Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE I

Qu'est-ce que la transposition didactique ?

Y. C.

juin 1980

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE I

Qu'est-ce que la transposition didactique ?

I.1. Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner.

I.2. Les contenus de savoir désignés (explicitement : dans les programmes ; implicitement : par la tradition évolutive de l'interprétation des programmes) comme étant "à enseigner", en général préexistent au mouvement qui les marque comme tels. Quelquefois cependant, ce sont des créations ad hoc, suscitées par les "besoins de l'enseignement" : c'est le cas, par exemple, de "Cos." et de "Sin." : voir l'Etude n° 1

I.3. Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique.

I.4. Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement transposition didactique stricto sensu. Mais l'étude scientifique de la "transposition didactique" (qui, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique sensu lato, représentée par le schéma

∼∼ → objet de savoir → objet à enseigner → objet d'enseignement

dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit : voir le Texte n° 1.

I.5. Voici un exemple réalisant le mouvement représenté par le schéma de la transposition didactique :

- la notion de distance (entre deux points) est utilisée spontanément "depuis toujours" (∼∼) ;
- le concept mathématique de distance est introduit en 1906 par Maurice Fréchet (objet de savoir mathématique)
- au niveau du 1er cycle de l'enseignement secondaire français, la distance comme notion mathématique précise figure au programme de 1971 de la classe de troisième (objet à enseigner) ;
- son traitement didactique varie dans les années suivant sa désignation comme objet à enseigner : le "travail" de la transposition didactique se poursuit.

Là-dessus, voir l'Etude n° 2.

Bibliographie : Textes n° 1 et 2.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE II

La transposition didactique existe-t-elle ?

ou

la vigilance épistémologique

Y. C.

juin 1980.

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE II

La transposition didactique existe-t-elle ?
ou
La vigilance épistémologique

II.1. La transposition didactique existe-t-elle ? L'objet d'enseignement est-il vraiment différent de l'objet de savoir auquel il répond ?

II.2. On peut saisir l'existence d'une transposition didactique aux situations de créations didactiques d'objets (de savoir et d'enseignement à la fois) rendus nécessaires par les contraintes du fonctionnement didactique du savoir.

II.3. Exemples de créations didactiques : Cos., Sin.; les nombres complexes comme matrices carrées d'ordre 2 : voir l'Etude n°1 ; les notions d'"opérateur" et de "machine" à l'école élémentaire : voir A. Mercier, Mémoire pour le DEA de D.D.M..

II.4. En découpant le savoir enseigné selon des ensembles plus vastes, on peut saisir l'effet de la transposition didactique, caricaturalement, dans les situations où se produit une véritable <u>substitution didactique d'objets.</u> A ce propos, Miche Verret écrit ceci :

> "Plus la forme scolaire est distante du contenu dont elle vise l'enseignement, plus cette conversion d'objet est probable. L'histoire en fournit au moins deux grands exemples : la transformation de la littérature et de la magie divinatoire en leurs figures scolaires dans l'école confucéenne, la transformation de la métaphysique chrétienne en philosophie d'école dans l'Université Scolastique, transpositions dont nous trouvons un équivalent dans l'enseignement secondaire français au 17 ème siècle avec la substitution de l'enseignement du latin scolaire à l'enseignement du latin classique, au 19 ème siècle dans la substitution de l'enseignement du spiritualisme universitaire à l'enseignement de la philosophie tout court."

Là-dessus, voir le <u>Texte n° 3</u> (d'où les lignes ci-dessus sont extraites).

II.5. Pour l'enseignement des mathématiques, si on laisse de côté la situation au moment où se dessine (à partir des années cinquante) la "Réforme des mathématiques modernes", on peut lire par exemple, sur l'enseignement du début du 17ème siècle, le témoignage – à vrai dire exceptionnel – de <u>Descartes</u> : voir le <u>Texte n° 4</u>.

II.6. La "Réforme des mathématiques modernes" a produit une véritable substitution didactique d'objet : voir Y. Chevallard, <u>Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante</u>, in <u>Recherches</u>, n° 41 (septembre 1980), pp. 71-99.

II. 7. Cette substitution didactique a provoqué plusieurs créations didactiques d'objets. Par exemple, dans le passage de la théorie des ensembles des mathématiciens à la "théorie des ensembles" de l'école élémentaire, surgissent divers objets appelés par les "exigences" de la transposition didactique. Les diagrammes de Venn en sont un exemple frappant, sur lequel on lira l'appréciation développée dans le Texte n° 5.

II. 8. Dans ce qui précède, l'existence de la transposition didactique est montrée à travers ses effets spectaculaires (créations d'objets) ou ses dysfonctionnements (substitutions "pathologiques" d'objets).

II. 9. Mais il est une autre manière de poser le problème de l'existence de la transposition didactique. Une manière de poser ce problème qui participe du principe de vigilance épistémologique que le didacticien doit constamment mettre en oeuvre.

II. 10. L'enseignant dira : " Aujourd'hui, je leur ai fait a^2-b^2 ". Le didacticien se demandera : " Qu'est-ce que cet objet d'enseignement que l'enseignant étiquette comme "a^2-b^2" ? Quel rapport entretient-il avec le (ou les) objet(s) mathématique(s) auquel il est référé implicitement ? ". Là où l'enseignant voit l'identité de la fin (l'objet de savoir désigné comme à enseigner) et des moyens (l'objet d'enseignement, tel que la transposition didactique l'a fait), le didacticien introduit la question de l'adéquation : n'y a-t-il pas substitution d'objet, et laquelle ?

II. 11. Le doute systématique à cet égard : "est-ce bien là l'objet dont l'enseignement était projeté ?" est la marque et le moyen de la rupture épistémologique qui permet au didacticien de se déprendre des évidences et de la transparence de l'univers d'enseignement qu'il vit en tant qu'enseignant (ou, du moins, en tant que l'élève qu'il a été, etc.) : il l'arrache à l'illusion de la transparence.

II. 12. On découvre alors que, de l'objet de savoir à l'objet d'enseignement, la distance est - souvent - immense. Pour la notion d'équation paramétrique, voir l'analyse proposée *in* O. Schneider, Mémoire pour le D.E.A. de D.D.M. ; pour le "a^2-b^2", voir J. Tonnelle, Mémoire pour le DEA de D.D.M.

Bibliographie : Textes n° 3, 4, 5 et 6.

*
* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE III

La transposition didactique : est-elle bonne ? est-elle mauvaise ?

Y. C.
juin 1980

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE III

La transposition didactique : est-elle bonne ? est-elle mauvaise ?

III.1. L'exercice du principe de vigilance à la transposition didactique est l'une des conditions qui commandent la possibilité d'une analyse scientifique du système didactique.

III.2. Mais dans le même temps ce principe porte en lui les limites de la recevabilité, par le système didactique et ses agents (les enseignants, surtout), des analyses qu'il permet de produire.

III.3. En effet, son efficace particulière est de mettre en lumière la différence là où elle est, par l'enseignant, niée ; de questionner l'identité spontanément supposée, pour faire apparaître l'inadéquation qu'elle masque de son évidence.

III.4. L'enseignant ne perçoit pas spontanément la transposition : ou du moins il ne lui accorde pas d'attentions spéciales. "L'enseignant dans sa classe, le rédacteur de programmes, le faiseur de manuels, chacun dans leur registre, sont les instituteurs d'une norme didactique qui tend à constituer un objet d'enseignement comme distinct de l'objet à enseigner qui le motive. Par là, ils exercent leur normativité, sans toujours assumer la responsabilité – épistémologique – de cette puissance créatrice de normes. S'ils attendent du spécialiste – quelquefois – approbation ou déni, ils situent cette appréciation comme extérieure à leur projet, et étrangère à sa logique interne. Elle vient après-coup, ou elle l'accompagne, mais elle ne s'y intègre que rarement, par impuissance de la prendre en compte en ses implications épistémologiques. Elle a valeur esthétique ou morale, elle intervient dans la réception sociale du projet. Elle n'en informe pas la structure ni les contenus, sinon par une manière de mimétisme et dans un souci d'accréditation auprès des puissances d'investiture institutionnelle." (Y. Chevallard, <u>Problèmes de surdétermination en didactique : la notion de moyenne en statistique</u>, pp. 4-5).

III. 5. Qu'il reconnaisse la transposition didactique, création ou substitution d'objets, l'enseignant aura le sentiment pesant d'être pris sur le fait, la main dans le sac. L'analyse de la transposition didactique est reçue comme <u>le dévoilement de ce qui est caché</u>, et de ce qui est demeuré caché <u>parce que</u> coupable. Coupable, en l'espèce, au regard de la "Vérité mathématique", fautif à l'oeil du Maître (le mathématicien).

III. 6. De là que s'observe une véritable résistance à l'analyse didactique, analogue à la résistance à la psychanalyse dont parle Freud (voir le Texte n° 7), sorte de "vexation psychologique" (l'expression est de Freud), qui prend souvent la forme d'un refus ou d'une reconnaissance culpabilisée.

III. 7. Il est vrai que le didacticien peut mettre, à débusquer et à dévoiler, une ardeur sadique ; porter avec suspicion un regard policier ; scandaliser et tirer quelque plaisir de le faire. Il est une manière d'user de l'analyse didactique, qui est stérile et négative : on y joue à faire peur, et à se faire peur. C'est une des mille façons, pour le didacticien, de ne pas accomplir la rupture nécessaire. De s'épargner le travail d'arrachement qui devrait le conduire "au-delà du bien et du mal".

III. 8. Cet usage négatif de l'analyse didactique se légitimerait de se dire critique : son usager s'installe alors dans une position de facile contestation, ennobli des lumières qui sont son apanage, mais dont il ne fait rien, sinon aveugler sa "victime" (l'enseignant).

III. 9. L'usage purement "critique" de l'analyse de la transposition didactique est une première réaction à la reconnaissance de l'existence de la transposition didactique. Pour un exemple, voir le Texte n° 8.

III. 10. Selon cette première réaction, la transposition didactique est "mauvaise" : péché irrémissible de l'acte d'enseignement ou, au mieux, mal nécessaire.

III.11. Dans cette perspective, la valeur d'une transposition didactique se mesurerait à l'aune de la <u>construction historique</u> (dans la "cité mathématicienne") du savoir dont l'enseignement est visé. La <u>construction</u> ou la <u>présentation didactique</u> des savoirs serait une version plus ou moins dégradée de sa <u>genèse historique</u> et de son <u>statut actuel</u> (sans que l'on entende ici la nécessité d'un isomorphisme des genèses historique et didactique : c'est là une autre thèse, plus précise du moins). Face à l'<u>épistémologie "naturelle"</u> l'enseignement proposerait <u>de facto</u> une <u>épistémologie "artificielle"</u>, inférieure.

III.12. L'explicitation qui précède peut permettre de penser le passage d'une réaction pessimiste à l'existence de la transposition didactique (conçue comme mal nécessaire), à un second type de réaction, <u>optimiste et dynamique</u> : <u>la recherche d'une "bonne" transposition didactique</u>.

III.13. Cette conception impose d'abord à l'enseignant une <u>réserve déontologique</u>, en vertu de son optimisme même : puisqu'il peut exister, pour tel objet de savoir, une <u>bonne</u> transposition didactique, on doit en principe s'abstenir d'enseigner des sujets, même "intéressants" (du point de vue de l'enseignant), pour lesquels on ne disposerait pas (pas encore, du moins) d'une transposition didactique satisfaisante.

III.14. Cette attitude de modestie est bien exprimée dans la fine notation suivante :

> "The good schoolmaster is known by the number of valuable subjects that he

declines to teach"

(Sir Richard Livingstone, The Future of Education, Cambridge, 1941).

III. 15. En sens inverse, et corrélativement, de la même conception découle l'exigence de rechercher de bonnes transpositions des savoirs correspondant aux demandes didactiques de la société.

III. 16. Une direction de recherche, qui à mon avis a surtout la vertu d'être un "modèle mental" contre lequel se définir, consisterait à démarquer avantageusement (grâce à quelques économies rétrospectives) la genèse socio-historique du savoir : tenant compte des acquis actuels, il serait possible de construire une épistémologie artificielle comme résumé amélioré (laissant de côté les impasses, les échecs, mais redéployant toute la richesse de développements féconds et oubliés) de la construction naturelle du savoir en jeu.

III. 17. Une autre direction de recherche consiste à prendre acte de la spécificité du projet de construction didactique des savoirs, de son hétérogénéité a priori avec les pratiques "savantes" des savoirs, de son irréductibilité immédiate aux genèses socio-historiques correspondantes.

III. 18. Dans cette hypothèse, qui fonde la nécessité et la légitimité de la didactique des mathématiques comme étude scientifique du système didactique en sa spécificité, l'étude de la transposition didactique suppose l'analyse des conditions et des cadres dans lesquelles elle s'opère. Existentiellement, notre hypothèse fonde un optimisme tempéré...

<u>Bibliographie</u> : Textes n° 7 et 8.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE IV

Objets de savoir et autres objets

Y. C.

juin 1980

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE IV

Objets de savoir et autres objets

IV. 1. Il faut dialectiser un peu les "définitions" introduites dans la FICHE I. Un "objet de savoir" ne vient à l'existence comme tel, dans le champ de conscience des agents du système didactique, que si son insertion dans le système des "objets à enseigner" apparaît utile à l'économie du système didactique (par exemple parce qu'elle permettrait de parer à l'obsolescence interne ou externe : voir la FICHE VI).

IV. 2. Cela n'est pas dire qu'un objet de savoir n'est identifié, et désigné comme objet à enseigner, qu'à partir du moment où le problème didactique de sa transposition en objet d'enseignement serait (potentiellement) résolu : le travail de la transposition est un travail qui se continue après l'introduction didactique de l'objet de savoir.

IV.3. Qu'est-ce qu'un "objet de savoir" ? Pour l'enseignant de mathématiques, il faut ranger dans cette catégorie certainement les "notions mathématiques" : par exemple, l'addition, le cercle, la dérivation, les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, ...

IV. 4. Ne pas oublier que les "exemples" précédents sont donnés par des étiquettes qui font sens dans la communauté des enseignants d'un même niveau du cursus scolaire. Le problème de l'analyse épistémologique et de l'analyse didactique (transposition didactique) de ce que recouvrent ces étiquettes, est posé.

IV. 5. A côté des "notions mathématiques" désignées ci-dessus se rangent des notions qu'on peut dire "paramathématiques" : par exemple, la notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration.

IV. 6. Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas "normalement" des objets d'étude pour le mathématicien. Les notions mathématiques sont, elles, des objets d'étude (on étudie la notion de nombre, la notion de groupe, etc.) et des outils d'étude (en principe !).

IV. 7. Bien entendu, il n'y a pas étanchéité absolue entre les deux domaines : la notion d'équation, la notion de démonstration, sont aujourd'hui des objets mathématiques en logique mathématique. La distinction doit donc toujours se référer à une pratique d'enseignement précise (niveau dans le cursus, lieu, temps, secteur des mathématiques, etc.).

IV. 8. Sur la distinction objets mathématiques/objets paramathématiques, on pourra lire le <u>Texte n° 9</u> (à propos de la notion de <u>paramètre</u>).

IV. 9. Les <u>notions paramathématiques</u> sont en général <u>préconstruites</u> (par <u>monstration</u>). Les <u>notions mathématiques</u> sont, quelquefois, plus souvent qu'on ne l'imagine du moins, <u>préconstruites</u> : c'est le cas, au premier cycle de l'enseignement secondaire français actuel, de la notion de <u>polynôme</u> (voir, J. Tonnelle, <u>op. cit.</u>).

IV. 10. En général cependant, les notions mathématiques sont <u>construites</u>, leur construction prenant la forme

- soit d'une <u>définition</u>, au sens strict :
  "le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que OM = R" ;

- soit d'une "<u>construction</u>", suite d'opérations du genre : prendre $\mathbb{Q}$, prendre les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$, montrer qu'elles forment un anneau commutatif et unitaire, prendre les suites de Cauchy tendant vers 0, montrer qu'elles forment un idéal de l'anneau précédent, prendre le quotient de l'anneau par l'idéal, montrer que c'est un corps. La construction s'achève par une "monstration" : un nombre réel, c'est un élément de ce corps.

IV. 11. Hormis une construction (qui est parfois une définition) les notions mathématiques ont des <u>propriétés</u> ("le <u>corps</u>

des réels est tel que l'équation $x^2 = 2$ y a une solution au moins"). Ils ont aussi des occasions d'emploi ("pour résoudre l'équation $2^x = 8$, prendre le logarithme, $x \log 2 = \log 8$, ce qui ramène à une équation du 1er degré en x, que l'on sait résoudre").

IV. 12. A propos des objets de savoir que sont les notions mathématiques, l'enseignant attend que l'élève sache (éventuellement) :

- donner la définition (ou retracer la construction) ;
- donner les propriétés ("principales"), les démontrer ;
- reconnaître un certain nombre d'occasions d'emploi ;
- etc.

IV. 13. Seuls ces objets de savoir sont pleinement des (candidats à être des) objets d'enseignement. Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement : ce sont des objets de savoir "auxiliaires", nécessaires à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être "appris" (ou plutôt : "connus"), mais ils ne sont pas "enseignés" (selon le plan d'enseignement des notions mathématiques).

IV. 14. Seules les notions mathématiques font l'objet d'une évaluation directe. L'enseignant demandera par exemple à l'élève de "résoudre l'équation $x^2 - 8x + 9 = 0$!" Les notions paramathématiques sont normativement considérées comme exclues de l'évaluation directe. L'élève échouant à la question :

"Résoudre et discuter l'équation

$$x^2 - \lambda x + (\lambda+1) = 0 \quad"\,,$$

le professeur pourra conclure que l'élève "n'a pas compris la notion de paramètre". A un autre niveau, il dira par exemple que l'élève "n'a pas compris la notion de démonstration" . L'enseignant de mathématiques qui, dans une soirée mondaine, rencontre un invité qui lui déclare : "Ah, vous êtes prof de maths ! Moi, je n'ai jamais compris pourquoi ax^2+bx+c égale zéro", pourra conclure que ce dernier "n'a pas compris la notion d'équation"...

IV. 15. Les notions paramathématiques (et a fortiori les notions mathématiques) sont des objets dont l'enseignant prend conscience, à qui il donne un nom (paramètre, équation, démonstration...) : bref, qui entrent dans son champ de perception didactique.

IV. 16. Il existe une strate plus profonde de "notions", mobilisées implicitement par le contrat didactique. Pour elles j'ai proposé le qualificatif de "protomathématiques". Là-dessus, voir le Texte n° 10.

