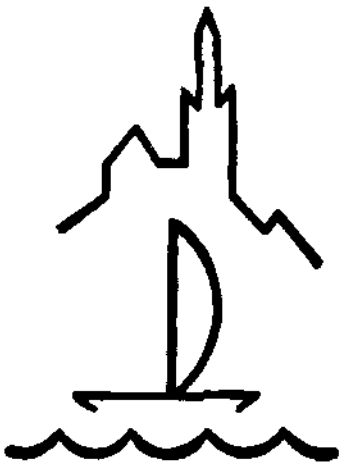
information mathématique



académie d'aix-marseille

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLES DE LA PUBLICATION

GILLES THOMAS
CHRISTIANE RAMBAUD

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
I. R. E. M.
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE Cedex 2
Tél. 41.01.40 poste 32.10 / 41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 16 Novembre 1981

SOMMAIRE

★ EN DIRECT DU SERVICE DES PUBLICATIONS 5

★ L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU CYCLE MOYEN DE L'ECOLE ELEMENTAIRE 11
(R. VIARSAC)

★ LES ENTIERS RELATIFS ? ..... FACILE ! 20

★ UN EXEMPLE DE TRAVAIL D'HARMONISATION CM_2 - 6e 21
(H. CLEMENT)

★ ASCENSION SOCIALE 42
(G. RAUZY)

★ UN TEXTE DE HENRI LEBESGUE (1875-1941) :
SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA NOTION D'INTEGRALE 43

★ LE C.A.M.I. 63

★ BIBLIOGRAPHIE pour la classe de SECONDE 64

Dépôt légal 4e trimestre 1981

EN DIRECT DU SERVICE DES PUBLICATIONS

Ce numéro du bulletin "Information Mathématique", tout en respectant une certaine continuité dans son souci d'information, présente un certain changement dans la liste de ses rubriques.

Information d'abord avec l'article de Robert VIARSAC destiné en premier lieu aux enseignants des classes de 6ème, et annoncé dans le numéro précédent du bulletin.

Une harmonisation C.M.$_2$ - 6ème est effectivement souhaitable sous une forme qui reste à définir. Le travail effectué par l'équipe d'Hélène CLEMENT, bien que portant sur les programmes antérieurs, donne une idée de ce qu'il est possible de réaliser dans ce domaine.

Information encore avec le texte de LEBESGUE que Robert ROLLAND nous propose. L'ouverture d'une rubrique de type historique et épistémologique présente, à nos yeux, un grand intérêt.

Information enfin avec le point sur le Certificat d'Approfondissement en Mathématiques et Informatique et avec la présentation d'une documentation IREM pour la classe de seconde.

Une rubrique "JEUX" est inaugurée par Gérard RAUZY. Il attend des réponses...

Nous souhaitons ouvrir dans un prochain numéro du bulletin une rubrique "PROBLEMES", à la demande de nombreux collègues. Il s'agirait de présenter un énoncé de problème ou d'exercice en précisant les objectifs poursuivis, la façon dont il prend place dans la suite des activités d'une classe, les résultats effectivement obtenus, une bibliographie éventuelle,

etc... Les articles concernant cette rubrique seront les bienvenus.

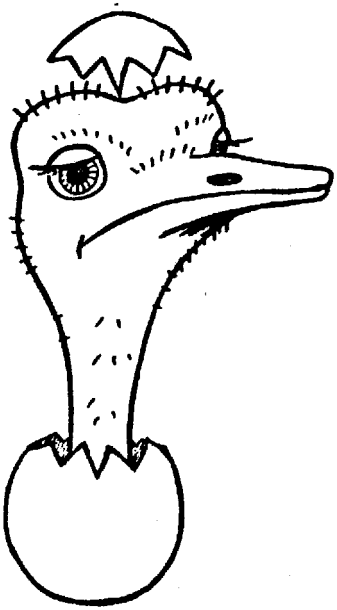
Des réflexions d'enfants à propos de certaines notions mathématiques peuvent être amusantes et en même temps présenter un intérêt d'ordre pédagogique. Nous espérons que l'anecdote rapportée ici par Catherine DUFOSSE incitera d'autres lecteurs à nous adresser de tels textes.

Et pourquoi pas une rubrique "PERLES" ?

Un collègue historien nous a raconté dernièrement qu'il avait eu la surprise de découvrir, dans une copie de baccalauréat, que le royaume de l'Autriche-Hongrie était devenu, sous la plume de l'éminent futur bachelier, le royaume de ... l'autruchon gris !

Cela ferait un beau titre pour une telle rubrique.

Alors nous ne résistons pas au plaisir de présenter ci-dessous un projet d'en-tête :



AU ROYAUME
DE
L'AUTRUCHON GRIS

à vous lire...

Pour la Commission des Publications
G.T. et C.R.

DERNIERES PUBLICATIONS DE L'IREM D'AIX-MARSEILLE

★ Calcul des Probabilités et Arithmétique (Indépendance et multiplicativité restreinte) - octobre 1978 - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 32 pages - Prix : 5 F.

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 12 - Novembre 1978

★ Analyse 1 - décembre 1978 - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 174 pages - Prix : 10 F.

★ Essai sur la Géométrie (J. MARION) - septembre 1979

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 13 - octobre 1979

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 14 - mai 1980

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 15 - décembre 1980

★ Mathématiques, Langage, Enseignement : la réforme des années soixante (Y. CHEVALLARD)

★ Publications du groupe de recherche sur l'enseignement de la Géométrie (Prix du fascicule : 4 F)

A - Sur l'enseignement de la géométrie du Lycée (J. MARION et J.L. OVAERT)

B - Sur l'enseignement de la géométrie en classe de seconde indifférenciée (J. MARION et J.L. OVAERT)

C - Consolidation et approfondissement des acquis du 1er cycle Géométrie des configurations planes, outil vectoriel et outil numérique (R. AMALBERTI, J.C. BENIAMINO, A. CASTELLI, J.P. CLOU, J. MARION, J.L. OVAERT, D. PROUDHON, J.M. VERNET)

D - Barycentres et convexité (J.P. ARNAL, J. MARION, J.L. OVAERT, D. PROUDHON, J.M. VERNET)

E - Translations, homothéties, symétries orthogonales (R. AMALBERTI, J.C. BENIAMINO, A. CASTELLI, J.P. CLOU, J. MARION, J.L. OVAERT, D. PROUDHON, J.M. VERNET)

calcul des probabilités et arithmétique

INDEPENDANCE ET MULTIPLICATIVITE RESTREINTE.

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

32 pages - PRIX : 5 F

analyse 1

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

174 pages - PRIX : 10 F

Bulletin inter.I.R.E.M.

N° 18 HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ET EPISTEMOLOGIE
66 pages - Prix : 7 F

N° 19 ANTHOLOGIE DE TRAVAUX IREM POUR LE 1er CYCLE
64 pages - Prix : 9 F

BULLETIN DE COMMANDE

N O M ..... PRÉNOM .....

ETABLISSEMENT

INTITULÉ EXACT .....
.....

ADRESSE .....
.....

COMMANDE LES OUVRAGES SUIVANTS :

→ CALCUL DES PROBABILITES ET ARITHMETIQUE :
INDÉPENDANCE ET MULTIPLICATIVÉ RESTREINTE
PRIX 5 F NOMBRE D'EXEMPLAIRES ☐

→ A N A L Y S E 1
PRIX 10 F NOMBRE D'EXEMPLAIRES ☐

→ BULLETIN INTER-IREM : N° 18 ☐ (7F) N° 19 ☐ (9 F)
NOMBRE D'EXEMPLAIRES ☐ ☐

→ PUBLICATIONS DU GROUPE G E O M E T R I E : PRIX 4 F

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐

NOMBRE D'EXEMP. ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

RÈGLEMENT :

L'I.R.E.M. VIENT D'ÊTRE AUTORISÉ À OUVRIR UNE RÉGIE DE RECETTES CE QUI LUI PERMET DE RECEVOIR UN RÈGLEMENT EN LIQUIDE ; CELUI-CI DOIT ÊTRE EFFECTUÉ AUPRÈS DE MME LEON AU SECRÉTARIAT.

A DÉFAUT, LE RÈGLEMENT PEUT ÊTRE EFFECTUÉ PAR CHÈQUE POSTAL OU BANCAIRE ENVOYÉ À L'I.R.E.M. ET RÉDIGÉ À L'ORDRE DE :

M. L'AGENT COMPTABLE DE L'UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE II

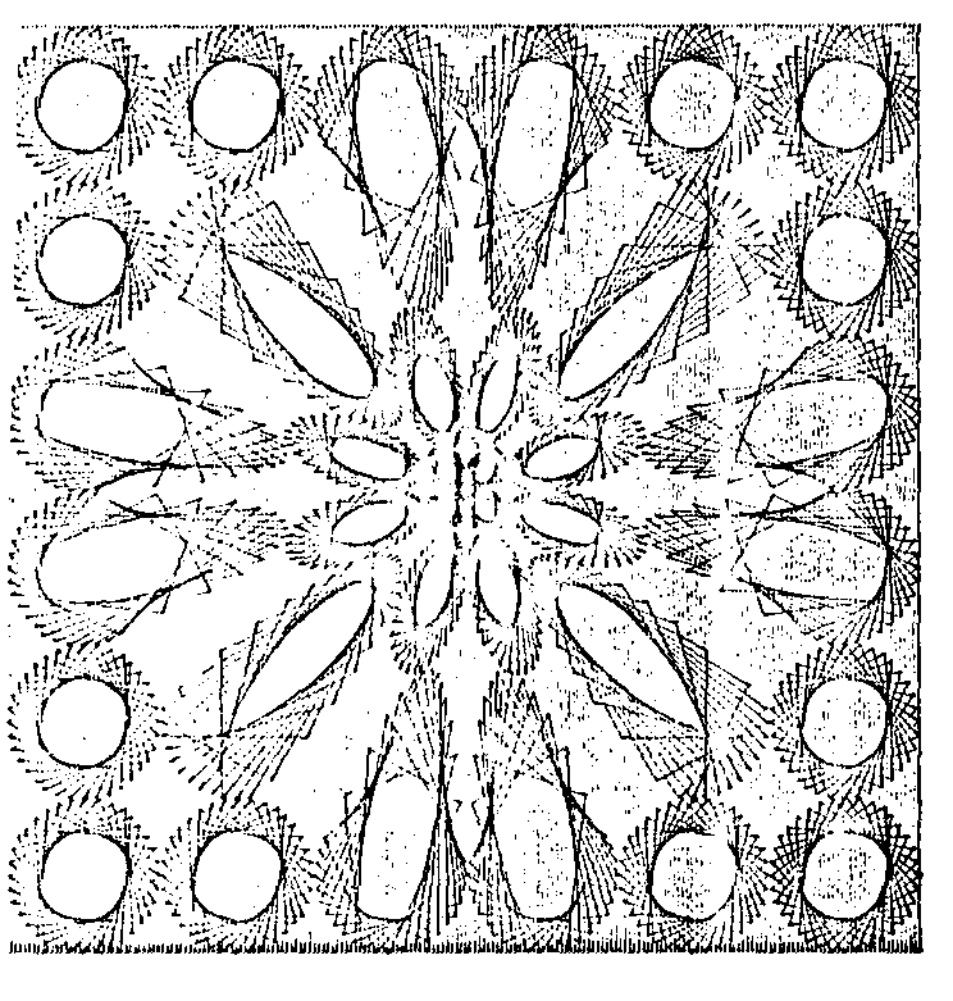
CI-JOINT CHÈQUE BANCAIRE

DE ..... F

CHÈQUE POSTAL

DATE : ..... SIGNATURE :

N. B. Dans la mesure du possible groupez vos commandes.



L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU CYCLE MOYEN DE L'ECOLE ELEMENTAIRE

PAR ROBERT VIARSAC (*)

Le précédent bulletin "Information mathématique" a présenté les objectifs de l'enseignement des mathématiques au Cycle Moyen de l'Ecole Elémentaire, tels qu'ils figurent dans les textes officiels fixés par les arrêtés ministériels du 16 juillet 1980 et du 18 juillet 1980. Les considérations qui suivent sont destinées à apporter quelques précisions à propos de la lecture de ces textes.

Importance de ces textes.

La publication des arrêtés de juillet 1980 consacre l'achèvement d'une action entreprise pour la scolarité primaire en application de la loi du 11 juillet 1975 portant réforme du système éducatif. La série de textes ainsi publiés en trois ans constitue un ensemble qui, en matière d'horaire, de contenus d'enseignement et d'instructions pédagogiques, couvre la totalité du cursus de la scolarité primaire, pour les mathématiques comme pour les autres domaines d'activité.

Définissant les objectifs du Cycle Moyen, l'arrêté du 16 juillet 1980 fixe, du même coup, les objectifs pour l'ensemble de la scolarité primaire. Il devient désormais le document de base et de référence pour tout ce qui a trait, du point de vue pédagogique au moins, à l'articulation

(*) Inspecteur Départemental de l'Education Nationale, Marseille

entre les deux étapes de la scolarité obligatoire : l'école et le collège. C'est la raison pour laquelle tous les professeurs de collège enseignant en classe de sixième ont été les destinataires de la brochure du C.N.D.P. consacrée à ces textes (1).

