soit par la stratégie du double alignement ([13]), chap. I) soit par l'utilisation de la fonction vectorielle de Leibniz ([13], chap. III).

b) Ce sont le produit scalaire et ses propriétés et la fonction scalaire de Leibniz qui interviennent dans les problèmes métriques de nature linéaire ou angulaire. Un exemple non trivial est donné dans [9] pour établir l'inégalité de RICHARD qui donne des bornes à la forme quadratique

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j x_i x_j \quad .$$

Les déterminants et produits mixtes interviennent dans les problèmes métriques angulaires, superficiels et volumiques.

IV - LA FONCTION SECONDAIRE

Qui dit vecteurs, dit aussi transformations opérant sur eux et conservant la structure vectorielle et dit nouveaux objets construits sur les vecteurs et sur lesquels vont également opérer les applications linéaires. Apparaissent alors très naturellement des groupes de transformations caractérisés à partir d'une propriété d'invariance : invariance de l'orientation (transformations à déterminant positif), invariance des sous-espaces de dimension (homothéties), invariance d'une forme quadratique non dégénérée, invariance d'un objet, d'une forme bilinéaire alternée (groupes symplectiques)... D'une part, ces groupes et leurs quotients par des sous-groupes décriront les espaces d'objets ainsi construits (espaces homogènes) ce qui ramènera leur étude à une étude algébrique, d'autre part ces objets nouveaux permettront d'étudier les transformations.

1) Objets nouveaux ; groupes de transformations et espaces homogènes

a) Considérons un espace vectoriel réel V_n de dimension finie n, éventuellement muni d'une orientation et d'un produit scalaire. On peut lui associer l'ensemble $\mathcal{R}(V)$ des bases orthogonales sur lequel opère le groupe orthogonal $O(V_n)$ par

$$g.(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n) = (g.\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,g.\vec{e}_n)$$

et le sous-ensemble $\mathcal{R}^+(V_n)$ des bases orthonormales directes sur lequel, pour l'action décrite ci-dessus, opère le groupe des rotations $SO(V_n)$, l'action étant transitive et fidèle.

Fixons alors une base orthonormale directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, et soit V_{n-1} le sous-espace de V_n de dimension n-1 engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1})$. Le groupe $SO_{\vec{e}_n}(V_n) = \{g \in SO(V_n) \ / \ g.\vec{e}_n = \vec{e}_n\}$ s'identifie au groupe orthogonal $SO(V_{n-1})$; soit alors $\vec{u}$ un élément de la sphère $S_{n-1} = \{\vec{v} \in V_n \ / \ \|\vec{v}\| = 1\}$; on peut le caractériser par l'ensemble des g de $SO(V_n)$ tels que $g.\vec{e}_n = \vec{u}$, ce qui conduit à identifier deux éléments g, g' de $SO(V_n)$ tels que $g.\vec{e}_n = g'.\vec{e}_n$, i.e. tels que $g'^{-1}.g$ soit dans $SO(V_{n-1})$. On obtient ainsi une identification de S_{n-1} avec l'espace homogène $SO(V_n)/SO(V_{n-1})$.

b) De même considérons l'ensemble $\mathcal{D}(V_n)$ des drapeaux de V_n, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ de n sous-espaces de V_n tels que $\dim(V_k) = k$, $k = 1, 2, \dots, n$, et $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k \subset \dots \subset V_n$. A toute base $(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n) = b$ de V_n est canoniquement associé un drapeau : le drapeau

$(\vec{\varepsilon}_1), (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2), \dots, (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_k), \dots, V_n$, où $(\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_k)$ désigne le sous-espace de dimension k engendré par les k premiers vecteurs de la base b, et tout drapeau peut être obtenu de cette façon. Le groupe $GL(V_n)$ de toutes les transformations (automorphismes) de V_n opère sur $\mathcal{D}(V_n)$ de telle sorte que si d est le drapeau associé à la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$, g.d est le drapeau associé à la base $(g.\vec{\varepsilon}_1, g.\vec{\varepsilon}_2, \dots, g.\vec{\varepsilon}_n)$.

Fixons alors un drapeau d_o, et soit $P = \{g \in GL(V_n) \ / \ g.d_o = d_o\}$ le sous-groupe de $GL(V_n)$ fixant d_o, dont les éléments sont appelés des transvections. De la même façon que dans le paragraphe précédent, en identifiant un drapeau d avec l'ensemble des transformations qui transforment d_o en d on obtient une identification de $\mathcal{D}(V_n)$ avec l'espace homogène $GL(V_n)/P$.

Ainsi les vecteurs permettent des ensembles $(R(V_n), \mathcal{D}(V_n),..)$ d'objets nouveaux, si G est un groupe opérant transitivement sur cet ensemble, on réalise l'ensemble en question comme espace homogène quotient de G par le sous-groupe de G qui fixe un élément donné de cet ensemble.

2) <u>L'outil vectoriel au service de l'étude des transformations</u>

Il s'avère que l'outil vectoriel intervient d'une part pour décrire le mode opératoire de la transformation qu'on étudie, d'autre part, en liaison avec la recherche des générateurs de groupes de transformations, pour décomposer les transformations d'un groupe en produit de générateurs de ce groupe. Nous donnons ici quelques exemples de ces deux interventions :

a) Description d'étude du mode opératoire de transformations

- description du fonctionnement d'une homothétie
- étude du produit de deux homothéties
- expression intrinsèque de la symétrie orthogonale s d'axe porté par un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$:

  $$s_{\vec{u}} : \vec{x} \longrightarrow \frac{2(\vec{u},\vec{x})}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} - \vec{x}$$

- expression d'une transvection p : l'expression matricielle d'une transvection en prenant pour base, une base qui engendre le drapeau d_o laissé fixe par p, est une matrice triangulaire "inférieure".