IV. 17. En IV.12. on a cité, comme performance de l'élève attendue par le professeur, la reconnaissance de certaines occasions d'emploi des notions mathématiques considérées comme outils de l'activité mathématique. Par exemple, en 4ème, le professeur attendra de l'élève placé devant la question

"Factoriser $4x^2 - 36y^2$"

qu'il reconnaisse là l'occasion de mettre en œuvre le schème de factorisation $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; mais devant la question

« Factoriser $4x^2 - 36x$ »

l'élève devra reconnaître une factorisation "simple" (les premières étudiées, à l'aide de la seule distributivité, avant l'étude des "identités remarquables") :

$$4x^2 - 36x = 4x(x-9).$$

IV. 18. La performance peut être vue comme attestant une <u>compétence</u>, ou une <u>capacité</u>, "sous-jacente" et "générale".

IV. 19. Dans l'enseignement "ordinaire" cette <u>interprétation</u>, comme on l'a indiqué en IV. 14, sera formulée surtout <u>négativement</u> : de l'élève qui échoue presque systématiquement à ses factorisations, et dont le professeur situe la source de l'échec dans la difficulté à reconnaître la <u>situation de factorisation présentée</u> (pour suivre l'exemple amorcé ci-dessus), on finira par dire qu'<u>il lui manque</u> la capacité de reconnaître les "formes" des expressions algébriques.

IV. 20. Noter toutefois que, <u>en de rares occasions</u>, les enseignants exercent <u>explicitement</u> la "capacité de reconnaissance" de leurs élèves : en 4ème, nombre de professeurs, dans le but de préparer leurs élèves à la factorisation, les entraînent à "reconnaître les carrés" par exemple.

IV.21. La reconnaissance des "capacités" (de la capacité de "reconnaissance", par exemple) reste en général "subliminale" chez l'enseignant – sauf à être diagnostiquée négativement, comme on l'a dit. En revanche, elle est effectuée positivement à partir de certains points de vue sur le projet social d'enseignement, points de vue distincts de celui de l'enseignant stricto sensu.

IV.22. En amont de l'acte d'enseignement, il y a le point de vue de l'administration de l'acte d'enseignement selon les normes de la pédagogie par objectifs. Celle-ci s'occupe précisément à définir les "capacités" que l'élève doit pouvoir mettre en oeuvre avec succès à l'issue de tel ou tel enseignement.

IV.23. C'est ainsi que, pour prendre ici un seul exemple, le National Council of Teachers of Mathematics, présentant (en avril 1980) ses Recommendations for School Mathematics of the 1980s, et retenant pour première recommandation le fait que:

"problem solving be the focus of school mathematics in the 1980s",

est amené à préciser que :

" Mathematics programs should give students experience in the applications of mathematics, in selecting and matching strategies to the situation at hand. Students must learn to –

- formulate key questions;
- analyze and conceptualize problems;
- define the problem and the goal;
- discover patterns and similarities;
- seek out appropriate data;
- experiment;
- transfer skills and strategies to new situations;
- draw on background knowledge to apply mathematics."*

La "capacité de reconnaissance" est ici formulée explicitement : "discover patterns and similarities".

IV.24. En aval de l'acte d'enseignement, ou parallèlement à lui, il y a le point de vue, constitué antérieurement à celui de la pédagogie par objectifs, de l'orientation scolaire, dont la technique des tests doit permettre d'atteindre, à travers l'évaluation de la performance, l'évaluation de la compétence ("aptitudes" dans le vocabulaire ancien, "capacités" aujourd'hui).

IV.25. C'est ainsi que de nombreux tests supposent la mise en oeuvre de la capacité de "reconnaissance", c'est-à-dire du maniement de la dialectique ressemblances/dissemblances : Voir le Document n° 1.

IV.26. De nombreuses "capacités" ainsi identifiées restent absentes de l'univers de l'enseignant, notamment parce qu'elles ne peuvent pas, comme telles (c'est-à-dire

---

* An Agenda For Action, Recommendations for School Mathematics of the 1980s, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., (1906 Association Drive, Reston, Virginia, 22091), p. 3.

dans leur généralité), faire l'objet d'un enseignement. L'enseignant peut entraîner ses élèves à reconnaître (par exemple) une différence de deux carrés ; il n'existe pas pour autant un enseignement dont l'objet soit "la dialectique ressemblance/différence". Un tel enseignement pourrait se concevoir ; mais il n'aurait pas pour objectif l'acquisition de cette capacité ; il nous apprendrait par exemple les conditions historiques d'émergence et de rationalisation de la dialectique ressemblance/dissemblance dans la pensée occidentale, à travers le développement de la statistique, etc. : voir l'Etude n° 3. En général, si ces capacités, leur acquisation et leur développement, peuvent être désignées comme des objectifs d'enseignement elles ne prennent pas place au rang d'objets d'enseignement pour autant.

IV.27. De toute façon, l'exercice de telles capacités n'est réalisé dans l'enseignement que dans des contextes de situation spécifiques. Ou du moins, il ne peut, à la rigueur, faire l'objet d'une reconnaissance (par l'enseignant, par l'élève) que dans de tels contextes. Cette reconnaissance est en effet sujette à la grille de perception définie par le contrat didactique et sa hiérarchie de valeurs. Il est "intéressant", pour l'enseignant, que l'élève sache reconnaître une différence de deux carrés ; il lui paraîtra "mathématiquement inintéressant" qu'il sache aussi distinguer le lapin intrus dans une série de volatiles (bien entendu, il y a là un problème de "niveau", mais il est des tests analogues bien moins évidents, même pour un adulte...).

IV.28. C'est en effet par le filtrage du contrat didactique que doit passer l'exercice des "capacités". Ainsi l'élève qui, à la question :

"Factoriser $4x^2 - 36x$",

répondrait :

$$4x^2 - 36x = 4x^2 - 2\times(2\times 9)x + 9^2 - 9^2$$
$$= (2x-9)^2 - 9^2 = (2x-9+9)(2x-9-9)$$
$$= 2x\,(2x-18)$$

ferait une réponse "fausse" (pour deux raisons : 1. il n'a pas fait ce qu'on attendait de lui ; 2. la réponse "juste" est $4x(x-9)$). Il aurait démontré ainsi :

- une capacité peu ordinaire (s'il est un élève de 4ème) de reconnaître des formes algébriques ;
- une incapacité à reconnaître le type de situation-problème devant lequel il est mis (son comportement de réponse est non pertinent au regard du contrat didactique si patiemment tissé par l'enseignant).

IV.29. C'est ce genre d'achoppement que j'ai appelé (cf. le Texte n° 10) "difficulté protomathématique". Une telle difficulté peut surgir du fait de la non maîtrise d'une capacité requise par le contrat didactique pour le bon entendement de celui-ci, la maîtrise en question figurant alors comme prérequis du contrat didactique. Son exercice pertinent demeure tout de même, en dernier ressort, assujetti aux clauses du contrat.

IV. 30. Les notions protomathématiques, par exemple la notion de "pattern", se situent à un niveau d'implicitation plus profond (pour l'enseignant, pour l'élève). Ce caractère d'implicite s'exprime, dans le contrat didactique, par le fait qu'elles "vont de soi" — sauf précisément lorsqu'il y a difficulté protomathématique et rupture de contrat.

IV. 31. Notions mathématiques, notions paramathématiques, notions protomathématiques constituent des strates de plus en plus profondes du fonctionnement didactique du savoir. Leur prise en compte différentielle est nécessaire à l'analyse didactique : c'est ainsi que l'analyse de la transposition didactique de telle notion mathématique (par exemple l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$) suppose la considération de notions paramathématiques (par exemple, les notions de factorisation et de simplification), qui à leur tour doivent être vues à la lumière de certaines notions protomathématiques (la notion de "pattern", de "simplicité", etc.).

IV. 32. Il est parfois possible d'amener une notion d'un niveau donné à un niveau supérieur d'explicitation. C'est ainsi que, comme on l'a noté, les notions paramathématiques d'équation ou de démonstration peuvent faire l'objet de définitions précises en logique mathématique. C'est ainsi encore que telle notion protomathématique peut devenir, en affleurant à la surface du discours didactique explicite, une notion paramathématique. Par exemple, dans l'étude des "identités remarquables", certains manuels, certains enseignants, introduisent, correspondant au "pattern" protomathématique, un "moule" paramathématique : voir le <u>Document n° 2</u>.

IV. 33. <u>Mais il faut noter surtout</u> que, eu égard aux ambitions de l'analyse didactique, ce procès d'explicitation est réducteur du <u>"sens" didactique</u> des objets qu'il transforme, et que donc, s'il peut projeter des lumières sur leur signification, c'est d'abord en montrant que celle-ci ne se réduit pas, dans le système didactique, à ce qui peut s'en condenser dans le discours didactique ou mathématique.

IV. 34. La notion paramathématique de "factorisation", telle qu'elle fonctionne dans l'enseignement de l'algèbre au premier cycle du secondaire, ne peut guère se ramener à une notion mathématique <u>stricto sensu</u> (voir J. Tonnelle, <u>op. cit.</u> chapitre 4, §§ 4.1.2). Elle ne fait sens en effet que dans le cadre, surdéterminé et indéterminé à la fois (selon une remarque plus générale de P. Bourdieu), du code par lequel se dessine une certaine <u>"logique pratique"</u>. Et, comme l'observe encore Bourdieu, "la pratique n'implique pas — ou exclut — la maîtrise de la logique qui s'y exprime". Sur l'implicite dans la logique pratique, on lira le <u>Texte n° 11</u>.

<u>Bibliographie</u> : Textes n° 1, 9, 10, 11 ; et Y. Chevallard, <u>Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante</u>, in <u>Recherches</u>.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE V

Savoirs scolarisables et apprêt didactique des savoirs : la mise en textes

Y. C.

Juin 1980.

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE V

Savoirs scolarisables et apprêt didactique des savoirs

V.1. Les distinctions introduites précédemment :

notions mathématiques / notions paramathématiques
notions paramathématiques / notions protomathématiques,

qui esquissent une analyse épistémologique du régime didactique du savoir (en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques), font apparaître qu'il y a des savoirs (au sens large : savoirs et savoir-faire) qui sont appris sans jamais être spécifiquement enseignés (si l'on exige de l'acte d'enseignement une saisie réflexive de ses fins et l'explicitation de son intention didactique)

V.2 C'est qu'il y a des savoirs enseignables (et enseignés) et des savoirs non enseignables ou du moins, non scolarisables. C'est ainsi que, selon Michel Verret (op. cit., pp. 146-147),

" Une transmission scolaire bureaucratique suppose quant au savoir
1° - la division de la pratique théorique en champs de savoir délimités donnant lieu à

des pratiques d'apprentissage spécialisées – c'est-à-dire <u>la désyncrétisation du savoir</u>.

2° – en chacune de ces pratiques, la séparation du savoir et de la personne – c'est-à-dire <u>la dépersonnalisation du savoir</u>.

3° – la programmation des apprentissages et des contrôles suivant des séquences raisonnées permettant une acquisition progressive des expertises – c'est-à-dire <u>la programmabilité de l'acquisition du savoir</u>.

Elle suppose quant à la transmission

1° – la définition explicite, en compréhension et en extension, du savoir à transmettre – c'est-à-dire <u>la publicité du savoir</u>.

2° – le contrôle réglé des apprentissages suivant des procédures de vérification autorisant la certification des expertises – c'est-à-dire <u>le contrôle social des apprentissages</u>."

V.3. Ces contraintes très générales définissent par exclusion, dans le même temps, <u>les savoirs non scolarisables</u>. Selon Michel Verret toujours,

" Ces conditions définissent en même temps que le champ de transmissibilité scolaire son champ d'intransmissibilité :

Seront socialement non scolarisables

1° – les savoirs réservés (savoirs ésotériques, savoirs initiatiques) pour autant qu'ils échapperaient à la publicité.

2° – les savoirs aristocratiques pour autant qu'ils prétendraient éluder les contraintes d'un contrôle social publiquement défini suivant des normes universelles exclusives de tout privilège de corps.

Seront gnoséologiquement non scolarisables
1° – les savoirs totaux, ou à prétention sociale, pour autant que s'opposant aux procédures analytiques, leurs apprentissages résisteraient aussi à des programmations organisées en séquences progressives.
2° – les savoirs personnels, pour autant qu'ils seraient consubstantiellement liés à des personnes par définition insubstituables.
3° – les savoirs empiriques, pour autant que leur syncrétisme les voue précisément à l'acquisition globale et personnelle, par les voies intuitives de la familiarité mimétique, sans qu'on sache jamais précisément quand on apprend, ni ce qu'on apprend exactement. Sait-on même qu'on apprend à parler, à écouter, à s'habiller, à plaisanter ? »
(op. cit., pp. 147-148).

V.4. Sur l'application de ces principes d'analyse aux "savoirs de l'homme", voir les <u>Textes 12 et 13</u>.

V.5. Dans la transposition didactique (des mathématiques) les contraintes énumérées plus-haut, à savoir :

- la désyncrétisation du savoir ;
- la dépersonnalisation du savoir ;
- la programmabilité de l'acquisition du savoir ;
- la publicité du savoir ;
- le contrôle social des apprentissages

sont tendanciellement satisfaites par un processus d'"apprêt" didactique que j'ai appelé la mise en textes du savoir.

V.6. En effet, par l'exigence d'explicitation discursive, la "textualisation" du savoir amène d'abord la délimitation de savoirs "partiels", chacun s'exprimant dans un discours (fictivement) autonome. Ce procès produit une "désintrication" du savoir, soit sa désyncrétisation. En particulier, il opère une différenciation entre ce qui appartient proprement au champ délimité (en l'espèce, les notions mathématiques et paramathématiques) et ce qui, implicitement (mais réellement) présent (dans le syncrétisme que réalise tout savoir en acte), n'est pas formellement identifié comme tel (notions protomathématiques). Il opère encore une différenciation entre ce qui, présent dans le texte lui-même, fait l'objet de son discours (notions mathématiques), et ce qui, nécessaire à la construction du texte, n'en est pas la visée (notions paramathématiques).

V.7. La conscience de la délimitation de savoirs "partiels" autonomisés (par le processus de transposition didactique) apparaît souvent chez les <u>agents</u> de la transposition didactique (en position de méconnaissance) : c'est ainsi que les auteurs de manuels justifieront leurs "choix", impliqués par les contraintes structurelles du système didactique, par des raisons contingentes du genre "les étroites limites du présent ouvrage", "l'esprit de cette collection", etc.

V. 8. En revanche, la <u>conscience</u> de la <u>désyncrétisation</u> n'apparaît pratiquement jamais. C'est ainsi que les "<u>prérequis</u>" sont formulés en termes d'<u>éléments de connaissance</u>, situés par l'auteur comme antérieurs aux notions présentées (dans une conception progressive légaliste du procès d'apprentissage, sur laquelle on reviendra). <u>A contrario</u>, on peut jouer sur cette situation de non-conscience pour produire un effet d'humour, comme dans le célèbre "Mode d'emploi" des <u>Eléments de mathématique</u> de N. Bourbaki :

> "Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction."

Bien entendu, le "syncrétisme" est, là encore, trahi : le raisonnement mathématique et le pouvoir d'abstraction dont il est question supposent des situations et des notions mathématiques pour leur mise en oeuvre : soit des connaissances mathématiques "antérieures".

V. 9. Plus rarement, l'autonomisation des savoirs partiels, nécessaire, est présentée comme didactiquement utile. C'est ainsi que l'auteur d'un ouvrage de physique (Jean-Louis Destouches, La mécanique des solides, PUF, Paris, 1956) écrit dans son avant-propos :

> "Toute théorie physique est difficile à bien comprendre. La mécanique newtonienne des systèmes de points et de solides n'échappe pas à cette règle, bien que ce soit l'une des théories physiques les plus simples et celle qui a servi de modèle à toutes les théories ultérieures. L'esprit humain n'est pas apte, en effet, à saisir d'emblée toute la complexité d'un mouvement.
> ....
> Une bonne manière d'aborder l'étude d'une théorie physique est de commencer par l'examen de ses diverses théories partielles. C'est la méthode que nous avons suivie ; nous commençons par le calcul vectoriel, la géométrie des masses, la cinématique, la cinétique. Ce sont là des théories partielles faciles à saisir et qui préparent à l'étude de la dynamique (...)"

V. 10. Le procès d'explicitation textuelle du savoir (notions mathématiques) produit corrélativement un effet d'implicitation (notions protomathématiques) portant sur des "prerequisits" dès lors non reconnus comme tels. L'effet de délimitation produit encore, fait essentiel du point de vue de l'épistémologie, la décontextualisation du savoir, sa désinsertion du réseau des problématiques et des problèmes qui lui donnent son "sens" complet, la rupture du jeu intersectoriel constitutif du savoir dans son mouvement de création et de réalisation. Je n'insisterai pas en ce point sur ce thème fondamental. Pour quelques remarques générales, voir Y. Chevallard, Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante, et l'Etude n° 4.

V.11. La textualisation réalise, en second lieu, la dissociation entre la pensée en tant que portée par une subjectivité, et ses productions discursives : le sujet est expulsé hors de ses productions ; le savoir est par là soumis à une transformation de dépersonnalisation. Pour faire apparaître a contrario la spécificité de cette position, je citerai – sans y adhérer – le point de vue exactement opposé à la "réduction textualiste", celui des logiciens intuitionnistes :

> " The (mental) constructions we consider, are thought of as to exist in the mind of an individual (idealized) mathematician. The language of mathematics is an attempt (necessarily nearly always inadequate) to describe these mental constructions "

(A.S. Troelstra, Principles of intuitionism, Springer-Verlag, 1969, p.4).

Bien entendu, s'ils veulent communiquer, les intuitionnistes sont obligés d'en venir, comme tout le monde, à la "mise en texte"...

