information mathématique

académie d'aix-marseille

irem

Académie d'AIX - MARSEILLE

INFORMATION

MATHEMATIQUE

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

Gilles THOMAS

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
I. R. E. M.
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE Cedex 2
Tél. 41.01.40 poste 32.10 / 41.39.40

INFORMATION MATHEMATIQUE

N° 14 Mai 1980

SOMMAIRE

★ INFORMATION :
CERTIFICAT D'APPROFONDISSEMENT EN MATHEMATIQUES-INFORMATIQUE 5

★ EN DIRECT DU SERVICE DES PUBLICATIONS 21

★ CONTRIBUTIONS MATHEMATIQUES :
OBJETS GEOMETRIQUES EN CLASSE DE 5e 28
(G. THOMAS)

GEOMETRIE EUCLIDIENNE : LES REFLEXIONS 44
(J. MARION)

★ INFORMATION :

BROCHURES RECUES A LA BIBLIOTHEQUE DE L'IREM
depuis la rentrée de septembre 1979 61

★ INFORMATION :

Deux études de Didactique des Mathématiques 63

Dépot légal 2e trimestre 1980

INFORMATION

L'Université d'Aix-Marseille II organise à partir de l'année scolaire 1980-1981 un certificat d'Université, intitulé :

CERTIFICAT D'APPROFONDISSEMENT
EN MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE

qui s'adresse particulièrement aux enseignants de Mathématiques des Lycées et Collèges.

---

1) Ce certificat est créé à l'initiative conjointe de l'Université d'Aix-Marseille II, (I.R.E.M. et Département de Mathématiques et Informatique), et de la Régionale de l'A.P.M.E.P. Il est géré par des membres de l'Université et de l'A.P.M. et n'entretient aucun lien de caractère administratif avec les organismes de tutelle du ministère de l'Education.

2) Ce certificat s'insère dans une perspective de formation permanente liée à une conception de l'enseignement des mathématiques qui s'appuie sur les axes suivants :

- prendre en compte l'évolution des sciences mathématiques et de leurs interventions dans d'autres secteurs : statistique, informatique, sciences physiques, biologiques, économiques, sociales... ;
- centrer l'enseignement sur l'étude conjointe des concepts et de quelques grands problèmes mathématiques jouant un rôle central dans le secteur considéré ; en effet ces problèmes sont le terrain privilégié de mise à l'épreuve des outils théoriques élaborés, et fournissent en retour des problématiques pour l'approfondissement des concepts ;
- favoriser l'activité mathématique personnelle et collective des élèves.

3) Ce certificat se propose d'apporter une contribution à la formation continue, à la fois au plan du développement des connaissances et de la pratique mathématique, et au plan d'une réflexion sur l'investissement de ces connaissances dans la pratique enseignante.

4) Le fonctionnement de ce certificat s'appuie sur les principes esquissés ci-dessus : étude conjointe de problèmes et de concepts par le biais d'activités mathématiques destinées à tous les participants. En particulier il ne sera pas organisé selon le schéma : cours suivis d'exercices d'applications ; les phases de synthèse seront subordonnées à l'approfondissement des grands problèmes étudiés.

5) Ce certificat sera organisé sous la forme d'un ensemble de modules de niveaux et de durées variables, dont le contenu pourra différer selon les années. Comme il s'agit d'apporter une *contribution* à la *formation* de l'ensemble des enseignants de l'Académie, tous ces modules feront l'objet de documents écrits qui seront distribués à toutes les personnes inscrites au Certificat ; on remarquera qu'il est possible de s'inscrire chaque année pour bénéficier de ce service, indépendamment du nombre de modules suivis.

Bien évidemment la participation au Certificat n'implique pas nécessairement le désir d'obtenir le diplôme sanctionnant les études. Pour ceux qui souhaitent obtenir ce diplôme il leur sera demandé de rédiger un travail qu'ils présenteront devant un jury ; ces travaux supposeront la participation à un ou plusieurs modules, le total équivalant à quinze ou vingt séances.

6) Conditions d'inscription :

Les fiches d'inscription peuvent être obtenues dès maintenant en s'adressant à l'I.R.E.M.

Le dossier complet d'inscription sera déposé à la rentrée 1980 au service scolarité à la Faculté des Sciences de Luminy, une après-midi sera réservée à cet effet (dont la date sera précisée ultérieurement).

- Pièces à fournir :

1. Pour la 1ère inscription l'original du bac ou du titre admis en équivalence + photocopie.
   Si vous avez déjà été inscrit dans une Université, veuillez demander le transfert de votre dossier.
2. Titre de paiement à l'ordre de l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II, (de l'ordre de 27 F.).
3. Fiche individuelle d'état civil.

4. Carte d'immatriculation à la Sécurité Sociale.

5. Deux photos d'identité (format 4×4) avec le nom au dos.

6. 2 enveloppes timbrées à votre adresse (autocollantes).

7. photocopie d'un bulletin de salaire.

7) On trouvera pages suivantes une présentation des modules possibles (d'autres sujets sont envisageables pour les années à venir).

Les contenus de ces modules seront précisés par l'ensemble des participants.

Certains des textes de présentation des modules comportent des listes très larges de thèmes, dont l'étude pourra s'étaler sur plusieurs années. Les références aux niveaux indiqués (1er cycle, 2e cycle,...etc.) signifient que la majorité des exemples choisis dans les activités proposées seront en relation avec l'enseignement des mathématiques à ces niveaux ; bien entendu ceci n'exclut pas que par exemple un enseignant en 1er cycle s'intéresse à un module prévu pour le 2e cycle et réciproquement.

En ce qui concerne les prérequis, la mention "connaissances élémentaires" se réfère au niveau d'une classe de terminale scientifique.

Modules prévus pour l'année scolaire 1980-1981.

1 - Programmation.
2 - Rôle des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques.
3 - Rôle des problèmes numériques dans l'enseignement des mathématiques.
4 - Interventions des transformations en géométrie.
5 - Etude de problèmes issus des mathématiques ou d'autres disciplines, menant à des questions d'algèbre linéaire.
6 - Analyse de données numériques, analyse de données multidimensionnelles.
7 - Représentations des fonctions.
8 - Représentations des nombres réels.
9 - Arithmétique et théorie des nombres.
10 - Problèmes de constructions géométriques.
11 - Réflexion sur la logique mathématique.

Module prévu pour l'année scolaire 1981-1982.

12 - Etude de problèmes issus des mathématiques ou d'autres disciplines menant à des questions de calcul différentiel et intégral.

Pour tous renseignements, prière de s'adresser au représentant de l'A.P.M.E.P. de l'établissement, ou directement à :

l'I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE
70, route Léon Lachamp, Case 901, 13288 MARSEILLE CEDEX 2
Tél. (91) 41.39.40

MODULE 1   PROGRAMMATION

Ce module s'adresse à tous les enseignants en mathématiques des Lycées et Collèges.

Il a pour but d'expliquer les principes de fonctionnement d'un ordinateur et d'apprendre un langage de programmation évolué. Les premières séances seront consacrées à l'apprentissage du langage Basic et donneront lieu à des travaux pratiques sur l'ordinateur. Les séances suivantes seront consacrées aux traitements sur machine de certains algorithmes abordés dans les autres modules.

Organisation et prérequis :

Ce module s'étend sur toute l'année scolaire à raison de 2 séances mensuelles pendant les 4 premiers mois et quelques autres séances à répartir sur les mois restants.

Ce module ne nécessite aucun prérequis.

MODULE 2 ROLE DES ALGORITHMES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Les algorithmes jouent aujourd'hui un rôle de premier plan dans la plupart des secteurs scientifiques : analyse numérique, langages de programmation, organisation de données, traitement de données numériques, codages et traduction, analyse des langues naturelles, analyse de séries statistiques, simulation de systèmes dynamiques dans un contexte déterministe ou aléatoire, automation des processus industriels.

D'autre part, la construction, la mise en oeuvre et l'analyse de la pertinence d'algorithmes sont inséparables de l'approfondissement des concepts mathématiques.

L'objectif de ce module est d'analyser quel peut être le rôle des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques. Parmi les différents thèmes esquissés ci-dessus, ont été retenus pour l'année 1980-81 les suivants .

a) - Syntaxe et Sémantique des expressions mathématiques : représentation, interprétation, manipulations symboliques et algébriques. Application et exemples : évaluation d'expressions numériques, quelques algorithmes non-numériques en algèbre et en analyse.

b) - Rôle des algorithmes en analyse numérique (recherche de solutions approchées des équations numériques, méthodes d'approximation des fonctions). L'usage des calculatrices enrichira le champ expérimental des activités ; en retour, ces activités permettront d'analyser la pertinence des divers instruments de calculs.

c) - Rôle des algorithmes en arithmétique (numération, divisibilité, congruences, primalité, codages,...).

Organisation : une séance tous les 15 jours à partir de janvier.
Il peut y avoir avantage à avoir suivi le MODULE 1, afin de programmer certains algorithmes sur miniordinateur.

Prérequis : Savoir utiliser une calculatrice de poche.

Le sous-module a) s'adresse à l'ensemble des enseignants du secondaire.

Pour les sous-modules b) et c) deux niveaux sont prévus : premier cycle et seconde d'une part, 1ère et terminale d'autre part.

Le thème du sous-module b) est lié à celui du MODULE 3, et présente sur les mêmes sujets un éclairage complémentaire.

MODULE 3 ROLE DES PROBLEMES NUMERIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Les problèmes numériques ont joué historiquement un rôle central dans la construction des concepts de l'analyse. A notre époque, l'intérêt pour ces problèmes est redoublé par l'extension du champ d'intervention des mathématiques et par les possibilités accrues de moyens de calcul (calculatrices, micro-ordinateurs, ordinateurs, ...). Dans l'enseignement des mathématiques, ils permettent de combiner l'approfondissement théorique et l'approfondissement expérimental . En particulier l'emploi judicieux des calculatrices de poches permet d'enrichir le champ expérimental des activités (extension du champ des nombres utilisés, des exemples et contre-exemples, obtention de conjectures) ; inversement la mise en oeuvre de résultats théoriques permet de contrôler les algorithmes de calcul employés, de comparer leur efficacité, de découvrir des algorithmes plus performants et d'analyser la pertinence des moyens de calcul utilisés.

Les problèmes numériques fournissent ainsi des thèmes d'activité sucitant l'intérêt d'un grand nombre d'élèves, grâce à une mise en valeur de l'efficacité comparée de divers processus d'approximation.

Thèmes d'activités retenus pour 1980-81 :

- Résolution des équations numériques.
- Recherche de valeurs approchées de fonctions ; cas des fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes.

Autres thèmes envisagés ultérieurement :

- Interpolation et différences finies.
- Calcul de valeurs approchées des intégrales.
- ....

Une perspective historique sera prise en compte pour ces différents thèmes. L'aspect intersectoriel et interdisciplinaire sera mis en valeur.

Organisation : - Tous les 15 jours pendant le premier semestre (le mercredi après-midi).
- Deux niveaux sont prévus : premier cycle et seconde d'une part, 1ère et terminale d'autre part.

Prérequis : - Savoir utiliser une calculatrice de poche.

MODULE 4 INTERVENTION DES TRANSFORMATIONS EN GEOMETRIE

Au cours de la dernière décennie l'enseignement de la géométrie s'est investi trop exclusivement dans les concepts de l'algèbre linéaire, sans prise réelle sur l'étude des configurations qui sont pourtant au coeur des problématiques de la géométrie.

Il ne convient pas pour autant de revenir à une étude statique des "figures". Il s'agit de montrer, essentiellement sur des exemples concernant le 2e cycle des lycées, comment l'outil des transformations peut s'investir en géométrie pour l'étude de problèmes liés aux configurations.

L'objectif de ce module est donc d'étudier, à partir de thèmes variés d'activités géométriques, les interventions des transformations en géométrie, les modalités de ces interventions, et les méthodes qu'elles fournissent pour l'attaque de grands problèmes : problèmes d'incidences, recherche de lieux géométriques, problèmes de constructions de configurations, recherche d'invariants, recherche de configurations astreintes à des conditions extrêmales de mesure.

Organisation : ce module s'étend sur un semestre à raison d'une séance de trois heures, deux fois par mois, le mercredi après-midi.

Prérequis : Connaissances élémentaires d'algèbre linéaire et de géométrie affine et euclidienne.

MODULE 5 ETUDE DE PROBLEMES ISSUS DES MATHEMATIQUES OU D'AUTRES DISCIPLINES, MENANT A DES QUESTIONS D'ALGEBRE LINEAIRE

Le thème traité est celui de la dynamique des populations (végétales, animales et humaines). Les modèles mathématiques utilisés relèvent :

- de la théorie des équations différentielles : on considèrera à ce propos les problèmes du passage du discret au continu, de la formation des équations, de leur étude qualitative et quantitative, de leur résolution ;

- de l'algèbre linéaire, et plus particulièrement de la théorie des valeurs propres et des vecteurs propres d'un endomorphisme.

