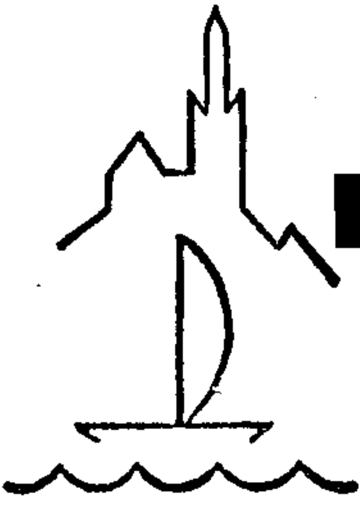
information mathématique

n° 17



université d'aix-marseille II

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLES DE LA PUBLICATION

Alain AMBROSINI
Gilles THOMAS
Christiane RAMBAUD

INSTITUT DE RECHERCHE
UR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
I. R. E. M.
70, route Léon-Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 9
Tél. 41.01.40 poste 32-10/ 41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

° 17 Novembre 1982

SOMMAIRE

Dépôt légal 2e trimestre

les ordigosses (1)

Ils vendent leur vélo
Et achètent une bécane

Ils utilisent des mots
Que vous ne comprenez pas
Ils génèrent ils itèrent
Ils vous parlent de piles
De récursivité
De programme qui se plante

Quand elles parlent de boucles
Ne vous y trompez pas
Ce sont celles attention
De leurs itérations

Ils planchent en L.S.E.
Ils ont appris BASIC
Ils pratiquent PASCAL
Ils sont prêts pour la suite

Ils sauvent leur programme
Sous le nom de TOTO
Ils savent interroger
Les banques
De données

Ils programment sans GO TO
Ils s'en vont
Sans programme
Seuls
Au rythme du Walkman

Ils font beaucoup de sport
Mais il est cérébral

Ils pratiquent la danse
Elle est algorithmique

Il peut passer des heures
Devant sa console
Seul
Allons, consolez-vous
Il ne fait pas de bruit

Elle possède une tortue
C'est celle de LOGO

(1) In English : Microkids.

Seul devant la télé
Il dessine sur l'écran
Comme vous sur du papier

Seul devant sa console
Seule avec son Walkman
Seul avec sa télé
Seule
Seul

Le découvriront-ils
Un jour
L'Amour

Et nous
Lorsqu'enfin nous aurons
Tous maîtrisé la bête
Quand nous l'aurons placée
Dans la boîte à outils
Pédagogiques

Lorsqu'enfin nous saurons
Utiliser l'objet
Comme les autres objets
Didactiques

Peut-être faudra-t-il
Leur enseigner alors

Le chant d'une cigale
Et l'odeur d'une fleur

Les couleurs de l'automne
Et le souffle du vent

Les bruits de la forêt
The sound of silence

Un rayon de soleil
Un vol d'oiseau
Un sourire d'enfant
Tiens
Un raton laveur

Gilles Thomas

DERNIERES PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. D'AIX-MARSEILLE

- Calcul des Probabilités et Arithmétique (Indépendance et multiplicativité restreinte) - octobre 1978 - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 32 pages - Prix : 5 F.

- Analyse I - décembre 1978 - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 174 pages - Prix : 10 F.

- Bulletin "Information Mathématique" n° 16 - novembre 1981 -

- *Mathématiques, Langage, Enseignement : la réforme des années soixante* (Y. CHEVALLARD) -

- Publication du groupe L.E.P. :
  Correspondance Lycées Professionnels n° 4 (décembre 1981)
  (H. CAPELL, M. et M. FARAMIA, A. ROLLAND)
  A propos du choix d'un manuel de mathématiques en 4ème préparatoire.

- Publications du groupe de recherche sur l'enseignement de la Géométrie (Prix du fascicule : 4 F) :

  A - Sur l'enseignement de la géométrie au Lycée
  (J. MARION et J-L OVAERT) - décembre 1980

  B - Sur l'enseignement de la géométrie en classe de seconde indifférenciée - (J. MARION et J-L OVAERT) - juin 1981

  C - Consolidation et approfondissement des acquis du 1er cycle
  Géométrie des configurations planes, outil vectoriel et outil numérique - (R. AMALBERTI, J-C BENIAMINO, A. CASTELLI, J-P CLOU, J. MARION, J-L OVAERT, D. PROUDHON, J-M VERNET) - septembre 1981

  D - Barycentres et convexité
  (J-P ARNAL, J. MARION, J-L OVAERT, D. PROUDHON, J-M VERNET) - novembre 1981

  E - Translations, homothéties, symétries orthogonales
  (R. AMALBERTI, J-C BENIAMINO, A. CASTELLI, J-P CLOU, J. MARION, J-L OVAERT, D. PROUDHON, J-M VERNET)
  Avril 1981

  F - Géométrie euclidienne du plan en classe de seconde
  (J. MARION, J-L OVAERT) - Janvier 1982

  ★ - Les Problèmes de recherche de configurations astreintes à des conditions extrémales de mesures
  (R. AMALBERTI, J-P ARNAL, J-C BENIAMINO, J-P CLOU, J. MARION, J-L OVAERT, D. PROUDHON, J-M VERNET)
  Juin 1982

PUBLICATIONS INTER-IREM

Bulletins

n° 18	Histoire des Mathématiques et Epistémologie 66 pages - Prix : 7 F
n° 19	Anthologie de travaux IREM pour le 1er cycle 64 pages - Prix : 9 F
n° 20	Enseignement de l'analyse 69 pages - Prix : 10 F
n° 21	Rétro-projecteur 80 pages - Prix : 10 F

Brochures

n° 1	Thèmes en Seconde 237 pages - Prix : 30 F
n° 2	Technologie et Mathématiques en F 261 pages - Prix : 30 F

Un exemplaire du Bulletin Inter-IREM, numéro spécial de juin 1981 intitulé "Thèmes pour la classe de seconde", a été adressé, par les soins de l'IREM, à tous les lycées de l'Académie afin d'être consulté au C. D. I. de l'établissement.

Quelques exemplaires sont encore disponibles à l'IREM.

BULLETIN DE COMMANDE

NOM.................................. Prénom....................

ETABLISSEMENT

Intitulé exact..

....

COMMANDE LES OUVRAGES SUIVANTS :

TITRE	Nombre d'exemplaires		PRIX		
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
....	....	X	....	=	....
			TOTAL		....

Le règlement en liquide peut être effectué sur place au secrétariat de l'IREM (Mme LEON).

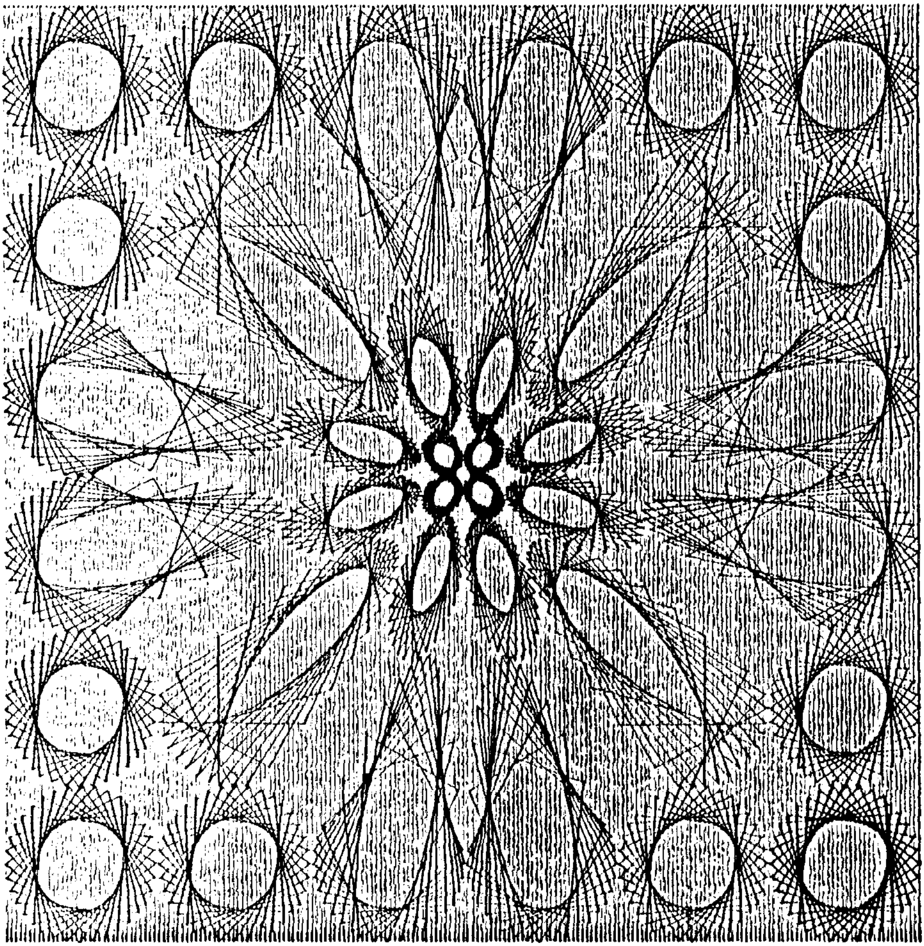
LE REGLEMENT PAR CHEQUE POSTAL OU BANCAIRE DOIT ETRE ADRESSE A L'IREM ET LIBELLE A L'ORDRE DE :

M. l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II

Ci-joint chèque bancaire
chèque postal
de ....F

Date : .... *Signature :*

N. B. Dans la mesure du possible groupez vos commandes.



INFOR MATION

A.P.M.E.P.

Régionale d' AIX-MARSEILLE

CALENDRIER des ACTIVITES

du 1er TRIMESTRE 1982-83

Mercredi 17 novembre "Minimum des notions à acquérir en classe de seconde dans la perspective des programmes de première"

par un groupe de collègues

Mercredi 8 décembre "A propos de programmation"

par Marc BERGMAN (directeur de l'I.R.E.M.)

Les réunions ont lieu au lycée St Charles, Marseille en salle 53, à 14 h 45.

pour tout renseignement concernant l'A.P.M.E.P., régionale d'AIX-MARS
contacter :

Pierre NOÉ, 49, rue Daumier, 13008 Marseille (Marseille 28.94.82).

INFORMATION

A.P.M.E.P.

Régionale d' AIX-MARSEILLE

La Régionale A.P.M.E.P. d'AIX-MARSEILLE est heureuse de vous faire part de la naissance de

la Section Départementale du VAUCLUSE

Les collègues intéressés par les travaux de cette Départementale peuvent contacter, pour toute information, Jean-François CANET, lycée Mistral, AVIGNON, tél. personnel :

(90) 25.06.25

CALENDRIER des ACTIVITES du 1er Trimestre 1982-83

Groupe de travail : Initiation à l'Informatique

réunions au lycée F. Mistral	Mercredi 13 octobre
Avignon, 14 h 30	Mercredi 3 novembre
	Mercredi 17 novembre

Groupe de travail : liaison 3ème - 2nde.

réunions au lycée de l'Arc	Mercredi 20 octobre
Orange, 14 h 30	Mercredi 24 novembre

Groupe de travail : Nouveau programme de 1ère.

réunions au lycée Th. Aubanel	Mercredi 20 octobre
Avignon, 15 h	Mercredi 24 novembre
	Mercredi 15 décembre

Une réunion générale de la Départementale est prévue le 5 janvier à 14 h 30 au lycée Th. Aubanel.

Un texte de

Bernard BOLZANO (1781-1848)

PREFACE DU MEMOIRE SUR LE THEOREME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE

Présenté par Robert ROLLAND

Bernard Bolzano (1781-1848) était professeur de théologie à l'Université de Prague. Son oeuvre mathématique est d'un très grand intérêt ; malheureusement elle est restée pratiquement ignorée jusqu'à ce que Hankel (1839-1873) la redécouvre en 1870. De plus les grands mathématiciens de l'époque comme Cauchy (1789-1857) ou Weierstrass (1815-1897) ne donnent jamais de références ; il est donc difficile de dire s'ils ont été influencés ou non par les écrits de Bolzano.