V.12. La textualisation du savoir, et la dépersonnalisation qu'elle implique, tend à promouvoir une conception "positive" de l'apprentissage, qui par exemple lira l'erreur comme "manque" par rapport au "plein" du texte. Dans une "théorie" spontanée de l'erreur, en effet,

> "la production de l'erreur par le sujet n'est pas un acte positif renvoyant à des schèmes ou des représentations dûment construites et, parfois, tenaces – et que les stratégies didactiques de l'enseignant devraient tenter de déstabiliser et de détruire. L'erreur (…) apparaît comme un simple manque, un creux de la connaissance. Par là, le sujet est nié, et ses productions renvoyées au néant de l'"avant-savoir". Tout est ramené au savoir (réduit lui-même à un texte), sa présence comme son absence. Cette conception détermine d'ailleurs une autre conséquence, dont nous ne parlerons pas plus ici : quand, finalement, on s'aperçoit de l'existence du sujet, et de son activité propre de sujet connaissant, on dissocie souvent l'activité intellectuelle "normale", de l'activité "noble" qui est celle de la "découverte" : ainsi se constitue comme séparée du reste des actes de savoir, l'étude de l'heuristique du sujet . Par cette dissociation se perpétue et se légitime rétroactivement la négation du sujet comme producteur de sens : l'"heuristique" est une idéologie d'enseignants, et un artefact psychologique"

(Y. Chevallard, Sur la transposition didactique dans l'enseignement de la statistique, pp. 16-17).

V. 13. L'objectivation procurée par la mise en textes du savoir est la source évidente, en outre, de la publicité du savoir qui s'y représente (comme opposé au caractère "privé" des savoirs personnels, acquis par mimétisme, ou ésotériques, acquis par initiation, etc.). Cette publicité, à son tour, permet le contrôle social des apprentissages, en vertu d'une certaine conception de ce que c'est que "savoir", conception fondée (ou légitimée, tout au moins) par la textualisation. Conception dont la caricature extrême est le « su par coeur" comme simple psittacisme (a contrario, supprimez le texte et cette conception perd toute signification, par évanouissement du référent : le texte du savoir comme norme du savoir et de ce que c'est que "savoir").

V. 14. Mais l'essentiel de ce que la mise en texte autorise est précisément ce que M. Verret désigne par l'expression de programmabilité de l'acquisition du savoir. Le texte est une norme de progression dans la connaissance. Un texte a un début et une fin (provisoire), et opère par un enchaînement de raisons. Si l'apprentissage est conçu comme démarque du progrès que manifeste la structure propre du texte, celui-ci permet la mesure de celui-là ; et permet surtout une didactique "isomorphe" dont il marque les scansions. C'est, me semble-t-il, de ce point qu'il faut partir afin de poursuivre l'analyse : le texte autorise une didactique, dont la durée démarque sa diachronie, et cette didactique se légitime alors par la fiction d'une conception de l'apprentissage comme "isomorphe" au procès d'enseignement dont le modèle ordonnateur est le texte du savoir en sa dynamique temporelle.

V. 15. Marquons tout de suite deux points sur lesquels apparaîtra la fiction d'une telle "théorie" de l'apprentissage. Le texte a un début, et il procède séquentiellement. Cela déjà n'est pas vrai du savoir que le texte porte à l'explicitation discursive. Il est rare qu'un savoir, en effet, soit initialisable, et séquentialisable. Prenons précisément l'entreprise de N. Bourbaki : "Le traité prend les mathématiques à leur début" dit le "Mode d'emploi". Pourtant, il n'en est rien : le traité en question prend grand soin de l'axiomatique, il laisse les règles d'inférence dans l'implicite : la notion de raisonnement n'y est pas construite, mais préconstruite (sur cette notion, voir la FICHE n° VIII). Il y a donc, comme il y a toujours, quelque chose avant le "début" – quelque chose qui peut devenir pertinent pour expliquer ce qui se passe "ensuite" (dans l'histoire des mathématiques, par exemple, les "crises"). De la même façon, la même entreprise échoue à la séquentialisation des mathématiques : il n'est pas vrai qu'un savoir, aussi "objectif" soit-il, puisse "se dire" de A jusqu'à Z. Il s'en faut de beaucoup, a fortiori, que le procès d'apprentissage soit séquentiel : l'ordre d'apprentissage n'est pas isomorphe à l'ordre d'exposition du savoir, l'apprentissage du savoir n'est pas le décalque du texte du savoir : on reviendra longuement sur ce point dans la suite.

Bibliographie : Textes 12 et 13.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE VI

Le texte du savoir et la structure du temps didactique

Y. C.
juin 1980.

FICHE VI

Le texte du savoir et la structure du temps didactique

VI. 1. La production d'un système didactique à partir d'un projet social d'enseignement préalable suppose la production d'un texte du savoir, et cette mise en textes du savoir engendre les effets énoncés précédemment (désyncrétisation, dépersonnalisation) tout en autorisant un rapport spécifique au temps didactique (programmabilité de l'acquisition du savoir)

VI.2. Ce rapport savoir/durée est l'élément fondamental du processus didactique. La mise en textes du savoir, préalable, permet que se noue ce rapport : encore le "texte" doit-il soutenir un rapport particulier (selon des contraintes envisagées ci-après) avec la durée, le temps, didactiques. Le processus didactique existe comme interaction d'un texte et d'une durée. Sur la puissance productive du temps scolaire, on lira le Texte n° 14.

VI.3. Par les notations précédentes (explicitées ensuite) je veux marquer d'emblée la spécificité, déjà soulignée (cf. FICHE III, point 17), du fonctionnement didactique, de sa nature propre irréductible, sans autre truchement, au fonctionnement "laïc" du savoir correspondant dans la "cité savante". Dans celle-ci en effet le moteur de l'avancée (de la progression) dans la construction du savoir, est, en dernière instance, constitué par les problèmes qui s'enchaînent et se reproduisent en produisant une histoire intellectuelle de la communauté savante où ils apparaissent. Les problèmes, disait Bachelard, sont le nerf du progrès scientifique. Une recherche apparaît ainsi comme une suite de ricochets, où un problème résolu (ou, provisoirement, écarté) amène d'autres problèmes, posés, à résoudre. Le processus d'enseignement, à cet égard, diffère fondamentalement du processus de recherche : les problèmes n'y sont pas le ressort de la progression ; celui-ci est constitué par une certaine contradiction dialectique, la contradiction ancien/nouveau.

VI.4. Avant de développer ce point, notons deux attitudes différentes, opposées d'intentions, s'originant toutes deux dans la méconnaissance du rôle principal de la contradiction ancien/nouveau, et du caractère secondaire du rôle des problèmes, dans le processus didactique. D'une part, il y a l'oubli des problèmes : c'est le cas général, où le "cours" est réduit à n'être plus qu'un simple discours ; d'autre part, et en réaction contre ce qui est d'ailleurs plus un état de fait que l'effet d'une attitude intentionnelle, il y a des tentatives visant à restituer un rôle central aux problèmes dans l'enseignement des mathématiques. Ces tentatives sont en général conduites dans une perspective de restauration d'une praxis mathématique "authentique" au sein du processus d'enseignement. La transposition didactique peut y être conçue, de manière réductrice, comme un décalque fidèle en esprit, et simplifié sans adultération, à partir de l'observation et de l'analyse du fonctionnement du savoir "<u>in vivo</u>" (cf. III.16.).

VI.5. Dans le premier cas, il y a évacuation des problèmes soit, largement, de la praxis mathématique. Dans le second cas, il y a méprise sur les conditions de possibilité d'une solution didactique au <u>problème des problèmes</u> : en subordination à la contradiction principale, motrice du procès d'enseignement. Je reviendrai plus loin sur ces questions.

VI.6. Pour des indications générales sur la notion de <u>contradiction</u>, voir le <u>Texte n° 15</u>. On notera notamment, dans l'analyse particulière d'une situation didactique particulière, l'importance des aspects de <u>surdétermination</u> de la contradiction principale au sein d'un <u>complexe de contradictions</u>. Pour un exemple développé, voir Odile Schneider, <u>Mémoire pour le D.E.A. de D.D.M.</u>

VI.7. Comment donc fonctionne la contradiction ancien/nouveau dans le processus d'enseignement ? Pour qu'un objet de savoir puisse s'intégrer comme objet d'enseignement dans ce processus, il faut que son introduction, à tel instant de la durée didactique le fasse apparaître comme <u>un objet à deux faces</u>, <u>contradictoires l'une de l'autre</u>. D'une part (c'est le premier "moment", la première "face") il doit apparaître comme nouveau, opérant une ouverture dans les frontières de l'univers de connaissances déjà exploré ; sa nouveauté permet que se noue, à son sujet, entre enseignant et enseignés, le contrat didactique : il peut être l'objet d'un enseignement, et l'enjeu d'un apprentissage. Mais d'autre part, en un second moment de la dialectique d'enseignement, il doit apparaître comme ancien, c'est-à-dire autorisant une identification (par les enseignés) qui l'inscrive dans la perspective de l'univers de connaissances ancien. Cette reconnaissance est, en un sens, nécessairement mystifiée (sinon l'objet n'aurait pas de caractère de nouveauté) : c'est là l'expression subjective de la contradiction objective dont l'objet introduit est le support.

VI.8. L'objet d'enseignement réalise donc un "équilibre" contradictoire entre passé et avenir : il est un objet transactionnel entre passé et avenir. Sur la notion de "transaction", investie dans un autre contexte, on lira le Texte n° 16.

VI.9. Comment évolue la contradiction ancien/nouveau ? Normalement, ou mieux, normativement, cette contradiction est dépassée dans le succès de l'apprentissage. Mais il peut se produire un blocage de la dialectique, sans dépassement véritable. Que faut-il entendre par là ? En réalité le dépassement de la contradiction ne peut se mesurer en termes quantitatifs de "succès à l'apprentissage" : dans tout processus didactique, il y a un taux résiduel d'échec, qui peut être non négligeable en termes absolus. Mais il existe, inscrit au contrat didactique, un "seuil" en-dessous duquel le taux d'échec sera regardé comme "satisfaisant", c'est-à-dire manifestant le dépassement de la contradiction ancien/nouveau. On ne peut donc juger s'il y a dépassement ou blocage par l'analyse empirique du succès et de l'échec seulement. L'enseignement d'un objet d'enseignement s'arrête généralement bien avant que le taux d'échec soit tombé à zéro (songez par exemple à la multiplication des entiers à l'école primaire). En fait, la situation de blocage doit être diagnostiquée lorsque l'objet introduit, trop "nouveau", suscitant conséquemment un taux d'échec trop élevé, est dénaturé (par divers procédés dont, notamment, l'algorithmisation) afin que soit atténué son caractère de "nouveauté", et accentuée sa mise en continuité avec les connaissances "anciennes". Le ressurgissement ultérieur, dans sa nouveauté non réduite, de l'objet ainsi intégré dans la durée didactique, produira localement une chute brutale du succès, donnant alors à l'enseignant une variable de commande à la baisse sur le taux de réussite, par l'usage de laquelle ce dernier pourra réaffirmer sa place spécifique dans ce que j'ai appelé la topogénèse didactique du savoir. Dans ces circonstances, un objet, très anciennement présenté, pourra demeurer terriblement "nouveau" : pour des élèves de nos Terminales A, la règle de trois reste, dit-on, indéfiniment dans cette catégorie : il y a blocage.

VI. 10. Le dépassement de la contradiction ancien/nouveau, à propos de tel objet, équivaut, peut-on dire, au vieillissement de cet objet : les objets d'enseignement sont victimes du temps didactique, ils sont soumis à une érosion, à une usure "morales", qui implique au cours d'un cycle d'étude leur renouvellement. On peut donner le nom d'obsolescence interne, ou relative, à ce phénomène d'usure, intérieure à un cycle d'enseignement, pour l'opposer à l'obsolescence externe, ou absolue, relativement à la société ambiante (sur l'obsolescence absolue, voir la FICHE VII). Le renouvellement est rythmé par la structure particulière de la dialectique ancien/nouveau, qui réalise ce renouvellement : ainsi s'institue la structure du temps didactique, ou plus précisément (pour lever une ambiguïté éventuelle) du temps de l'enseignement (par opposition au temps de l'apprentissage), dont la version consciente, intentionnelle, est donnée, au niveau de l'administration de l'acte d'enseignement, par la progression marquée dans les programmes, les manuels, les "progressions" que fabriquent professeurs et I.P.R., etc. (voir l'Etude n° 5).

VI. 11. En définissant le temps de l'enseignement en sa structure propre, la dialectique de l'ancien et du nouveau, opérant sur les savoirs textualisés, orchestre une durée didactique qui va devenir un modèle de temporalité dominant dans la représentation des temporalités (pourtant) différentes (comme on le soulignera dans la FICHE VIII) qui coexistent, et se compénètrent sans s'égaler jamais complètement, dans le système didactique. Ce modèle est celui, légaliste, d'une durée progressive, cumulative et irréversible (en ce sens qu'elle peut se perdre – et c'est le but des "rappels" que de la restituer dans sa fraîcheur originaire –, non se modifier). L'effet de cette durée didactique ainsi instituée, n'est pas dans la création d'un temps de l'apprentissage "isomorphe", qui en serait la duplication subjective en chaque enseigné. Le temps "légal" de l'enseignement a pour effet fondamental

d'<u>interpeller chaque "enseigné concret" en "sujet didactique"</u>.
Face à ce temps qui s'impose à lui, le sujet didactique pose sa subjectivité et son "histoire" personnelle : il est interpellé, il doit, en un sens, répondre, selon la structure d'une temporalité subjective particulière qui se définit dans le cadre progressif du temps de l'enseignement, sans toutefois s'identifier à lui. Sur la notion d'"interpellation des individus concrets en sujets," on lira le <u>Texte n° 17</u>.

<u>Bibliographie :</u> Textes n° 14, 15, 16 et 17.

*

*   *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE VII

Le temps de l'enseignement comme fiction : chronogénèse et topogénèse

Y. C.
juin 1980.

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE VII

Le temps de l'enseignement comme fiction : chronogénèse et topogénèse

VII.1. Dans la relation didactique (qui unit enseignant, enseigné, et "savoir"), l'enseignant est le servant de la machine didactique dont le moteur est la contradiction de l'ancien et du nouveau : il en nourrit le fonctionnement en y introduisant ces objets transactionnels que sont les objets de savoir convenablement apprêtés en objets d'enseignement. Il est celui qui, toujours – s'il veut remplir son rôle, tenir sa "place" – doit "étonner". Il relance l'horloge didactique en parant à l'obsolescence interne qui amènerait l'arrêt du temps – ou, du moins, son ralentissement, son exténuation.

VII.2. L'enseignant est donc celui qui sait avant les autres, qui sait déjà, qui sait "plus". Et cela lui permet de conduire la chronogénèse du savoir. C'est là, strictement, la condition qui le rend capable d'opérer le renouvellement didactique : c'est la condition minimale. Si cette avance chronologique, toujours détruite (par l'apprentissage) toujours reconstruite (par l'enseignement, c'est-à-dire l'introduction de nouveaux objets transactionnels), se structurait selon le seul axe temporel d'un temps progressif, cumulatif, irréversible, il y aurait bien – en décalage chronologique – identification du temps de l'enseignement et du temps de l'apprentissage : la fiction d'un temps didactique unique deviendrait réalité.

VII. 3. Dans le Discours de la méthode, commentant ses quatre préceptes "pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences", Descartes invite le lecteur à considérer

> "que, n'y ayant qu'une vérité de chaque chose, quiconque la trouve en sait autant qu'on en peut savoir ; et que, par exemple, un enfant instruit en l'arithmétique, ayant fait une addition suivant ses règles, se peut assurer d'avoir trouvé, touchant la somme qu'il examinait, tout ce que l'esprit humain saurait trouver".

Or, cette assertion n'est pas vraie : ou du moins elle ne l'est qu'autant que l'"enfant" supposé n'est pas interpellé en sujet didactique par son assujettissement à la dynamique temporelle de la relation d'enseignement. Si l'on accepte, pour un temps, l'idée que le retard, toujours creusé, tend toujours à être comblé, et que, s'agissant des connaissances antérieurement enseignées, l'élève peut en savoir tout autant que le maître (qui, par nature, possède un surplus de savoir en attente d'enseignement), le maître se distingue tout de même de l'élève, sur l'axe temporel de la relation didactique, en ce qu'il est capable d'anticipation : l'élève peut bien – admettons-le, du moins, un instant – maîtriser le passé, seul le maître peut maîtriser le futur. L'enseigné peut apprendre ; l'enseignant peut savoir ce que l'enseigné peut apprendre. Le maître n'est pas seulement "supposé savoir" : il est "supposé anticiper", si une relation d'enseignement doit se nouer.

VII. 4. La distinction de l'enseignant et de l'enseigné s'affine donc spécifiquement, non par rapport au savoir, mais par rapport au temps comme temps du savoir : le déploiement temporel du savoir dans le processus didactique constitue comme tels enseignant et enseigné, d'un même mouvement, dans leurs positions respectives et leurs relations spécifiques à l'avant et à l'après (à l'anticipation). En ce sens déjà, le temps de l'enseignement, où l'anticipation est essentielle, et le temps de l'apprentissage, où un certain type de rétroactions (voir la FICHE VIII) est en travail, se distinguent, parce qu'ils manifestent des rapports distincts à la durée.

VII. 5. On va voir que la distinction se modèle selon d'autres formes. Enseignant et enseigné occupent des positions distinctes par rapport à la dynamique de la durée didactique : ils diffèrent par leurs rapports spécifiés à la diachronie du système didactique, à ce que l'on peut nommer la chronogénèse. Mais ils diffèrent aussi selon d'autres modalités : selon leurs places respectives par rapport au savoir en construction, par rapport à ce qu'on peut appeler la topogénèse du savoir, dans la synchronie du système didactique.

VII. 6. Ce problème a été repéré (notamment, en France, au cours des années soixante) sous le nom de "relation enseignant/enseigné". Dans une perspective, héritière des conceptions américaines de la "new education", florissante aux Etats-Unis au cours des années cinquante, où les contenus de savoir se trouvent dévalorisés et, plus ou moins, évacués (notamment les savoirs "académiques" : voir le Texte n° 18), les analyses développées à cet égard se sont appuyées sur une conception qui fait découler, à titre de spécifications <u>d'une essence unique du pouvoir</u>, l'ensemble des rapports entre enseignants et enseignés d'une investiture, réalisée une fois pour toute, en des "rôles" antagonistes, à partir de quoi le détail de l'événementiel dans la classe s'expliquerait entièrement : le professeur serait le Maître, le Père, le Patron, et à cette figure du pouvoir l'élève répondrait comme esclave, fils, et exploité. On trouvera dans le <u>Texte n° 19</u>, qui reproduit partiellement un article du sociologue René Lourau, un exemple de ce genre d'"explications" qui n'expliquent rien mais au contraire appellent une élucidation.