Un nouveau regard sur ces textes.

La présentation adoptée (la même dans toutes les disciplines et pour tous les cycles) marque une rupture sensible par rapport aux textes antérieurs. Ces derniers comportaient, d'une part, un arrêté définissant les "programmes", d'autre part des "instructions" faisant l'objet d'une circulaire distincte et valable pour tous les niveaux (du C.P. au C.M.) - arrêté et circulaire ministériels du 02.01.1970 - Les nouveaux textes comportent deux rubriques successives, pour le même cycle : "Objectifs" puis "Instructions Pédagogiques". Elles constituent deux modes d'expression d'un même ensemble d'intentions pédagogiques qui se complètent et s'éclairent mutuellement. Lire l'une des rubriques sans se référer simultanément à l'autre risque d'entraîner des méprises.

On pourra s'étonner de ne pas trouver de références explicites à l'arrêté du 2 janvier 1970 relatif aux mathématiques. Cela tient au fait que, du strict point de vue juridique, l'arrêté de 1980 s'y substitue et donc l'abroge. Mais une confrontation attentive des instructions fait apparaître que les options fondamentales de 1970 sont confirmées avec, toutefois, des ajustements de terminologie et une description plus précise de diverses pratiques, justifiées par certaines déviations auxquelles l'application des textes de 1970 a pu donner lieu. Par exemple, le souci de fonder les acquisitions mathématiques sur des démarches favorisant des attitudes de recherche et le développement de la pensée logique est fort légitime. Mais on sait qu'il a parfois conduit à substituer un autre formalisme à celui dont on prétendait s'affranchir et à négliger, du même coup, la sûreté des connaissances numériques et des mécanismes opératoires à laquelle ces démarches auraient dû contribuer plus efficacement. Il était donc utile de faire le point, notamment à propos du langage ensembliste,

(1) "Contenus de formation à l'école élémentaire - Cycle Moyen". Brochure C.N.D.P. n° 6108.

des symboles mathématiques et des relations, comme il a été fait, d'ailleurs, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques dans les classes de collège.

La disparition du mot "programme".

La substitution de la notion d'objectifs à celle de programmes revêt une signification d'importance primordiale.

Jusqu'à présent, et c'est toujours le cas pour les classes des collèges, les programmes proposaient un inventaire de notions à étudier, présentées sous forme d'une liste de contenus mathématiques, liste reprise, la plupart du temps, par les manuels dans leurs titres de chapitres. "Suivre le programme", devoir impératif de l'enseignant, consistait alors, principalement, à organiser une succession de leçons en vue de l'acquisition de connaissances par les élèves. Mais quelle devait être la nature de ces connaissances ? Quelles capacités devait-on apporter aux élèves grâce à elles ? Comment évaluer leurs acquisitions ? Comment déterminer les démarches pédagogiques les mieux adaptées ? Autant de questions auxquelles la formulation des contenus de l'enseignement en termes de "programmes", même complétés par des "instructions", ne permet pas de répondre.

La définition des objectifs éducatifs.

Les textes officiels définissent les objectifs en termes de "compétences" à promouvoir. Celles-ci sont exprimées à l'aide de verbes à l'infinitif indiquant les activités dont l'élève doit faire preuve à l'issue de ses apprentissages.

Définir des objectifs au lieu d'énoncer des programmes renseigne plus nettement sur l'action éducative à conduire. Cela revient à annoncer clairement, dès le départ, les acquisitions que l'on vise pour les élèves. Les notions mathématiques ne sont pas seulement citées comme devant faire l'objet d'une étude, ainsi qu'elles le seraient dans un programme,

mais il est précisé de quels types de capacités les élèves doivent faire preuve à leur sujet à l'issue de cette étude. C'est ainsi que, s'agissant des nombres décimaux :

- le programme de 1945 indiquait, pour le cours moyen : "Nombres décimaux en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueurs de distances, de poids et de capacités. Changement d'unités (décimales)".
- le programme de 1970 était plus laconique : "Nombres naturels et décimaux : nom et écriture". Les instructions, en 1945 comme en 1970, donnaient quelques exemples de démarches pédagogiques mais ne précisaient pas les compétences attendues des élèves.
- l'arrêté de 1980 réserve à cette notion un paragraphe qui, sous le titre "Ecrire, nommer et comparer les nombres décimaux" énumère une liste de compétences dont l'élève doit faire preuve à l'issue du cycle moyen, compétences que précisent en outre les nombreux exemples proposés par les instructions qui consacrent plusieurs pages à ce thème.

Cet exemple confirme la nécessité d'opérer une lecture conjointe des "objectifs" et des "instructions complémentaires". La lecture des seuls objectifs, surtout si elle s'effectue avec l'arrière pensée de lire des programmes, expose à trois types d'erreurs :

1) croire que les différentes capacités que l'on désire faire acquérir aux élèves se confondent avec les activités à faire pratiquer en classe.

2) croire que les objectifs énumérés constituent autant de points d'un programme qu'il faudrait développer de façon linéaire.

3) croire que la longue énumération des objectifs et l'inventaire des notions signalées constituent un programme copieux et ambitieux.

Les instructions concernent les modalités de mise en oeuvre de l'action pédagogique. Elles contiennent des exemples d'activités, des idées de progressions, des propositions de situations mathématiques, des précisions sur les contenus. Elles répondent à la question : "comment sont enseignées les notions importantes ?". Mais la lecture des instructions n'acquiert toute sa portée que si l'on connaît les objectifs que l'on

se propose d'atteindre et en fonction desquels les activités sont conçues, organisées et pratiquées.

Les acquisitions des élèves à la fin du C.M. 2,

Avec les programmes de 1970, il était difficile de répondre à cette question. En effet, on pouvait lire, pour les cours moyens 1ere et 2e année : opérations et leurs propriétés, exemples de relations numériques, proportionnalité, fractions, cercle, volume, ... etc. Dans ces conditions, comment savoir, avec précision, quelles connaissances pouvaient être attendues des élèves, de quels savoir-faire allaient-ils faire preuve, comment leurs acquisitions devaient-elles se manifester ?

Avec les textes de 1980, les connaissances, les savoir-faire, les comportements auxquels on prépare les enfants par l'enseignement des mathématiques sont clairement déclarés dans la partie consacrée aux objectifs. Ceux-ci sont classés et ordonnés pour des raisons de présentation. En aucun cas l'ordre dans lequel ils sont présentés ne constitue un ordre chronologique pour le travail dans la classe, ou une progression. Les différentes rubriques dans lesquelles ils sont classés sont significatives des intentions éducatives. Rappelons ces rubriques pour le détail desquelles il convient de se reporter aux textes officiels :

1 - Situations - problèmes.
2 - Ecrire, nommer et comparer les nombres naturels.
3 - Ecrire, nommer et comparer les nombres décimaux.
4 - Calculer sur les nombres.
5 - Représenter et utiliser des fonctions numériques.
6 - Mesurer.
7 - Activités géométriques.

Si l'énoncé des objectifs, dans chacune de ces rubriques permet de savoir à quelles capacités on prépare les élèves, donc à quels types de savoir et de savoir-faire on peut s'attendre de leur part, en revanche, il est bien clair que de telles déclarations de bonnes intentions ne peuvent en rien informer sur les acquisitions réellement disponibles de

la part des élèves à leur sortie de l'école élémentaire. Il est nécessaire, pour cela, de mettre en place une évaluation en fin de Cycle Moyen ou à l'entrée au Collège, évaluation désormais possible à cause de l'existence d'objectifs. Il suffit, pour chacun d'eux, de déterminer des critères d'évaluation et de distinguer, comme il est indiqué dans la "présentation générale" des contenus de formation au Cycle Moyen :

- les éléments rigoureusement indispensables pour aller plus loin.
- les éléments dont l'acquisition doit être considérée comme normale, sans toutefois que leur absence constitue une contre-indication formelle à la poursuite de la scolarité.
- les éléments en cours d'acquisition.

On peut raisonnablement penser que les éléments de la première catégorie marquent le seuil en deçà desquels le passage en sixième s'avère contre-indiqué.

Considérons, à titre d'exemple, dans la rubrique "Ecrire, nommer et comparer les nombres décimaux", l'objectif : "encadrer un décimal par deux décimaux, en particulier deux naturels consécutifs". Cet objectif peut s'entendre par référence à une infinité de problèmes dont on pourra retenir les trois suivants :

a) - trouver les deux naturels consécutifs qui encadrent 4,75.
b) - trouver les deux nombres qui, parmi les suivants, encadrent au plus près le nombre 0,995 :
0,95 ; 1 ; 0,9 + 0,09 ; 0,01 + 0,95
c) - même problème avec :
0,999 ; 0,33 x 3 ; 0,898 + 0,098 ; 1 - 0,015 ; $1 - \frac{5}{100}$
(signalons que "savoir désigner - ou reconnaître - un nombre décimal sous des écritures additives, soustractives, multiplicatives, fractionnaires" constitue un objectif du Cycle Moyen).

La difficulté de niveau peut se trouver modulée suivant les circonstances dans lesquelles le problème est à résoudre (oralement à partir de données orales ; exercice numérique formel écrit ; démarche intégrée dans une autre activité ; etc.) et selon que l'on tient compte ou non du temps de résolution.

On peut considérer que le premier problème proposé (a), y compris sous une forme exclusivement orale, correspond à un niveau de compétence indispensable en fin de Cycle Moyen. Le deuxième problème (b), au moins sous la forme d'un exercice écrit, correspond à un niveau qui doit normalement être atteint mais non indispensable pour la poursuite de la scolarité. Quant au troisième problème (c) il relève de compétences encore en cours d'acquisition pour la plupart des élèves.

Pour la question : "Que savent les élèves en mathématiques lorsqu'ils arrivent au collège et que sont-ils capables de faire avec ces savoirs ?", il faut donc chercher la réponse, pour chaque enfant, dans l'évaluation de ses compétences au regard des objectifs éducatifs que l'on s'était fixés. Un tel travail devrait être entrepris conjointement par les professeurs de 6^{e} et les instituteurs de C.M. 2., pour tout le secteur de recrutement d'un même collège. C'est à ce prix que la fameuse "liaison C.M. 2.-6^{e}" pourra exister vraiment.

Les pratiques pédagogiques.

L'analyse des objectifs à atteindre permet désormais, au maître de C.M. 2., de se donner les moyens de mieux détecter et choisir les situations dont il peut tirer parti et, surtout, de déterminer la meilleure façon de les exploiter. Les instructions complémentaires qui accompagnent ces objectifs sont là pour l'y aider. Nous l'avons déjà dit, la lecture conjointe des deux parties s'impose ; elle est facilitée par le fait que les instructions reprennent exactement les sept rubriques citées plus haut.

Il est difficile de résumer ces textes et la seule solution, pour le professeur de 6^{e}, consiste à les acquérir afin de s'y reporter. Arrêtons-nous seulement sur deux rubriques qui sont significatives des préoccupations actuelles.

La première rubrique concerne les "situations-problèmes" et occupe une place privilégiée puisque placée en tête. La notion traditionnelle de "problème" se trouve considérablement élargie et le texte

définit très bien le sens et la portée pédagogique des "situations-problèmes". On précise en outre qu'"il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes pour qu'ils progressent dans leur capacité à les faire. Un apprentissage spécifique d'ordre méthodologique est nécessaire". C'est ainsi qu'il est recommandé de préparer les élèves à :

- rechercher, sélectionner et organiser l'information,
- résoudre des problèmes par une démarche raisonnée,
- valider les solutions,
- communiquer les démarches et les résultats.

Ainsi se propose-t-on de "développer chez l'enfant, par l'enseignement des mathématiques, des savoir-faire et des comportements (procédure de recherche, de preuve, ... etc.) dans tous les domaines". Les "situations-problèmes" constituent, pour l'apprentissage des notions mathématiques, une source de motivations en même temps qu'un champ d'applications.

La deuxième rubrique qui mérite notre attention est celle qui porte le titre : "Calculer sur les nombres". On y trouve, en ce qui concerne les objectifs, les capacités dont les élèves devraient faire preuve à l'issue du C.M.2. et, parmi elles :

- élaborer et mettre en oeuvre des procédures mentales de calcul sur les nombres naturels et décimaux,
- élaborer des procédures de calcul approché sur les naturels et les décimaux et savoir :
  - évaluer l'ordre de grandeur et trouver les encadrements du résultat d'un calcul,
  - s'assurer de la vraisemblance d'un résultat.

Dans la partie "instructions complémentaires", ces thèmes sont largement repris sous le titre "calcul mental" et "calcul approché" avec de nombreuses indications touchant la mise en oeuvre pédagogique des activités s'y rapportant. On n'a jamais été aussi explicite sur la nécessité d'organiser des séances quotidiennes de calcul mental dont toutes les formes possibles sont évoquées, ou sur l'obligation de mettre

en place un véritable apprentissage spécifique du calcul approché, autant oral qu'écrit, en particulier dans le souci de contrôler la vraisemblance d'un résultat.