L'extrait qui suit est la préface d'un article de 1817 dans une traduction française donnée par [1]. Le lecteur pourra d'ailleurs se reporter à [1] pour avoir le texte complet de l'article en question.

Dans cette préface, Bolzano explique sa position sur les fondements des mathématiques et réfute les démonstrations, généralement données à cette époque, du théorème des valeurs intermédiaires. Habituellement on admet que l'introduction de la rigueur en mathématiques date du XIXe siècle et notamment des travaux de Bolzano, Cauchy, Abel ; les choses ne sont sans doute pas aussi simples que cela et très certainement d'autres mathématiciens avant eux au XVIIIe siècle ont eu des soucis de rigueur (cf. [2]). Néanmoins compte tenu de l'avancement de l'analyse, c'est au XIXe siècle que la question s'est posée de manière aiguë ainsi qu'on peut le voir dans ce texte, ou encore dans certains écrits d'Abel ou de Cauchy.

Du point de vue des concepts, on remarquera l'introduction (avant Cauchy) de la notion actuelle de continuité. Pour la démonstration du théorème, Bolzano indique explicitement qu'il utilise ce que l'on appelle le théorème de la borne supérieure. En fait dans la suite du texte; il introduit pour justifier ce théorème de la borne supérieure ce que nous appelons maintenant le critère de Cauchy ; à ce stade il manque évidemment une théorie rigoureuse des nombres réels pour que la démonstration soit vraiment sans faille.

[1] Revue d'Histoire des Sciences. T XVII 1964.
[2] Philosophie et calcul de l'Infini. Houzel, Ovaert, Raynaud, Sansuc (F. Maspero) (texte sur Lagrange).

DEMONSTRATION PUREMENT ANALYTIQUE DU THEOREME : "ENTRE DEUX VALEURS QUELCONQUES QUI DONNENT DEUX RESULTATS DE SIGNES OPPOSES SE TROUVE AU MOINS UNE RACINE REELLE DE L'EQUATION"

par Bernard BOLZANO

Prêtre séculier, Docteur de Philosophie
Professeur Royal et Impérial de la Science et de la Religion
et Membre titulaire de la Société Royale des Sciences à PRAGUE

[1817]

PREFACE

Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est inconnue. L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation. Voici l'autre : toute fonction algébrique rationnelle entière d'une grandeur variable peut être décomposée en facteurs réels du premier ou du second degré. – Après plusieurs tentatives infructueuses dues à D'ALEMBERT, EULER, de FONCENEX, LAGRANGE, LAPLACE, KLÜGEL et d'autres, l'année dernière, M. GAUSS nous a enfin fourni quelques démonstrations du second théorème qui ne laissent guère à désirer quelque chose de plus. Déjà en 1799, ce savant éminent nous a offert, pour ce théorème une démonstration (*) qui cependant, comme il l'a reconnu lui-même, contenait une lacune en fondant une vérité purement analytique sur une considération géométrique. Mais cette erreur est absente de ses deux démonstrations les plus récentes (**), parce que les fonctions trigonométriques qui figurent dans la deuxième peuvent et doivent être conçues dans un sens purement analytique.

(*) Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Helmstadii, In-4°, 1799.

(**) Demonstratio nova altera, etc, et Demonstratio nova tertia ; les deux de 1816.

Le premier théorème que nous avons mentionné ci-dessus ne fait pas précisément partie des théorèmes qui se sont trouvés jusqu'à présent au premier plan des réflexions des savants. Nous trouvons cependant de temps en temps que des mathématiciens d'une grande réputation se sont penchés sur ce théorème et ont essayé déjà des méthodes différentes pour le démontrer. Celui qui veut se convaincre de cela n'a qu'à comparer les exposés divers qu'en ont donnés par exemple KÄSTNER (*), CLAIRAULT (**), LACROIX (+), METTERNICH (++), KLÜGEL (+++), LAGRANGE (§), ROSLING (§§), et plusieurs autres.

Lorsqu'on examine de plus près leurs méthodes de démonstration, il apparaît très vite qu'aucune ne peut être considérée comme suffisante.

I) *Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur* une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement), doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir à la géométrie. N'a-t-on pas, depuis longtemps, senti et reconnu l'incongruité d'une pareille μεταβασις εις αλλο γενος ?

(*) Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen ["Eléments de l'Analyse des grandeurs finies"], 3e éd., § 316.

(**) Elémens d'Algèbre, 5e éd. Supplémens, chap. I, n° 16.

(+) Elémens d'Algèbre, 7e éd.

(++) Dans sa traduction de l'oeuvre précédente de LACROIX, Mainz, 1811, § 211.

(+++) Dans son Mathematisches Wörterbuch, t. II, p. 447 sq.

(§) *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris, 1808.

(§§) Grundlehren von den Formen, Differenzen, Differentialien und Integralien der Funktionen ["Eléments de la théorie des formes, des différences, des différentielles et des intégrales des fonctions"], 1ère Partie, § 40

Ne l'a-t-on pas, déjà évité dans cent autres cas, où l'on connaissait le moyen de le faire, et n'a-t-on pas considéré cette élimination comme un mérite ? (*) Si l'on insiste pour être conséquent ailleurs, ne doit-on pas s'efforcer de l'être ici aussi ? – En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de "fabrication d'évidences" (Gewissmachungen), mais doivent être bien plutôt des fondements (Begründungen) ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace. Conformément à cette opinion, une telle démonstration géométrique est un vrai cercle vicieux dans la plupart des cas et en particulier dans le cas présent, comme on comprend facilement. Même si la vérité géométrique à laquelle on se réfère ici est (comme nous l'avons déjà dit) évidente au plus haut point et n'a donc point besoin de démonstration en tant que "fabrication d'évidence", elle n'a pourtant pas moins besoin d'un fondement. Les concepts dont elle est composée sont visiblement si complexes qu'on ne peut hésiter un instant à dire qu'elle n'appartient nullement à ces vérités simples dites principes ou vérités primitives, parce que, précisément, ces vérités ne sont que les fondements (Grund) des autres et ne sont pas elles-mêmes des conséquences ; il s'agit plutôt ici d'un théorème ou d'une vérité déduite, c'est-à-dire d'une vérité qui a son fondement dans certaines autres et qui doit donc être démontrée aussi dans la science par une déduction à partir des principes (**). Réfléchisse qui veut sur le fondement objectif du fait que, dans les conditions mentionnées ci-dessus, une ligne coupe l'axe des abscisses. Comme tout le monde saura certainement bientôt, ce fondement se trouve dans cette vérité générale suivant laquelle toute fonction continue de x qui est positive pour une valeur de x, négative pour une autre, doit être nulle pour une certaine valeur intermédiaire de x. Et ceci est précisément la vérité qui doit être prouvée ici. Ce serait donc une grande erreur que d'oser déduire

(*) Un exemple est donné dans les mémoires de M. le P^r GAUSS mentionnés ci-dessus.

(**) Que l'on compare, concernant tout cela, mes Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik ["Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques"], 1^er fascicule, Prague, 1810, section 41, §§ 2, 10, 20, 21, où on trouve le développement des concepts logiques que je suppose ici connus.

cette vérité de la précédente (comme cela se produit dans la méthode de démonstration que nous sommes en train d'examiner) : inversement, il faut dériver la première de la seconde, si l'on veut exposer les vérités contenues dans la science de la manière même dont elles sont liées les unes aux autres selon leur connexion objective.

II) Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de continuité d'une fonction en y faisant intervenir les concepts du temps et du mouvement. "Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, disent-ils, varient suivant la loi de continuité, et si pour $x = \alpha$, $f(x) < \varphi(\alpha)$, mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \varphi(\beta)$: alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u) = \varphi(u)$. Car si l'on imagine que la grandeur variable x dans ces deux fonctions prend successivement toutes les valeurs intermédiaires entre α et β et prend au même instant toujours la même valeur à gauche et à droite : alors au début de cette variation continue de la valeur de x, on a $f(x) < \varphi(x)$ et à la fin $f(x) > \varphi(x)$. Mais comme les deux fonctions doivent d'abord, grâce à leur continuité, parcourir toutes les valeurs intermédiaires avant de pouvoir atteindre une valeur supérieure x, de même, il faut qu'il y ait un certain instant intermédiaire pour lequel les deux valeurs sont égales". On rend sensible ceci encore par l'exemple du mouvement de deux corps dont l'un était au début derrière l'autre, l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui.

Les concepts de temps et de mouvement (et celui-ci encore plus) sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'espace, cela ne peut être mis en doute par personne. Toutefois, nous n'aurions rien à objecter si ces deux concepts n'y étaient introduits qu'en tant qu'éclaircissement. Car nous ne sommes en aucune façon partisan d'un purisme tel qu'il exige, pour maintenir la science pure de tout élément étranger, de refuser dans l'exposé de la science toute expression empruntée à un domaine étranger, ne serait-ce qu'avec une signification figurée et dans l'intention de désigner ainsi une chose d'une façon plus brève et plus claire que ce n'est possible par une description conçue uniquement dans des termes particuliers, ne serait-ce même que pour éviter la cacophonie de la répétition continuelle des mêmes mots ou pour rappeler un exemple qui peut servir à confirmer la thèse simplement par un nom donné à la chose. Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les exemples et les applications pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations ; on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles ; la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression.

Selon cette opinion, on pourrait donc à la rigueur excuser l'intervention du concept de temps dans la démonstration ci-dessus, parce que sur les expressions qui en sont dérivées on ne fonde aucune déduction qui ne serait pas valable, même sans ce concept de temps. Mais la représentation sensible par le mouvement d'un corps donnée dans le dernier exemple peut être considérée aucunement comme quelque chose de plus qu'un simple exemple qui ne démontre pas le théorème lui-même, mais qui plutôt ne doit être démontré que par celui-ci.

a) Tenons-nous donc, en omettant cet exemple, seulement au reste du raisonnement. Remarquons d'abord qu'il a pour base un concept incorrect de la continuité. Car dans une explication correcte, on entend par l'expression : *une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes* (*), rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x + \omega) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra, c'est-à-dire lorsqu'on a (selon les notations que nous avons introduites dans le § 14 du "Théorème du binôme", etc., Prague, 1816) :

$$f(x + \omega) = f(x) + \Omega.$$

Or, c'est certainement une affirmation tout à fait vraie qu'une fonction continue n'atteint jamais une valeur supérieure avant d'avoir d'abord parcouru toutes les valeurs inférieures, comme on l'admet dans cette démonstration, c'est-à-dire que $f(x + n\Delta x)$ peut prendre toute valeur entre $f(x)$ et $f(x + \Delta x)$ lorsqu'on prend n arbitrairement entre 0 et 1 ; mais on ne peut pas considérer

(*) Il y a des fonctions qui varient de façon continue pour toutes les valeurs de leurs racines, par exemple $\alpha x + \beta x$. Mais il y en a aussi d'autres qui ne sont continues qu'à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines valeurs limites de leurs racines. Ainsi, $x + \sqrt{(1 - x)(2 - x)}$ n'est continue que pour toutes les valeurs de x qui sont $< + 1$ ou $> + 2$, mais non pour les valeurs situées entre $+ 1$ et $+ 2$.