VII. 7. Il peut exister, aux franges du système éducatif, des cas-limites où la relation didactique, pervertie, se dégrade dans les termes nus de la dialectique maître / esclave : des cas qui se rencontrent quelquefois, en effet, dans la chronique judiciaire. Mais telle n'est pas la règle : un enseignant de physique, par exemple, qui arriverait dans un amphithéâtre avec une énorme réputation (faisons-le, pour les besoins de la cause, prix Nobel de l'année), attirerait beaucoup d'auditeurs, suscitant enthousiasme et ferveur ; qu'il fasse son premier cours sur le parallélogramme des forces et le public, encore attentif, supputera quelque canular didactique, attendant de son héros que, partant de là, il monte audacieusement et selon les vues originales qui signent le génie, à des sujets plus haut ; mais qu'en son second cours, le "grand physicien" supposé répète son premier :

sa réputation ne fera rien à l'affaire, et il devra avoir fermé à clé les portes pour conserver son public... C'est que l'enseignant reçoit de l'enseigné cette exigence : "étonnez-moi ! ". Il est celui qui, chaque fois, doit relancer le mouvement. Il devra s'assurer les moyens de son hégémonie s'il ne veut pas tomber aux basses oeuvres de la coercition (pour utiliser le langage de Gramsci).

VII. 8. C'est qu'en fait, loin d'être fondé une fois pour toute par l'efficace décisoire d'une instance unique (l'Institution, le Diplôme, etc.), le "pouvoir" n'existe que comme effet d'un réseau toujours recommencé de "pouvoirs" concrets. C'est par les travaux de M. Foucault que l'analyse a pu progresser sur ce point. D'une part, "le" pouvoir suppose une multiplicité de micro-pouvoirs concrètement réalisés (voir le Texte n° 20). Il convient donc de chercher les "rouages" et la "mécanique" du pouvoir, en analysant ses "maillons les plus fins" (selon les termes mêmes de Foucault). C'est ce qui n'a pas été fait dans le type d'analyses mentionné en VII.6. : à vrai dire, l'examen du détail de la mécanique du pouvoir restait hors de sa portée, puisque ces analyses pratiquaient, par décision idéologique (et sans doute aussi par nécessité), l'oubli des contenus, et la dévaluation systématique de leur importance comme enjeux et moyens dans l'économie du système d'enseignement. D'autre part, il a fallu, pour tenter de comprendre les mécanismes du pouvoir, modifier notre conception même du pouvoir : alors que, dans la conception courante, le pouvoir est vu essentiellement comme interdicteur (il est cette instance qui dit "non"...), Foucault a mis en lumière la <u>productivité du pouvoir</u>, appuyée sur un ensemble complexe de voies et de moyens. Le pouvoir de l'enseignant dans sa classe, ça n'est pas d'<u>interdire</u> (plus précisément : d'interdire de manière <u>directe</u>) la réponse $16x^2-4 = 2(8x^2-2)$, mais bien de <u>produire</u> la réponse $16x^2-4 = (4x+2)(4x-2)$. Son pouvoir consiste moins à désigner les "mauvaises" réponses, qu'à susciter <u>la bonne réponse</u> — qui désigne implicitement les autres réponses comme mauvaises. Sur la "productivité" du pouvoir, voir le <u>Texte n° 21</u>.

VII. 9. Pour que le pouvoir de l'enseignant soit reconnu dans la classe, ce pouvoir doit toujours se réaffirmer, et l'hégémonie qu'il manifeste descendre constamment aux niveaux les plus concrets de réalisation : il n'est ici de pouvoir que porté (parce que prouvé) <u>par des actes concrets de pouvoir</u>, au plan même <u>des contenus de savoir spécifiques.</u> Car non seulement l'enseignant, supposé savoir et supposé anticiper, doit montrer qu'il peut conduire la chronogénèse didactique, affirmant ainsi son pouvoir dans la diachronie, mais encore il va, en synchronie, affirmer le caractère singulier de sa place propre dans la construction du savoir : non content de savoir plus, et de programmer le futur, il sait <u>autrement</u>. Le savoir de l'enseigné et le savoir de l'enseignant ne diffèrent pas seulement <u>au plan de la quantité</u>. La transposition didactique tend à organiser <u>qualitativement</u> la différence des places : elle tend à instituer deux "manières" de savoir, à produire deux registres distincts d'actes épistémologiques. Ainsi, lorsque la transposition didactique opère sur les objets à enseigner selon la différenciation empiriste du "donné" et de la "théorie" (voir l'<u>Etude n° 6</u>), l'élève va se retrouver du côté de l'empirie, de la "constatation", de la "vérification", de l'"application", etc. Au maître sera réservé la théorie. Il y a donc ce que le maître enseigne, plus précisément ce que le maître doit enseigner et <u>la manière</u> dont il doit l'enseigner, et il y a ce que l'élève doit savoir, et <u>comment</u> il doit le savoir. En ce point, il convient de noter que les deux registres en lesquels, à chaque instant, se spécifie la différence des places de l'enseignant et de l'enseigné, sont inscrits dans le détail du contrat didactique. C'est ainsi que, dans la dichotomie du savoir exprimée par la distinction <u>du numérique et de l'algébrique</u>, l'élève aura à "vérifier" (par des calculs numériques), l'enseignant "dégagera la loi générale" (littérale), puis l'élève "appliquera" cette loi à des cas particuliers (numériques, plus rarement partiellement littéraux), etc. La <u>transgression</u> des registres d'actes épistémologiques ainsi séparés, l'entorse à ce <u>code épistémologique</u>, est rare, même lorsqu'elle est possible, voire "facile": l'enseignant ne fera pas, sauf exception ("Exemples" du cours) de vérification numérique – la vérification numérique est laissée sans partage à l'élève ; en sens contraire, on a noté (cf. J. Tonnelle, <u>Mémoire pour le D.E.A. de D.D.M</u>) que l'élève ne se permettra pas de créer un radical ($\sqrt{\ }$) – c'est une prérogative explicitement attribuée par lui au seul enseignant.

VII. 10. Cette non-identité du savoir de l'enseignant et du savoir de l'enseigné, en ce qui concerne l'enseignement des <u>mathématiques</u>, est manifeste plus qu'en d'autres matières d'enseignement : peut-être existe-t-elle, tout simplement, plus qu'ailleurs ? Ainsi, l'épreuve de composition française semble ne différencier élève et professeur qu'au plan de la quantité : par rapport à la copie du professeur (celle qu'on lui réclame, par exemple, au concours de l'agrégation), la copie de l'élève est un "moins" : moins longue, moins riche d'idées, avec moins de style, de vocabulaire et ... plus de fautes d'orthographe. Mais il ne semble pas que l'élève conçoive sa prestation comme différente <u>de nature</u>. Au contraire, en mathématiques le savoir du professeur est autre : ou plus justement la place du professeur par rapport au savoir est autre, irréductible à celle de l'élève, sous le rapport de la qualité. Dans une section d'enseignement pluridisciplinaire, où les étudiants doivent, dans les différentes U.V. (de psychologie, de sociologie, d'écologie, etc.) qui leur sont enseignées, "faire des exposés", j'ai observé <u>toujours</u> des réactions de surprise profonde à l'annonce que ce même type de prestation serait exigé d'eux dans l'U.V. de mathématiques : un élève, un étudiant peuvent (dans leur conception) parler <u>comme</u> l'enseignant (en moins bien, par manque de connaissances, d'habitude, etc.) en psychologie, en sociologie, en écologie ; non en mathématiques. Dans la classe de mathématiques, les places sont insubstituables : l'échangisme ne s'y conçoit guère - s'il peut se pratiquer.

VII. 11. Le double régime du savoir dans la classe crée une situation originale : il y a le savoir enseigné, et il y a le savoir à apprendre, ou plutôt, <u>"à savoir"</u>. Entre les deux, une hétérogénéité de nature : ainsi le professeur <u>"fera"</u> la <u>théorie</u> des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues avec paramètre ; l'élève aura à résoudre tel ou tel système. La dichotomie des places, et sa réalisation didactique, suppose une dichotomisation de l'objet de savoir : une version pour l'enseignant, une version pour l'enseigné. La coexistence et l'articulation de ces deux versions crée ce qu'on peut appeler une situation transactionnelle : entre la version officiellement enseignée, et la version dont la connaissance est exigée de l'enseigné. L'objet d'enseignement a été noté comme objet transactionnel entre passé et avenir (dans la chronogénèse) ; il apparaît maintenant comme objet transactionnel entre les deux régimes didactiques du savoir (dans la topogénèse). De cette exigence, qui pèse sur la transposition didactique, va découler un ensemble de contraintes sur l'enseignabilité des savoirs et leur apprêt didactique ; et de même que dans la "transactionnalisation" entre passé et avenir, dans la transactionnalisation entre les deux régimes épistémologiques, l'algorithmisation est une réponse possible, et fréquente : voir l'Etude n° 7.

VII. 12. La répartition sur deux registres des actes épistémologiques relatifs à un même objet de savoir (constater/démontrer, démontrer/vérifier, généraliser/appliquer, etc.) opère une différenciation qualitative des places (de l'enseignant et des enseignés) qui comporte un certain jeu quantitatif : un peu plus, ou un peu moins, de théorie ; ou d'applications numériques, etc. Par ce jeu quantitatif, évidemment relatif, l'enseignant a une prise sur la situation didactique du savoir à enseigner, une prise qui lui apporte la conscience de sa maîtrise, de sa place de pouvoir dans le rapport d'enseignement : mais il s'agit là d'une conscience mystifiée, dans laquelle la reconnaissance du contrôle par l'enseignant de variations de faible amplitude dans la frontière des places dans la topogénèse, assume dans le même temps la méconnaissance de cette différenciation marquée structurellement, indépendamment de l'enseignant. Cette méconnaissance projette la différence, discrète, des registres des tâches épistémologiques dans la construction didactique du savoir, sur l'axe continu du "niveau des élèves", selon un mouvement de réduction qui, oubliant la structure (fixée) au profit de ses variations (relativement contrôlables), est en effet pertinent pour l'enseignant. Les "livres du maître" en portent témoignage :

> Dans chacune de ces leçons alternent justifications et constatations numériques. Selon le niveau de la classe, on peut accentuer l'un ou l'autre de ces deux aspects.
>
> [Livre du maître du manuel Magnard de 4ème, p. 17 : c'est moi qui souligne].

> Nous ne pouvons ni faire fi des acquis ni tout démontrer : un choix s'impose. Il dépend pour l'essentiel du niveau et des capacités des élèves.
>
> [Livre du professeur du manuel Hachette de 4ème, (Coll. M), p. 7 : c'est moi qui souligne].

Concernant la première citation, on notera au passage qu'il n'est évidemment pas besoin (ici) de préciser quel aspect serait à développer dans quel cas : la conclusion va de soi.

VII. 13. Revenons à Descartes : le jeune élève en sait-il autant (ici et maintenant) que le maître, touchant l'addition, s'il sait faire des additions ? A vrai dire, Descartes dit seulement : "touchant la somme qu'il examinait". Mais il s'agit là de toute façon d'un cas particulier, en ce que l'objet dont la connaissance est supputée est la "version pour l'enseigné" d'un objet de savoir, l'addition, réduit à l'algorithme de l'addition (dans l'écriture décimale des entiers) qui constitue ici la forme transactionnelle de l'objet de savoir correspondant. Il y a ainsi identité de savoir touchant cette version didactique de l'objet de savoir "addition". Où donc situer la différenciation des places ? Peut-être, si le maître est très savant, sait-il pourquoi le nombre obtenu par l'algorithme de l'addition est bien la somme des deux nombres donnés. Mais cela ne suffit pas à fonder la topogénèse : la différenciation des places en effet, doit être manifeste dans le traitement explicite du savoir : elle ne doit pas seulement exister dans la tête de l'enseignant sous la forme d'un surcroît de savoir non introductible au niveau considéré du cursus (pour un autre exemple : si l'instituteur a fait des études assez poussées en mathématiques, il peut savoir justifier la preuve par 9 ; il ne peut pas pour autant présenter cette justification à ses jeunes élèves). En fait, il peut bien se produire des situations historiques où, à propos de tel objet à enseigner, la transposition didactique jusque là acceptée ne permette plus de fonder la topogénèse du savoir dans la relation didactique : il y a amenuisement, jusqu'à l'annulation, de la distance entre les places de l'enseignant et de l'enseigné. L'objet d'enseignement a subi alors ce que j'ai appelé un phénomène d'obsolescence <u>externe</u>, ou <u>absolue</u>, c'est-à-dire qu'il a vieilli non par rapport à la durée d'un cycle d'enseignement (il s'agit là de l'obsolescence interne, qui fonde le temps didactique) <u>mais par rapport à la durée historique</u>.

VII.14. Ce <u>vieillissement historique</u> des objets d'enseignement a deux faces : d'une part il ne permet pas de maintenir adéquatement la différence des places didactiques ; d'autre part, <u>vis-à-vis de la société</u> (les parents, les contribuables, etc.), il ne permet plus (le cas échéant) de marquer la différence entre le savoir "laïc" et le savoir des "clercs", ce qui tend à gommer <u>la légitimité sociale du projet d'enseignement</u> dont il atteint les objets : à l'enseignant, n'importe quel parent (ou presque) serait substituable dans sa tâche d'enseignement, n'était le temps qui manque*. Bien entendu, ces deux faces sont liées – les parents ne sont que d'anciens élèves... Pour parer au vieillissement historique des objets d'enseignement, <u>il y a un renouvellement historique de ces objets</u> : l'élève en sait-il autant que le maître touchant l'addition ? l'introduction des <u>opérateurs</u> changera la situation, et ce que l'instituteur devra accepter de "souffrance" pour apprendre les opérateurs (ou les bases, etc.) lui sera rendu par un prestige accru, un "prestige" qui est en fait une <u>nécessité fonctionnelle</u> dans la classe comme dans son extérieur. (Voir Alain Mercier, <u>Mémoire pour le D.E.A. de D.D.M.</u>). Du nouveau

* Sur la situation terrible des enseignants lorsque la légitimité du projet d'<u>enseignement</u> est affaiblie (ce qu'on a un peu oublié aujourd'hui) voir le <u>Texte n° 22</u>.

toujours (chronogénèse), et toujours un peu au-dessus du "niveau" de l'enseigné (topogénèse) : telle est la nécessité du système didactique. Dans certains travaux sur la multiplication des entiers (Guy Brousseau et al., Cahier n° 13), on a pu comparer, sous l'angle du "rendement" scolaire, deux algorithmes différents : notre actuel algorithme, dit "à l'italienne", et un algorithme plus ancien, aujourd'hui oublié, la méthode "per gelosia". Ce second algorithme est incomparablement plus fiable que le premier (il n'y a pas de retenues, hormis dans l'addition des produits partiels). De plus son apprentissage semble pouvoir se faire en quelques heures (contre ... plusieurs années pour la méthode à l'italienne). Mais justement cet algorithme est "trop simple" : le substituerait-on à l'algorithme actuel que toute l'économie du système didactique en serait changée (je ne dis pas que cette substitution n'est pas possible, ni souhaitable : je pointe seulement son caractère non anodin ; et de même je ne dis pas non plus que les auteurs cités avait ce but en tête : voir les travaux mentionnés ...). Déjà au XV^{e} siècle, la méthode "per gelosia" apparaissait trop simple pour que, dans un traité d'arithmétique pour les marchands, on lui consacre plus de quelques lignes, liminaires, avant de passer aux choses sérieuses (voir le Document n° 3).

Bibliographie : Textes n° 18, 19, 20, 21 et 22.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE VIII

Le temps didactique comme fiction : préconstruction et après coup

Y. C.

juin 1980.

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

FICHE VIII

Le temps didactique comme fiction : préconstruction et après-coup

VIII. 1. La topogénèse du savoir, dans la relation didactique, répond en synchronie à la différence des rapports au temps didactique de l'enseignant et des enseignés. Pourquoi désigne-t-elle comme fiction le temps didactique institué par la chronogénèse ? Parce qu'elle met en place une situation transactionnelle, qui masque le non-respect de la norme temporelle instituée par la dialectique ancien/nouveau : on va voir comment.

VIII. 2. En quoi la norme temporelle définie par le temps de l'enseignement est-elle non-respectée ? En quelle manière le temps de l'apprentissage dément-il le temps didactique officiel ? Tout d'abord il faut noter, avant de poursuivre plus avant, que la fiction du temps didactique institué n'apparaît pas spontanément à l'enseignant comme telle : fiction (comme on va le montrer), mais fiction nécessaire, fonctionnellement nécessaire, au processus didactique. Nous sommes là devant un cas où la méconnaissance des conditions réelles de développement d'un processus par ses agents (les enseignants), est elle-même une condition de ce processus: l'enseignant doit croire, d'une certaine manière, à la fiction de la durée didactique dont il est l'ordonnateur. Les phénomènes qui iraient à l'encontre de sa conscience claire du temps qu'il est chargé de mettre en oeuvre, il devra les interpréter dans des registres explicatifs autres, qui n'invalident pas la norme du modèle de temporalité dont il est fait le servant : depuis le psychologisme des bulletins scolaires et des commentaires bruts (élève paresseux, inattentif, lent, etc.) jusqu'au psychologisme plus élaboré, sentencieusement ad hoc (c'est la "typologie" des "slow learners", etc.), d'une certaine "Education research".

VIII. 3. C'est pourquoi la mise en évidence d'une distorsion de la norme temporelle par la réalité des apprentissages n'émane qu'exceptionnellement de l'instance enseignante proprement dite: elle est le fait d'un regard porté sur la relation didactique d'un point proche, mais extérieur : regard porté pour faire surgir l'"inadaptation" du système didactique, et appuyer par ce constat telle volonté de réforme; regard porté par l'analyse scientifique (didactique) et mettant au jour, éventuellement à son propre étonnement, cette distorsion. Du premier point de vue procède, par exemple, le constat apporté (en 1951) par une enquête menée auprès de 30 000 élèves de la ville de Los Angeles : à la fin de l'enseignement secondaire, 1 élève sur 7 (âgés de 16 à 18 ans) ne savait pas calculer 50% de 36 (cité par R. Hofstadter, _Anti-intellectualism in American Life_, Vintage Books, New-York, 1963, p. 304). Une fois le fait "scientifiquement établi", les langues peuvent se délier : je peux témoigner, par exemple, que des étudiants de seconde année d'université, à qui j'ai dû enseigner les subtilités du χ^2 et du t de Student, échouent _majoritairement_ (lorsque l'occasion leur en est donnée pour la première fois) à calculer le pourcentage correspondant à, disons, 12 pour 87... L'enseignant* là-dessus doit fermer les yeux pour ne pas compromettre _l'avancée de son cours_ : les étudiants, décidément, "manquent de bases"...