b) Utilisation pour les décompositions de transformations

A titre d'exemple donnons la décomposition d'Iwasawa d'une transformation. Soit g un élément de $GL(V_n)$, et soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ une base orthonormale directe de V_n. Il existe une unique base $(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\dots,\vec{\varepsilon}_n)$ telle que $\vec{e}_i = g.\vec{\varepsilon}_i$, $i = 1,2,\dots,n$, qui caractérise entièrement g. Soit alors $\vec{u}_1 = \vec{\varepsilon}_1$; il existe un unique réel $\lambda_1^{\,2}$ tel que $\vec{\varepsilon}_2 + \lambda_1^{\,2}\vec{\varepsilon}_1 = \vec{u}_2$ soit

orthogonal à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_2 \neq 0$; cela étant on trouve un unique couple $(\lambda_1{}^3, \lambda_2{}^3)$ de réels tels que $\vec{u}_3 = \vec{\varepsilon}_3 + \lambda_1{}^3 \vec{\varepsilon}_1 + \lambda_2{}^3 \vec{\varepsilon}_2$ soit orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et soit non nul ; ...; au bout de n opérations, le procédé d'orthogonalisation de Schmidt nous permet d'obtenir une base orthogonale $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ et la transformation n qui transforme la base $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ en la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est une transvection dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 (transformation unipotente). Soit alors a la transformation telle que $a(\vec{u}_i) = \frac{1}{\|u_i\|} \vec{u}_i$,
qui est une transformation diagonale à coefficients tous positifs ;
$(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ est une base orthonormale, et il existe un unique opérateur orthogonal k qui transforme $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ en la base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.
On a donc $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n) \xrightarrow{n} (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \xrightarrow{a} (\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n) \xrightarrow{k} (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
On en déduit que $g = k\,a\,n$, et on montre ainsi que toute transformation se décompose de manière unique en le produit d'une transvection unipotente, d'une transformation diagonale à coefficients positifs et d'une transformation orthogonale (décomposition d'Iwasawa). Si l'on remarque que $p = an$ est encore une transvection, on obtient $g = kp$: toute transformation se décompose en le produit d'une transvection conservant l'orientation et d'une transformation orthogonale (décomposition de Cartan).

<u>Exemple</u> : soit à déterminer explicitement la décomposition d'Iwasawa des transformations de $\mathbb{R}^2$ qui conservent l'orientation et les aires, qu'on peut représenter par les matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$. La reprise pas à pas de la démonstration faite ci-dessus dans le cas général permet d'écrire que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/\sqrt{c^2+d^2} & -c/\sqrt{c^2+d^2} \\ c/\sqrt{c^2+d^2} & d/\sqrt{c^2+d^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{c^2+d^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2+d^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} & 1 \end{pmatrix}$$

V - LA FONCTION TERTIAIRE

Cette fonction se manifeste dès lors que l'outil vectoriel est intégré comme production élaborée au sein d'un formalisme visant à fournir un cadre dans lequel les concepts de l'algèbre linéaire fonctionnent de manière cohérente et pertinente. De ce point de vue l'outil vectoriel rend trois signalés services au mathématicien professionnel :

- Il fournit une alternative au problème des fondements de la géométrie posé par EUCLIDE et résolu par HILBERT : ainsi, si l'on définit le parallélisme de deux variétés de même dimension par l'égalité des sous-espaces vectoriels associés, il n'y a plus de "postulatum" d'Euclide, mais un résultat découlant trivialement de la définition.
- Il offre un cadre unificateur pour les géométries (affine, euclidienne, projective, ...) et, via les transformations, un cadre classifiant les géométries ([1]), [4], [8], [10]).
- Il fournit un cadre algébrique et une méthode (l'étude des orbites) permettant d'"algébriser" bon nombre d'objets géométriques en les réalisant comme espaces homogènes (quotient d'un groupe de transformations par un sous-groupe fermé).

VI - CONCLUSION(s) PROVISOIRE(s)

Est-il besoin de préciser que l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée n'a pas pour objectif essentiel de faire plaisir aux mathématiciens ? Toutefois cet enseignement doit tenir compte de l'analyse scientifique et épistémologique de la discipline "géométrie" en particulier, et de la discipline "mathématiques" en général. On ne peut légitimer un outil, à un niveau donné, que si, à ce niveau, et dans un cadre bien précis, il y a pertinence de son emploi dans une de ses fonctions que l'on maîtrise et cela dépend du niveau de l'utilisateur ; le reste n'est que littérature...

REFERENCES CITEES

[1] N. BOURBAKI - "Eléments d'histoire des mathématiques", Hermann, Paris (1969).

[2] A.L. CAUCHY - "Oeuvres complètes", tome V, Gauthier-Vilars.

[3] R. DESCARTES - "Geometria" in "Oeuvres complètes", tome VI.

[4] J. DIEUDONNE - "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", Hermann, Paris (1964).

[5] L. EULER - "Formulae generales pro translatione quacunque corpurum rigidorum" in "Opera Omnia" Leipzig, Teubner, tome IX.

[6] P. FERMAT - "Oeuvres", tome II, Gauthier-Villars, Paris.

[7] H. GRASSMANN - "Gesammelte Werke", Teubner, Leipzig (1884).

[8] F. KLEIN - "Programme d'Erlangen".

[9] J. MARION - "Quelques prolongements de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ", Inf. Maths. n. 15, I.R.E.M. de Marseille (1979).

[10] J. MARION - "Essai sur la géométrie" in actes du "colloque inter-I.R.E.M. Géométrie de Nantes (1979).

[11] J. MARION et J-L OVAERT : "Quelques réflexions d'ordre scientifique et épistémologique sur l'enseignement des mathématiques", rapport pour la CO.P.R.E.M. (1976).

[12] G. PEANO - "Calcolo geometrico", Fratelli BROCCA, Turin (1888).

[13] AMALBERTI, ARNAL, BENIAMINO, MARION, OVAERT, PROUDHON, VERNET : "Les problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane", Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie", I.R.E.M. de Marseille (1982).

COMPTE-RENDU DE L'ACTION DU GROUPE I.R.E.M. (L.E.P.) PENDANT L'ANNEE 1982-83

Henri CAPELL,
Bernard DUNEVON,
Michèle FARAMIA,
Michel FARAMIA,
Albert ROLLAND.

Pendant l'année scolaire 1982-83, les activités du Groupe "Lycée d'Enseignement Professionnel" de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille ont été axées sur trois sujets principaux :

1) L'étude critique des ouvrages de mathématiques pour les 4e préparatoires (ex. l'année de CAP). Une "grille-questionnaire" a pu être mise au point et expédiée dans les L.E.P. de l'académie.
Nous avons aussi pris une part active aux travaux de la - Commission Nationale APM - Inter-I.R.E.M. : manuels scolaires.