Un document de base pour la continuité entre l'Ecole et le Collège.

L'arrêté du 16 juillet 1980 affirme que "l'harmonisation des instructions pour le Cycle Moyen et pour les classes de 6^e et de 5^e est pratiquement réalisé". Une confrontation des textes en cause, pour les mathématiques, confirme très largement cette assertion.

On sait qu'aux termes du décret du 28 décembre 1976 (article 9, non modifié sur ce point par le décret du 19 novembre 1980), "l'élève parvenu à la fin du cycle moyen accède de plein droit à la première année du collège sauf si le maître de la classe primaire qu'il fréquente estime qu'il a besoin de redoubler cette classe avant d'entrer au collège".

Une continuité et une harmonisation réelles sont nécessaires, en matière de contenus comme de méthodes, plus particulièrement entre les deux niveaux (C.M. 2. et 6^e) auxquels s'effectue le passage d'un type d'établissement à l'autre. Il convient en outre de déterminer, de façon aussi précise que possible, les objectifs de divers ordres (savoir-faire et connaissances) dont le fait qu'ils ne soient pas atteints en fin de Cycle Moyen constitue un facteur certain d'échec pour la scolarité au Collège.

Les textes de juillet 1980 constituent un ensemble de références communes pour les "contacts fréquents entre les enseignants de l'école et ceux du collège" afin "d'aider les uns et les autres à infléchir, autant que de besoin, leurs pratiques respectives, et de préciser les références communes à l'évaluation" ou encore pour faciliter" cette continuité entre l'organisation du travail et la vie scolaire dans les deux institutions".

———— o ————

Christophe a 7 ans. Il va rentrer au CE 2.

Je m'amuse à sonder sa culture mathématique et je lui ai proposé le jeu suivant : chacun à son tour pense à un nombre (il ne connait pas les nombres décimaux), et le fait deviner à l'autre en répondant par oui ou non aux questions : "est-il plus petit que... ?" ou "est-il plus grand que... ?".

Je veux lui faire deviner 0. (Je veux faire remarquer à cette jeune cervelle que N a un plus petit élément).

Au bout de quelques questions, il en arrive à :

" - Est-ce qu'il est plus petit que zéro ?
- Plus petit que zéro ? Tu as déjà vu ça, toi, un nombre plus petit que zéro ? (sur un ton indigné !)
- Ben oui ! Bien sûr !
- Hé bien alors, dis-moi un nombre plus petit que zéro (ton triomphant !)
- Ben ! (-1), (-2),... Il y en a beaucoup !
- Tu connais ça toi ? Et où l'as-tu vu ?
- Ben, dans les ascenseurs !
- ... c'est vrai, tu as raison ! (après quelques secondes ahuries)
- Et lequel est le plus grand : (-1) ? ou (-2) ?
- (-1) ! C'est plus haut que (-2) ! ".

Pour Christophe du moins, les mathématiques sont bien une science expérimentale ...

p.c.c. C. Dufossé

UN EXEMPLE DE TRAVAIL D'HARMONISATION C.M. 2 - 6E

PAR HÉLÈNE CLEMENT (*)

Au début de l'année scolaire 1978-79, dans le cadre de ses activités, le groupe I.R.E.M. de BRIANCON a convié des enseignants des classes du CM2 à participer à ses travaux, ainsi que le Directeur du C.I.O. de BRIANCON.

Quatre séances de travail ont permis d'instaurer un dialogue fructueux entre collègues des Ecoles Elémentaires et des collèges de Briançon.

La première séance a été consacrée à une prise de contact et à l'élaboration d'un plan de travail. Il a été convenu d'étudier le nouveau programme de sixième à l'aide d'une progression proposée par l'Inspection Pédagogique Régionale (document ci-joint). Le but était de permettre une meilleure connaissance du travail fait en sixième, mais aussi d'essayer de définir les notions définitivement acquises en fin de primaire ainsi que celles restant à cours d'acquisition.

Nous proposons tout d'abord une liste de notions devant être acquises par tous avec la remarque, fruit de l'expérience des uns et des autres, qu'à certains moments, au niveau de l'Ecole Elémentaire, on avait peut-être trop demandé aux enfants dans un souci de perfectionnisme. Ce classement a été établi avec l'idée primordiale que l'on admet tous les élèves ou presque en sixième sans qu'il soit question de les répartir en fonction de leur niveau.

(*) professeur au Collège des Gascius - Briançon
animatrice à l'IREM d'Aix-Marseille

- Nombres décimaux : lecture, écriture (orthographe), comparaison, le tout sur des exemples simples.

- Opérations : techniques avec une restriction pour la division pour laquelle on ne se contentera pas d'une simple révision en 6ème. Sens de l'opération : l'enfant doit savoir résoudre un problème simple, à une étape, quelle que soit l'opération concernée.

- Géométrie : nom et écriture de quelques ensembles de points.

segment d'extrémités A et B	[AB]
demi-droite d'origine A et contenant B	[AB)
droite contenant les points A et B	(AB)
secteur angulaire	[OA,OB]

-distinction entre un ensemble de points et une de ses mesures : [AB] et sa mesure AB.
-unités : conversions.
-observation, représentation, description de quelques figures simples (triangles, parallélogrammes, rectangles...)
-calcul d'aires et de volumes.

Enfin nous proposons quelques exemples de notions en cours d'acquisition, questions qui seront reprises au Collège pour une mise en forme définitive, l'âge de l'élève le permettant.

La proportionnalité : elle ne sera abordée que dans des situations concrètes, par l'expérience et ne sera pas étudiée pour elle-même. En particulier le tableau n'est pas nécessaire, il ne permet que de rassembler, de visualiser le résultat d'une expérience.

Les fractions : ni théorie, ni mémorisation et les exemples choisis seront simples.

Il nous paraît utile, pour compléter ce classement d'attirer votre attention sur les quelques propositions suivantes :

- il est nécessaire que l'enfant lise et pratique en permanence des énoncés.

- il est nécessaire que l'enfant exerce sa mémoire et il est important de choisir judicieusement les domaines où doit se pratiquer cet exercice (tables, règles de calcul,...).

- bien que dans beaucoup de domaines une technique bien acquise sécurise l'élève, il est important d'entretenir la "débrouillardise". Exemple : pour calculer le produit de deux décimaux, que ce soit en ligne ou même en utilisant la disposition en colonne, il serait souhaitable de calculer d'abord le produit de deux entiers. Pour calculer 2,3 x 0,02, on calculera 23 x 2. On constate que l'élève refuse souvent cette technique.

- Une grande importance doit être accordée à l'ordre de grandeur et au calcul rapide.

Ce document évidemment est très loin des manuels proposés au primaire, quels qu'ils soient. Nous l'avons élaboré, nous semble-t-il dans l'esprit des programmes, surtout de celui de la classe de 6ème.

Il n'a pas la prétention de devenir un exemple, sa seule vocation est de servir de base de réflexion. Les membres du groupe I.R.E.M. restent à votre disposition pour en débattre et remercient tous les collègues ayant accepté de participer bénévolement à son élaboration.

Ce travail réalisé, la question de l'évaluation se posait. A la rentrée 1979-80 le groupe de travail a mis au point les épreuves standardisées à donner aux élèves en fin de CM2 et/ou en début de 6ème.

Ces épreuves, comme toutes épreuves de ce genre, ne sont pas parfaites, l'utilisateur les prend comme un outil d'évaluation s'intégrant dans sa pratique, il en conserve la maîtrise.

Nous insistons sur le fait que ce travail ne doit pas être pris comme un modèle. Il est le compte rendu d'une action d'un groupe d'enseignants et de Conseiller d'Orientation agissant ensemble dans l'intérêt des élèves. Le C.I.O. de Briançon a assuré la réalisation matérielle des documents et des épreuves.

ANNEXE I : INDICATIONS POUR UNE PROGRESSION EN SIXIÈME

ANNEXE II : ÉPREUVES STANDARDISÉES

ANNEXE III : CONSIGNES DES ÉPREUVES

ANNEXE IV : RÉSULTATS ET ANALYSES

ANNEXE I

INDICATIONS POUR UNE PROGRESSION EN SIXIÈME

		Nbre de semaines
Bilan des connaissances des élèves (lecture, orthographe, calcul) Nombres décimaux (entiers ou à virgule) écriture, lecture. Contrôle des techniques opératoires et du sens de l'addition (resp. la soustraction). Calcul mental. Comparaison des décimaux.	Ligne droite, demi-droite, segments d'une même droite (réunion intersection. Plan. Droites, demi-droites, segments du plan. Longueur. Encadrement. Ordre de grandeur.	6
Contrôle de la technique opératoire et du sens de la multiplication des nombres décimaux. Calcul mental. Propriétés de la multiplication. Propriétés de l'ensemble des multiples de 2 (resp. 5,3,9). Preuve par 9 de la multiplication.	Secteurs Propriétés usuelles des droites du plan (parallélisme, orthogonalité). Usage de l'équerre et du Té. Figures usuelles (bande, parallélogramme, carré, rectangle, losange, triangle..) Réseaux - Quadrillages.	4 à 5 Noël
Contrôle du sens et de la technique opératoire de la division exacte des entiers naturels et de la division approchée des décimaux, entiers ou à virgule. Preuve par 9 de la division exacte.	Aires de domaines plans, unités d'aires. Aires du carré, du rectangle, du parallélogramme. Calcul d'une dimension.	6
Suites proportionnelles et leurs applications : - échelles des plans et cartes, - pourcentages, - vitesse, distance parcourue, - etc...	Aires du triangle et du trapèze Calcul d'une dimension. Vocabulaire lié à la description du cercle et du disque. Longueur du cercle, aire du disque. Arc (longueur). Secteur circulaire (aire) en liaison avec les unités d'angles - Usages du rapporteur. Aire de la couronne circulaire (éventuellement).	8 Pâques
Nombres relatifs. Introduction et définition des entiers relatifs. Extension aux nombres décimaux relatifs à virgule. Addition dans l'ensemble des entiers relatifs, extension aux décimaux relatifs à virgule. Propriétés (commutativité, associativité, existence d'un neutre, nombres opposés). Soustraction. (La notation définitive des relatifs devrait intervenir dès l'introduction).	Graduation de la droite. Repérage d'un point sur une droite orientée régulièrement graduée. Repérage d'un point dans un plan quadrillé.	6

OPERATIONS

I Calcule. Si tu as besoin de poser une opération, utilise la partie blanche.

1 1 789 + 46,4 = _____

2 8 402,53 + 609,06 = _____

3 789 - 46,4 = _____

4 8 420,54 - 609,06 = _____

5 342 x 72 = _____

6 104 x 102 = _____

7 24 x 0,4 = _____

8 2,5 x 0,4 = _____

9 24 624 : 72 = _____

10 21,12 : 3 = _____

11 124 : 2,5 = _____

Calcule au centième près :

12 57,3 | 2,3

II	Complète
13	69 x 100 = _____
14	128 : 10 = _____
15	24,5 x 1 000 = _____
16	2 450 : _____ = 24,5
17	53,7 x _____ = 53 700 .
III	On dit que le produit 2 457 x 342 = 840 294
	Complète sans calculer :
18	24,57 x 34,2 = _____
19	2,457 x 342 = _____
20	245,7 x _____ = 84,0294
21	24 570 x 34 200 = _____

C.O. DE BRIANCON ANNEXE II

MATHÉMATIQUES CM2 / 6ème / 80

Nom _____ Prénom _____ Né (e) le _____

Ecole _____ Score : _____ Catégorie : _____

N U M E R A T I O N

I Dans le nombre 24 537,96

1 Quel est le chiffre des unités _____

2 Quel est le chiffre des unités de mille _____

3 Quel est le chiffre des centièmes _____

4 Quel est le chiffre des dixièmes _____

II Ecris en chiffres :

5 sept mille huit cent cinquante quatre _____

6 un million trois mille deux _____

7 treize unités cinq centièmes _____

8 huit millièmes _____

Ecris en lettres :

9 1 293 _____

10 23 002 _____

11 12,32 _____

12 _____

13 _____

14 _____

III Range les nombres du plus petit au plus grand (ordre croissant)

15 12,4 ; 7 ; 0,43 ; 9,6 ; _____

16 6,43 ; 6 ; 6,4 ; 6,02 ; _____

17 0,7 ; 0,07 ; 0,1 ; 0,72 ; 0,02 ; 0,68 ;

_____

IV Calcul mental :

18 : _____ 21 : _____

19 : _____ 22 : _____

20 : _____ 23 : _____

24 :

MATHÉMATIQUES CM2 / 6ÈME / 80

Nom _____ Prénom _____ Né (e) le _____

Ecole _____ Score : _____ Catégorie : _____

N U M E R A T I O N

I Dans le nombre 24 537,96

1 Quel est le chiffre des unités _____

2 Quel est le chiffre des unités de mille _____

3 Quel est le chiffre des centièmes _____

4 Quel est le chiffre des dixièmes _____

II Ecris en chiffres :

5 sept mille huit cent cinquante quatre _____

6 un million trois mille deux _____

7 treize unités cinq centièmes _____

8 huit millièmes _____

Ecris en lettres :

9 1 293 _____

10 23 002 _____

11 12,32 _____

12 _____

13 _____

14 _____

III Range les nombres du plus petit au plus grand (ordre croissant)

15 12,4 ; 7 ; 0,43 ; 9,6 ; _____

16 6,43 ; 6 ; 6,4 ; 6,02 ; _____

17 0,7 ; 0,07 ; 0,1 ; 0,72 ; 0,02 ; 0,68 ; _____

IV Calcul mental :

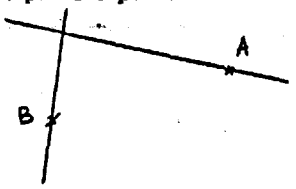
18 : _____ 21 : _____

19 : _____ 22 : _____

20 : _____ 23 : _____

24 :

16 Dessine en couleur la droite passant par les points A et B



17 Dessine une droite. Place un point E sur cette droite. Place un point F qui n'est pas sur cette droite. Trace la droite passant par le point E et le point F.