Toutes ces questions sont étudiées à propos d'un problème d'origine extra-mathématique, la dynamique des populations.

Les phénomènes étudiés seront abordés par le biais d'une simulation numérique avant d'être élucidés par une construction théorique, qui en retour met en évidence des facteurs que la simple observation numérique ne permet pas toujours de déceler.

Organisation et prérequis :

6 séances, à raison d'une séance tous les 15 jours.

Ce module est prévu pour le niveau second cycle ; les questions abordées se situent dans le prolongement des enseignements d'analyse et d'algèbre.

MODULE 6 ANALYSE DE DONNEES NUMERIQUES, ANALYSE DE DONNEES MULTIDIMENSIONNELLES

a) Dans un premier temps on rappellera les résultats les plus simples concernant l'analyse de données en dimensions 1 et 2, notamment : corrélation, régressions, séries chronologiques.

b) Dans un second temps, on abordera le problème de l'analyse des données multidimensionnelles, selon le plan suivant :

- Présentation des résultats de quelques analyses factorielles : Analyse en composantes principales (ACP), analyse factorielle des correspondances (AFC). Après la description des données et l'énoncé des règles les plus simples d'aide à l'interprétation, il peut être intéressant d'examiner des sorties d'ordinateur. Cet examen devra faire naître des questions sur les techniques mathématiques sous-jacentes.
- Exposé de la technique de l'ACP. Cette méthode que la représentation géométrique rend facile à assimiler est sans doute la technique la plus fondamentale de l'analyse factorielle. Les notions d'algèbre linéaire nécessaires à son exposé ne dépassent pas le niveau de la diagonalisation d'une matrice réelle carrée symétrique (question abordée dans le module 5).
- Cas particulier de l'AFC. Cette méthode largement développée et divulguée par le laboratoire de l'ISUP sous la direction de J.P. Benzécri depuis 1965 environ est très utilisée en France. Au point de vue mathématique, il est courant de la présenter comme un cas particulier d'ACP sur tableau de contingence (croisant 2 caractères qualitatifs, par exemple) pour une métrique particulière : la métrique du X_2. Un des avantages de cette méthode est de permettre une interprétation de la proximité entre les objets-lignes et les objets-colonnes du tableau à analyser : c'est la propriété dite pseudo-barycentrique.

Organisation : 2 séances pour la partie a)
6 séances pour la partie b) (le mercredi après-midi)

Prérequis : Connaissances élémentaires en probabilités et statistiques et en algèbre linéaire.

MODULE 7 REPRESENTATIONS DES FONCTIONS

La notion de fonction joue un rôle central en analyse. Les fonctions les plus simples s'expriment à l'aide de formules algébriques (polynôme, fractions rationnelles), mais bien entendu ce ne sont pas les seules fonctions que l'on est amené à étudier en analyse. De nouvelles fonctions s'intróduisent donc de différentes manières (par exemple comme limites).

En outre pour une fonction donnée on peut être amené à rechercher d'autres types de représentations, adaptées à un problème que l'on veut résoudre. (Par exemple il est intéressant de savoir que $\frac{1}{1-x}$ peut s'écrire pour certaines valeurs de x comme somme de la série $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$).

Dans ce module on se propose donc d'étudier quelque peu les représentations des fonctions, en liaison avec des grands problèmes de l'analyse. A ce propos on sera amené à travailler sur les concepts et outils fondamentaux de l'analyse (limites, continuité, uniformité, dérivées, intégrales).

Thèmes parmi lesquels seront choisies les activités

1. Evolution de la notion de fonction, des outils et des problèmes fondamentaux de l'analyse.
2. La formule de Taylor : Un exemple de représentation intégrale. L'intégration par parties.
3. Le problème du développement de $(1 + x)^\alpha$. La convergence uniforme. Séries entières et résolution d'équations fonctionnelles. Fonctions transcendantes élémentaires.
4. Eléments sur les séries de Fourier.
5. Approximation uniforme. Le théorème de Weierstrass.
6. Interpolation. Polynômes de Lagrange. Liens avec l'algèbre linéaire.

7. Quelques problèmes qui se posent (non résolus dans ce module).

Tous les points seront abordés à l'aide de documents historiques et scientifiques et seront traités sous forme d'activités.

Organisation : - tous les 15 jours pendant un semestre (mercredi après-midi).

Prérequis : Ce module constitue une première approche des thèmes précédents et ne nécessite que des connaissances élémentaires d'analyse et d'algèbre linéaire.

MODULE 8 REPRESENTATIONS DES NOMBRES REELS

La maitrise des interventions des nombres réels dans des problèmes variés, passe nécessairement par l'étude des procédés de construction de nombres, et de leurs divers modes de représentations et d'approximations : limites de suites, sommes de séries, intégrales.

Pour ces problèmes, il ne suffit pas de connaître les propriétés fondamentales du corps des nombres réels, ou les méthodes théoriques de construction de ce corps à partir de celui des nombres rationnels.

Les problèmes suivants seront envisagés :

- représentation décimale des nombres réels. Que peut-on dire de la période d'un nombre rationnel ? Que peut-on dire de la suite des chiffres de "$\sqrt{2}$" ou "e" ou "π" ?

- approximation d'un nombre réel par les nombres rationnels. Existence de nombres transcendants. Meilleures approximations. Développement en fraction continue : cas des irrationnels quadratiques.

- autres représentations sous forme de série ou d'intégrale. Comment prouver qu'un nombre réel donné n'est pas rationnel ou n'est pas algébrique ?

Organisation : 6 séances, le Mercredi ou éventuellement le Mardi après-midi si cela s'avère plus pratique.

Préreguis : savoir ce que sont une suite ou une série convergentes.

MODULE 9 ARITHMETIQUE ET THEORIE DES NOMBRES

Compte tenu de la diversité des problèmes et méthodes en théorie des nombres, ce module s'organisera nécessairement autour de thèmes ne présentant qu'un aspect particulier de cette discipline.

L'un de ces thèmes sera par exemple l'étude de quelques problèmes diophantiens : équation de Pell-Fermat, représentation d'un nombre comme somme de deux carrés et plus généralement comme valeur d'une forme quadratique en deux variables, éventuellement représentation comme somme de quatre carrés.

Certains de ces points seront abordés à l'aide de documents historiques, notamment les "Recherches arithmétiques" de Gauss.

Organisation : 5 ou 6 séances, le Mercredi ou éventuellement le Mardi après-midi si cela s'avère plus pratique.

Prérequis : Ce module constitue une première approche et ne nécessite aucune connaissance particulière préalable.

MODULE 10 PROBLEMES DE CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES

Il ne s'agit pas de renouer avec une tradition ancienne vouée au mythe de la règle et du compas. Les activités géométriques liées aux problèmes de constructions jouent un rôle essentiel : elles intègrent à la fois des activités manipulatoires et des activités théoriques le plus souvent intersectorielles. A côté des constructions simples, certaines constructions plus complexes peuvent utiliser des propriétés de configurations connues l'outil des transformations, l'outil algébrique ; enfin il n'y a pas lieu d'ignorer les constructions descriptives permettant de reconstruire un modèle, ou d'élaborer un "patron".

L'objectif de ce module est d'étudier ces différents types de constructions.

Organisation : 6 séances hebdomadaires le mercredi après-midi pour chaque niveau.

Prérequis : - deux niveaux d'activités sont prévus :

. l'un s'adressant aux enseignants de collège,

. l'autre aux enseignants du 2e cycle des lycées.

MODULE II REFLEXION SUR LA LOGIQUE MATHEMATIQUE

Exposés, réflexion et discussion autour de "Axiomatique et logique" de Marcel Guillaume.

- La méthode axiomatique au 19e siècle.

- Les progrès vers la formalisation et la compréhension de son rôle, jusqu'à la fin du 19e siècle.

- La logique mathématique au 19e siècle.

- Grandes idées du 20e siècle.

Organisation et prérequis :

6 séances environ, à raison d'une séance tous les 15 jours, le Mercredi ou éventuellement le Mardi après-midi si cela s'avère plus plus pratique.

Ce module est prévu au niveau du second cycle.

MODULE 12 : ETUDE DE PROBLEMES ISSUS DES MATHEMATIQUES OU D'AUTRES DISCIPLINES MENANT A DES QUESTIONS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL.

Il s'agit ici de développer des activités intersectorielles ou interdisciplinaires, dont l'objectif pour l'enseignement est triple :

- Stimuler l'intérêt de l'élève pour une question purement mathématique et en retour mettre en évidence l'efficacité des résultats mathématiques obtenus pour la résolution de problèmes posés ailleurs.

- Aider l'élève à organiser une synthèse de ses connaissances et à réinvestir ses connaissances dans des domaines variés.

- Aider l'élève à analyser le fonctionnement du système de production des connaissances scientifiques.

Les thèmes suivants sont envisagés :

- Approximation locale d'un phénomène ; calculs d'erreurs ; mise en équation de systèmes dynamiques continus issus des sciences physiques, biologiques et économiques.
- Recherche de maximums et de minimums à partir de problèmes d'optimisation de valeurs d'une fonction numérique (coût, énergie, grandeurs géométriques ...) ou d'optimisation de fonctions (géodésiques, chemins optiques, intégrales d'énergie,...).
- Mesure des grandeurs géométriques, physiques et probabilistes.
- Comportement asymptotique de phénomènes discrets (arithmétique, géométrie, probabilités, systèmes dynamiques).
- Comportement de sytèmes dynamiques continus : problèmes d'évolution ; problèmes aux limites ; problèmes de contrôle et de commande.

La plupart de ces thèmes seront illustrés par des exemples faisant l'objet d'un traitement numérique, sur calculatrice ou sur ordinateur.

<u>Organisation :</u> 1 séance tous les 15 jours pendant 1 semestre. Ne sera organisé qu'à partir de la rentrée 1981.
Ce module est prévu pour le niveau second cycle.

<u>Prérequis :</u> connaissances élémentaires de calcul différentiel et intégral.

EN DIRECT

DU SERVICE

DES PUBLICATIONS

★ ★

★

DERNIERES PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. D'AIX-MARSEILLE

★ *Note sur une recherche en didactique des mathématiques.*
(Y. CHEVALLARD) - Mai 1977

★ Rapport sur la recherche en I.R.E.M. - L'entrée dans la vie ?
(Y. CHEVALLARD) - septembre 1977

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 10 - décembre 1977.

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 11 - mai 1978.

★ Calcul des Probabilités et Arithmétique (Indépendance et multiplicativité restreinte) - octobre 1978 - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 32 pages - Prix : 2F50

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 12 - Novembre 1978.

★ Analyse I - décembre 1978. - Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille - 174 pages - Prix 8 F.

★ Essai sur la Géométrie (J. MARION) - septembre 1979.

★ Bulletin "Information Mathématique" n° 13 - octobre 1979.

Le lecteur trouvera dans les pages suivantes une présentation détaillée des deux monographies, les titres des derniers bulletins INTER IREM ainsi qu'un bulletin de commande à nous adresser.

N'hésitez pas à nous faire part de vos critiques comme de vos suggestions concernant les publications de l'I.R.E.M. ; nous rappelons que la rubrique "Tribune libre" de ce bulletin est à votre disposition.

C. T.

calcul des probabilités et arithmétique

INDEPENDANCE ET MULTIPLICATIVITE RESTREINTE.

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement du Calcul des Probabilités de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

32 pages - PRIX : 2,50 F.

Dans cette brochure, on utilise les propriétés les plus élémentaires d'indépendance d'évènements et de variables aléatoires pour démontrer certaines propriétés algébriques des fonctions d'entiers.

Les démonstrations probabilistes qui sont présentées devraient éclairer d'un jour nouveau le comportement des entiers vis à vis de la division euclidienne et la nature de certaines propriétés telles la multiplicativité restreinte, qui est étudiée en détails pour l'indicateur d'Euler, et la somme des puissances des diviseurs d'un nombre.

Cette interaction entre deux secteurs des mathématiques apparemment éloignés est présentée à un niveau élémentaire évitant ainsi au lecteur d'avoir à consulter de nombreux ouvrages qu'il est parfois difficile de se procurer et souvent difficile de lire.

Enfin ce document non seulement atteste l'efficacité des propriétés d'indépendance mais permet aussi d'illustrer l'intérêt de choisir tel ou tel espace probabilisé suivant la nature du problème et des propriétés que l'on veut démontrer détruisant ainsi le mythe de l'univers à qui l'on fait jouer trop souvent un rôle central, injustifié et néfaste.