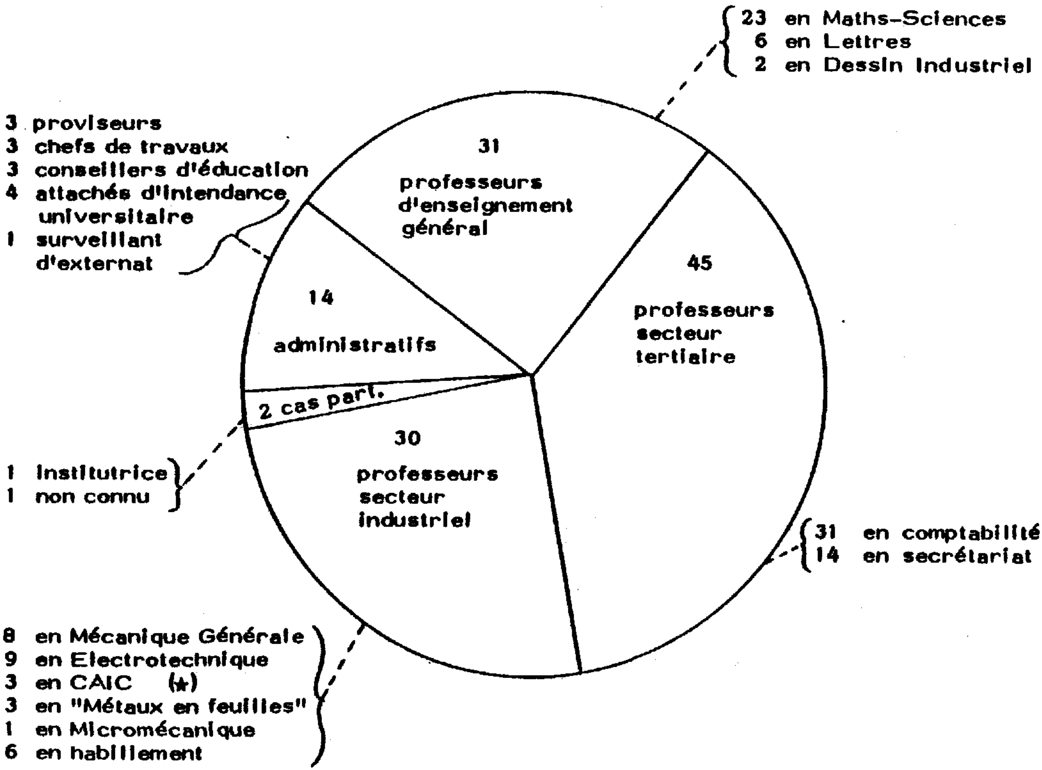
2) Une recherche concernant l'élaboration des nouveaux programmes de mathématiques pour les classes de BEP, qui nous a permis d'émettre des propositions au sein de la commission "Nouveaux programmes de BEP" lors du colloque inter-I.R.E.M. décembre 1982 à St Denis. Ce travail sera poursuivi, d'autant plus qu'un animateur du groupe est actuellement membre de la commission nationale d'élaboration de ces nouveaux programmes.

3) Mais l'essentiel de nos activités a porté sur des actions d'initiation et de sensibilisation à l'informatique (décrites en détail ci-après). Cela pour répondre à une forte demande exprimée par nos collègues de toutes disciplines, dans toute l'académie.

Cette ouverture de notre groupe vers l'extérieur a toujours été notre souci majeur.

QUELQUES CHIFFRES

Nous avons animé 6 actions, auxquelles ont participé 122 stagiaires, provenant de 12 établissements, et dont voici le profil :



(*) C A I C : Conducteurs d'Appareils des Industries Chimiques.

LE DEROULEMENT D'UNE ACTION

Nos interventions sont basées sur le principe d'une mise en contact immédiate des stagiaires avec la machine.

Les ordinateurs utilisés pour les premières séances sont des ordinateurs de poche, qui présentent le double avantage de posséder un éditeur particulièrement simple, et d'exister en nombre suffisant pour permettre un travail individuel, voire un prêt à domicile...

Après une présentation générale de l'équipe, deux courts exposés se succèdent : l'un, d'ordre technologique, sur les ordinateurs, leur fonctionnement, les langages ; l'autre, d'ordre théorique, sur la démarche informatique : formalisation d'un problème, analyse, algorithme, programmation, exécution. Tout au long des séances, nous aurons soin de placer nos exemples dans ce cadre.

Puis vient le moment de distribuer les pockets, une par stagiaire, et d'en examiner le fonctionnement. Il nous arrive de donner des machines contenant déjà un programme de jeu ou de calcul d'impôts pour aider à la familiarisation des fonctions de l'ordinateur.

Le premier exercice sera précédé de l'exposé du thème de la séance : un pays imaginaire dans lequel le gouvernement institue un impôt sur le revenu. Ce thème sera le fil conducteur de la première séance, nous permettant d'introduire les premières instructions : entrées, affectations, sorties et branchements. Pour cela, le gouvernement décidera successivement d'appliquer un taux de 15 % à tous, puis de tenir compte du nombre d'enfants des contribuables, et enfin d'exonérer les faibles revenus. Souvent l'évolution du système est suggérée par les stagiaires eux-mêmes, qui se projettent pleinement dans ce thème : "oui, mais c'est injuste...!".

Chaque exercice est clairement énoncé, puis commenté et analysé par le groupe. La mise en programme n'a lieu qu'après la présentation des instructions nécessaires. La pratique sur la machine est individuelle et très rapidement personnalisée : le nombre d'animateurs et de machines autorise quelques "notes" personnelles : présentation des entrées et sorties, messages, stimuli, etc. qui laissent déjà apparaître de futures applications pédagogiques.

La première séance se termine par l'exposé d'un autre thème, le jeu du nombre secret, et l'analyse de ce problème. Au début de nos interventions, nous demandions simplement aux stagiaires d'écrire le programme de ce jeu pour la séance suivante. Puis au cours de l'année, nous en sommes venus à confier les pockets aux stagiaires pour l'intervalle de temps entre deux séances, en moyenne huit jours.