De l'autre catégorie de regards relèvent les observations que l'on peut trouver – exemple entre d'autres – dans un travail sur les "structures multiplicatives" (Vergnaud, Rouchier, Ricco, Marthe, Métrégiste et Giacobbe : _Acquisition des structures multiplicatives_). Les auteurs écrivent notamment :

> " L'enseignement des mathématiques dans le premier cycle du second degré suppose acquises des notions et des procédures qui ne sont pas en fait assimilées par les enfants à la fin de l'enseignement élémentaire et dont l'acquisition recouvre une longue période qui se prolonge parfois jusqu'à la fin de l'adolescence".

---

* de mathématiques ; mon collègue sociologue me rappelle, lorsque nous nous croisons, qu'il serait très satisfait si nos étudiants savaient déjà calculer un % – sous-entendu, si je leur apprenais à le faire. Mais je ne peux pas : du moins je ne peux le leur _enseigner_ (si je peux m'arranger pour qu'ils l'_apprennent_ quand même). Mon prestige en souffrirait trop, dans la classe (topogénèse) et au dehors (mes collègues, les pères qui ont fait une taupe, etc.). Alors je leur _enseigne_ la diagonalisation des matrices.

Etudiant les connaissances des élèves de sixième à propos des "structures multiplicatives" élémentaires, ces mêmes auteurs font précéder la présentation de leurs résultats – propres à surprendre et à décourager les enseignants – d'un commentaire visant à éviter des interprétations et des passages à l'acte trop rapides :

> "Les résultats, qui apparaîtront d'une certaine brutalité aux yeux de certains lecteurs, ne doivent pas conduire à une attitude pessimiste du style : "A quoi bon ! si tous les enfants de sixième ne savent même pas résoudre ces problèmes élémentaires" (...) Ce serait aussi une grave erreur d'imputer la responsabilité des lacunes observées à la réforme de l'enseignement des mathématiques et de croire qu'un simple recours aux méthodes passées permettrait de combler ces lacunes (...). L'objectif de cet article n'est donc pas d'alimenter un courant de retour à certaines didactiques périmées, mais au contraire d'encourager les enseignants et les chercheurs à aller résolument de l'avant".

VIII. 4. On peut se demander comment le système didactique s'arrange avec ces faits, patents, qui viennent nier la temporalité affichée par lui. C'est, on l'a dit, l'affaire de la <u>transaction</u>, qui vient réaliser l'<u>auto-régulation</u> du système didactique. Cette auto-régulation doit être analysée <u>dans chaque cas spécifique</u> (lié à des contenus de savoir spécifiques). J'ai indiqué plus-haut un moyen général de négociation : l'algorithmisation. On verra un peu plus loin un autre moyen général, lié aux situations de préconstruction. Voici seulement ici un exemple simple d'autorégulation : diverses études* ont montré qu'un pourcentage non négligeable d'élèves, jusqu'à la seconde, ne savent pas citer de nombre compris entre 2,16 et 2,17 (pour prendre un exemple). En particulier, ces élèves écriront que $]2,\ 2{,}17[\ \cap\ ]2{,}16\ ,\ 4[\ = \emptyset$. Dans les manuels, on trouve bien des exercices du type

> « Déterminer l'ensemble S des réels satisfaisant aux inégalités suivantes
> $a < x < b$ et $c < x < d$ »

mais l'on ne se trouvera jamais, ou quasiment jamais, dans la situation envisagée ci-dessus : on ne "mélange" pas les "difficultés" (Voir le Document n° 4).

VIII.5. Le temps didactique légal s'impose comme une norme à l'enseignant. Il est frappant que cette norme s'impose non seulement, comme on l'a vu jusqu'ici, en accélération, en guide du progrès didactique, mais aussi en freinage : interrogeant un professeur enseignant en sixième et cinquième à propos d'un exercice d'un type non abordé à ce niveau (mais "exécuté" tout à fait correctement par une élève de ... CE2**) et lui demandant à quel niveau cet exercice pourrait être proposé à son avis, j'ai reçu comme réponse

---

* Voir notamment M-L. Izorche, Mémoire pour le D.E.A. de D.D.M.

** Voir le Document n° 5.

qu'il serait acceptable en cinquième, non en sixième, à cause de la présence d'une "élevation au carré". En sixième les élèves ne savent pas calculer les carrés, <u>les puissances ne sont pas au programme</u>, ils ne rencontrent des carrés qu'à propos des calculs d'aires. On voit ici que la normalisation, imposée par le temps didactique légal à l'appréhension de la temporalité des apprentissages, <u>prend appui sur le découpage du savoir résultant de la mise en textes qui fonde le temps didactique</u> (par le truchement de la dialectique ancien/nouveau) : l'élévation au carré est pensée spontanément dans le cadre des "puissances", <u>unité signifiante minimale du programme</u>. Dans l'analyse de la transposition didactique, et du temps didactique singulièrement, il ne faut pas oublier ce fait fondamental, étudiée précédemment : la réduction des savoirs en un texte.

VIII.6. Ce qui précède fait apparaître le temps didactique légal, le temps de l'enseignement, comme une fiction, instance <u>interdictrice des écarts dans la durée</u>, aussi bien des avances que des retards. Cette instance désigne une norme dynamique, qui définit le rythme de l'avancée didactique, et par rapport à quoi, ainsi qu'il en est avec toute norme, les écarts (temporels) sont perçus comme simples manques (retards), ou sont, plus radicalement, scotomisés (avances). Il reste à appréhender cette réalité même à laquelle le temps légal s'impose comme norme : la pluralité des <u>temps de l'apprentissage</u>, et <u>la structure particulière de cette durée</u> qui ne se conforme pas à la durée légale par rapport à laquelle pourtant elle se définit et se positionne. Sur l'attitude de l'enseignant par rapport au temps didactique, et sa sensibilité à la durée, voir l'Etude n° 8

VIII. 7. Pour explorer le temps de l'enseigné en sa structure particulière, on peut partir d'une question posée par l'existence de ce qu'on a appelé la topogénèse : s'il y a deux régimes du savoir, articulés en synchronie selon des mécanismes transactionnels pour permettre la fiction du temps didactique légal, comment d'un élève, toujours soumis au registre épistémologique qui définit sa place d'enseigné, peut-on un jour faire un professeur de mathématiques (pour choisir une formulation naïve)? Si le temps de l'apprentissage était véritablement le temps simplement progressif, cumulatif que fixe la dynamique d'enseignement, cela ne serait pas possible : le savoir ainsi accumulé serait un empilement de tranches de savoir de plus en plus archaïques, à les saisir en remontée temporelle dans l'histoire didactique du sujet. On s'aperçoit de cela a contrario quand, effectivement, il y a archaïsme : c'est ainsi que des étudiants de mathématiques (et il en serait sans doute ainsi avec des professeurs dûment diplômés), interviewés à propos de "ce que c'est que la règle de 3", font des réponses montrant que cette notion n'a guère été remaniée depuis l'école primaire (au temps où 6 stylos coûtant 18F, 1 stylo coûtait 3F, et 10 stylos 30 F ...) : voir l'Etude n° 9.

VIII. 9. Le problème pointé ci-dessus est celui qu'en histoire des sciences on a pu désigner par les noms de "refonte" ou de "reprise"*. Il ne me semble pas que le problème ait été

* Voir le Texte n° 23.

vraiment <u>posé</u>, parce que ce problème était par avance fictivement <u>résolu</u> par le modèle du temps légal.* En ce qui concerne la psychologie, par ailleurs, il semble que le problème ait été évité à partir de deux restrictions sur les types d'études menées : études d'apprentissages "courts" d'une part ; études de schèmes (de leur genèse, leur évolution, leurs connexions, etc.) plus que de "contenus de savoir" particuliers. Corrélativement, il me semble que la psychologie cognitive est demeurée fort peu sensible à l'existence d'une transposition quelle qu'elle soit, faisant fond sur une version normative et normalisée (adulte, actuelle, etc.) des contenus de savoirs dont éventuellement elle étudie l'acquisition (par exemple on étudiera l'acquisition des "produits cartésiens", etc.), sans se préoccuper trop du bien-fondé épistémologique des notions qu'elle manipule. Si la temporalité de la psychogénèse constitue un progrès par rapport au modèle didactique du temps, en substituant à une durée simplement <u>cumulative</u> une vection <u>intégrative</u> (chaque structure intégrant la précédente à titre de structure subordonnée), par le jeu, notamment, du mécanisme d'<u>équilibration</u> (qui comporte bien un aspect rétroactif : voir, pour un rappel, le <u>Texte n° 25</u>), elle n'en reste pas moins une temporalité <u>irréversible</u> (voir par exemple le <u>Texte n° 26</u>, dont on pourra comparer l'atmosphère à celle du <u>texte n° 23</u>, notamment), alors que <u>le temps de l'enseigné</u> semble bien être fait aussi de <u>réorganisations</u> qui annulent des paysages antérieurs pour en réinsérer les matériaux en des constructions inédites.

---

*Bien entendu, l'étude des difficultés scolaires a attiré l'attention des chercheurs en éducation sur le problème du temps (comme on l'a d'ailleurs noté au point 3 ci-dessus). Le <u>Texte n° 24</u> donne un exemple de ce souci, qui reste cependant fasciné par la vection progressive du temps didactique légal, auquel il s'agirait de réadapter l'élève par une "orthochronie" individualisée.

VIII. 10. Il existe un modèle autre de temporalité, où la plasticité de la durée autorise des retours réorganisateurs radicaux : c'est le concept freudien de l'"après-coup". On se reportera sur ce point au Texte n° 27. Il s'agit là, écrivent J. Laplanche et J.-B. Pontalis, d'un

"terme fréquemment employé par Freud en relation avec sa conception de la temporalité et de la causalité psychiques : des expériences, des impressions, des traces mnésiques sont remaniées ultérieurement en fonction d'expériences nouvelles, de l'accès à un autre degré de développement. Elles peuvent alors se voir conférer, en même temps qu'un nouveau sens, une efficacité psychique."

Pour insister sur le caractère déterminant de ce concept, je reproduis encore quelques lignes des auteurs cités :

"La notion vient d'abord interdire une interprétation sommaire qui réduirait la conception psychanalytique de l'histoire du sujet à un déterminisme linéaire envisageant seulement l'action du passé sur le présent. On fait souvent reproche à la psychanalyse de réduire au passé infantile l'ensemble des actions et des désirs humains ; cette tendance irait toujours s'aggravant avec l'évolution de la psychanalyse ; les analystes remonteraient sans cesse plus loin : pour eux, tout le destin de l'homme serait joué dès les premiers mois, voire dans la vie intra-utérine...

Or, d'emblée, Freud a marqué que le sujet remanie après-coup les événements passés et que c'est ce remaniement qui leur confère un sens et même une efficacité ou un pouvoir pathogène."

VIII. 11. Il semble bien que l'importation dans l'analyse didactique du concept d'après-coup, appliqué alors à des réorganisations cognitives, soit très éclairante. Elle permet par exemple d'apercevoir une catégorie de phénomènes que l'enseignant tend spontanément à scotomiser, parce qu'ils sont pour lui extrêmement frustrants, et que, étant donné son modèle temporel d'interprétation, il ne peut les considérer que comme des manifestations horriblement pathologiques. En voici un exemple, personnel (pour ne blesser personne) : ayant eu à enseigner à des étudiants en sciences humaines la notion de distance et ses utilisations en divers domaines extramathématiques, j'ai choisi comme point de départ, et "motivation", d'expliquer que si, pour trois individus A, B, C je dispose de la donnée d'un seul caractère numérique x, soit de (x_A, x_B, x_C), je peux dire que A "ressemble plus" à B qu'à C au sens du caractère étudié, si $|x_A - x_B| < |x_A - x_C|$; (par exemple) mais que si je dispose de deux caractères numériques x et y, ces deux caractères peuvent être en désaccord sur les "ressemblances" relatives de A avec B ou C (on peut avoir $|x_A - x_B| < |x_A - x_C|$ mais $|y_A - y_B| > |y_A - y_C|$). D'où l'usage de la notion de distance, par exemple $d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$, etc.; il y a plusieurs fonctions de distance possibles, d'où un certain arbitraire, qui n'empêche pas de tenter de construire des distances mieux adaptées à tel ou tel problème particulier, etc. De ces considérations on passe à l'étude de distances de plus en plus sophistiquées (distance du χ^2, distance de Mahalanobis, etc.) et on arrive à la fin du (mini-) cours. C'est alors qu'à l'occasion d'un exercice de pré-contrôle (c'est-à-dire précédant le contrôle officiel, soit l'examen...), deux étudiants, qui avaient à comparer des individus (pour chacun desquels ils disposaient de trois données numériques) selon diverses distances, appellent l'enseignant pour lui faire part de leur étonnement : comparer pour un caractère, oui ; mais pour deux, ou trois, cela ne se peut pas !? Effarement de l'enseignant : tout à reprendre, repartir de zéro ! Ils venaient de comprendre le point de départ de tout l'enseignement fait pendant plusieurs semaines !

VIII. 12. Ce diagnostic, affligeant pour l'enseignant*, est faux. Tout n'est pas à reprendre. Parce que, précisément, <u>"tout" est repris à cet instant</u>. Le modèle freudien peut apporter quelques précisions à ce sujet :

> " 1° Ce n'est pas le vécu en général qui est remanié après-coup, mais électivement ce qui, au moment où il a été vécu, n'a pu pleinement s'intégrer dans un contexte significatif ...).
>
> 2°. Le remaniement après-coup est précipité par la survenue d'événements et de situations (...) qui vont permettre au sujet d'accéder à

---

* Il heurte sans concession la progression, normative et nécessaire, mais fictive, mise en place, avec quel art de la pédagogie !, par l'enseignant.

à un nouveau type de significations et de réélaborer ses expériences antérieures."

Si l'on fait fonctionner ces principes dans le cadre de l'analyse didactique, on se donne alors les moyens de penser "l'impensable" (pour l'enseignant) et de poser autrement le problème de l'enseignement lui-même.

VIII.13. Celui-ci a été posé, par certains d'entre nous, en termes d'élaboration de situations et de suites de situations appropriées à la construction de tel ou tel concept (dont l'acquisition est visée). Tant que l'on fait dépendre ce projet d'une conception linéaire du temps, on se condamne à essayer de respecter des contraintes en réalité intenables, en proposant une définition trop rigide des processus didactiques, conçus selon le modèle dominant d'une flèche temporelle irréversible. La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes.

VIII.14. La nécessité de remaniements, de reprises d'"acquis" antérieurs, à la lumière d'expériences ultérieures, peut être située du côté de l'activité propre du sujet. L'enseignement tend à fournir à l'élève des "réponses", à des questions qui ne sont pas, pour lui, posées* (si elles l'ont été

* des questions privées de signification, qu'il ne perçoit pas comme questions.

par l'enseignant); l'activité d'appropriation consisterait alors à élaborer des questions, à se poser implicitement la question des questions. (et l'activité de l'enseignant consisterait pour une part à créer des situations favorisant l'activité questionnante, comme des poches d'élaboration autorisant l'assomption (par l'élève) de la dynamique temporelle instituée). Selon une remarque profonde

"The intellectual is one who turns answers into questions".*

Mais en fait, selon d'autres rythmes, la réélaboration est une nécessité qui tient à la construction même du savoir, plus exactement à ce que l'on a appelé sa préconstruction.

VIII. 15. J'ai emprunté le mot même de préconstruction – sinon le concept, dans son exacte mesure – à la théorie des discours telle que l'élaborent M. Pêcheux, Paul Henry, etc. (la notion a été introduite par P. Henry): voir à ce propos le Texte n° 28. Cet emprunt était motivé par les difficultés de l'analyse du traitement didactique de certains concepts mathématiques (ceux de polynôme et de nombre réel) dans l'enseignement du 1er cycle (pour le concept de polynôme, voir J. Tonnelle, op. cit.). En fait, l'état de préconstruction semble bien être la composante de base de notre ontologie et de notre représentation spontanées du monde; mais cette composante demeure dans la construction scientifique du réel, elle demeure aussi (mais, à un moment donné de l'histoire du savoir, de manière bien plus prégnante) dans la construction didactique

* R. Hofstadter, op. cit., p. 30.

du savoir, et elle joue un rôle essentiel, et _spécifique_, dans l'économie du système didactique.

VIII. 16. Pour "faire voir" au mieux le type de phénomène désigné ici comme ressortant à la préconstruction, je prendrai d'abord mes exemples, non à la vie quotidienne ou à la construction didactique du savoir, mais à l'_histoire des mathématiques_. Dans son _Cours d'analyse_ de 1821, Cauchy démontre ainsi _le théorème des valeurs intermédiaires_ :

> "Une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en Géométrie les ordonnées de lignes droites ou courbes. De cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :
>
> Théorème IV. – Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation
>
> $f(x) = b$
>
> par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.
>
> Démonstration. – Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe

qui a pour équation
$y = f(x)$
rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation
$y = b$
dans l'intervalle compris entre les coordonnées
qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or,
c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse
admise ".

Cette démonstration n'en est plus une pour nous. Les termes symptomatiques de son irrecevabilité sont "fait voir"* et "évidemment" : ils marquent le recours à une évidence graphique que nous n'acceptons plus aujourd'hui, du moins chez les mathématiciens – il peut en aller autrement quand le mathématicien se fait enseignant. L'absence de démonstration "réelle" est ici contemporaine de l'absence du concept de continuité. Mais les absences s'enchaînent : ce qui manque aussi, c'est le concept de nombre réel. Il y a "circulation du manque" : antérieurement d'ailleurs, Bolzano avait donné une démonstration correcte du théorème des valeurs intermédiaires (dans son grand mémoire de 1817) en s'appuyant sur le "critère de Cauchy" (énoncé par Bolzano plusieurs années avant Cauchy) – qu'il pensait avoir démontré "par un raisonnement qui, en l'absence de toute définition arithmétique du nombre réel, n'était et ne pouvait être qu'un cercle vicieux"**. Il faut noter à cet égard que si, à ce moment, le concept de nombre réel manque (n'est pas construit), on possède en revanche une définition correcte de la continuité (pour Cauchy par exemple, voir le Texte n° 29). Mais l'absence du concept de réel rend fragile le fonctionnement de la notion de continuité : elle entraîne l'absence

---

* Expression ici très concrète, contre son emploi métaphorique ordinaire.