TABLE DES MATIERES

I - INTRODUCTION

II - PROPRIETE DE MULTIPLICATIVITE RESTREINTE

III - PREMIERE INTERVENTION PROBABILISTE

IV - APPLICATIONS A L'INDICATEUR D'EULER

V - VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

VI - SOMME DES PUISSANCES DES DIVISEURS D'UN ENTIER

BIBLIOGRAPHIE

analyse 1

(Groupe de Recherche sur l'Enseignement de l'Analyse de l'I.R.E.M. d'Aix-Marseille)

174 pages - PRIX : 8 F.

En Septembre 1975, un groupe de recherche sur l'enseignement de l'analyse s'est constitué à l'I.R.E.M. de Marseille, réunissant des enseignants du second degré et du supérieur. Il s'est d'abord fixé pour tâche de dégager quelques grandes orientations pour l'enseignement de l'Analyse, en tenant compte :

- des indices fournis par l'état actuel de cet enseignement.
- d'une étude scientifique et épistémologique des concepts fondamentaux de l'analyse.
- du rôle joué par ces concepts dans une formation scientifique.

Ces orientations sont regroupées non autour de concepts théoriques, mais à partir des quelques grands problèmes de l'analyse qu'il nous a paru utile d'étudier dans l'enseignement secondaire. Cela ne signifie en aucun cas un abandon de l'approfondissement théorique des concepts de l'analyse, bien au contraire. Les études historiques et épistémologiques, aussi bien que les réflexions d'ordre didactique et génétique nous ont montré que c'est à travers leur fonctionnement dans la résolution de problèmes que ces concepts peuvent être progressivement approfondis. Les problèmes ont été choisis en fonction de cet objectif, de l'intérêt qu'ils peuvent susciter chez les élèves, de leur importance pour la construction d'une culture scientifique, et des interconnexions qu'ils présentent avec d'autres secteurs des mathématiques, de l'informatique scientifique, des sciences physiques et technologiques...

Pour illustrer ces grandes orientations, de nombreux documents ont été produits, des expérimentations s'inspirant de ces documents ont été réalisées ou sont en cours de réalisation et feront l'objet d'autres documents.

Des travaux analogues, abordant des aspects complémentaires, ont été engagés par d'autres I.R.E.M. Un groupe national inter-I.R.E.M. permet des échanges structurés entre ces groupes.

PLAN DE LA BROCHURE

1 OBJECTIFS ET METHODES DE TRAVAIL

I - Etude sommaire de l'état actuel de l'enseignement de l'analyse
II - Objectifs et méthodes de travail du groupe
III - Les problèmes de l'analyse
IV - Calculatrices de poche et enseignement des mathématiques

2 SUITES : UNE PREMIERE APPROCHE

Introduction
I - Activités mathématiques élémentaires sur les suites de nombres
II - Etude de suites qui convergent vers 0
III - Etude de suites convergeant vers une limite finie
IV - Etude des suites divergentes
Annexe
V - Approximation de $\sqrt{2}$
VI - Notice bibliographique, historique et épistémologique

3 CALCUL DE VALEURS APPROCHEES D'INTEGRALES

Introduction
I - Quelques méthodes d'approximation
II - Majoration des erreurs
III - Quelques applications numériques
IV - Notice bibliographique, historique et épistémologique

4 RESOLUTION DE L'EQUATION $f(x) = x$ PAR APPROXIMATIO
SUCCESSIVES

Introduction
I - Etude de l'existence et unicite d'une solution et de sa stabilité
II - Etude de la rapidité de convergence
III - Accélérations de convergence
Annexes
IV - Notice bibliographique, historique et épistémologique

BIBLIOGRAPHIE

Bulletin

inter.I.R.E.M.

N° 15 SPECIAL AUDIO-VISUEL
56 pages - PRIX : 6 F.

N° 16 SPECIAL COPIRELEM
(Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire)
47 pages - PRIX : 7 F.

N° 17 LES I.R.E.M. : MISSIONS ET ACTIVITES
56 pages - PRIX : 7 F.

N° 18 HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ET EPISTEMOLOGIE
66 pages - PRIX : 7 F.

BULLETIN DE COMMANDE

N O M : .... Prénom ....

ETABLISSEMENT :

Intitulé exact : ....

....

Adresse : ....

....

Commande les ouvrages suivants :

☐ CALCUL DES PROBABILITES ET ARITHMETIQUE :
Indépendance et multiplicativité restreinte
Prix 2,50 F. nombre d'exemplaires ☐

☐ ANALYSE 1
Prix 8 F. nombre d'exemplaires ☐

☐ BULLETIN INTER-IREM

numéro :	15 ☐	16 ☐	17 ☐	18 ☐
nombre d'exemplaires :	☐	☐	☐	☐

Ci-joint Chèque bancaire ☐ / Chèque postal ☐ de .... F.

à l'ordre de : M. l'Agent Comptable de l'Université d'Aix-Marseille II

à adresser à : M. le Directeur de l'I.R.E.M.
Service des Publications
70, route Léon Lachamp
13288 - MARSEILLE CEDEX 2

Date : .... Signature :

OBJETS GEOMETRIQUES EN CLASSE DE CINQUIEME

* *
*

Gilles THOMAS

Le présent article prend place dans le programme actuel de la classe de cinquième, plus particulièrement dans la partie IV intitulée "OBSERVATION D'OBJETS GEOMETRIQUES ET PHYSIQUES", paragraphe 3 (observation d'objets tels que cubes, prismes droits, etc..., plan tangent en un point).

Que signifie "observer" en classe de cinquième ? Le Petit Larousse illustré 1980 précise : "observer : considérer avec attention, étudier".

La lecture des objectifs et instructions accompagnant le programme de cinquième permet d'imaginer ce que les auteurs de ce programme entendent - peut-être - par "observation d'objets"; on peut en effet relever les notions suivantes :

- "... décrire un objet mathématique..."
- "... observation que l'élève communique par le dessin, le langage écrit..."
- "... connaissance des objets mathématiques usuels... observation... vocabulaire précis... mesures... calculs..."

Quant à l'"élève moyen", il est écrit qu'il devra "connaître le vocabulaire de la géométrie de l'espace, la pratique des formules : aires, volumes usuels".

Enfin, on parle beaucoup d'acquisition de "savoir-faire".

A propos de ce chapitre IV, il est possible effectivement de faire acquérir aux élèves de la classe de cinquième de nombreux "savoir-faire", à condition de ne pas se contenter seulement de "considérer avec attention" quelques objets présentés comme en un musée.

I - QUELQUES SAVOIR-FAIRE

On pense en premier lieu au SAVOIR-OBSERVER, mais il n'y a pas de bon SAVOIR-OBSERVER s'il n'y a pas de SAVOIR-DECRIRE. Les actuels manuels de cinquième n'insistent pas assez sur ce dernier savoir-faire.

Pour acquérir un bon Savoir-observer n'est-il pas aussi nécessaire de SAVOIR-REPRODUIRE, de SAVOIR-CONSTRUIRE, et de SAVOIR-DESSINER ?

Enfin, la pratique des formules doit conduire naturellement au SAVOIR-CALCULER.

La technique des Travaux Pratiques se prête assez bien à l'acquisition de ces savoir-faire. Les quelques textes de Travaux Pratiques qui suivent, effectivements réalisés en classe de cinquième, peuvent donner une idée de ce qui peut être fait pour permettre aux élèves d'acquérir ces savoir-faire.

II - PRESENTATION DES TRAVAUX PRATIQUES

Le texte d'un T.P. étant distribué aux élèves, le travail doit être effectué pour la semaine suivante. Ce travail est réalisé à la maison mais le professeur intervient tout au long de la semaine pour aider chaque élève à progresser dans la construction, le dessin, la rédaction, les calculs.

Chaque texte de T.P. comprend quatre parties :

1) Réalisation de la construction.
2) Dessins. Voir page 33.
3) Description de l'objet.
4) Calculs.

A la fin de la semaine, l'élève remet :

- sa construction réalisée en carton ;
- une feuille traitant les trois autres parties.

Il peut utiliser, en le précisant, les documents qu'il a à sa disposition : livre de mathématiques, dictionnaire, encyclopédie, "aide parentale", etc. mais tout ceci est sous le contrôle du professeur. Ce travail n'est donc pas fait entièrement hors des trois heures de cours de mathématiques mais prend quelques minutes à chaque cours dans le courant de la semaine où se réalise le T.P.

III - ANALYSE DU TEXTE

Examinons chacune des quatre parties du texte qui accompagne le patron des T.P. proposés, en dégageant les différents savoir-faire mis en évidence :

1) *Reproduire le patron sur le carton après avoir modifié les dimensions, découper, plier, coller.*

- SAVOIR-CALCULER : il s'agit de changements d'échelle assez simples.
- SAVOIR-REPRODUIRE : des difficultés géométriques pour la reproduction apparaissent dès le T.P. n° 3. Un travail de réflexion et de recherche est nécessaire.
- SAVOIR-CONSTRUIRE : l'objet géométrique est ainsi créé et ses propriétés plus concrétisées.

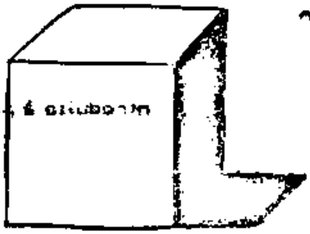
2) *Dessin d'art, dessin géométrique*

- SAVOIR-DESSINER

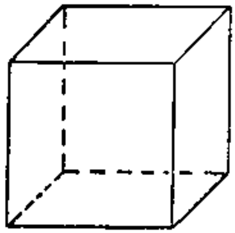
Ce qui est appelé ici dessin d'art n'est rien d'autre que le dessin de l'objet construit tel qu'on le voit. La perspective est donc à points de fuite. Ce dessin est réalisé au crayon, sans règle.

Le dessin géométrique est réalisé avec soin, avec l'aide des instruments utiles, en perspective cavalière. Les propriétés géométriques (parallélisme par exemple) doivent être conservées par le dessin, toutes les arêtes doivent être dessinées ; traits pleins et pointillés aidant à la compréhension de la figure.

exemple (T.P. n° 1) :



dessin d'art



dessin géométrique

3) Description complète de l'objet géométrique

- SAVOIR-DECRIRE : c'est le savoir-faire le plus difficile à acquérir, surtout si l'on exige une rédaction correcte et un vocabulaire précis dès le début de cette série de T.P.

Cette description doit porter sur le nombre d'éléments (sommets, arêtes, faces, ...) et leurs propriétés.

L'élève doit être dans la situation d'expliquer "comment est fait" le solide à un autre élève qui ne le verrait pas et qui ne l'aurait pas construit.

Laissons le soin au lecteur d'imaginer quelques expériences-tests frappantes à ce sujet, lorsqu'il dispose de deux classes parallèles...

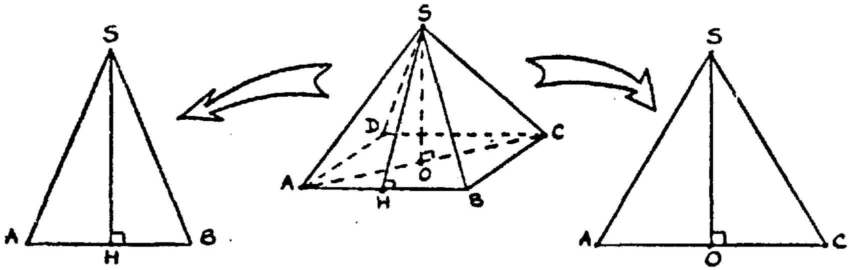
Les notions de révolution, de génératrices, etc. doivent intervenir naturellement dans cette progression de T.P. au fur et à mesure que se compliquent les constructions ; certains élèves éprouvent le besoin d'expliquer comment on peut, géométriquement, créer (engendrer) le solide.

4) Calcul d'aires, de volumes

- SAVOIR-CALCULER : il s'agit en fait de pratique de formules, d'applications numériques et surtout d'encadrements.

La notion d'encadrement est ainsi introduite à partir de mesures effectuées par l'élève.

. Les dimensions du patron sont toujours précisées. L'élève doit donc encadrer, pour la première fois, une mesure lors du T.P. n° 3. En effet, pour calculer l'aire latérale et le volume de la pyramide à base carrée, il est nécessaire de reproduire un triangle isocèle de dimensions données et de mesurer la longueur de sa hauteur principale.



Cette mesure étant encadrée, il s'en déduit un encadrement pour le résultat, cette démarche n'est pas facilement maîtrisée par les élèves de la classe de cinquième au début de cette progression de T.P., mais l'acquisition, à ce niveau, de ce savoir-faire doit, plus tard, porter ses fruits dans les exercices d'analyse numérique.