cette affirmation comme l'explication du concept de continuité ; c'est plutôt un théorème sur la continuité et un théorème qui ne peut se démontrer qu'après avoir supposé le théorème même qui doit servir à sa propre démonstration. Car si M désigne une grandeur située quelque part entre $f(x)$ et $f(x + \Delta x)$, l'affirmation : il y a une valeur intermédiaire de n entre 0 et +1 pour laquelle :

$$f(x + n\Delta x) = M$$

n'est qu'un cas particulier de la vérité générale selon laquelle, lorsque :

$$f(x) < \varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x + \Delta x) > \varphi(x + \Delta x),$$

il faut qu'il y ait une certaine valeur intermédiaire $x + n\Delta x$ pour laquelle :

$$f(x + n\Delta x) = \varphi(x + n\Delta x).$$

Car l'affirmation précédente s'ensuit de cette vérité générale dans le cas particulier où la fonction $\varphi(x)$ devient une grandeur constante M.

b) Mais la démonstration que nous examinons contiendrait encore une autre erreur, même en supposant qu'on pourrait démontrer cette proposition par une autre voie. Car des inégalités :

$$f(\alpha) > \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad f(\beta) < \varphi(\beta)$$

il s'ensuivrait seulement que lorsque u est une certaine valeur intermédiaire entre α et β pour laquelle $\varphi(u) > \varphi(\alpha)$, mais $< \varphi(\beta)$, $f(x)$ deviendrait de même égale à $\varphi(u)$ avant de passer de $f(\alpha)$ en $f(\beta)$ pour un certain x situé entre α et β. Mais il ne s'ensuit pas toujours qu'il en est ainsi pour la même valeur de x qui est = u, c'est-à-dire (parce que u peut désigner n'importe quelle valeur entre α et β qui rend $\varphi(u) > \varphi(\alpha)$ et $< \varphi(\beta)$ qu'il existe une valeur intermédiaire de x entre α et β pour laquelle les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent égales.

c) L'élément trompeur de toute la démonstration ne repose entièrement que sur l'intervention du concept de temps. Car du moment qu'on l'omet, il apparaît que la démonstration n'est rien d'autre qu'une répétition en d'autres termes du théorème à démontrer. En effet, dire que la fonction $f(x)$ doit d'abord passer par l'état de l'égalité avec $\varphi(x)$, avant de passer de son état d'être plus petite à celui d'être plus grande, cela revient à dire, en omettant le concept de temps, que, parmi les valeurs prises par $f(x)$ lorsqu'on choisit pour x n'importe quelle valeur entre α et β, il y a aussi une valeur qui rend $f(x) = \varphi(x)$; ce qui est le théorème à démontrer lui-même.

III) D'autres démontrent notre théorème en le fondant sur le suivant qu'ils acceptent *soit tout à fait sans démonstration*, soit en l'appuyant sur quelques exemples empruntés à la géométrie : "Toute grandeur variable peut passer d'un état passif à un état négatif seulement en traversant l'état de n'être rien ou celui d'être infinie". Comme la valeur d'une équation ne peut devenir infiniment grande pour aucune valeur finie des racines, il faut, comme ils concluent, que ce passage se fasse à travers zéro.

a) Quand on veut, dans la proposition ci-dessus, faire abstraction de la représentation impropre d'un passage, représentation qui contient le concept d'un changement dans le temps et dans l'espace – ainsi l'expression absurde d'un état de non-être disparaît déjà d'elle-même – on obtient finalement la proposition suivante : "Si une grandeur variable qui dépend d'une autre, x, est positive pour $x = \alpha$ et négative pour $x = \beta$: alors il existe toujours une valeur de x entre α et β pour laquelle elle est nulle, ou bien il existe une valeur pour laquelle elle devient infinie". Comme tout le monde s'en rend certainement compte, une affirmation aussi complexe n'est pas une vérité primitive mais devrait être démontrée ; mais sa démonstration devrait être à peine plus facile que celle du théorème lui-même pour lequel on veut l'établir.

b) Il apparaît, en effet, en y réfléchissant de façon plus précise, qu'au fond, elle lui est même identique. Car il ne faut pas oublier que cette affirmation n'est vraie, à proprement parler, que si on l'entend dans le sens d'une grandeur qui varie seulement de façon continue. Par exemple la fonction :

$$x + \sqrt{(x - 2)(x + 1)}$$

a bien entendu pour $x = +2$ une valeur positive, pour $x = -1$ une valeur négative ; pourtant, il n'existe pas de valeur de x entre $+2$ et -1 pour laquelle cette fonction serait nulle ou infinie, parce qu'elle ne varie pas selon la loi de continuité à l'intérieur de ces bornes. Mais il faut exclure également les fonctions qui deviennent infinies pour une certaine valeur de leurs racines, si on limite l'affirmation aux seules grandeurs continues. Car une fonction telle que $\frac{a}{b - x}$ n'est pas, à proprement parler, continûment variable pour toutes les valeurs de x, mais seulement pour toutes celles qui sont > ou < b. Car pour la valeur $x = b$, elle n'a absolument aucune valeur déterminée, mais devient ce qu'on appelle infiniment grande. On ne peut donc pas dire non plus que les valeurs qu'elle prend pour $x = b + \omega$

III) D'autres démontrent notre théorème en le fondant sur le suivant qu'ils acceptent soit tout à fait sans démonstration, soit en l'appuyant sur quelques exemples empruntés à la géométrie : "Toute grandeur variable peut passer d'un état passif à un état négatif seulement en traversant l'état de n'être rien ou celui d'être infinie". Comme la valeur d'une équation ne peut devenir infiniment grande pour aucune valeur finie des racines, il faut, comme ils concluent, que ce passage se fasse à travers zéro.

a) Quand on veut, dans la proposition ci-dessus, faire abstraction de la représentation impropre d'un passage, représentation qui contient le concept d'un changement dans le temps et dans l'espace - ainsi l'expression absurde d'un état de non-être disparaît déjà d'elle-même - on obtient finalement la proposition suivante : "Si une grandeur variable qui dépend d'une autre, x, est positive pour $x = \alpha$ et négative pour $x = \beta$: alors il existe toujours une valeur de x entre α et β pour laquelle elle est nulle, ou bien il existe une valeur pour laquelle elle devient infinie". Comme tout le monde s'en rend certainement compte, une affirmation aussi complexe n'est pas une vérité primitive mais devrait être démontrée ; mais sa démonstration devrait être à peine plus facile que celle du théorème lui-même pour lequel on veut l'établir.

b) Il apparaît, en effet, en y réfléchissant de façon plus précise, qu'au fond, elle lui est même identique. Car il ne faut pas oublier que cette affirmation n'est vraie, à proprement parler, que si on l'entend dans le sens d'une grandeur qui varie seulement de façon continue. Par exemple la fonction :

$$x + \sqrt{(x - 2)(x + 1)}$$

a bien entendu pour $x = +2$ une valeur positive, pour $x = -1$ une valeur négative ; pourtant, il n'existe pas de valeur de x entre $+2$ et -1 pour laquelle cette fonction serait nulle ou infinie, parce qu'elle ne varie pas selon la loi de continuité à l'intérieur de ces bornes. Mais il faut exclure également les fonctions qui deviennent infinies pour une certaine valeur de leurs racines, si on limite l'affirmation aux seules grandeurs continues. Car une fonction telle que $\frac{a}{b - x}$ n'est pas, à proprement parler, continûment variable pour toutes les valeurs de x, mais seulement pour toutes celles qui sont $>$ ou $<$ b. Car pour la valeur $x = b$, elle n'a absolument aucune valeur déterminée, mais devient ce qu'on appelle infiniment grande. On ne peut donc pas dire non plus que les valeurs qu'elle prend pour $x = b + \omega$

encore réussi à démontrer le second sans supposer le premier. Quant aux démonstrations dont M. GAUSS a montré l'inadmissibilité déjà dans son Mémoire de 1799, il n'est pas nécessaire d'examiner si elles peuvent ou non se fonder sur notre théorème pour la raison même qu'elles sont déjà prouvées inadmissibles. La démonstration de M. LAPLACE (*) contient également ses erreurs que nous n'avons cependant pas besoin de discuter ici pour la raison même qu'elle est basée explicitement sur le théorème que nous sommes en train d'examiner. Et de même, nous n'avons pas à tenir compte non plus de la première démonstration qu'a donnée M. GAUSS, parce qu'elle s'appuie sur des considérations *géométriques*. En attendant, il serait facile de prouver que même sa démonstration suppose tacitement notre théorème, puisque les considérations géométriques que l'on y met en jeu sont tout à fait semblables à celles que nous avons mentionnées au n° 1. – Tout revient donc à la Demonstratio nova altera et tertia de M. GAUSS. La première fait expressément appel à notre théorème en supposant à la page 30 aequationem ordinis imparis certo solubilem esse ; affirmation qui n'est, comme on sait, rien d'autre qu'un corollaire facile de notre théorème. Or, il est moins évident que la Demonstratio nova tertia dépend de notre théorème. Elle se fonde, entre autres, sur le théorème suivant : si une fonction reste positive pour toutes les valeurs de la grandeur variable x qui sont situées entre α et β, alors que son intégrale prise de telle sorte qu'elle s'annule pour $x = \alpha$ a également une valeur positive lorsqu'on pose ensuite $x = \beta$. Il est vrai que dans la démonstration que nous donne M. LAGRANGE (**) pour ce théorème, on ne trouve aucune référence expresse au nôtre. Seulement, cette démonstration de LAGRANGE a également une lacune. Car elle demande de prendre la grandeur i si petite que :

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x)$$

devient :

$$< \frac{f'(x) + f'(x+i) + f'(x+2i) + \ldots + f'[x+(n-1)i]}{n}$$

(*) Dans le Journal de l'Ecole Normale, ou aussi Traité du calcul différentiel et intégral de LACROIX, t. 1, n^{os} 162, 163.

expression dans laquelle le produit $i.n$ doit rester égal à une grandeur donnée et où la désignation connue $f'(x)$ représente la première fonction dérivée de $f(x)$. Ici se pose maintenant la question de savoir s'il est possible de satisfaire à cette demande. Plus petit on prend i pour diminuer la différence :

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x),$$

plus grand on doit prendre n qui est le diviseur dans l'expression à droite de l'inégalité, si $i.n$ doit toujours rester égal à une grandeur donnée. Il est vrai que l'ensemble des termes dans le numérateur augmente également ; mais il reste encore à prouver que cette augmentation fait croître le numérateur dans la même proportion dans laquelle augmente le dénominateur. Il reste donc à voir si, par suite de la diminution de i, la valeur de toute la fraction ne diminue pas de la même façon ou encore plus rapidement que l'expression :

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} - f'(x).$$

Pour remplir cette lacune dans la démonstration, il faudra sans doute faire appel à notre *théorème présent*, parce que *nous étions obligés de nous y* référer déjà à propos de la démonstration d'un théorème apparenté au théorème ci-dessus de LAGRANGE (*), quoique beaucoup plus simple.

De telles lacunes se retrouvent donc dans toutes les démonstrations du théorème qui est énoncé dans le titre de ce mémoire connues jusqu'ici. Or, la démonstration que je présente ici au jugement des savants contient, comme je m'en flatte, non seulement une simple affirmation d'évidence (Gewissmachung), mais un fondement objectif de la vérité à démontrer ; elle est donc véritablement scientifique (**).

(*) A savoir le théorème du § 29 dans le Mémoire Der binomische Lehrsatz, etc. ["Théorème du binôme"].

(**) *Qu'on ne s'attende pas à ce que je suive déjà ici* toutes les règles que j'ai moi-même établies pour la construction d'un exposé véritablement scientifique dans les Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik ["Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques"] (II^{e} Partie). Je suis toujours entièrement persuadé de la justesse de ces règles ; cependant, il n'est pas possible de les suivre exactement que dans le cas où l'on commence l'exposé d'une science à partir de ses premières propositions et concepts, mais *non là où l'on ne traite que* quelques théories d'une science isolée du contexte de l'ensemble, comme c'est le cas ici. Il va de soi qu'il faut également rapporter cette remarque au mémoire sur le théorème du binôme.