La deuxième séance commence par la reprise de l'analyse du jeu du nombre secret, et sa mise en programme. L'exécution du jeu permet de revoir les notions introduites au cours de la première séance. Il permet également l'introduction des variables chaîne, à l'occasion des réponses "oui-non". Les stagiaires apprécient ce thème car la programmation de départ est simple, et après quelques essais d'exécution, ils ressentent eux-mêmes le besoin d'améliorer les règles du jeu : on en vient tout naturellement aux notions de compteur pour le score, de test pour l'élimination d'un candidat trop lent, etc. Bien souvent, les suggestions nous arrivent à point pour la suite du travail...

La deuxième partie de la séance est composée d'une série d'exercices de mise en pratique des premières instructions. Ces exercices sont choisis dans un catalogue que nous avons composé de manière à ce que chacun trouve un thème qui le concerne. Le travail est alors, en principe, individuel, mais le plus souvent on assiste à des regroupements de stagiaires, qui préfèrent discuter ensemble de l'analyse et de l'algorithme. Au cours de ces exercices sera introduite la notion de bouçle. La plupart du temps, la séance se termine ainsi, mais il nous arrive de parler dès cette séance de l'itération, lorsque l'auditoire semble prêt.

Ainsi se termine notre action pour les stagiaires du PIF 01. Quánt à ceux du PIF 02, ils bénéficieront de deux demi-journées supplémentaires, groupées cette fois en un jour complet. En général, cette journée a lieu quelques jours après la deuxième séance. Dans trois cas, les stagiaires ont pu travailler sur des micro-ordinateurs : deux fois au CREFI, et une fois en Avignon sur des machines de l'établissement et des machines apportées par les stagiaires.

La journée débute par un exercice d'introduction au "FOR...NEXT", avec mise en programme et essais. Puis nous présentons le thème de cette journée : le calcul des moyennes d'élèves. Nous avons choisi ce thème pour l'intérêt général qu'il suscite, quelle que soit la fonction des stagiaires, mais aussi parce qu'il permet une première approche simple, suivie d'une série d'améliorations évidentes, proposées par les participants, et qui nous amènent à introduire de nouvelles notions : compteur, initialisation, tableaux, arrondis, gestion d'écran, etc. Ce genre d'exercice, que nous appelons "à tiroir", permet de décider des difficultés à aborder en fonction de la demande et du niveau du public : parfois même en arrivons-nous à parler de sous-programme ou de gestion d'imprimante !

Au fur et à mesure les stagiaires personnalisent leur travail sur ce thème, en axant leur recherche suivant leur goûts. Nous épaulons les initiatives, et parfois nous assistons à des échanges d'idées et de programmes, avec arguments pédagogiques à l'appui ! Certains de ces programmes ont d'ailleurs pu être listés sur imprimante, et photocopiés.

La journée se termine invariablement par une évaluation hors de notre présence, au cours de laquelle les stagiaires expriment par écrit leurs avis qui nous seront ensuite communiqués sous une forme globale. Pendant cette évaluation, et au moment de la séparation, nous recevons une intense demande de poursuite de nos stages : à cela, nous ne pouvons que répondre évasivement...

Bien sûr, ceci ne représente que la trame de nos actions. Tous les publics ne réagissent pas de la même manière, et nous nous gardons bien de donner un cours stéréotypé. Il nous arrive fréquemment de rompre avec le fil conducteur pour répondre à une demande précise des stagiaires : par exemple lorsqu'une majorité se dessine en faveur des thèmes comptables, nous parlons facture, bulletin de paye, etc.

Le fait d'être toujours plusieurs animateurs permet d'éviter le danger du cours magistral et favorise les interventions des stagiaires. Le dialogue est permanent. Enfin, nous avons soin d'exploiter toute initiative ou suggestion des collègues :

C'est à eux que nous devons la mise au point de nos séances. Et bien souvent, on nous a annoncé qu'au delà de l'informatique, c'était une démarche pédagogique que l'on avait trouvée !

LES IMPREVUS :

...des coups de téléphone de collègues inconnus, non inscrits au PIF : "j'ai appris que vous êtes demain à..., est-ce que je peux venir à vos séances, je dois enseigner la programmation à mes élèves, et..."

...un intendant qui, ayant appris notre existence, est venu spontanément avec les collègues de son établissement convoqués, et a consacré plusieurs demi-journées à suivre toutes nos actions jusqu'à la dernière.

...un groupe d'enseignantes qui, inscrites au PIF (*) 01 et convoquées seulement pour deux séances, ont négocié avec leur chef d'établissement leur participation aux séances suivantes !

...un groupe de trois enseignants déjà formés en BASIC, venu dans l'intention de résoudre leur problème précis : l'informatisation de leur secrétariat d'examen ! Il nous a fallu d'emblée leur avouer notre impossibilité de mener ce projet à terme. Nous leur avons proposé de chercher ensemble dans ce sens, au sein d'un groupe particulier. Au bout de deux jours, (et deux nuits !) le logiciel n'était pas fait, même pas amorcé. Mais les recherches communes nous

---

(*) PIF : Projet Informatique de Formation.

avaient entraîné à des réflexions sur la structuration d'un programme, la gestion d'écran, la gestion de fichiers, etc. Et le stage fut jugé positif...

...les décisions de collègues d'acheter un micro-ordinateur personnel "pour pouvoir continuer"...

...des stagiaires qui ont bénéficié du prêt à domicile des machines et nous ont avoué au retour leur plaisir d'avoir pu "initier"leur entourage familial ou professionnel...

...les promesses que l'on a dû faire à tous d'essayer de poursuivre ces actions l'an prochain !

ANALYSE GLOBALE DE NOS ACTIONS

Etant un groupe I.R.E.M.-Lycées d'Enseignement Professionnel, nous avons voulu, au travers de ces actions :

- rencontrer des collègues de L.E.P. dans un cadre interdisciplinaire afin de rompre l'isolement constaté, et que nous avions nous-mêmes ressenti en d'autres temps.
- répondre à l'importante demande d'initiation à l'informatique exprimée par la plupart de nos collègues, comme dans les autres secteurs de l'Education Nationale.
- répondre, dans la mesure du possible, à la demande pressante de formation des collègues chargés d'enseigner "l'informatique" à leurs élèves.