Notons enfin qu'il est intéressant de donner, pour le nombre π, des encadrements différents d'un T.P. au suivant pour amener l'élève à une réflexion sur la notion de précision des mesures et des calculs numériques.

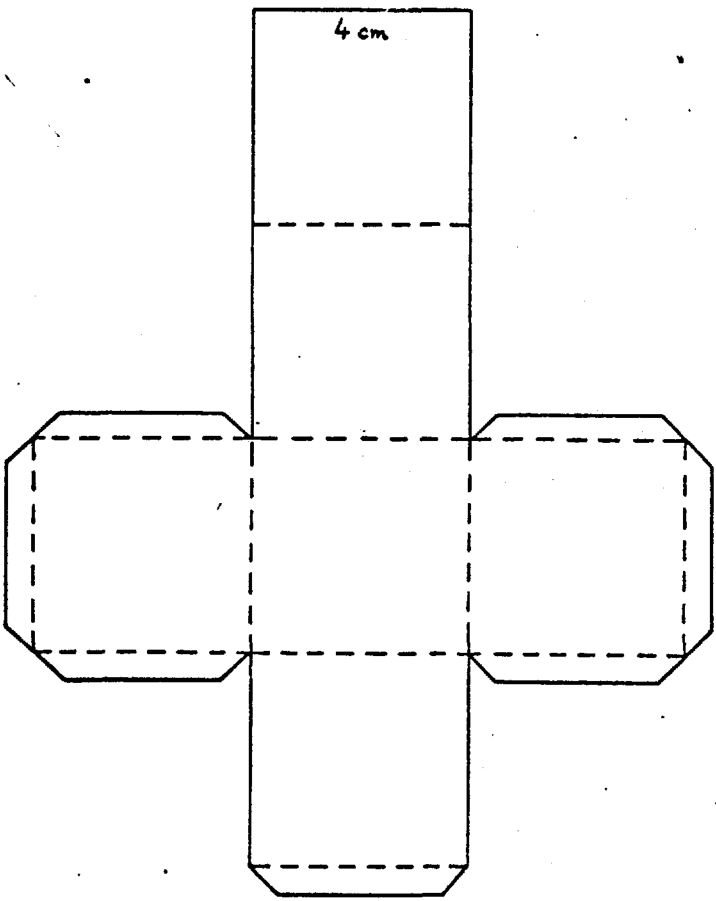
IV - QUELQUES EXEMPLES DE T.P.

Les six exemples qui suivent, extraits d'une série plus complète de Travaux Pratiques précisent la progression proposée à l'élève.

NDLR : Les dimensions réelles sont indiquées mais pour des raisons de mise en pages, chaque feuille de T.P. a été réduite.

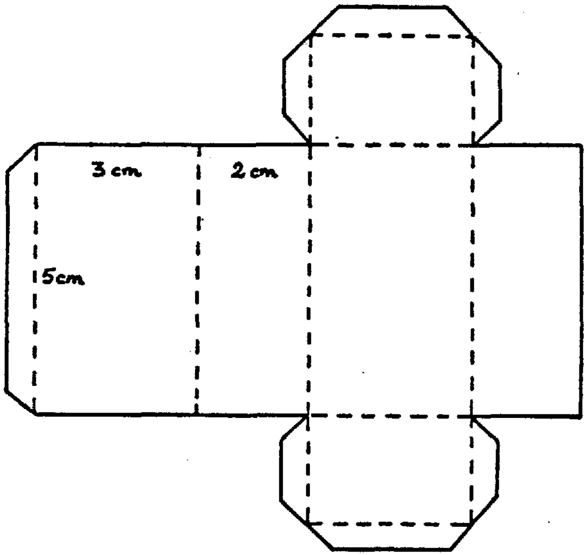
TRAVAUX PRATIQUES n° 1

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avour multiplié toutes les dimensions par 1,5.
   Découper, plier, coller.
2) Dessin d'art, dessin géométrique.
3) Nom et description complète du solide.
4) Calcul de l'aire totale et du volume.



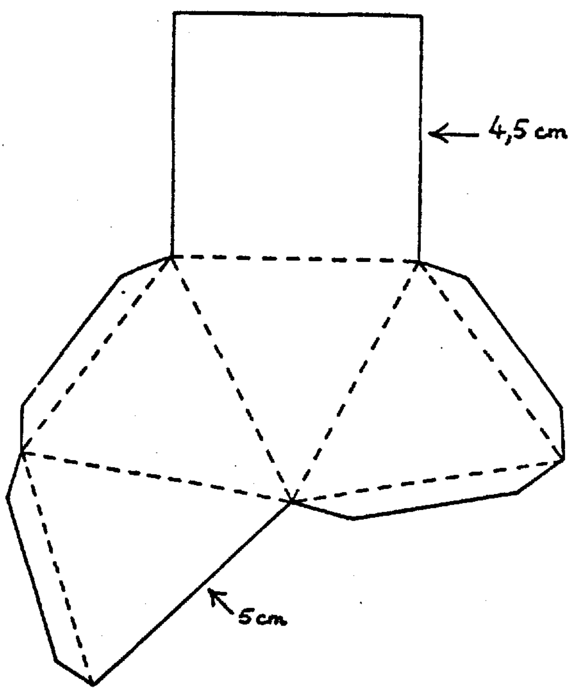
TRAVAUX PRATIQUES n° 2

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avour multiplié toutes les dimensions par 2,2.
   Découper, plier, coller.
2) Dessin d'art, dessin géométrique.
3) Nom et description complète du solide.
4) Calcul de l'aire totale et du volume.



TRAVAUX PRATIQUES n° 3

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avoir multiplié toutes les dimensions par 1,2.
   Découper, plier, coller.
2) Dessin d'art, dessin géométrique.
3) Nom et description complète du solide.
4) Calcul de l'aire totale et du volume.



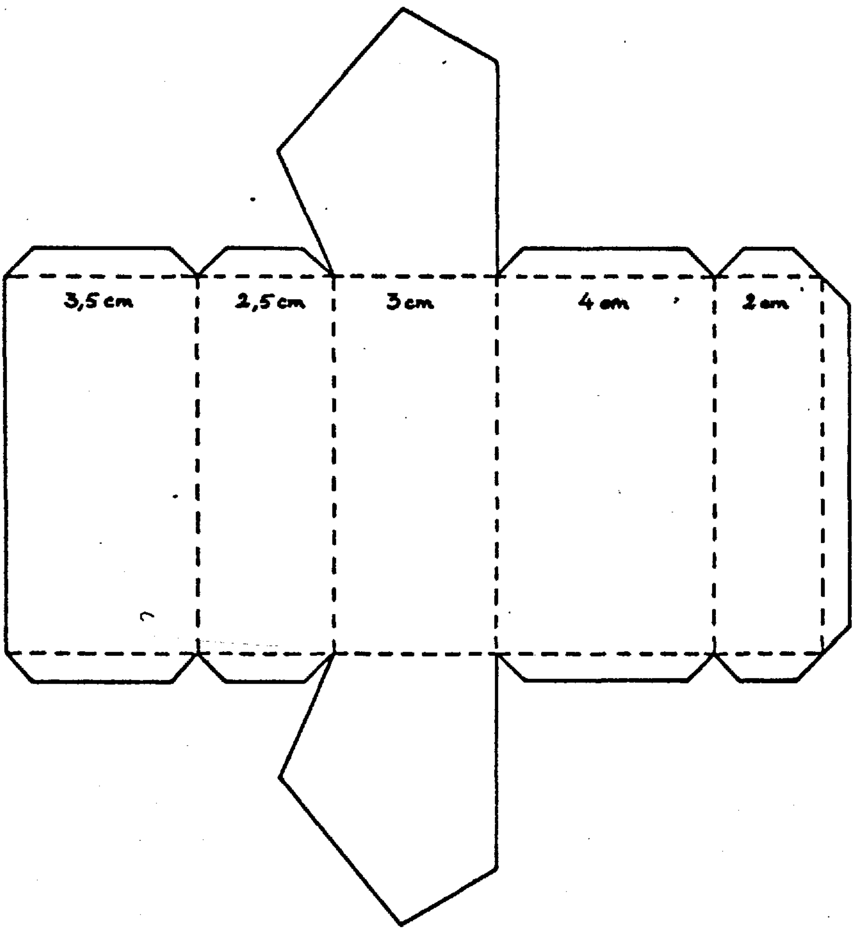
TRAVAUX PRATIQUES n° 4

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avoir multiplié toutes les dimensions par 1,4.
   Découper, plier, coller.

2) Dessin d'art, dessin géométrique.

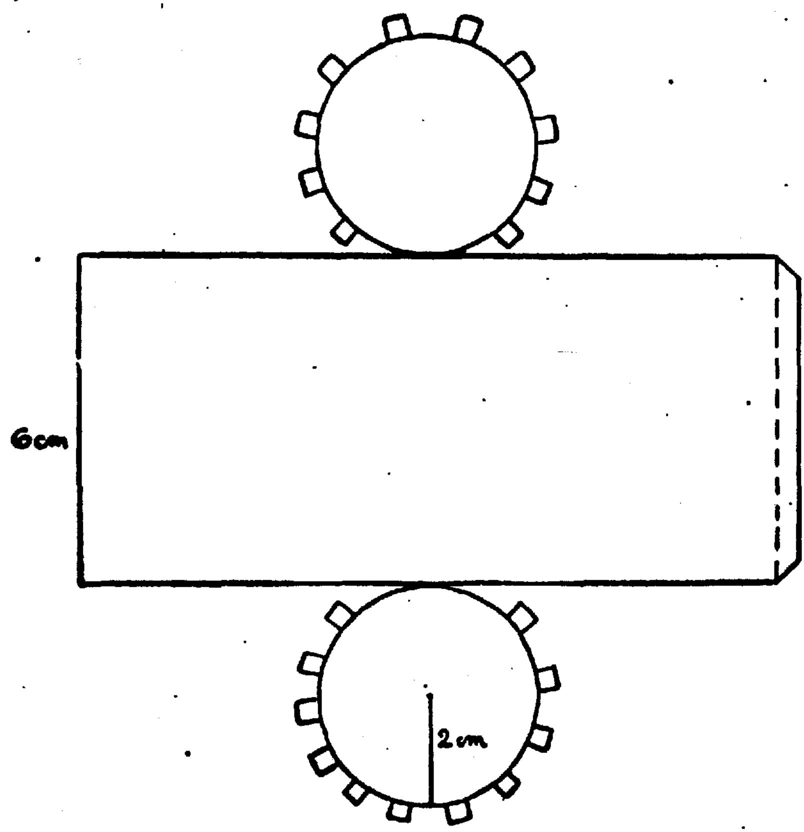
3) Nom et description complète du solide.

4) Calcul de l'aire latérale, de l'aire totale et du volume.



TRAVAUX PRATIQUES n° 5

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avoir multiplié toutes les dimensions par 1, 6.
   Découper, plier, coller.
2) Dessin d'art, dessin géométrique.
3) Nom et description complète du solide.
4) Calcul de l'aire latérale, de l'aire totale et du volume.
   On donne $3,14 < \pi < 3,15$.



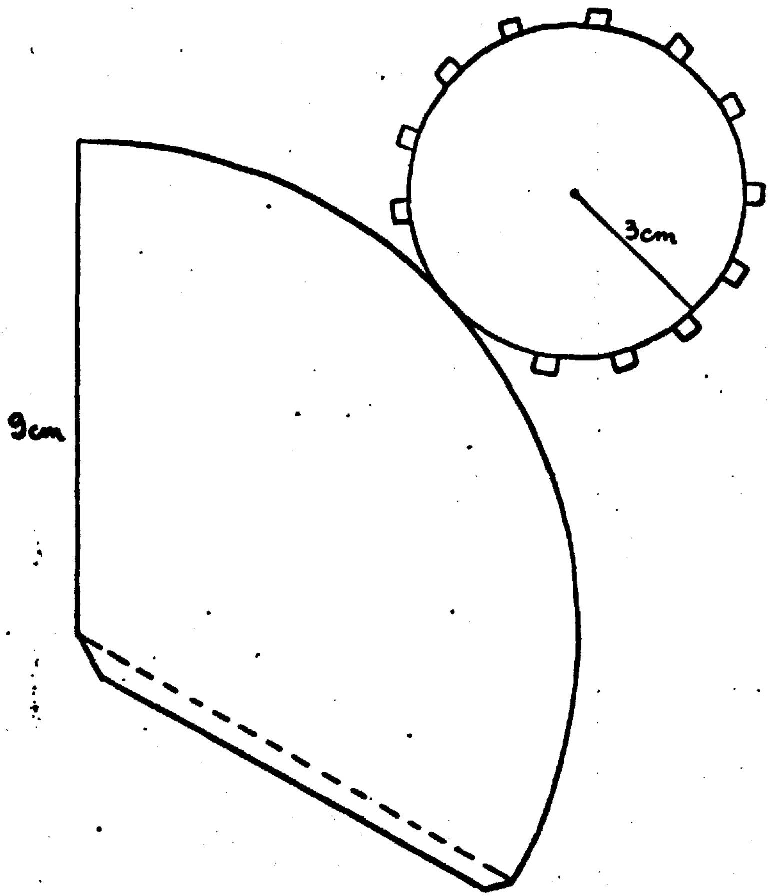
TRAVAUX PRATIQUES n° 6

1) Reproduire, sur le carton, le patron ci-dessous après avoir multiplié toutes les dimensions par 0,8.
   Découper, plier, coller.