Voici un bref aperçu de la démarche de la démonstration.

La vérité à démontrer : Il y a toujours au moins une racine réelle entre deux valeurs α et β qui correspondent à des résultats de signes opposés, repose manifestement sur une autre, plus générale : si deux fonctions continues de x, $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont la propriété que pour $x = \alpha$, on ait $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \varphi(\beta)$, alors il doit toujours exister une certaine valeur intermédiaire entre α et β pour laquelle $f(x) = \varphi(x)$. Seulement, si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$, en vertu de la loi de continuité on a également :

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i),$$

lorsqu'on prend i suffisamment petit. La propriété d'être plus petite appartient donc à la fonction de i représentée par l'expression $f(\alpha + i)$ pour toutes les valeurs de i qui sont plus petites qu'une certaine valeur. Toutefois, cette propriété ne lui appartient pas pour toutes les valeurs de i sans restriction ; en particulier, elle ne lui appartient pas pour un i qui serait $= \beta - \alpha$, parce que $f(\beta)$ est déjà $> \varphi(\beta)$. Or, on a le théorème suivant : aussi souvent qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs d'une grandeur variable i qui sont plus petites qu'une valeur donnée, sans appartenir pour autant à toutes les valeurs en général, il existe toujours une certaine valeur maximale u pour laquelle on peut afffirmer que tous les i qui sont $< u$, ont la propriété M. On ne peut pas avoir, pour cette valeur même de i :

$$f(\alpha + u) < \varphi(\alpha + u),$$

car autrement, suivant la loi de continuité, on aurait également :

$$f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega),$$

en prenant ω suffisamment petit. Et il ne serait pas vrai, par conséquent, que u soit la plus grande des valeurs pour lesquelles on a le droit d'affirmer que toutes les valeurs de i inférieures à u rendent :

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i) ;$$

au contraire, $u + \omega$ serait une valeur encore plus grande pour laquelle la nême chose est valable. Mais on peut encore moins avoir :

$$f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u) ;$$

sinon, on devrait avoir également :

$$f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha + u - \omega)$$

en prenant ω suffisamment petit, ; et il ne serait pas vrai par conséquent que l'on ait :

$$f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$$

pour toutes les valeurs de i qui sont $<$ u. Il faut donc aussi que :

$$f(\alpha + u) \text{ soit } = \varphi(\alpha + u),$$

c'est-à-dire qu'il existe une valeur intermédiaire de x entre α et β, à savoir α + u, pour laquelle les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont égales l'une à l'autre. Il ne s'agit maintenant que de démontrer le théorème que nous venons de mentionner. Nous le prouverons en montrant que les valeurs de i dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, et celles dont on ne peut plus l'affirmer, peuvent se rapprocher les unes des autres d'aussi près que l'on veut : d'où il s'ensuit pour quiconque a une idée correcte de la grandeur que la notion d'un i qui est le plus grand de ceux dont on peut dire que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, est la notion d'une grandeur réelle, c'est-à-dire existante (wirklich).

Qu'il me soit permis, avant de clore cette préface, de faire une confession et d'exprimer une demande ne se rapportant pas seulement à mon écrit présent, mais à tout ce que j'ai écrit jusqu'à maintenant, et, si Dieu le veut, aussi à mes écrits futurs.

Même en s'appuyant sur le peu que j'ai publié jusqu'à présent, mais surtout sur le précis d'une nouvelle logique que donne le premier fascicule des "Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques" dans sa deu- ... "Sur la méthode mathématique", un lecteur attenti pourrait conclure que je cultive certaines idées qui doivent avoir pour conséquence une transformation totale de toutes les sciences à priori pures, si toutefois on ne les considère pas tout à fait incorrectes. J'ai déjà examiné la partie la plus grande et la plus importante de ces idées durant une période si longue et avec tant d'impartialité qu'il n'est peut-être plus trop tôt pour oser en parler maintenant un peu plus fort. Or, on peut faire connaître les opinions qui embrassent le domaine entier d'une ou de plusieurs sciences d'une double manière, en les exposant soit d'un seul coup et dans leur enchaînement, soit aussi par fragments et dans des mémoires particuliers. La première manière fut jusqu'à présent de loin la plus habituelle, et c'est sans doute aussi le chemin où doit s'engager quiconque ne vise qu'à atteindre dans le temps le plus court une grande réputation auprès de la partie savante de ses contemporains. Cependant, le deuxième procédé est, à mon avis, beaucoup plus avantageux pour le perfectionnement des sciences, et cela pour les raisons suivantes :

Premièrement, parce que de cette façon, l'auteur de nouvelles conceptions court beaucoup moins le danger de précipitation, car l'exposé par fragments de ses idées lui permet de reporter à un temps ultérieur son explication des points à propos desquels au début il éprouve lui-même encore des doutes et aussi de profiter des critiques adressées à ce qu'il a déjà exposé et même de corriger plusieurs choses qu'il n'a pas expliquées correctement.

Deuxièmement, avec un développement de ses idées qui n'avance ainsi que peu à peu, on peut également s'attendre à un examen beaucoup plus rigoureux de ces dernières de la part de ses lecteurs. Car celui qui apparaît devant le public avec une doctrine déjà achevée, offre d'un coup à l'attention de notre esprit un trop grand nombre de nouvelles affirmations pour qu'on puisse espérer que nous examinions chacune d'elles avec la même précision que si on nous les avait présentées séparément. Celui qui livre un système achevé montre , ou doit montrer au moins, comment on peut déduire les vérités que reconnaît le sens commun avec une certitude indéniable aussi à partir de ses propres prémisses qui diffèrent de celles des autres? Mais c'est précisément cette circonstance qui nous réconcilie avec ces prémisses-là et qui fait que nous accordons à l'auteur ces prémisses avec beaucoup moins d'hésitation que s'il les avait établies une à une et que s'il nous avait laissé dans le doute à propos de savoir si et dans quelle mesure elles sont compatibles avec tout le reste qui est pour nous vérité. Et finalement, on ne peut pas nier que déjà le simple aspect d'un livre volumineux qui promet un système complet de telle ou telle science nous inspire une sorte de respect avant que nous l'ayons lu. Si maintenant, en lisant, nous découvrons une certaine connexion dans les affirmations de ce système ; si l'édifice du savoir humain dont on nous présente l'esquisse a une forme qui plaît ; si tout est disposé selon la mesure, le nombre et la symétrie : notre jugement sera influencé ; nous-mêmes nous commençons à souhaiter qu'il existe enfin ce système, le seul à être juste et que nous avons déjà cherché depuis si longtemps ! Et la moindre conséquence, c'est que nous nous imaginons que nous n'avons, à cause de la connexion remarquée, tout au plus, qu'à choisir entre deux choses : soit accepter le tout, soit rejeter le tout ; alors qu'il ne devrait en réalité se produire ni l'un ni l'autre !

Telles étaient à peu près les raisons pour lesquelles je me suis décidé, déjà en 1804, à ne commencer, dans aucune science, par la publication d'un traité complet ; mais à ne faire connaître d'abord, dans chacune, mes concepts, différents des concepts habituels, que dans des mémoires particuliers. Et c'est seulement lorsque, après de multiples corrections, ces mémoires auront trouvé une approbation auprès d'une partie du public que nous devrons penser à l'édification de tout un système si toutefois la mort ne nous oblige pas à laisser ce dernier travail aux autres.

J'ai commencé ma carrière d'auteur avec un mémoire concernant les mathématiques et j'ai exposé, sous le titre : Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie ("Considérations sur certains objets de la géométrie élémentaire") (Prague, chez C. Barth, 1804), avec plusieurs autres idées, une nouvelle théorie des parallèles (*). Quelques années plus tard, j'ai pris la décision de publier, par fascicules, l'ensemble

(*) Cette théorie devrait mériter l'attention pour deux raisons au moins : premièrement, parce qu'elle est la seule dans laquelle on ne pouvait trouver aucune erreur manifeste; ensuite, parce que le plus grand géomètre français actuellement vivant, LEGENDRE, est tombé sur exactement la même idée concernant ce sujet dans la dixième édition de ses Elémens de Géométrie, Paris, 1813, certainement tout à fait indépendamment de moi.

de mes idées touchant le domaine des mathématiques sous le titre : "Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques". Seulement, déjà le premier de ces fascicules (Prague, chez O. Widtmann, 1810), malgré toute l'importance de son contenu, a eu la malchance de ne pas être annoncé du tout dans certaines revues savantes et d'être annoncé et critiqué seulement de manière très superficielle dans d'autres. Ceci m'a obligé à reporter la suite de ces contributions à une époque ultérieure et à essayer d'abord, en attendant, de voir si je ne parviendrais pas à me faire un peu mieux connaître au monde savant par la publication de quelques mémoires qui seraient davantage susceptibles par leur titre d'éveiller l'attention. A cette fin, a paru en 1816 le "Théorème du binôme", etc., ci-dessus (Prague, chez Enders). Le présent mémoire doit également, comme je le souhaite, servir à ce but, et sa publication est, de plus, rendue nécessaire par le fait que je me suis appuyé, dans le mémoire antérieur, sur le théorème démontré dans le mémoire que voici. Plusieurs autres mémoires qui sont pareillement achevés et prêts pour l'impression, par exemple un qui doit porter le titre : Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes, und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst ("Les trois problèmes de la rectification des courbes, du calcul des aires et du calcul des volumes, résolus sans intervention de l'infiniment petit, de l'hypothèse d'Archimède et de toute autre hypothèse non rigoureusement démontrée") attendent encore leur éditeur.

Pour avoir la possibilité de poursuivre plus loin ce chemin qui me paraît le plus avantageux, la seule faveur que je dois solliciter auprès du public consiste dans ceci : de ne pas, à cause de ses petites dimensions, laisser passer ce mémoire particulier, mais de l'examiner au contraire avec toute la rigueur possible et aussi de ne pas hésiter à rendre publics les résultats de cet examen pour qu'on puisse expliquer plus distinctement ce qui ne l'est peut-être pas suffisamment, pour qu'on puisse laisser tomber ce qui est tout à fait incorrect, mais surtout pour que ce qui est vrai et juste parvienne, le plus tôt sera le mieux, à une acceptation générale.

INFORMATION

Pour mémoire

Les groupes de recherche de l'I. R. E. M. pour l'année 1982-83 ont établi leur emploi du temps comme suit :

- Groupe de recherche "Algorithme"
  le jeudi à 14 h au lycée Victor Hugo, 3, bd. Gustave-Desplaces
  13003 Marseille.

- Groupe de recherche "Analyse"
  le mercredi à 14 h 30 dans les locaux de l'IREM.

- Groupe de recherche "Didactique des Mathématiques"
  le vendredi à 14 h 30 dans les locaux de l'IREM.

- Groupe de recherche "Géométrie"
  le jeudi à 15 h dans les locaux de l'IREM.

- Groupe de recherche "Informatique"
  le jeudi à 14 h 15 dans les locaux de l'IREM.

- Groupe de recherche "L.E.P."
  le vendredi à 14 h dans les locaux de l'IREM.

- Groupe de recherche "Initiation à la programmation" (2 niveaux)
  * niveau I pour débutants
    le mardi de 14 h à 17 h au L.E.P. Sévigné
    6, rue Jean-Macé, 05000 Gap.
  * niveau II pour utilisateurs avancés (BASIC et LSE)
    le mercredi de 14 h à 17 h au lycée D. Villars
    Place de Verdun, 05000 Gap.

A partir du mois de février 1983 :

- Groupe de recherche "Informatique et Table traçante"
  le mercredi de 14 h à 17 h au lycée D. Villars, place de Verdun, 05000 Gap.

A PROPOS DES LYCEES ET COLLEGES ...