** N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 1960, p. 16

du concept de continuité. Au passage, on notera qu'une "définition correcte" ne suffit pas à faire un concept : celui-ci ne vient à l'existence que dans le cadre d'un système de concepts où, comme on le voit, se pratique une active "solidarité du manque". L'absence du concept de continuité elle-même est, ici, solidaire de l'absence du concept de courbe (dont l'intuition sera ensuite détachée de la notion de continuité par l'exemple de la courbe de Peano).

VIII.17. Cette "économie du manque" n'est viable que sous des contraintes très fortes : elle exige de ne pas s'aventurer hors du domaine où le manque s'abolit comme tel, de ne correspondre à aucun "besoin" (on verra plus loin les effets didactiques de ce type de situation). Par exemple, l'absence au XIX^e siècle (assez tard dans le siècle du moins) du concept de nombre réel, permet une autre "confusion", celle de la continuité et de la dérivabilité (par le truchement de l'intuition géométrique de la courbe) : on consultera sur ce point le Texte n° 29. Il ne s'agit plus là d'une lacune dans la démonstration, mais d'un résultat erroné. Cette "erreur" ne fait pas difficulté tant qu'on en reste à considérer des fonctions continues qui sont, en fait, dérivables (et même plus). Elle s'impose alors, dans le domaine restreint de la pratique mathématique où elle a pu s'installer comme évidente, en tant que bévue (au sens propre du mot) : dans son cours à l'Ecole Polytechnique (publié en 1815) Poinsot déclare ainsi que

> "On peut même dire que le rapport de deux choses homogènes ne dépendant

ni de leur nature ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité (Dy : Dx) a toujours même limite ; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente, dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence".

VIII.18. On doit donc se demander quel est le statut de ces "objets" (fonction continue, courbe, etc.) dont le concept est absent. Ce qui précède permet d'apercevoir un certain nombre des caractéristiques de ce statut : l'objet n'est pas construit mais <u>présenté</u>, par une <u>déixis</u> qui est un <u>appel à la complicité</u> dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme <u>évidente</u>, <u>non douteuse</u>, plus justement <u>non susceptible de doute</u> ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence <u>entêtée</u>, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. Je ne doute pas, quand je réfléchis sur le monde sensible qui m'entoure (en vue d'agir sur lui, par exemple) de son existence têtue, opaque : ce mur, cette porte, ma main qui écrit, etc. Il en va de même dans la vie intellectuelle, pétrie de préconstruits. Wittgenstein, dans un texte écrit à la fin de sa vie, intitulé <u>De la certitude</u> (<u>Über Gewissheit</u>), a mené une longue réflexion que l'on peut, il me semble, rattacher largement à notre thème : on en trouvera des extraits dans le <u>Texte n° 30</u>.

VIII. 19. La préconstruction désigne ses objets par le truchement du langage. <u>Cet aspect langagier est fondamental</u>, notamment en ce qu'il permet la déixis, explicite ("cette porte, etc.")

ou implicite, par le mécanisme de l'apposition, à effet de présupposition (voir le Texte n° 31). Mais le langage est ici mis en œuvre d'une manière toute particulière. La préconstruction s'établit en effet par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées. Ces énoncés sont des énoncés assertifs : mon savoir en préconstruction me permet de dire " Ce sont des fleurs de trèfles", parce que je sais qu'à cet endroit du jardin, à cette époque de l'année, il y a toujours – il y a toujours eu – des trèfles ; mon savoir est étroitement subordonné à une situation étroitement définie ; dans un autre jardin, que je ne connais pas, j'hésiterai : " S'agit-il de trèfles, ou d'autre chose ? ". Mon savoir est étroitement lié à un contexte ; il ne supporte pas la décontextualisation. Tandis que le savoir scientifique – celui du botaniste, en l'espèce – se traduit en assertions aussi bien qu'en négations : sans connaissance empirique des plantes, je pourrai conclure que " Ce ne sont pas des trèfles", une flore en mains. Le préconstruit s'éloigne donc du savoir scientifique parce qu'il est absolument dépendant du contexte, non décontextualisable. A l'autre bout de la chaîne, à la préconstruction s'oppose l'algorithmisation (comme réduction du savoir à des algorithmes) : dans ce dernier cas, il y a coupure entre énoncés et situations (de sorte que le problème didactique essentiel porte sur la question : quels énoncés sont pertinents pour quelles situations ?) Entre ces deux figures extrêmes du savoir (préconstruction, algorithmisation), le savoir scientifique se pose comme maîtrise de la dialectique entre énoncés et situations (dialectique qui suppose à la fois l'autonomisation des énoncés par rapports aux situations, ce qui l'oppose au statut de la préconstruction, et la mise en relation pertinente des énoncés et des situations, ce qui l'oppose à l'algorithmisation). Mais il faut tout de même insister sur ce fait essentiel qu'à un instant donné, un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit.

VIII.20. Simplement, on ne s'en aperçoit guère dans l'activité scientifique "courante" : sauf, justement, lorsqu'il y a "crise" (crise des irrationnelles, des ensembles, etc.). Alors, les conditions de la pratique ayant évolué, la couche profonde d'évidences sur laquelle l'édifice construit "faisait fond", est entamée, non sans résistances psychologiques : "Comment l'intuition a-t-elle pu nous tromper à ce point?", disait Henri Poincaré*. La nécessité se fait sentir d'une refonte, d'une reprise du savoir antérieur, dont la préconstruction n'est plus suffisante parce que l'évolution des conditions de la pratique théorique a mis à jour sa fragilité, son inaptitude à donner prise à un questionnement scientifique. Mais du préconstruit au construit, il y a bien une permanence : ainsi lorsqu'il entreprend de construire les nombres réels, "Dedekind fait explicitement appel au Livre V des Eléments d'Euclide et précise bien que son but est pédagogique.

"Je n'ai jamais cru avoir mis à jour dans mon ouvrage même un seul

---

*à propos des fonctions continues qui n'admettent pas de dérivée.

phénomène nouveau, ou un seul objet nouveau de la recherche mathématique". "*

VIII.21. Il en va de même dans l'enseignement des mathématiques. Mais les préconstruits doivent y être étudiés de manière spécifique, parce que l'économie de la transposition didactique ne reproduit pas l'économie du savoir "savant". Dans l'enseignement du 1er cycle par exemple, il y a préconstruction solidaire (donc manque des concepts solidaire) des notions de polynôme et de réel : voir le Texte n° 32. Je donne un seul exemple des conséquences de cet état de fait : un élève de troisième pourra dire que la fonction

$$x^3 - x$$

est une fonction polynôme, parce que, pour lui, une fonction polynôme, c'est ça (quelque chose de cette forme). Il dira aussi, par exemple, que $\sqrt{x}$ n'est pas une fonction polynôme : parce que ce n'est pas une fonction polynôme...** Son savoir est fait d'éléments juxtaposés, inorganisables en un tout cohérent parce que chaque élément ne vaut que dans une situation déterminée. La fonction définie par :

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x}\left(x\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas pour lui une fonction polynôme : sa notion de fonction polynôme peut faire l'objet d'assertions, non de questionnements. (voir l'Etude n° 10).

---

* J. Dhombres, Nombre, mesure, continu, Cedic, Paris, 1978, p. 219.

** La préconstruction est la terre d'élection des assertions tautologiques.

VIII. 22. La manipulation des préconstruits est soumise à une logique pratique, définie par un code de <u>conduite non explicitable</u>. Ou, plus exactement, qui n'est efficace <u>qu'à n'être pas explicité</u> (voir la FICHE IV, point 34) : pour chaque situation particulière le code définit une conduite particulière, sans qu'on puisse dresser une <u>liste</u> de ces conduites. Une telle liste supposerait qu'on puisse isoler de leurs contextes ses éléments — or ceux-ci n'ont d'efficace qu'à être plongés dans les situations où ils sont pertinents ; qu'on puisse décontextualiser les éléments de savoir qu'elle devrait rassembler — or, les contextes sont ici essentiels pour faire sens*. Pour un exemple de ces tentatives vouées à l'échec, voir le <u>Document n° 6</u>.

VIII. 23. Le savoir traité en préconstruction, selon la logique implicite d'un code de conduites, est donc un savoir fragile, <u>sans robustesse</u> : parce qu'il est dépendant du contexte de situation : <u>il ne supporte pas la variation</u>. Pour accéder à un statut qui le fasse entrer dans une activité théorique où il soit mis en débat, il devra donc être repris, refondu, <u>construit</u>. Sans qu'il ne cesse jamais d'exister, en notre savoir, <u>du préconstruit</u> : le préconstruit est la manifestation — éventuellement archaïsante — du passé (de notre savoir passé) au sein du présent. La structure nécessaire du savoir dément la fiction d'une durée simplement progressive du temps de la construction du savoir.

---

* C'est pourquoi il est difficile de faire une liste de "tous ses amis", parce que ceux-ci sont pour nous intimement liés à des situations (lieux sociaux, moments de notre vie, etc.) singulières chaque fois ; d'où l'humour de l'image du moribond se voyant entouré de toutes les femmes qui ont peuplé son existence...

Bibliographie. Textes n° 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32.

*

*   *

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

ETUDES

(ateliers)

ETUDES

Etude n°1 L'introduction didactique de Cos. et Sin. ; les complexes comme matrices carrées d'ordre 2.

Etude n°2 La transposition didactique de la notion de distance.

Etude n°3 La dialectique ressemblance / dissemblance.

Etude n°4 Praxis et lexis, ostensif et désignatif, le problème du zéro

Etude n°5 La notion de progression

Etude n°6 La dichotomie empiriste donné/théorie et la relation enseignant / enseigné.

Etude n°7 L'algorithmisation.

Etude n°8 Le rapport au temps de l'enseignant.

Etude n°9 La règle de 3.

Etude n°10 Fonctions polynômes et autres fonctions.

AUTRES THÈMES

* Les opérateurs à l'école primaire.
* La notion de paramètre.
* Le traitement didactique de la dialectique numérique/algébrique

N.B. En atelier, on peut envisager de faire fonctionner les principes d'analyse énoncés dans le cours, sur des thèmes proposés par les participants.

*

* *

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 1

Une échelle collective de niveau individuel

extrait de : Maurice Reuchlin,
Psychologie
PUF, Paris, 1977
(pp. 255-257).

Document n° 1

Une échelle collective de niveau intellectuel

D'après P. Bénédetto. Echelle collective de niveau intellectuel,
in *Enquête nationale sur le niveau intellectuel des enfants d'âge scolaire*,
INED, Travaux et Documents, n° 54, Paris, PUF, 1969.

Le cahier I est destiné aux cours préparatoires ; le II aux cours élémentaires ; le III aux cours moyens ; le IV au cycle d'observation.

Exemples de questions :

VOCABULAIRE (exemple tiré du cahier II) :

Je souligne le mot qui complète les phrases :

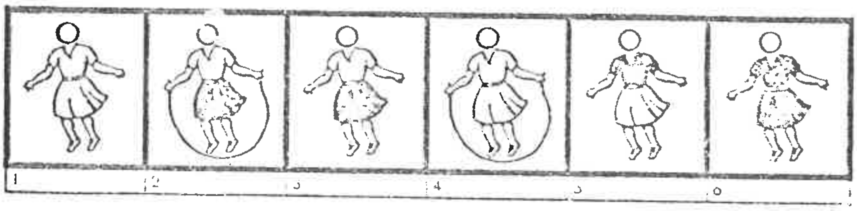
Le .... garde ses moutons sur la verte colline

1 – fermier 2 – berger 3 – gardien 4 – métayer 5 – bouvier 6 – paysan

COMPRÉHENSION DE PHRASES (exemple tiré du cahier II) :

« Aline saute à la corde, elle porte une jupe noire »

Faites une croix sous le dessin qui représente Aline.



- 2 -

UN ÉLÉMENT DIFFÉRENT :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier III) :

Dans chaque bande, composée de six dessins, cinq dessins se ressemblent d'une certaine manière.

Un seul est différent.

Vous devez entourer d'un cercle le chiffre qui correspond à ce dessin.

b. *Forme verbale* (exemple tiré du cahier II).

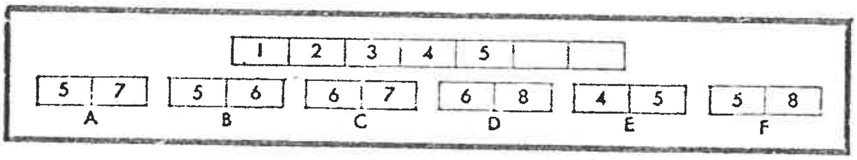
Je souligne le mot qui ne va pas avec les autres :

1 – Henri   2 – Gaston   3 – François   4 – Denise   5 – Alain   6 – Paul

SÉRIES CROISSANTES (exemple tiré du cahier III) :

On vous donne une série de nombres arrangés d'une certaine manière.

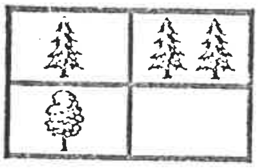
On vous demande de trouver, parmi les groupes de deux nombres proposés sur la deuxième ligne, celui qui continue la série, c'est-à-dire qui complète les cases vides.



MATRICES :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier II).

Je fais une croix sous le dessin qui vient remplir la case vide.



b. *Forme verbale* (l'épreuve prend ici le nom d'*analogies verbales*) (exemple tiré du cahier II).

Je souligne le mot qui remplace les points.

la cerise — le cerisier
la pomme — ....

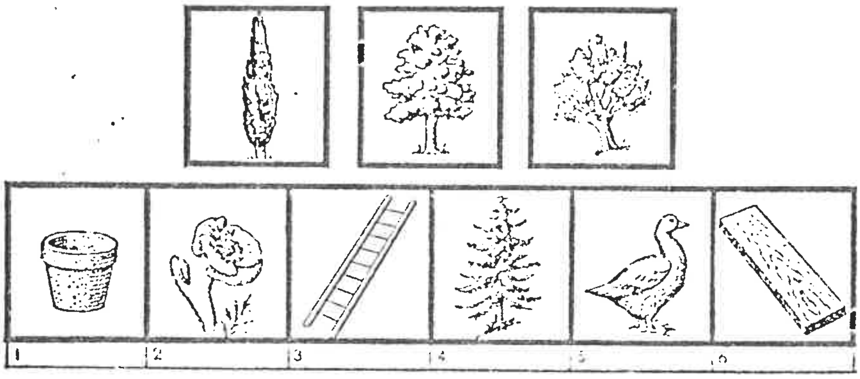
1 – la cerise   2 – la poire   3 – la pêche
4 – le pommier   5 – le cerisier   6 – l'arbre

- 3 -

APPARTENANCE A UNE CLASSE :

a. *Forme non verbale* (exemple tiré du cahier I).

Faites une croix sous le dessin qui fait partie de la même famille que les dessins du haut.



b. *Forme verbale* (exemple tiré du cahier II).

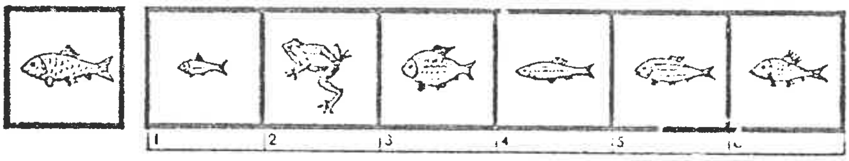
Je souligne le mot de la deuxième ligne qui va avec les trois mots de la première ligne.

François **Jacques** **André**

1 – Monique 2 – Jacqueline 3 – fillette 4 – Alain 5 – garçon 6 – homme

DIFFÉRENCES (exemple tiré du cahier II).

Je fais une croix sous le dessin qui ressemble le moins au dessin qui est dans le cadre tout seul.



Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 2

Pattern et moule

extraits de: E. Galion,
mathématique 4e,
O.C.D.L. HATIER, PARIS 1975
(non paginé)

et de: Jéomatri,
mathématiques en 3 ème,
Ophrys, Gap, 1980
(pp. 44-46).

et encore de: Mathematics Teacher, octobre 1979
(pp. 517-518).

Document n° 2

1) Galion 4e édition 1975

FICHE 55

Polynomes : Produits et factorisations

(1) *a*) Voici deux polynomes en y :

$A(y) = -3y^2 \qquad B(y) = 4y + 7$

$A(y) \times B(y) = (-3)y^2 \times (4y + 7)$

$A(y) \times B(y) = \underbrace{(-3)y^2 \times 4y} + \underbrace{(-3)y^2 \times 7}$

×	$4y$	7
$(-3)y^2$	$-12y^3$	$-21y^2$

Complète :

$A(y) \times B(y) = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

Tu obtiens un polynome.

b) Voici un troisième polynome en y : $C(y) = 5y^2 - 2y - 3$

$B(y) \times C(y) = (4y + 7)(5y^2 - 2y - 3)$

Développe ce produit.

Pour cela, tu peux utiliser le tableau ci-contre après l'avoir complété.

Donne une écriture réduite de $B(y) \times C(y)$.

×	$5y^2$	$(-2)y$	(-3)
$4y$		$(-8)y^2$	
7			(-21)

Le polynome obtenu est appelé **produit des polynomes** $B(y)$ et $C(y)$.

c) Voici deux autres présentations du calcul de $B(y) \times C(y)$:

	y^3	y^2	y^1	y^0
$C(y)$		5	-2	-3
$B(y)$			4	7

	35	-14	-21
20	-8	-12	

$B(y) \times C(y)$	20	27	-26	-21

$$\begin{array}{r} 5y^2 + (-2)y + (-3) \\ \times \qquad 4y + 7 \\ \hline 35y^2 + (-14)y + (-21) \\ 20y^3 + (-8)y^2 + (-12)y \qquad \\ \hline 20y^3 + 27y^2 + (-26)y + (-21) \end{array}$$

Concluons : $B(y) \times C(y) = 20y^3 + 27y^2 - 26y - 21$

(2) *a*) $D(u) = u^5 + 3 \qquad E(u) = 3u - 7 + 2u^2$

Écris sous forme réduite le polynome $D(u) \times E(u)$; le polynome $D(u) \times D(u)$.

b) Développe, réduis et ordonne chacun des produits suivants :

$(2z - 1)(z + 5) \qquad (y + 3)(y + 3)$

$(a + 1)(a - 1) \qquad (u - 2)(u + 3)(u^2 - 1)$

(3) Pour développer $(3x + 5)(3x + 5)$, qui s'écrit aussi $(3x + 5)^2$, il est plus rapide d'utiliser le moule « carré-d'une-somme » :

$$(\bullet + \blacktriangle)^2 = \bullet^2 + 2\bullet\blacktriangle + \blacktriangle^2$$

Complète : $(3x + 5)^2 = \ldots$

Développe et ordonne chacun des produits suivants :

$(x + 9)^2$ $\qquad$ $(x^3 - 1)^2$ $\qquad$ $(-3a + 5)^2$ $\qquad$ $(-2 - t)^2$

(4) Pour développer le produit $(3x - 5)(3x + 5)$, tu peux utiliser le moule « différence-de-deux-carrés » :

$$(\bullet + \blacktriangle)(\bullet - \blacktriangle) = \bullet^2 - \blacktriangle^2$$

Complète : $(3x + 5)(3x - 5) = \ldots$

Écris plus simplement les produits de polynomes :

$(t + 4)(t - 4)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $(x^2 - 9)(x^2 + 9)$

(5) *a)* $p(u) = (4u^2 - 12u)(u + 7)$

Développe et réduis le polynome $p(u)$.