Le choix des thèmes de nos interventions a été dicté par notre souci d'effectuer un travail interdisciplinaire accessible et motivant pour tous : impôts, jeux, moyennes scolaires... Ces thèmes ont été mis au point après une réflexion collective au sein de notre groupe, en tenant compte de nos expériences d'animations effectuées dans divers établissements scolaires au cours de l'année précédente, avant la naissance du PAF *.

Nous avons eu pour souci de mettre immédiatement en présence chaque stagiaire avec sa machine, de favoriser une démarche active et individualisée par la présence de plusieurs animateurs disponibles en permanence.

Nous avons voulu ne pas limiter notre initiation à l'utilisation d'un ordinateur de poche, et chaque fois que cela nous a été possible nous avons utilisé des micro-ordinateurs.

Tout au long de l'année, nous avons constaté la satisfaction des collègues de pouvoir suivre un stage dans leur établissement ou un établissement proche, ce qui permettait de conserver les équipes de travail déjà formées, et d'amorcer une réflexion sur l'informatique pédagogique.

En ce qui concerne l'initiation des collègues, les éléments d'évaluation dont nous disposons nous permettent de penser que nous avons atteint nos objectifs : donner à nos stagiaires une idée juste de la démarche informatique, les familiariser avec une machine et un langage. Ces objectifs se voulaient toutefois modestes : il n'a jamais été question de faire un cours

----

(*) PAF : Plan Académique de Formation.

complet de programmation ou de Basic. Ceci n'aurait pas été sérieux, compte tenu de la durée obligatoirement restreinte de nos actions : en effet, notre choix était de répondre au maximum de candidatures.

Au cours de ces séances se sont affirmés des besoins :

- d'approfondissement,
- de développement d'applications pédagogiques,
- de réflexion sur l'application de l'informatique aux spécialités de chacun.

- Les sollicitations de nos collègues nous incitent à continuer dans cette voie. C'est avec cette intention que nous avons déposé pour le PAF 83-84 les trois propositions d'actions :

- l'une pour poursuivre la sensibilisation, avec de nouveaux collègues : "Sensibilisation à l'informatique, initiation à la programmation des personnels de l'enseignement technique et professionnel".

- l'autre pour répondre à la demande d'approfondissement : "Formation informatique des enseignants de lycées d'enseignement professionnel".

- la dernière, plus spécifique au domaine mathématige : "Groupe de travail sur les mathématiques appliquées dans l'enseignement technique et professionnel".

LA COLLABORATION MATHS/PHYSIQUE PORTE-T-ELLE SES FRUITS ?

C'est un travail du groupe maths-physique de Digne.

BONNET - EYRAUD - RAYNAUD

Il est destiné aux professeurs de mathématiques et de physique intéressés, pour discussion et critique.

Son objectif est de sensibiliser les professeurs de mathématiques et de physique à la nécessité d'une collaboration et d'appeler à cette collaboration.

Il examine, avec quelques exemples à l'appui tirés des manuels, des pratiques floues qui ne servent ni la cause de la physique dans l'esprit des élèves, ni, d'une manière générale, l'enseignement scientifique qui leur est destiné.

Depuis plusieurs années nous travaillons dans le groupe maths-physique à établir des positions communes claires et à harmoniser nos langages. Nous attendions beaucoup des nouveaux manuels de physique de Seconde, mais nos espoirs sont largement déçus.

Nous admettons qu'en physique, comme en mathématiques, on recoure en cas de besoin aux identifications, raccourcis ou abus de langage.

Mais nous déplorons encore une fois, comme nous le faisions dans notre rapport 1980-81 que

ce qui devrait être commodité pour pratiquants avertis devienne artifice de présentation et serve de paravent à la confusion.

Exemple 1

Nous constatons dans plusieurs manuels que le même mot peut signifier tour à tour Temps, Instant, Durée, Date.

Nous tenons au contraire à maintenir entre ces termes les différences qu'implique la correspondance entre Temps et espace de dimension 1 spécifiée par le tableau suivant :

Espace	Point	Longueur	Abscisse
Temps	Instant	Durée	Date

Nous ajoutons que pour nous, Longueur et Durée sont des grandeurs physiques et non des réels, des nombres purs, comme le sont Abscisse et Date.

Exemple 2

Nous avons la notion intuitive de Vitesse comme celle de Longueur et celle de Durée.

Mais dans nos usages Longueur et Durée sont des "grandeurs fondamentales" alors que la Vitesse est une "grandeur dérivée" des deux premières. Plusieurs manuels la présentent, sans préambule, par cette définition : "La vitesse moyenne V est le quotient de la longueur L parcourue par la durée T du parcours : $V = \frac{L}{T}$ ".

La formule a le mérite d'être intrinsèque, mais sans mode d'emploi, elle est vide.

Comment, en effet, diviser une longueur par une durée ?

Dès que l'on veut pratiquer cette opération il faut bien reconnaître que l'on doit sacrifier l'intrinsèque en passant par l'intermédiaire des unités et des mesures :

Si le mobile a parcouru la longueur L pendant la durée T, sa vitesse moyenne V a pour mesure en kmh^{-1}, par exemple, le quotient de la mesure x de L en km par la mesure y de T en h, (x et y étant des réels).

Validant une pratique connue de l'élève, il faut commencer par écrire scrupuleusement

$$V = \frac{x km}{y h} = \left(\frac{x}{y}\right) km\,h^{-1}$$, ou avec d'autres unités

$$V = \frac{x 10^3 m}{y 3\,600\ s} = \left(\frac{1}{3,6} \cdot \frac{x}{y}\right) ms^{-1}$$

(Dans ces égalités V, xkm, yh... sont des grandeurs physiques indépendantes des unités et forcément différentes des réels x, 10^3x... qui, eux, en dépendent. Il est hors de question, avec des débutants, de s'accorder sous couvert d'abus de langage inéluctables, les raccourcis absurdes et contradictoires $V = \frac{x}{y} = \ldots$ ou $V = \frac{1}{3,6} \cdot \frac{x}{y} = \ldots$).

. Puis on généralise la pratique.

. Lo et To étant les unités de longueur et de durée choisies, si la distance parcourue est L = x Lo (où $x \in R^+$) et la durée du parcours T = yTo (où $y \in R^{+*}$), la vitesse moyenne réalisée est $V = \frac{x.Lo}{y.To} = \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{Lo}{To}\right)$.