Les deux articles ci-après ont été élaborés pour la journée de fin d'année des animateurs de l'I. R. E. M. d'Aix-Marseille du 17 juin 1982.

Le premier texte "ECHEC DU COLLEGE, ECHEC AU COLLEGE" de Yves Chevallard relate les difficultés d'un collège maintes et maintes fois remanié, "collège qui a dû supporter le choc de la démocratisation de l'accès à l'éducation dans une société non démocratique, championne des inégalités".

Le deuxième texte "PROBLEMES POSES PAR L'ACCES AUX DIFFERENTS CURSUS DES 2èmes CYCLES ET PAR LA DIVERSIFICATION DES FILIERES AU SEIN DES CURSUS" de Jean Marion, fait l'inventaire des problèmes rencontrés au cours de l'orientation, dénonce un certain nombre de blocages, dégage les objectifs à réaliser, précise la contribution de l'I. R. E. M. à ce niveau.

Dans les cas précis de la seconde et des L.E.P. il propose des mesures à court et moyen termes pour réaliser les objectifs désirés.

ECHEC DU COLLEGE, ECHEC AU COLLEGE

par Yves CHEVALLARD (1)

1. Depuis la mise en place du "collège unique" par la réforme Haby (loi du 11 juillet 1975), le collège est progressivement apparu comme le révélateur et le symptôme le plus évident, au sein du système éducatif dans son entier, des problèmes de la société française. L'hétérogénéité, que l'on pouvait d'emblée pronostiquer et dont les plus irréalistes partisans de certains aspects de la réforme ont dû finir par reconnaître le caractère invalidant vis-à-vis de tout projet d'enseignement, ne fait à cet égard que répondre, en termes proprement scolaires, aux multiples différenciations d'une société de classes. Plus que l'école primaire, où divers mécanismes (dont le phénomène massivement observable des redoublements) tendent à masquer cette hétérogénéité dans le même temps qu'ils l'accroissent, c'est le collège qui a dû supporter le choc de la démocratisation de l'accès à l'éducation dans une société non démocratique championne des inégalités. Doit-on dès lors s'étonner si la situation ainsi créée a pu être diagnostiquée comme un échec du collège et si, au fil des années, pareil diagnostic s'est vu, jour après jour, confirmé, jusqu'à la mise en oeuvre, à peine amorcée, d'un ensemble de moyens d'analyse et d'action adéquat au problème historique que nous devons aujourd'hui affronter ?

2. Cette situation objective, enracinée dans l'évolution sociale, a été reçue par nombre d'agents et de responsables du système éducatif comme une mise en accusation du collège. Le symptôme est-il cause de la maladie, le miroir doit-il être brisé parce que son témoignage nous désespère ? Sans doute ces métaphores ne suffisent-elles pas à seulement poser le problème. Elles indiquent tout de même que la dualité, parfois douloureusement vécue par certains d'entre nous, entre système éducatif et société ne saurait se ramener à la simple opposition du bien et du mal, de l'authentique (le "vécu") et de l'artificiel, du plein et du vide (l'ennui scolaire...). Elles marquent aussi une nécessaire interrogation par rapport à toute espérance étroitement pédagogiste. Elles dénoncent enfin une tentation de pureté, le désir impensé de rétablir l'institution éducative dans une conscience heureuse, dans une

(1) Equipe de recherche en didactique des mathématiques de l'IREM d'Aix-Marseille

sérénité où les rôles seraient inversés, où un bon collège enfin restauré pourrait renvoyer le société à ses incertitudes et à ses manques.

3. Il apparaît hors de doute toutefois qu'il est devenu aujourd'hui nécessaire de changer le collège, en tant que lieu d'éducation totale, en tant que milieu de vie, pour y promouvoir un genre de vie ressenti - pour dire nettement les choses - comme compétitif avec les autres milieux d'activité et d'intérêt (intellectuel, culturel et émotionnel tout à la fois) qui sollicitent l'enfant et le jeune adolescent. Les aménagements déjà apportés ici et là, qu'ils soient sauvages ou qu'ils s'inscrivent dans les cadres timidement offerts aux actions nécessaires (10 %, P. ACT. E. et P. A. E. par exemple), montrent des voies possibles en même temps que les embûches auxquelles on s'expose lorsqu'on tente d'y frayer les chemins d'une rénovation. La commission Legrand, en capitalisant l'expérience difficilement acquise sur le terrain, en confrontant les points de vue des praticiens, en approfondissant la réflexion, en systématisant en un corps de doctrine dénué de dogmatisme, en proposant une institutionnalisation qui nous délivre, à terme, d'un bénévolat héroïque mais psychologiquement dévastateur (parce qu'il accentue les clivages et accroît les tensions au sein de la communauté enseignante), désigne sans doute, à cet égard, de larges et solides perspectives.

4. Pourtant deux remarques doivent être avancées, que le chercheur, dépassant le plan strict de son activité de recherche sur le système éducatif pour prendre sa part au débat démocratique, ne doit pas se lasser de répéter. La première est que la vision prévalente du système d'enseignement - celle que partagent ses agents comme les responsables et les décideurs politiques - est une vision nettement préscientifique et pour cela, archaïque. Nous n'imaginons pas que la bonne volonté et l'argent suffisent pour envoyer une fusée sur la lune ; nous savons qu'il y faut aussi - et surtout - une science et une technologie du système sur lequel nous prétendons agir. Or, tout à rebours, quand on en vient aux problèmes d'éducation (en contraste avec les problèmes de l'espace, mais aussi de la santé, du développement industriel, etc.), ces exigences qui ailleurs s'imposent à nous avec la dernière évidence, ici sont totalement oubliées. Il semble même que la nécessité d'une science et d'une technologie spécifiques du système éducatif soit d'autant mieux niée que le système en question est plus complexe ! Dans le champ éducatif, toute action se développe, en conséquence, les objectifs ayant été fixés, et faute d'une

logistique scientifique et technique adéquate, par l'appel au zèle de chacun et à la bonne volonté de tous, sous la contrainte éventuelle (quoiqu'incertaine en ses effets) de l'obligation administrative. Si le principe de plaisir triomphe un instant du principe de réalité, parce que nul savoir positif et polémique ne vient borner le champ de nos utopies réformatrices, on ne sait que trop, d'expérience, que la réalité l'emporte tyranniquement sur nos entreprises les mieux déterminées.

5. La seconde remarque que l'on se doit de toujours rappeler est que si l'aménagement du milieu scolaire - visant à en faire, pour l'élève, un cadre de vie acceptable, voire attractif - est bien une nécessité de notre temps, il n'est en aucune façon suffisant. La situation objective d'hétérogénéité fait ici resurgir, avec empressement, le discours pathétique sur le vécu des élèves, sur leurs besoins propres, qu'il faudrait satisfaire, sur la richesse et la diversité de leur expérience du monde qu'il s'agirait de reconnaître en leur éminente dignité et leur incontournable valeur comme point de départ obligé de toute action éducative. Or ce discours, aussi généreux soit-il, enveloppe la virtualité d'une stratégie dont quelques exemples historiques (en particulier celui de la <u>New Education</u> américaine des années 1910-1960) nous ont montré, par delà certains effets secondaires brièvement euphorisants, les effets nettement déstructurants sur l'entreprise essentielle que nous nommions autrefois <u>l'instruction publique</u>. En cédant à la tentation de chercher à résoudre le problème d'hétérogénéité par l'évanouissement des contenus "académiques", celle-ci nous fait tomber dans le piège dont tout <u>aggiornamento</u> doit se garder : la tentation de la banalisation de l'institution que l'on prétend ouvrir au "monde". L'idéologie impavide du Life adjustment, de "l'ouverture de l'école sur la vie", surgit d'abord comme une réponse mécaniquement déterminée, et peu réfléchie, non à <u>la</u> vie (le singulier est ici singulièrement inconvenant) mais à la société, c'est-à-dire aux conditions sociales de fonctionnement de l'institution.

6. Dans le débat actuel, il semble toutefois que, à cet égard, soit écarté le danger d'une vision et d'une visée unilatérales dans le changement à promouvoir. Les auteurs d'un rapport élaboré dans le cadre des travaux de la commission Legrand écrivent ainsi : "l'instruction au collège n'aura d'efficacité que si le collège est aussi un lieu d'éducation. Et l'éducation au collège n'a de sens que si elle comprend aussi une part d'instruction. Il y a complémentarité entre ces deux notions". Déclaration à laquelle on ne peut que souscrire, pour la dialectique qu'elle ébauche, tout en notant la nuance légèrement restrictive dont elle marque l'un des termes rapprochés : "une part d'instruction"...

Signe que les vieux démons sont toujours prêts à renaître ! Cela dit, il faut alors souligner que les modifications générales apportées au cadre éducatif laissent à peu près intouché le problème "complémentaire", et fondamental tout autant, des apprentissages fondamentaux (dont, à la fin du XXe siècle, on peut estimer qu'ils ne se laissent pas entièrement réduire à la lecture, à l'écriture et au calcul - même si l'on n'ignore pas que des difficultés notables subsistent encore à ce niveau). La question doit être abordée dans une perspective large, non misérabiliste, qui prenne en compte aussi bien les échecs précoces (ceux qui alimentent les classes de C.P.P.N. par exemple) que les échecs plus diffus qui pèsent sur la capacité de production de notre système d'enseignement en personnels qualifiés jusqu'aux niveaux les plus élevés (et dont la raréfaction des terminales scientifiques, effet sans doute d'une certaine indifférence et d'un malthusianisme inopportun, demeure un indice inquiétant .

7. Rassemblant en ce point les deux ordres de notations que nous avons cru devoir développer jusqu'ici, il nous faut alors souligner que, si l'on peut, à bien des égards et au gré de la conjoncture, parler d'un échec de l'école, et notamment du collège, il n'en reste pas moins que cet échec se nourrit de l'échec à l'école, singulièrement de l'échec au collège. Même s'il existe bien, en effet, des déterminations sociales qui font qu'on échoue plus ou moins à l'école, il existe aussi des mécanismes intrinsèques de l'échec, qui font qu'on échoue de telle ou telle manière, ces "manières d'échouer", actualisées selon des fréquences différentes en fonction des caractéristiques socio-culturelles des élèves, n'en ayant pas moins des caractéristiques propres, indépendantes de la pathologie sociale à l'origine de leur apparition dans le champ scolaire. De la même façon qu'au XIXe siècle, on avait plus de chances d'être tuberculeux en étant prolétaire qu'en étant bourgeois, sans qu'il y eût pour autant un bacille prolétaire et un bacille bourgeois ! C'est ici qu'il faut rappeler à l'exigence d'une étude scientifique de la pathologie scolaire, en n'oubliant jamais que les plus généreux élans ne sauraient dispenser d'une science positive de l'objet que nous voulons changer, et qu'il ne servirait à rien d'invoquer l'urgence à agir (malheureux argument dont on a usé et abusé depuis un siècle au moins) pour repousser l'urgence d'une étude patiente, systématique et continuée.

8. Car la première urgence est de recherche fondamentale sur l'enseignement ! Qu'on mesure, à cette simple expression de "l'échec scolaire", la distance qui sépare aujourd'hui notre société d'une vision rationnelle du problème que par cela nous voulons désigner : car l'échec scolaire n'existe pas ! Pas davantage du moins que la maladie. Il n'existe que des maladies ;

de même n'existe-t-il que des échecs scolaires. Non pas bien sûr des échecs individuels, des cas singuliers. Mais des types d'échecs. Je ne sais aucun chercheur autre que naïf, illuminé ou charlatan, qui prétende rechercher une réponse à l'échec scolaire : demanderait-on à un médecin de guérir la maladie, à un chercheur de trouver la panacée ? Le premier travail de toute entreprise contre l'échec scolaire est ainsi un travail de découpage du champ de l'échec, de constitution d'une nosographie de l'échec scolaire, de construction de quelques grands types d'échecs nettement délimités, qui permettent aux chercheurs de se mettre au travail et de voir leur travail reconnu par ceux qui, ayant en charge l'organisation de l'action éducative, sauront ainsi échapper à l'archaïsme du regard que notre société jette encore aujourd'hui sur une part d'elle-même si essentielle à son heureux développement.