18 Mesure la distance du point L au point M :

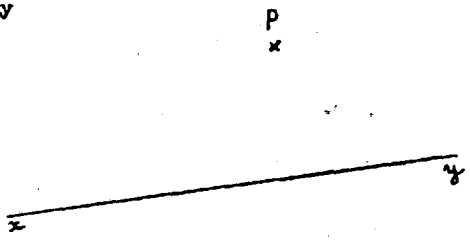
19 Trace le cercle de centre L et de rayon 3 cm

20 Trace le cercle de centre M passant par le point L.

21 Quel est le rayon du cercle de centre M passant par L.

22 Trace avec l'équerre la droite qui passe par le point P et qui est perpendiculaire à la droite xy

23 Trace la droite qui passe par le point P et qui est parallèle à la droite xy



NDLR:Pour des raisons d'édition chaque page a été réduite de moitié. *En tenir compte dans la lecture des épreuves de géométrie.*

ENONCES

A | Le propriétaire d'un terrain de 6 500 m^2 veut faire un lotissement. Il garde pour lui 2 300 m^2 et partage le reste en 6 parties de même aire.

Calcule l'aire d'une partie.

Opérations

B | Si les passagers d'un avion emportent le maximum de bagages autorisés, on obtient une masse de 1 288 kg.
Si on avait accordé 8 kg de plus par passager on aurait atteint 1 512 kg.
Quel est le nombre de passagers ?

Quelle est la masse de bagages autorisés pour chaque passager ?

Opérations

C | J'achète trois pains à 1,45 F l'un et cinq gâteaux à 3,10 F l'un.

Je paie avec un billet de cinquante francs.

Combien me rend-on ?

Opérations

Rédige la réponse des problèmes suivants :

D | J'achète 6 litres de lait à 2,35 F le litre.

Combien dois-je payer ?

Opérations

ANNEXE I

CENTRE D'INFORMATION ET D'ORIENTATION
Maison de l'Education
12, rue Alphand B.P. 93
05106 - BRIANCON CEDEX
Tél. 21. 05. 51

Le Directeur du Centre d'Information et d'Orientation de Briançon

aux Maîtres des CM2

Epreuves normalisées de Français et de Mathématiques - 80 -

Suite à votre demande nous vous adressons les épreuves normalisées.

Date d'utilisation : entre le 29 mai et le 6 juin.

Calendrier des épreuves :

29 mai - 6 juin : passation des épreuves
14 juin : retour au C.I.O. des relevés des résultats
18 juin : expédition par le C.I.O. des étalonnages
28 juin : retour au C.I.O.
- des épreuves de Mathématiques
- des notices individuelles
- des textes lecture de document.

La passation des épreuves peut être décalée de quelques jours, mais respecter si possible les autres dates.

Précaution : Avant de commencer les épreuves, bien dire aux élèves qu'il s'agit d'un travail pour voir comment ils se situent par rapport aux élèves de la région, ou de voir s'ils ont bien compris les leçons de l'année... ceci afin qu'ils ne se sentent pas en situation d'examen.

Etalonnage : l'exploitation des résultats ne peut se faire à partir des résultats bruts, seul l'étalonnage permet de porter une appréciation. Dans chacune des rubriques, les résultats obtenus par les élèves seront ordonnés selon des considérations statistiques en 5 catégories. Cet étalonnage en cinq catégories vous permettra une comparaison plus facile avec les appréciations que vous portez sur les élèves et à nous de pouvoir procéder plus facilement au cours de la 6ème, à des calculs de validation.

A 7 %	B 24 %	C 38 %	D 24 %	E 7 %
Très Bien	Bien	Moyen	Médiocre	Faible

Remarques :ces tests de connaissance ne présentent pas un caractère confidentiel, les Maîtres peuvent en communiquer les résultats aux élèves et aux familles, au même titre que les résultats d'un devoir de contrôle des résultats étalonnés (voir tableau).

Fiche individuelle des résultats : nous vous demandons de nous adresser une fiche par élève après y avoir inscrit les résultats. Cela nous permet d'avoir sur un seul document le profil de l'élève.

Etude analytique des épreuves en Mathématiques : ces épreuves étant expérimentales, pour nous permettre une étude interne nous vous demandons de nous les retourner en même temps que les fiches individuelles. Si l'étude était terminée avant le 11 juillet nous vous la ferons parvenir. Dans le cas contraire vous la recevrez en début d'année scolaire. Le groupe de travail souhaite avoir vos observations en vue d'améliorer ces épreuves.

Epreuves normalisées de connaissances

Mathématiques CM2

Juin 1980

Consignes générales

L'épreuve a été mise au point par un groupe de professeurs de 6ème, soumise à des maîtres de CM2, le C.I.O. de Briançon a apporté sa collaboration pour la mise en forme et l'élaboration statistique.

Cette épreuve est un sondage d'évaluation du programme arrêté par le même groupe de travail et qui vous a été transmis en mai-juin 1979.

Cette version étant expérimentale, il nous sera nécessaire, pour l'étude des résultats, d'avoir les épreuves corrigées. Nous pourrons, l'étude achevée, les retourner à ceux d'entre vous qui le demanderont.

Comme toute épreuve de ce genre, pour permettre les comparaisons il y a lieu de suivre strictement les consignes de passation et de correction, même si elles donnent lieu à critique.

C'est le résultat étalonné et non le résultat brut qui sert l'analyse individuelle.

C'est au maître ou au professeur, et à lui seul, qu'il appartient de faire la synthèse des éléments sur l'élève, c'est un outil d'évaluation parmi d'autres à sa disposition dans son enseignement. Les résultats permettent entre autre de situer le groupe classe parmi d'autres classes.

Cette épreuve ne saurait en elle-même être un élément d'appréciation.

Consignes d'application

On ne donnera pas les exercices les uns à la suite des autres dans une même matinée, on donnera un exercice par matinée. Chaque épreuve est en temps libre.

Pour l'homogénéité de l'épreuve il y a lieu de les donner dans l'ordre suivant :

1 - Opérations
2 - Numération
3 - Mesures
4 - Enoncés

D'une manière générale on ne donnera comme autres indications que celles qui consistent à la bonne compréhension de la façon de répondre (emplacement, brouillon...) se garder de toute intervention qui induirait les réponses des élèves.

Dire : VOUS ALLEZ FAIRE DES EXERCICES DE MATHÉMATIQUES, LISEZ ATTENTIVEMENT LES QUESTIONS, ELLES CONTIENNENT TOUTES LES INDICATIONS SUR LE TRAVAIL QUE VOUS AVEZ A FAIRE.

SI VOUS NE SAVEZ PAS RÉPONDRE À UNE QUESTION, PASSEZ-LA ET CONTINUEZ. VOUS POURREZ Y REVENIR QUAND VOUS SEREZ À LA DERNIÈRE QUESTION.

QUAND VOUS AUREZ RÉPONDU À TOUTES LES QUESTIONS AUXQUELLES VOUS POURREZ RÉPONDRE, LEVEZ LE DOIGT, ON INCITE À RÉPONDRE AU PLUS GRAND NOMBRE DE QUESTIONS.

OPERATIONS :

Faire remarquer aux élèves qu'ils doivent utiliser les parties blanches de la feuille recto-verso comme brouillon pour la partie I.

Veillez à ce que les élèves ne posent pas les opérations pour les parties II et III.

NUMERATION :

Pour le paragraphe II, les questions 12, 13, 14 seront dictées par le maître.

Dire : écris en chiffres les nombres suivants :

12 - vingt huit unités quatre dixièmes (28,4)

13 - douze unités trois millièmes (12,003)

14 - huit centièmes (0,08)

Calcul mental : le maître dit : effectuer sans les poser, les opérations que je vais dicter.
Calculer 32 + 12, écrivez la réponse sur la ligne 18, puis continuer de même pour chaque opération.

Laisser 20 secondes environ par opération.

19 - 31 + 19

20 - 7 x 8 (sept multiplié par huit)

21 - 2,5 x 10 (2,5 multiplié par 10)

22 - 47 x 2 (47 multiplié par 2)

23 - 8 x 7 (8 multiplié par 7)

24 - 28 x 5 (28 multiplié par 5)

MESURES :

Prévoir par élève une équerre, un compas, un double-décimètre.

ENONCES :

Dire : si tu as besoin de poser des opérations, utilise les parties blanches de la feuille.

Bien faire remarquer aux élèves qu'ils doivent rédiger la réponse.

Epreuves normalisées de Mathématiques

CM2 / 6ème / 80

Juin 1980

Consignes de correction

En général, un point par bonne réponse, la numération indique le nombre de points par exercice.

OPERATION

Un point par bonne réponse - maximum 21.

NUMERATION

Un point par bonne réponse - maximum 24.

question 11 : on tolèrera douze virgule trente deux.

question 15, 16, 17 : 0 pour une ligne comportant une erreur ou une omission.

MESURES

Un point par bonne réponse - maximum 23.

question 11 : prévoir un calque. On tolèrera une différence en plus ou en moins de 1 mm.

question 18 : on tolèrera une mesure comprise entre 3,8 et 4,2.

ENONCES

L'objectif étant (document Mai 79) : "L'enfant doit savoir répondre à un problème simple, à une étape, quelle que soit l'opération concernée,... il est nécessaire que l'enfant lise et pratique en permanence les énoncés", l'épreuve a été mise au point dans cette perspective.

Le barème de correction tient compte de cet objectif, c'est pourquoi on exige la solution complète et l'exactitude des opérations.

Pour le problème 4 on admettra la réussite si le résultat est exact et la rédaction incomplète.

Le problème 1 devrait être théoriquement résolu par tous les élèves, de même que le problème 2.

Les problèmes 3 et 4 permettront de voir jusqu'où chaque élève peut aller.

On mettra une croix dans la case de la colonne E du tableau de relevé des résultats si aucun problème n'est résolu.

On mettra une croix dans la case correspondant à chaque problème résolu.

On pourra donc pour certains élèves avoir 4 croix si réussite totale.

Lors de la correction, entourez la lettre devant chaque énoncé si le problème est correctement résolu. Cela vous facilitera le report sur la feuille de relevé et à nous l'analyse interne. Dans le cas contraire tirez un trait en diagonale sur la partie réservée à la solution et aux opérations.

ANNEXE IV

RÉSULTATS ET ANALYSES

Rappel

En Mai 1979 le groupe de travail professeurs de mathématiques de 6ème et instituteurs avait essayé de définir les notions qui devaient être acquises à l'entrée en 6ème et celles qui pouvaient être considérées comme "en cours d'acquisition". Le point de départ avait été le programme de 6ème.

Faisant suite à cette étude, des épreuves d'évaluation étaient mises au point. Elles ont été proposées aux maîtres du secteur du C.I.O. de Briançon : à savoir la circonscription de l'Education de Briançon, plus les cantons de Savines et d'Embrun.

Sur 560 élèves de CM2, 405 ont passé les épreuves. Ces 405 élèves peuvent être considérés comme un échantillon représentatif de la population du secteur.

Analyse des résultats

OPERATIONS

		Pourcentage de réussite par question
1 - 1789 + 46,4		86 %
2 - 8 402,53 + 609,06		90 %
3 - 789 - 46,4		78 %
4 - 8 420,54 - 609,06		79 %
5 - 342 x 72		86 %
6 - 104 x 102		78 %
7 - 24 x 0,4		76 %
8 - 215 x 0,4		68 %
9 - 24 624 : 72 entier		78 %
10 - 21,12 : 3	(1)	66 %
11 - 124 : 2,5	(1)	47 %
12 - 57,3 : 2,3 entier	(1)	53 %

(1) A noter que sur 76 élèves ayant 1 ou 2 ans de retard sur le déroulement de la scolarité à l'Ecole Elémentaire, 44 obtenaient entre 14 et 0, c'est-à-dire se situaient dans le dernier tiers des résultats.