. Où $\frac{Lo}{To}$, que l'on notera $LoTo^{-1}$ est l'unité de vitesse associée aux unités de longueur et de durée Lo et To.

. C'est seulement maintenant qu'on sait la faire fonctionner pour tout choix des unités de longueur et de durée que la formule intrinsèque $V = \frac{L}{T}$ prend son sens. (Ainsi que ses synonymes L = V.T et $T = \frac{L}{V}$).

. Ce processus de construction d'une grandeur physique à partir d'autres interviendra fréquemment par la suite. Il est regrettable qu'il soit bâclé dès ses débuts dans 6 des manuels examinés sur 7 [1] par des pirouettes du type $V = \frac{50}{10} = 5\ ms^{-1}$ ou $\omega = 33,33 \times 2\pi = 209,42\ rad\,mn^{-1}$.

. Devons-nous rappeler à ce propos que le signe = ne veut pas dire "a pour mesure en ms^{-1}" ni "est la mesure en ms^{-1} de" ?

L'égalité a = b signifie que a et b sont deux noms du même objet.

Par exemple :

$1,5 = \frac{3}{2}$ parce que 1,5 et $\frac{3}{2}$ sont deux noms du même réel.

$5\ ms^{-1} = 18\ kmh^{-1}$ parce que 5 ms et $18\ kmh^{-1}$ sont deux noms de la même vitesse. Mais bien entendu $5\ ms^{-1} \neq 5\ kg$ et $5\ ms \neq 5$.

Exemple 3

Parlons maintenant du Vecteur-Vitesse .

. Il faut préciser d'abord que nos élèves entrant en Seconde connaissent une seule catégorie de vecteurs : les vecteurs-espace de 4e et de 3e. Un vecteur-espace a une direction, un sens et une longueur, qui le caractérisent ; la mesure de sa longueur avec une unité choisie est la norme du vecteur pour cette unité ; c'est un réel positif non intrinsèquement attaché au vecteur. Si, par exemple, le vecteur $\vec{V}$ a pour longueur 35 mm et si l'unité de longueur choisie est le cm, alors $\|\vec{V}\| = 3,5$. Nos élèves savent additionner ces vecteurs entre eux et les multiplier par les réels, et par rien d'autre.

---

(1) L'exception est à l'actif de l'équipe Hachette.

. Or dans plusieurs manuels on peut lire ceci :

"i étant le vecteur unitaire, de longueur 1 cm, si $\vec{OM} = x\vec{i}$, on dit que l'abscisse de M dans le repère $(O,\vec{i})$ est le <u>réel</u> <u>x</u>... mais le physicien a l'habitude d'écrire, par exemple, x = 2 cm au lieu de x = 2".

Dans l'exemple 2 le physicien avait l'habitude d'oublier les unités là où il en fallait, et maintenant il a l'habitude d'en rajouter là où il n'en faut pas.

Avec ce genre d'habitude, quand l'élève a gobé que le quotient est la vitesse 5 ms^{-1}, et que le produit 2 $cm.\vec{i}$ d'un vecteur-espace par une longueur est encore un vecteur-espace, il est mûr pour les prestidigitations ultérieures, par exemple celles où l'on multipliera sans façon un vecteur-espace par n'importe quoi, une masse, l'inverse d'une durée...

. <u>Ce qui nous amène au vecteur-vitesse</u>.

Plusieurs auteurs le présentent comme suit :

"<u>Le vecteur-vitesse caractérisant le mouvement rectiligne uniforme du point M est</u> $\vec{V} = \frac{\vec{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ ".

- Ou bien t_1 et t_2 sont des "dates de mathématicien" (1), c'est-à-dire des <u>réels</u>, et $t_2 - t_1$ est un réel ainsi que $\frac{1}{t_2 - t_1}$; alors $\vec{V}$, produit d'un vecteur-espace par un réel, est <u>encore un vecteur-espace</u> ; et ce vecteur-espace n'est pas intrinsèquement attaché au mouvement puisqu'il dépend de l'unité de durée choisie.

---

(1) Il est regrettable d'avoir à faire la distinction.

C'est donc tricher doublement que d'affirmer que l'on vient de définir ainsi une <u>grandeur vectorielle de type nouveau</u> appelée <u>le</u> vecteur vitesse du mouvement.

- Ou bien t_1 et t_2 sont des "dates de physicien" et $t_2 - t_1$ est une <u>durée</u>.

  Alors $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ c'est effectivement <u>nouveau</u> et <u>intrinsèque</u>, mais pour nos élèves c'est une écriture <u>vide de sens parce qu'ils ne savent pas diviser un vecteur-espace par une durée</u>.

. L'équipe Nathan efface élégamment l'alternative par cette formule : "La durée $t_2 - t_1$ est un réel positif".

Alors $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ c'est du <u>connu</u> puisque $t_2 - t_1$ est un <u>réel</u>, et c'est du <u>neuf</u> et de l'<u>intrinsèque</u> puisque $t_2 - t_1$ est une <u>durée</u>.

Voilà, poussé jusqu'à la caricature, le style que nous combattons.

. Et voici notre point de vue - (où certaines considérations ayant pour but d'éclairer notre lanterne ne sont pas forcément destinées aux élèves) -

A un mouvement donné nous savons, à chaque instant, associer sa vitesse V au sens courant, sa vitesse scalaire, par exemple $V = 18$ kmh (1).

- Faisons mieux et associons-lui le triplet (d,s,V) où d, s, V sont la direction, le sens, et la vitesse scalaire du mouvement à cet instant. C'est ce triplet $\vec{V} = (d, s, V)$ que l'on va appeler le vecteur-vitesse du mouvement à l'instant considéré.

---

(1) La notion de vitesse moyenne acquise, celle de la vitesse instantanée ne pose pas de problème.

Bien entendu la nature vectorielle de ce vecteur-vitesse reste à établir ; à moins que le physicien, se révoltant contre le mathématicien et revenant aux sources, n'appelle vecteur tout triplet (direction, sens, grandeur scalaire).

- Pour visualiser le vecteur-vitesse "<u>représentons"-le</u> par un vecteur-espace $\vec{L} = (d, s, L)$ ayant la direction et le sens de $\vec{V}$ et une longueur L proportionnelle à V.