9. Il n'est pas dans notre propos d'esquisser ici une typologie des échecs scolaires. Certains types d'échecs, bénins en eux-mêmes, même si leur coût social apparaît élevé, relèvent de la simple prévention et de l'intervention légère - qu'il reste largement à organiser. Il en est ainsi par exemple de tous les cas d'échecs que l'on peut rapporter au contrat didactique en ses clauses générales (que dois-je faire pour apprendre : écouter ? Faire mes devoirs et apprendre mes leçons ? Ou bien y-aurait-il autre chose à faire, et quoi ?), selon une pathologie a priori légère et liée souvent à l'incapacité du cadre familial à procurer une préparation adéquate du jeune enfant à l'entrée dans l'ordre scolaire. D'autres types d'échec, en revanche, requièrent des recherches approfondies et plus "pointues". Il en est ainsi, entre autre, des échecs électifs en mathématiques, sur lesquels les didacticiens des mathématiques se sont penchés depuis plusieurs années. La recherche, qui nécessite alors des outils théoriques et expérimentaux importants, s'opère ici, généralement, sur le terrain d'une action éducative ayant valeur en soi (*).
En général, l'abord du problème de l'échec scolaire, vu comme pathologie de l'interaction entre l'individu et le système éducatif, passe à la fois par l'action globale de prévention, de dépistage et de "thérapeutique" légère, et par des recherches fondamentales sur les principaux terrains de l'échec à l'école.

(*) Une telle recherche a été menée en 1981/82 par Y. Chevallard et J. Tonnelle au Collège Lou Garlaban d'Aubagne. Elle sera poursuivie en 1982/83

PROBLEMES POSES PAR L'ACCES AUX DIFFERENTS CURSUS DES 2èmes CYCLES ET PAR LA DIVERSIFICATION DES FILIERES AU SEIN DES CURSUS

par Jean MARION

QUELQUES PROBLEMES MAJEURS CONCERNANT LES PROCESSUS D'ORIENTATION ET LA CONDUITE DES ETUDES.

1) Il s'agit de passer d'un système souvent marqué par l'alternative entre le nivellement par le bas et la sélection outrancière, à une institution éducative visant le développement de toutes les potentialités des personnes, tant sur le plan personnel et relationnel que sur le plan de la maîtrise des savoirs et des techniques.

2) En ce qui concerne les cursus, les rythmes et les diplômes, il s'agit de passer d'un système marqué par l'alternative entre l'adaptation forcée à un dispositif uniformisé et l'élimination par l'échec, à une pédagogie de la réussite. Cette pédagogie doit se fonder sur une diversification des activités, des rythmes et des modalités d'évaluation, adaptée aux aspirations personnelles, et sur un décloisonnement horizontal et vertical des cursus.

3) Ces deux dysfonctionnements sont étroitement liés. Ils sont renforcés par un certain nombre de facteurs de blocage :

- le manque de souplesse d'accès aux différents cursus, qui donne trop souvent un caractère irrévocable aux orientations ;
- la hiérarchisation des filières, fondée le plus souvent sur des facteurs idéologiques ;
- le manque de communauté d'objectifs dans les filières réputées peu nobles, où les élèves se retrouvent le plus souvent à la suite d'un échec dans une filière plus noble ;
- le manque de souplesse à l'intérieur d'un cursus s'adressant à un public très hétérogène ;
- l'absence de concertation et d'échange d'informations entre des établissements de type différent (collège, lycée, lycée technique, L.E.P.).

4) Dès maintenant, c'est-à-dire pour 1982-1983, on peut mettre en oeuvre quelques mesures constituant une première étape de la réalisation des objectifs fondamentaux énoncés en 1) et 2).

a) En ce qui concerne les processus d'orientation il convient de mettre en place une équipe de conduite de la formation au sein de chaque établissement, et d'une équipe de coordination au niveau de chaque secteur éducatif (regroupant un certain nombre de lycées, lycées techniques, L.E.P., et collèges afférents). Ces équipes ont notamment pour rôle d'améliorer le suivi individualisé de la formation, de mieux préparer les décisions d'orientation (en particulier au niveau du Conseil de classe), et de favoriser les contacts entre les personnels des divers établissements concernés.

b) En ce qui concerne les programmes et les méthodes pédagogiques nous proposons que soient retenus des noyaux minimums exprimés en termes de capacités (de savoir et de savoir-faire), les objectifs fixés étant relativement modestes et pouvant raisonnablement être atteints par la plupart des élèves.
Il convient d'accompagner ces noyaux par des activités thématiques variées, non pas pour traiter un programme uniforme trop lourd, mais pour permettre d'une part des approfondissements et d'autre part des mises à niveau localisées. Ces mesures ont pour objectifs de lutter contre la lourdeur de programmes imposés à tous, d'atténuer les effets de l'hétérogénéité excessive, et de fonder l'évaluation et l'orientation sur des critères mieux définis et plus diversifiés, avec des exigences raisonnables de niveau.

5) Ces propositions tentent de concilier réalisme et détermination. Elles ne nécessitent pas de moyens supplémentaires en personnel. En revanche elles demandent un changement de mentalité chez les enseignants (rupture avec l'impérialisme du "cours", prise en charge des activités des élèves, évaluation du travail des élèves portant sur des activités thématiques, et prise en compte de cette évaluation) et un gommage de certaines raideurs de l'institution (pesanteurs administratives, position des corps d'inspection face aux programmes). Ces transformations passent par la mise en oeuvre d'actions de formation continue et de recherches sur l'enseignement.

L'I.R.E.M. se doit d'apporter une contribution substantielle :

- au niveau de la réflexion sur les processus d'orientation et la conduite des études ;
- pour la définition des noyaux minimums et pour l'élaboration d'activités thématiques variées.
- pour l'élaboration de stratégies et de séquences didactiques permettant d'intégrer ces activités thématiques au travail de la classe.

6) Deux secteurs appellent plus particulièrement des mesures immédiates (pour 1982-1983) et des mesures à moyen terme : il s'agit de celui de la Seconde de détermination et celui des L.E.P.

LA SECONDE DE DETERMINATION.

1) Bilan.

Différentes enquêtes, dont celle menée par la Régionale A.P.M., tent en évidence les problèmes suivants :

- hétérogénéité excessive du public de ces classes, ce qui conduit à un nivellement par le bas, où les meilleurs s'ennuient et où les faibles, majoritaires, *perdent irrémédiablement pied ;*
- lourdeur excessive des programmes, ce qui conduit le plus souvent à ne pas aborder les statistiques et la géométrie dans l'espace ;
- insuffisance du nombre d'élèves orientés vers les sections 1ère A_1, 1ère S ou 1ère E ;
- mauvaise utilisation par les établissements et les enseignants du contingent d'heures spécialement réservé pour l'aide aux élèves (attribution trop tardive de ce contingent, confusion avec le "soutien", ...).
- manque de clarté dans la définition des différentes sections de 1ère et manque d'élucidation des critères sur lesquels il convient de s'appuyer pour l'orientation dans ces sections.

2) Propositions à court terme.

Outre celles formulées dans la partie I, nous proposons de diversifier types d'activités des élèves.

Plutôt que de consacrer hebdomadairement 2 h $^1/2$ de cours en classe, 1 h $^1/2$ de T.D. en demi-classe et 1 h de "soutien" nous proposons le schéma : 1 h $^1/2$ de cours en classe, 1 h $^1/2$ de T.D. en demi-classe, 2 h consacrées au travail individualisé ou en petit groupe encadré souplement. Cette troisième structure permettrait un fonctionnement plus détendu dans laquelle peuvent prendre place des activités développant les expressions orales et écrites sous d'autres formes que le "devoir", premier pas vers un suivi individualisé de la formation.

3) <u>Mesures à moyen terme.</u>

Il convient de créer des modules d'adaptation amont et aval pour les différentes filières, ayant pour objectifs de permettre des rythmes différenciés et un décloisonnement des cursus. Ici encore l'I.R.E.M., de par sa vocation, son expérience, et ses recherches, doit être à même de faire des propositions pour chaque niveau.

III - LES L. E. P.

1) <u>Bilan.</u>

a) Manque de liaisons entre C.E.S., L.E.P. et lycées :

- au niveau des enseignants (contacts, concertation, suivi des élèves, participation des enseignants de L.E.P. aux conseils de classe de 3^e, manque d'informations de la part des enseignants de collèges, ...),
- au niveau des élèves qui ignorent tout de ce qui les attend.

b) Manque de souplesse du système quant à l'adaptation aux besoins du marché du travail.

c) Hétérogénéité excessive et lourdeur des programmes.

2) <u>Propositions à court terme.</u>

Outre celles formulées dans la partie I, il convient de proposer une diversification des activités analogue à celles proposées en II-2 pour la Seconde.

3) Propositions à moyen terme.

Nous proposons de transformer l'articulation entre formation initiale et insertion professionnelle. L'objectif est non de remettre en question la finalité professionnelle directe des L.E.P., mais de regrouper les formations par familles assez larges, des modules placés en fin de formation permettant l'adaptation à des demandes plus pointues des secteurs professionnels. A cet effet il conviendrait d'engager dans les plus brefs délais les enquêtes nécessaires ; il conviendrait aussi de développer la formation continue des maîtres pour préparer l'évolution souhaitée des formations.

... entendu aux journées d'information

sur les programmes de 1ère $A_2 A_3$ ...

LA BOBINE OBEISSANTE

* *
*

Jean-Paul BONNET, Michel EYRAUD, Raymond RAYNAUD (1)

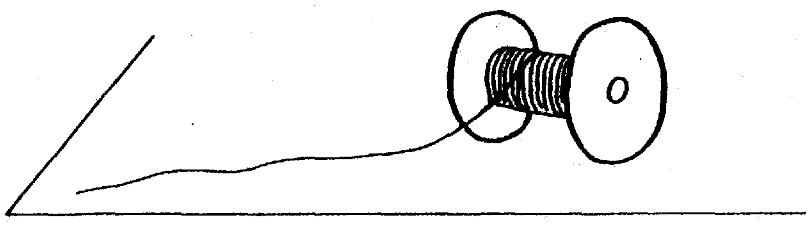
C'est en observant, sur un quai de port, la façon dont un professionnel enroulait une drisse sur sa bobine que nous avons eu l'idée de faire ce travail.

Son objectif est de montrer qu'une étude théorique peut expliquer et faire apparaître comme naturel un phénomène qu'on jugeait d'abord déroutant.

Ce compte-rendu d'une manipulation de physique suivi d'une explication théorique de ses résultats est destiné en premier lieu aux professeurs de seconde .

A - DEVINETTE

P. Une bobine de fil peut rouler sur une table horizontale. Elle y repose immobile, avec quelques décimètres de fil déroulés.
Peut-on rembobiner le fil déroulé, simplement en tirant dessus, sans toucher à la bobine ni à la table ?



E. ...
Evidemment non ! parce que si on tire sur le fil ça en déroule encore plus.

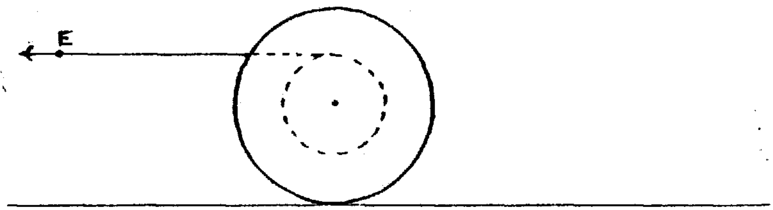
P. Eh bien ! vous allez voir que vous avez répondu trop vite.