13 - 69 x 100	95 %
14 - 128 : 10	59 %
15 - 24,5 x 1 000	66 %
16 - 2 450 : 100	70 %
17 - 53,7 x 1 000	65 %
18 - 24,57 x 34,2	76 %
19 - 2,457 x 342	71 %
20 - 245,7 x = 84,0254	53 %
21 - 24 570 x 34 200	60 %

Les résultats sont considérés comme satisfaisants. En particulier pour les questions 10, 11, 12 qui ne sont pas un objectif du CM2.

NUMERATION

I - Questions sur les unités : réussies à 70 %.

II - Ecriture - questions réussies à 60 %
sauf la question 6 (40 % pour "un million trois mille deux").

III - Ordre, seulement 40 % de réussite. On peut penser que les élèves ont des difficultés à ranger les nombres particulièrement s'il s'agit de nombres compris entre 0 et 1, même pour ceux qui par ailleurs ont de bons résultats.

On peut se demander également si la présentation typographique n'a pas perturbé certains enfants.

IV - calcul mental : réussi à 90 %.

MESURES

Les résultats sont satisfaisants et n'appellent pas de commentaires particuliers.

ENONCES

L'énoncé A a été réussi par 18 %
L'énoncé B a été réussi par 72,6 %
L'énoncé C a été réussi par 70,8 %
L'énoncé D a été réussi par 81,2 %
* aucun énoncé réussi : 3 % (12 élèves sur 385).

Nous avons voulu voir si les élèves de CM2 à faible effectif étaient ou n'étaient pas défavorisés par rapport aux élèves de CM2 à une division par cours.

Comme il n'y avait pas de classe de CM2 ayant entre 8 et 15 élèves, nous avons comparé les résultats des élèves des classes de 16 élèves et plus par CM2, avec ceux des classes de 8 et moins par CM2.

Aux 4 problèmes A, B, C, D, les pourcentages de réussite des élèves des divisions de CM2 de 8 élèves et moins sont supérieurs à ceux des divisions de 16 et plus. On ne peut conclure à une supériorité, mais on peut dire que les élèves des divisions de CM2 à 8 élèves ou moins ne sont pas défavorisés par rapport aux élèves qui se trouvent dans les classes n'ayant qu'une division de CM2.

COMMENTAIRES GENERAUX

Dans l'ensemble les épreuves semblent adaptées à l'objectif fixé. Elles ne subiront pas de changement notable car il est nécessaire de les utiliser sur 2 ou 3 ans.

Quelques petites modifications seront apportées, en numération pour la partie III, en ce qui concerne la présentation.

Un énoncé sera remplacé. Quelques énoncés ne nécessitant pas de calcul, mais contenant des éléments à éliminer ou nécessitant des éléments manquants pour trouver le résultat, seront ajoutés (souhait de maîtres).

Nous rappelons que ces épreuves ne sauraient en aucun cas remplacer l'appréciation du maître, qu'elles sont un élément d'évaluation parmi d'autres qu'ils possèdent et que c'est à lui seul qu'appartient la synthèse. Par contre, pour pouvoir être fiable ces épreuves demandent dans l'application et la correction de s'en tenir avec rigueur aux consignes.

ASCENSION SOCIALE

UN JEU PROPOSÉ PAR *Gérard Rauzy*

On dispose d'un "damier" ou plutôt d'un "quadrillage" infini du plan réalisé par une trame de lignes horizontales et verticales équidistantes.

Sur ce quadrillage on répartit un nombre fini de pions en posant chaque pion à l'un des "sommets" du quadrillage (intersection d'une horizontale et d'une verticale du quadrillage), deux pions ne pouvant être mis sur le même sommet.

Partant d'une telle configuration, on "joue" comme au "solitaire", c'est-à-dire que les pions A et B étant consécutifs sur une même horizontale ou une même verticale (A étant indifféremment à droite ou à gauche de B, ou bien en haut ou en bas de B) et le sommet C symétrique de A par rapport à B étant inoccupé, on peut "prendre" B avec A, de sorte que dans la nouvelle configuration, le pion B disparait, le pion A vient en C, les autres pions restant à leur place (voir par exemple figure 1).

Figure 1.

On particularise maintenant une ligne horizontale de référence : le "niveau zéro", et on dispose les pions de la configuration initiale uniquement au dessous ou sur cette ligne. Le "jeu" consiste alors à amener un pion au moins dans la configuration finale au plus haut niveau possible : par exemple dans la configuration de la figure 2 on peut amener un pion au niveau 2.

Fig.2

1e question : Montrer, qu'en partant de la configuration de 8 pions :
on peut, en 7 coups, amener un pion au niveau 3.
Existe-t-il une configuration de 7 pions permettant d'aboutir au même résultat ?

2e question : Existe-t-il une configuration initiale qui permette en un nombre fini de coups, d'amener un pion au niveau 5 ?

UN TEXTE DE :
HENRI LEBESGUE (1875-1941)

SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA NOTION D'INTEGRALE

PRÉSENTÉ PAR ROBERT ROLLAND (*)

I - PRESENTATION

Le texte de H. Lebesgue que nous présentons ici, a été publié en 1927 dans la revue de métaphysique et de morale (T. XXXIV n° 2,1927). Ce texte est le compte rendu d'une conférence faite à Copenhague le 8 Mai 1926.

Rappelons que c'est au mathématicien français H. Lebesgue que nous devons l'introduction de l'intégrale qui porte son nom (cf. [4]), et dont les diverses généralisations jouent actuellement un rôle central dans de nombreux secteurs des mathématiques.

Dans cet écrit, l'auteur, tout en rappelant l'évolution de la notion d'intégrale depuis Cauchy, fait une analyse riche en perspectives mathématiques sur les idées qui l'ont conduit à introduire une nouvelle notion d'intégrale. Parmi les mathématiciens éminents, rares sont ceux qui, comme Lebesgue, se sont autant attachés à exposer clairement les idées maîtresses qui les ont guidés dans leurs découvertes. On remarquera que l'article est d'une très grande clarté ; Lebesgue parvient, tout en évitant les détails techniques, à donner dans ce texte de vulgarisation une idée précise de "son intégrale".

Le lecteur qui voudrait un développement complet de l'intégrale de Lebesgue par Lebesgue lui-même pourra se référer à [6] .

(*) animateur à l'IREM d'Aix-Marseille

En ce qui concerne l'évolution de la notion d'intégrale avant Lebesgue, c'est au mathématicien français Augustin Louis Cauchy (1789-1857) et au mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) qu'il convient de se référer (cf. [1] et [6]).

II - TEXTE

SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA NOTION D'INTEGRALE*

Messieurs,

Laissant de côté tous les développements techniques, nous allons examiner ensemble les modifications successives, les enrichissements de la notion d'intégrale et comment sont apparues d'autres notions utilisées dans les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles.

Avant Cauchy, il n'y avait pas de définition de l'intégrale, au sens actuel du mot définition. On se bornait à dire quelles étaient les aires qu'il fallait additionner ou soustraire pour obtenir l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Pour Cauchy, une définition est nécessaire ; car, avec lui, apparaît le souci de rigueur qui est la caractéristique des mathématiques modernes. Cauchy définit à peu près comme nous le faisons maintenant, les fonctions continues et les intégrales de ces fonctions. Pour arriver à l'intégrale de f(x), il lui suffit de former les sommes

$$S = \sum f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i), \qquad (1)$$

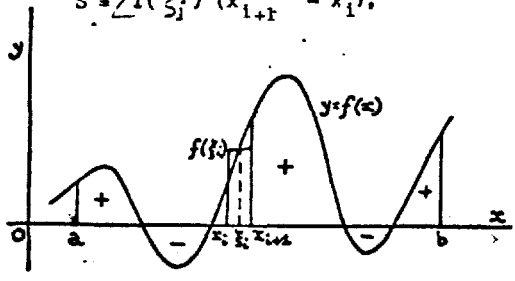


fig. 1

* Conférence faite à Copenhague, le 8 mai 1926, à la Société Mathématique et communiquée par M. Bonnesen, directeur de la Matematisk Tidsskrift.

que les arpenteurs et les mathématiciens de tous les siècles ont utilisées pour le calcul approché des aires, et d'en déduire $\int_a^b f(x)dx$ par un passage à la limite.

Seulement, tandis que la légitimité d'un tel passage était évidente pour qui parlait de la notion d'aire, Cauchy doit démontrer que les S tendent bien vers une limite dans les conditions qu'il envisage. Une nécessité analogue s'impose chaque fois qu'on remplace par une définition purement logique l'emploi d'une notion expérimentale. Il faut ajouter que l'intérêt de l'être défini n'est plus évident, il ne peut ressortir que de l'étude des propriétés de cet être.

C'est la rançon du progrès logique. Celui qu'a fait faire Cauchy est si considérable qu'il a une ampleur en quelque sorte philosophique. On dit souvent que Descartes a ramené la géométrie à l'algèbre ; je dirais plus volontiers que, par l'emploi des coordonnées, il a ramené toutes les géométries à celle de la droite et que celle-ci, en nous dotant des notions : continu et nombre irrationnel, a permis à l'algèbre d'atteindre à sa portée actuelle.

Pour que la réduction des géométries à celle de la droite fût achevée, il restait pourtant à éliminer un certain nombre de notions relatives aux géométries à plusieurs dimensions telles que longueur d'une courbe, aire d'une surface, volume d'un corps. C'est précisément là le progrès qu'a réalisé Cauchy. Après lui, il a suffi que les Arithméticiens construisent le continu linéaire à l'aide du nombre entier pour que l'arithmétisation de la science soit effectuée.

Et maintenant, devons-nous nous borner à faire de l'Analyse ? Non. Certes, tout ce que nous ferons pourra se traduire dans le langage arithmétique, mais si l'on renonçait à avoir des vues directes, géométriques, intuitives, si l'on était réduit à la pure logique qui ne permet pas de choisir entre tout ce qui est exact, on ne penserait guère à bien des questions, et certaines notions, la plupart de celles que nous allons examiner aujourd'hui, par exemple nous échapperaient complètement.

Depuis longtemps on avait intégré certaines fonctions discontinues ; la définition de Cauchy s'appliquait encore à ces intégrales ; aussi

était-il naturel de rechercher, comme l'a fait Riemann, la portée exacte de cette définition.

Si f_i et $\overline{f_i}$ désignent les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (x_i, x_{i+1}), S est comprise entre

$$\underline{S} = \sum \underline{f_i}(x_{i+1} - x_i) \quad \text{et} \quad \overline{S} = \sum \overline{f_i}(x_{i+1} - x_i)$$

Riemann montre qu'il suffit que

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum (\overline{f_i} - \underline{f_i})(x_{i+1} - x_i)$$

tende vers zéro pour une suite particulière de divisions de (a,b) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits pour que la définition de Cauchy puisse être employée. Darboux ajoute que les passages à la limite habituels effectués sur $\underline{S}$ et $\overline{S}$ donnent toujours deux nombres déterminés $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$, $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$; en général différents, égaux seulement lorsque l'intégrale de Cauchy-Riemann existe.

Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est-ce pas ? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servi à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.

C'est qu'en effet, s'il est bien évident que le morcellement de (a,b) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits rendra les différences $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ de plus en plus petites si $f(x)$ est continue, en vertu de cette continuité même, s'il est clair que ce morcellement fera tendre encore $\overline{S} - \underline{S}$ vers zéro s'il n'y a que quelques points de discontinuité, on n'a aucune raison d'espérer qu'il en sera de même pour une fonction discontinue partout. Alors, en effet, prendre des intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits, c'est-à-dire des valeurs de $f(x)$ relatives à des valeurs de x de plus en plus voisines, ne garantit nullement que l'on prend des valeurs de $f(x)$ de moins en moins différentes.

Laissons-nous donc guider par le but à atteindre : réunir, grouper les valeurs peu différentes de $f(x)$. Il est clair alors que nous devons morceler, non pas (a,b) mais l'intervalle $(\underline{f}, \overline{f})$ limité par les bornes inférieure

et supérieure de f(x) dans (a,b). Faisons-le à l'aide de nombres y_i distants entre eux de moins de ε ; nous sommes conduits, par exemple, à considérer les valeurs de f(x) définies par

$$y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}. \quad \text{(voir fig. 2)}$$

Les valeurs correspondantes de x forment un ensemble E_i ; dans le cas de la figure, cet ensemble E_i est consituté par quatre intervalles ; avec certaines fonctions f(x) continues il pourrait être formé d'une infinité d'intervalles ; avec une fonction quelconque il pourrait être très compliqué. Mais peu importe ; c'est cet ensemble E_i qui joue le rôle analogue à celui de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) dans la définition de l'intégrale des fonctions continues, puisqu'il nous fait connaître des valeurs de x donnant à f(x) des valeurs peu différentes.