2) Dessin d'art, dessin géométrique.

3) Nom et description complète du solide.

4) Calcul de l'aire latérale, de l'aire totale et du volume.
   On donne $3,1415 < \pi < 3,1416$.



V - DEUX EXEMPLES DE PROLONGEMENT POSSIBLE

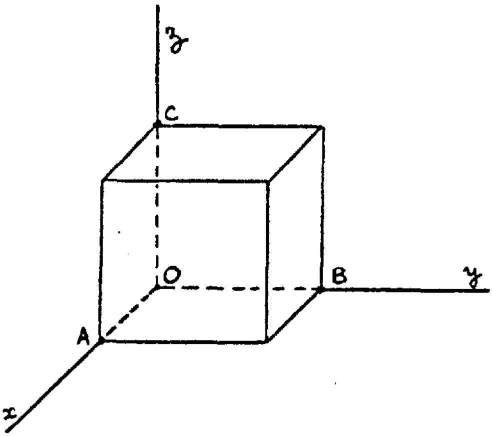
1 - Pour apprendre à bien VOIR les sections planes de solides géométriques

Il s'agit d'un exemple d'exercice de recherche, de dessin et de représentation dans l'espace.

Représentons un COIN de l'espace : figure formée par trois demi-droites de même origine, orthogonales deux à deux : [Ox), [Oy), [Oz).

Plaçons les points A, B, C respectivement sur [Ox), [Oy), [Oz) et équidistants de O.

Complétons la représentation du cube déterminé par les arêtes [O,A], [O,B] et [O,C] en respectant le code "traits pleins-pointillés" du dessin géométrique.



Le but de l'exercice est de couper le cube ainsi construit par un plan déterminé par trois points distincts P, Q, R tels que :

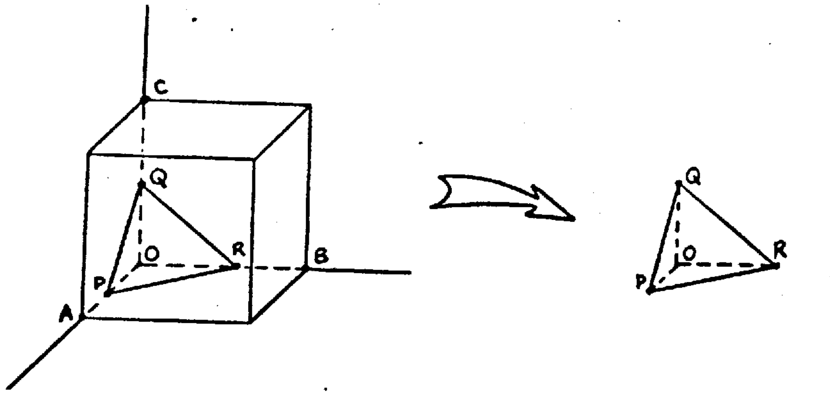
$P \in [Ox)$, $Q \in [Oy)$, $R \in [Oz)$,

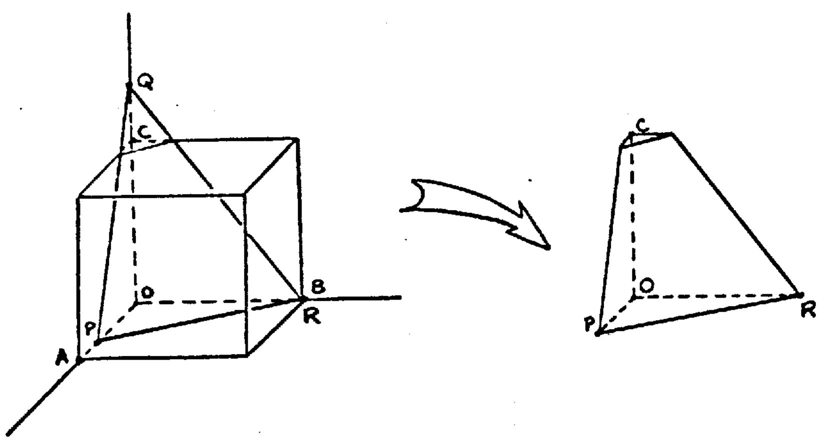
et de dessiner celle des deux parties du cube ainsi déterminées qui contient le point O.

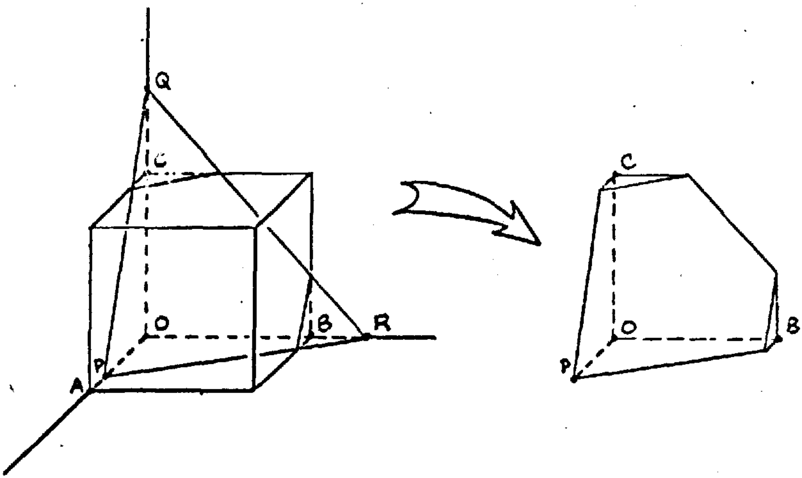
En faisant varier les points P, Q, R sur leur demi-droite respective, on obtient plusieurs sortes de solides géométriques.

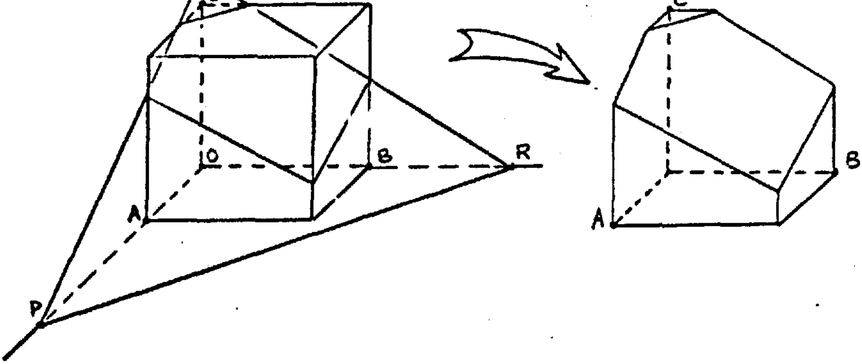
Il est intéressant alors de les dessiner tous, de les décrire, de rechercher le nombre et la forme de leurs faces, de trouver le nom de chaque solide, etc...

Quelques exemples :






Q
C
O
B
R
P
A
C
O
B
P


Q
C
O
B
R
A
P
C
B
A

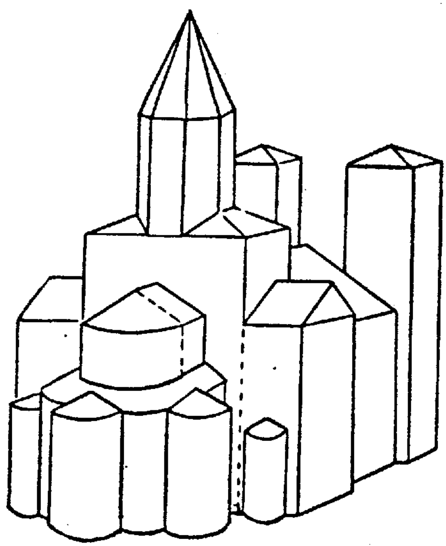
2 - Pour travailler en interdisciplinarité

Mathématiques, Français, Histoire, Dessin, Travaux Pratiques, cinq disciplines peuvent être réunies en classe de cinquième pour réaliser une maquette en carton de l'église de St Nectaire (Puy-de-Dôme).

En simplifiant l'architecture de ce bel édifice d'art roman, en donnant des dimensions réduites sous forme de nombres simples, il est très facile, avec des solides géométriques étudiés dans la progression des Travaux Pratiques précédents, de composer une telle maquette en carton, en plaçant cette activité au sein d'une expérience interdisciplinaire sur l'art roman.

A partir d'un croquis et des dimensions, un autre intérêt de cette activité est d'amener les élèves, en Travaux Manuels, à la notion de développement d'un solide géométrique.

On reconnaitra sur le croquis ci-dessous les solides utilisés.



VI - CONCLUSION

Oui, cela prend du temps !

Mais n'est-il pas important d'insister, en classe de cinquième, sur cette partie de géométrie dans l'espace ?

Nos collègues physiciens constatent avec amertume que nos élèves de Terminale savent faire, quelquefois, de belles démonstrations dans E_3, $\mathcal{E}_3$, $\vec{E}_3$ et autres "eutrois"..., mais ne savent pas s'orienter dans l'espace réel dans lequel nous vivons et ne peuvent pas concevoir une figure dite "dans l'espace".

Souhaitons simplement que cet apprentissage à ce niveau soit une modeste contribution à la recherche du remède.

GEOMETRIE EUCLIDIENNE : LES REFLEXIONS

* *
*

J. MARION

INTRODUCTION

a) L'étude des productions artistiques des civilisations de la protohistoire et de l'antiquité montre que les deux moyens fondamentaux pour organiser une portion d'espace aux points de vue à la fois structurel, esthétique, et probablement mystique, ont consisté en des procédures de reproduction d'un objet ou d'un motif ; soit on "répète" cet objet de manière "régulière" en conservant son "image", et ceci de manière indéfinie ; soit on reproduit cet objet après "retournement" de l'image (cf [12] et [13]).

Dans le premier cas se manifeste la périodicité liée aux itérées d'une translation ; dans le second cas se manifeste une symétrie orthogonale par rapport à une variété de codimension 1, c'est à dire ce que mathématiciens et physiciens appellent une réflexion.

b) Dans une étude ultérieure nous aborderons le thème de la périodicité dans ses aspects à la fois spatial et temporel. En ce qui concerne les réflexions, il convient aussi de noter que la nature fourmille d'objets que, dès notre tendre enfance, notre regard a recensé comme objets "symétriques" : le corps d'un être humain, un oeuf, une feuille de platane, un cristal de gypse ou de quartz en sont des manifestations familières. De même la production technique de l'homme : marteau, chaise ou lampe électrique, paire de chaussures ou lavabo, manifeste l'omniprésence des axes ou plans de symétrie.

C'est dire que le concept de symétrie, et plus particulièrement celui de réflexion semble appartenir à un patrimoine génétique culturel universel.

c) L'étude qui suit est centrée sur le thème des réflexions.

Elle consiste en une analyse de caractère scientifique et épistémologique conduite dans l'esprit développé en [9]. Cette analyse porte sur les différents aspects du fonctionnement du concept de réflexion et de ses modalités d'interventions. Elle éclaire et justifie la place essentielle de ce thème en géométrie (par la diversité des problèmes qu'il permet d'aborder et des méthodes d'attaque de ces problèmes) qui mérite mieux que la congruité de la portion qui lui est trop souvent accordée actuellement dans l'enseignement.

Analyse théorique de caractère scientifique et didactique du concept de réflexion.

I - PRELIMINAIRES

Cette étude s'est appuyée sur des documents de deux types : d'une part des ouvrages à vocation purement scientifique qui développent et approfondissent le concept de réflexion dans ses aspects algébrique, géométrique et topologique ; d'autre part des ouvrages qui ont été rédigés par des mathématiciens contemporains de premier plan, portant sur la géométrie, et qui ont une vocation didactique affirmée ; l'analyse du rôle des réflexions dans ce dernier type de documents permet d'expliciter comment se situe, chez ces grands mathématiciens, le concept de réflexion.