(1) Groupe Math-Physique de Digne, janvier 1982.

B - EXPERIENCE

I) On tire très doucement sur l'extrémité E du fil de sorte que le brin déroulé soit horizontal et perpendiculaire à l'axe de la bobine.

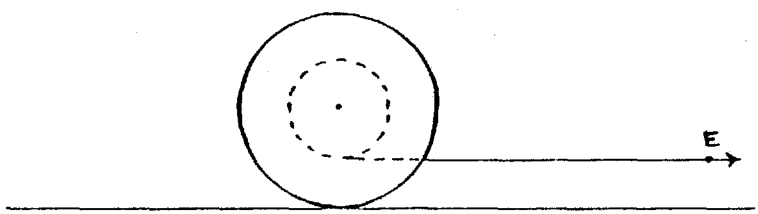
1 - Première disposition



Dans quel sens la bobine s'ébranle-t-elle ?

Le problème de l'enroulement du fil est-il résolu ?

2 - Deuxième disposition



Mêmes questions.

Dans les deux cas , on constate que :

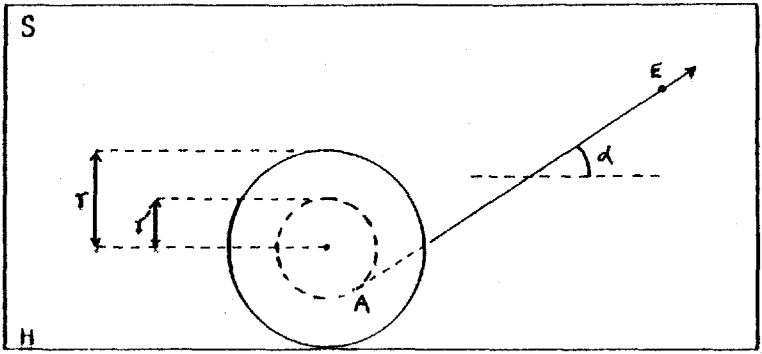
la bobine vient dans le sens où on la tire.

C'est bien la "bobine obéissante" annoncée.

Et son comportement dans la seconde situation bouscule quelques intuitions.

II) Partant de la disposition I, 2, on va maintenant tirer le fil - toujours très doucement - de façon que le brin déroulé fasse un angle α avec l'horizontale.

Mais on aura pris soin auparavant de placer le brin libre [AE] dans le plan de symétrie S de la bobine qui est perpendiculaire à son axe.



Effectuer des tractions pour différentes valeurs de α entre 0° et 90°. Comment réagit la bobine quand α est petit ? quand α est grand ?

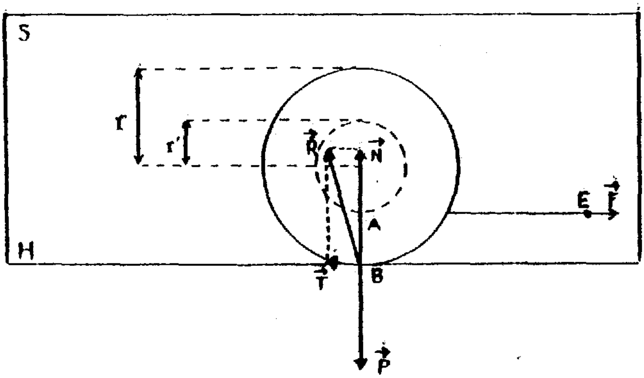
Il y a une valeur limite α_o de α pour laquelle la bobine a un comportement particulier.

Mesurer α_o - par exemple après avoir dessiné [AE] sur un carton tenu dans S derrière le fil -, mesurer aussi les rayons r et r' des flancs de la bobine et du cylindre formé par le fil enroulé.

Consignez dans un tableau les valeurs de r, r' et α_o obtenues par vous et par vos camarades pour les différentes bobines manipulées.

C - ETUDE PAR LE CALCUL

I) Cas où le brin [AE] est horizontal dans le plan de symétrie S et disposé comme l'indique la figure.



- La bobine est soumise

à son poids $\vec{P}$
à la force de traction $\vec{F}$ exercée en E
aux actions de la table :

. Parmi ces actions le couple de résistance à la rotation est apparu comme très faible dans nos expériences puisque la moindre traction mettrait la bobine en branle ; quant au couple de résistance au pivotement, il est nul du fait que la ligne d'action de $\vec{F}$ est dans S.

. Il reste deux forces de réaction aux points de contact B_1, B_2 de la bobine et de la table, qui ont pour résultante une force $\vec{R}$ dont la ligne d'action, dans le plan S, passe par le milieu B de $[B_1B_2]$. Nous désignerons par $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes horizontale et verticale de $\vec{R}$.

- Les conditions d'équilibre du système "bobine" se réduisent alors, en posant d'une manière générale $\|\vec{\Phi}\| = \Phi$, aux deux égalités

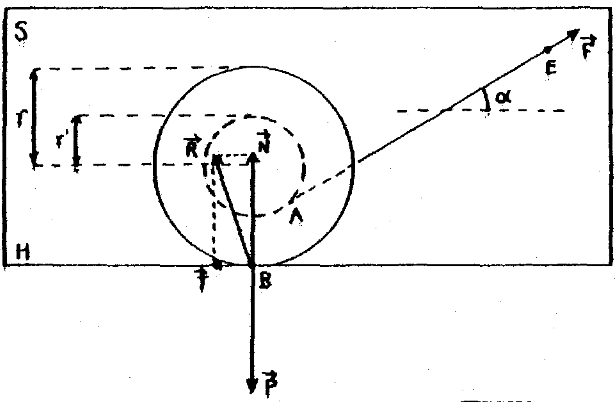
$$\boxed{\begin{array}{c} T = F \\ T.r = F.r' \end{array}}$$

Et comme $r > r'$, elles sont incompatibles dès que $F \neq 0$
A la moindre traction la bobine se met en branle.
Dans quel sens ?

. Pas vers la gauche, puisque les conditions $\begin{cases} T > F \\ T.r < F.r' \end{cases}$ sont incompatibles.

. Donc vers la droite... Et le brin libre s'enroule sur la bobine dès que l'on tire dessus !

II) Cas où le brin [AE], toujours dans le plan de symétrie S, fait maintenant un angle α avec l'horizontale.



1) Les conditions d'équilibre deviennent alors : $\boxed{\begin{cases} T = F.\cos\alpha \\ T.r = F.r' \end{cases}}$

a) Supposons que malgré une petite traction $\vec{F}$ la bobine reste immobile.

Alors $F.r.\cos\alpha = F.r'$, et, comme $F \neq 0$: $r.\cos\alpha = r'$

d'où $\cos\alpha = \frac{r'}{r}$

Ainsi, la bobine ne peut rester immobile dès que l'on exerce la moindre traction $\vec{F}$ que si α a la valeur particulière α_o telle que $\cos\alpha_o = \frac{r'}{r}$

b) Inversement, supposons que $\alpha = \alpha_o$

Alors la condition de non-rotation $T.r = F.r'$, qui s'écrit encore $T = F\frac{r'}{r}$, soit $T = F.\cos\alpha_o$, se confond avec la condition de non-translation.

La bobine reste donc immobile, malgré la traction $\vec{F}$, si la réaction $\vec{R}$ peut se développer de telle sorte que $T = F\cos\alpha$, ce qui va dépendre de la grandeur de $\vec{F}$ et de la nature des surfaces en contact.

Désignons par $\operatorname{tg}\varphi$ le coefficient de frottement de la bobine sur la table.

$$\frac{T}{N} \leq \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{or} \qquad N = P - F\sin\alpha_o$$

donc

$$T \leq \operatorname{tg} \quad (P - F\sin\alpha_o)$$

Et il n'y a équilibre que si

$$F\cos\alpha_o \leq \operatorname{tg} \quad (P - F\sin\alpha), \quad \text{soit} \quad F \leq \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\cos\alpha_o + \operatorname{tg} \quad \sin\alpha_o}$$

c'est-à-dire à condition que la traction $\vec{F}$ ne soit pas trop forte. Dès que la limite est dépassée, la bobine commence à patiner en glissant vers la droite tout en tournant vers la gauche.

2) Après l'étude de ce cas limite, il est facile d'établir que...

. a) Si $\alpha < \alpha_o$, la bobine roule vers la droite et le fil s'enroule dès que $F \neq 0$. C'est encore la bobine obéissante.

En effet :

Puisque $\alpha \neq \alpha_o$, à la moindre traction $\vec{F}$ la bobine se met en branle. De quel côté ?

- Pas vers la gauche, car si $T > F\cos\alpha$,
  alors $T > F\cos\alpha_o$, $T > F\frac{r'}{r}$ et $T.r > F.r'$
  ce qui est la condition de roulement vers la droite.
- Donc vers la droite.

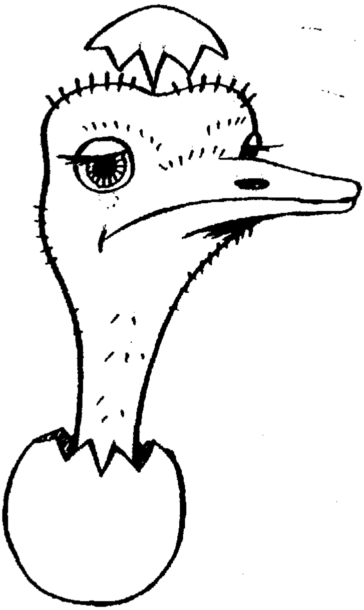
b) Si $\alpha > \alpha_o$, la bobine roule vers la gauche et le fil se déroule dès que $F \neq 0$

Démonstration analogue.

D - CONFRONTATION DES RESULTATS DE L'EXPERIENCE ET DU CALCUL

1) Qualitativement, l'accord entre expérience et théorie est excellent.

2) Quantitativement, il souffre des difficultés rencontrées dans la détermination expérimentale de α_o : avec notre matériel rudimentaire nous n'avons pu faire mieux que de localiser α_o dans une plage de 5 à 6 degrés ; mais la valeur théorique de α_o s'est toujours trouvée dans cette plage.



AU ROYAUME DE L'AUTRUCHON GRIS

Collection de perles pêchées et commentées par Henri CAMOUS :

"La preuve par l'oeuf" (pour cuisinier calculateur)
"Les années bissectrices" (coupées en deux semestres égaux)
"La numérotation bil(i)aire" (difficile à digérer)
"Les ronds dans le Kub" (des yeux dans le bouillon, quoi !)
"Le diagramme de Wayne" (John également, mais avec sa Winchester)

et pour finir "en beauté" :

"Un sectaire anguleux" (particulièrement handicapé, le pauvre !)