$4u^3 + 16u^2 - 84u$ est une *forme développée* du polynome $p(u)$

$(4u^2 - 12u)(u + 7)$ est une *forme factorisée* de ce même polynome.

b) Factorise le polynome $4u^2 - 12u$. Utilise ce résultat pour donner une autre factorisation du polynome $p(u)$.

Factoriser un polynome, c'est l'écrire sous la forme d'un **produit**.

(6) Tu as remarqué que, pour factoriser un polynome, les trois propriétés suivantes sont souvent utilisées :

Quels que soient les réels a, b, c, d :		
$ab + ac = a \cdot (b + c)$ $ab + ac - ad = a(b + c - d)$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(7) Factorise les polynomes suivants :

$8u^3 + 16u$	$25x^2 + 30x + 9$	$u^2 - 16$
$3x^2 + 27x + 18$	$u^2 + 9 - 6u$	$16 - 25a^2$
$a(a^2 + 6) + 4(a^2 + 6)$	$-70t + 49t^2 + 25$	$(x + 4)^2 - 49$

(8) **Exercice**

a) Après avoir factorisé $u^2 - 1$ et $3u + 3$, factorise le polynome $F(u)$ défini par

$$F(u) = u^2 - 1 - (u + 1)(2u - 1) + (3u + 3)$$

b) $G(x) = 3(x - 1)(x + 1) + 4(x^2 - 1)$

$H(x) = 4x^2 + 9 - 12x - (2x - 3)(x + 1)$

Écris chacun de ces polynomes sous la forme d'un produit de deux polynomes.

Résous dans R l'équation $H(x) = 0$

2) Jéomatri 3ème édition 1980

III – OU L'ON CALCULE AVEC DES LETTRES.

3.1 Puissances.

Soit x un réel.

Rappelle ce que signifient les notations x^2, x^5 *et* x^1. *Justifie l'égalité* $x^2 \times x^5 = x^7$.

Donne une autre écriture de $x^3 \times x^2$; $x^{11} \times x^7$; $x^4 \times x^1$; $x \times x^8$; $-5x^4 \times 8x$; $-0{,}5x^3 \times (-4x^5)$; $4x^7 \times 0{,}25x^{13}$; $\sqrt{2}x^3 \times \sqrt{2}x^4$; $\frac{3}{4}x^8 \times (-\frac{14}{5}x^2)$; $\frac{5}{7}x^4 \times \frac{7}{5}x^4$; $(5x)^2$; $(-4x)^2$.

3.2 Ecritures réduites.

Soit x un réel.

1. *Réduis les expressions suivantes.*

$6x^5 + 9x^5$; $3x - 12{,}5x - 11{,}9x$; $-6 + 3x^3 - 8x + 10x + x^3$; $4x^3 + 3x^4 - 6x - 8x^2 + 10x + 3x^3 + 5 + 6x^4 - 1$.

2. *Donne une écriture plus simple des réels* $7x^3 - 9x^3$ *et* $7x^3 \times (-9x^3)$.

3. *Réduis les expressions suivantes.*

$(7 - 2x - 4x^2 + 5x^3) + (5x + 3x^4 - 8x^5)$; $(3x^2 - \frac{x}{2} + \frac{5}{7}) - (\frac{2x^2}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2}{7})$; $(x - 2x^2 + 4x^3 - 3x^5) - (5x^4 + 7x^5 - 2x^3 + 1) + (-3x + 4x^4 + 5x^2)$; $(3 - x - 5x^2) - (-6 - 2x + 3x^2) + (-7 - x + 6x^2)$.

3.3 Développements.

Soit a un réel.

1. *Développe les expressions suivantes.*

$6(2 + 6a - 7a^2)$; $8a(3a^2 - 2a - 5)$; $-3a^3(-a^4 + 2a^2)$; $(5a^2 + 0{,}25a - 1)(-4a)$.

2. *Développe et réduis les expressions suivantes.*

$6(a - 3) - 1{,}5(a + 4) - 0{,}4(a - 2) + 6(0{,}5 - a)$;

$3(a^2 + 3a - 5) - 7(-3a^2 + 2a - 1) + 5(3a^2 - 4a + 2)$;

$4a^2(3a - 2) - 3a^2(2 + 3a^2) - 5a(-a^2 + 2a^2)$.

3. *Développe et réduis les expressions suivantes.*

$(a - 7)(3a + 1)$; $5(2a - 3)(-8a + 6)$; $(3a^2 - 2a + 1)(5 - 3a)$; $(-8a^3 - 3a^2)(1 + 2a + 6a^2)$; $(6a^4 - 2a^2 + 9)(2a^2 - 3a - 1)$.

4. Dans $\mathbb{R}$. $(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\square \times \bigcirc + \bigcirc^2$;
$(\square - \bigcirc)^2 = \square^2 - 2\square \times \bigcirc + \bigcirc^2$;
$(\square - \bigcirc)(\square + \bigcirc) = \square^2 - \bigcirc^2$.

Voici un exemple d'utilisation de la première de ces propriétés.
Soit u un réel. On se propose de développer $(3u + 7)^2$.
$\left(\boxed{3u} + 7\right)^2 = \boxed{3u}^2 + 2 \times \boxed{3u} \times 7 + 7^2$.
Tu sais que $(3u)^2 = 9u^2$, que $2 \times 3u \times 7 = 42u$ et que $7^2 = 49$.
Donc $(3u + 7)^2 = 9u^2 + 42u + 49$.

Soit x un réel.

Développe et réduis les expressions suivantes : $(x + 3)^2$; $(2x + 7)^2$;
$(0{,}3 - 1{,}2x)^2$; $(1 - x)^2$, ; $(x - 2)(x + 2)$; $(\frac{1}{3} - x)(\frac{1}{3} + x)$; $(3x + 4)(3x - 4)$.

5. Soit a un réel. Considérons l'expression $(4a - 3)(2a - 1) - (3a + 5)(5a - 7)$.
Nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}(4a - 3)(2a - 1) - (3a + 5)(5a - 7) &= ((4a - 3)(2a - 1)) - ((3a + 5)(5a - 7)),\\ &= (8a^2 - 4a - 6a + 3) - (15a^2 - 21a + 25a - 35),\\ &= (8a^2 - 10a + 3) - (15a^2 + 4a - 35),\\ &= 8a^2 - 10a + 3 - 15a^2 - 4a + 35,\\ &= 8a^2 - 15a^2 - 10a - 4a + 3 + 35,\\ &= -7a^2 - 14a + 38.\end{aligned}$$

Développe et réduis les expressions suivantes.

$(2a - 5)(3a + 7) - 5(2a^2 - 1)$; $2a - 5(3a + 7) - 5(2a^2 - 1)$;
$(a^3 + 3a^2 - 4)(2a - 1) - (a + 1)(5a^2 - 7)$; $(11a + 1)(2a - 3) - (a - 3)(a + 3)$.

3.4 Factorisation.

1. Soit x un réel.

Factorise.

$14x - 21$; $10x^2 - 25x + 5$; $22 + 33x^2 - 55x^4 + 11x^8$; $x^4 + 7x^3$;
$x - x^3 + x^4$; $9x^2 + 18x$; $48x^2 - 30x^3 + 42x^5$.

2. Soit u un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $25u^2 + 60u + 36$. Tu remarques que $25u^2 = (5u)^2$ et que $36 = 6^2$; c'est pourquoi nous allons essayer d'utiliser une des propriétés démontrées au paragraphe 4.4 :

Dans $\mathbb{R}$, $\square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2 = (\square + \bigcirc)^2$.

Pour cela, il faut que $25u^2 + 60u + 36$ puisse prendre la forme $\square^2 + 2 \times \square \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre 5u dans la boîte $\square$: $\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times \bigcirc + \bigcirc^2$.

On va mettre 6 dans la boîte $\bigcirc$: $\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times 6 + 6^2$.

Il nous reste à nous assurer que $60u = 2 \times 5u \times 6$. C'est le cas. Donc

$$\boxed{5u}^2 + 2 \times \boxed{5u} \times 6 + 6^2 = \left(\boxed{5u} + 6\right)^2 \; ;$$

$$25u^2 + 60u + 36 = (5u + 6)^2.$$

Soit u un réel. Regardons si nous pouvons faire la même chose avec $9u^2 + 20u + 4$.

Peux-tu le mettre sous la forme $\Box^2 + 2 \times \Box \times \bigcirc + \bigcirc^2$ *?*

Peux-tu le mettre sous la forme $(\Box + \bigcirc)^2$ *?*

Soit u un réel. Nous allons essayer de factoriser la somme $49u^2 - 64$. Tu remarques que $49u^2 = (7u)^2$ et que $64 = 8^2$. L'écriture $49u^2 - 64$ est de la forme $\Box^2 - \bigcirc^2$. Nous allons donc utiliser la propriété suivante : dans $\mathbb{R}$, $(\Box - \bigcirc)(\Box + \bigcirc) = \Box^2 - \bigcirc^2$.

$$\boxed{7u}^2 - 8^2 = \left(\boxed{7u} - 8\right)\left(\boxed{7u} + 8\right) \; ;$$

$$49u^2 - 64 = (7u - 8)(7u + 8).$$

Exercice.

Soit x un réel.

Factorise $x^2 + 2x + 1$; $9x^2 + 30x + 25$; $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$; $x^2 - 6x + 9$; $4x^2 + 25 + 20x$; $2\,500x^2 - 1\,100x + 121$; $\frac{x^2}{4} - x + 1$; $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{36}$; $x^2 - 9$; $25x^2 - 16$; $36 - 81x^2$; $4x^2 - \frac{1}{49}$.

R 2 Ordre dans $\mathbb{R}$

I — COMPARAISON DE NOMBRES REELS.

Sur le dessin numéro 2 de la feuille de manipulation 5 nous avons tracé une droite graduée d de repère (O, I).

Place les points d'abscisses $\frac{1}{7}$; $\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}5$; $\frac{2}{3}$; $\frac{12}{7}$; $-\frac{5}{7}$; $0{,}5$; $-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{7}{3}$; $-\frac{8}{7}$; $\sqrt{2} - 3$.

Utilise ton dessin pour ranger ces nombres.

Parmi les nombres précédents, quels sont ceux qui sont négatifs ? Positifs ?

Comme en quatrième, nous conviendrons que le nombre 0 n'est ni positif, ni négatif. L'ensemble des réels positifs ou nuls est noté $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls est noté $\mathbb{R}_-$. Evidemment $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

3) Mathematics Teacher, octobre 1979

Placeholders: Formula vs Form

Mathematics teachers are aware of the difficulties their students have in applying formulas. For example, is the student who knows that

(1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

able to factor $a^2 - b^2$? $p^2 - 4q^2$? $(2a + b)^2 - (a - b)^2$? $x^2 - y^4$? Certainly (1) is a concise way of stating a result, but it should be recognized as a formula that can be applied to many situations. The important thing to remember is the basic form, the difference of two squares; x and y are only placeholders in the formula.

To help students recognize and apply basic forms, I have found it useful to use geometric shapes instead of letters to represent placeholders. Equation (1), for example, could be expressed as

(2) $\Box^2 - \Delta^2 = (\Box + \Delta)(\Box - \Delta)$.

The empty square and triangle in (2) are the placeholders that can be filled with any expression.

Geometric shapes as placeholders are used quite extensively today in elementary school textbooks, particularly with addition, subtraction, multiplication, and division sentences. Most secondary school textbooks make limited use of the concept. The idea of using geometric shapes has been used by most of the mathematics projects that ushered in the new mathematics.

I am certainly not suggesting that the use of letters should be discarded. It is much easier to derive formulas using letters instead of geometric shapes. Once they have been developed, however, they seem to be easily recalled and applied by students who can visualize the formulas with shapes as placeholders. Table 1 is a partial list of some basic forms using letters and geometric shapes as placeholders. Although restrictions on the domains of the placeholders are not mentioned in the table, it is crucial to consider them in a class discussion.

TABLE 1
Same Basic Forms

Letters Used as Placeholders	Geometric Shapes Used as Placeholders
$x^m x^n = x^{m+n}$	$\Box^m \Box^n = \Box^{m+n}$
$(xy)^m = x^m y^m$	$(\Box\bigcirc)^m = \Box^m \bigcirc^m$
$a(b + c) = ab + ac$	$\Box(\Delta + \bigcirc) = \Box\Delta + \Box\bigcirc$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(\Box + \bigcirc)^2 = \Box^2 + 2\Box\bigcirc + \bigcirc^2$
$\lvert x\rvert \le a$ iff $^-a \le x \le a$	$\lvert\Delta\rvert \le a$ iff $^-a \le \Delta \le a$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{\bigcirc}{\Box} + \frac{\Delta}{\Box} = \frac{\bigcirc + \Delta}{\Box}$
$a^{\log_a x} = x$	$a^{\log_a \Box} = \Box$
$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_a(\Box\bigcirc) = \log_a \Box + \log_a \bigcirc$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\sin 2\Box = 2 \sin\Box \cos\Box$
$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\Box + \bigcirc) = \frac{d}{dx}\Box + \frac{d}{dx}\bigcirc$

Lawrence P. Bush
Ohio University/Belmont Campus
St. Clairsville, OH 43950

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 3

Multiplication à l'italienne, multiplication per gelosia

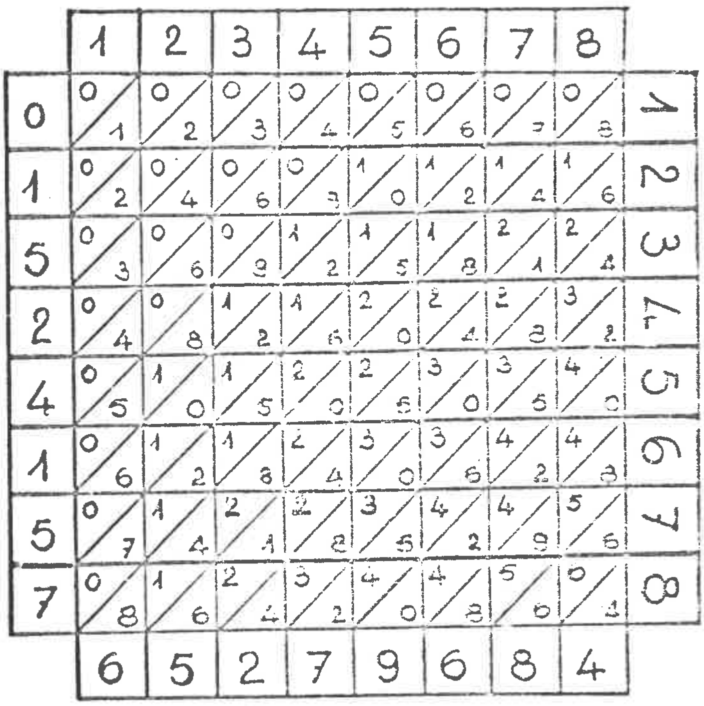
extrait de : Francés Pellos
Compendion de l'Abaco
Turin, 1492 (f. 3. V°)
[réédition moderne : la Revue des Langues Romanes, 1967 (p. 17).]

(f. 3 V^{to})

La forma e maniera de totas causas grans aut petitas en general multiplicar.

```
           1 2 3 4 5 6 7
           1 2 3 4 5 6 7
           -------------
           8 6 4 1 9 6 9
         7 4 0 7 4 0 2
       6 1 7 2 8 3 5
     4 9 3 8 2 6 8
   . 3 7 0 3 7 0 1
   2 4 6 9 1 3 4
 1 2 3 4 5 6 7
 -------------------------
Summa 1 5 2 4 1 5 5 6 7 7 4 8 9
```

Aquesta sotrana multiplicacion es per gens che non sabon fa tenir los desenals. via



Summa : 152415765279684.

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 4

Auto-régulation du système didactique

extraits de :
- Aleph 1, 2^e A, Hachette, 1978, p. 42.
- Aleph 0, 2^e ACT, Hachette, 1969, pp 123-
- Coll. P. Vissio, 2^e C.D.T, Delagrave, 1973, p. 37
- Coll. A. Fouché, 2^e A, Vuibert, 1969, p. 161

Document n° 4

1). Aleph 1, Mathématique, Seconde A, Hachette 1978, p. 42.

Soit I et J deux intervalles. Déterminer les ensembles $I \cup J$ et $I \cap J$ dans les cas suivants :

1.150 $I = [-1, 2]$; $J = [0, 5]$.

1.151 $I = [4, 2]$; $J = [2, 7]$.

1.152 $I = [-3, -1]$; $J =]-2, +\infty[$.

1.153 $I = [-5, -3]$; $J =]-\infty, -7[$.

1.154 $I =]0, 2[$; $J =]-5, 1[$.

1.155 $I =]0, 2[$; $J =]-2, 0[$.

1.156 $I =]-1, 2[$; $J = [2, 4]$.

1.157 $I = [-1, 2[$; $J =]2, 7]$.

1.158 $I =]-1, 2]$; $J = [2, 4]$.

1.159 $I =]-\infty, 3[$; $J =]-\infty, -2[$.

1.160 $I =]-\infty, -2[$; $J =]-\infty, -5[$.

1.161 $I =]-\infty, 2[$; $J =]-2, +\infty[$.

1.162 $I =]-3, +\infty[$; $J =]-\infty, -5]$.

1.163 $I = [-3, +\infty[$; $J =]-\infty, 5]$.

Déterminer l'ensemble S des réels x satisfaisant aux conditions suivantes :

1.164 $x < 3$ et $x < -2$.

1.165 $x < -2$ et $x < -5$.