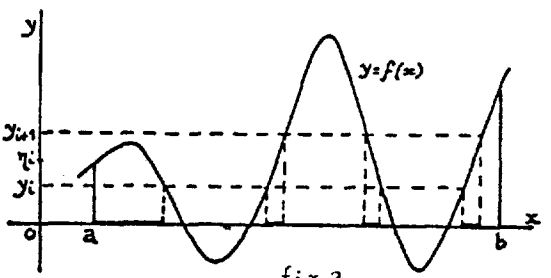


fig. 2

Si η_i est un nombre quelconque pris entre y_i et y_{i+1},

$$y_i \leq \eta_i \leq y_{i+1},$$

les valeurs de f(x) pour les points de E_i diffèrent de η_i de moins de ε. η_i va jouer le rôle que jouait $f(\xi_i)$ dans la formule (1) ; quant au rôle de la longueur ou mesure $x_{i+1} - x_i$ de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) il sera joué par une mesure $m(E_i)$ que nous attacherons dans un instant à l'ensemble E_i. Nous formerons ainsi la somme

$$S = \sum \eta_i m(E_i) \qquad (2)$$

Mais, auparavant, regardons bien ce que nous venons de faire et, pour le bien comprendre, répétons-le en d'autres termes.

Les Géomètres du XVIIe siècle considéraient l'intégrale de f(x),

- le mot intégrale n'était pas inventé, mais peu importe, - comme la somme d'une infinité d'indivisibles dont chacun était l'ordonnée, positive ou négative, de f(x). Eh bien ! nous avons tout simplement groupé les indivisibles de grandeur comparable ; nous avons, comme on dit en algèbre, fait la réunion, la réduction des termes semblables. On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les indivisibles en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x_i on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main ; tandis que nous opérons comme le commerçant méthodique qui dit :

j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1.m(E_1)$,
j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2.m(E_2)$,
j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5.m(E_3)$,

etc., j'ai donc en tout :

$$S = 1.m(E_1) + 2.m(E_2) + 5.m(E_3) + \ldots$$

Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parce que, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter : mais, pour nous, qui avons à additionner une infinité d'indivisibles, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Occupons-nous maintenant de la définition du nombre $m(E_i)$ attaché à E_i. L'analogie entre cette mesure et une longueur, ou même avec un nombre de billets, nous conduit naturellement à dire que, dans l'exemple de la figure (2), $m(E_i)$ sera la somme des longueurs des quatre intervalles constituant E_i : que, dans un exemple où E_i serait formé d'une infinité d'intervalles, $m(E_i)$ serait la somme des longueurs de tous ces intervalles ; et, dans le cas général, à procéder comme il suit : enfermons E_i dans des intervalles, en nombre fini ou en infinité dénombrable ; soient $l_1, l_2, \ldots$ les longueurs de ces intervalles. Nous désirons évidemment que l'on ait :

$$m(E_i) \leqq l_1 + l_2 + \ldots$$

Si nous cherchons la borne inférieure du second membre pour tous les systèmes possibles d'intervalles pouvant servir à enfermer E_i, cette borne sera donc une limite supérieure de $m(E_i)$. Pour cette raison nous la notons $\overline{m(E_i)}$ et nous avons

$$m(E_i) \leqq \overline{m(E_i)}. \qquad (3)$$

Si C est l'ensemble des points de (a,b) ne faisant pas partie de E_i, on a de même

$$m(C) \leqslant \overline{m(C)}.$$

Or, on désire évidemment avoir

$$m(E_i) + m(C) = m\left[(a,b)\right] = b-a ;$$

donc on doit avoir

$$m(E_i) \geqslant b-a-\overline{m(C)}. \qquad (4)$$

Les inégalités (3) et (4) donnent donc des limites supérieure et inférieure de $m(E_i)$. On voit facilement que ces deux inégalités ne sont jamais contradictoires. Lorsque les limites inférieure et supérieure de E_i sont égales, $m(E_i)$ est définie, nous dirons alors que E_i est mesurable*.

Une fonction f(x), pour laquelle les ensembles E_i sont mesurables quels que soient les y_i, est dite mesurable. Pour une telle fonction, la formule (2) définit une somme S. On démontre facilement que, lorsqu'on fait varier le choix des y_i de façon que ξ tende vers zéro, les S tendent vers une limite déterminée qui est, par définition $\int_a^b f(x)dx$**.

Cette première extension de la notion d'intégrale définie en entraîne bien d'autres. Supposons qu'il s'agisse d'intégrer une fonction f(x,y) de deux variables, nous procèderons exactement comme précédemment : nous lui attacherons des ensembles E_i qui seront maintenant des ensembles de points dans un plan et non plus de points sur une droite. A ces ensembles ce sera une mesure superficielle qu'il faudra maintenant attribuer ; cette mesure

---

* Le mode de définition de la mesure des ensembles utilisé ici est celui de C. Jordan (Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, tome I) ; mais, avec cette modification, essentielle pour notre but, que nous enfermons l'ensemble E_i à mesurer dans des intervalles dont le nombre peut être infini, alors que C. Jordan employait toujours seulement un nombre fini d'intervalles. Cet emploi de l'infinité dénombrable à la place du nombre entier est suggéré par les travaux de M. Borel qui, d'ailleurs, avait utilisé lui-même cette idée en particulier pour une définition de la mesure. (Leçons sur la théorie des fonctions).

** Comptes-rendus de l'Acad. des Sc., t. CXXIX, 1909.
Des définitions équivalentes à celle du texte ont été proposées par divers Auteurs. Les plus intéressantes sont dues à M. W.H. Young (Philos. Trans. of the Royal Soc. of London, 1905 ; Proc. of the London Math. Soc., 1940). Voir aussi, par exemple, des notes de M. Borel et de M. F. Riesz (Comptes-rendus, 1912).

se déduira de l'aire des rectangles

$$\alpha \leq x \leq \beta \,,\; \gamma \leq y \leq \delta \quad ,$$

tout à fait de la même manière que la mesure linéaire se déduisait de la longueur des intervalles. La mesure définie, la formule (2) donnera des sommes S d'où l'intégrale se déduira par un passage à la limite.

La définition que nous avons envisagée s'étend donc immédiatement aux fonctions de plusieurs variables ; en voici une autre qui s'appliquerait également quel que soit le nombre des variables et que j'expose seulement dans le cas où il s'agit d'intégrer f(x) dans (a,b).

J'ai dit qu'il s'agissait alors de faire la somme des indivisibles représentés par les diverses ordonnées des points x,y = f(x) ; nous avons, il y a un instant, groupé ces indivisibles d'après leur grandeur. Bornons-nous maintenant à les grouper d'après leur signe ; nous aurons à considérer l'ensemble superficiel des points de celles de ces ordonnées qui sont positives, E_p, et l'ensemble, E_n, des points des ordonnées négatives. Pour le cas simple où f(x) est continue, on posait, avant Cauchy, ainsi que je l'ai rappelé en commençant,

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}(E_p) - \text{aire}\,(E_n) \;;$$

ceci nous conduit à poser

$$\int_a^b f(x)dx = m(E_p) - m_s(E_n) \;;$$

m_s désignant une mesure superficielle. Cette nouvelle définition est équivalente à la précédente ; elle nous ramène à la méthode intuitive d'avant Cauchy, mais la définition de la mesure lui a donné un solide fondement logique.

Nous savons donc, et de deux manières, définir l'intégrale d'une fonction d'une ou de plusieurs variables et cela sans avoir eu à considérer la forme plus ou moins compliquée du domaine d'intégration, car ce domaine D n'intervenait qu'en ceci : les ensembles E_i, dans notre première définition, les ensembles E_p et E_n, dans la deuxième, étaient formés en ne prenant les valeurs de la fonction f que pour les points de D.

Puisque le choix du domaine d'intégration D n'intervient que dans la formation des E_i, ou des E_p et E_n, il est clair que nous pourrions tout aussi

bien convenir de former ces ensembles E_i, E_n, E_p en ne tenant compte que des valeurs prises par f aux points d'un ensemble E donné, et nous aurions ainsi défini l'intégrale de f étendue à l'ensemble E.

Pour préciser la portée de cette nouvelle extension de la notion d'intégrale, rappelons-nous que nos définitions exigent que f soit mesurable, c'est-à-dire que E_i soient mesurables, pour la première définition que E_p et E_n le soient, pour la deuxième, et cela entraîne que E soit aussi mesurable. Nous savons donc définir l'intégrale étendue à un ensemble mesurable d'une fonction mesurable dans cet ensemble, et bornée ; j'ai, en effet, supposé implicitement, jusqu'ici qu'il s'agissait de fonctions bornées.

Qu'y aurait-il de changé dans le premier mode de définition si la fonction f à intégrer était non bornée ? L'intervalle $(\underline{f},\bar{f})$ ne serait plus fini ; il faudrait donc un infinité de nombres y_i pour le diviser en intervalles de longueur au plus égale à ξ, il y aurait donc un infinité d'ensembles E_i et la somme S de la formule (2) serait maintenant une série. Pour ne pas être arrêté dès le début, il nous faut supposer que la série S est convergente pour le premier choix de nombres y_i que nous aurons fait ; or, si S existe pour un choix des y_i, il existe pour tous les choix des y_i et la définition de l'intégrale s'applique sans modifications.

On a donné le nom de fonctions sommables à toutes les fonctions que l'on peut intégrer par les procédés indiqués, c'est-à-dire à toutes les fonctions mesurables pour lesquelles les sommes S ont un sens. Toute fonction mesurable bornée est sommable : et comme on n'a pas réussi jusqu'ici à nommer une fonction non mesurable, on peut dire que, jusqu'ici, pratiquement toute fonction bornée a une intégrale. Au contraire, il existe des fonctions non bornées très simples qui ne sont pas sommables ; aussi ne doit-on pas s'étonner que notre notion d'intégrale se révèle encore insuffisante dans certaines questions.

Nous venons d'étendre la notion d'intégrale à des fonctions non bornées en partant de la première de nos définitions ; la seconde conduit au même résultat. Mais il faut pour cela élargir la notion de mesure de façon à ce qu'elle s'applique non seulement aux ensembles bornés, que nous avons seuls considérés jusqu'ici, mais aussi à des ensembles de points s'étendant jusqu'à l'infini. Je

ne signale cette seconde façon de procéder que parce qu'elle est aussi en rapport avec une autre extension de l'intégrale définie dans laquelle l'intervalle, le domaine, l'ensemble auquel est étendue l'intégrale n'est plus supposé fini, comme nous l'avons fait jusqu'ici, mais peut aller jusqu'à l'infini.

Je me borne à cette indication, car je n'aurai pas à envisager, dans ce qui suit, cette extension de la notion d'intégrale. C'est pour la même raison que je me contente de signaler rapidement les recherches, pourtant si originales, entreprises par un jeune homme tué à la guerre, M. Gateaux, qui s'était proposé de définir l'opération d'intégration pour les fonctions d'une infinité de variables. Ces recherches, qui ont été prolongées par M. Paul Lévy et par M. Norbert Wiener, ne sont pas sans rapport avec les études axiomatiques entreprises par M.M. Fréchet et par M. P.-J. Daniell dans le but d'étendre la notion d'intégrale aux ensembles abstraits*. M. Fréchet et M. Daniell ne se sont d'ailleurs pas proposé seulement d'appliquer aux ensembles abstraits les définitions dont j'ai parlé jusqu'ici, mais aussi une autre extension de l'intégrale définie à laquelle nous conduira bientôt la notion d'intégrale indéfinie que nous allons maintenant examiner.

On appelle ordinairement intégrale indéfinie d'une fonction f(x) la fonction F(x) définie par

$$F(x) = C^{te} + \int_a^x f(x)dx \; ; \qquad (5)$$

ne conservons pas cette dénomination et redonnons aux mots intégrale indéfinie leur sens primitif. Primitivement, les deux dénominations "intégrale définie" et "intégrale indéfinie" s'appliquaient à la même expression $\int_a^b f(x)dx$; mais l'intégrale était dite définie lorsqu'il s'agissait d'un intervalle (a,b) donné, déterminé, défini, et l'intégrale était indéfinie lorsque (a,b) était variable, non déterminé, non défini ou, si l'on veut dire, indéfini.