Ayant fixé un système d'unités, désignons par $\|\vec{L}\|$ et $\|\vec{V}\|$ les mesures de L et V, qui sont des <u>réels</u> <u>positifs</u>.

Choisir une proportionnalité entre V et L revient à choisir une proportionnalité entre leurs mesures, et en définitive, un réel strictement positif k tel que $\|\vec{L}\| = k \; \|\vec{V}\|$ pour tout couple $(\vec{V}, \vec{L})$ d'un vecteur-vitesse et de son représentant. Par exemple, si nous adoptons le S.I. et choisissons $k = 10^{-2}$, un vecteur-vitesse de vitesse scalaire 1 ms^{-1}, donc de norme 1, sera représenté par un vecteur-espace de norme $10^{-2} \times 1$ c'est-à-dire de longueur 1 cm.

- La "représentation" choisie est une application Φ de l'ensemble $\vec{\mathcal{U}}$ des vecteurs-vitesse dans l'ensemble $\vec{\mathcal{L}}$ des vecteurs-espace.

$$\Phi : \vec{\mathcal{U}} \longrightarrow \vec{\mathcal{L}}$$

$$\vec{V} = (d, s, V) \longrightarrow \vec{L} = (d, s, L) \;/\; \|\vec{L}\| = k . \|\vec{V}\|.$$

Φ est évidemment bijective, et permet de définir dans $\vec{\mathcal{U}}$ une addition interne et une multiplication par les réels associées à celles de $\vec{\mathcal{L}}$.

Etant donné un réel quelconque λ, deux vecteurs-vitesse quelconques $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ et leurs représentants $\vec{L}$ et $\vec{L'}$,

$\vec{V} + \vec{V'}$ est le vecteur de représentant $\vec{L} + \vec{L'}$

$\lambda \cdot \vec{V}$ est le vecteur de représentant $\lambda \cdot \vec{L}$

$(\vec{\mathcal{U}}, +, .)$ est alors un espace vectoriel comme $(\vec{\mathcal{L}}, +, .)$, $\left(\text{"isomorphe" à } (\vec{\mathcal{L}}, +, .)\right)$. Et le mot "vecteur" dans "vecteur-vitesse" est légitimé pour ceux qui n'acceptent comme vecteurs que les éléments d'un espace vectoriel.

<u>Observations</u>

1) Chaque échelle de représentation des vitesses par les longueurs définit un des isomorphismes ϕ . Aucun d'eux n'est privilégié ; <u>il n'y a pas de représentation canonique des vecteurs-vitesse par les vecteurs-espace</u>.

2) On peut se demander si les opérations définies dans $\vec{\mathcal{V}}$ par le moyen de ϕ dépendent du choix de ϕ , c'est-à-dire de l'échelle de représentation des vitesses par les longueurs que l'on a adoptée. Il est facile de vérifier que non et d'établir ceci :

- $\vec{V}$ et $\lambda.\vec{V}$ ont même direction, et même sens ou non selon que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$; et $\|\lambda.\vec{V}\| = |\lambda| \, . \, \|\vec{V}\|$.
- $\vec{V} + \vec{V'}$ a une direction et un sens indépendants de ϕ ;
  et $\|\vec{V} + \vec{V'}\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{V'}\|^2 + 2\,\|\vec{V}\| \, . \, \|\vec{V'}\| \, . \cos \widehat{\vec{V},\vec{V'}}$
  ($\widehat{\vec{V},\vec{V'}}$ désignant l'angle des directions orientées de $\vec{V}$ et $\vec{V'}$)

3) L'intérêt physique de la structure vectorielle définie sur reste bien entendu à constater.

4) Le choix de l'échelle de représentation des vitesses par les longueurs est très bien présenté par l'équipe Hachette sous la forme "25 kmh $\leftrightarrow$ 1 cm".
Forme qui évoque parfaitement l'isomorphisme résultant de ce choix entre $(\vec{\mathcal{V}},.)$ et $(\vec{\mathcal{L}},.)$, ensemble des vitesses scalaires et ensemble des longueurs munis tous les deux de la multiplication par les réels positifs ;

de sorte que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ $\qquad \lambda . 25 \text{ kmh}^{-1} \longleftrightarrow \lambda . 1 \text{ cm}$;

et en particulier $\qquad 50 \text{ kmh}^{-1} \longleftrightarrow 2 \text{ cm}$ (1) .

Il faut par contre condamner l'agression contre l'implication mathématique de l'équipe Scodel qui noterait "25 kmh $\Longrightarrow$ 1 cm".

5) Revenons, pour finir, au mouvement rectiligne uniforme et à l'écriture $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ déjà mise en question.

a) Si, un système d'unités ayant été choisi, les dates sont des <u>réels</u>, $L = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ est l'un des vecteurs-espace aptes à représenter le vecteur-vitesse $\vec{V}$ du mouvement ; avec cette particularité que $\|\vec{L}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}{|t_2-t_1|} = \|\vec{V}\|$; (cas où k = 1). C'est ce vecteur-espace que le professeur de mathématique confond en général avec le vecteur-vitesse et appelle le "vecteur-vitesse-pour-l'unité de durée choisie".

b) Si au contraire $t_2 - t_1$ est une durée, le symbole $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ est indépendant de toute unité. On peut, <u>maintenant</u>, lui conférer une signification en décidant que $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1}$ est le vecteur-vitesse du mouvement au sens <u>antérieurement défini</u>.

---

(1) Il est dommage que les auteurs, munis d'une notation parfaite, se laissent aller à écrire " $\dfrac{50}{25}$ = 2 cm" !

Conclusion

Il nous resterait beaucoup à dire ; en particulier que nous ne prétendons pas détenir la Vérité, et que nous attendons les observations et les critiques de nos collègues. Mais nous sommes persuadés que les pratiques floues dont nous avons parlé ne servent pas la cause de la physique dans l'esprit de nos élèves, ni, d'une manière générale, l'enseignement scientifique qui leur est destiné.

Aussi souhaitons-nous que s'engage un débat sur les questions que nous avons soulevées.

C'est en formulant ce voeu pressant que nous terminons, et en remerciant les lecteurs qui ont bien voulu nous suivre jusqu'ici.

ASCENSION SOCIALE

UN JEU PROPOSÉ PAR
Gérard Rauzy

On dispose d'un "damier" ou plutôt d'un "quadrillage" infini du plan réalisé par une trame de lignes horizontales et verticales équidistantes.