1.166 $1 < x \leqslant 5$ et $-1 < x < 3$.

1.167 $5 > x \geqslant 2$ et $3 \geqslant x \geqslant -1$.

1.168 $-5 < x < 3$ et $-6 < x < 0$.

1.169 $-1 < x < 4$ et $-5 < x < -2$.

1.170 $0 < x < 5$ et $-2 < x < 0$.

1.171 $x - 3$ et $x > -1$ et $4 < x$.

1.172 $-1 \leqslant x < 3$ et $-4 \leqslant x \leqslant -1$ et $-3 < x \leqslant 5$.

2) Aleph 0, Algèbre I, 2e ACT, Hachette, 1969, pp. 123-124

Quels sont les nombres x tels que l'on ait à la fois :

5.65 $x < 3$ et $x < -2$?

5.66 $x < -2$ et $x < -5$?

5.67 $1 < x < 5$ et $-1 < x < +3$?

5.68 $-5 < x < +3$ et $-6 < x < 0$?

Montrer qu'il n'existe pas de nombre x vérifiant simultanément :

5.69 $-1 < x < 4$ et $-5 < x < -2$.

5.70 $0 < x < 5$ et $-2 < x < 0$.

5.71 $x < 3$; $x > -1$; $4 < x$.

3) Mathématique, Seconde C.D.T., Delagrave, Coll. P. Vissio, 1973, p. 377.

13-17 Écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $\{x ; x \in \mathbb{R}, -4 \leqslant x \leqslant 16{,}3\}$ (2) $\{x ; x \in \mathbb{R}_+, |x| \leqslant 5\}$

(3) $\{x ; x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant 2\}$ (4) $\{x ; x \in \mathbb{R}_+, |x| > 17{,}3\}$

(5) $\{x ; x \in \mathbb{R}, x > -19\}$ (6) $\{x ; x \in \mathbb{R}_-, |x| > 4{,}01\}$

13-18 Écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $\{x ; x \in \mathbb{R}_-, |x| < 3{,}7\}$ (2) $\{x ; x \in \mathbb{R}, |x| < 6{,}21\}$

(3) $\mathbb{R} - [3 ; +\infty[$ (4) $\mathbb{R}_+ \cap [-5{,}6 ; 11{,}75]$

13-19 Si c'est possible, écrire sous forme d'intervalle ou de segment :

(1) $[-5 ; 3{,}1] \cup [2{,}05 ; 6{,}34]$ (2) $]6 ; 9{,}1[\cap]7{,}2 ; 15{,}4[$

(3) $]-\infty ; -3] \cup [-4 ; 13]$ (4) $]-\infty ; -12] \cap [-4 ; +\infty[$

(5) $]-\infty ; +7] \cup [2 ; +\infty[$ (6) $]3 ; 7{,}5[\cup]6{,}1 ; +\infty[$

4) Mathématiques, seconde A, Coll. A. Fouché, Vuibert, 1969, p. 161

6. Déterminer l'intersection des intervalles fermés $[-3, 5]$, $[-2, 7]$, $[-4, 3]$.

7. Déterminer l'union des intervalles du n° 6.

8. Déterminer l'intersection des intervalles $]-3, 5]$, $[-3, 6]$, $]-4, 5]$.

9. Déterminer l'union des intervalles du n° 8.

10. Déterminer l'intersection et l'union des intervalles $[1, 2[$ et $]2, 3]$.

11. Même question pour les intervalles

$$[1, 2] \quad \text{et} \quad]2, 3].$$

12. Même question pour les intervalles

$$]1, 2] \quad \text{et} \quad [2, 3[.$$

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 5

Fin de CE 2...

Document n° 1

1) Vérification de $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$

$5^2 = 5 \times 5 = 25$
$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$n+1$

$n = 10 \quad n+1 = 10+1 = 11$

$n = 1, 2, 3, 4$

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = \quad 4n$

$n=1 \quad (n+1)^2 = 2 \times 2 = 4.$
$(n-1)^2 = 0 \times 0 = 0$

$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4 - 0 = 4 \qquad 4 \times n = 4 \times 1 = 4$

$n=2 \quad (n+1)^2 = 3 \times 3 = 9$
$(n-1)^2 = 1 \times 1 = 1$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 9 - 1 = 8 = 4 \times n = 4 \times 2 = 8$

$n=3 \quad (n+1)^2 = 4 \times 4 = 16$
$(n-1)^2 = 2 \times 2 = 4$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 16 - 4 = 12 = 4 \times n = 4 \times 3 = 12$

$n = 4$
$(n+1)^2 = 5 \times 5 = 25$
$(n-1)^2 = 3 \times 3 = 9$
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 25 - 9 = 16 = 4 \times n = 4 \times 4 = 16$

2) <u>Vérification de $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$</u>

$$1+2+3+4+5 = 15$$

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$n=5$ $\quad \frac{5\times 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$n = 100$ $\quad \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10\ 1}{2} =$

$\frac{10100}{2} = 5050$

$n = 6, 7, 8, 9, 10$

$n = 6$ $\quad \frac{6 \times 7}{2} = \frac{42}{2} = \underline{21}$

$1+2+3+4+5+6 = 21.$

$n = 7$ $\quad \frac{7 \times 8}{2} = \frac{56}{2} = \frac{28}{}$

$1+2$

$n=8$ $\quad 8 \times 9 = \frac{72}{2} = 36$

$n = 9$ $\quad 9 \times 10 = \frac{90}{2} = 45$

$n = 10$ $\quad \frac{10 \times 11}{2} = \frac{110}{2} = 55$

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

DOCUMENT n° 6

Une liste de savoir-faire

extrait de : A. Deledicq, C. Lassave
C. et D. Missenard
"faire" des mathématiques, 3e
Cedic, Paris, 1980, pp. 38-40

Document n° 6

Savoir « supprimer » les parenthèses dans une suite d'additions et de soustractions

Voici deux règles pratiques, justifiées par les propriétés des réels et par les conventions de la page 27, qui te permettent de « supprimer » les parenthèses dans une suite d'additions et soustractions qui en contient, et, cela, sans changer le résultat du calcul.

- Si un couple de parenthèses ouvre derrière un signe + ou en début de calcul, on peut le supprimer, sans modifier aucun des signes d'addition et de soustraction contenus à l'intérieur.
- Si un couple de parenthèses ouvre derrière un signe −, on peut supprimer ces parenthèses à condition de changer tous les signes d'addition et de soustraction situés à l'intérieur.

$$B = (-x - y) + (2 - 3x) - (a - b + 4)$$

$$B = \underbrace{-x - y + 2 - 3x}_{\text{les signes n'ont pas changé}} - \underbrace{a + b - 4}_{\text{ils ont changé}}$$

Savoir développer un produit en utilisant une identité remarquable

$$(2b - 3c)^2 = (2b)^2 - 2(2b)(3c) + (3c)^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

d'où

$$(2b - 3c)^2 = 4b^2 - (4b)(3c) + 9c^2$$

$$(2b - 3c)^2 = 4b^2 - 12bc + 9c^2$$

Regarde bien ce que nous avons fait : le « a » et le « b » de l'identité remarquable ont été remplacés par des parenthèses, puis, nous avons rempli ces parenthèses.

Savoir reconnaître le développement d'un produit remarquable

Cherche les termes qui ont l'air d'être des carrés et regarde de quels nombres ils sont les carrés.

$$\underbrace{49x^2y^4}_{a^2} - \underbrace{25z^2}_{b^2}$$

a $= 7xy^2$ b $= 5z$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$49x^2y^4 - 25z^2 = (7xy^2 + 5z)(7xy^2 - 5z)$$

$$\underbrace{25y^2}_{a^2} - 40y + \underbrace{16}_{b^2}$$

a $= 5y$ b $= 4$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$25y^2 - 40y + 16 = (5y - 4)^2.$$

Savoir factoriser les écritures proposées en 3[e]

On te propose une écriture qui est une somme de produits.
Isole et regarde chaque terme de cette somme.

1° Vois-tu un facteur commun ?
Alors mets-le en facteur

Exemples :

$$(2x+3)(x-5) - (2x+3)(2x-1) = (2x+3)(\ldots)$$
$$5a + 5b + 5c = 5(\ldots)$$
$$3a + 4a + 5a = a(\ldots)$$

2° Peut-il s'agir du développement d'un produit remarquable ?

Exemples :

$$81x^2 - 64 = (9x-8)(9x+8)$$
$$9y^2 + 4x^2 - 12xy = (3y-2x)^2$$
$$4 + 4y^2 + y^4 = (2+y^2)^2$$
$$x^2 + 2x - a^2 + 1 = (x+1)^2 - a^2$$
$$= (x+a+1)(x-a+1).$$

3° Ou bien tu as mal regardé ou bien il te faut pousser ton analyse.

a) Le facteur commun peut en effet être caché derrière une multiplication supplémentaire ; en particulier :

- Il peut avoir été remplacé par son opposé dans certains termes.
- Il peut être contenu dans un carré.

Exemples :

$$(x+1)(3x+1) - (2x+2)x = (x+1)(\ldots - 2\ldots)$$
$$(x-1)(2x+3) + (1-x)(3-x) = (x-1)(\ldots - \ldots)$$
$$9x^2 - 3x = (3x)(3x\ldots)$$
$$(x-6)^2 + (6-x) = (6-x)(\ldots)$$
$$2x^2 - 25 + (x+5) = (x+5)(\ldots)$$

b) Un facteur peut être commun à certains termes seulement.
Groupe ces termes. Il s'agit peut-être alors d'un développement du type :

$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd.$

Remarque : le développement précédent se repère souvent au fait que les termes peuvent s'ordonner suivant le nombre de facteurs qu'ils contiennent.

Exemple :

$$\begin{aligned} 1 - a - b + ab &= 1 - b - a + ab \\ &= (1 - b) - a\,(1 - b) \\ &= (1 - b)\,(1 - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10\,xy - 2 + 5\,x - 4\,y &= 10\,xy + 5\,x - 2 - 4\,y \\ &= 5\,x\,(2\,y + 1) - 2\,(1 + 2\,y) \\ &= (5\,x - 2)\,(2\,y + 1) \end{aligned}$$

Mais le nombre de facteurs n'est bien défini que pour des variables littérales :

ainsi $a^2 = a \times a$

$20 = 2 \times 10$ mais aussi $20 = 4 \times 5$ ou $2 \times 2 \times 5$.

Il se peut aussi que des simplifications t'empêchent de retrouver le chemin de la factorisation.

Exemple :

$$2\,x^2 - y^2 + xy = ?$$

En fait :

$$(x + y)\,(2\,x - y) = 2\,x^2 + \underbrace{2\,xy - xy}_{\text{cette simplification rend le retour difficile.}} - y^2$$

4° Lorsqu'une mise en facteur a été effectuée, il se peut que chaque facteur puisse lui-même se mettre en facteur. Il faut continuer...
Si tu le peux, tu dois arriver à des facteurs « du premier degré » mais ce n'est pas toujours possible.

Exemple :

$$x^2y - 6\,xy + 9\,y = y\,(x^2 - 6\,x + 9)$$

$$x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2y - 6\,xy + 9\,y = y\,(x - 3)^2$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)\,(x + 1)$$

$x^2 + 1 =$ Rien de mieux !

Première Ecole d'Eté de didactique des mathématiques

LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

BIBLIOGRAPHIE des textes cités

... après réflexion, je leur ai dit que je suivais trois procédés. (...)
Premier : ne rien lire dans le domaine dont on s'occupe et ne lire qu'après.
Deuxième méthode : lire le plus possible dans les domaines avoisinants (...)
Et troisième méthode : avoir une tête de Turc. (...)

Jean Piaget.

RÉFÉRENCES

des textes cités dans les Fiches

N.B. Les participants pourront consulter sur place les textes cités, ainsi que les ouvrages dont ils sont extraits. Par ailleurs, ils trouveront à leur disposition une liste où ils pourront indiquer les textes dont ils désirent recevoir une copie après l'Ecole d'Eté'.

Texte n° 1 : De l'implicite à l'explicite

extrait de : Robert Blanché,
La logique et son histoire
Armand Colin, Paris, 1970.
(pp. 13-16).

Texte n° 2 La transposition didactique

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I
Librairie Honoré Champion, Paris, 1975.
(pp. 140-144).

Texte n° 3 La substitution didactique d'objet

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I,
Librairie Honoré Champion, Paris, 1975.
(pp. 176-182).

Texte n° 4 Les études mathématiques de Descartes

extraits de : Pierre Mesnard,
Descartes
Seghers, Paris, 1966
(pp. 6-7),

et de : René Descartes,
Règles pour la direction de l'esprit
cité par P. Mesnard, op. cit., pp. 89-91

Texte n° 5 Sets and Functions :
Venn Diagrams

extrait de : Hans Freudenthal,
Mathematics as an
Educational Task,
D. Reidel, Dordrecht, 1973
(pp. 332-335 et 341-350).

Texte n° 6 L'illusion de la transparence
et le principe de la non-conscience

extrait de : Pierre Bourdieu, Jean-Claude Chamboredon,
Jean-Claude Passeron,
Le métier de sociologue.
Mouton, Paris, 1973
(pp. 29-34).

Texte n° 7 Une difficulté de la psychanalyse

extrait de : S. Freud,
Essais de psychanalyse appliquée,
Gallimard, Paris, 1933.
(pp. 137-147).

Texte n° 8 Les contradictions théoriques de la substitution d'objet

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I
Librairie Honoré Champion, Paris, 1975
(pp. 182-190).

Texte n° 9 Statut et fonctions de la notion de paramètre

extrait de : Yves Chevallard,
même titre,
à paraître.

Texte n° 10 Sur les difficultés "protomathématiques"

Yves Chevallard,
à paraître *in* Actes du colloque
Apports de l'histoire des mathématiques à l'enseignement et à la formation des enseignants, Puyricard 18-19 mai 1979.

Texte n° 11 Implicite et logique pratique

extrait de : Pierre Bourdieu,
Le sens pratique,
Minuit, Paris, 1980
(pp. 24-29).

Texte n° 12 Les limites sociales de scolarisation bureaucratique des savoirs de l'homme

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I,
Librairie Honoré Champion,
Paris, 1975
(pp. 160-166).

Texte n° 13 Les limites gnoséologiques de la scolarisation des savoirs de l'homme

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I,
Librairie Honoré Champion, Paris, 197
(pp. 167-176).

Texte n° 14 Le temps dans l'institution didactique

extrait de : Michel Verret,
Le temps des études, Tome I,
Librairie Honoré Champion, Paris,
1975
(pp. 100-105 et 109-123).

Texte n° 15 La notion de contradiction

extrait de : Saül Karsz
Théorie et politique : Louis Althusser
Fayard, Paris, 1974
(pp. 131-138).

Texte n° 16 La notion de transaction

extrait de : Umberto Eco
L'œuvre ouverte, Seuil, Paris, 1965
(pp. 43-48 et 94-108).

Texte n° 17 L'idéologie interpelle les individus en sujets

extrait de : Louis Althusser,
Idéologie et appareils idéologiques d'Etat
in *Positions*, Editions sociales, Paris,
1976 (pp. 110-116).

Texte n° 18 The Life Adjustment Movement

extrait de : Richard Hofstadter,
Anti-intellectualism in American Life,
Vintage Books, New-York, 1963
(pp. 329-358).

Texte n° 19 <u>L'analyse de la "relation enseignant/enseigné" dans les années soixante : un exemple</u>

extrait de : René Lourau,
<u>Contenu actuel de la pédagogie utopique</u>
"Recherches universitaires", n° 3-4, 1964
reproduit <u>in</u> <u>L'illusion pédagogique</u>,
Epi, Paris, 1969 (pp. 27-30)

Texte n° 20 <u>Changements dans l'analyse du pouvoir</u>

extrait de : Michel Foucault
<u>Vérité et pouvoir</u>
(entretien avec M. Fontana)
L'Arc, n° 70 ("La crise dans la tête"
Aix-en-Provence, 1977 (pp. 21-22).

Texte n° 21 <u>Pouvoir interdicteur et pouvoir productif</u>

extrait de : Michel Foucault
<u>Vérité et pouvoir</u>
(entretien avec M. Fontana)
<u>L'Arc</u>, n° 70 ("La crise dans la tête")
Aix-en-Provence, 1977 (pp. 21-22).

Texte n° 22 <u>La situation de l'enseignant</u>

extrait de : Richard Hofstadter
<u>Anti-intellectualism in American Life</u>
Vintage Books, New-York, 1963 (pp. 309-31

et de : Antoine Prost
<u>L'enseignement en France, 1800-1967</u>
A. Colin, Paris, 1968 (pp. 132-136).

Texte n° 23 La notion de refonte en histoire des sciences

extrait de : Gaston Bachelard
Le nouvel esprit scientifique
PUF, Paris, 1968 (1ère édition 1934)
(pp. 175-177).

Texte n° 24 Du concept d'aptitude au concept de prérequis

extrait de : Bulletin AMQ, Vol. XX, N° 1, mars 198

Texte n° 25 Facteurs du développement, mécanismes d'adaptation et régulateurs du comportement

extrait de : R. Droz et M. Rahmy
Lire Piaget
Charles Dessart, Bruxelles, 1974
(pp. 45-52).

Texte n° 26 Les facteurs du développement mental

extrait de : Jean Piaget et Bärbel Inhelder
La psychologie de l'enfant
PUF, Paris, 1975
(pp. 121-122).

Texte n° 27 La notion freudienne d'"après-coup"

extrait de : Jean Laplanche et J.-B. Pontalis
Vocabulaire de la psychanalyse
PUF, Paris, 1973 (pp. 33-36).

Texte n° 28 Détermination, formation du nom et enchâssement

extrait de: Michel Pêcheux
Les vérités de La Palice
François Maspéro, Paris, 1975
(pp. 85–93).

Texte n° 29 La notion moderne de continuité

extrait de: André Delachet
L'analyse mathématique
PUF, Paris, 1961
(pp. 51–57).

Texte n° 30 De la certitude

extrait de: Ludwig Wittgenstein
De la certitude
Gallimard, Paris, 1976
(pp. 31–39).

Texte n° 31 Les appositives

extrait de: Dominique Maingueneau
Les livres d'école de la république 1870-1914
Le sycomore, Paris, 1979.
(pp. 9–25).

Texte n° 32 Polynômes, réels et préconstruction

extrait de: Jacques Tonnelle
Le monde clos de la factorisation au premier cycle
Irem d'Aix-Marseille, 1979.
(pp. 58–63).