Quelques autres :

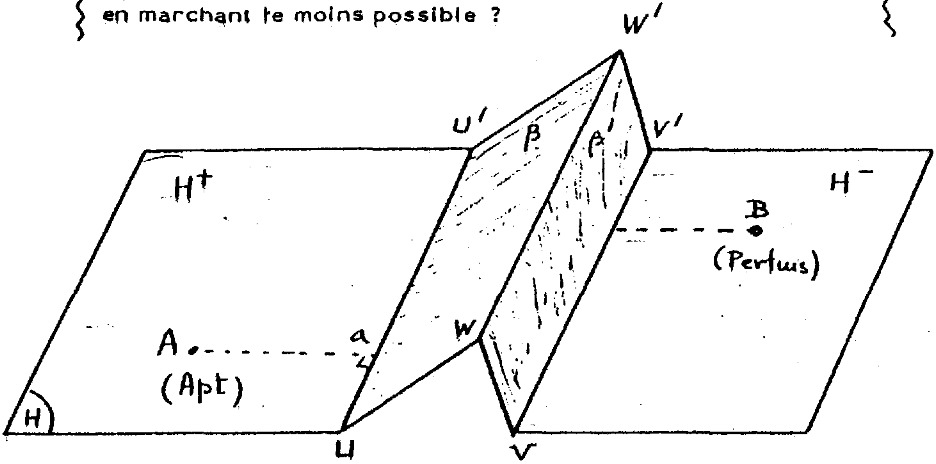
"Ce solide est un parallélépithèque"
A propos d'angles opposés :
"Ils sont égaux parce
qu'ils se regardent"

LE PLUS COURT CHEMIN PAR MONTS ET PAR VAUX (1)

* *
*

Groupe de Recherche sur l'Enseignement
de la Géométrie de l'IREM d'Aix-Marseille

Enoncé : La plaine vauclusienne située au Nord de la Durance est "coupée en deux" par la chaîne du Lubéron. Pertuis et Apt sont deux villes de cette plaine, séparées par cette chaîne de collines. Comment joindre à pied ces deux villes en marchant le moins possible ?



On peut identifier la plaine vauclusienne à un plan (H), et la chaîne du Lubéron à une surface prismatique "posée" sur (H), déterminée par trois droites parallèles : (UU') et (VV') dans (H), et (WW') au-dessus de (H), de telle sorte que A = Apt est dans le demi-plan H^+ de (H) déterminé par (UU') qui ne contient pas (VV') et B, B = Pertuis, est dans le demi-plan H^- de (H) de frontière (VV') qui ne contient ni (UU') ni A.

On notera (P) le plan de la bande β déterminée par les droites (UU') et (WW'), et (Q) le plan de la bande β' déterminée par (VV') et (WW'). Enfin a et b désignent les projections orthogonales de A et B sur respectivement (UU') et (VV'). Le problème posé revient donc à chercher dans la configuration $H^+ \cup \beta \cup \beta' \cup H^-$ le plus court chemin joignant A à B.

Niveau : Classes de 2^e^, 1^ère^ S, Terminales C et E ; classes de B.E.P.

(1) Cet article est extrait de la brochure "Les problèmes de recherche de configurations astreintes à des conditions extremales de mesures".

Solution :

a) Soit A_1 le point du plan P situé dans le demi-plan P^+ de P déterminé par (UU') qui ne contient pas (WW'), qui se projette orthogonalement en a sur (UU') et tel que $A_1a = Aa$;
de même soit B_1 le point du plan Q situé dans le demi-plan Q^+ de Q déterminé par (VV') qui ne contient pas (WW'), qui se projette orthogonalement en b sur (VV') et tel que $bB_1 = bB$.

On notera que pour un point I quelconque de (UU') et pour un point K quelconque (VV'), $AI = A_1I$ et $BK = B_1K$. Ainsi on est ramené à chercher sur le dièdre (P^+, Q^+) le plus court chemin joignant A_1 à B_1 ; on sait résoudre ce problème (Problème n° 20).

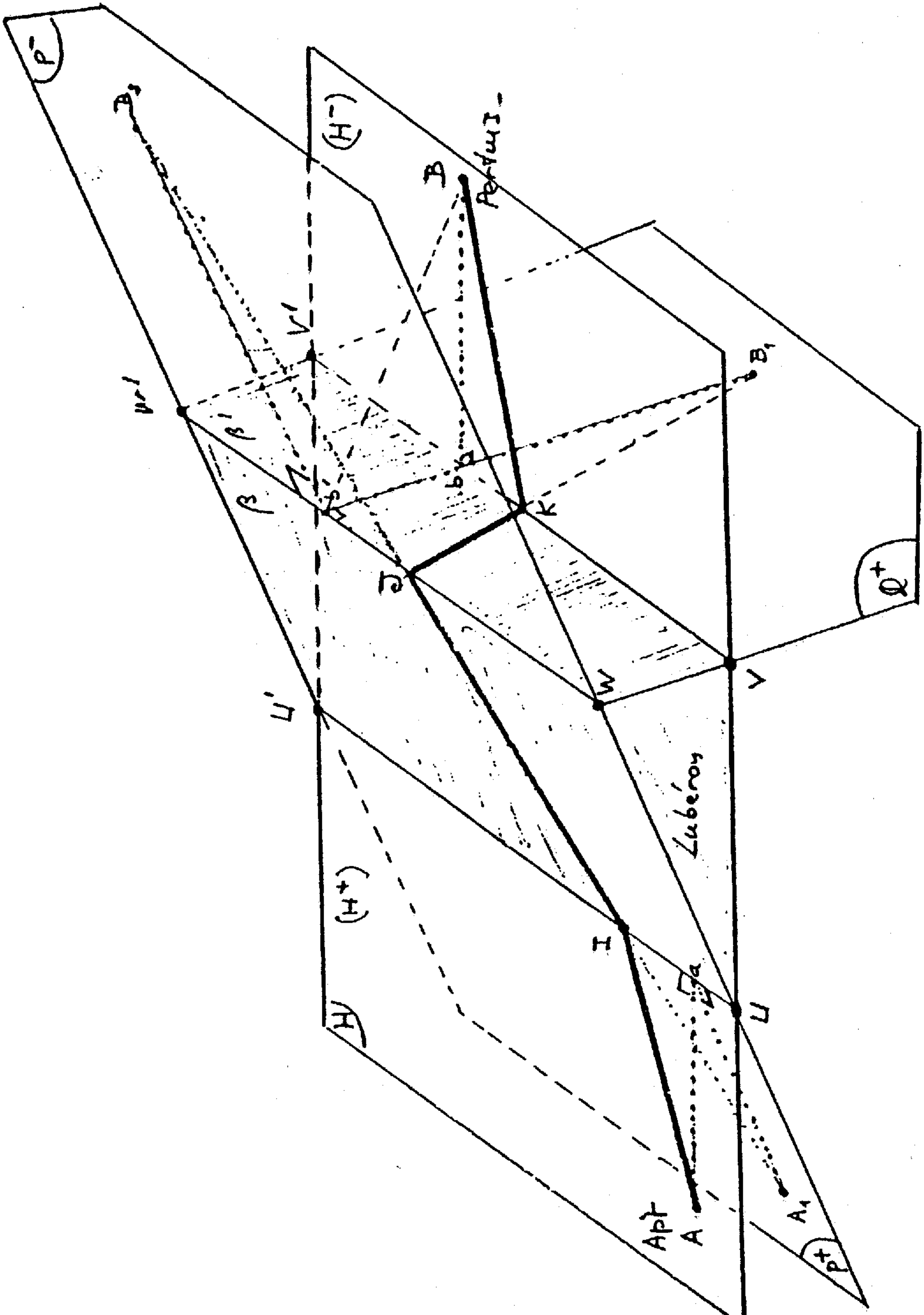
b) Soit b' la projection orthogonale de B (et b) sur (WW') et soit B_2 le point du demi-plan P^- de P déterminé par (WW') qui ne contient pas (UU'), qui se projette en b_2 sur (WW') et tel que $b'B_2 = b'B_1$. On notera que pour un point J quelconque de (WW'), $JB_1 = JB_2$.

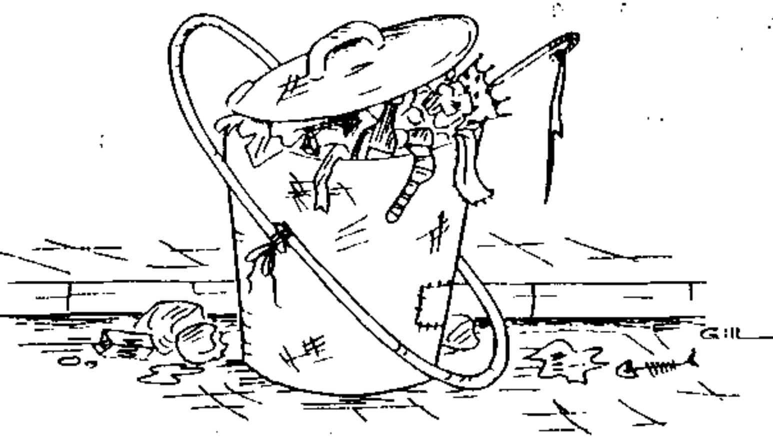
c) Ainsi le problème est ramené à chercher dans P le plus court chemin allant de A_1 à B_2 ; c'est le segment $[A_1, B_2]$ qui coupe (UU') en I et (WW') en J.
Soit K l'intersection (dans Q) de (VV') et de JB_1, le chemin cherché est la ligne brisée (AIJKB) de longueur A_1B_2.

Commentaire : Une intuition mal contrôlée aurait pu conduire à penser que le chemin solution pouvait s'obtenir comme intersection de (H^+) $H^+ \cup \beta \cup \beta' \cup H^-$ avec le plan passant par A et B et perpendiculaire au plan H. En fait il est aisé de voir qu'en général (AIJKB) n'est même pas plane.

Additif : Dans le cadre du colloque Inter-I.R.E.M. de Géométrie de Bordeaux de juin 1982, l'I.R.E.M. de Bordeaux a publié un fascicule intitulé "Géométrie dans l'espace ; activités de constructions géométriques effectives", et dont le chapitre IV, **séquence 2, donne deux exemples de problèmes de nature voisine de ceux proposés dans ce chapitre.**

Figure associée au problème





Classe résiduelle dans un anneau.

ASCENSION SOCIALE

UN JEU PROPOSÉ PAR *Gérard Rauzy*

On dispose d'un "damier" ou plutôt d'un "quadrillage" infini du plan réalisé par une trame de lignes horizontales et verticales équidistantes.

Sur ce quadrillage on répartit un nombre fini de pions en posant chaque pion à l'un des "sommets" du quadrillage (intersection d'une horizontale et d'une verticale du quadrillage), deux pions ne pouvant être mis sur le même sommet.

Partant d'une telle configuration, on "joue" comme au "solitaire", c'est-à-dire que les pions A et B étant consécutifs sur une même horizontale ou une même verticale (A étant indifféremment à droite ou à gauche de B, ou bien en haut ou en bas de B) et le sommet C symétrique de A par rapport à B étant inoccupé, on peut "prendre" B avec A, de sorte que dans la nouvelle configuration, le pion B disparait, le pion A vient en C, les autres pions restant à leur place (voir par exemple figure 1).

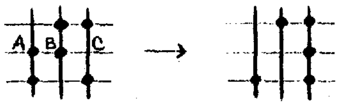


Figure 1.

On particularise maintenant une ligne horizontale de référence : le "niveau zéro", et on dispose les pions de la configuration initiale uniquement au dessous ou sur cette ligne. Le "jeu" consiste alors à amener un pion au moins dans la configuration finale au plus haut niveau possible : par exemple dans la configuration de la figure 2 on peut amener un pion au niveau 2.

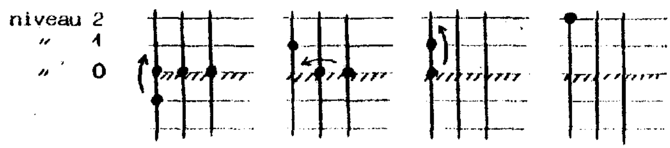
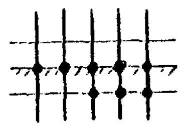


Fig. 2

<u>1e question</u> : Montrer, qu'en partant de la configuration de 8 pions :



on peut, en 7 coups, amener un pion au niveau 3.

Existe-t-il une configuration de 7 pions permettant d'aboutir au même résultat ?

<u>2e question</u> : Existe-t-il une configuration initiale qui permette en un nombre fini de coups, d'amener un pion au niveau 5 ?

17

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70,route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 9

tél. 41.39.40. - 41.01.40.