C'est, en somme, par un véritable abus de langage qu'on appelle F(x) l'intégrale indéfinie de f(x) ; si nous remarquons, de plus, que

---

* R. Gateaux, Bull. Soc. Math. de France, 1919.
P. Lévy, Leçons d'Analyse fonctionnelle, 1922.
N. Wiener, Proc. of the London Math. Soc. 1922.
M. Fréchet. Bull. Soc. Math. de France. 1915.
P.-J. Daniell, Ann. of Math. 1918 et 1919.

lorsqu'on étudie F(x) c'est toujours pour obtenir des propriétés de $\int_a^b f(x)dx$, que c'est au fond $\int_a^b f(x)dx$ que l'on étudie à travers F(x), on sera conduit à dire : j'appelle intégrale indéfinie de f(x) la fonction $\Phi(a,b)$:

$$\Phi(a,b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (5bis)$$

Il y a entre une intégrale indéfinie et l'intégrale définie correspondante les mêmes relations et les mêmes différences qu'entre une fonction et une valeur particulière prise par cette fonction ; au reste, si nous représentons par D l'intervalle (a,b) d'intégration, nous pourrions dire que l'intégrale indéfinie est une fonction dont l'argument est le domaine D,

$$\Psi(D) = \Phi(a,b).$$

De ces réflexions, il résulte clairement que, relativement à une fonction de deux variables f(x,y), on ne doit pas prendre pour intégrale indéfinie, comme on l'a fait quelquefois, la fonction

$$F(X,Y) = c_1(x) + c_2(y) + \int_a^X \int_c^Y f(x,y)\, dxdy. \qquad (6)$$

Si l'on se bornait à la considération des domaines rectangulaires

$$a \leqslant x \leqslant b \;\; ; \quad c \leqslant y \leqslant d \;,$$

on devrait prendre pour intégrale indéfinie la fonction de quatre variables

$$\Phi(a,b;\, c,d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) \;; \qquad (7)$$

mais, si l'on veut considérer tous les domaines d'intégration, comme le domaine le plus général ne peut être déterminé par un nombre fini de paramètres, si grand que soit ce nombre, force nous est de renoncer aux fonctions ordinaires pour représenter la correspondance entre un domaine D et l'intégrale étendue à ce domaine et d'étudier directement la fonction

$$\Psi(D) = \iint_D f(x,y)\, dxdy \;.$$

dont l'argument D est un domaine. C'est cette fonction que nous appellerons l'intégrale indéfinie de f(x,y) ; ou plutôt, puisque nous avons défini aussi l'intégrale de f étendue à un ensemble mesurable E, nous considérerons l'intégrale indéfinie comme une fonction d'ensemble qui serait définie pour tous les ensembles mesurables*.

---

* Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, 1910.

Dans tout ce qui précède, il n'y a certes que des questions de
ge, de dénomination ; mais ces questions de dénomination ne se seraient pas
s si nous n'avions pas acquis une notion nouvelle. C'est pourquoi on ne
oas s'étonner que le nouveau langage ait permis de donner toute la portée
ple à des faits aperçus tout d'abord à l'occasion de la fonction F(x) de la
le (5). On a réussi, en particulier, à caractériser les fonctions d'ensemble
ont des intégrales indéfinies par deux propriétés : l'additivité complète
absolue continuité*.

Quand une fonction d'ensemble $\Psi(E)$ jouit de ces deux propriétés,
est l'intégrale indéfinie d'une fonction f qui dépend de 1,2,3,... variables
it que les ensembles E sont formés à l'aide de points d'une droite, d'un
de l'espace ordinaire, etc. Pour avoir un langage et une notation unifor-
lisons que f est une fonction de points f(P), et écrivons :

$$\Psi(E) = \int_E f(P)dm(E). \qquad (8)$$

La fonction f(P) est entièrement déterminée par $\Psi(E)$, à ceci
qu'on peut modifier arbitrairement f aux points d'un ensemble arbitraire
sure nulle sans qu'elle cesse d'avoir $\Psi(E)$ pour intégrale indéfinie. Et
veut obtenir f(P) à partir de $\Psi(E)$, sauf aux points d'un ensemble de me-
sulle, par le procédé suivant :

Soit P le point en lequel on veut calculer f ; prenons pour
le d'intégration Δ un intervalle de centre P, ou un cercle de centre P,
sphère de centre P,... suivant qu'il s'agit du cas de la droite, du plan,
espace,... et formons le rapport $\frac{\Psi(\Delta)}{m(\Delta)}$. Puis, faisons tendre Δ vers
nous aurons :

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Psi(\Delta)}{m(\Delta)} = f(P). \qquad (9)$$

---

dénominations sont dues respectivement à M. de la Vallée-Poussin (Inté-
de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire) et à M.G. Vitali
a. de. Sc. di Torino, 1908).
notion d'ensemble mesurable $\Psi(E)$ est complètement additive si, de quelque
e qu'on partage E en des ensembles mesurables $E_1, E_2, \ldots$, en nombre fini
ombrable et sans points communs deux à deux, on a :
$\Psi(E) = \Psi(E_1) + \Psi(E_2) + \ldots$
notion d'ensemble mesurable $\Psi(E)$ est absolument continue si, quand E varie
on que m(E) tende vers zéro, $\Psi(E)$ tend aussi vers zéro.

Ce résultat généralise évidemment le théorème classique d'après lequel, si f(x) est continue, la fonction F(x) de la formule (5) admet f pour dérivée ; notre procédé de calcul de f(P) est bien, en effet, une sorte de dérivation de la fonction d'ensemble $\psi(E)$.

Ce mode de dérivation avait été considéré, il y a fort longtemps. Cauchy* appelle grandeurs coexistantes des grandeurs déterminées en même temps, c'est-à-dire par les mêmes conditions. Si l'on a, par exemple, un corps non homogène, et comme composition et comme densité, et si l'on considère un domaine D de ce corps, le volume de D, la masse de D, la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température de D supposé isolé, sont des grandeurs coexistantes. Ce sont des fonctions de domaine V(D), M(D), Q(D).

Ce n'est pas par un heureux hasard que nous arrivons ici à des fonctions de domaine. Si l'on y réfléchit, on s'apercevra vite que toute grandeur de la physique est relative non à un point, mais à un corps étendu, que c'est une fonction de domaine ; du moins tant qu'il s'agit de grandeurs directement mesurables. Le corps à considérer ne sera toutefois pas toujours un corps de notre espace sensible, ce pourra être un corps d'un espace de conception purement mathématique si, dans la détermination de la grandeur envisagée, interviennent des variables non spatiales comme le temps, la température, etc. Mais peu importe ; les grandeurs directement mesurables, une masse, une quantité de chaleur, une quantité d'électricité, par exemple, sont des fonctions de domaine et non des fonctions de point.

La physique considère cependant aussi des grandeurs attachées à des points, comme une vitesse, une tension, une densité, une chaleur spécifique mais ce sont des grandeurs dérivées et que l'on définit justement le plus souvent par le rapport ou la limite du rapport de deux grandeurs coexistantes :

densité = $\frac{\text{masse}}{\text{volume}}$; chaleur spécifique = $\frac{\text{quantité de chaleur}}{\text{masse}}$; c'est-à-dire en prenant la dérivée d'une grandeur par rapport à une grandeur coexistante.

Ainsi la physique, et par suite la géométrie, conduit à la considération des fonctions de domaine et à leur dérivation tout aussi bien que l'analyse des fonctions de variables réelles. Même les fonctions de domaine ont,

---

* Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, tome 2, p. 188-229.

en physique, un rôle en quelque sorte plus primordial que les fonctions de point ; pourquoi donc les Physiciens ne parlent-ils pas de ces fonctions ? Parce que les Mathématiciens ne les ont pas encore étudiées et parce que l'algèbre n'a pas de notation ni pour les domaines ni pour les fonctions de domaine. Aussi voit-on le Physicien se borner à considérer des domaines spéciaux dépendant seulement de certains paramètres, de façon que la fonction de domaine à considérer se réduise à une fonction des paramètres ; c'est d'ailleurs exactement ce que fait le Mathématicien quand, au lieu de considérer l'intégrale définie de f(x,y) dans toute sa généralité, il se borne à envisager les fonctions F(X,Y), Φ(a,b ; c,d) des formules (6) et (7).

Remarquons d'ailleurs que la formule (8) établit un lien entre les fonctions d'ensemble Ψ(E), qui sont des intégrales indéfinies, et les fonctions de point f(P), lesquelles relèvent de l'algèbre. Cette formule (8) fournit donc une sorte de notation de certaines fonctions d'ensemble. Or, quand on examine les deux conditions requises pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie, on ne doute pas que les grandeurs de la physique ne rentrent dans la classe des fonctions de domaine susceptibles de cette notation.

Ces réflexions sur la nature des grandeurs de la physique ont dû vous permettre de comprendre plus exactement l'intérêt et la portée des notions que nous avons rencontrées. Elles montrent, en particulier, que l'opération de dérivation qui figure dans la formule (9) n'est pas la seule à considérer ; qu'on peut toujours envisager la dérivation d'une fonction Ψ(E) par rapport à une fonction coexistante p(E), que celle-ci soit, ou non, la mesure m(E).

Une question vient alors de suite à l'esprit : peut-on aussi remplacer la fonction m(E) par une fonction donnée p(E) dans la définition de l'intégrale ? Il n'y a à cela aucune difficulté ; nous remplacerons d'abord la formule (2) par

$$S = \sum \lambda_i p(E_i),$$

ce qui exigera, d'abord, que les ensembles E_i appartiennent à la famille de ceux pour lesquels la fonction p(E) est définie, - c'est-à-dire que la fonction à intégrer doit être mesurable par rapport à p(E), - puis que la série S soit convergente, - c'est-à-dire que f doit être sommable par rapport à p(E). Ceci

étant supposé, la définition de l'intégrale de $f(P)$ par rapport à $p(E)$,

$$\int f(P)\, dp(E),$$

s'achèvera comme précédemment si la fonction $p(E)$ possède une certaine propriété qu'on exprime en disant que $p(E)$ doit être à variation bornée*.

Nous venons d'arriver à une nouvelle et très considérable extension de la notion d'intégrale en nous plaçant au point de vue formel du Mathématicien ; le point de vue du Physicien y conduit bien plus naturellement encore, du moins en ce qui concerne les fonctions $f(P)$ continues. On peut même dire que les Physiciens n'ont jamais considéré que des intégrations par rapport à des fonctions de domaine.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer la quantité de chaleur, $\int(D)$, nécessaire pour élever d'un degré la température du corps D dont nous parlions tout à l'heure ; il faudra diviser D en petits corps partiels D_1, D_2,... de masses $M(D_1)$, $M(D_2)$,..., prendre dans chacun d'eux un point P_1, P_2, ..., et prendre pour valeur approchée de $\int(D)$ la somme

$$f(P_1)\, M(D_1) + f(P_2) M(D_2) + \ldots,$$

$f(P)$ désignant la chaleur spécifique en P. C'est-à-dire que nous calculerons $\int(D)$ par la formule

$$\int(D) = \int_D f(P)\, dM(E).$$

Sous sa forme générale la nouvelle intégrale a été définie seulement en 1913 par M. Radon ; elle était cependant connue depuis 1894 pour le cas particulier d'une fonction continue d'une seule variable. Mais son premier inven-

---

* $p(E)$ est dite à variation bornée si, de quelque manière que l'on partage E en une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs deux à deux, $E_1, E_2, \ldots$, la série $\sum |p(E_i)|$ est convergente.
La notion de fonction à variation bornée a été tout d'abord introduite par C. Jordan ; elle était alors relative aux fonctions d'une variable.
Les seules fonctions d'ensemble $p(E)$ à considérer dans ces théories sont les fonctions additives, c'est-à-dire celles pour lesquelles on a :

$$p(E_1 + E_2 + \ldots) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots,$$

les E_1, E_2... étant sans points communs deux à deux. Si l'additivité est complète, c'est-à-dire si la suite des $E_1, E_2, \ldots$ peut être prise indéfinie, $p(E)$ est nécessairement à variation bornée. En effet, l'ordre des ensembles $E_1, E_2, \ldots$ étant indifférent, la série $p(E_1) + p(E_2) + \ldots$ doit rester convergente quel que soit cet ordre, c'est-à-dire que la série $\sum |p(E_i)|$ est convergente.
On n'a pas essayé jusqu'ici de se débarrasser de la condition: $p(E)$ à variation bornée. Il faut d'ailleurs remarquer que, si $p(E)$ n'était pas à variation bornée, on pourrait trouver une fonction $f(P)$ qui soit continue et à laquelle, pourtant, notre définition de l'intégrale ne s'appliquerait pas.

teur, Stieltjès y avait été conduit par des recherches d'analyse et d'arithmétique et il l'avait présentée sous une forme purement analytique qui masquait sa signification physique ; si bien qu'il a fallu beaucoup d'efforts pour comprendre et reconnaître ce qui est maintenant évident. L'historique de ces efforts citerait les noms de F. Riesz, H. Lebesgue, W.H. Young, M. Fréchet, C. de la Vallée-Poussin ; il montrerait que nous avons rivalisé en ingéniosité, en perspicacité, mais aussi en aveuglement*.

Et pourtant les Mathématiciens considéraient à chaque instant des intégrales de Stieltjès-Radon : l'intégrale curviligne $\int_C f(x,y)dx$ est une de ces intégrales, relative à une fonction $p(E)$ définie à partir de la longueur de la projection sur Ox des arcs de C, l'intégrale $\iint_S f(x,y,z)dxdy$ fait de même intervenir une fonction d'ensemble définie à partir des aires de S en projection sur Oxy .