Sur ce quadrillage on répartit un nombre fini de pions en posant chaque pion à l'un des "sommets" du quadrillage (intersection d'une horizontale et d'une verticale du quadrillage), deux pions ne pouvant être mis sur le même sommet.

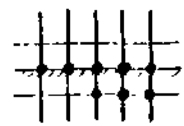
Partant d'une telle configuration, on "joue" comme au "solitaire", c'est-à-dire que les pions A et B étant consécutifs sur une même horizontale *ou une même verticale (A étant indifféremment à droite ou à gauche de* B, ou bien en haut ou en bas de B) et le sommet C symétrique de A par rapport à B étant inoccupé, on peut "prendre" B avec A, de sorte que dans la nouvelle configuration, le pion B disparait, le pion A vient en C, les autres pions restant à leur place (voir par exemple figure 1).

Figure 1.

On particularise maintenant une ligne horizontale de référence : le "niveau zéro", et on dispose les pions de la configuration initiale *uniquement* au dessous ou sur cette ligne. Le "jeu" consiste alors à amener un pion au moins dans la configuration finale au plus haut niveau possible : par exemple dans la configuration de la figure 2 on peut amener un pion au niveau 2.

Fig. 2

<u>1e question</u> : Montrer, qu'en partant de la configuration de 8 pions :



on peut, en 7 coups, amener un pion au niveau 3.

Existe-t-il une configuration de 7 pions permettant d'aboutir au même résultat ?

<u>2e question</u> : Existe-t-il une configuration initiale qui permette en un nombre fini de coups, d'amener un pion au niveau 5 ?

SOLUTION DU JEU "ASCENSION SOCIALE"

Rappelons le problème. Sur un damier plan (supposé infini) on dispose un certain nombre de pions au-dessous ou sur une ligne appelée niveau zéro. Partant d'une telle configuration, on a une règle ("prise" de pions analogue à celle du jeu du solitaire) permettant de passer à d'autres configurations (comportant à chaque coup un pion de moins que la précédente).

Le but, en respectant cette règle, est d'amener un pion au niveau le plus élevé. Plus exactement, nous allons montrer que quelque soit la configuration initiale, il n'est pas possible d'amener un pion au-dessus du niveau 4.

Supposons le contraire, et assimilons les cases du damier à l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, le niveau zéro étant constitué des points $x = (x_1, x_2)$ tels que $x_2 = 0$.
Les configurations (initiale, intermédiaires et finale) sont donc des parties finies de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Les hypothèses faites se traduisent par :

(1) Si $x = (x_1, x_2)$ appartient à la configuration initiale C_i on a nécessairement $x_2 \leq 0$.

(2) Il existe un point $x = (x_1, x_2)$ de la configuration finale C_f tel que $x_2 > 4$. Quitte à choisir convenablement les axes de coordonnées on peut supposer que pour ce point on a également $x_1 = 0$.

Introduisons maintenant une idée très féconde dans l'étude des jeux de position ; à chaque configuration (i.e. à chaque partie C de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) nous associons un nombre réel positif E(C) que par analogie purement formelle avec la thermodynamique nous nommerons <u>entropie</u> de la configuration, de la manière suivante :

soit α le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, si $x = (x_1,x_2)$ est un point de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ appelons entropie de x, le nombre $E(x) = \alpha^{x_2 - |x_1|}$; par définition, l'entropie d'une configuration C sera alors la somme des entropies des points de C,

$$E(C) = \sum_{x \in C} E(x) .$$

Ceci posé, le point essentiel (qui "justifie" l'emploi du terme eutropie) est alors le suivant : lorsqu'on passe selon la règle de prise de pions d'une configuration C à une configuration D l'entropie ne peut que décroître

$$E(D) \leq E(C) .$$

Pour le montrer, il suffit de considérer toutes les prises possibles : par exemple, supposons deux pions $a = (a_1,a_2)$, $b = (b_1,b_2)$ contigus sur une même ligne horizontale.

On a : $a_2 = b_2$, $b_1 = a_1 + 1$.

Après la "prise" il ne reste plus qu'un pion en $c = (a_1 - 1, a_2)$ ou en $d = (b_1 + 1, a_2)$.

Si par exemple, $a_1 > 0$

$E(a) + E(b) = \alpha^{a_2 - a_1} + \alpha^{a_2 - a_1 - 1} = \alpha^{a_2 - a_1 - 1}(1+\alpha)$

$E(c) = \alpha^{a_2 - a_1 + 1}$, $\qquad E(d) = \alpha^{a_2 - a_1 - 2}$.

Utilisant le fait que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\alpha > 1$ on en déduit :

$E(c) = E(a) + E(b)$, $\qquad E(d) < E(a) + E(b)$

et donc, dans tous les cas $\max\big(E(c),E(d)\big) \leq E(a) + E(b)$.

Si C était la configuration où figurait les points a et b, et D celle obtenue par prise de a par b ou de b par a, on a donc bien (les autres points étant les mêmes pour C et D) $E(D) \leq E(C)$.

Même démonstration, si les pions sont contigus sur une ligne verticale.

. Nous en déduisons en particulier si C_i et C_f sont les configurations initiales et finales, on a nécessairement :

$$E(C_f) \leq E(C_i)$$

Par ailleurs, l'hypothèse faite sur C_f implique d'après (2) :

$$E(C_f) \geq \alpha^5 .$$

Pour obtenir la contradiction cherchée, il suffit alors de montrer que, quelque soit la configuration initiale C_i, on a :

$$E(C_i) < \alpha^5 .$$

Bien entendu, l'entropie d'une telle configuration est strictement inférieure à la somme de la famille (infinie !) de tous les $E(x)$ quand x parcourt le demi-plan inférieur c'est-à-dire à :

$$S = \sum_{h=0}^{-\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{h-|k|} = \left(\sum_{h=0}^{-\infty} \alpha^h\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{-|k|}\right)$$

On calcule aisément S et on obtient : $S = \alpha^5$.

Ce qui démontre le résultat.

De la même manière on peut calculer le nombre minimum de pions nécessaires dans une configuration initiale, pour que la configuration finale comporte un pion au point (0,4).

18

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70,route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 9

tél. 41.39.40. - 41.01.40.