Au nombre de ces documents il convient d'emblée de citer explicitement :

M. BERGER : "Géométries", t. I et II, Cedic (1977) ;

N. BOURBAKI : "Groupes et algèbres de Lie", Chap. 4-5-6, Hermann (1968) ;

H.S.M. COXETER : "Introduction to geometry", John Wiley & Sons, New-York (1969) ;

J. DIEUDONNE : "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", Hermann (1964) ;

D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN : "Geometry and the imagination" Chelsea Publishing Company, New-York (1952) ;

H. WEYL : "Symmetry" Princeton University Press, Princeton (1952).

II - DES REFLEXIONS

1) La démarche souvent adoptée pour étudier un groupe d'isométries d'un espace (vectoriel ou affine) euclidien consiste à s'intéresser a priori aux isométries involutives et, parmi celles-ci, de considérer en particulier celles dont le sous-espace des éléments invariants est de codimension 1 ; ensuite on compose ces objets, on s'efforce ensuite de montrer que toute isométrie peut se décomposer en un produit de réflexions.

Cette démarche est discutable à la fois au plan didactique et au plan scientifique :

- au plan didactique cette démarche ne peut trouver en elle-même sa justification et sa motivation ; elle repose sur l'idée que le fait d'être involutive est l'essentiel des propriétés des réflexions ; enfin elle ne débouche sur aucune problématique ;
- au plan scientifique et épistémologique le caractère artificiel de cette démarche occulte l'essentiel, ou plus exactement l'essence même de ce qu'est une réflexion à savoir que :

(★) <u>les réflexions sont les isométries qui, exceptée l'application identique, laissent le plus d'éléments fixes.</u>

L'ensemble des éléments invariants étant nécessairement alors un hyperplan, il y a lieu de mettre en exergue une idée concomittante :

(★★) <u>qui dit réflexion dit hyperplan et réciproquement</u>.

Le fait que ces objets s'avèrent être involutifs est certes fort intéressant, mais ce n'est pas cette propriété des réflexions qui justifie de manière essentielle leur rôle.(★)

Ce sont les idées exprimées en (★) et (★★) qui justifient l'étude de l'outil "réflexion" en géométrie euclidienne, que ce soit dans l'étude des isométries, dans la géométrie des hyperplans, dans la recherche des groupes d'isométries laissant invariants des configurations données, que ce soit dans l'élaboration de méthodes d'attaques de problèmes relatifs à ces types d'activités.

2) En outre la démarche est naturelle : lorsque l'on veut étudier une classe de transformations, s'il ne parait pas naturel de commencer à étudier celles qui sont involutives, il est par contre naturel de commencer à étudier celles qui changent le moins de choses : il est raisonnable de penser que plus le chambardement est grand, plus complexe doit être son effet.

(★) Ainsi l'étude des générateurs du groupe linéaire GL(E) fait intervenir des transformations qui fixent un hyperplan telles les transvections, qui ne sont pas involutives.

Ainsi la démarche devient explicite : "je désire étudier les isométries ; pour cela je vais rechercher et étudier les plus simples : celles qui laissent fixes le plus d'éléments possibles ; comme je découvre aisément que l'ensemble des éléments fixes d'une isométrie est nécessairement un sous-espace, je vais tout d'abord étudier celles qui laissent fixes les éléments d'un sous-espace de plus grande dimension possible ; c'est-à-dire d'un hyperplan".

III - DES PROBLEMATIQUES LIEES AUX REFLEXIONS

Ces problématiques, et par voie de conséquence, la justification de l'étude approfondie de l'outil des réflexions, résultent des points-clefs suivants :

a) La donnée d'un hyperplan H d'un espace euclidien est équivalent à la donnée de la réflexion s_H associée ; mais qui dit hyperplan H, dit partition de l'espace en 3 zones H^+, H et H^-, H^+ et H^- étant séparées en ce sens que H constitue un obstacle fondamental pour aller continuement de H^+ à H^- ou de H^- à H^+ ; d'un autre côté s_H est une bijection de H^+ sur H^- et de H^- sur H^+.

b) La donnée d'une famille finie d'hyperplans conduit à l'obtention d'un groupe d'isométries : celui engendré par les réflexions associées à ces hyperplans.

c) Si une configuration $\mathcal{F}$ admet un hyperplan de symétrie H, il suffit de connaître $\mathcal{F} \cap H^+$ et $\mathcal{F} \cap H$ pour connaître entièrement $\mathcal{F}$.

Ces considérations permettent d'associer au thème des réflexions 5 types d'activités :

1) l'étude de l'outil des réflexions ;
2) l'étude de groupes d'isométries déterminés par la donnée d'une famille finie d'hyperplans ;
3) la détermination du groupe d'isométrieslaissant invariant une configuration donnée, et des invariants associés ;

4) la recherche des symétries d'une courbe ou d'une surface ;

5) la recherche de lignes polygonales de plus courte longueur dont les sommets appartiennent à des hyperplans donnés.

Avant d'aller plus loin notons que le concept de réflexion fonctionne aussi bien dans le domaine vectoriel euclidien que dans le domaine affine euclidien ; le choix du terrain (points ou vecteurs) pour résoudre un problème est affaire uniquement d'efficacité et d'opportunité, et non affaire idéologique, structuraliste ou autre (cf [9]).

IV - DE L'OUTIL DES REFLEXIONS

L'étude et le développement de l'outil des réflexions va de pair avec un approfondissement du concept d'hyperplan et de ses interventions. Quels sont les points-clefs ?

a) Pour déterminer un hyperplan H d'un espace vectoriel euclidien E doté du produit scalaire $<\ ,\ >$ et de la norme $\|\ \|$, il est commode de se donner une forme linéaire non nulle φ sur E, ou encore un vecteur $\vec{a}$ non nul de E, la relation entre ces 3 données étant décrite par les égalités : $H = \ker \varphi = \{\vec{a}\}^{\perp}$, ou si l'on préfère :

$H = \{\vec{x} \in E / \varphi(\vec{x}) = 0\} = \{\vec{x} \in E / < \vec{a}, \vec{x} > = 0\}$. La donnée d'un vecteur non nul $\vec{a}$ orthogonal à H permet d'écrire immédiatement la somme directe :

($\star$) $E = H \oplus R\vec{a}$, chacun des 2 sous-espaces facteurs étant l'orthogonal l'un de l'autre.

b) Restant toujours dans le cadre vectoriel, l'étude du fonctionnement de s_{H}, la réflexion par rapport à l'hyperplan H découle de la recherche des isométries autres que l'identité I qui laissent les éléments de H invariants : si σ est une telle isométrie, pour un vecteur $\vec{x} \notin H$ on doit avoir $\sigma(\vec{x}) \neq \vec{x}$; d'après ($\star$), il suffit de connaître $\sigma(\vec{a})$; or σ conservant l'orthogonalité on doit avoir $\sigma(\vec{a}) \in (\sigma(H))^{\perp} = H^{\perp}$; donc $\sigma(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$; or $\|\sigma(\vec{a})\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$ doit être égal à $\|\vec{a}\|$; donc $|\lambda| = 1$, et comme $\lambda \neq 1$ (sinon σ serait l'identité) dest que $\lambda = -1$. Ceci décrit le fonctionnement de s_H : si $\vec{x} = \vec{h} + \lambda\vec{a}$, $\vec{h} \in H$, alors $s_H(\vec{x}) = \vec{h} - \lambda\vec{a}$.

On en déduit de manière triviale que $s_H^2 = I$, soit $(s_H - I).(s_H + I) = \underline{O}$, ce qui permet d'affirmer que s_H étant donnée, $H = \ker(s_H - I)$, $H^\perp = \ker(s_H + I)$.

c) On en profite pour constater que si p_H désigne la projection orthogonale sur H on a :

$$p_H = \frac{1}{2}(s_H + I) \quad \text{ou encore} \quad s_H = 2p_H - I ,$$

observation qui conduit d'une part à la mise en évidence de la trialité $H \leftrightarrow p_H \leftrightarrow s_H$, d'autre part à une expression intrinsèque de s_H : $\vec{a}$ étant un vecteur quelconque non nul de l'orthogonal de H, on a :

$$s_H(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{<\vec{a}, \vec{x}>}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \quad , \forall \vec{x} \in E \quad .$$

(Pour une exploitation approfondie de cette formule on pourra consulter [10]).

d) Dans le cas d'un espace affine euclidien, le choix, une fois pour toutes d'une origine 0, permet de ne considérer que les hyperplans affines d'un espace vectoriel, et tout ce que l'on a vu dans le cas vectoriel s'applique encore ici. Ainsi si m est un point de l'espace E, H un hyperplan de E, ω un point de H, p un point de $E - H$ dont la projection orthogonale est ω, on aura

$$m' = s_H(m) \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega m'} = \omega m - 2 \frac{<\overrightarrow{\omega m}, \overrightarrow{\omega p}>}{\|\overrightarrow{\omega p}\|^2} \overrightarrow{\omega p} \Leftrightarrow H \text{ est le plan médiateur}$$

de $[m, m']$.

e) L'étude de l'outil des réflexions comprend en outre l'étude de l'effet d'une réflexion sur une configuration et sur des concepts qui lui sont attachés ; ainsi :

- l'effet d'une réflexion s_H sur un vecteur non nul $\vec{x}$: $\vec{x}$ et $s_H(\vec{x})$ ont même norme, et H est l'hyperplan médiateur du couple de vecteurs $(\vec{x}, s_H(\vec{x}))$; réciproquement, étant donnés 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ de même norme, il existe une réflexion s_H et une seule telle que $\vec{v} = s_H(\vec{u})$.

- de même étant donné 2 hyperplans H_1, H_2 il existe 2 hyperplans H, H' chacun contenant un vecteur orthogonal à l'autre tels que $s_H(H_1) = H_2$ et $s_{H'}(H_1) = H_2$: les plans bissecteurs du dièdre (H_1, H_2).

Evidemment toute réflexion a les propriétés générales des isométries : conservation de l'orthogonalité, de la norme, de la distance, du centre de gravité, des mesures arithmétiques des angles et des aires, du parallélisme, transforme un cercle en un cercle de même rayon, etc.

Un point important est de montrer qu'une réflexion inverse l'orientation de l'espace : soit s_H une réflexion, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ une base orthonormée de H, e_n un vecteur unitaire de $H^\perp$: alors $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de l'espace et,
$s_H(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1}, -\vec{e}_n)$ ce qui démontre à la fois que s_H inverse l'orientation et que $\det(s_H) = -1$.

f) Enfin il y a lieu de s'intéresser à la composée de 2 réflexions.

- Ainsi si H et H' sont 2 hyperplans affines parallèles, et si $\vec{u}$ est le vecteur tel que $H' = t_{\vec{u}}(H)$, alors $s_{H'} \cdot s_H = t_{2\vec{u}}$

- *Ainsi si H et H' sont 2 hyperplans concourants distincts et si θ est* l'angle du dièdre (H, H') et $\Omega = H \cap H'$ alors $s_{H'} \cdot s_{H'}$ est la rotation plane d'"axe" Ω et d'angle θ.

La réciproque est un résultat fondamental : toute isométrie peut s'obtenir comme un produit d'un nombre fini de réflexions, ce nombre étant pair si l'isométrie est un déplacement.

Un cas intéressant est celui où 2 réflexions commutent : $s_{H'} \cdot s_H + s_H \cdot s_{H'}$; on en déduit que $s_H \cdot s_{H'}$ est elle-même involutive et que c'est un déplacement dont le sous-espace des éléments invariants est de codimension 2, c'est-à-dire un demi-tour : *ainsi sont les symétries* centrales du plan euclidien, ou les symétries axiales dans l'espace euclidien de dimension 3.

Pour une étude approfondie de l'outil des réflexions on pourra consulter :

[5] : § 2-4, § 2-5, § 2-6, § 3-1, § 3-2, § 3-3, § 3-4, § 3-5.

[3] : chap V, § 1 et § 2.

V - DES GROUPES D'ISOMETRIES ENGENDRES PAR DES REFLEXIONS

a) La donnée d'une famille finie $H_1, H_2, \dots, H_p$ d'hyperplans d'un espace euclidien de dimension finie conduit à deux problématiques : détermination et étude du groupe d'isométries engendré par les réflexions $s_i = s_{H_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$, et étude de la géométrie du regionnement de l'espace défini par cette famille d'hyperplans. Supposons, pour fixer les idées, que $H_1, \dots, H_p$ soient des hyperplans affines d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n ; pour chaque indice $i = 1, 2, \dots, p$ il existe une application, nécessairement continue, $\lambda_i : E \to R$ telle qu'il existe une forme linéaire non nulle μ_i sur E et un nombre k_i vérifiant :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \lambda_i(\vec{x}) = \mu_i(\vec{x}) - k_i \quad \text{et} \quad H_i = \ker \lambda_i \quad .$$

Notons $I_p = \{1, 2, \dots, p\}$, et $P(I_p)$ l'ensemble des parties de I_p.