A la vérité ces intégrales se présentent le plus souvent groupées

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

$$\iint_S f(x,y,z)dx\,dy + g(x,y,z)\,dy\,dz + h(x,y,z)\,dz\,dx.$$

Si l'on pense aussi aux intégrales considérées pour la définition des longueurs des courbes ou des aires des surfaces,

$$\int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + d^2z}, \qquad \iint_S \sqrt{(dxdy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2},$$

on sera conduit à se dire qu'il conviendrait aussi d'étudier des modes d'intégration dans lesquels interviendraient plusieurs fonctions d'ensemble $p_1(E)$, $p_2(E)$,... Cette étude est entièrement à faire ; MM. Hellinger et Toeplitz ont cependant utilisé certaines sommations par rapport à plusieurs fonctions d'ensemble**.

Nous avons considéré jusqu'ici l'intégration, définie ou indéfinie, comme une opération fournissant un nombre, défini ou variable, par une

---

* J. Radon, Sitz.de.Kais.Ak. d. Wiss in Wien. Bd. CXXII, Abt IIa, 1913. - T.-J. Stieltjès, Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1894 - F. Riesz, Comptes-rendus de l'Ac. des Sc., 1909 - H. Lebesgue, id. 1910 - W.-H. Young, Proc. of the London Math. Soc., 1913. - M. Fréchet, Nouv. Ann. de Math., 1909. - Ch. de la Vallée-Poussin. Voir, par exemple, son livre déjà cité.

** Voir, par exemple, Journal de Crelle, Bd. 144.

sorte d'addition généralisée ; nous nous sommes placés au point de vue des quadratures. Mais on peut aussi regarder l'intégration d'une fonction continue comme fournissant une fonction, comme la plus simple des intégrations d'équations différentielles ; c'est le point de vue des fonctions primitives auquel nous allons maintenant nous placer.

Rechercher la fonction primitive F(x) d'une fonction donnée f(x) c'est rechercher la fonction, déterminée à une constante additive près quand elle existe, qui admet f(x) pour dérivée. C'est ce problème que nous allons étudier.

Mais, auparavant, remarquons que les réflexions précédentes conduisent à formuler le problème d'une façon bien autrement générale : étant donnée une fonction f(P) qui est la dérivée par rapport à une fonction connue p(E) d'une fonction inconnue $\Psi(E)$, trouver la fonction primitive $\Psi(E)$ de f(P).

Si, par exemple, il s'agit d'une fonction continue f(x) et si m(E) est la mesure, la fonction primitive ne serait plus la fonction F(x) de la formule (5), mais l'intégrale indéfinie $\int_E f(x)dx$.

Je ne puis que signaler ce problème général qui n'a pas été étudié ; je me contente de faire remarquer que l'intégrale de Stieltjès sera très insuffisante pour le résoudre. Cette intégrale n'a, en effet, été définie que dans l'hypothèse où p(E) est à variation bornée, et l'on peut fort bien parler de dérivée par rapport à une fonction p(E) à variation non bornée.

La théorie des fonctions sommables fournit ce résultat relatif au cas où p(E) est la mesure m(E) : lorsque la dérivée f(P) est sommable, la fonction primitive de f est l'une de ses fonctions primitives. Je dis l'une de ses fonctions primitives, car on ne sait pas même encore très bien comment doit être posé ce problème général des fonctions primitives pour qu'il soit déterminé*.

Laissons donc de côté ces questions, dont je n'ai parlé que pour montrer combien il reste à faire, et montrons combien il vient d'être fait pour la recherche de la fonction primitive F(x) de f(x), grâce surtout à M. Arnaud Denjoy.

---

* Voir à ce sujet des notes de M. Fubini et de M. Vitali parues en 1915-1916 dans les Atti de l'Académie de Turin et de l'Académie des Lincei.

Je viens de dire que, lorsque f(x) est sommable, l'intégration fournit F(x) par la formule (5). Supposons que, dans (a,b), f(x) ne cesse d'être sommable qu'au point c. Alors l'intégration nous fournit F(x) dans (a,c-), quelque petit que soit ξ, donc dans tout (a,c) ; elle fournit aussi F(x) dans (c+ξ ,b), donc dans tout (c,b). Et, en tenant compte de la continuité de F(x) au point c, nous aurons F(x) dans tout (a,b). Par de telles considérations de continuité* on voit que, si l'on connaît F(x) dans tout intervalle qui ne contienne aucun point d'un ensemble E ni à son intérieur ni comme extrémités, on en déduira F(x) par une opération que je désignerai par A, dans tout intervalle contigu à E, c'est-à-dire dans tout intervalle ayant pour extrémités des points de E mais ne contenant pas de points de E à son intérieur.

Supposons maintenant qu'on connaisse F(x) dans les intervalles (α,β) contigus à un ensemble E, que la somme $\sum[F(\beta) - F(\alpha)]$ soit convergente, et que f(x) soit sommable sur E*! Alors il suffit de se dire que la fonction primitive doit résulter de la contribution de E et de celle des intervalles contigus à E, pour être conduit à la formule :

$$F(x) - F(a) = \left\{ \int_E f\,dx + \sum F(\beta) - F(\alpha) \right\}_a^x ,$$

les accolades du second membres indiquant qu'on n'y doit utiliser que les points compris entre a et x. De cette formule résulte donc la détermination de F(x), grâce à une opération que je désignerai par B.

Les deux résultats précédents marquent le point extrême auquel j'étais parvenu dans ma Thèse, et je dois dire que je ne les ai indiqués qu'en quelque sorte par hasard ; car je ne me doutais nullement de l'intérêt qu'allait leur donner M. Denjoy.

S'appuyant sur des résultats de M. Baire, M. Denjoy montre que, si f(x) est une fonction dérivée dans (a,b) :

---

* C'est l'introduction de ces conditions de continuité qui différencie très considérablement le problème des fonctions primitives de celui des quadratures.
** Il convient de remarquer que ces hypothèses ne sont pas contradictoires, même si E est supposé être l'ensemble des points de non sommabilité de f(x) dans l'intervalle (a,b) considéré. Pour la détermination des points de non sommabilité dans (a,b) il faut, en effet, tenir compte de tous les points de (a,b), qu'ils appartiennent à E ou non, tandis que la sommabilité sur E est une condition ne faisant intervenir que les seuls points de E.

1° Les points où f(x) n'est pas sommable forment un ensemble E_1 non dense dans (a,b) ; une opération O_1 du type A, fait connaître F(x) dans les intervalles contigus à E_1 ;

2° Ensuite, qu'il existe un ensemble E_2 formé de points de E_1 et non dense sur E_2, dans les intervalles contigus duquel on peut calculer F(x) par une opération O_2 du type B ;

3° Ensuite, qu'il existe un ensemble E_3, formé de points de E_2 et non dense sur E_3, dans les intervalles contigus duquel on peut calculer F(x) par une opération O_3 du type B ; ...

S'il arrive qu'après la suite infinie d'opérations $O_1, O_2, \ldots$ on n'ait pas encore trouvé F(x) dans tout (a,b), les points de (a,b) qui ne sont pas intérieurs à des intervalles dans lesquels on a déterminé F(x) forment un ensemble E_ω et une opération de type A, l'opération O_ω fournit F dans les intervalles contigus à E_ω. On considère ensuite, s'il est nécessaire, des opérations $O_{\omega+1}, O_{\omega+2}, \ldots$ du type B, puis une opération $O_{2\omega}$ du type A, puis des opérations du type B, etc.

Et M. Denjoy, utilisant des raisonnements maintenant classiques de Cantor et Bendixson, prouve que ce procédé nous fera finalement connaître F(x) dans tout (a,b) après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations

Ce procédé opératoire, certes compliqué, mais tout aussi naturel, dans son principe, que ceux antérieurement envisagés, a été appelé par M. Denjoy : la totalisation.

La totalisation résoud entièrement le problème de la recherche de la fonction primitive F(x) d'une fonction donnée f(x) ; elle permet même aussi de déterminer F(x) connaissant seulement un nombre dérivé de F(x) et non plus sa dérivée. Je ne m'arrête pas sur ces beaux résultats ; le fait le plus important pour nous c'est que la totalisation, par un long détour, nous fournit une extension nouvelle de la notion d'intégrale définie. Toutes les fois, en effet, que la totalisation s'appliquera à une fonction f(x) et lui fera correspondre une fonction F(x), nous pourrons convenir d'attacher à f(x) une intégrale grâce aux formules (5) et (5bis).

Messieurs, je m'arrête et je vous remercie de votre courtoise attention ; mais il faut un mot de conclusion. Ce sera, si vous le voulez bien, qu'une généralisation faite non pour le vain plaisir de généraliser, mais pour résoudre des problèmes antérieurement posés, est toujours une généralisation féconde. Les divers emplois qu'ont déjà reçus les notions que nous venons d'examiner le prouveraient surabondamment.

H. Lebesgue

III - BIBLIOGRAPHIE

Quelques textes historiques sur la question

1 A.L. Cauchy : Oeuvres complètes.

2 P.J. Daniell : A general form of integral. in Annals of Math. 19 (1917-1918),p. 279-294.

3 M. Frechet : Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. in Bull. Soc. Math. de France 43-44 (1915-16),p. 248-266.

4 H. Lebesgue : Thèse (1902).

5 H. Lebesgue : Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration in Ann. Ec. Norm. sup. (3) XXXV 1918,p. 191-250.

6 H. Lebesgue : Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Chelsea Publishing Company 1973 (reprint de l'édition de 1928).

7 Lejeune-Dirichlet : Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données Crelle's Journal IV Bd. 2. Hft. 1829, p. 157-169.

8 B. Riemann : Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. Oeuvres complètes.

9 F. Riesz : L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue. Ann. inst. Fourier T. 1, 1949, p. 29-42.

Quelques livres sur la théorie de la mesure et de l'intégration

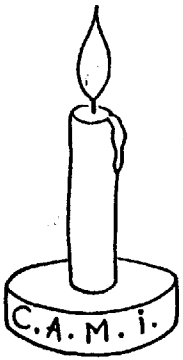
10 P.R. Halmos : Measure theory - Van Nostrand, 1950.

11 W. Rudin : Analyse réelle et complexe.

12 Loeve : Probability theory

13 A.C. Zaanen : Integration North-Holland, 1967.

14 Encyclopédia Universalis.



LE CERTIFICAT D'APPROFONDISSEMENT EN MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Né à la rentrée 1980, le C.A.M.I., au seuil de sa deuxième année, se porte bien.

Enfant légitime de l'IREM et de la Régionale de l'APMEP d'Aix-Marseille, il a été adopté par 69 personnes au cours de l'année scolaire 1980-81.

A la rentrée 1981, ce sont 88 personnes qui ont fixé leur choix parmi les modules suivants, organisés en 81-82 :

- Modules 1 et 1bis : Programmation
- Module 2 : Rôle des Algorithmes dans l'Enseignement des Mathématiques
- Module 5 et 6 : . Etude de Problèmes issus des Mathématiques ou d'autres disciplines, menant à des questions d'Algèbre linéaire
  . Analyse de données numériques, Analyse de données multidimensionnelles
- Module 7 : Approximation des Fonctions
- Modules 8 et 9 : . Approximation des nombres réels
  . Arithmétique et Théorie des Nombres
- Module 11 : Réflexion sur La Logique Mathématique

Le Mercredi 21 Octobre 1981, dans les locaux de l'I.R.E.M. le C.A.M.I. 80-81 a été remis à 13 professeurs :

4 ont obtenu la mention Bien

9 ont obtenu la mention Assez Bien.

BIBLIOGRAPHIE

POUR LA CLASSE DE SECONDE

On trouvera ci-dessous quelques références de publications concernant l'enseignement des mathématiques en classe de seconde.

★ Publications de l'IREM d'Aix-Marseille :

- Bulletin Information Mathématique
  - n° 11 Problèmes de programmation linéaire (G. Thomas)
  - n° 15 Initiation à la programmation sur HP 25 (A. Laurent)
- Brochure "ANALYSE 1", Prix : 10 F.
- Publications du groupe de recherche sur l'enseignement de la Géométrie : Prix du fascicule : 4 F.

★ Bulletin Inter-IREM

- Un exemplaire du numéro spécial de juin 1981 intitulé "Thèmes pour la classe de seconde" a été adressé, par les soins de l'IREM, à tous les lycées de l'Académie afin d'être consulté au C.D.I. de l'établissement. Des exemplaires sont encore disponibles à l'IREM.
- n° 20 : ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE à paraître prochainement.

★ Brochure inter-IREM "Thèmes pour la classe de seconde"
à paraître (prix 30 F)

★ Publications d'autres IREM

- IREM de Limoges : Quelques idées sur le nouveau programme de mathématiques en seconde (Thèmes d'activités, Compte-rendu d'expérimentation) — Mai 1981
- IREM de CLERMONT-FERRAND : Mise à l'essai des nouveaux programmes de seconde (Rapports d'expériences) — 2e trimestre 1980-81
- IREM de BORDEAUX : Activités géométriques en classe de Seconde — 1981
- IREM de LYON : Premier pas vers l'espace (équipe second cycle) — Juin 1981
- IREM de BESANCON : Géométrie en classe de Seconde (Applications du plan dans le plan, angles et fonctions trigonométriques, rotations planes) Analyse en classe de seconde (études de fonctions) — Septembre 1981

16

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70,route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 9

tél. 41.39.40. - 41.01.40.