Pour tout élément $\vec{x}$ de $E - \bigcup_{i=1}^{i=p} H_i$, $\lambda_i(\vec{x}) \neq 0 \ \forall i \in I_p$. A toute partie A de I_p associons alors l'ensemble

$${}_A = \{\vec{x} \in E / \lambda_i(\vec{x}) > 0 \quad \forall i \in A, \quad \lambda_i(\vec{x}) < 0 \quad \forall i \in I_p - A\} \ ;$$

notons qu'on peut avoir $\mathcal{C}_A = \emptyset$, mais dans tous les cas

$$\mathcal{C}_A \subset E - \bigcup_{i=1}^{i=p} H_i \quad \text{et} \quad E - \bigcup_{i=1}^{i=p} = \bigcup_{A \in P(I_p)} \mathcal{C}_A \ ;$$

en outre si 2 parties A et B de I_p sont distinctes, $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B = \emptyset$; les $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$, $A \in P(I_p)$ réalisent une partition de $E - \bigcup_{i=1}^{i=p} H_i$, dont les éléments en sont les composantes connexes, et ces composantes connexes sont convexes.

Soit G le groupe d'isométrie engendré par les s_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$; comme chaque $\mathcal{C}_A$ est, $\forall i \in I_p$, soit dans H_i^+ soit dans H_i^-, on en déduit que G opère sur l'ensemble des composantes connexes de $E - \bigcup_{i=1}^{i=p} H_i$; cette action est déterminante aussi bien pour l'étude des algèbres de Lie semi-simples qu'en recherche opérationnelle.

b) L'étude de tels groupes est indispensable pour mener à bien la recherche des groupes d'isométries laissant invariante une configuration.

Il est clair que le groupe engendré par une seule réflexion est d'ordre 2 ; il se réduit à $\{I, s_H\}$, et le sous-groupe des déplacements à $\{I\}$.

Le cas des groupes engendrés par 2 réflexions $s_H, s_{H'}$ est fondamental ; de tels groupes sont dits des groupes diédraux :

- si H et H' sont des hyperplans parallèles, et si $\vec{u}$ est le vecteur tel que $H' = t_{\vec{u}}(H)$, alors le groupe $G_{H,H'}$ engendré par s_H et $s_{H'}$ est d'ordre infini et le sous-groupe des déplacements est isomorphe au Z-module $\{\vec{x} = 2n\vec{u},\ n \in Z\}$
- si H et H' sont distincts non parallèles, 2 situations sont possibles : si l'angle θ des hyperplans H et H' a pour mesure un multiple rationnel de $\pi : \theta = \frac{p}{q}\pi$, alors le groupe est fini, sinon il est d'ordre infini.

Un cas également intéressant, cas particulier du précédent, est, dans le plan euclidien, celui où l'on prend 2 droites concourantes d'angle $\theta = \frac{\pi}{p}$: on obtient un groupe D_p d'ordre $2p$, qui est le groupe des isométries laissant invariant un polygone régulier, dont le sous-groupe C_p des déplacements est le groupe des rotations d'angle multiple de $\frac{2\pi}{p}$, isomorphe à Z_p.

Le fonctionnement du kaléidoscope s'explique par l'action sur le plan du groupe D_p. A ce sujet on pourra consulter [4] où est non seulement racontée l'histoire du kaléidoscope et ses procédés de construction, mais encore sa théorie à partir des réflexions. Tous les groupes que l'on obtient ainsi, lorsque les hyperplans sont linéairement indépendants, constituent les groupes de Coxeter. Pour une étude approfondie de ces groupes on peut consulter :

[5] : § 2-5 ; § 2-7, § 2-8 -

[3] : chap 4, § 1 et chap 5, § 3 -

[6] : l'ensemble de l'ouvrage.

D'un point de vue historique il n'est pas inintéressant de savoir que Léonard de Vinci découvrit ainsi tous les groupes finis d'isométries du plan, à savoir les C_p et les D_p ; pour un complément d'information à ce sujet, lire la page 35 de [5].

VI - RECHERCHE DES GROUPES D'ISOMETRIES LAISSANT INVARIANTE UNE CONFIGURATION DONNEE

Etant donnée une configuration $\mathcal{F}$ de l'espace euclidien E, l'ensemble $G(\mathcal{F})$ des isométries de E qui laissent $\mathcal{F}$ invariante est un sous-groupe du groupe des isométries de E ; les éléments d'ordre 2, s'il en existe, de $G(\mathcal{F})$ définissent les symétries de $\mathcal{F}$.

a) Notons d'abord que si $\mathcal{F}$ n'est pas suffisamment régulière, $G(\mathcal{F})$ va se réduire à l'identité. Ainsi supposons que $\mathcal{F}$ soit un triangle (A, B, C) dont les côtés sont 2 à 2 inégaux, par exemple tels que $AB < BC < CA$.

Une élément de $G(\mathcal{F})$ opère nécessairement comme permutation sur l'ensemble $\{A, B, C\}$. Soit donc g un élément de $G(\mathcal{F})$, et soit g sa restriction à $\{A, B, C\}$; g est nécessairement l'une des permutations

$$I : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ A\,B\,C \end{matrix} \;,\quad \alpha_1 : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ B\,A\,C \end{matrix} \;,\quad \alpha_2 : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ A\,C\,B \end{matrix} \;,\quad \alpha_3 : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ C\,B\,A \end{matrix}$$

$$\alpha_4 : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ B\,C\,A \end{matrix} \;,\quad \alpha_5 : \Big\downarrow\begin{matrix} A\,B\,C \\ C\,A\,B \end{matrix}$$

On ne peut avoir $\tilde{g} = \alpha_1$ sinon on aurait AC = BC et $\tilde{g} = \alpha_2$ sinon on aurait AC = AB ; de même on ne peut avoir $\tilde{g} = \alpha_3$ sinon on aurait AB = BC , ou α_4 , sinon on aurait AB = BC , ou α_5 sinon on aurait AB = AC. Finalement la seule possibilité est $\tilde{g} = i$; mais si $g(A) = A$, $g(B) = B$, $g(C) = C$, (A, B, C) étant un repère affine du plan, g laisse tout point du plan fixe ; finalement $G(\mathcal{F}) = \{1\}$.

b) L'étude de $G(\mathcal{F})$ apporte des renseignements sur $\mathcal{F}$; nsi le problème suivant a été posé par les cristallographies : connaissant liste des groupes finis d'isométries de l'espace euclidien E_3, et G étant tel groupe, déterminer les configurations $\mathcal{F}$ telles que $G(\mathcal{F}) = G$; la olution de ce problème passe par une étude approfondie de l'action des 'oupes d'isométries (cf [8], § 12 ; [5], § 4-5 et § 4-6 qui contient luiême une abondante bibliographie ; à cette bibliographie il faut ajouter des émoires originaux de HESSEL, BRAVAIS, HAMILTON et MÖBIUS).

Dans le cas du plan euclidien ce sont les polygones réguliers (étoilés ou pas) et les réseaux plans qui fournissent les configurations $\mathcal{F}$ les plus intéressantes ; en ce qui concerne les réseaux plans apparait la présence de couples de translations indépendantes qui traduisent la périodicité. Dans le cas de l'espace euclidien de dimension 3, ce sont les polyèdres réguliers et les réseaux de dimension 3 qui vont fournir, toujours du même point de vue les configurations intéressantes. Même dans le cas planaire la situation n'est pas simple : ainsi il y a 17 groupes possibles d'isométries du plan laissant invariants des réseaux possibles, et ce n'est qu'en 1890 (cf [7]) que ce résultat fut démontré.

c) Le problème méthodologique qui se pose pour déterminer le groupe $G(\mathcal{F})$ d'une configuration $\mathcal{F}$ est le suivant : en examinant les permutations d'ordre 2 sur $\mathcal{F}$ on trouve assez facilement un sous-ensemble S de $G(\mathcal{F})$ constitué par des réflexions, et il s'agit de s'assurer que S' engendre $G(\mathcal{F})$. La vérification, dite "méthode des points fixes successifs" s'appuie d'une part sur le fait que si une isométrie laisse fixes les points d'un repère affine de l'espace, c'est nécessairement l'identité, et d'autre part sur le fait qu'une réflexions laisse "beaucoup" de points fixes. Il s'agit de montrer que tout élément g de $G(\mathcal{F})$ peut s'obtenir comme produit (fini) d'éléments de S.

Soit $g \in G(\mathcal{F})$; sa réduction à $\mathcal{F}$ est une permutation sur $\mathcal{F}$, sur l'ensemble des côtés de $\mathcal{F}$, sur l'ensemble des faces de $\mathcal{F}$, etc. Supposons que pour aucun élément s de S, $g \circ s$ laisse des points de $\mathcal{F}$ fixes : alors S n'engendre pas $G(\mathcal{F})$ et il y a lieu d'"enrichir" S ; sinon soit $s_1 \in S$ tel que $g_1 = g \circ s_1$ laisse fixes k_1 points de $\mathcal{F}$ et soit $\mathcal{F}_1$ l'ensemble de ces k_1 points :

- ou bien $\mathcal{F}_1$ contient un repère affine, et alors g_1 est l'identité, de sorte que $g = s_1$;
- ou bien le sous-espace $[\mathcal{F}_1]$ engendré par $\mathcal{F}_1$ est de dimension strictement plus petite que celle de l'espace E ; on cherche alors $s_2 \in S$ tel que $g_1 \circ s_2$ laisse fixes les points de $\mathcal{F}_1$ et au moins un autre point de $\mathcal{F}$ n'appartenant pas à $[\mathcal{F}_1]$;
- ou bien cela n'est pas possible, et alors S n'engendre pas $G(\mathcal{F})$: il faut "enrichir" S ;
- ou bien cela est possible : soit $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des points fixes de $\mathcal{F}$ par $g_1 \circ s_2 = g \circ s_1 \circ s_2$, avec $\dim([\mathcal{F}_2]) > \dim([\mathcal{F}_1])$: alors ou bien $\dim([\mathcal{F}_2]) = \dim(E)$ et alors $g_2 = g_1 \circ s_2$ est l'identité, et $g = s_2 \circ s_1$, sinon on cherche $s_3 \in S$ tel que $g_3 = g_2 \circ s_3$ laisse fixes les points de $\mathcal{F}_2$ et au moins un autre point n'appartenant pas à $([\mathcal{F}_2]$, etc.

Il est clair que si S est un système de générateurs de $G(\mathcal{F})$, comme à chaque opération le sous-espace $[\mathcal{F}_i]$ des points fixes voit sa dimension augmenter strictement, au bout d'un nombre fini p d'opérations, on trouvera $s_1, s_2, \ldots, s_p$ éléments de S, tels que $g \circ s_1 \circ s_2 \ldots \circ s_{p-1} \cdot s_p$ soit l'identité, et alors $g = s_p \circ s_{p-1} \circ \ldots \circ s_2 \circ s_1$.

La maitrise de cette méthode est essentielle ; elle doit faire partie du bagage des savoir-faire d'un bachelier scientifique. Au niveau d'une classe de Seconde l'initiation à cette méthode peut être faite en prenant pour $\mathcal{F}$ un polygone régulier à 3-4-5-6-8-12 côtés, ou le réseau des points à coordonnées entières de R^2 .

Pour une étude approfondie des problèmes évoqués dans cette partie on pourra consulter :

[5] : § 2-5; § 2-7, § 4-1, § 4-2, § 4-5 et § 4-6 ;

[1] : page 17 ;

[7] : pp. : 345-390 ;

[11] : pp. 278-298 ;

[8] chap II, § 8-9-10-11-12-13-14.

VII - SYMETRIES ORTHOGONALES D'UNE COURBE OU D'UNE SURFACE

Pour déterminer les symétries d'une configuration $\mathcal{F}$, il suffit de connaître $G(\mathcal{F})$: on obtient toutes les symétries orthogonales en recensant les éléments d'ordre 2 de $G(\mathcal{F})$.

Un problème particulier se pose lorsque $\mathcal{F}$ est une courbe ou une surface donnée par des équations ; la résolution de ce problème, lorsqu'il ne conduit pas à des calculs compliqués permet une économie substantielle pour l'étude de $\mathcal{F}$; supposons en effet que $G(\mathcal{F})$ soit engendré par un système $S = \{s_{H_1}, s_{H_2}, \dots, s_{H_p}\}$ de réflexions ; il suffira de connaître les parties $\mathcal{F} \cap H_i$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_A$ pour un $A \subset \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_A \neq \emptyset$ pour connaître ou reconstituer $\mathcal{F}$ intégralement via l'action de $G(\mathcal{F})$.

Dans le plan auclidien rapporté à un repère les axes de symétrie intéressants sont les axes du repère, les 2 bissectrices de ce repère, les droites passant par l'origine, les droites parallèles à un axe de coordonnées.

Dans l'espace euclidien de dimension 3, outre les plans de coordonnées sont intéressants les plans bissecteurs des dièdres coordonnés, les plans passant par un axe de coordonnées.

La méthode utilisée consiste à déterminer les hyperplans H tels que $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow s_H(M) \in \mathcal{F}$.

Il est intéressant par exemple de noter qu'une application $f : R \to R$ est involutive si et seulement si la courbe d'équation $y = f(x)$ admet la première bissectrice comme axe de symétrie : ainsi les hyperboles équilatères $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ admettent comme axe de symétrie la première bissectrice si et seulement si $a + d = 0$.

Rappelons pour mémoire la relation entre la parité d'une fonction et la symétrie de son graphe par rapport à Oy.

Un autre cas intéressant est le cas de courbes définies par une représentation polaire $\theta \to \rho(\theta)$.

Cette étude est également intéressante dans le cas des surfaces :

- ainsi la surface d'équation $z = f(x,y)$ admettra Oyz comme plan de symétrie si et seulement si $f(-x,y) = f(x,y)$ pour tout couple (x,y) ;
- ainsi la surface donnée par son équation cylindrique $z = \varphi(\rho,\theta)$ admet le plan passant par Oz d'équation $\theta = \theta_o$ si et seulement si pour tout couple (ρ,θ) on a $\varphi(\rho, 2\theta_o - \theta) = \varphi(\rho,\theta)$.

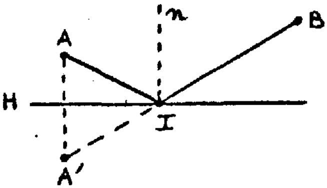
VIII - LES TRAJECTOIRES DE BILLARD OU DES RAYONS LUMINEUX

La physique théorique nous enseigne qu'une particule en l'absence de tout champ de force suit toujours le plus court chemin. Dans un espace euclidien le plus court chemin pour aller d'un point A à un point B, si aucun obstacle ne sépare A et B, est le segment $[A,B]$.

Lorsqu'un hyperplan H est un obstacle infranchissable pour une particule, et que le choc de la particule avec l'obstacle n'absorbe pas d'énergie et conserve la quantité de mouvement, la loi du chemin minimum reste valable : si A et B sont 2 points de la trajectoire et I le point d'impact de la particule contre l'obstacle :

- ou bien A et B sont tous deux soit en amont soit en aval du choc et alors la portion de trajectoire pour aller de A à B est le segment $[A,B]$;
- ou bien A est en aval du point d'impact et B en amont et la portion de trajectoire pour aller de A à B est la ligne polygonale de plus courte longueur AIB tel que $I \in H$, et I est le point d'impact.

Ainsi, une boule de billard, le photon d'un rayonnement électromagnétique en l'absence de tout champ obéissent à ces règles.



La méthode de recherche de lignes polygonales $AI_1I_2\ldots I_pB$ de plus courte longueur joignent 2 points A et B et telles que $\forall\, i = 1, 2, \ldots, p$, I_i appartient à un hyperplan H_i donné repose sur le point-clef suivant : soit H un hyperplan, A et B deux points de H^+, A' $A' = s_H(A)$; alors $A' \in H^-$, $[A, A'] \cap H = \{I\}$ se réduit à un point, et il est trivial d'établir que (AIB) est la plus courte ligne polygonale d'extrémités A et B telles que $I \in H$. En outre si In est la normale en I à H, $I_n^{\cdot}$ est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$.

Tous les problèmes de trajectoires de billes de billard, de triangle de lumière, etc. se ramène à une application, éventuellement itérée de ce résultat.

Pour un approfondissement de ces questions nous renvoyons à :

[5] : § 1-8 ;

[2] : § 9-4 .

La résolution de ce type de problèmes permet à la fois de résoudre d'intéressants problèmes de géométrie (les triangles de lumière) et à une application évidente à la mécanique et à l'optique (lois de la réflexion) ce qui est susceptible de motiver fortement les élèves.

CONCLUSION

Nous avons essayé de justifier sur le plan théorique la place qu'il y a lieu d'accorder au thème des réflexions, en nous appuyant sur les points-clefs développés dans la partie § II, et de donner les axes de problèmes qui, à notre avis (justifie en § III), sont susceptibles de fournir des directions d'activités justifiées au plan scientifique, et motivantes pour les élèves. Il reste à proposer effectivement de telles activités ; le groupe de recherche sur l'enseignement de la géométrie de l'IREM de Marseille compte parmi ses objectifs celui de s'employer à cette tâche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] - W. BARLOW, Philosophical Magazine (6), (1901).

[2] - M. BERGER, Géométries, t. I et t. II, Nathan-Cedic (1977).

[3] - M. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chap. 4-5-6, Hermann (1968).

[4] - D. BREWSTER, A treatise on the kaleidoscope, Constable, Edinbourg (1819).

[5] - H.S.M. COXETER, Introduction to geometry, S^{d} edition, John Wiley & Sons Inc (1969).

[6] - H.S.M. COXETER, W.O.J. MOSER, Generators and relations for discrete groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgbrete, 14), *Springer-Berlin* (1965).

[7] - E.S. FEDOROV, Zapiski Imperatorskogo St Petersbourgskogo Mineralogicheskigo obskchestra (2) (1891).

[8] - D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN, Geometry and the imagination, Chelsea Publishing company, New-York (1957).

[9] - J. MARION, Essai sur la géométrie, Publ. IREM de Marseille, (1979).

[10] - J. MARION, Quelques prolongements de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Bulletin Information Mathématique n° 13, IREM de Marseille (1979).

[11] - G. POLYA, P. NIGGLI, Zeitschrift für Kristallographie und *Mineralogie, vol. n° 60* (1924).

[12] - W. TORBRÜGGE, L'Europe Préhistorique, Ed. Rencontre, l'art du monde, (1970).

[13] - H. WEYL, Symmetry, Princeton University Press, Princeton, (1952).

INFORMATION

BROCHURES RECUES A LA BIBLIOTHEQUE DE L'IREM

depuis la rentrée de septembre 1979.

à consulter à la bibliothèque de l'IREM d'Aix-Marseille, ou à demander directement à l'IREM éditeur :

★ EXERCICES POUR LA QUATRIEME, Algèbre Géométrie (44 p.)
IREM de Dijon, septembre 1979

★ GEOMETRIE 4ème, 3ème, Programme 1979 (114 p.)
IREM de Brest, octobre 1979

★ MEDIATRICE-SYMETRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE - 4ème (25 p.)
CALCUL DANS - 4ème (27 p.)
REPERAGE - 4ème (10 p.)
IREM de Clermont-Ferrand, juin 1979

★ DES APPLICATIONS DE LA PROPORTIONNALITE en 6e et 5e (61 p.)
IREM de Nantes, Nanta Iremica n° 23

★ GEOMETRIE EN QUATRIEME (20 p.)
IREM de Montpellier, 1979

★ ARITHMETIQUE EN CINQUIEME (88 p.)
IREM de Grenoble, novembre 1979

★ ACTIVITES MATHEMATIQUES EN 4ème - 3ème, tome 1 (248 p.)
Brochure APMEP 1979
(en vente à l'APMEP).

★ LA COORDINATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES entre le cours moyen 2e année et la classe de sixième (103 p.)
Brochure "Recherches Pédagogiques" n° 102, INRP 1979
(en vente au C.R.D.P. de Marseille).

TABLE TRACANTE et géométrie dans le second cycle (70 p.)
IREM de PARIS NORD - 4ème trimestre 1979

Bulletin de liaison des Professeurs de Mathématiques
Spécial vectoriel (47 p.)
Association Universitaire pour le Développement de l'Enseignement et la Culture en Afrique et à Madagascar. octobre 1979

SPECIAL MICROPROCESSEURS (37 p.)
IREM de PARIS-SUD - novembre 1979

Quelques thèmes d'activités mathématiques en second ncycle (50 p.)
IREM de RENNES - décembre 1979

La notion de mesure à l'école élémentaire (22 p.)
IREM de ROUEN - année scolaire 78-79

Activités interdisciplinaires en 2nde AB : "Enquête sur le travail saisonnier des lycéens pendant les vacances d'été" (120 p.)
IREM de RENNES et INRP - janvier 1980

Sur un thème de carrés magiques (84 p.)
IREM de STRASBOURG

Temps et températures(groupe Pédagogie par objectifs) (25 p.)
IREM de PARIS-NORD année 1978-79

Eléments d'analyse fonctionnelle (J. G. Dhombres) 252 p.)
IREM de NANTES (Nanta Iremica n° 7)

Méthodes mathématiques modernes utilisées en théorie de l'approximation (J.G. Dhombres) (205 p.)
IREM de NANTES (Nanta Iremica n° 11)

Algorithmique et mathématique - Une utilisation systématique de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques en 4e (171 p.)
INRP - IREM de Lorraine - 3ème trimestre 1979

Utilisation du rétroprojecteur dans le premier cycle
Electricité et magnétisme en classe de 5ème (25 p.)
IREM de NICE

INFORMATION

DEUX ETUDES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

(Mémoires présentés le 23 novembre 1979 devant le jury du D. E. A. de Didactique des Mathématiques, Aix-Marseille-Bordeaux)

(à consulter à la bibliothèque de l'IREM)

LE PASSAGE DES EQUATIONS NUMERIQUES AUX EQUATIONS PARAMETRIQUES EN CLASSE DE SECONDE - 144 pages

(par Odile SCHNEIDER)

PRESENTATION

INTRODUCTION

CHAPITRE I - UN POINT DE DIFFICULTE DU "PROGRAMME" DE 2e

1. Le sentiment des professeurs
2. Présentation de l'objet d'enseignement
3. Le comportement des élèves

CHAPITRE II - UN COMPLEXE DE CONTRADICTIONS

1. Un symptôme : le désaccord entre les instructions officielles et les pratiques réelles
2. Contradictions

CHAPITRE III - LE BLOCAGE : I LA POSITION DU PROFESSEUR

1. Le fonctionnement élargi de la contradiction fondamentale
2. Les "bénéfices secondaires" du blocage
3. Où l'ancien opprime le nouveau

CHAPITRE IV - LE BLOCAGE : II. LA POSITION DE L'ELEVE

1. Du côté de l'élève
2. L'algorithmisation et l'évanouissement du problème
3. Algorithmes de calcul, lecture ostensive et rupture de contrat
4. Ostension et lecture ostensive

RESUME

ANNEXES

Annexe 1 : Questionnaire et Analyse de réponses

Annexe 2 : Leibniz et le mot "de paramètre"

Annexe 3 : Statut et fonction du concept de paramètre.

INDEX

LE MONDE CLOS DE LA FACTORISATION AU PREMIER CYCLE

100 pages (par Jacques TONNELLE)

PRESENTATION

INTRODUCTION

CHAPITRE I - LES SITUATIONS DE FACTORISATION AU 1er CYCLE

11. Les étapes de la factorisation au 1er cycle
12. Mise en oeuvre officielle
13. Les premières factorisations abordées en 4e
14. L'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
15. Conclusion

CHAPITRE II - COMMENT LA STRUCTURE DES SITUATIONS DEFINIT LE COMPORTEMENT DE L'ELEVE

21. Le système d'enseignement engendre un double discours
22. Que devient le problème mathématique dans les situations standard
23. Les conditions d'apprentissage du code implicite
24. Situations et erreurs
25. Conclusion

CHAPITRE III - DESTABILISATION ET CONDITIONS DE STABILITE DES SITUATIONS DE MISE EN OEUVRE DE L'IDENTITE $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

31. Transposition et transaction didactiques
32. Un pas de côté
33. Le cas Nathalie, une alternative
34. Le schème standard et la notion de polynôme

CHAPITRE IV - MODELE D'ACTION ET SCHEMES D'ERREURS : UN MONDE CLOS ET FRAGILE

41. Vers un modèle de comportement
42. Erreurs en situation non-standard
43. Le cas standard : le problème de la complexité
44. La factorisation au Premier Cycle : un monde clos et fragile

RESUME

ANNEXES :

Annexe 1 : Les commentaires des programmes de Quatrième et Troisième

Annexe 2 : Circulaire ministérielle n° 73.087 du 19.2.1973

Annexe 3 : Les produits remarquables dans un manuel de Quatrième

Annexe 4 : A propos de la didactique ostensive : un extrait de manuel de 4e

Annexe 5 : *Monôme et fonctions monômes : l'introduction "informatique"*

BIBLIOGRAPHIE

INDEX

14

I.R.E.M.
Institut de recherche sur
l'enseignement des mathématiques

70,route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE cedex 2

tél. 41.39.40. - 41.01.40.